UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Juliana de Paula Ferraz do Amaral

REPRESENTAÇÃO DE DILEMAS MORAIS EM LÓGICA DEÔNTICA

Florianópolis

2012

Juliana de Paula Ferraz do Amaral

REPRESENTAÇÃO DE DILEMAS MORAIS EM LÓGICA DEÔNTICA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Darlei Dall'Agnol

Florianópolis

2012

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

Amaral, Juliana de Paula Ferraz do
Representação de dilemas morais em lógica deôntica [dissertação] / Juliana de Paula Ferraz do Amaral ; orientador, Darlei Dall'Agnol - Florianópolis, SC, 2012.
89 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas. Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Inclui referências

1. Filosofia. 2. Lógica Deôntica. 3. Dilemas morais. 4. Lógica bimodal. I. Dall'Agnol, Darlei. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

Folha das assinaturas

Para Cezar e Kauê

AGRADECIMENTOS

Ao fim de dois anos e meio de pesquisa, percebo que nunca estive sozinha. Mesmo quando me trancava em algum lugar silencioso para ler ou escrever, estava rodeada por pessoas que estavam justamente cuidando para que eu tivesse a tranquilidade necessária para desenvolver esta pesquisa; assim, aproveito esse espaço para expressar a minha gratidão.

Aos meus colegas de graduação: Lênio, Fabíola, Suelen e Pedro pela amizade que construímos.

Aos colegas do SAPE — Seminário de Aprofundamento em Pesquisas Éticas — em especial à Daiane pelo apoio, discussão e esforços para me entender quando eu explicava usando símbolos lógicos. Fui uma lógica em meio a éticos, mas nunca uma estranha no ninho.

Ao Darlei Dall'Agnol, meu orientador, por ter me incentivado, ainda na graduação, a buscar meu caminho lógico; depois ter me acolhido novamente no mestrado; durante todo o processo ter me incentivado e me deixado à vontade para buscar minhas intuições e, principalmente, por ter dito "Vamos defender agora!".

Aos membros da banca de qualificação, Antonio Mariano Nogueira e Milene Consenso Tonetto, pelos comentários que nortearam a conclusão desta dissertação e, antecipadamente, aos membros da banca de defesa por terem aceitado ler o trabalho em tempo recorde.

Ao meu filho querido, Kauê, pela compreensão e pelo apoio. Por ter entendido e aceitado os vários momentos que eu escolhi escrever ao invés de brincar ou passear.

E, finalmente, e em especial, ao meu marido, Cezar, pelo estímulo intelectual e seu amor que me trouxe a tranquilidade emocional necessária para o desenvolvimento do trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe uma busca para o desenvolvimento de uma lógica deôntica mais adequada e mais fiel à linguagem ordinária. Nosso ponto central foi a análise e compreensão acerca do que é um dilema moral e o seu correspondente formal. Uma situação é considerada um dilema moral quando um sujeito deve moralmente fazer A e deve moralmente fazer B, mas não pode fazer ambas. Chegamos à conclusão, durante nossas investigações, de que quando dizemos que um sujeito não pode cumprir ambas obrigações, a impossibilidade envolvida em um dilema não é lógica, mas apenas circunstancial. Em outras palavras, as obrigações A e B não são contraditórias, mas conflitantes devido a uma característica contingente da situação. Nossa proposta é a de que dilemas podem ser traduzidos pela fórmula $(Op \wedge Oq) \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$. A formalização de dilemas em uma lógica, na maneira como estamos interpretando, envolve operadores deônticos e aléticos. Para que o dilema pudesse ser representado desta maneira, apresentamos um sistema bimodal não normal, o qual chamamos de EMD-S4 e demonstramos teoremas de correção, completude e decidibilidade.

Palavras-chave: Lógica Deôntica. Dilemas morais. Sistema bimodal não normal.

ABSTRACT

This paper seeks to develop a deontic logic more appropriate and faithful to ordinary language. Our focus was the analysis and understanding of what is a moral dilemma and its formal correspondent. A situation is considered a moral dilemma when a subject should morally do A and should morally do B, but cannot do both. We concluded, during our investigation, that when we say that a subject can not fulfill both obligations, the impossibility involved in a dilemma is not logical, but only circumstantial. In other words, the obligations A and B are not contradictory, but conflict due to a contingent feature of the situation. Our proposal is that dilemmas can be translated by the formula $(Op \wedge Oq) \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$. According to our way, the formalization of dilemmas in logic involves deontic and alethic operators. In order to represent a dilemma in this way, we present a non normal bimodal system, which we called EMD-S4, and prove for it soundness, completeness and decidability theorems.

Keywords: Deontic Logic. Moral Dilemmas. Non normal bimodal system.

NOTAÇÕES E ABREVIATURAS

$p, q, r \ldots$	variáveis proposicionais
$\alpha, \beta, \gamma \ldots$	fórmulas da linguagem
$\neg$	negação – não, é falso que, não é verdade que
$\wedge$	conjunção – e, também, mas
$\vee$	disjunção – ou, ou … ou …
$\rightarrow$	implicação (condicional) – se … então
$\leftrightarrow$	bi-implicação (bicondicional) – se e somente se, equivalência
$\Box$	necessidade, necessariamente
$\Diamond$	possibilidade, possivelmente
O	obrigatoriedade, obrigatoriamente
P	permitido, permissão
$\{\ \}$	conjunto
$\emptyset$	conjunto vazio
$-$	complemento de um conjunto
$\subseteq$	subconjunto
$\cap$	intersecção de conjuntos
$\cup$	união de conjuntos
$\mathcal{P}$	conjunto potência
$=$	identidade
$\{x : \ldots\ x\}$	o conjunto dos xs que são …
$\langle\ \rangle$	sequência (par ordenado)
$\in$	pertinência a conjunto
sse	se e somente se
$\vdash$	consequência sintática
$\models$	consequência semântica
$\geq$	maior ou igual a
$\|\|x\|\|$	conjunto verdade de x
$\|x\|$	conjunto prova de x
$\equiv$	relação de equivalência
$[\ ]$	classes de equivalência

Usaremos, ainda, como é costumeiro, o símbolo ‘$\Box$’ na margem direita da página para indicar o final de uma demonstração.

SUMÁRIO

Notações e abreviaturas 13
Introdução 17
1 LÓGICA DEÔNTICA: DESENVOLVIMENTO E LIMITAÇÕES 21
1.1 O SURGIMENTO DAS LÓGICAS DEÔNTICAS 21
1.2 SEMÂNTICA DE MUNDOS POSSÍVEIS 26
1.3 SISTEMAS MODAIS ALÉTICOS 29
1.4 LÓGICA DEÔNTICA STANDARD 31
1.5 ANÁLISE E CRÍTICAS À LDS 36
2 DILEMAS MORAIS: CONTRADIÇÕES OU CONFLITOS? . . . 43
2.1 DILEMAS MORAIS 44
2.2 ANÁLISE FORMAL DE (T1*) 45
2.3 REPRESENTAÇÃO DE DILEMAS COMO CONFLITOS 48
2.4 OBRIGAÇÕES X PROIBIÇÕES 50
2.5 MUNDOS POSSÍVEIS E A ÉTICA 57
3 O SISTEMA EMD-S4: UMA LÓGICA DEÔNTICA BIMODAL 61
3.1 EMD-S4 62
3.2 AXIOMATIZAÇÃO 63
3.3 SEMÂNTICA E CORREÇÃO 66
3.4 COMPLETUDE 70
3.5 DECIDIBILIDADE 76
Conclusão 83
Bibliografia 87

INTRODUÇÃO

Esta dissertação envolve duas áreas da filosofia: lógica e ética. Nossa motivação surge na lógica, mas buscamos as justificativas para nossas intuições na ética.

Acreditamos que um dos papéis da lógica seja traduzir o que é dito em linguagem natural, de modo a eliminar ambiguidades e tornar mais claros os argumentos envolvidos. Em linguagem natural, nem sempre é fácil analisar as linhas de argumentação de modo a verificar a validade, ou não, da conclusão. Já a linguagem formal nos fornece mecanismos que facilitam a análise.

Os sistemas de lógica deôntica surgem para fazer uma aproximação entre os discursos normativos e a linguagem formal. Na linguagem natural usamos, principalmente, as palavras *obrigação*, *proibição*, *permissão* para construir sentenças que expressem normas. Para que essas noções normativas pudessem ser expressas em uma linguagem formal, tomou-se um sistema de base, como, por exemplo, o *Cálculo Proposicional Clássico*, e acrescentou-se novos operadores – os operadores deônticos. Uma lógica deôntica é, portanto, um sistema formal que permite a tradução de sentenças normativas através do uso de operadores, usualmente O, P e F, que representam, respectivamente: *é obrigatório que*, *é permitido que* e *é proibido que*.

O primeiro sistema deôntico foi desenvolvido por Ernest Mally em 1926 e foi baseado no *Cálculo Proposicional Clássico*. Este sistema não foi satisfatório, mas abriu espaço para que outros estudiosos pensassem a respeito. Em 1951, G. H. von Wright publica o primeiro sistema considerado viável. O trabalho de von Wright teve inspiração nos sistemas modais de C. I. Lewis, cujo desenvolvimento começou em 1918. As pesquisas envolvendo lógica deôntica se estendem até os dias atuais, pois não parece ainda haver nenhum sistema que capture as noções normativas que são expressas em linguagem natural. Muitas vezes os sistemas são rejeitados ou reformulados, seja porque o sistema não consegue traduzir certas noções, seja porque no sistema aparecem fórmulas que não correspondem ao que é costumeiramente aceito e dito em linguagem natural.

Além dos sistemas deônticos que tem como base o *Cálculo Proposicional Clássico*, há sistemas alternativos, baseados em lógicas paraconsistentes. A motivação para a construção de um sistema deôntico paraconsistente surge da interpretação de que em sistemas normativos podemos encontrar contradições entre obrigações. Tais situações ocorreriam quando o agente moral enfrenta um dilema.

A motivação para este trabalho nasce justamente da leitura de textos sobre lógicas deônticas paraconsistentes. Alguns destes sistemas, por exemplo, Cruz (2005), são desenvolvidos por se acreditar que dilemas morais levem agentes a ações contraditórias. Em outras palavras, acredita-se que, em um dilema moral, um agente deve fazer uma ação p e deve, ao mesmo tempo, fazer a negação de p. Em linguagem formal, a representação para dilemas é dada pela fórmula $Op \wedge O\neg p$. Tanto em Cruz (2005), quanto em Puga (1984), aceita-se que esta seja a representação correta para dilemas, mas pouco se discute a respeito do que deveríamos entender por um dilema. Para nós, essa formalização não parece se aplicar a dilemas morais.

Informalmente, dizemos que um dilema é uma situação na qual um agente está diante de duas escolhas, mas pode apenas optar por uma delas. Em um dilema moral, essas escolhas envolvem obrigações, tais como dizer a verdade, manter a promessa, respeitar a autonomia do paciente etc. De acordo com a formalização acima apresentada, um dilema seria traduzido por uma situação na qual o agente deve, por exemplo, dizer a verdade, ao mesmo tempo em que o agente deve não dizer a verdade (ou seja, o agente deve mentir).

Nossa inquietação nasce dessa suposição de que a mentira poderia vir a ser uma obrigação, no sentido moral, quando um agente está enfrentando uma situação dilemática. De acordo com a formalização acima, qualquer ação normalmente considerada errada poderia tornar-se uma obrigação quando o agente está em um dilema. Se considerássemos os dilemas como genuínos, dizer a verdade ou mentir teriam o mesmo valor. Em outras palavras, agir de forma moral ou agir de modo imoral não faria diferença. Para nós isso não faz sentido e nesta dissertação expomos nossa argumentação em defesa do que pensamos.

Além da crítica à formalização descrita acima, apresentamos uma proposta de formalização que chamamos de (DM). Um dilema pode ser representado por uma situação tal que $Op \wedge Oq \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$. Em linguagem natural, um dilema é uma situação na qual o agente deve executar uma ação p e deve executar uma ação q, mas não é possível executar p e q. Por exemplo, o agente deve dizer a verdade e deve cumprir a promessa; contudo, por alguma razão, não é possível dizer a verdade e manter a promessa.

Se um dos objetivos da lógica é o de auxiliar no desenvolvimento argumentativo e sendo a lógica deôntica o correspondente formal da linguagem natural normativa, um sistema deôntico deve ser capaz de traduzir noções normativas existentes nos discursos éticos. Certos argumentos aceitos pela comunidade moral devem continuar sendo válidos quando formalizados. E, se não são aceitos, devem ser de alguma maneira invalidados quando se faz o uso da linguagem formal. Ao pensarmos em dilemas, devemos ter em mente o que eles representam no uso ordinário da linguagem. Uma formalização inadequada pode levar agentes morais a conclusões que não deveriam se seguir.

Acreditamos que não haja um único sistema deôntico adequado, devido à complexidade da ética e dos discursos normativos. Entretanto, há alguns sistemas que estamos considerando inadequados, por permitirem que sujeitos cheguem a certas conclusões a respeito de como agir, baseados em um sistema deôntico, e que essas conclusões não correspondem ao que entendemos por agir moralmente.

Nosso principal objetivo é o de contribuir com uma formalização adequada para dilemas morais. Além disso, buscamos apresentar um sistema deôntico minimal. Este sistema não é completo, pois ele não é capaz de capturar tudo aquilo que desejamos expressar quando pensamos em normas, mas representa nosso primeiro passo.

O trabalho foi desenvolvido em três capítulos. No capítulo um, apresentamos brevemente a história da lógica deôntica, focando principalmente na *lógica deôntica standard (LDS)*. O objetivo, neste primeiro capítulo, é deixar o leitor à vontade em relação à linguagem formal adotada e, ao mesmo tempo, apresentar algumas críticas à LDS. Com o objetivo final de construir um sistema deôntico mais adequado, analisamos a correspondência de certos axiomas e regras de inferência presentes na LDS com a linguagem natural; aqueles teoremas que não correspondem às nossas intuições normativas são descartados. Deixamos em suspenso a análise do teorema $\neg(Op \wedge O\neg p)$, pois este é justamente a negação da proposta de formalização para dilemas encontrada em Puga (1984) e Cruz (2005). Ainda no capítulo um, optamos por apresentar, de forma breve, alguns sistemas modais aléticos, já que a LDS foi baseada em um destes sistemas — o sistema D. Além disso, o sistema que apresentamos nos capítulo três envolve operadores aléticos e deônticos.

No capítulo dois, damos atenção à proposta de formalização de dilemas como contradições, bem como apresentamos a nossa proposta de representar dilemas como conflitos. Buscamos invalidar a primeira ideia de formalização e a estratégia adotada é mostrar que se p é uma obrigação, então $\neg p$ não poderá ser uma obrigação no sentido moral. Argumentamos que $O\neg p$ não se segue de nenhum teorema ou regra e argumentamos, também, que $O\neg p$ não se segue de nenhum sistema normativo.

O capítulo três é a parte formal do presente trabalho, onde apresentamos um sistema deôntico, o qual chamamos de EMD-S4. Este sistema combina um sistema deôntico não normal com o sistema alético S4 e tem como base a lógica proposicional clássica. Nesse capítulo, apresentamos a linguagem, axiomas, definições semânticas, teoremas de correção, completude e decidibilidade. Nesse sistema EMD-S4 podemos formalizar dilemas morais do modo como estamos interpretando, mas ao construirmos encontramos um problema para o qual deixamos a solução para um projeto futuro.

1 LÓGICA DEÔNTICA: DESENVOLVIMENTO E LIMITAÇÕES

A lógica deôntica tem como objetivo o estudo e a formalização de expressões normativas da linguagem. O termo 'deôntico' vem do grego *déon* (o que é preciso), *déontos* (como deve ser), *déomai* (ter necessidade de, dever). Na linguagem natural, as expressões normativas são formadas, essencialmente, pelas palavras *obrigatório*, *permitido* e *proibido*. Uma lógica deôntica é construída a partir de um sistema de base, como, por exemplo, o *cálculo proposicional clássico*, através da introdução de novos operadores. Com esses operadores, pode-se representar *obrigações*, *permissões* ou *proibições*.

Neste capítulo, vamos expor brevemente a história da lógica deôntica, partindo de seu surgimento até a construção da *lógica deôntica standard* (LDS). Este sistema, assim como o sistema de von Wright que também será mencionado, foi baseado em uma lógica modal alética e por esta razão abordaremos, também, alguns sistemas modais aléticos. Após a apresentação da LDS, analisaremos alguns dos teoremas do sistema, bem como algumas críticas feitas aos teoremas e regras. Acreditamos que, para se chegar a um sistema deôntico adequado, devemos levar em consideração questões formais (correção, completude) e também questões informais (adequação à linguagem ordinária). O que pretendemos com a análise da LDS é rever a correspondência de seus teoremas com o que é costumeiramente aceito e dito em linguagem natural normativa e desejável em uma ética. Através desta investigação faremos uma primeira filtragem eliminando aqueles teoremas e/ou regras de inferência que não correspondem às nossas intuições normativas.

1.1 O SURGIMENTO DAS LÓGICAS DEÔNTICAS

O primeiro sistema de lógica deôntica foi apresentado por Ernst Mally em 1926, no livro *The Basic Laws of Ought: Elements of the Logic of Willing*. O sistema deôntico de Mally foi desenvolvido com base no *cálculo proposicional clássico* tal como formulado nos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead. Mally acrescentou novos operadores ao cálculo clássico: o operador unário !, os operadores binários f e ∞, e as constantes sentenciais $\cap$ e $\cup$. Sendo p, q e r proposições quaisquer, podemos ler as fórmulas abaixo do seguinte modo:

$!\,p$: 'p deve ser o caso',
$p \text{ f } q$: 'p exige q',
$p \infty q$: 'p e q exigem um ao outro' (necessitam um do outro),
$\cup$: 'o incondicionalmente obrigatório',
$\cap$: 'o incondicionalmente proibido'.

Mally apresentou seu sistema axiomaticamente; contudo, em 1939, Karl Menger apontou problemas no sistema, mostrando que $p \leftrightarrow\, !\,p$ é um teorema, algo que Mally não havia notado. Sendo o operador $\leftrightarrow$ e os demais operadores clássicos interpretados de modo usual, temos que $p \leftrightarrow\, !\,p$ não corresponde à linguagem normativa ordinária, pois estaríamos afirmando que, se p é o caso, então p é obrigatória e, se p deve ser o caso, então p é de fato o caso. Além disso, se vale $p \leftrightarrow\, !\,p$, o operador ! torna-se supérfluo, uma vez que ele poderia ser eliminado e introduzido em qualquer fórmula. Já que p e $!\,p$ são equivalentes, em qualquer fórmula em que p ocorre, p poderia ser substituído por $!\,p$ e vice-versa.

O sistema de Mally, tal como foi concebido, falha na interpretação intuitiva que temos da linguagem normativa, mas funcionou como um primeiro passo na busca por um sistema deôntico.

Publicações de outros autores surgiram, como "On the Logic of Imperatives", de Albert Hofstadter e J. C. C. McKinsey, porém nenhum desses sistemas ainda eram satisfatórios por repetirem alguns dos erros de Mally. Só em 1951, G. H. von Wright publica o artigo "Deontic Logic", apresentando o primeiro sistema deôntico viável. O sistema de von Wright foi inspirado em um tipo de lógica modal já existente — a lógica modal alética.

Uma lógica modal é uma extensão da lógica clássica;[1] sendo assim, preserva os princípios encontrados nela, mas acrescenta novos operadores à sua linguagem. O que é válido na lógica clássica também é válido nessa lógica que a estende. Naturalmente, o sistema contém ainda outras fórmulas válidas, as que envolvem os operadores que foram introduzidos. C. I. Lewis formulou o primeiro sistema de lógica modal em 1918. Foram acrescentados à lógica clássica os operadores $\Box$ e $\Diamond$ para representar, respectivamente, *necessidade* e *possibilidade*. Esse tipo de lógica modal é conhecida como 'lógica modal alética', por representar modos de verdade de uma proposição. Uma proposição pode ser *contingentemente verdadeira* ou *necessariamente verdadeira*, *contingentemente falsa* ou *necessariamente falsa* (neste último caso, dizemos que ela é *impossível*). Assim, se afirmamos que 'Dilma é a presidente do Brasil', a verdade dessa proposição é contingente, ou seja, poderíamos conceber uma situação em que Dilma não tivesse sido eleita ou nem mesmo

[1]Usualmente, lógicas modais estendem a lógica clássica. Entretanto, existem sistemas modais alternativos à lógica clássica, como, por exemplo, lógicas modais baseadas em sistemas paraconsistentes.

sido candidata. Já '$2+2=4$' é considerada uma proposição necessariamente verdadeira, pois sua verdade independe do estado do mundo, independe de como as coisas são ou poderiam ser. Dispondo dos operadores $\Box$ e $\Diamond$, podemos representar necessidade e possibilidade e, também, definir a noção de *contingência*: uma proposição contingente é aquela que é possível, mas não necessariamente verdadeira.

Para a discussão que se segue, utilizaremos a seguinte linguagem proposicional:

1) Um conjunto (enumerável) de variáveis proposicionais (para as quais usaremos, informalmente, 'p', 'q', 'r' etc., representando proposições quaisquer).

2) Um conjunto OP de operadores:

    (i) '$\neg$' é o operador de negação – não, é falso que, não é verdade que;
    (ii) '$\wedge$' é o operador de conjunção – e, também, mas;
    (iii) '$\vee$' é o operador de disjunção – ou, ou ... ou ... ;
    (iv) '$\rightarrow$' é o operador de implicação (condicional) – se ... então;
    (v) '$\leftrightarrow$' é o operador de bi-implicação (bicondicional) – se e somente se;
    (vi) '$\Box$' é o operador de necessidade;
    (vii) '$\Diamond$' é o operador de possibilidade.

3) Sinais de pontuação: '(' e ')'.

Definição 1. (Fórmulas)

1) Variáveis proposicionais são fórmulas;

2) se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ são fórmulas;

3) nada mais é uma fórmula.

Sendo p uma proposição qualquer, podemos ler os operadores modais como segue:

$\Box p$: é necessário que p,
necessariamente p,
tem que ser o caso que p.

$\Diamond p$: é possível que p,
possivelmente p,
pode ser o caso que p.

Podemos também tomar um dos operadores como primitivo e o outro como definido, já que, por exemplo, p é necessária se e somente se sua negação não é possível.[2] Assim, temos:

$$\Box p =_{\mathrm{df}} \neg\Diamond\neg p,$$
$$\Diamond p =_{\mathrm{df}} \neg\Box\neg p.$$

G. H. von Wright (1951) percebeu uma analogia entre *necessidade/possibilidade* e *obrigação/permissão*. A relação que se dava entre a primeira e a segunda era a mesma entre a terceira e a quarta. Por exemplo, p é permitida se e somente se sua negação não é obrigatória — e p é obrigatória se e somente se sua negação não é permitida. Assim, a estratégia de von Wright foi interpretar os operadores $\Box$ e $\Diamond$ não como *necessidade* e *possibilidade*, mas como *obrigação* e *permissão*: onde tínhamos *necessário* passamos a ter *obrigatório* e onde tínhamos *possível* passamos a ter *permitido*. Hoje em dia, porém, o usual é substituir $\Box$ e $\Diamond$ pelas letras maiúsculas O e P, respectivamente, que têm as seguintes leituras informais:

Op: é obrigatório que p,
obrigatoriamente p,
deve-se executar p.
Pp: é permitido p,
pode-se executar p.

No sistema de von Wright (1951), contudo, as variáveis são nomes de atos e não de proposições, como em um sistema modal alético. Estes atos representam ações gerais: no exemplo ‘matar’ temos aí uma ação geral; no entanto, em ‘matar João’ temos uma ação específica. O operador O, ao ser ligado a p, produz Op, que é lida como: ‘o ato p é obrigatório’ — isto é o que von Wright toma como uma proposição. Os operadores deônticos só poderiam ser ligados a nomes de atos; portanto, fórmulas do tipo OOp não são bem formadas, já que Op representa uma proposição e não um ato. Os operadores poderiam ser ligados também a composições de atos; um exemplo é a conjunções de dois ou mais nomes de atos.

Assim, há algumas divergências em relação à interpretação que deve ser dada às variáveis p, q ou r. Entretanto, o usual é interpretá-las como sentenças declarativas da forma “O agente S executa uma ação A”. No exemplo: “João diz a verdade”, quando ligada ao operador deôntico O, temos a seguinte leitura informal: “É obrigatório que João (um agente qualquer) diga a

[2] Chamamos de operador primitivo aquele que é apresentado na linguagem original do sistema. Um operador dito definido é aquele cujo significado é dado a partir de um operador primitivo. Seja # um operador definido a partir de um operador unário $*$ do seguinte modo: $\#\alpha =_{\mathrm{df}} \neg{*}\neg\alpha$. Dizemos que $\#\alpha$ não é uma fórmula da linguagem, mas uma abreviação para $\neg{*}\neg\alpha$.

verdade". As sentenças deônticas são declarativas e não imperativas, como se poderia pensar, porque descrevem o que é considerado proibido, permitido ou obrigatório em algum sistema normativo.

Introduzidos esses operadores, as equivalências aléticas anteriormente mencionadas podem, então, ser reescritas da seguinte maneira:

$$Op =_{\text{df}} \neg P \neg p,$$
$$Pp =_{\text{df}} \neg O \neg p.$$

Isto indica que à semelhança das modalidades aléticas, os operadores deônticos podem ser definidos um a partir do outro. (Von Wright [1951], a propósito, toma o operador P como primitivo e o operador O como definido.)

Com os operadores acima, podemos representar outras noções deônticas. Podemos, por exemplo, definir um operador F ('é proibido que') para representar proibições. Fp é equivalente a $O\neg p$ ou, então, equivalente a $\neg Pp$. E para situações onde a ação seja indiferente do ponto de vista moral, ou seja, o agente pode executar, ou não, a ação, escreve-se $Pp \vee P\neg p$.

O sistema apresentado por von Wright possui os seguintes axiomas:

1. $Op \leftrightarrow \neg P \neg p$ – definição da obrigação;
2. $Pp \vee P\neg p$ – o princípio da permissão[3];
3. $P(p \vee q) \leftrightarrow Pp \vee Pq$ – o princípio da distribuição deôntica.

E, além das regras de inferência da lógica proposicional clássica, von Wright aceita ainda a regra a seguir:

4. de $\alpha \leftrightarrow \beta$ inferimos $P\alpha \leftrightarrow P\beta$.

Esse primeiro sistema desenvolvido por von Wright (1951) foi inspirado em um sistema alético, mas foi desenvolvido de forma independente. A razão disso é que nem tudo que é aceitável em um sistema modal alético poderá sê-lo em uma lógica deôntica. Por exemplo, em uma lógica alética é costumeiro aceitar-se o princípio $p \rightarrow \Diamond p$ (se p é verdadeira, então é possível). O correspondente deôntico seria $p \rightarrow Pp$ (se p é verdadeira, então é permitida). Porém, isso não corresponde às nossas intuições, já que ocorrem transgressões, isto é, há agentes que executam ações não permitidas. Von Wright rejeita essa fórmula. Além disso e dos axiomas acima apresentados, ele aceita ainda em seu sistema o que denominou "princípio de contingência deôntica", que diz que as fórmulas a seguir *não* devem ser válidas:

$$O(p \vee \neg p),$$

[3] Aqui não há uma distinção entre permitido e permissível. Mas vale lembrar que se p ou $\neg p$, qualquer uma das duas, for obrigatória, então apenas uma delas será permitida. A fórmula $Pp \vee P\neg p$ continuará sendo válida. Alguma vezes, Pp e $P\neg p$ serão ambas verdadeiras; outras vezes apenas uma, mas a disjunção permanece válida.

$$\neg P(p \wedge \neg p).$$

As duas fórmulas apresentadas acima também são intuitivas do ponto de vista alético (uma tautologia como $p \vee \neg p$ é necessária, e um contradição é impossível), mas não em uma interpretação deôntica para os operadores modais.

Tanto esse sistema, quanto os outros anteriores a ele foram apresentados de forma axiomática; entretanto, não possuíam uma semântica adequada. A interpretação dada às fórmulas foi através de uma tradução para a linguagem natural. Uma semântica adequada para sistemas modais só foi possível a partir do desenvolvimento da semântica dos mundos possíveis de Kripke.

A dificuldade de uma interpretação semântica formal adequada para operadores modais, tais como $\Box$ e $\Diamond$, dava-se porque eles não são verofuncionais. Em outras palavras, o valor de verdade de uma fórmula cujo operador principal seja um operador modal, (isto é, $\Box p$ ou $\Diamond p$), nem sempre poderá ser determinado a partir de p. O mesmo ocorre com os operadores deônticos O e P. Uma fórmula cujo operador principal seja o operador clássico de negação, ou seja, $\neg p$, será verdadeira se p for falsa e, falsa, se p for verdadeira. Mas dado que p seja verdadeira não podemos determinar, apenas com essa informação, o valor de verdade de $\Box p$, por exemplo. Os operadores modais são chamados de operadores intensionais e sua interpretação é usualmente feita recorrendo-se à noção de mundos possíveis.

1.2 SEMÂNTICA DE MUNDOS POSSÍVEIS

Os chamados mundos possíveis envolvem uma noção intuitiva de que o mundo (o "mundo real") poderia ser diferente do que é. Vimos que, em uma lógica modal alética, há uma distinção entre proposições que são tomadas como necessariamente verdadeiras e proposições que são consideradas contingentes. Quando dizemos que a proposição "Dilma é a presidente do Brasil" é contingente, estamos pensando que há um mundo possível onde Dilma não foi eleita, ou seja, concebemos um mundo onde a proposição é falsa. E quando consideramos que "$2+2=4$" é uma proposição necessariamente verdadeira, pensamos que não há nenhum mundo possível em que tal proposição seja falsa. Não importa que mundo esteja sendo considerado, a proposição "$2+2=4$" será verdadeira. Nessa concepção de mundos possíveis, o mundo real (ou atual) é apenas um dos possíveis mundos.[4]

O papel dos mundos possíveis, no caso de lógicas modais, é dar me-

[4]Não discutiremos aqui o estatuto ontológico destes mundos. Para o nosso objetivo, os mundos possíveis podem ser tomados apenas com um recurso formal para semântica de lógicas modais.

canismos para estabelecer as condições de verdade para fórmulas que contenham operadores modais, bem como definir noções de consistência e de consequência lógica. Dizemos que um conjunto de fórmulas é consistente se há algum mundo possível em que todas elas são verdadeiras. As condições de verdade para as fórmulas modais podem ser dadas assim:

> $\Box\alpha$ é verdadeira em um mundo se e somente se α é verdadeira em todos os mundos possíveis;
>
> $\Diamond\alpha$ é verdadeira em um mundo se e somente se α é verdadeira em algum mundo possível.

De modo intuitivo, o que se quer dizer é que uma proposição é necessariamente verdadeira se ela é sempre verdadeira, independente das circunstâncias ou mundo. E se a proposição é sempre verdadeira, então é necessária. Podemos citar como exemplo as tautologias da lógica clássica, já que, não importa de que forma o mundo seja; elas são sempre verdadeiras. Se α é uma tautologia, então α é verdadeira em todos os mundos e, assim, $\Box\alpha$ é verdadeira também.

Há, contudo, diferentes sistemas modais. Lewis, por exemplo, desenvolveu cinco sistemas diferentes (S1 a S5), os quais se distinguem pelo conjunto de seus teoremas. O sistema desenvolvido por von Wright também é um sistema modal, ainda que não alético. Contudo, se substituirmos O e P do sistema de von Wright por $\Box$ e $\Diamond$, teremos um sistema modal que se diferencia dos cinco sistemas propostos por Lewis.

Se um sistema possui um conjunto de teoremas distinto de outro sistema, estes sistemas precisam se diferenciar, de alguma maneira, semanticamente. Por esta razão, não foi suficiente recorrer apenas aos mundos possíveis, pois a semântica resultante caracterizaria apenas um sistema. Foi preciso incluir uma relação R de acessibilidade. Assim, em vez de somente um conjunto de mundos possíveis, passamos a ter o que se chama uma estrutura: um par ordenado $\langle W,R\rangle$ em que W é um conjunto não vazio de mundos possíveis e R uma relação binária de acessibilidade entre esses mundos. Dada esta relação, temos um conjunto de pares ordenados de mundos. Por exemplo, sejam w_1 e w_2 mundos possíveis tais que Rw_1w_2, ou seja, o par $\langle w_1,w_2\rangle \in R$. Sendo esse o caso, dizemos que w_2 é *acessível* a w_1, ou é *relevante* para w_1, ou ainda que w_1 *enxerga* w_2. De modo intuitivo, dizer que w_1 enxerga w_2 é dizer que w_2 é um mundo alternativo a w_1. De modo informal, podemos pensar que nosso universo contém uma infinidade de mundos possíveis, mas que não desejamos considerar todos eles, apenas aqueles que se assemelham ao mundo real sob certo aspecto. Por exemplo, se estamos tentando modelar necessidade e possibilidade física, interessam somente os mundos fisicamente semelhantes ao nosso. Neste caso, todos os mundos pertencentes ao par, cujo primeiro componente seja o mundo real, serão relevantes; caso contrário, não.

A relação de acessibilidade permite restringir as fórmulas válidas no sistema e garantir uma semântica diferente para sistemas distintos. Para cada combinação de propriedades que a relação R possa ter, haverá um conjunto de fórmulas válidas. Quando a relação entre os mundos é universal, ou seja, todos estão relacionados com todos, inclusive consigo mesmo, temos um conjunto de fórmulas válidas que não é o mesmo se essa relação fosse apenas simétrica, por exemplo. Nos modelos para o sistema S5 de Lewis, todos os mundos são relevantes para os demais. Neste sistema, se uma proposição é necessária, ela é verdadeira em *todos* os mundos. E se ela é verdadeira em algum mundo, pode-se afirmar que ela é possível. Em algum outro sistema que tenha uma relação R mais restrita, se uma proposição é necessária, não se segue que seja verdadeira em todos os mundos. Se $\Box\alpha$ é verdadeira em um mundo w_1, α será verdadeira em todos os mundos acessíveis a w_1, podendo ser falsa nos demais mundos. A relação universal funciona bem quando lidamos com verdades lógicas ou noções metafísicas.

Vejamos algumas propriedades que a relação R pode ter. Seja W um conjunto de mundos possíveis e R uma relação de acessibilidade. Temos:

(a) R é reflexiva sse para todo $w \in W$, Rww;
(b) R é serial sse para todo $w \in W$, existe $w' \in W$ tal que Rww';
(c) R é transitiva sse para todo $w, w', w'' \in W$, se Rww' e $Rw'w''$, então Rww'';
(d) R é euclidiana sse para todo $w, w', w'' \in W$, se Rww' e Rww'', então $Rw'w''$;
(e) R é simétrica sse para todo $w, w' \in W$, se Rww' então $Rw'w$.

Uma estrutura $\mathfrak{F}$ para uma lógica modal será um par $\langle W, R\rangle$, onde W é um conjunto não vazio de mundos possíveis e R uma relação de acessibilidade. E um modelo $\mathfrak{M}$ é um par $\langle \mathfrak{F}, V\rangle$ ou uma tripla $\langle W, R, V\rangle$, em que V é uma valoração, uma função que associa a cada variável proposicional um subconjunto de W. Dito de outra forma, cada variável proposicional é associada pela valoração a um conjunto de mundos possíveis.

Tendo a relação R, as condições de verdade para fórmulas modalizadas têm uma ligeira mudança. Onde w é um mundo qualquer:

> $\Box\alpha$ é verdadeira em w sse α é verdadeira em todos os mundos w' tais que Rww';
>
> $\Diamond\alpha$ é verdadeira em w sse α é verdadeira em algum mundo w' tal que Rww'.

1.3 SISTEMAS MODAIS ALÉTICOS

Uma vez que a *lógica deôntica standard* e o sistema que propomos no capítulo três são baseados em sistemas modais aléticos, vejamos agora alguns dos sistemas aléticos mais conhecidos.

O menor sistema modal normal[5] é conhecido como K e contém os seguintes axiomas e regras:

(PC) α, se α é uma tautologia do *cálculo proposicional clássico*;
(K) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$;
(Df.$\Diamond$) $\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$;
(MP) $\vdash \alpha \to \beta, \vdash \alpha \,/\, \vdash \beta$.
(RN) $\vdash \alpha \,/\, \vdash \Box\alpha$.

Uma lógica modal é normal se ela contém os esquemas de axioma (Df. $\Diamond$) e (K) e a regra (RN). Assim, K é normal e dizemos que é o menor sistema normal, pois os axiomas e regras de K são válidos independentemente do tipo de relação de acessibilidade que a classe de estruturas possui. Vejamos primeiramente o axioma (K). Suponhamos que

(1) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ seja falso em algum mundo w de algum modelo $\mathfrak{M}$.
A fórmula é um condicional, portanto, segue-se que:
(2) $\Box(\alpha \to \beta)$ é verdadeira em w, mas
(3) $(\Box\alpha \to \Box\beta)$ é falsa em w.
A fórmula (3) também é um condicional falso. Segue-se, portanto, que:
(4) $\Box\alpha$ é verdadeira em w, porém
(5) $\Box\beta$ é falsa em w.
Se $\Box\beta$ é falsa em w, então deve existir algum w' acessível a w, tal que:
(6) β é falsa em w'.
O w' em questão pode ser qualquer mundo, inclusive o próprio w.
Por outro lado, da verdade de (2) segue-se que:
(7) $\alpha \to \beta$ é verdadeira em todos os mundos acessíveis a w. Como Rww', então $\alpha \to \beta$ é verdadeira em w'.
E de (4) se segue que:
(8) α é verdadeira também neste mundo w'.
Da verdade de (7) e de (8), concluímos que
(9) β é verdadeira em w'.

[5] As lógicas modais com que estamos lidando neste capítulo são as normais. Sistemas não normais serão discutidos apenas no capítulo três.

O que contradiz (6). A contradição surgiu da hipótese de (K) ser falso em algum mundo de algum modelo; portanto, (K) é válido.

Note-se que, ao mostrarmos a validade de (K), não precisamos especificar que tipo de relação R haveria entre os mundos.

O esquema $\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$ é a fórmula de equivalência para operadores modais e ela é válida em um modelo independente da relação R de acessibilidade adotada. A estratégia de prova é análoga àquela da demonstração da validade de (K). Para concluir, mostramos a validade da regra RN, também conhecida como regra de necessitação ou regra de Gödel: $\vdash \alpha$ / $\vdash \Box\alpha$. Se α é uma fórmula válida, ou seja, verdadeira em todos os mundos de todos os modelos, então $\Box\alpha$ também é válida. Se não há mundo possível onde α seja falsa, pode-se concluir que $\Box\alpha$.

Se K é o menor sistema modal normal e o axioma (K) é válido independente da relação R que a classe de estruturas possui, os outros sistemas serão uma extensão de K. Sendo assim, K está contido nos demais sistemas modais normais. A figura 1 abaixo mostra a relação entre certos sistemas. $K \subset D \subset T \subset S4 \subset S5$ ou $K \subset D \subset T \subset B \subset S5$.

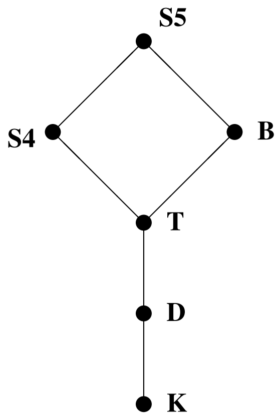

Figura 1 – Relações entre os sistemas aléticos usuais

Pela figura, podemos ver que o sistema T é uma extensão de K. Sendo uma extensão, o sistema T deve conter todos os teoremas de K, mas não o contrário. O sistema T possui como axioma característico a fórmula $\Box\alpha \to \alpha$. Se não exigirmos nada da relação de acessibilidade, podemos construir um modelo onde a fórmula é falsa, basta construir um modelo com um mundo possível que não esteja relacionado com nenhum outro. Nesse mundo isolado, digamos assim, a fórmula $\Box\alpha$ é verdadeira por vacuidade. Em outras palavras, como não há mundos acessíveis àquele mundo, não haverá nenhum mundo acessível onde α seja falsa e, portanto, $\Box\alpha$ não poderá ser falseada. Ao mesmo tempo, podemos estabelecer que, neste mundo de que estamos tratando, α seja falsa. Teríamos, assim, o antecedente verdadeiro e o consequente falso. Se for desejável para um sistema que ele contenha o axioma (T), é preciso estabelecer uma relação de acessibilidade que garanta sua validade. Neste caso, R deve ser reflexiva. Se $\Box\alpha$ é verdadeira em um mundo w, então α é verdadeira em todos os mundos acessíveis. Como Rww, então α é verdadeira em w, portanto $\Box\alpha \rightarrow \alpha$, o axioma (T), será verdadeiro em w, qualquer que seja o w do modelo, o que torna a fórmula válida.

Quando a relação R é transitiva, temos como consequência a validade da fórmula $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$. Esse axioma é conhecido como (4), pois é o característico do sistema S4 de Lewis. Olhando para o gráfico acima, vemos que o sistema S4 é uma extensão de T, portanto, em S4, R é reflexiva e transitiva.

O quadro abaixo mostra quais propriedades de R são precisas para cada um dos sistemas aléticos usuais apresentados.

Sistemas	*Propriedades de R*
K	(qualquer)
D	serial
T	reflexiva
B	reflexiva e simétrica
S4	reflexiva e transitiva
S5	reflexiva, simétrica e transitiva

1.4 LÓGICA DEÔNTICA STANDARD

Com o desenvolvimento da semântica para sistemas modais, a relação entre as lógicas aléticas e deônticas se estreitaram novamente dando origem à *lógica deôntica standard* (LDS), que é um sistema deôntico baseado no sistema alético chamado de D. Vimos que os vários sistemas se diferenciam pelas propriedades da relação de acessibilidade presente na classe de estruturas. O sistema D é caracterizado pela classe de estruturas em que R tem como propriedade a serialidade. Na figura 1.1, da seção anterior, podemos ver que D está entre K e T.

Em uma lógica deôntica, queremos estabelecer as condições de verdade de fórmulas envolvendo os operadores deônticos. Do mesmo modo que na lógica alética, recorreremos aos mundos possíveis para dar suporte às condições de verdade para as fórmulas cujo operador principal seja O ou P e para definir as noções de consistência e de consequência lógica. Em lógica deôntica, pretende-se que haja um mundo onde todas as obrigações sejam cumpridas e que o que é permitido seja compatível com o que é obrigatório. Um conjunto Γ de fórmulas deônticas será deonticamente consistente se ele inclui certas obrigações e pelo menos uma permissão. Incluímos pelo menos uma permissão no conjunto, pois desejamos que aquilo que será considerado permitido seja compatível com o que é obrigatório. Por exemplo, um conjunto contendo $\{Op_1, \ldots, Op_n, Pq\}$ será consistente se houver um mundo possível em que $p_1, \ldots, p_n, q$ sejam todas verdadeiras. Em outras palavras, se é possível realizar algo que é permitido, q, ao mesmo tempo em que todas as obrigações são cumpridas. O mundo ideal, do ponto de vista normativo, é aquele onde todas as obrigações são cumpridas.

Em lógica deôntica os mundos alternativos ao mundo real são chamados de *mundos deonticamente perfeitos*, pois neles todas as obrigações são cumpridas. Num sentido intuitivo, é isso que se pretende quando criam-se as leis — que elas sejam cumpridas por todos. Do mesmo modo, quando se discute leis de trânsito, pretende-se que elas sejam aplicáveis a todas as situações e que o que seja aceito como permitido não viole nenhuma regra. Há, nessas elaborações de leis, um exercício imaginário de supor o que aconteceria neste mundo se as pessoas agissem de tal e tal maneira. Esse processo mental de tentar solucionar problemas através das leis é um modo intuitivo de conceber mundos possíveis, no caso, mundos deonticamente perfeitos.

Podemos perguntar, então, se o mundo real é um mundo deonticamente perfeito. Se fosse, todas as obrigações seriam cumpridas, mas isso não é o caso, já que é possível encontrar vários exemplos de transgressão da lei. O fato de uma ação se tornar obrigatória não é o suficiente para que os agentes morais do nosso mundo ajam de acordo com o que a lei prescreve. Se uma lógica deôntica fosse construída a partir do sistema modal S5, por exemplo, ela conteria fórmulas válidas que não corresponderiam às nossas intuições. Em um sistema alético baseado numa relação universal, vimos que podemos concluir de α, $\Diamond\alpha$. Devemos nos perguntar, ao trocarmos os operadores modais aléticos por operadores deônticos, se a inferência continua fazendo sentido. Em outras palavras, perguntamos se de α, podemos concluir $P\alpha$. Ao pensarmos na sua tradução para linguagem natural, vemos que não podemos dizer que o agente tem permissão para executar uma determinada ação, do fato de ele executar a ação. E se pensarmos nos mundos alternativos como mundos deonticamente perfeitos, queremos que as obrigações existentes neste mundo sejam cumpridas em todos os mundos acessíveis a ele. Em outras palavras, se Op é verdadeira no mundo real, queremos que p seja verdadeira em todos os mundos deonticamente perfeitos. Por outro lado, não se pode exigir que p seja verdadeira *neste* mundo se Op o é. Não podemos fazer essa exigência porque nem sempre os agentes deste mundo cumprem suas obrigações. O nosso mundo, o mundo real, não é um mundo deonticamente alternativo a si mesmo.

O que se quer evitar, com uma relação de acessibilidade que não seja universal, é que $Op \rightarrow p$ e que $p \rightarrow Pp$ sejam válidas, pois podemos imaginar uma situação na qual as fórmulas sejam falsas neste mundo. Ao mesmo tempo, queremos que $Op \rightarrow Pp$ seja válida, ou seja, que aquilo que consideramos obrigatório seja também permitido. Para garantir $Op \rightarrow Pp$, precisamos de uma relação binária serial de acessibilidade, ou seja, para cada mundo w deve existir um mundo w' deonticamente acessível a w. E do fato da relação não ser reflexiva, evitamos que $Op \rightarrow p$ seja válida. Em outras palavras, esta fórmula poderia ser verdadeira em algum mundo, mas não em todos.

Vejamos agora as definições para a *lógica deôntica standard*, começando pela linguagem artificial proposicional para LDS, que denominaremos uma *linguagem deôntica básica*:

1) Um conjunto (enumerável) de variáveis proposicionais. Informalmente, 'p', 'q', 'r' etc. representam proposições quaisquer.

2) Um conjunto OP de operadores:

   (i) '$\neg$' é o operador de negação – não, é falso que, não é verdade que;
   (ii) '$\wedge$' é o operador de conjunção – e, também, mas;
   (iii) '$\vee$' é o operador de disjunção – ou, ou … ou …;
   (iv) '$\rightarrow$' é o operador de implicação (condicional) – se … então;
   (v) '$\leftrightarrow$' é o operador de bi-implicação (bicondicional) – se e somente se;
   (vi) 'O' é o operador de obrigatoriedade – é obrigatório que;
   (vii) 'P' é o operador de permissão – é permitido que.

3) Sinais de pontuação: '(' e ')'.

Definição 2. (Fórmulas)

1) Variáveis proposicionais são fórmulas;
2) se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, $O\alpha$ e $P\alpha$ são fórmulas;
3) nada mais é uma fórmula.

Definição 3. Uma *estrutura* $\mathfrak{F}$ para uma linguagem deôntica básica é um par $\langle W, R\rangle$ em que:

(i) W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis;

(ii) $R \subseteq W \times W$ é uma relação binária serial de acessibilidade deôntica.

Definição 4. Um *modelo* $\mathfrak{M}$ é um par $\langle \mathfrak{F}, V \rangle$, em que:

(i) $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ é uma estrutura;

(ii) V é uma valoração em W, ou seja, uma função do conjunto das variáveis proposicionais em $\mathcal{P}(W)$.

A verdade de uma fórmula α qualquer em um mundo w de um modelo $\mathfrak{M}$ é definida da maneira padrão para os operadores clássicos. No caso dos operadores deônticos, as condições são as seguintes:

> $O\alpha$ é verdadeira em um mundo w de um modelo se e somente se α é verdadeira em todos os mundos deonticamente acessíveis a w;
>
> $P\alpha$ é verdadeira em um mundo w de um modelo se e somente se α é verdadeira em algum mundo deonticamente acessível a w.

Levando isso em consideração, temos então a seguinte definição de verdade de uma fórmula em um mundo de um modelo (notação $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$):

Definição 5. Sejam $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ um modelo e w um mundo em W, então:

(a) $\mathfrak{M}, w \vDash \mathbf{p}$ sse $w \in V(\mathbf{p})$, para uma variável proposicional $\mathbf{p}$;

(b) $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\alpha$ sse $\mathfrak{M}, w \nvDash \alpha$;

(c) $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \wedge \beta$ sse $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$;

(d) $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \vee \beta$ sse $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$;

(e) $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \rightarrow \beta$ sse $\mathfrak{M}, w \nvDash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$;

(f) $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$ sse $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$ ou $\mathfrak{M}, w \nvDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w \nvDash \beta$;

(g) $\mathfrak{M}, w \vDash O\alpha$ sse para todo w' em W tal que Rww', $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$;

(h) $\mathfrak{M}, w \vDash P\alpha$ sse há algum w' em W tal que Rww' e $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$.

Uma fórmula válida, agora, é definida como aquela verdadeira em qualquer mundo de qualquer modelo, isto é, para todo modelo $\mathfrak{M}$ e todo mundo w em W, $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$.

Dadas as condições semânticas, pode-se apresentar o conjunto de axiomas e regras de inferência que envolvem os novos operadores que foram acrescentados à linguagem. A lista a seguir foi extraída de *Being Good and Being Logical* (FORRESTER, 1996, p. 27).[6] O que era válido no *cálculo proposicional clássico* (CPC) continuará sendo válido e, ainda, temos:

[6] Forrester enumera os teoremas usando SDLT1, SDLT2, SDLT3 e assim por diante. Optamos por colocar a nomenclatura padrão de cada um deles. Quando não há nomenclatura padrão, permanece a dada por Forrester. Além disso, o autor apresenta uma única lista e nós optamos por separar axiomas e regras de outras fórmulas derivadas.

Axiomas

(Df.P) $P\alpha \leftrightarrow \neg O\neg\alpha$;
(K) $O(\alpha \to \beta) \to (O\alpha \to O\beta)$;
(D) $O\alpha \to P\alpha$.

Regra de inferência

(RO) $\vdash \alpha \ / \vdash O\alpha$.

Teoremas

(M) $O(\alpha \wedge \beta) \to (O\alpha \wedge O\beta)$;
(C) $(O\alpha \wedge O\beta) \to O(\alpha \wedge \beta)$;
(T1) $\neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$;
(T2) $\neg O(\alpha \wedge \neg\alpha)$;
(OT) $O(\alpha \vee \neg\alpha)$.

Regras derivadas

(RM) $\vdash \alpha \to \beta \ / \vdash O\alpha \to O\beta$;
(RE) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \ / \vdash O\alpha \leftrightarrow O\beta$.

Fórmulas inválidas no sistema

(T4) $OO\alpha \leftrightarrow O\alpha$;
(U) $O(O\alpha \to \alpha)$.

Este sistema, contudo, foi alvo de algumas críticas. O próprio von Wright, que havia visto semelhanças entre os sistemas aléticos e deônticos, viu-se insatisfeito com o resultado final. Von Wright (1964) concluiu que uma obrigação não poderia ser expressa em um sistema padrão e buscou desenvolver um novo sistema onde o operador deôntico se liga a duas variáveis, e não a apenas uma. O operador deôntico de obrigação passa a ser um operador que expressa que um certo ato será obrigatório em certas circunstâncias.[7]

Nesta dissertação, contudo, não discutiremos o segundo sistema de von Wright, apenas examinaremos a *lógica deôntica standard*. A seguir, passamos para a análise e críticas dos teoremas e regras de inferência encontrados na LDS.

[7] A fórmula será escrita da seguinte maneira: $O(A/B)$, onde A e B são variáveis para nomes de atos. E teremos a seguinte leitura informal: 'é obrigatório A, quando B' . Ou, 'é obrigatório que A na circunstância B'.

1.5 ANÁLISE E CRÍTICAS À LDS

Como dito acima, na *lógica deôntica standard* as variáveis representam proposições da forma 'O agente S faz a ação A'. Temos aqui uma sentença declarativa da forma sujeito-predicado, em que o núcleo do predicado é uma ação. Se p é uma proposição ligada ao operador deôntico O, Op será traduzida por 'É obrigatório que o agente S faça A'. Ao pensarmos na linguagem natural, o que será avaliado como moral, imoral ou amoral será justamente o núcleo do predicado. Através de um abuso de linguagem, falaremos em 'ação-p' ou diremos 'se p representa a ação A' para enfatizar que, do ponto de vista da linguagem natural, levamos em consideração que ações serão, ou não, consideradas obrigatórias ou permitidas ou proibidas. Além disso, a fórmula Op vale para qualquer agente moral. Por conta disto, abreviaremos a tradução de 'É obrigatório que o agente S não mate' para 'É obrigatório não matar'.

Nas páginas que se seguem, vamos examinar cada um dos teoremas e regras da LDS. A estratégia será a de traduzir as fórmulas para linguagem natural a fim de verificar sua aceitabilidade ou não como um princípio deôntico. Investigaremos se o que é dito de modo formal continua, ou não, sendo compatível com o que é dito e aceito quando usamos a linguagem ordinária e nossas intuições básicas acerca do que é agir moralmente.

(Df.P) é a definição do operador deôntico P, que diz que é permitido α se e somente se não é obrigatório não-α. Esta fórmula traduz a intuição de von Wright em relação à semelhança entre *necessário/possível* e *obrigatório/permitido*. Poder-se-ia também tomar o operador P como primitivo e definir O através da equivalência $O\alpha \leftrightarrow \neg P \neg \alpha$. O que esta fórmula expressa é bem intuitivo e corresponde à linguagem normativa. Suponhamos que p represente a ação de fumar e $\neg p$ simbolize a ação de não fumar. Diríamos a qualquer sujeito que ele tem permissão para fumar se e somente se ele não é obrigado a não fumar. Para tornar mais explícita a intuição envolvida, vamos voltar à noção de *proibição*. Dissemos que poderíamos introduzir um outro operador F para exemplificar a ideia de proibição e que $F\alpha$ seria equivalente a $O\neg\alpha$. Pois bem, podemos então dizer que uma ação é permitida se e somente se ela não é proibida ($Pp \leftrightarrow \neg Fp$). Diríamos que fumar é permitido se e somente se não é proibido fumar. Atualmente, há mais restrições aos fumantes que em tempos passados e eles só podem fumar onde não há proibições, ou seja, se nada lhe indica que é proibido, ele pode concluir que é permitido.

Muitas vezes, principalmente se pensarmos em sistemas jurídicos, será difícil estabelecer todas as ações que são permitidas aos agentes. Um modo de estabelecer o que é ou não permitido é via obrigações. Aquelas ações que não são restritas pelas obrigações são permitidas. Se um agente quer saber se lhe é permitido fazer p, ele pode perguntar se é obrigatório que ele aja de acordo com $\neg p$. Se a resposta a essa pergunta for negativa, então p é permitida; caso contrário, p é proibida. Com o uso da internet, por exemplo, surgiu uma nova modalidade de crime, os crimes virtuais. Sem haver nenhum sistema legal que estabelecesse o que era proibido, tudo era permitido. Aos poucos foram surgindo as restrições e se estabelecendo o que é ou não permitido.

As ideias de obrigação e permissão são complementares. Em alguns momentos, será mais fácil guiar uma ação via obrigação e, em outros, via não permissão (proibição). Por exemplo: dizemos que o voto é obrigatório e dizemos que não é permitido fumar em lugares públicos fechados. Dizer que "é obrigatório votar" é mais claro que dizer que "não é permitido não votar". E dizer "não é permitido fumar" é mais inteligível que dizer "é obrigatório não fumar".

Em resumo, ao que tudo indica, não há razões para rejeitar, em um sistema deôntico, a equivalência $P\alpha \leftrightarrow \neg O\neg\alpha$. Portanto, (Df.$P$) deve ser aceito como um teorema de um sistema deôntico.

(D) estabelece que se α é obrigatória, então α é também, embora não só, permitida. Este axioma parece também claro do ponto de vista moral. Nenhum agente deveria ser moralmente obrigado a fazer algo proibido. Se o agente está sob uma obrigação p, então p deve ser permitida. Alguém poderia objetar ao axioma (D) com a seguinte situação: durante um sequestro, o sequestrador obriga o sequestrado a ultrapassar o sinal vermelho; neste caso, o sequestrado foi obrigado a executar uma ação proibida (não permitida). Nesse exemplo, porém, há uma confusão entre o sentido de *moralmente obrigatório* e *não voluntário*. Em situações onde o agente faz uma ação proibida e se defende dizendo que foi obrigado a fazê-la, a obrigação em questão não se refere a uma obrigação no sentido moral. Se o sujeito tem uma obrigação moral de fazer p, então p deve ser permitida do ponto de vista moral. Portanto, não há por que descartarmos o axioma (D) do nosso sistema.

Passamos, agora, para a investigação de (RO), juntamente com (OT). O sistema desenvolvido por von Wright já havia descartado fórmulas como (OT), pois esta fórmula não respeita o princípio de contingência deôntica. (OT) diz que, dada uma tautologia, do tipo $\alpha \vee \neg\alpha$, ela é obrigatória; o que soa um tanto estranho.[8] E se um sistema tem (RO), então terá (OT), pois se α é uma tautologia, temos $O\alpha$. Tanto (OT) quanto (RO) vão contra noções básicas acerca do que é agir moralmente ou ser um agente moral. Agir moralmente pressupõe uma liberdade do agente que escolhe agir de acordo com a regra ou não. Nos casos onde as obrigações são tautologias não há esta escolha. Além disso, poderíamos perguntar sobre quem é o agente moral que cumpre

[8] Ainda que (OT) explicitamente envolva tautologias da forma $\alpha \vee \neg\alpha$, o resultado de que qualquer tautologia é obrigatória se segue disso em virtude da regra (RE), da qual falaremos mais adiante, e do fato de que todas as tautologias são equivalentes.

a tautologia *chove ou não chove*. Não há agente moral nesta sentença.

Vale lembrar que (RO) vem da regra (RN) de um sistema alético. Uma lógica modal alética, como foi dito acima, trata dos modos de verdade e distingue proposições necessárias de contingentes (ou possíveis). Se α é uma tautologia, será verdadeira em todos os mundos e, portanto, faz sentido concluir que as tautologias são necessariamente verdadeiras. Se analisarmos a definição de tautologia, veremos que se trata de fórmulas que são sempre verdadeiras ou que, pelo menos, nunca são falsas. Mas ao substituirmos $\Box$ por O, a regra perde seu sentido e temos pelo menos duas razões para rejeitá-la.

A primeira razão é a seguinte: sabendo-se que todas as tautologias são válidas, por (RO), tornam-se todas obrigatórias. A fórmula $p \vee \neg p$ é uma tautologia e, pela regra de inferência (RO), derivamos $O(p \vee \neg p)$. Todas as tautologias são verdadeiras em todos os mundos e, sendo assim, em todos os mundos haveria obrigações. Entretanto, deve ser aceitável, pelo menos do ponto de vista lógico, que existam mundos onde não haja obrigação alguma.

A segunda razão é que podemos olhar para lógica deôntica, ou simplesmente para ética, como um sistema normativo que orienta a ação de um agente que pretende agir moralmente. Se p representa a ação de 'não matar', a fórmula Op funciona como um guia de ação, pois ela diz que é obrigatório não matar. Como guia de ação, essa sentença é inteligível. Entretanto, se tomarmos $p \vee \neg p$ e acrescentarmos o operador O, teremos que é obrigatório não matar ou matar, o que nada diz ao sujeito sobre como ele deve agir. Não parece razoável preservar (RO) nem (OT), por isto ambas devem ser descartadas de um sistema deôntico adequado.

O axioma (K), que corresponde a SDLT2 no texto de Forrester (1996, p. 27), diz que o operador O se distribui sobre a implicação, ou seja, se obrigatoriamente α implica β, então, se é obrigatório que α, então é obrigatório que β. Para objetar a (K) recorreremos à análise de Forrester deste axioma (1996, p. 47–9). (K) é equivalente a $(O(p \vee q) \wedge O\neg p) \rightarrow Oq$, e Forrester argumenta contra esta última fórmula. Para demonstrar a inadequação deste esquema numa lógica deôntica, Forrester supõe uma situação onde hajam apenas duas formas de governo: uma representando a democracia e, outra, uma ditadura militar. No caso da democracia, os eleitores poderiam escolher entre dois candidatos, um do partido A e outro do partido B. Digamos que os cidadãos devam escolher entre essas duas formas e que devam fazer isso pensando no bem maior. Assim, é uma obrigação moral que eles optem pela democracia, ou seja, que entre um ditador C ou entre os candidatos A e B, os cidadãos optem por A ou B. Sendo assim, temos que $O(p \vee q)$ é o caso, onde p representa a escolha no candidato A e q representa a escolha no candidato B. Porém, observando os candidatos, percebe-se que são igualmente desonestos. Se A é desonesto, então ele não deve ser o eleito e, assim, $O\neg p$.

Juntando as duas fórmulas, temos o antecedente do condicional. Entretanto, dado que o candidato B é igualmente desonesto, também valeria que $O\neg q$. Sendo assim, teríamos o antecedente verdadeiro e o consequente falso, o que torna a fórmula inválida. Isto coloca em dúvida a correspondência de (K) com a linguagem normativa e, sendo esse o caso, é melhor deixá-lo de fora de um sistema deôntico.

O axioma (K) também levanta dúvidas em relação a sua interpretação em uma linguagem normativa ordinária. Dizer que $O(\alpha \rightarrow \beta)$ poderia ser interpretado como uma obrigação de reparação. Por exemplo, poderíamos ter uma situação onde um agente engravida a sua namorada. Podemos usar a fórmula $O(p \rightarrow q)$ para dizer que 'é obrigatório que, se João engravidou Maria, ele se case com ela'. Porém, ao traduzirmos o consequente do axioma ($Op \rightarrow Oq$), diríamos que é obrigatório engravidar Maria. O que não faz sentido.

Se uma lógica deôntica possui os três esquemas acima, (Df.P), (K) e (RO), podemos dizer, analogamente ao caso das lógicas modais aléticas, que ela é uma lógica deôntica normal. É o caso do sistema acima que tem, ainda, o axioma D — essa é a lógica conhecida como *lógica deôntica standard* (LDS). (M), (C), (T1), (T2), e (OT) são teoremas de LDS.

Vamos continuar a análise, agora com relação a alguns teoremas da LDS.

(M) é a fórmula $O(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (O\alpha \wedge O\beta)$ que, na lista de Forrester, corresponde ao que ele chamou de SDLT3. A interpretação dada na linguagem natural é que, se a conjunção de p e q é obrigatória, então ambas são *separadamente* obrigatórias. Se um agente qualquer tem a obrigação de cumprir um par de ações, então ele tem o dever de cumprir a primeira e o dever de cumprir a segunda ação. Forrester (1996, p. 38) analisa (M) substituindo q por $\neg p$, tendo então $O(p \wedge \neg p) \rightarrow (Op \wedge O\neg p)$ como uma instância de M. Pela contraposição temos: $\neg(Op \wedge O\neg p) \rightarrow \neg O(p \wedge \neg p)$. O antecedente desta fórmula é (T1) e o consequente (T2). Forrester rejeita então (M), pois ele não aceita nem (T1) nem (T2). Se aceitasse (M) e (T1), chegaria a (T2), o que ele acredita ser inadequada para um sistema deôntico. Tanto (T1) quando (T2) vão contra a noção de dilemas morais, do ponto de vista de Forrester (1996, p. 42–4) e, portanto, deveriam ser rejeitadas. Como ainda não analisamos dilemas morais, nem demos atenção as (T1) e (T2), aceitemos por enquanto (M). Se não há contraexemplos na linguagem natural que invalidem (M) e a única razão são suas consequências lógicas, não temos motivos para considerá-la inadequada.

(C) é a direção contrária de (M) e corresponde a SDLT4 na lista de Forrester; a saber, $(O\alpha \wedge O\beta) \rightarrow O(\alpha \wedge \beta)$. Se é obrigatório que α e é obrigatório que β, então é obrigatório α e β. Nem sempre este será o caso. Um agente pode ter um par de obrigações e mesmo assim não ter que cumpri-las simultaneamente. Por exemplo, podemos pensar nos deveres que um agente tem como médico e nos deveres que este mesmo agente tem como cidadão ou como pai. Digamos que, na função de médico, o sujeito S tem o dever de aliviar a dor e, quando pai, tem o dever de garantir a educação de seu filho. Dizemos que estas são duas de suas obrigações: p e q. Dizer que um agente tem uma obrigação p e outra obrigação q é dizer que ele não pode fazer nada que viole p ou que viole q. Dizer que um agente tem a obrigação de dizer a verdade não significa que ele deva estar falando o tempo todo, mas que o que ele disser não pode violar a obrigação, digamos, r. Isto significa que sempre que for esperado que ele diga algo verdadeiro, que ele o diga.

Nem sempre os agentes estão cumprindo obrigações. No papel de cidadão, o sujeito tem a obrigação de comparecer às urnas, mas esta obrigação só precisará ser cumprida em dias de eleições ou plebiscitos. Porém, quando dizemos que um agente tem a obrigação de *p e q*, ou seja $O(p \wedge q)$, estamos exigindo que em todas as situações que p é o caso, q também o seja. O teorema (C) implica que se o sujeito tem um conjunto de obrigações, sempre que ele cumpre a primeira ele deve executar todas as outras. Podemos tomar os deveres como *prima facie* considerando, por exemplo, certos princípios bioéticos (BEAUCHAMP & CHILDRESS, 2001): respeito à autonomia, não maleficência, beneficência e justiça; p, q, r, s, respectivamente. Seja S um sujeito, para quem $(Op \wedge Oq \wedge Or \wedge Os)$ seja o caso. Digamos que o nosso sujeito esteja tratando de um paciente que se recusa a receber transfusão de sangue, mesmo sabendo que isto lhe trará benefícios e seja sua única chance de sobrevivência; para esta situação, o médico tem o dever de p ou r, mas não o dever de p e r. Num mundo w, o médico escolhe executar p; no mundo w' o médico opta por r.

Forrester também rejeita (C) (1996, p. 44–5). Sua linha de raciocínio é tomar as obrigações de um advogado. Este tem o dever de não fazer qualquer coisa que prejudique seu cliente, mas tem também o dever, com o tribunal, de não favorecer o perjúrio. Representado a primeira obrigação por p e a segunda por q, temos que $(Op \wedge Oq)$. Entretanto, imaginemos uma situação onde um cliente confidencia a seu advogado que planeja perjurar no tribunal. Pelo fato de o advogado não poder cumprir as duas obrigações juntas, seria falso que $O(p \wedge q)$. Isso torna a fórmula inválida, uma vez que temos o antecedente verdadeiro e o consequente falso.

Nas fórmulas indicadas por (T4) e (U) o operador O se aplica a fórmulas já modalizadas, o que não faz sentido se pensarmos em sua tradução para linguagem natural. Consideremos uma instância de (T4), por exemplo, $OOp \leftrightarrow Op$. Não parece fazer sentido dizer que "é obrigatório que seja obrigatório que p se e somente se é obrigatório que p". Quanto a (U), $O(Op \rightarrow p)$, já vimos que $Op \rightarrow p$ deve ser descartada, pois, como foi dito acima, tornar uma ação obrigatória não implica que de fato ela aconteça. Assim, não parece fazer sentido exigir que $Op \to p$ seja obrigatória, $O(Op \to p)$. De fato (U) não é válida em um sistema deôntico baseado no sistema D alético (mas seria em um sistema deôntico baseado em T ou suas extensões).

Deixaremos (T1) e (T2) por último e passaremos agora para a análise de (RE) e (RM).

(RE) é conhecida como regra de equivalência. Ela nos diz que se α e β são logicamente equivalentes, e se α é obrigatório, então β também é obrigatória e vice-versa. Dizer que elas são logicamente equivalentes é dizer que a fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ é válida, ou seja, verdadeira em todos os mundos possíveis de todos os modelos. Esta regra parece coerente com as intuições éticas. Digamos que α seja "o agente diz a verdade" e β "o agente não mente". Podemos aceitar que todos os mundos onde o agente diz a verdade são mundos onde o agente não mente. Ou ainda, todos os mundos onde todos os agentes dizem a verdade são mundos onde todos os agentes não mentem. Portanto, se aceitamos como obrigatório que se diga a verdade, podemos também concluir que é obrigatório não mentir.

Algumas vezes podemos imaginar que *não dizer a verdade* não é a mesma coisa que *mentir*; são os casos de omissões, por exemplo, ou quando alguém se esquiva de dar a resposta. Contudo, ao pensarmos nas obrigações do agente, se ele pode dizer a verdade, mas opta por não dizer nada, sua ação poderia ser interpretada como uma mentira do ponto de vista moral; e estamos, assim, pensando que o sujeito não agiu conforme o esperado. Se existem duas maneiras de dizer a mesma coisa, e uma delas é uma obrigação, a outra também será.

(RM) é a regra $\vdash \alpha \to \beta \,/\, \vdash O\alpha \to O\beta$, isto é, se α implica logicamente β, então $O\alpha$ implica logicamente $O\beta$. Se tivermos, por exemplo, que $p \to q$ é válida (p implica logicamente q), e p é obrigatória (Op), então por meio de (RM) chegaremos à conclusão de que q também é obrigatória (Oq). Em outras palavras, consequências lógicas de obrigações também são obrigações.

Finalmente chegamos à análise de (T1) e (T2). Estes dois teoremas deram origem às críticas mais recentes à LDS. Seus críticos afirmam que aceitar (T1) e/ou (T2) é negar a existência de dilemas morais presentes na linguagem normativa. Um dilema seria expresso por $Op \wedge O\neg p$ e (T1) diz que não é o caso que um agente moral tenha o dever de fazer p e o dever de não fazer p e, (T2), diz que não é o caso que um agente tenha a obrigação de fazer p e não-p ao mesmo tempo. Para os defensores da exclusão deste teorema, um dilema moral é uma situação em que o agente deve fazer p ao mesmo tempo que deve fazer não-p. Para Cruz (2005, p. 20), "Os sistemas ou (códigos morais) existentes trazem normas que, muitas vezes, levam a situações conflitantes. Há situações em que, para um agente, é obrigatório realizar um ato que é proibido". A fim de dar mais atenção a esta questão, passamos agora para o segundo capítulo, no qual discutiremos a respeito dos dilemas morais e sua interpretação formal.

2 DILEMAS MORAIS: CONTRADIÇÕES OU CONFLITOS?

Neste capítulo, discutiremos se o teorema (T1), $\neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$, deve ser descartado de um sistema deôntico. A questão a ser analisada é se a proposição expressa pela fórmula $(Op \wedge O\neg p)$ representa de modo adequado um dilema moral. Para nós, esta não é a maneira adequada de formalizar um dilema e a estratégia adotada, para a argumentação, será mostrar que se p é moralmente obrigatória sua negação não poderá ser tomada como obrigatória no sentido moral. Em outras palavras, se Op é verdadeira, então $O\neg p$ será falsa, para toda e qualquer p.

Com o objetivo de tornar clara a questão, buscaremos definir o que são dilemas morais em uma linguagem natural para podermos encontrar seu correspondente formal. E, ao falarmos de dilemas, estamos pensando em um tipo específico deles, pois nem todos os dilemas são morais. Um dilema pode ser entendido como uma situação na qual o sujeito está diante de duas possibilidades, mas que uma exclui necessariamente a outra. Nos dilemas morais, estes conflitos envolvem obrigações, tais como dizer a verdade, cumprir a promessa, não causar dano etc. Conflitos existentes entre comprar um carro ou dar uma entrada em um apartamento e fazer medicina na USP ou na UFSC, por exemplo, não são conflitos morais e, por isto, não nos ocuparemos deles aqui.

Existem, na literatura ética, pelo menos dois grupos de dilemas morais e nós nos ocuparemos apenas de um. Dilemas como o *trolley problem* não serão analisados aqui. Para explicitar: neste dilema um trem atingiria cinco pessoas que trabalham desprevenidas sobre a linha e o agente teria a chance de evitar a tragédia acionando uma alavanca que levaria o trem para outra linha, onde ele atingiria apenas uma pessoa. Pergunta-se, então, ao agente o que ele faria: mudaria o trajeto salvando as cinco pessoas e matando uma? Esse tipo de dilema envolve uma questão diferente da que nos interessa. Nesse exemplo do trem, o agente não sabe o que deve fazer, ele não sabe qual é o seu dever moral, que curso de ação seria moralmente correto. Dilemas como este sugerem uma revisão do sistema ético adotado. É um dilema porque uma ação exclui a outra, mas apenas uma ação é a correta[1]. A situação poderia ser formalizada por $Op \vee Oq$, mas o agente não sabe qual delas é a ação correta. Ele não sabe se deve executar p ou se deve executar q. Os dilemas que nos inte-

[1] Há uma divergência em relação à ação correta nesta situação. Para um consequencialista, acionar a alavanca seria a ação correta. Para um deontologista, não. Mas em dilemas como este, aceita-se uma ação, e apenas uma, como correta. Nosso interesse se aplica a dilemas onde duas ações são corretas, mas excludentes. Por isso, nós não nos ocuparemos deste primeiro tipo de dilema.

ressam aqui são aqueles em que o agente conhece suas obrigações, mas não consegue decidir qual delas executar. O agente deve e sabe que deve executar uma ação A e deve e sabe que deve executar uma ação B. Explicitaremos mais esses dilemas logo a seguir.

Por último, esclarecemos que não estamos nos comprometendo com a existência de dilemas morais no sentido ontológico. Porém, mesmo que os dilemas possam ser apenas aparentes, eles estão presentes no discurso e, se um dos objetivos da lógica é discriminar entre argumentos válidos e inválidos, cabe às lógicas deônticas dar os mecanismos que possibilitem a avaliação de argumentos que envolvam *obrigações*, *proibições* e *permissões*. Se o agente moral chega a certas conclusões a partir de situações dilemáticas, uma lógica deôntica adequada deve ser capaz de expressar tal situação.

2.1 DILEMAS MORAIS

Na linguagem natural, um dilema pode ser definido da seguinte maneira:

> Um dilema moral é uma situação na qual um agente S deve *moralmente* fazer A e deve *moralmente* fazer B, mas não pode fazer ambas. Ou porque B é não-fazer-A apenas, ou porque há alguma característica contingente do mundo que impede o agente de fazer ambas (GOWANS, 1987, p. 3, [grifo nosso]).

Podemos, ainda, complementar essa definição dizendo que o agente, além de dever fazer A, sabe que deve fazer A e, em condições normais, poderia fazer A. O mesmo vale para a ação B.

Partimos para a análise da atual proposta de representação formal que, de agora em diante, passaremos a chamar de (T1*):

(T1*) $\quad Op \wedge O\neg p$

Se (T1*) representasse dilemas morais de modo adequado, poderíamos transcrever a definição dada por Gowans da seguinte maneira: "Um dilema moral é uma situação na qual um agente S deve *moralmente* fazer p e deve *moralmente* fazer $\neg p$, mas não pode fazer ambas."

Vejamos um exemplo de uma situação dilemática na linguagem natural:

> Um amigo quer lhe contar um segredo e pede que você prometa não contar a ninguém. Você dá a sua palavra. Ele conta que atropelou um pedestre e, por isto, vai se refugiar na casa de uma

prima. Se a polícia o procurasse querendo saber do amigo, o que você faria?

Vamos dar as variáveis proposicionais p, q e suas negações às seguintes interpretações, com o objetivo de tornar mais clara a discussão:

p: O agente diz a verdade.
q: O agente cumpre a promessa.
$\neg p$: O agente não diz a verdade/mente.
$\neg q$: O agente não cumpre/descumpre/quebra a promessa.

A partir de agora, fixamos no contexto o significado das variáveis proposicionais. Através de um abuso de linguagem, podemos dizer informalmente "a ação p" como uma forma de abreviar o significado de p, ou seja, como forma de abreviar "O agente diz a verdade". O abuso se dá para enfatizar o núcleo do predicado — ação — que é o que será avaliada como moral ou não. Dada a interpretação para p, dizemos que Op é lido de modo informal como "É obrigatório que o agente diga a verdade". Poderemos abreviar dizendo apenas que "É obrigatório dizer a verdade", já que vale para qualquer agente.

2.2 ANÁLISE FORMAL DE (T1*)

Em (T1*), temos uma interpretação de dilemas morais como contradições. A fórmula ($Op \wedge O\neg p$), não é de fato uma contradição, mas gera uma. As obrigações expressas pela fórmula são contrárias[2].

Dizemos que uma teoria qualquer T é inconsistente se e somente se existem pelo menos dois teoremas de T tais que um é a negação do outro. Caso a lógica de base dessa teoria seja a lógica clássica, T será também trivial. Uma teoria T é trivial se e somente se todas as fórmulas da linguagem de T são teoremas de T. Se T está baseada na lógica clássica, aceitar $Op \wedge O\neg p$ torna o sistema inconsistente e, consequentemente, trivial. Isto ocorre porque temos o axioma D, do qual podemos derivar a fórmula $\neg(Op \wedge O\neg p)$. Ou ainda, com (T1*) e o axioma D, podemos derivar a fórmula $O\neg p \wedge \neg O\neg p$.

A saída encontrada por aqueles que almejam admitir a possibilidade de $Op \wedge O\neg p$ em seu sistema, por considerá-la como a representação adequada de um dilema moral, tem sido a lógica paraconsistente, que é uma lógica alternativa à lógica clássica. Uma lógica paraconsistente poderia aceitar $O\neg p$

[2] Duas proposições são *contraditórias* se seus valores de verdade são opostos, ou seja, uma é verdadeira se e somente se a outra for falsa. E, portanto, as duas não podem ser nem ambas verdadeiras, nem ambas falsas. Duas proposições são *contrárias* se não podem ser ambas verdadeiras, embora possam ser ambas falsas.

e $\neg O \neg p$ como sendo ambas verdadeiras, introduzindo uma noção fraca de negação. Uma vez que o princípio clássico $(\alpha \wedge \neg \alpha) \rightarrow \beta$ não é válido em um sistema paraconsistente, não se pode derivar qualquer coisa a partir de uma contradição, o que trivializaria o sistema.

A questão que pretendemos analisar é se devemos considerar (T1*) adequado. A pergunta que buscamos responder é se assumindo Op como uma obrigação, podemos também aceitar $O \neg p$, no sentido de obrigação moral. A aceitação de $\neg p$ como obrigatória deve se seguir logicamente de um conjunto de premissas que aceitamos como verdadeiro, ou estar implícita ou explicitamente dito em algum sistema ético.

De acordo com (T1*), temos que o agente deve moralmente dizer a verdade e deve moralmente não dizer a verdade. Mas se esse é o caso, então será igualmente verdadeiro, numa segunda interpretação possível, que o agente deve moralmente cumprir a promessa ao mesmo tempo que deve moralmente descumprir a promessa. Portanto, a fórmula (T1*) seria incompleta, pois o dilema deveria ser representado por $(Op \wedge O \neg p \wedge Oq \wedge O \neg q)$. O dilema deixa de ser uma situação onde o agente tem duas obrigações a cumprir tornando-se uma na qual ele passa a ter quatro deveres morais. Mas (T1*) poderia ser construída a partir de uma interpretação na qual $\neg p$ é equivalente a q, assim como $\neg q$ é equivalente a p e, portanto, a fórmula poderia ser reduzida novamente a (T1*).

Aqui fazemos nossa primeira objeção quanto à interpretação assumida. Aqueles que defendem (T1*) como a formalização correta para dilemas fazem essa passagem de interpretar a ação q como equivalente à ação $\neg p$.[3] Em outras palavras, supõe-se que se trata da mesma coisa, uma vez que, se o agente quer cumprir a promessa (q), ele terá que mentir ($\neg p$). Nesta situação, se q é verdadeira, então $\neg p$ é verdadeira e, se falsa, ambas são falsas. Em linguagem natural, diz-se que, se o agente cumpre a promessa, então o agente mente e, se ele mente, então ele cumpre a promessa. Logo, são materialmente equivalentes. Aceitando que q é uma obrigação moral, infere-se que $\neg p$ também seja uma obrigação moral. De modo formal, de $q \leftrightarrow \neg p$ inferimos $Oq \leftrightarrow O \neg p$. Essa pareceria ser uma aplicação da regra (RE) discutida no capítulo anterior. Contudo, ao definirmos a regra de equivalência, ressaltamos que ela não se aplica a qualquer situação, mas apenas àquelas em que as fórmulas são logicamente equivalentes. A aplicação de (RE) só seria possível se q e $\neg p$ fossem equivalentes em todos os mundos possíveis, tornando a fórmula $q \leftrightarrow \neg p$ *válida*; mas é fácil encontrar situações onde o agente mantém a

[3] Aqui cometemos um abuso de linguagem. q e $\neg p$ são proposições, não ações. Mas em linguagem natural ao afirmar que são equivalentes, avalia-se o núcleo do predicado, ou seja, que a ação executada pelo agente em q tem o mesmo resultado que a ação executada pelo agente em $\neg p$

promessa, tornando o valor de q verdadeiro, e diz a verdade, tornando o valor de $\neg p$ falso. Portanto, é um erro supor que mentir é uma ação moralmente obrigatória porque cumprir a promessa é moralmente obrigatória. Uma coisa não se segue da outra, já que q e $\neg p$ não são logicamente equivalentes.

Um outro modo de concluir $\neg p$ a partir de q seria através da aplicação da regra (RM), também discutida no capítulo anterior. Em (RM) temos que $\vdash q \rightarrow \neg p$ / $\vdash Oq \rightarrow O\neg p$; porém, a aplicação de (RM), neste caso, seria também um erro, já que a implicação não é válida. Se $q \rightarrow \neg p$ fosse válida, portanto verdadeira em todos os mundos possíveis, poderíamos dizer que, se o antecedente é obrigatório, então o consequente também é obrigatório. Mas, como já foi dito, há mundos onde o agente cumpre a promessa sem que precise mentir. Há mundos onde o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, o que torna a implicação falsa.

Resta-nos analisar, do ponto de vista formal, se a conclusão de $O\neg p$ se segue do axioma (K). Mesmo tendo sido rejeitado por nós no capítulo anterior, cabe a análise. Relembrando, temos $O(q \rightarrow \neg p) \rightarrow (Oq \rightarrow O\neg p)$ como uma instância de (K). Podemos concluir $O\neg p$, se $O(q \rightarrow \neg p)$ e Oq forem ambas verdadeiras. Estamos assumindo que Oq é verdadeira, pois estamos assumindo que é obrigatório cumprir a promessa. Resta-nos analisar se $O(q \rightarrow \neg p)$ é também verdadeira. Caso seja, poder-se-ia concluir $O\neg p$.

A fórmula $O(q \rightarrow \neg p)$ é equivalente à $O(\neg q \vee \neg p)$. Em linguagem natural: 'É obrigatório que o agente quebre a promessa ou que o agente minta'. Porém, dizer que algo é obrigatório é dizer que é verdadeiro em todos os mundos deonticamente perfeitos. Em outras palavras, estaríamos afirmando que a disjunção $\neg q \vee \neg p$ é verdadeira em todos os mundos deonticamente acessíveis. Mas, a disjunção é falsa, pois tanto quebrar a promessa, quanto mentir não são obrigações morais e, cada uma delas, deve ser falsa nos mundos deonticamente perfeitos. Sendo falsa, (K) seria verdadeira, mas não se poderia aplicar *modus ponens* para concluir a verdade de $O\neg p$.

Uma outra maneira de ver (K) é através da equivalência $O\neg(q \wedge p)$ que pode ser traduzida por 'é um dever que não seja o caso que o agente cumpra a promessa e diga a verdade'. O que também é falso, pois isso equivale a dizer que, em todos os mundos acessíveis ao mundo real, $q \rightarrow \neg p$ é verdadeira e, novamente, estaríamos dizendo que, nos mundos deonticamente perfeitos, se o agente cumpre a promessa, então o agente mente. Desejamos, porém, que nos mundos deonticamente perfeitos os agentes possam cumprir suas promessas sem precisar mentir. Em outras palavras, esperamos que nos mundos ideais a obrigação de cumprir a promessa seja compatível com a obrigação de dizer a verdade.

A fórmula $O(\alpha \rightarrow \beta)$ pode servir para outros casos onde outras intuições normativas estejam envolvidas. Seja r a proposição 'o agente atropela o pedestre' e s a proposição 'o agente presta socorro a vítima'. Para esse caso, temos $O(r \to s)$. Dadas as equivalências da fórmula $r \to s$, $O(r \to s)$ pode ser traduzida por: 'Obrigatoriamente não é o caso que o agente atropela o pedestre e não presta socorro à vítima'. Ou 'é moralmente obrigatório que o agente não atropele o pedestre ou que ele socorra à vítima'. Nessa situação, é mais intuitivo dizer que, se a primeira situação é o caso, então a segunda deveria ser o caso, porém (K) falharia aqui, pois não dizemos que Or, ou seja, não dizemos que 'é um dever atropelar o pedestre'. Também por isso (K) deve ser rejeitado do sistema. Mesmo que aceitássemos (K), mostramos aqui que $O\neg p$ não se segue deste teorema.

2.3 REPRESENTAÇÃO DE DILEMAS COMO CONFLITOS

A nossa leitura de um dilema moral reflete uma situação onde o agente deve, moralmente, fazer A e deve, moralmente, fazer B, sendo A e B ações distintas. Reescrevendo nosso exemplo prático, o agente deve moralmente dizer a verdade e deve moralmente manter a promessa, mas, dada uma circunstância particular, não é possível executar ambas. Isso demonstra um conflito entre as obrigações e pode ser representado, formalmente, do seguinte modo:

(DM) $Op \wedge Oq \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$

De agora em diante, chamaremos a nossa proposta para formalização de Dilemas Morais de (DM). E sua tradução para a linguagem natural é 'é obrigatório que p e é obrigatório que q, mas não é possível p e q'.

O conflito que se dá num dilema moral não é lógico, mas contingente. De acordo com Williams (1987), existem três tipos de conflitos que um sujeito pode enfrentar: conflitos entre suas crenças, conflitos entre seus desejos ou conflitos entre suas obrigações. Os dois primeiros são mais fracos do que o terceiro.

No caso do conflito de crenças, ele pode ser solucionado quando o agente acredita em uma mais fortemente do que em outra. Digamos que um agente crê em r e também crê em s. Durante um período de sua vida não houve problemas em crer em ambas, até o dia em que o sujeito descobre que a crença de s implica em $\neg r$. Portanto, se s é o caso, $\neg r$ também será o caso, mas r não. O sujeito conclui que não pode ter ambas as crenças, pois elas são conflitantes. Investigando suas razões para crenças, o sujeito, ao ter fortes evidências para crer em um dos casos, descarta o outro e segue adiante. Uma vez tomada a decisão, o conflito desaparece, pois duas crenças conflitantes não podem ser ambas verdadeiras.

Analisando os conflitos entre desejos, vemos que um também poderá ser descartado em função do outro. Digamos que esteja um dia muito frio e chuvoso e João esteja em casa no sofá, aquecido com seu cobertor, mas com muita sede. João tem o desejo de continuar onde está e o desejo de tomar água. O conflito pode ser resolvido de pelo menos duas maneiras: a primeira é com alguém aparecendo e lhe servindo água; alguém que estivesse na casa de João com ele. A segunda maneira é com João tomando a decisão de se levantar, tomar água e voltar. Diferente do conflito entre crenças, no caso dos desejos, ambos são verdadeiros. O conflito não era lógico, mas sim contingente. No exemplo dado, o conflito foi solucionado ao escolher uma das possibilidades ou encontrando uma maneira de satisfazer ambas e diluindo o conflito. Ao ter que escolher entre um desejo ou outro, o agente descarta momentaneamente um dos desejos para satisfazer o outro. Porém, pode haver situações onde um desejo não será satisfeito. Digamos que o sujeito enfrente um conflito entre permanecer no Brasil com a namorada e o desejo de estudar na Austrália. Digamos que a namorada não possa ir de modo algum com ele e ele opte por viajar. O sujeito raciocina que irá passar um tempo estudando fora, mas quando voltar reatará o namoro, o que seria um modo de abrir mão momentaneamente de um desejo para satisfazê-lo depois. Porém, quando o sujeito volta, sua antiga namorada está casada. Sendo assim, ele teve um conflito de desejos e não pôde satisfazer ambos. Mas ao contrário dos conflitos entre crenças, seus desejos eram ambos verdadeiros – o sujeito desejava que ambos pudessem ser satisfeitos.

Quando olhamos para os conflitos entre obrigações, dizemos que os deveres são também ambos verdadeiros — é verdade que o agente deve executar A e é igualmente verdadeiro que o agente deve executar B. A impossibilidade de satisfazer os dois não pode ser lógica, mas apenas circunstancial. Os conflitos morais são mais fortes do que os outros dois tipos de conflitos. Primeiro porque o agente pode não ser capaz de dar pesos às duas obrigações, ou seja, ele pode não encontrar um modo de decidir entre as duas. E, em segundo lugar, o agente, ao escolher um dos cursos de ação, não consegue abandonar completamente o outro, permanecendo a culpa. (WILLIAMS, 1987, p. 121–5) A culpa e o remorso mostram que o conflito não foi definitivamente resolvido. O agente ainda se pergunta o que teria acontecido se ele tivesse tomado o outro curso de ação.

No caso do conflito entre desejos, ao escolher um deles o outro não é completamente abandonado, pois os desejos nem sempre precisam ser satisfeitos tão logo eles surgem. O que não vale para as obrigações. Quando um agente está sob uma obrigação, muitas vezes a exigência para sua execução é imediata. Ou o agente faz ou ele falha.

Os dilemas são desconfortáveis porque o agente reconhece que só poderá satisfazer uma das ações, mesmo ambas sendo exigidas e verdadeiras. Além disso, reconhece que, para satisfazer qualquer uma das duas, ele fará também uma ação proibida. Fazer algo proibido gera mais culpa e remorso do que não cumprir uma obrigação. Por exemplo, imagine que uma criança tenha quebrado o vaso da mãe e tenha medo de contar. A mãe, ao notar o vaso quebrado, apenas suspira "puxa, meu vaso quebrou!". A criança sabe que é sua obrigação dizer a verdade, mas, por medo, decide ficar quieta. Quando a mãe pergunta diretamente se a criança quebrou o vaso, ela responde mentindo que não. Sua última ação gera mais culpa e remorso do que a primeira. Em várias situações, os agentes se sentem menos desconfortáveis com omissões dos fatos do que se sentiriam se mentissem a respeito deles. "Eu nunca disse, porque você nunca perguntou" é uma resposta menos carregada de culpa do que "Desculpe, eu menti". O reconhecimento de que $\neg p$ é uma ação proibida torna o dilema difícil de ser solucionado.

2.4 OBRIGAÇÕES X PROIBIÇÕES

Para os dilemas que estamos analisando, não há apenas uma obrigação verdadeira, porque ambas são verdadeiras. Além disso, qualquer que seja a escolha acarretará em uma falha ou em um ato imoral, ou em um ato proibido.

Para tornar mais clara a discussão que se segue, vamos introduzir o operador F para representar proibições. Este operador foi apenas mencionado no capítulo anterior, mas iremos agora defini-lo da seguinte maneira:

$$\text{Df.}F. \quad F\alpha \leftrightarrow O\neg\alpha,$$
$$\text{ou} \quad F\alpha \leftrightarrow \neg P\alpha.$$

Substituindo α por $\neg p$, com $F\neg p$ queremos, informalmente, dizer "é proibido não dizer a verdade". Temos que:

$$F\neg p \leftrightarrow Op,$$
$$F\neg p \leftrightarrow \neg P\neg p.$$

Essas duas fórmulas correspondem às nossas intuições éticas. Mostramos, no capítulo anterior, a relação que se dava entre os operadores *permitido* e *obrigatório* e, agora, podemos mostrar que há uma relação entre esses operadores e o operador de *proibição*.

Se é **proibido não dizer a verdade**, então **é obrigatório dizer a verdade**. E se é **obrigatório dizer a verdade**, então é **proibido mentir** (não dizer a verdade).

Se é **proibido mentir**, então **não é permitido mentir**. E se **não é permitido mentir**, então é **proibido mentir**.

Podemos dizer que

$$Op \rightarrow (Pp \wedge F\neg p),$$

e esta fórmula pode ser lida como: se é obrigatório dizer a verdade, então é permitido dizer a verdade e é proibido não dizer a verdade. Usamos p para facilitar a compreensão na linguagem natural, entretanto poderíamos tomar qualquer proposição.

Voltando ao nosso exemplo de dilem, o agente sabe que é uma obrigação dizer a verdade, mas até o momento em que ele é procurado pela polícia ele não está no conflito. O conflito surge quando ele percebe que, além de não poder cumprir duas ações, ele ainda fará uma ação proibida, já que $Op \rightarrow F\neg p$.

De acordo com (T1*), porém, temos:

1.	$Op \wedge O\neg p$	(T1*)
2.	$O\neg p$	1 CPC
3.	$O\neg p \rightarrow P\neg p$	axioma (D)
4.	$P\neg p \rightarrow \neg F\neg p$	(Df. F).
5.	$O\neg p \rightarrow \neg F\neg p$	3,4 CPC
6.	$\neg F\neg p$	2,5 CPC

Em linguagem natural, temos que:

1. O agente tem a obrigação de dizer a verdade e tem a obrigação de mentir.
2. O agente tem a obrigação de mentir.
3. Se é obrigatório mentir, então é permitido mentir.
4. Se é permitido mentir, então não é proibido mentir.
5. Se é obrigatório mentir, então não é proibido mentir.
6. Logo, não é proibido mentir.

Isto significa que não caberia culpa em relação ao agente. (T1*) eliminaria a característica de ação proibida presente no dilema. Digamos que estivéssemos lidando com um conflito que envolvesse sanções legais; prisão, por exemplo. Se $\neg p$, ou seja, mentir, é uma obrigação e o agente mente, então ele não pode ser condenado por mentir, e nem mesmo acusado de mentir, já que ele estaria cumprindo uma obrigação. Portanto, é um erro supor que $\neg p$ — mentir — possa ser tomado como uma obrigação. Dizer que uma ação é obrigatória nos compromete com a aceitação de que ela seja permitida. Ninguém pode ser obrigado moralmente a fazer algo proibido. Dizer que o agente tem a obrigação moral de mentir, é dizer que ele tem permissão para mentir. Por outro lado, as punições, sejam elas externas (prisões) ou internas (culpa), só cabem quando a ação executada pelo agente é proibida.

Na outra direção, assumir por hipótese que mentir seja obrigatório torna a ação de dizer a verdade proibida. Vejamos:

1.	$O\neg p$	Hipótese
2.	$O\neg p \rightarrow Fp$	Df. F
3.	Fp	1,2 CPC

Em linguagem natural temos:

1. É obrigatório mentir.
2. Se é obrigatório mentir, então é proibido dizer a verdade.
3. Logo, é proibido dizer a verdade.

Este problema não ocorre ao interpretarmos um dilema moral de acordo com (DM), pois as obrigações do agente são as de dizer a verdade e de cumprir a promessa. E, a partir delas, conclui-se que a mentira e a quebra de promessa são atos proibidos.

Um conjunto de normas e regras não é definido por um agente como algo particular. Defender uma posição moral é exigir que os outros façam o mesmo (TUGENDHAT, 2007, p.63) As normas e regras são ações que compartilhamos com outros agentes morais que fazem parte da mesma comunidade. Para os judeus ortodoxos, abster-se de comer carne de porco é uma regra compartilhada e cumprida por todos da comunidade judaica. Digamos, porém, que um judeu, além de não comer carne de porco, acredita ser um dever benéfico não comer carne de outros animais. Essa será uma ação que não é obrigatória do ponto de vista da sua religião, mesmo que o agente acredite ser a coisa certa a fazer. E nem será uma defesa de uma posição moral, a menos que o agente queira que os outros ajam da mesma maneira. Algumas escolhas pessoais, que trazem mais sentido à vida, não podem ser tomadas como obrigações morais se o sujeito apenas acredita que ele deva agir assim, mas que outros poderiam agir de outra maneira, se assim desejassem. Ao pensarmos numa ação como sendo moralmente obrigatória, pensamos naquelas que deveriam ser seguidas por todos os agentes morais pertencentes àquela comunidade moral. Podemos pensar nesses indivíduos como sendo todos os seres racionais, como queria Kant, ou todos os indivíduos inseridos num contrato social. Ao pensarmos em uma obrigação, não estamos lidando com interesses pessoais, mas com interesses coletivos.

Se aceitarmos que as obrigações morais são consequências de um pacto, os indivíduos que nascem na comunidade deverão aprender sobre quais são as suas obrigações. Quando um indivíduo aprende a dirigir, ou seja, passa a fazer parte da comunidade de motoristas, aprende as regras de condução. A partir dessas regras, ele saberá o que é permissível, o que é obrigatório e o que é proibido fazer.

O mesmo acontece com as regras morais. Através da educação, os indivíduos aprendem o que devem e o que não podem fazer. Os códigos morais funcionam como um guia de ação, orientando o sujeito em suas escolhas e execuções. As crianças pequenas ouvem de seus pais que mentir é feio, um jeito de dizer que é errado. Elas aprendem que dizer a verdade é a ação correta. Voltemos ao exemplo da criança que quebrou o vaso da mamãe. Quando lhe perguntam se foi ela que quebrou, ela sabe que deve dizer a verdade. Quando marcamos uma reunião, sabemos que devemos comparecer, porque aprendemos que devemos honrar os compromissos. Ao longo da vida, aprendemos um conjunto de deveres $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ que guiam nossas ações. Mas, de acordo com (T1*), no conjunto de ações obrigatórias teríamos, entre outras, $\{p, \neg p\}$. Se fosse esse o caso, as obrigações perderiam seu caráter de guia de ação, uma vez que ora diriam para fazer p e ora diriam para fazer $\neg p$.

Nenhum sistema ético diz especificamente que João deve buscar Maria na rodoviária, mas diz a João que ele deve cumprir sua promessa. Logo, se João prometeu buscar Maria, sua ação será guiada pela obrigação de cumprir a promessa. As obrigações dizem o que devemos fazer, mas não como, nem em que situação. Devemos ajudar aos pobres, mas não há especificação nem de que pobres, nem de como fazer isso. Se, no sistema ético, há uma informação de que o agente *deve* p e neste mesmo sistema diz que *deve* $\neg p$, o agente não sabe o que fazer. Suponha que seja nossa criança. Se ela tivesse crescido ouvindo sua mãe dizer para ela que mentir é feio, mas em outros momentos ouvindo sua mãe dizer que mentir era o certo, quando perguntada sobre o vaso, ela não saberia o que dizer. Assim como não saberia se o que dizem para ela é verdade.

A formulação dada por (T1*) transfere o problema do sujeito para o sistema ético. Se (T1*) estivesse correta, os sistemas éticos seriam inconsistentes, entretanto não há inconsistência nos sistemas e sim há uma incerteza por parte do agente (MARCUS, 1987). De acordo com nossa hipótese, (DM), os sistemas continuam coerentes, pois fazem parte das obrigações do agente, entre outras, $\{p, q\}$. Essas obrigações irão guiar sua escolha e suas ações. Quando elas não entrarem em conflito, ele poderá cumprir as duas. De acordo com (T1*), se $\{p, \neg p\}$ fazem parte do conjunto de obrigações, o agente estará sempre em conflito, sempre num dilema, pois ele nunca conseguirá conciliar as duas obrigações. Quando o problema é transferido do sujeito para o sistema, o agente perde a responsabilidade diante do dilema. No exemplo que estamos analisando, poderíamos dizer que o agente enfrenta uma situação dilemática, porque ele tomou antes uma decisão errada — a de prometer algo sem saber se poderia cumprir. Foi ele que se colocou no dilema e, o reconhecimento disso, é o que possibilitaria ao agente evitar situações semelhantes no futuro. Não é o sistema que o deixa sem escolha.

Se olharmos o modo como são definidos numa lógica deôntica os operadores de obrigação, permissão e proibição, veremos que as ações estão separadas em três grupos distintos. Esta é uma ideia que está presente, por exemplo, em Kant, ao afirmar que todas as ações são ou obrigatórias, ou proibidas ou indiferentes (KANT, 1987). Para Kant, estes três conjuntos são exclusivos e exaustivos, ou seja, abarcam todas as ações e a intersecção desses conjuntos é vazia (ver a Figura 2).

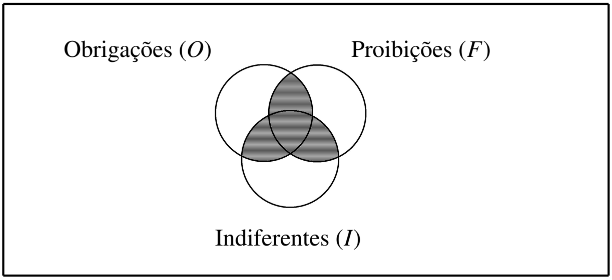

Figura 2

Portanto, se p faz parte do conjunto de ações obrigatórias, o seu complemento, $\neg p$, faz parte do conjunto de ações proibidas. Se (T1*) for verdadeira, teremos que $\neg p$ estará na intersecção do conjunto O e do conjunto F, como mostra a Figura 3(a).

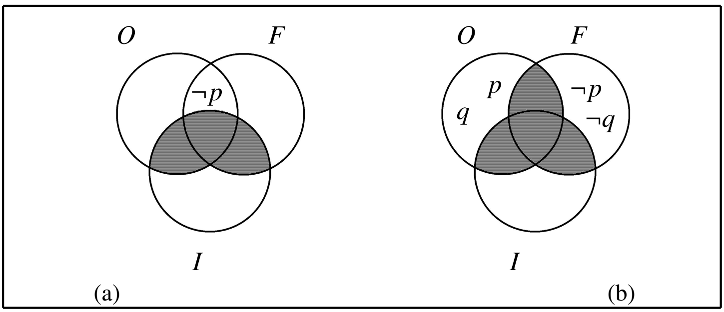

Figura 3

Mas isso não pode ser. A formulação proposta por nós mantém a ideia de Kant. As obrigações pertinentes estão em um conjunto e apenas em um, como mostra a Figura 3(b).

Alguém poderia objetar a essa ideia dizendo que há algumas situações onde a negação de uma ação obrigatória não é proibida, ao raciocinar da seguinte maneira: não matar é uma ação obrigatória, logo matar seria proibido. Porém, diria o nosso interlocutor, há situações onde matar não é proibido, por exemplo, em casos de legítima defesa.

Devemos esclarecer alguns pontos aqui. De fato, afirmamos que não matar é uma ação obrigatória, e que, portanto, matar é proibido. Seja s a representação formal que expressa que o agente A mata o indivíduo B. Temos aqui que $O\neg s \rightarrow Fs$. Nos casos de legítima defesa o sujeito tem permissão para matar, ou seja, não é proibido. Mas a ação não é mais proibida, pois o sujeito não está mais sob a obrigação de não matar. Tomemos por exemplo o modelo de Hobbes (1994, p.94). O que proíbe o sujeito de não matar o outro é uma espécie de contrato, onde cada participante abre mão desse direito de matar, a fim de garantir que não seja assassinado. Mas, no caso de legítima defesa, o agressor (B) já descumpriu a sua parte do acordo, ao tentar agredir a vítima (A). Portanto, a vítima não está mais sob uma obrigação. É como se voltasse ao estado de natureza e, portanto, a ação de matar não está mais proibida. Nas situações onde há exceções, o que acontece é que o sujeito não está, devido a circunstâncias, numa obrigação e, portanto, sua ação não recai nas proibições; seria um erro acreditar que uma ação proibida pode, devido a uma situação particular, se tornar obrigatória. Em casos de legítima defesa, diz-se que a vítima *pode* matar, mas não que ela *deva* matar.

Alguém poderia ainda continuar a objeção dizendo que há, sim, casos em que a mentira é a ação obrigatória, ou que matar é ação obrigatória. Por exemplo, podemos pensar num prisioneiro de guerra que deve mentir para salvar os seus companheiros, ou no soldado que deve matar os inimigos de seu país. Mas, no caso do soldado, por exemplo, sendo a obrigação dele a de matar, então não será o caso que ele também terá a obrigação de não matar. Em outras palavras, se A é uma obrigação, a sua negação não poderá ser também uma obrigação, dentro do mesmo sistema ético. Os sistemas podem conter conjuntos de obrigações diferentes. Mas, para qualquer sistema, se uma ação é obrigatória, a ação oposta será proibida.

Ainda refletindo a respeito de Kant, uma ação, para ser moral, deve satisfazer a formulação geral do imperativo categórico “Age apenas segundo uma máxima tal que possas ao mesmo tempo querer que ela se torne lei universal” (KANT 1980, p. 51). Em linhas gerais, se um agente moral mente, e se isso fosse um dever, esperaríamos que os outros agissem da mesma maneira em toda e qualquer situação. Refletir sobre o que é uma ação moral remete a uma ideia de que aquela ação possa ser feita por todos os demais, em qualquer situação e em qualquer tempo. Como dissemos acima, as obrigações não são determinadas pelo sujeito em situações particulares. Em outras palavras, o agente não pode afirmar que é uma obrigação mentir porque, numa dada situação, ele julga que deva mentir. Quando pensamos em dizer a verdade como uma obrigação, imaginamos o que aconteceria se as pessoas agissem de forma contrária. Justificamos a exigência de dizer a verdade porque acreditamos que, para que possa existir uma certa ordem na sociedade e nas relações com os outros, as pessoas devem dizer a verdade. Pensamos nisso como uma obrigação porque esperamos que todos ajam desta maneira, e não apenas alguns. Por outro lado, de que forma alguém poderia justificar o uso da mentira?

Mesmo sem nos comprometermos com as obrigações em sentido absoluto, mas somente como princípios, o que se poderia entender quando se diz que Or? Se Or representa “é obrigatório respeitar a autonomia”, como princípio está instruindo que, sempre que possível, a autonomia deve ser respeitada. Dizer Op seria equivalente a dizer que “sempre que possível, diga a verdade”. E se (T1*) estivesse correta, estaríamos afirmando também que, sempre que possível, o agente deve mentir. Quando se diz que a autonomia deve ser respeitada como um princípio, tem-se em mente que, a menos que as circunstâncias exijam uma ação diferente, ela deve ser respeitada. Ao afirmar isso, pensa-se em situações onde o princípio da não-maleficência, por exemplo, teria um peso maior. As obrigações vistas como princípios também servem de guia de ação. Seu caráter não é mais absoluto e, neste sentido, podemos até pensar que nem sempre será o caso que o agente deva dizer a verdade. O agente tem em mente que a verdade deve ser dita, a não ser que gere mais danos, por exemplo. Neste sentido, nem sempre a mentira será proibida. Todavia este só será o caso quando, numa determinada situação, dizer a verdade não for obrigatório, como explicamos acima. Porém, e de novo, a mentira não poderá ser tomada como obrigatória, nem mesmo quando a obrigação for vista apenas como princípio.

Quando se diz que uma ação p qualquer é uma ação moral, pretende-se afirmar que p é a ação correta a fazer — seja do ponto de vista de suas consequências, intenções ou princípios. Independente do que justifica a ação moral, diz-se que aquela ação é a correta. Se interpretássemos $O\alpha$ como ‘α é a coisa certa a se fazer’, teríamos, como consequência de (T1*), que mentir é a coisa certa a se fazer. Em outras palavras, afirmaríamos que mentir é correto. Partindo de uma ética utilitarista, mentir seria a ação correta se ela produzisse o maior bem se comparada aos cursos alternativos de ação. É fortemente questionável que mentir, mesmo nesta situação dilemática, seja a ação que produza mais benefícios do que as demais. Se pensarmos em todos os envolvidos na história, quem seria o beneficiado com a mentira? Certamente o policial, a vítima e os familiares não ganhariam nada com a mentira. O amigo poderia também sair perdendo, uma vez que seu crime poderia ser agravado pelo fato de ele ser um fugitivo. O agente poderia sair ganhando somente se a polícia não descobrisse que ele mentiu. Desse modo, ele preservaria sua imagem de amigo e não poderia ser acusado de cumplicidade ou obstrução da justiça. Ora, mas para uma ética utilitarista, as ações são medidas de acordo com quem as recebe e não de acordo com quem as pratica. Portanto, também de um ponto de vista utilitarista, não se justifica a mentira e, assim sendo, ela não pode ser tomada como uma obrigação. Logo, (T1*) não se aplica.

2.5 MUNDOS POSSÍVEIS E A ÉTICA

Um outro modo de conceber uma ética utilitarista é mesclar suas ideias com as ideias de mundos possíveis dadas numa semântica para lógica modal. No capítulo anterior, dissemos que os mundos possíveis são mundos alternativos aos nossos e que envolvem uma ideia intuitiva de que o mundo poderia ser diferente do que é. Ao pensarmos em quais são as ações corretas a serem executadas em situações específicas, fazemos um exercício imaginário de supor o que aconteceria se escolhêssemos o curso A de ação, e o que aconteceria se escolhêssemos o curso B de ação. Compara-se os dois mundos e diz-se que a ação correta é aquela que produziria mais benefícios do que danos. Dissemos, ao definirmos a semântica, que p é obrigatória, se p é verdadeira em todos os mundos deonticamente acessíveis, onde tais mundos são os mundos alternativos ao nosso nos quais todas as obrigações são cumpridas por todos os agentes.

Esta ideia é um pouco restrita, pois lida apenas com dois tipos de mundos: o mundo real e os mundos deonticamente perfeitos. Essa concepção pode ser expandida introduzindo-se a ideia de mundos intermediários. No mundo ideal, todas as obrigações são cumpridas por todos os agentes, o que equivale a dizer que ninguém faz o que é proibido. O mundo real continua sendo o nosso mundo com todas as suas imperfeições. Os mundos intermediários entram como mundos alternativos, sendo mais perfeitos do que o nosso (do ponto de vista deôntico), mas não tão perfeitos quanto o mundo ideal. E por que pensarmos nos mundos alternativos? Estes mundos serviriam para que pudéssemos pensar em alternativas de correção para as falhas do nosso mundo — o mundo real. Por exemplo, dizemos que "todos os assassinos julgados e condenados pela justiça devem ir para prisão". Seja $s \rightarrow r$ a fórmula que expressa "se S é assassino, então S vai para prisão". No mundo ideal, não há assassinos, pois o assassinato é uma transgressão da lei e no mundo ideal não há transgressões. Por vacuidade, a fórmula continua sendo válida lá, mas o que queremos é justificar essa lei/obrigação, dizendo que os mundos onde há assassinos, e onde eles são presos depois de julgados e condenados, são mundos melhores do que os mundos onde assassinos continuam à solta.

Algumas vezes, determinadas ações deverão ser feitas para remediar outras, ou para cumprir outras. Vimos que, numa situação dilemática, o sujeito não poderá cumprir as duas obrigações, e terá que escolher apenas uma delas. Não importa o que ele faça, o agente não atingirá o mundo ideal, pois ele irá falhar em uma das ações. O que lhe resta é pensar nos mundos alternativos. Se os dilemas são de fato genuínos, suas obrigações têm o mesmo peso e, portanto, não importa que escolha ele faça, o mundo onde ele escolhe A e o mundo onde escolhe B serão equidistantes do mundo ideal (Figura 4). Se os dilemas são apenas aparentes, o mundo onde o agente escolhe A é mais próximo do mundo ideal do que o mundo onde ele escolhe B. Isto considerando A como tendo um peso maior em relação a B (Figura 5).

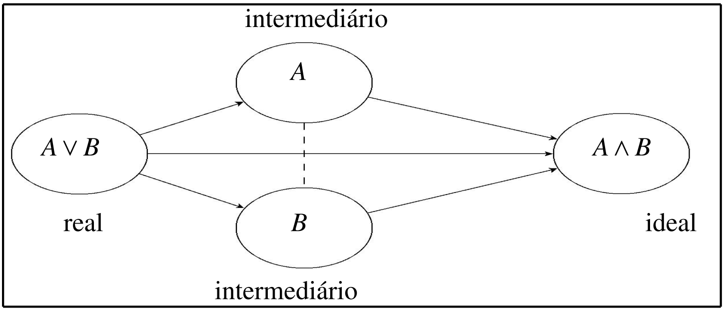

Figura 4

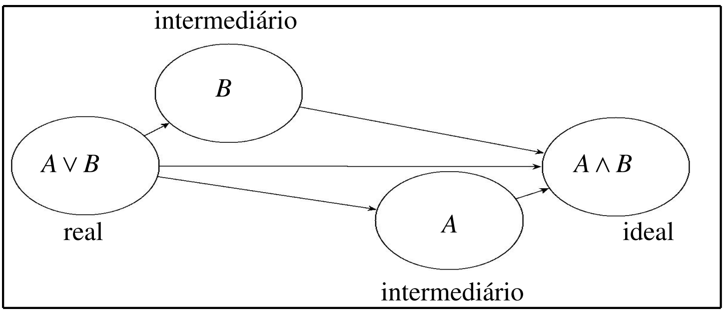

Figura 5

Vejamos de que forma esta ideia se aplica à situação do nosso agente da perspectiva de (T1*). O agente tem a obrigação de mentir e tem a obrigação de dizer a verdade. Se são duas obrigações e, por definição, no mundo ideal os agentes cumprem seus deveres, então no mundo deonticamente perfeito os agentes mentiriam. E também diriam a verdade. Se ambas obrigações ocorrem no mundo ideal, então nenhuma das ações poderia ser interpretada como obrigatória, mas apenas como permissíveis, pois, se uma é obrigatória, a negação é proibida. Porém, no mundo ideal, ações proibidas não são executadas. Se os agentes ora fazem uma, ora agem de forma contrária, então é permissível. Mas o que se deseja é que, no mundo ideal, as pessoas digam a verdade e somente a verdade.

(T1*) não apenas gera problemas para o mundo ideal, mas também para os mundos alternativos; seja Or uma obrigação qualquer e seja w_1 um mundo alternativo. Digamos que w_1 só não é perfeito, como ideal, porque $\neg r$ é verdadeira naquele mundo. De outra maneira, há indivíduos que não respeitam o que é obrigatório, fazendo algo proibido, ou seja, $\neg r$. Digamos, agora, que não estejamos mais falando de uma obrigação qualquer, mas da obrigação prescrita por $O\neg p$. Suponhamos que seja uma obrigação mentir. Suponhamos, também, que haja um mundo alternativo, quase perfeito, digamos, w_2. Faria algum sentido dizer que este mundo não é perfeito porque os agentes nele não cumprem a obrigação de mentir? De um outro jeito, faria sentido dizer que esse mundo seria perfeito se os agentes nele passassem a respeitar a obrigação $O\neg p$, ou seja, passassem a mentir? De modo algum faz sentido. Seria um absurdo pensar em dois mundos exatamente iguais, exceto pelo fato de que, em um deles, os agentes mentem e, no outro, os agentes não mentem, e afirmar que o mundo onde a mentira é uma prática seja mais justo do que o seu oposto; pois é isso que afirmamos quando dizemos que uma ação é obrigatória. Ao estabelecermos uma obrigação, dizemos que se as pessoas agissem em conformidade com ela, o mundo seria mais justo e, portanto, mais próximo do ideal. O que nos leva a concluir que $\neg p$ não pode ser tomada como uma obrigação moral.

Ao adotarmos a formalização (DM), podemos lidar com dilemas genuínos ou com dilemas aparentes. Aplicando (DM) à ideia de mundos possíveis, temos que, numa situação dilemática, o agente tem a obrigação p e a obrigação q, mas que no mundo real, não será possível executá-las juntas. No mundo ideal essas proposições são satisfeitas, porém nos mundos alternativos apenas uma delas será satisfeita; assim como no mundo real, uma delas irá falhar. Digamos que w_1 seja o mundo onde p é o caso e o mundo w_2 o mundo onde q é o caso. Se os dilemas são genuínos, os mundos w_1 e w_2 ocupariam o mesmo espaço entre o mundo real e o mundo ideal (como na Figura 4). Se quisermos adotar uma perspectiva de dilemas apenas aparentes, vamos dizer que o mundo w_1 ou o mundo w_2 está mais perto do mundo ideal do que o outro (como na Figura 5).

Buscamos defender neste capítulo a ideia de que a formalização proposta por (T1*) não é adequada. Nossa estratégia foi mostrar através de um caso particular que $\neg p$ não poderia ser tomado como uma obrigação. Ao longo do capítulo, focamos no fato de que a mentira não pode ser considerada nem moral, nem correta, nem digna de aprovação e, portanto, não pode ser obrigatória. Mas o caso poderia ser aplicado para qualquer interpretação dada a $\neg p$ a partir de p. Por outro lado, muitas vezes no dia a dia as pessoas dizem coisas como "Fui obrigado a mentir", ou "Estou com fome, sou obrigado a roubar um pão para comer". Vimos que, de um ponto de vista lógico e de uma análise da ética, essas formulações são incorretas e na linguagem ordinária, o que acontece é que palavra *obrigatório* tem muitos significados:

(a) Está chovendo. João *deve* se atrasar para o trabalho (epistêmico)
(b) Obrigatoriamente chove ou não chove. (alético)
(c) Você *tem que* provar este bolo! Está divino! (coloquial)
(d) Ele estava armado. Fui obrigada a entregar o dinheiro. (não voluntário)
(e) Sou *obrigado* a mentir ... (não vejo alternativas ...)

Os agentes morais algumas vezes dizem "sou obrigado a mentir" porque tomam suas decisões ao pares; pensam e decidem dizendo "faço A ou não faço A". Se o agente está decidindo entre ir a uma festa ou ficar em casa, ao avaliar o quão cansado está dirá "devo ficar em casa". No caso do dilema apresentado, se o agente escolhesse por proteger o amigo, diria "devo mentir", mas de modo algum este "devo" tem um sentido moral.

Se não inserirmos o interlocutor no contexto do dilema, mas apenas lhe perguntássemos, como agente na situação dilemática, "devo dizer a verdade ou devo mentir?", nosso interlocutor seguramente nos orientaria para dizer a verdade. Agora, mesmo sem dar o contexto, se perguntássemos "devo dizer a verdade ou devo manter a minha promessa?", o nosso interlocutor não teria uma resposta segura para nos dar.

Concluímos neste capítulo que não há razões para excluir (T1) de um sistema deôntico adequado e podemos também manter (T2). Contudo, mostramos que a *lógica deôntica standard* é inadequada e insuficiente por outros motivos já descritos no primeiro capítulo. A seguir, apresentaremos um sistema formal que não contém as fórmulas que julgamos inadequadas, acrescentando nossa proposta para formalização de dilemas morais (DM).

3 O SISTEMA EMD-S4: UMA LÓGICA DEÔNTICA BIMODAL

Neste capítulo, iremos apresentar um sistema deôntico provisório. No primeiro capítulo, apresentamos algumas justificativas para excluir certos teoremas e regras de um sistema deôntico adequado e para aceitar outros. No capítulo dois, defendemos a ideia de manter $\neg(Op \wedge O\neg p)$ e oferecemos uma proposta para formalizar dilemas morais, que chamamos de (DM): $Op \wedge Oq \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$.

Em um sistema deôntico padrão não é possível formalizar dilemas morais como estamos propondo, pois a fórmula envolve, além dos operadores deônticos, operadores aléticos. Nossa estratégia, então, foi combinar sistemas construindo, assim, um sistema bimodal.

Este sistema usará a lógica clássica como base e irá acrescentar os operadores deônticos e os operadores aléticos. A parte deôntica do sistema será construída a partir dos axiomas (D) e (M), já discutidos no primeiro capítulo, e da regra (RE) também discutida. O interesse nos operadores aléticos está em poder expressar que, em um dilema, *não é possível* para o agente executar as duas ações. Defendemos que essa ideia de impossibilidade não é lógica, mas apenas circunstancial e optamos pelo sistema S4 alético, por acreditar que ele é o que melhor traduz a ideia envolvida em um dilema. Nos modelos para S4, uma fórmula pode ser impossível em um mundo, mas não necessariamente em todos. Em um dilema moral, pensamos que para o agente será impossível cumprir as duas obrigações, mas que em um mundo ideal elas deveriam ser cumpridas. Com S4 podemos construir um modelo onde o conflito aparece no mundo real e, portanto, $(p \wedge q)$ é falsa neste mundo, porém em mundo ideal $(p \wedge q)$ é verdadeira.

Vimos, no capítulo 1, que a regra (RO) e o axioma (K) deôntico deveriam ser descartados de uma lógica deôntica adequada. Vimos ainda que, se uma lógica possui (RO), (K) e (Df.P), teríamos o menor sistema deôntico normal. Ao descartamos (RO) e (K) passamos a ter uma lógica deôntica não-normal. Uma estrutura para uma lógica modal normal é um par $\langle W, R\rangle$, onde R é uma relação binária de acessibilidade. Já para uma lógica modal não-normal uma estrutura é um par $\langle W, S\rangle$, onde S é uma função de vizinhanças. Ao combinarmos os dois sistemas, teremos na semântica uma estrutura que é uma tripla $\langle W, R, S\rangle$. A intuição de mundos possíveis para dar suporte as fórmulas modalizadas permanece.

A combinação do sistema S4 alético com um certo sistema deôntico não-normal e tendo a lógica clássica como base, é o que denominaremos EMD-S4.

Tendo já sido apresentadas as justificativas éticas e filosóficas para adotar certos axiomas, seguimos para a parte formal da dissertação.

3.1 EMD-S4

Para apresentação de EMD-S4 usaremos uma linguagem artificial proposicional, em que temos:

1) Um conjunto (enumerável) de variáveis proposicionais. Informalmente p, q, r representam proposições quaisquer.
2) Um conjunto OP de operadores primitivos:
   a) '$\neg$' é o operador unário de negação — não, é falso que, não é verdade que;
   b) '$\rightarrow$' é o operador binário de implicação (condicional) — se ... então;
   c) 'O' é o operador de obrigatoriedade — é obrigatório que;
   d) '$\Box$' é o operador de necessidade — é necessário que.
3) Sinais de pontuação: '(' , ')'

Definição 6. (Fórmulas)

1) Variáveis proposicionais são fórmulas;
2) se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $O\alpha$ e $\Box\alpha$ são fórmulas;
3) nada mais é uma fórmula.

Quando não houver risco de ambiguidade, eliminaremos o uso de alguns parênteses.

Os demais operadores serão definidos como se segue:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha \wedge \beta & =_{\text{df}} & \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\
\alpha \vee \beta & =_{\text{df}} & \neg\alpha \rightarrow \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta & =_{\text{df}} & (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\
P\alpha & =_{\text{df}} & \neg O \neg\alpha \\
F\alpha & =_{\text{df}} & O\neg\alpha \\
\Diamond p & =_{\text{df}} & \neg\Box\neg p
\end{array}
$$

Se p é uma proposição, sua tradução para linguagem natural será: 'S executa a ação A'. Onde S é um agente moral qualquer e A uma ação que será avaliada como moral, imoral ou amoral. A negação de p será traduzida por: 'S *não* executa a ação A'.

Exemplo 1. p: Um agente moral S executa a ação de dizer a verdade.

De forma abreviada, podemos dizer apenas que 'um agente diz a verdade' ou até mesmo 'João diz a verdade', onde João é um agente qualquer.

Quando ligada ao operador deôntico O, Op será traduzida por: 'é moralmente obrigatório que um agente S execute a ação A'. Ou, de modo abreviado: 'é obrigatório dizer a verdade' (para p como exemplificada acima).

3.2 AXIOMATIZAÇÃO

Para a axiomatização do sistema EMD-S4 temos o seguinte conjunto de esquemas de axiomas:

(CPC) α, se α é uma tautologia do *Cálculo Proposicional Clássico*;
(M_O) $O(\alpha \wedge \beta) \to (O\alpha \wedge O\beta)$
(D_O) $O\alpha \to P\alpha$
($K_\Box$) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
($T_\Box$) $\Box\alpha \to \alpha$
($4_\Box$) $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

Os axiomas M_O e D_O são deônticos e os demais, $K_\Box$, $T_\Box$ e $4_\Box$, são aléticos.

E as regras de inferência são:

MP $\vdash \alpha \to \beta, \vdash \alpha \,/ \vdash \beta$
RE_O $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \,/ \vdash O\alpha \to O\beta$
$RN_\Box$ $\vdash \alpha \,/ \vdash \Box\alpha$

Definição 7. Uma prova de α em EMD-S4 é uma sequência finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas tal que $\alpha_n = \alpha$, e para todo i, $1 \le i \le n$,

a) α_i é um axioma de EMD-S4 ou
b) α_i foi obtida pela aplicação de uma regra de inferência de EMD-S4 de fórmulas que aparecem antes de α_i na sequência.

Seja α uma fórmula. Dizemos que α é um *teorema* de EMD-S4 ($\vdash_{\text{EMD-S4}} \alpha$) se e somente se existe uma prova de α em EMD-S4.

Definição 8. Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que $\Gamma \vdash_{\text{EMD-S4}} \alpha$ (α é *consequência lógica* de Γ em EMD-S4) se existe um subconjunto finito $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha$ é um teorema de EMD-S4.

Não havendo risco de confusão, escreveremos apenas $\vdash \alpha$ como forma de abreviar $\vdash_{\text{EMD-S4}} \alpha$.

Nos capítulos anteriores, discutimos outras fórmulas e regras que deveriam ser válidas em um sistema deôntico. Selecionamos apenas parte delas como axiomas e as demais entram como teorema ou regras derivadas deste sistema. A seguir, apresentaremos uma prova para as demais fórmulas e regras, começando pelas regras de inferência.

RM$_O$: $\vdash \alpha \to \beta \,/ \vdash O\alpha \to O\beta$:

1.	$\alpha \to \beta$	Hipótese
2.	$\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$	1 CPC
3.	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	CPC
4.	$\alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta)$	2,3 CPC
5.	$O\alpha \leftrightarrow O(\alpha \wedge \beta)$	4 RE$_O$
6.	$O\alpha \to O(\alpha \wedge \beta)$	5 CPC
7.	$O(\alpha \wedge \beta) \to (O\alpha \wedge O\beta)$	M$_O$
8.	$O\alpha \to (O\alpha \wedge O\beta)$	6,7 CPC
9.	$(O\alpha \wedge O\beta) \to O\beta$	CPC
10.	$O\alpha \to O\beta$	8,9 CPC

RE$_\Box$: $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \,/ \vdash \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$:

1.	$\alpha \leftrightarrow \beta$	Hipótese
2.	$\alpha \to \beta$	1 CPC
3.	$\Box(\alpha \to \beta)$	2 RN$_\Box$
4.	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	K$_\Box$
5.	$\Box\alpha \to \Box\beta$	3,4 CPC
6.	$\beta \to \alpha$	1 CPC
7.	$\Box(\beta \to \alpha)$	6 RN$_\Box$
8.	$\Box(\beta \to \alpha) \to (\Box\beta \to \Box\alpha)$	K$_\Box$
9.	$\Box\beta \to \Box\alpha$	7,8 CPC
10.	$\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$	5,9 CPC

RK$_\Box$: $\vdash (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \alpha \,/ \vdash (\Box\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \Box\alpha_n) \to \Box\alpha$, para $(n \geq 0)$.

Demonstração. A prova é por indução em n.

(i) Para $n = 0$, temos $\vdash \alpha \,/ \vdash \Box\alpha$. Esta é a regra RN$_\Box$.

(ii) Para $n = 1$, temos $\vdash \alpha \to \beta \,/ \Box\alpha \to \Box\beta$, ou RM$_\Box$.

1.	$\alpha \to \beta$	Hipótese
2.	$\Box(\alpha \to \beta)$	1 RN$_\Box$
3.	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	K$_\Box$
4.	$\Box\alpha \to \Box\beta$	2,3 CPC

(iii) Para $n > 1$:

Suponhamos que

$$\vdash (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta.$$

Pelo CPC, é equivalente a

$$\vdash (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1}) \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta).$$

Pela hipótese indutiva, a regra $RK_\Box$ se aplica ao teorema, uma vez que o número de conjunções no antecendente é menor que n. Portanto,

$$\vdash (\Box\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \Box\alpha_{n-1}) \rightarrow \Box(\alpha_n \rightarrow \beta).$$

Como uma instância do axioma $K_\Box$, temos

$$\vdash \Box(\alpha_n \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha_n \rightarrow \Box\beta).$$

De $K_\Box$ e do teorema na linha anterior, segue-se que

$$\vdash (\Box\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \Box\alpha_{n-1}) \rightarrow (\Box\alpha_n \rightarrow \Box\beta).$$

O que é equivalente a $\vdash (\Box\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \Box\alpha_n) \rightarrow \Box\beta$. $\Box$

Podemos provar também a validade da regra de substituição de equivalentes (RSE). Sua formulação mais usual é: se $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, então $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\alpha/\beta]$, onde $\gamma[\alpha/\beta]$ é o resultado da substituição em γ de ocorrências de α por β. Vejamos uma demonstração:

Seja γ uma fórmula qualquer. Suponhamos ainda que durante a prova temos que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Se $\alpha = \beta$, $\gamma = \gamma[\alpha/\beta]$. Suponhamos, então, que α e β sejam fórmulas distintas. A prova se segue por indução em fórmulas.

(a) Seja γ atômica. Se $\gamma = \alpha$, $\gamma[\alpha/\beta] = \beta$, e temos que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Se $\gamma \neq \alpha$, então $\gamma[\alpha/\beta] = \gamma$ e $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma$.

(b) Seja $\gamma = \neg\delta$. Pela hipótese de indução, $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\alpha/\beta]$. Disto se segue também que $\vdash \neg\delta \leftrightarrow \neg\delta[\alpha/\beta]$

(c) Seja $\gamma = \delta \rightarrow \epsilon$. Pela hipótese de indução, $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\alpha/\beta]$ e $\vdash \epsilon \leftrightarrow \epsilon[\alpha/\beta]$. Pela lógica proposicional clássica podemos mostrar que $\vdash (\delta \rightarrow \epsilon) \leftrightarrow (\delta[\alpha/\beta] \rightarrow \epsilon[\alpha/\beta])$.

(d) Seja $\gamma = O\delta$. Pela hipótese de indução, $\delta \leftrightarrow \delta[\alpha/\beta]$. Por aplicação da regra RE_O, segue-se imediatamente que $\vdash O\delta \leftrightarrow O\delta[\alpha/\beta]$.

(e) Seja $\gamma = \Box\delta$. A prova é análoga ao item (d), uma vez que a regra $RE_\Box$ também vale para os operadores aléticos.

Provadas as regras, podemos dar continuidade demonstrando teoremas.

(T1) $\neg(Op \wedge O\neg p)$:

1.	$Op \to Pp$	D_O
2.	$Pp \leftrightarrow \neg O\neg p$	Df. P
3.	$Pp \to \neg O\neg p$	2 CPC
4.	$Op \to \neg O\neg p$	1,3 CPC
5.	$\neg(Op \wedge O\neg p)$	4 CPC

(T2) $\neg O(p \wedge \neg p)$:

1.	$O(p \wedge \neg p) \to (Op \wedge O\neg p)$	M_O
2.	$\neg(Op \wedge O\neg p) \to \neg O(p \wedge \neg p)$	1 CPC
3.	$\neg(Op \wedge O\neg p)$	Teorema (T1)
4.	$\neg O(p \wedge \neg p)$	2,3 CPC

$Op \leftrightarrow \neg P\neg p$:

1.	$P\neg p \leftrightarrow \neg O\neg\neg p$	Df. P
2.	$P\neg p \to \neg O\neg\neg p$	1 CPC
3.	$\neg\neg O\neg\neg p \to \neg P\neg p$	2 CPC
4.	$O\neg\neg p \to \neg P\neg p$	3 CPC
5.	$Op \to \neg P\neg p$	4 RSE
6.	$\neg O\neg\neg p \to P\neg p$	1 CPC
7.	$\neg P\neg p \to \neg\neg O\neg\neg p$	6 CPC
8.	$\neg P\neg p \to Op$	7 RSE
9.	$Op \leftrightarrow \neg P\neg p$	5,8 CPC

$Fp \leftrightarrow \neg Pp$:

1.	$Fp \leftrightarrow O\neg p$	Df.F
2.	$Fp \to O\neg p$	1 CPC
3.	$O\neg p \to Fp$	1 CPC
4.	$Pp \leftrightarrow \neg O\neg p$	Df. P
5.	$Pp \to \neg O\neg p$	4 CPC
6.	$\neg O\neg p \to Pp$	4 CPC
7.	$\neg Pp \to O\neg p$	6 CPC
8.	$\neg Pp \to Fp$	3,7 CPC
9.	$O\neg p \to \neg Pp$	5 CPC
10.	$Fp \to \neg Pp$	2,9 CPC
11.	$Fp \leftrightarrow \neg Pp$	8,10 CPC

3.3 SEMÂNTICA E CORREÇÃO

Definição 9. Uma estrutura $\mathfrak{F}$ para EMD-S4 é uma tripla $\langle W, S, R\rangle$, em que:

(i) $W \neq \emptyset$ é um conjunto de mundos possíveis;
(ii) S é uma função deôntica que associa a cada $w \in W$ um conjunto de subconjuntos de W, satisfazendo:
(m) se $X \cap Y \in S(w)$ então $X \in S(w)$ e $Y \in S(w)$;
(d) se $X \in S(w)$, então $-X \notin S(w)$;
onde X e Y são subconjuntos quaisquer de W.
(iii) $R \subseteq W \times W$ é uma relação reflexiva e transitiva de acessibilidade alética.

R é um conjunto de pares ordenados de elementos de W. Sendo reflexiva, cada elemento de W está relacionado consigo mesmo, portanto, para todo $w \in W$, Rww. A relação é também transitiva, ou seja, para todo $w, w', w'' \in W$, se Rww' e $Rw'w''$, então Rww''.

Definição 10. Seja $\mathfrak{F} = \langle W, S, R \rangle$ uma estrutura. Uma valoração V em W é uma função do conjunto das variáveis proposicionais no conjunto $\mathcal{P}(W)$. Um modelo $\mathfrak{M}$ é um par $\langle \mathfrak{F}, V \rangle$, ou uma quádrupla $\langle W, S, R, V \rangle$, em que V é uma valoração.

Definição 11. Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$ um modelo e $w \in W$. Uma fórmula α é verdadeira em w nesse modelo $\mathfrak{M}$, o que é indicado por $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$[1], nas condições a seguir:

(i) $\mathfrak{M}, w \vDash \mathbf{p}$ sse $w \in V(\mathbf{p})$, para uma variável proposicional $\mathbf{p}$;
(ii) $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\alpha$ sse $\mathfrak{M}, w \nvDash \alpha$;
(iii) $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \rightarrow \beta$ sse $\mathfrak{M}, w \nvDash \alpha$ ou $\mathfrak{M}, w \vDash \beta$;
(iv) $\mathfrak{M}, w \vDash O\alpha$ sse $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$;
(v) $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$ sse para todo w' tal que Rww', $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$.

O conjunto $||\alpha||^{\mathfrak{M}}$ utilizado na definição acima é chamado de o conjunto verdade de α em $\mathfrak{M}$, definido assim: $||\alpha||^{\mathfrak{M}} = \{w \in W : \mathfrak{M}, w \vDash \alpha\}$. Não havendo risco de confusão, não usaremos o expoente $\mathfrak{M}$, escrevendo apenas $||\alpha||$.

Para ilustrar, abaixo mostramos as condições de verdade para os operadores P, F e $\Diamond$.

(vi) $\mathfrak{M}, w \vDash P\alpha$ sse $-||\alpha||^{\mathfrak{M}} \notin S(w)$;
(vii) $\mathfrak{M}, w \vDash F\alpha$ sse $-||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$;
(viii) $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\alpha$ sse existe algum w' tal que Rww' e $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$.

Uma fórmula α é verdadeira em um modelo $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$, se α é verdadeira em todo $w \in W$, o que é indicado por $\mathfrak{M} \vDash \alpha$. Uma fórmula é *válida* quando, para todo modelo $\mathfrak{M}$ e para todo mundo w em W, $w \vDash \alpha$.

[1] Poderemos escrever apenas $w \vDash \alpha$ como forma de abreviar $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha$

Uma fórmula válida é indicada por $\vDash \alpha$.

Se Γ é um conjunto de fórmulas, $\mathfrak{M}$ um modelo e w um mundo em W, dizemos que $w \vDash \Gamma$ se e somente se para toda $\gamma \in \Gamma$, $w \vDash \gamma$.

Definição 12. Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que Γ implica logicamente α, ou que α é consequência lógica semântica de Γ (notação: $\Gamma \vDash \alpha$), se, para todo modelo $\mathfrak{M}$ e todo w em W, se $w \vDash \Gamma$, então $w \vDash \alpha$.

Lema 1. *Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$ um modelo para o sistema EMD-S4, e α e β fórmulas quaisquer. Então:*

(i) $||\neg\alpha|| = -||\alpha||$
(ii) $||\alpha \wedge \beta|| = ||\alpha|| \cap ||\beta||$
(iii) $||\alpha \vee \beta|| = ||\alpha|| \cup ||\beta||$
(iv) $||\alpha \rightarrow \beta|| = -||\alpha|| \cup ||\beta||$
(v) $||\alpha \leftrightarrow \beta|| = (-||\alpha|| \cup ||\beta||) \cap (-||\beta|| \cup ||\alpha||)$
(vi) $||O\alpha|| = \{w \in W : ||\alpha|| \in S(w)\}$

Demonstração. Para todo $w \in W$:
(i) $w \in ||\neg\alpha||$ sse $w \in \{w \in W : w \vDash \neg\alpha\}$ sse $w \vDash \neg\alpha$ sse $w \nvDash \alpha$ sse $w \notin ||\alpha||$ sse $w \in -||\alpha||$. Disso se segue que $||\neg\alpha|| = -||\alpha||$.
(ii) $w \in ||\alpha \wedge \beta||$ sse $w \in \{w \in W : w \vDash \alpha \wedge \beta\}$ sse $w \vDash \alpha$ e $w \vDash \beta$ sse $w \in ||\alpha||$ e $w \in ||\beta||$ sse $w \in ||\alpha|| \cap ||\beta||$. Disso se segue que $||\alpha \wedge \beta|| = ||\alpha|| \cap ||\beta||$.
(iii) $w \in ||\alpha \vee \beta||$ sse $w \in \{w \in W : w \vDash \alpha \vee \beta\}$ sse $w \vDash \alpha$ ou $w \vDash \beta$ sse $w \in ||\alpha|| \cup ||\beta||$. Disso se segue que $||\alpha \vee \beta|| = ||\alpha|| \cup ||\beta||$.
(iv) $w \in ||\alpha \rightarrow \beta||$ sse $w \in \{w \in W : w \vDash \alpha \rightarrow \beta\}$ sse $w \nvDash \alpha$ ou $w \vDash \beta$ sse $w \in -||\alpha|| \cup ||\beta||$. Disso se segue que $||\alpha \rightarrow \beta|| = -||\alpha|| \cup ||\beta||$.
(v) $w \in ||\alpha \leftrightarrow \beta||$ sse $w \in \{w \in W : w \vDash \alpha \leftrightarrow \beta\}$ sse $w \vDash \alpha \rightarrow \beta$ e $w \vDash \beta \rightarrow \alpha$ sse $w \in (-||\alpha|| \cup ||\beta||) \cap (-||\beta|| \cup ||\alpha||)$. Disso se segue que $||\alpha \leftrightarrow \beta|| = (-||\alpha|| \cup ||\beta||) \cap (-||\beta|| \cup ||\alpha||)$.
(vi) $w \in \{w \in W : ||\alpha|| \in S(w)\}$ sse $||\alpha|| \in S(w)$ sse $w \vDash O\alpha$ sse $w \in ||O\alpha||$. Disso se segue que $\{w \in W : ||\alpha|| \in S(w)\} = ||O\alpha||$. □

Teorema 1 (Correção)**.** *Se $\vdash \alpha$ então $\vDash \alpha$.*

Demonstração. Por indução sobre teoremas. Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$ um modelo qualquer para EMD-S4.
(1) Seja α um axioma.
Se α é uma tautologia, então α é verdadeira em todos os mundos do modelo, o que significa que α é válida, portanto $\vDash \alpha$.
Suponhamos que α seja um dos outros axiomas.
Para (M_O). Seja w um elemento de W tal que $w \vDash O(\alpha \wedge \beta)$. Pela definição de verdade, disto se segue que $||\alpha \wedge \beta|| \in S(w)$. Pelo lema anterior, temos que

$||\alpha \wedge \beta|| = ||\alpha|| \cap ||\beta||$; logo $||\alpha|| \cap ||\beta|| \in S(w)$. Pela condição (m), temos que, se $||\alpha|| \cap ||\beta|| \in S(w)$, então $||\alpha|| \in S(w)$ e $||\beta|| \in S(w)$. Pela definição de verdade, podemos concluir que $w \vDash O\alpha$ e $w \vDash O\beta$. Isto encerra a demonstração da validade de (M_O).

Para (D_O). Seja w um elemento de W tal que $w \vDash O\alpha$. Disto segue-se, pela definição de verdade que $||\alpha|| \in S(w)$. Uma vez que a condição (d) vale no modelo, temos que se $||\alpha|| \in S(w)$, então $-||\alpha|| \notin S(w)$; logo $-||\alpha|| \notin S(w)$. Pelo lema anterior, $-||\alpha|| = ||\neg\alpha||$; portanto $||\neg\alpha|| \notin S(w)$. Pela definição de verdade $w \nvDash O\neg\alpha$. Segue-se, então, que $w \vDash \neg O\neg\alpha$. Pela definição de P, temos que $w \vDash P\alpha$. Logo, (D_O) é válido.

Para ($\mathrm{K}_\Box$). Faremos por redução ao absurdo. Suponhamos que ($\mathrm{K}_\Box$) não seja válida no modelo. Então, há pelo menos um mundo $w \in W$ tal que $w \vDash \Box(\alpha \to \beta)$ e $w \nvDash \Box\alpha \to \Box\beta$. Então $w \vDash \Box\alpha$ e $w \nvDash \Box\beta$. Pela definição de verdade, existe um w' tal que Rww' e $w' \nvDash \beta$. Porém, segue-se também que $w' \vDash \alpha \to \beta$ e $w' \vDash \alpha$ — segue-se disso que $w' \vDash \beta$. Assim, uma contradição surgiu da hipótese de ($\mathrm{K}_\Box$) não ser válido, portanto, é válido.

Para ($\mathrm{T}_\Box$). Suponhamos que ($\mathrm{T}_\Box$) não seja válida no modelo. Então, há pelo menos um mundo $w \in W$ tal que $w \nvDash \Box\alpha \to \alpha$. Se esse é o caso, então, $w \vDash \Box\alpha$, mas $w \nvDash \alpha$. Se $w \vDash \Box\alpha$, pela definição de verdade, α é verdadeira em todo mundo w' tal que Rww'. Pelo fato da relação R ser também reflexiva, vale Rww, ou seja, $w \vDash \alpha$. Mas, na hipótese de que ($\mathrm{T}_\Box$) era inválida no modelo, dissemos que $w \nvDash \alpha$; uma contradição. Com isso está demonstrada a validade de (T).

Para ($4_\Box$). Suponhamos que ($4_\Box$) não seja válida no modelo. Segue-se que há pelo menos um mundo $w \in W$ tal que $w \nvDash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$. Sendo esse o caso temos que $w \vDash \Box\alpha$, mas $w \nvDash \Box\Box\alpha$. De $w \nvDash \Box\Box\alpha$ segue-se que há pelo menos um mundo w' tal que $w' \nvDash \Box\alpha$. Disto temos que há pelo menos um w'' acessível a w' tal que $w'' \nvDash \alpha$. Pela transitividade, temos que se Rww' e $Rw'w''$, então Rww''. Como $w \vDash \Box\alpha$ e Rww'', então $w'' \vDash \alpha$. E isso leva a uma contradição. Portanto, está demonstrada a validade de ($4_\Box$).

(2) Seja α obtida por uma regra de inferência.

(a) α obtida por *Modus Ponens*. Temos, da *lógica proposicional clássica*, que MP preserva a validade.

(b) α obtida por RE_O. Suponhamos que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Assim (hipótese indutiva) $\alpha \leftrightarrow \beta$ é válida. Então, α e β são equivalentes; portanto, $||\alpha|| = ||\beta||$. Daqui se conclui que para todo $w \in W$, $||\alpha|| \in S(w)$ sse $||\beta|| \in S(w)$. Assim $w \vDash O\alpha$ sse $w \vDash O\beta$. O resultado disso é que $w \vDash O\alpha \leftrightarrow O\beta$. Portanto, RE_O preserva a validade.

(c) α obtida por $\mathrm{RN}_\Box$. Suponhamos que $\vdash \alpha$. Pela hipótese de indução α é válida. Assim, temos que para todo $w \in W$, $w \vDash \alpha$. Disso se segue que, para todo w, $w \vDash \Box\alpha$. $\Box$

Corolário 1. *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *então* $\Gamma \vDash \alpha$.

Demonstração. Suponhamos que $\Gamma \vdash \alpha$. Por definição, existe um subconjunto finito $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que $\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha$. Pelo teorema da correção, $\vDash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha$. Seja $\mathfrak{M}$ um modelo e w um mundo em W tal que $w \vDash \Gamma$. Segue-se que $w \vDash \alpha$; assim, $\Gamma \vDash \alpha$. □

3.4 COMPLETUDE

Demonstraremos a completude de EMD-S4 utilizando conjuntos maximais consistentes (CMCs) e modelos canônicos.

Definição 13. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Γ é inconsistente sse $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$, para qualquer α. Caso contrário, Γ é consistente.

A noção de consistência que estamos definindo, naturalmente, é relativa ao sistema EMD-S4.

Lema 2. $\Gamma \vdash \alpha$ *sse* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *é inconsistente.*

Demonstração. Suponhamos $\Gamma \vdash \alpha$. Então $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$. E também temos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é inconsistente.

Suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ seja inconsistente. Por definição, para alguma fórmula β, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$. Pela definição de dedução, temos que existe algum subconjunto finito $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Γ tal que:

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\alpha) \to \beta,$$
$$\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\alpha) \to \neg\beta.$$

Isso, porém, é equivalente a

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\neg\alpha \to \beta),$$
$$\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to (\neg\alpha \to \neg\beta).$$

Considerando o fato de que $((\neg\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha$ é uma tautologia, concluímos imediatamente que

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \to \alpha,$$

e, portanto, que $\Gamma \vdash \alpha$. □

Definição 14. Um conjunto Γ é maximal se, para toda fórmula α, $\alpha \in \Gamma$ ou $\neg\alpha \in \Gamma$. Γ é maximal consistente (CMC) se é maximal e consistente.

O teorema a seguir apresenta algumas propriedades bem conhecidas de CMCs

Teorema 2. *Seja Γ um conjunto maximal consistente.*

(i) $\alpha \in \Gamma$ *sse* $\Gamma \vdash \alpha$*;*
(ii) *se* $\vdash \alpha$ *então* $\alpha \in \Gamma$*;*
(iii) *se* $\neg\alpha \in \Gamma$ *então* $\alpha \notin \Gamma$*;*
(iv) $\alpha \to \beta \in \Gamma$ *sse* $\neg\alpha \in \Gamma$ *ou* $\beta \in \Gamma$.

Demonstração.
(i) Suponhamos que $\alpha \in \Gamma$. Temos que $\vdash \alpha \to \alpha$. Logo, por definição, $\Gamma \vdash \alpha$. Na outra direção. Suponhamos que $\Gamma \vdash \alpha$. A prova se segue por redução ao absurdo. Suponhamos que $\alpha \notin \Gamma$. Pela hipótese do lema, temos que Γ é CMC e, portanto, se $\alpha \notin \Gamma$, então $\neg\alpha \in \Gamma$. Disto se segue que $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Mas $\Gamma \vdash \alpha$. Se esse é o caso, Γ é inconsistente, mas como Γ é CMC, isso é absurdo. Logo, $\alpha \in \Gamma$.
(ii) Se $\vdash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$. Como demonstrado no item anterior, disso se segue que $\alpha \in \Gamma$.
(iii) Suponhamos que $\neg\alpha \in \Gamma$. Pelo item (i), segue-se que $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Pela hipótese de que Γ é consistente, $\Gamma \nvdash \alpha$. Logo, $\alpha \notin \Gamma$.
(iv) Suponhamos que $\alpha \to \beta \in \Gamma$. (a) Se $\alpha \in \Gamma$, então, por (MP), $\beta \in \Gamma$. (b) Se $\alpha \notin \Gamma$, pela definição de CMC, então $\neg\alpha \in \Gamma$. Portanto, se $\alpha \to \beta \in \Gamma$, então $\neg\alpha \in \Gamma$ ou $\beta \in \Gamma$. Suponhamos agora que $\neg\alpha \in \Gamma$ ou $\beta \in \Gamma$. Se $\neg\alpha \in \Gamma$, então, pelo item (i), $\Gamma \vdash \neg\alpha$. E, $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$; logo $\Gamma \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$. Portanto, $\alpha \to \beta \in \Gamma$. Se $\beta \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \beta$. Como $\beta \to (\alpha \to \beta)$ é uma tautologia, segue-se que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ e, assim, que $\alpha \to \beta \in \Gamma$. □

Lema 3 (Lema de Lindenbaum)**.** *Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas. Então existe um conjunto Δ de fórmulas tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e Δ é um CMC.*

Demonstração. Tomemos uma enumeração $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ de todas as fórmulas da linguagem. Construímos uma sequência enumerável de conjuntos Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:
$\Delta_o = \Gamma$,
Para $n > 0$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cup \{\alpha_n\}$, se $\Delta_{n-1} \cup \{\alpha_n\}$ é consistente. Caso contrário $\Delta_n = \Delta_{n-1}$.

Mostraremos primeiro que:

(1) Δ_n é consistente, para $n \geq 0$

Suponhamos que Δ_n seja inconsistente. Por definição, $\Delta_n \vdash \alpha$ e $\Delta_n \vdash \neg\alpha$. Por definição, existe um subconjunto $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de Δ tal que $(\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Pela hipótese do lema, Γ é consistente e, portanto, $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ $\nsubseteq \Gamma$. Então, deve existir algum Δ_j tal que $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \nsubseteq \Delta_j$, tal que $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subseteq \Delta_{j+1}$. Mas Δ_j é consistente e Δ_{j+1} é inconsistente — o que não é possível pela construção de Δ_{j+1}. Logo, Δ_n é consistente.

Mostraremos agora que:

(2) Seja $\Delta = \cup\Delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Δ é maximal.

Suponhamos que Δ não seja maximal. Então existe uma fórmula α tal que $\alpha \notin \Delta$ e $\neg\alpha \notin \Delta$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, $\alpha \notin \Gamma$ e $\neg\alpha \notin \Gamma$. Pelo processo de construção de Δ, α e $\neg\alpha$ foram testadas e, se ambas não pertencem a Δ, então $\Delta_j \cup \{\neg\alpha\}$ é inconsistente e $\Delta_j \cup \{\alpha\}$ é inconsistente. Nesse caso, Δ_j já seria inconsistente. Portanto, Δ é maximal. □

Seja agora α uma fórmula qualquer. O conjunto prova de α, $|\alpha|$, é definido como $\{\Gamma : \Gamma$ é um CMC e $\alpha \in \Gamma\}$.

Lema 4. *Sejam α e β fórmulas quaisquer. Então:*

(i) $|\neg\alpha| = -|\alpha|$;
(ii) $|\alpha \wedge \beta| = |\alpha| \cap |\beta|$;
(iii) $|\alpha \vee \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$;
(iv) $|\alpha \to \beta| = -|\alpha| \cup |\beta|$;
(v) $|\alpha \leftrightarrow \beta| = (-|\alpha| \cup |\beta|) \cap (-|\beta| \cup |\alpha|)$;
(vi) $|\alpha| \subseteq |\beta|$ sse $\vdash \alpha \to \beta$;
(vii) $|\alpha| = |\beta|$ sse $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Demonstração.
(i) $\Gamma \in |\neg\alpha|$ sse $\neg\alpha \in \Gamma$ sse $\alpha \notin \Gamma$ sse $\Gamma \notin |\alpha|$ sse $\Gamma \in -|\alpha|$.
(ii) $\Gamma \in |\alpha \wedge \beta|$ sse $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$ sse $\Gamma \in |\alpha| \cap |\beta|$.
(iii) $\Gamma \in |\alpha \vee \beta|$ sse $\alpha \in \Gamma$ ou $\beta \in \Gamma$ sse $\Gamma \in |\alpha| \cup |\beta|$.
(iv) $\Gamma \in |\alpha \to \beta|$ sse $\neg\alpha \in \Gamma$ ou $\beta \in \Gamma$ sse $\Gamma \in -|\alpha| \cup |\beta|$.
(v) $\Gamma \in |\alpha \leftrightarrow \beta|$ sse $\Gamma \in |(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)|$ sse (item (ii) acima) $\Gamma \in |(\alpha \to \beta)| \cap |(\beta \to \alpha)|$ sse (item (iv) acima) $\Gamma \in (-|\alpha| \cup |\beta|) \cap (-|\beta| \cup |\alpha|)$.
(vi) (1) Suponhamos que $\vdash \alpha \to \beta$ e seja $\Gamma \in |\alpha|$. Então $\alpha \in \Gamma$ e $\Gamma \vdash \beta$ (por MP). Então $\beta \in \Gamma$ e $\Gamma \in |\beta|$. Logo, $|\alpha| \subseteq |\beta|$. (2) Suponhamos que $|\alpha| \subseteq |\beta|$. Para todo CMC Γ, se $\Gamma \in |\alpha|$, então $\Gamma \in |\beta|$. Em outras palavras, se $\alpha \in \Gamma$, então $\beta \in \Gamma$. Disso se segue que não existe um CMC Γ tal que $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \notin \Gamma$ e, assim, que não existe um CMC Γ tal que $\alpha \wedge \neg\beta \in \Gamma$. Logo, para todo CMC Γ, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \in \Gamma$. Assim, $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Portanto, dadas as equivalências, $\vdash \alpha \to \beta$.
(vii) $|\alpha| = |\beta|$ sse, se $\Gamma \in |\alpha|$, então $\Gamma \in |\beta|$ e se $\Gamma \notin |\alpha|$, então $\Gamma \notin |\beta|$ sse, se $\alpha \in \Gamma$, então $\beta \in \Gamma$ e se $\alpha \notin \Gamma$, então $\beta \notin \Gamma$ sse $\alpha \leftrightarrow \beta \in \Gamma$ sse $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. □

Definição 15. Seja Γ um conjunto qualquer de fórmulas. Então $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) = \{\alpha : \Box\alpha \in \Gamma\}$.

Lema 5. *Seja Γ um conjunto de fórmulas consistente tal que $\neg\Box\alpha \in \Gamma$, para alguma α. Então $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\}$ é consistente.*

Demonstração. Suponhamos que $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}$ seja inconsistente. Então, para alguma β, $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ e $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}\vdash\neg\beta$. Disso se segue que $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta\wedge\neg\beta$. Suponhamos que $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\neq\emptyset$. Por definição, existe um subconjunto $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}\subseteq\varepsilon^{\Box}(\Gamma)$, tal que

$$\vdash(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n\wedge\neg\alpha)\to(\beta\wedge\neg\beta),$$

que é equivalente a $\vdash\neg(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n\wedge\neg\alpha)$. Assim, $\vdash(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n)\to\alpha$. Por (RK), temos

$$\vdash(\Box\gamma_1\wedge\cdots\wedge\Box\gamma_n)\to\Box\alpha.$$

O que equivale a

$$\vdash\neg(\Box\gamma_1\wedge\cdots\wedge\Box\gamma_n\wedge\neg\Box\alpha).$$

Logo,

$$\vdash(\Box\gamma_1\wedge\cdots\wedge\Box\gamma_n\wedge\neg\Box\alpha)\to(\beta\wedge\neg\beta).$$

Ora, $\{\Box\gamma_1,\ldots,\Box\gamma_n,\neg\Box\alpha\}\subseteq\Gamma$. Logo, $\Gamma\vdash\beta\wedge\neg\beta$. Assim Γ é inconsistente, o que é contrário a hipótese do lema. Portanto, $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}$ é consistente.

Por outro lado, se $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)=\emptyset$, então, se $\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\cup\{\neg\alpha\}$ é inconsistente, $\{\neg\alpha\}$ é inconsistente. Mas então $\vdash\alpha$ e, por $\mathrm{RN}_{\Box}$, $\vdash\Box\alpha$. Disso se segue que $\{\neg\Box\alpha\}$ é inconsistente, contrariando a hipótese do lema. □

Vamos agora definir o que é um modelo canônico para EMD-S4 para que, na sequência, possamos demonstrar a completude do sistema.

Definição 16. $\mathfrak{M}_c=\langle W,S,R,V\rangle$ é um modelo canônico para EMD-S4 se satisfaz as seguintes condições:

(i) $W=\{\Gamma:\Gamma$ é um CMC $\}$;
(ii) $|\alpha|\in S(\Gamma)$ sse $O\alpha\in S(\Gamma)$, para todo $\Gamma\in W$;
(iii) $R=\{\langle\Gamma,\Delta\rangle:\varepsilon^{\Box}(\Gamma)\subseteq\Delta\}$;
(iv) $V(\mathbf{p})=|\mathbf{p}|$, para toda variável proposicional $\mathbf{p}$.

Lema 6. *Seja $\mathfrak{M}_c$ um modelo canônico. Então, para toda fórmula α e para todo $\Gamma\in W$, $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\alpha$ sse $\alpha\in\Gamma$.*

Demonstração. A prova é por indução em fórmulas.
(a) $\alpha=\mathbf{p}$, para alguma variável proposicional $\mathbf{p}$. Por definição, $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\mathbf{p}$ sse $\Gamma\in V(\mathbf{p})$ sse $\Gamma\in|\mathbf{p}|$ sse $\mathbf{p}\in\Gamma$.
(b) $\alpha=\neg\beta$. $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\alpha$ sse $\mathfrak{M}_c,\Gamma\nvDash\beta$ sse (hipótese de indução) $\beta\notin\Gamma$ sse $\neg\beta\in\Gamma$.
(c) $\alpha=\beta\to\delta$. $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\alpha$ sse $\mathfrak{M}_c,\Gamma\nvDash\beta$ ou $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\delta$. Pela hipótese indutiva, $\mathfrak{M}_c,\Gamma\nvDash\beta$ sse $\beta\notin\Gamma$, e $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\delta$ sse $\delta\in\Gamma$. Agora, $\beta\notin\Gamma$ ou $\delta\in\Gamma$ sse $\beta\to\delta\in\Gamma$. Logo, $\mathfrak{M}_c,\Gamma\vDash\beta\to\delta$ sse $\beta\to\delta\in\Gamma$.

(d) $\alpha = O\beta$. $\mathfrak{M}_c, \Gamma \vDash O\beta$ sse $||\beta|| \in S(\Gamma)$. Pela hipótese indutiva, para todo $\Delta \in W$, temos que $\mathfrak{M}_c, \Delta \vDash \beta$ sse $\beta \in \Delta$, isto é, $||\beta|| = |\beta|$. Assim, $||\beta|| \in S(\Gamma)$ sse $|\beta| \in S(\Gamma)$. Pela definição de S em um modelo canônico, $|\beta| \in S(\Gamma)$ sse $O\beta \in \Gamma$. Assim, $\mathfrak{M}_c, \Gamma \vDash O\beta$ sse $O\beta \in \Gamma$.
(e) $\alpha = \Box\beta$. (i) Se $\Box\alpha \in \Gamma$, então, para todo Δ, tal que $R\Gamma\Delta$, $\alpha \in \Delta$. Pela hipótese indutiva, se $\alpha \in \Delta$, então $\Delta \vDash \alpha$, para todo Δ. Logo, $\Gamma \vDash \Box\alpha$. (ii). Se $\Box\alpha \notin \Gamma$, então $\neg\Box\alpha \in \Gamma$, pois Γ é CMC. Pelo lema 5, temos que $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \cup \{\neg\alpha\}$ é consistente. Pelo lema de Lindenbaum, deve haver algum CMC Δ tal que $R\Gamma\Delta$ e $\alpha \notin \Delta$. Pela hipótese de indução, há então um Δ tal que $R\Gamma\Delta$ e $\Delta \nvDash \alpha$. Portanto, $\Gamma \nvDash \Box\alpha$. □

Para a demonstração do teorema de completude, precisamos de um modelo canônico em que as condições (m) e (d), que correspondem aos axiomas (M_O) e (D_O), sejam satisfeitas e R seja reflexiva e transitiva. Começaremos mostrando que R tem essas propriedades em todo modelo canônico para EMD-S4.

Teorema 3. *Seja $\mathfrak{M}_c = \langle W, R, S, V \rangle$ um modelo canônico para EMD-S4. Então R é reflexiva e transitiva no modelo.*

Demonstração. (i) Temos que $\vdash \Box\alpha \to \alpha$. Para mostrar que R é reflexiva, precisamos mostrar que, para todo Γ, $R\Gamma\Gamma$, ou seja, que $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Seja então $\alpha \in \varepsilon^{\Box}(\Gamma)$. Logo, $\Box\alpha \in \Gamma$. Segue-se disto e de $\vdash \Box\alpha \to \alpha$ que $\Gamma \vdash \alpha$, e que $\alpha \in \Gamma$. Logo, $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Gamma$ e R é reflexiva.

(ii) Temos que $\vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$. Se R é transitiva, então para todo Γ, Δ, e Φ, se $R\Gamma\Delta$ e $R\Delta\Phi$, então $R\Gamma\Phi$. Assim, temos que mostrar que, para todo Γ, Δ e Φ, se $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Delta$ e $\varepsilon^{\Box}(\Delta) \subseteq \Phi$, então $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Phi$.

Seja, então, $\alpha \in \varepsilon^{\Box}(\Gamma)$. Logo, $\Box\alpha \in \Gamma$, e, dado que $\vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$, também temos que $\Box\Box\alpha \in \Gamma$. Como $\Box\Box\alpha \in \Gamma$, então $\Box\alpha \in \varepsilon^{\Box}(\Gamma)$, e como $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Delta$, temos $\Box\alpha \in \Delta$. Assim, $\alpha \in \varepsilon^{\Box}(\Delta)$. De $\Box\alpha \in \Delta$ e de $\vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$, podemos concluir que $\Box\Box\alpha \in \Delta$. Logo, $\Box\alpha \in \varepsilon^{\Box}(\Delta)$. Como $\varepsilon^{\Box}(\Delta) \subseteq \Phi$, então $\alpha \in \Phi$ e $\Box\alpha \in \Phi$. Logo $\varepsilon^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Delta \subseteq \Phi$. □

Tratemos agora das condições (d) e (m). No menor modelo canônico, para todo Γ, $S(\Gamma)$ contém apenas conjuntos-prova de fórmulas. Porém, para lógicas que contêm o axioma (M), o menor modelo canônico não satisfaz a condição (m) (CHELLAS, 1980, p. 214). Contudo, podemos mostrar que há outros modelos canônicos que satisfazem (m) e (d).

Seja $\mathfrak{M}_c = \langle W, S, R, V \rangle$ o menor modelo canônico para EMD-S4. Seja então $\mathfrak{M}^+ = \langle W, S^+, R, V \rangle$ o modelo em que, para cada $\Gamma \in W$ e cada $X \subseteq W$:

$$X \in S^+(\Gamma) \text{ sse } Y \subseteq X \text{ para algum } Y \in S(\Gamma).$$

Isto é, $S^+(\Gamma) = \{X \subseteq W : |\alpha| \subseteq X$ para alguma $O\alpha \in \Gamma\}$. E, claro, para cada $\Gamma \in W$, $S(\Gamma) \subseteq S^+(\Gamma)$.

Precisamos provar que $\mathfrak{M}^+$, a chamada *suplementação* de $\mathfrak{M}$, é um modelo canônico para EMD-S4.

Lema 7. *$\mathfrak{M}^+ = \langle W, S^+, R, V\rangle$ é um modelo canônico para EMD-S4.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a condição (ii) da definição de modelo canônico é satisfeita. Isto é, que para toda α e todo $\Gamma \in W$:

$$|\alpha| \in S^+(\Gamma) \text{ sse } O\alpha \in \Gamma.$$

Vejamos. Se $O\alpha \in \Gamma$, então $|\alpha| \in S(\Gamma)$, pois $\mathfrak{M}$ é canônico para EMD-S4. Como $\Gamma \in W$, $S(\Gamma) \subseteq S^+(\Gamma)$, então $|\alpha| \in S^+(\Gamma)$. Com isso, mostramos que se $O\alpha \in \Gamma$, então $|\alpha| \in S^+(\Gamma)$.

Para a outra direção, suponhamos que $|\alpha| \in S^+(\Gamma)$. Portanto, para algum $Y \subseteq |\alpha|$, $Y \in S(\Gamma)$. Uma vez que $\mathfrak{M}$ é o menor modelo canônico, $S(\Gamma)$ só contém conjuntos-prova, para cada Γ. Isso significa que, para alguma fórmula β, $Y = |\beta|$. Disto se segue que $|\beta| \subseteq |\alpha|$, e $O\beta \in \Gamma$. Pelo lema 4 (vi), temos que $\vdash \beta \rightarrow \alpha$. Como (RM) é válida, podemos concluir que $\vdash O\beta \rightarrow O\alpha$. Logo, como $O\beta \in \Gamma$, então $O\alpha \in \Gamma$. □

Lema 8. *Seja $\mathfrak{M}_c$ o menor modelo canônico para EMD-S4 e $\mathfrak{M}^+$ sua suplementação. Então, as condições (m) e (d) são válidas em $\mathfrak{M}^+$.*

Demonstração. Para (m). Temos, seguindo o lema anterior, que $\mathfrak{M}^+$ é um modelo canônico para EMD-S4. Seja Γ um elemento de W, e X e Y são subconjuntos de W tais que $X \cap Y \in S^+(\Gamma)$. Pela construção de $\mathfrak{M}^+$, deve haver algum Z, tal que $Z \subseteq (X \cap Y)$ e $Z \in S(\Gamma)$. Disto se segue que $Z \subseteq X$ e $Z \subseteq Y$. Novamente, pela construção de $\mathfrak{M}^+$, $X \in S^+(\Gamma)$ e $Y \in S^+(\Gamma)$. Assim, a condição (m) vale.

Para (d). Seja Γ um elemento de W, e X um subconjunto de W, tal que $X \in S^+(\Gamma)$. Pela construção de $S^+(\Gamma)$, $|\alpha| \subseteq X$ para alguma fórmula α tal que $|\alpha| \in S(\Gamma)$. Seguiremos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que $-X \in S^+(\Gamma)$. Da mesma maneira, temos que $|\beta| \subseteq -X$ para alguma fórmula β tal que $|\beta| \in S(\Gamma)$. Uma vez que $|\alpha| \subseteq X$ e $|\beta| \subseteq -X$, podemos concluir que, para todo CMC Δ, $\alpha \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$. Ou seja, $\vdash \alpha \leftrightarrow \neg\beta$. Por ($RE_O$), podemos chegar a $\vdash O\alpha \leftrightarrow O\neg\beta$. Como $|\alpha| \in S(\Gamma)$, temos (por definição) que $O\alpha \in \Gamma$. Deduzimos disto que $O\neg\beta \in \Gamma$. Por outro lado, como $|\beta| \in S(\Gamma)$, temos que $O\beta \in \Gamma$. Como Γ é um CMC, segue-se disso e do axioma (D) que $\neg O\neg\beta \in \Gamma$. Uma contradição que surgiu da suposição de que $-X \in S^+(\Gamma)$. Logo, $-X \notin S^+(\Gamma)$. □

Teorema 4 (Completude)**.** *Se $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$*

Demonstração. Suponhamos que $\Gamma \nvdash \alpha$. Então, pelo lema 2, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é consistente. Sendo $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ consistente, pelo lema de Lindenbaum, existe um conjunto Δ maximal consistente tal que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$. Pela definição de modelo canônico, Δ é um mundo no modelo canônico $\mathfrak{M}^+$ para EMD-S4 anteriormente apresentado. Uma vez que $\Gamma \subseteq \Delta$, temos, pelo lema 6 que para toda $\gamma \in \Delta$, $\mathfrak{M}^+, \Delta \vDash \gamma$. Assim, $\mathfrak{M}^+, \Delta \vDash \Gamma$. Por outro lado, $\{\neg\alpha\} \subseteq \Delta$, então temos que $\neg\alpha \in \Delta$ e $\alpha \notin \Delta$. Mais uma vez usando o lema 6, temos que $\mathfrak{M}^+, \Delta \nvDash \alpha$. Temos assim, um modelo $\mathfrak{M}^+$ e um mundo Δ em $\mathfrak{M}^+$ tal que $\mathfrak{M}^+, \Delta \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{M}^+, \Delta \nvDash \alpha$. Pela definição de consequência lógica, $\Gamma \nvDash \alpha$. □

3.5 DECIDIBILIDADE

Um sistema de lógica é decidível se o conjunto de teoremas do sistema é decidível. Em outras palavras, se existe um método efetivo para decidir, para toda e qualquer fórmula da linguagem do sistema, se ela é ou não um teorema.

Mostraremos a decidibilidade de EMD-S4 usando o método de filtrações.

Definição 17. Seja Γ um conjunto de fórmulas fechado sob subfórmulas e $\mathfrak{M}$ um modelo. Definimos a relação de equivalência $\equiv_\Gamma$ (equivalência relativamente a Γ) para todos os mundos w e w' em $\mathfrak{M}$, da seguinte maneira:

$$w \equiv_\Gamma w' \quad \text{sse} \quad \text{para cada } \alpha \in \Gamma,\ \mathfrak{M}, w \vDash \alpha \text{ sse } \mathfrak{M}, w' \vDash \alpha.$$

Em outras palavras, se $w \equiv_\Gamma w'$, então todas as fórmulas em Γ terão o mesmo valor de verdade em w e w'. Para toda fórmula α pertencente a Γ, α será verdadeira no mundo w do modelo $\mathfrak{M}$ se e somente se α é verdeira no mundo w' do modelo $\mathfrak{M}$. Isso é o que queremos dizer quando afirmamos que dois mundos no modelo são equivalentes relativamente a Γ.

A relação $\equiv_\Gamma$ é de fato uma relação de equivalência e, com ela, dividimos o conjunto de mundos em W em classes de equivalências [ ] disjuntas e não-vazias.

Definição 18. Seja Γ um conjunto de fórmulas fechado sob subfórmulas e $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V\rangle$ um modelo. Então:

(a) se $w \in W$, $[w]_\Gamma = \{w' \in W : w \equiv_\Gamma w'\}$;

(b) se $X \subseteq W$, $[X]_\Gamma = \{[w] : w \in X\}$.

A definição de $\equiv_\Gamma$, $[w]_\Gamma$, e $[X]_\Gamma$ depende essencialmente de Γ, mas não havendo risco de confusão, eliminaremos o subscrito escrevendo apenas $\equiv$, $[w]$, e $[X]$.

Definição 19. Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$ um modelo e Γ um conjunto de fórmulas fechado sob subfórmulas. Uma *filtração de* $\mathfrak{M}$ *através de* Γ é um modelo $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, S^*, R^*, V^* \rangle$ tal que:

(a) $W^* = [W]$;

(b) para todo $w \in W$, e para cada fórmula $O\alpha \in \Gamma$,

$$||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w) \text{ sse } [||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w]);$$

(c) para todo $w, w' \in W$,

  (i) se Rww', então $R^*[w][w']$;

  (ii) se $R^*[w][w']$, então para toda sentença $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$;

(d) $V^*(\mathbf{p}) = [V(\mathbf{p})]$, para toda variável $\mathbf{p} \in \Gamma$.

Mostraremos a seguir que, dados um conjunto Γ de fórmulas fechado sob subfórmulas, um modelo $\mathfrak{M}$ e uma filtração $\mathfrak{M}^*$ de $\mathfrak{M}$ através de Γ, $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}^*$ são equivalentes com relação às fórmulas em Γ.

Teorema 5. *Seja* $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, S^*, R^*, V^* \rangle$ *uma* Γ*-filtração de um modelo* $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V \rangle$*, em que* Γ *é um conjunto fechado sob subfórmulas. Então, para cada* $\alpha \in \Gamma$ *e todo* $w \in W$*:*

$$\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \quad \textit{sse} \quad \mathfrak{M}^*, [w] \vDash \alpha,$$

isto é, $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] = ||\alpha||^{\mathfrak{M}^*}$*, para toda* $\alpha \in \Gamma$.

Demonstração. A prova é por indução em fórmulas. Seja w um mundo qualquer em $\mathfrak{M}$.

(a) Seja α alguma variável $\mathbf{p}$ em Γ:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{M}, w \vDash \mathbf{p} & \text{sse} & w \in V(\mathbf{p}) & \text{(por 11.i)} \\ & \text{sse} & [w] \in [V(\mathbf{p})] & \text{(por 18.b)} \\ & \text{sse} & [w] \in V^*(\mathbf{p}) & \text{(por 19.d)} \\ & \text{sse} & \mathfrak{M}^*, [w] \vDash \mathbf{p} & \text{(por 11.i).} \end{array}$$

(b) Os casos de $\neg$ e $\rightarrow$ são simples e não vamos mostrá-los aqui.

(c) Seja então $\alpha = O\beta$.

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{M}, w \vDash O\beta & \text{sse} & ||\beta||^{\mathfrak{M}} \in S(w) & \text{(por 11.iv)} \\ & \text{sse} & [||\beta||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w]) & \text{(por 19.b)} \\ & \text{sse} & ||\beta||^{\mathfrak{M}^*} \in S^*([w]) & \text{(hipótese de indução)} \\ & \text{sse} & \mathfrak{M}^*, [w] \vDash O\beta & \text{(por 11.iv).} \end{array}$$

(d) Seja agora $\alpha = \Box\beta$.

Vamos primeiro demonstrar que, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\beta$, então $\mathfrak{M}^*, [w] \vDash \Box\beta$. Suponhamos que $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\beta$, e que haja um mundo $[w']$ em $\mathfrak{M}^*$ tal que $R[w][w']$. Pela definição (19.c.ii), e das duas suposições, podemos concluir que $\mathfrak{M}, w' \vDash \beta$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}^*, [w'] \vDash \beta$. E dado que $[w']$ é um mundo qualquer em $\mathfrak{M}^*$ tal que $R^*[w][w']$, podemos concluir, pela definição (11), que $\mathfrak{M}^*, [w] \vDash \Box\beta$.

Para a outra direção, suponhamos que $\mathfrak{M}^*, [w] \vDash \Box\beta$. Então, para todo $[w']$ em $\mathfrak{M}^*$ tal que $R^*[w][w']$, $\mathfrak{M}^*, [w'] \vDash \beta$. Seja w' um mundo em $\mathfrak{M}$ tal que Rww'. Pela definição (19.c.i), temos que $R^*[w][w']$. Portanto, $\mathfrak{M}^*, [w'] \vDash \beta$. Do que se segue, pela hipótese de indução, que $\mathfrak{M}, w' \vDash \beta$. Uma vez que Rww' e w' é um mundo qualquer, $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\beta$. □

Corolário 2. *Seja $\mathfrak{M}^*$ uma Γ-filtração de um modelo $\mathfrak{M}$. Então $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}^*$ são equivalentes módulo Γ, isto é, para toda $\alpha \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \alpha$ sse $\mathfrak{M}^* \vDash \alpha$.*

Demonstração. A prova é imediata. □

Se uma lógica é axiomatizável e tem a propriedade de modelo finito — isto é, cada sentença que não seja teorema do sistema falha em algum modelo finito — então é decidível (CHELLAS, 1980). EMD-S4 é axiomatizável e agora precisamos mostrar que o sistema é determinado pela classe de modelos finitos cujas estruturas sejam tais que R é reflexiva e transitiva e S satisfaz as condições (m) e (d). A estratégia é mostrar que, se alguma fórmula α não é teorema de EMD-S4 e, por completude, não é válida, então ela falha em algum modelo $\mathfrak{M}$. Mostraremos como definir uma filtração de $\mathfrak{M}$ cujo universo é finito no qual α também falha, utilizando o teorema anterior e seu corolário.

A definição (19) acima, contudo, abre espaço para diferentes filtrações de um mesmo modelo. Chellas, tratando de modelos para sistemas normais, define o que seria uma filtração mais fina, bem como uma mais grosseira. Para a filtração mais fina de um modelo, em vez de (c.i) e (c.ii) na definição (19), teríamos somente (CHELLAS, 1980, p.102):

(c) $R^*[w][w']$ sse para toda sentença $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$.

Pode-se demonstrar que essa filtração mais fina é de fato uma filtração.

Analogamente, ao tratar de modelos minimais (para sistemas clássicos de lógica modal), Chellas (p.227) também mostra que há várias filtrações de um mesmo modelo. Podemos igualmente ter uma filtração mais fina, bem como uma mais grosseira. Para a filtração mais fina de um modelo, acrescentamos a (b) na definição (19), a exigência de que cada $S^*([w])$ contenha somente os conjuntos $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}]$ tais que $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$. E pode-se mostrar que essa filtração mais fina assim definida tem mesmo as propriedades de uma filtração tal como definida em (19).

Por outro lado, é ainda um fato bem conhecido (CHELLAS,1980, p.104, por exemplo) que, embora filtrações preservem propriedades de R como serialidade e reflexividade, isso não acontece em geral com a transitividade. E nem todas as condições de S são preservadas nas filtrações — como a condição (m), por exemplo. Assim, precisamos encontrar, entre as filtrações de um modelo, uma que preserve as propriedades de R e de S para que tenhamos ao final um modelo que seja um modelo para EMD-S4, ou seja, um modelo em que R seja reflexiva e transitiva e S satisfaça as condições (d) e (m).

Faremos essa construção em dois passos, começando pela seguinte definição.

Definição 20. Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V\rangle$ um modelo para EMD-S4, e Γ um conjunto de fórmulas fechado sob subfórmulas. Dizemos que $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, S^*, R^*, V^*\rangle$ é a *filtração transitiva mais fina* de $\mathfrak{M}$ se, para todo w e $w' \in W$,

(a) $W^* = [W]$;

(b) para todo $w \in W$, e para cada fórmula $O\alpha \in \Gamma$,

  (i) $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$ sse $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w])$;
  (ii) cada $S^*([w])$ contém somente os conjuntos $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}]$ tais que $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$;

(c) para todo $w, w' \in W$,

  $R^*[w][w']$ sse para toda fórmula $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$

(d) $V^*(\mathbf{p}) = [V(\mathbf{p})]$, para toda variável $\mathbf{p} \in \Gamma$.

Num segundo momento, tomamos a suplementação do modelo acima definido e mostramos que ela é uma filtração e que tem as propriedades de um modelo para EMD-S4.

Definição 21. Seja $\mathfrak{M}^* = \langle W^*, S^*, R^*, V^*\rangle$ a filtração transitiva mais fina de um modelo $\mathfrak{M}$ para EMD-S4. A *suplementação* de $\mathfrak{M}^*$ é o modelo $\mathfrak{M}^{*+} = \langle W^*, S^{*+}, R^*, V^*\rangle$ em que, para cada $[w] \in W^*$ e cada $X \subseteq W^*$:

$$X \in S^{*+}([w]) \text{ sse } Y \subseteq X \text{ para algum } Y \in S^*([w]).$$

Teorema 6. *Seja $\mathfrak{M} = \langle W, S, R, V\rangle$ um modelo em que S satisfaz as condições (m) e (d) e R é reflexiva e transitiva e seja Γ um conjunto de fórmulas fechado sob subfórmulas. Seja $\mathfrak{M}^*$ a filtração transitiva mais fina de $\mathfrak{M}$ através de Γ. Então sua suplementação, $\mathfrak{M}^{*+}$, é uma filtração de $\mathfrak{M}$ através de Γ em que S^{*+} satisfaz (m) e (d) e R^* tem a propriedade de ser reflexiva e transitiva.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $\mathfrak{M}^{*+}$ é uma Γ-filtração de $\mathfrak{M}$. Evidentemente, por construção, $W^* = [W]$ e $V^*(\mathbf{p}) = [V(\mathbf{p})]$, para toda variável $\mathbf{p} \in \Gamma$. Precisamos agora tratar das cláusulas (b) e (c) da definição (19).

Comecemos com (b). Precisamos mostrar que, para todo $w \in W$ e toda $O\alpha \in \Gamma$, $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$ sse $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^{*+}([w])$.

Suponhamos primeiro que $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$. Pela definição (20.b.i), $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w])$ e, assim, $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^{*+}([w])$ pela definição (21) de suplementação de $\mathfrak{M}^*$.

Suponhamos agora que $[||\alpha||^{\mathfrak{M}}] \in S^{*+}([w])$. Por (21), que define a suplementação de $\mathfrak{M}^*$, deve haver algum $Y \in S^*([w])$ tal que $Y \subseteq X$, e por (20.b), para alguma β tal que $O\beta \in \Gamma$, $Y = [||\beta||^{\mathfrak{M}}]$. Assim, $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w])$ e $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \subseteq [||\alpha||^{\mathfrak{M}}]$. Segue-se que $||\beta||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$, já que $\mathfrak{M}^*$ é a mais fina filtração transitiva de $\mathfrak{M}$ através de Γ, conforme (20.b.ii). Agora, por hipótese, $\mathfrak{M}$ satisfaz a condição (m). Todo superconjunto (extensão) de $||\beta||^{\mathfrak{M}}$ pertence a $S(w)$. Precisamos mostrar apenas que $||\beta||^{\mathfrak{M}} \subseteq ||\alpha||^{\mathfrak{M}}$.

Agora, $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \subseteq [||\alpha||^{\mathfrak{M}}]$ significa que $\{[w] : w \in ||\beta||^{\mathfrak{M}}\} \subseteq \{[w] : w \in ||\alpha||^{\mathfrak{M}}\}$. Seja $w' \in ||\beta||^{\mathfrak{M}}$. Portanto, $[w'] \in \{[w] : w \in ||\beta||^{\mathfrak{M}}\}$, e $[w'] \in \{[w] : w \in ||\alpha||^{\mathfrak{M}}\}$. Segue-se que $w' \in ||\alpha||^{\mathfrak{M}}$. Então, $||\beta||^{\mathfrak{M}} \subseteq ||\alpha||^{\mathfrak{M}}$ e, disto, podemos concluir que $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$.

Passemos agora à cláusula (c) da definição (19). Precisamos mostrar que, para todo $w, w' \in W$,

(i) se Rww', então $R^*[w][w']$;
(ii) se $R^*[w][w']$, então para toda sentença $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$

(c.ii) decorre imediatamente da maneira como R^* foi definida em (20.c). Temos que mostrar (c.i). Suponhamos então que Rww', para mundos w e w' em $\mathfrak{M}$. Para mostrar que $R^*[w][w']$, precisamos mostrar que, para toda $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$. Suponhamos, então, que $\Box\alpha \in \Gamma$ e $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$. Então, para todo $w' \in W$ tal que Rww', $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$. Logo, $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$. Agora, como R é transitiva, $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ é válida; logo, $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$; logo, $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\Box\alpha$. Isso significa que, para todo $w' \in \mathfrak{M}$, se Rww' então $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$. Logo, $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$. Isso é o que precisávamos provar; logo, $R^*[w][w']$.

Assim, $\mathfrak{M}^{*+}$ é uma filtração de $\mathfrak{M}$ através de Γ. Falta ainda demonstrar que R^* é reflexiva e transitiva, e que S^{*+} satisfaz (m) e (d).

Para a transitividade de R^*, suponhamos que $R^*[w][w']$ e $R^*[w'][w'']$ para mundos w, w' e w'' em W. Pela cláusula (c) da definição (20), temos:

(1) para toda $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$;

(2) para toda $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w'' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w'' \vDash \Box\alpha$.

Para mostrar que $R^*[w][w'']$, precisamos mostrar que

(3) para toda $\Box\alpha \in \Gamma$, se $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$, então $\mathfrak{M}, w'' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w'' \vDash \Box\alpha$.

Suponhamos que $\Box\alpha \in \Gamma$ e $\mathfrak{M}, w \vDash \Box\alpha$. Por (1), $\mathfrak{M}, w' \vDash \Box\alpha$ e, por (2), $\mathfrak{M}, w'' \vDash \alpha$ e $\mathfrak{M}, w'' \vDash \Box\alpha$. Logo, $R^*[w][w'']$, e R^* é transitiva.

Para a reflexividade de R^*, temos que R é reflexiva; assim, para todo $w \in W$, Rww. Como $\mathfrak{M}^{*+}$ é uma filtração de $\mathfrak{M}$, pela definição (19.c.i) temos que $R^*[w][w]$; logo, R^* é reflexiva.

Trataremos agora das condições (m) e (d) de S^{*+}. Sendo $\mathfrak{M}^{*+}$ uma suplementação, satisfaz (m) automaticamente. Seja $[w] \in W^*$; precisamos demonstrar que $S^{*+}([w])$ satisfaz (d). Suponhamos que não satisfaça; assim, há um conjunto $X \in S^{*+}([w])$ tal que $-X \in S^{*+}([w])$. Pela construção de S^{*+}, deve haver alguma β tal que $O\beta \in \Gamma$, $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w])$ e $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \subseteq X$. Analogamente, deve haver alguma γ tal que $O\gamma \in \Gamma$, $[||\gamma||^{\mathfrak{M}}] \in S^*([w])$ e $[||\gamma||^{\mathfrak{M}}] \subseteq -X$.

Segue-se que $||\beta||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$ e $||\gamma||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$, já que $\mathfrak{M}^*$ é a mais fina filtração transitiva de $\mathfrak{M}$ através de Γ, conforme (20.b.ii). Como $\mathfrak{M}$ satisfaz (d), $-||\beta||^{\mathfrak{M}} \notin S(x)$. Por outro lado, é evidente que $[||\beta||^{\mathfrak{M}}] \cap [||\gamma||^{\mathfrak{M}}] = \emptyset$ e, portanto, $||\beta||^{\mathfrak{M}} \cap ||\gamma||^{\mathfrak{M}} = \emptyset$. Se $||\gamma||^{\mathfrak{M}} = -||\beta||^{\mathfrak{M}}$, temos uma contradição. Suponhamos então que $||\gamma||^{\mathfrak{M}} \subseteq -||\beta||^{\mathfrak{M}}$. Mas, neste caso, temos outra vez uma contradição, pois $\mathfrak{M}$ satisfaz (m) e, se $||\gamma||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$, por (m) temos que $-||\beta||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$, contrariando a condição (d) também satisfeita por $\mathfrak{M}$.

Concluindo, se $X \in S^{*+}([w])$, para $X \subseteq W^*$, então $-X \notin S^{*+}([w])$. Ou seja, $\mathfrak{M}^{*+}$ satisfaz a condição (d). □

Teorema 7. *EMD-S4 é determinado pela classe de modelos finitos em que S satisfaz as condições (m) e (d) e em que R é reflexiva e transitiva.*

Demonstração. Se α é um teorema de EMD-S4, então é válida na classe de modelos em que R é reflexiva e transitiva e S satisfaz (m) e (d); em particular, α é válida na classe de modelos finitos satisfazendo essas condições.

Para a outra direção, suponhamos que α não é um teorema de EMD-S4. Então α é falsa em algum mundo w de algum modelo $\mathfrak{M}$ para EMD-S4. Seja Γ algum conjunto finito de fórmulas fechado sob subfórmulas tal que $\alpha \in \Gamma$, seja $\mathfrak{M}^{*+}$ a suplementação de $\mathfrak{M}^*$, a filtração transitiva mais fina através de Γ de $\mathfrak{M}$, conforme a definição (20). Pelo teorema 6, $\mathfrak{M}^{*+}$ é uma filtração através de Γ de $\mathfrak{M}$ em que R^* é reflexiva e transitiva e S^{*+} satisfaz (m) e (d). Uma vez que Γ é um conjunto finito, $\mathfrak{M}^{*+}$ é um modelo finito. Pelo teorema 5, w e $[w]$ concordam a respeito de toda fórmula em Γ; assim, $\mathfrak{M}^{*+}, [w] \nvDash \alpha$. Logo, α é falsa em algum modelo finito. □

Em vista do resultado acima, todo não-teorema de EMD-S4 falha em algum modelo finito, do que se segue que EMD-S4 tem a propriedade dos modelos finitos. Como EMD-S4 é também axiomatizável, segue-se que é decidível.

CONCLUSÃO

Este trabalho foi iniciado por uma análise do que já havia sido feito em lógica deôntica. No capítulo um, relembramos algumas passagens do desenvolvimento dos sistemas deônticos, com o objetivo final em mente: o de construir um sistema deôntico que pudesse lidar com dilemas morais. Partimos do que já estava pronto para ver o que poderíamos reaproveitar e o que deveríamos descartar. Nosso critério de decisão para adotar ou não um axioma como parte do sistema a ser construído foi a correspondência com o que é costumeiramente dito e aceito em linguagem normativa. Para cada teorema encontrado na Lógica Deôntica Standard, que usamos como ponto de partida, buscamos encontrar um contraexemplo na linguagem natural que pudesse torná-lo duvidoso. Quando não houve razão para descartar a fórmula em questão, nós a aceitamos em nosso sistema.

No capítulo dois, demos atenção especial ao teorema $\neg(Op \wedge O\neg p)$. Esta fórmula é uma consequência lógica dos axiomas de LDS, mas alguns estudiosos a colocaram em xeque, considerarando um tipo de situação na qual ela não seria válida — uma situação dilemática. Buscamos argumentar em favor de manter a fórmula e repensar a compreensão de dilemas morais. Como definido no trabalho, um dilema moral é uma situação na qual um agente deve cumprir uma obrigação A e deve cumprir uma obrigação B, mas não pode cumprir ambas. A fim de invalidar a formalização de dilemas dada por $Op \wedge O\neg p$, mostramos, primeiramente, que ela não se segue de nenhuma regra de inferência. Assumidos os axiomas, não podemos, a partir deles e usando as regras, chegar a conclusão de que $O\neg p$ se já temos Op em nosso sistema.

Ainda no capítulo dois, argumentamos também que a interpretação de $\neg p$ como uma obrigação não é compatível com nenhum sistema normativo que já tenha aceito p como uma obrigação. Apresentamos, também, uma proposta de formalização que trata de dilemas como conflitos.

No capítulo três, apresentamos um sistema formal a que demos o nome de EMD-S4. Este sistema funcionou bem para lidar com dilemas morais do modo como o estamos interpretando: $Op \wedge Oq \wedge \neg\Diamond(p \wedge q)$. Demonstramos ainda teoremas de correção, completude e decidibilidade. Do ponto de vista formal, o sistema parecia ser adequado. E quando analisado em relação a sua correspondência com a linguagem natural, não parecia apresentar problemas. O sistema parecia ferir nenhum princípio normativo, ainda que ele fosse incompleto. Por incompleto queremos aqui dizer que o sistema não é capaz de traduzir todas as especificidades dos sistemas normativos. Quanto a isso, ainda não temos certeza se algum dia algum sistema será capaz.

Entretanto nem tudo foi como o planejado, pois o axioma (M_O) e a condição (m) nos trazem resultados indesejáveis. Essas consequências já foram criticadas no capítulo um. O problema do axioma (M_O) é que podemos inferir que todas as consequências lógicas de uma obrigação são, também, obrigatórias. Até certo ponto, isso é desejável e alguns autores mantêm o axioma (M_O) justamente por isso, por exemplo, Chellas (1980). Contudo, se a lógica de base é a clássica, temos como consequência que todas as tautologias são obrigatórias, se houver alguma obrigação. Rejeitamos essa ideia ao recusarmos a regra (RO) e o axioma (OT). Do axioma (M_O) não se segue que todos os mundos tenham obrigações, uma consequência de (RO), mas ainda temos que, se em um mundo possível há alguma obrigação, então nesse mundo as tautologias são obrigatórias. Isso ocorre porque, pela condição (m), temos que, se um conjunto X qualquer pertence a $S(w)$, todas as extensões de X pertencem. Sendo o conjunto universo W uma extensão de qualquer um de seus subconjuntos, W irá pertencer também a $S(w)$. O conjunto verdade de qualquer tautologia é o próprio W. Pela definição de verdade temos que $\mathfrak{M}, w \vDash O\alpha$ sse $||\alpha||^{\mathfrak{M}} \in S(w)$. Seja α uma tautologia, então $||\alpha|| = W$, e $W \in S(w)$, logo $O\alpha$.

O mesmo ocorre com a regra (RM_O): $\alpha \to \beta \,/\, O\alpha \to O\beta$. Seja β uma tautologia e α obrigatória. A fórmula $\alpha \to \beta$ será válida e, sendo α obrigatória, temos $O\alpha$ e podemos concluir $O\beta$. Novamente, as tautologias serão obrigatórias apenas nos mundos onde haja pelo menos uma obrigação. Ainda podemos ter mundos sem qualquer dever moral. Porém defendemos que as tautologias, se tomadas como obrigatórias, são vazias. Não dizem nada para o agente sobre como ele deve agir.

A solução mais direta seria eliminar o axioma (M_O) e a regra (RM_O), e ficarmos apenas com um sistema minimal ED-S4. Por outro lado, tirando o fato das tautologias se tornarem obrigatórias, parece razoável esperar que as consequências lógicas de uma obrigação sejam também obrigatórias.

Ao eliminarmos o axioma M também perdemos (T2) $\neg O(p \wedge \neg p)$. (T2) é um teorema de EMD-S4 provado a partir de M_O. A solução para este caso é introduzir (T2) como teorema de um sistema ED-S4 e acrescentar uma condição (t2) $\emptyset \notin S(w)$ ao definir uma estrutura.

Outra possibilidade para lidar com o axioma (M_O) é restringindo-o. Quando pensamos sobre o que é uma obrigação, ou julgamos um agente pelo seu ato, pensamos nas ações que são consideradas contingentes. Se o agente não tinha escolha diante de uma ação, não podemos torná-lo culpado. Por outro lado, se cabia ao agente uma ação diferente, podemos considerar o valor moral de sua ação. Quando damos valores às ações e as julgamos como morais ou não, pensamos que o agente poderia ter agido de um modo diferente, mas optou por aquele curso de ação. Novamente recorremos aos mundos possíveis como um recurso para o julgamento da ação. Para que uma ação seja moral (ou imoral), ela deve ser tomada como contingente. Partindo desta ideia, poderíamos introduzir um novo operador ∇ para restringirmos o axioma (M_O). $\nabla\alpha$ de modo informal é lido como 'α é contingente' e o operador ∇ pode ser definido assim:

$$\nabla\alpha \quad =_{\mathrm{df}} \quad \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha.$$

Ao invés de colocarmos $O(\alpha\wedge\beta) \to (O\alpha \wedge O\beta)$ como um axioma, poderíamos substituí-lo pelo seguinte esquema:

$$(\mathrm{M}_O^\nabla) \quad (\nabla\alpha \wedge \nabla\beta \wedge O(\alpha\wedge\beta)) \to (O\alpha \wedge O\beta).$$

Se α e β são contingentes e é obrigatório α e β, então é obrigatório α e é obrigatório β.

E a condição (m^∇) poderia ser descrita por:

se $X \in S(w)$ e $X \subseteq Y$ e $Y \neq W$, então $Y \in S(w)$.

Com isso, eliminamos a consequência indesejada de tomarmos tautologias como obrigatórias. Por outro lado, eliminamos também a possibilidade de uma obrigação poder ser cumprida em todos os mundos do modelo. Seja p uma obrigação qualquer. Se p é verdadeira em todos os mundos possíveis de um modelo, então $\|p\| = W$, e p não poderia mais ser interpretada como uma obrigação. Uma possível solução para isso seria expandir o modelo $\mathfrak{M}$ incluindo nos mundos possíveis um mundo imperfeito f. Por definição, o mundo f do modelo é um mundo possível, em que todas as obrigações falham. Assim, para qualquer obrigação α, o conjunto verdade de α será no máximo igual ao conjunto $\{W - f\}$. Por analogia, podemos criar um mundo r para representar o mundo real e um mundo i para representar o mundo ideal. E o universo ainda incluiria outros mundos, que podemos chamar de intermediários, que seriam os mundos entre o imperfeito e o real e os mundos entre o real e o perfeito. Por definição, o mundo perfeito é aquele onde todas a obrigações são cumpridas. Expandimos o modelo de EMD-S4, e obteremos um modelo $\mathfrak{M}$, tal que $\mathfrak{M} = \langle W, f, r, i, S, R, V\rangle$. Temos que $f \in W$, $r \in W$, $i \in W$.

Outra possibilidade seria a de basear um sistema deôntico que contenha (M_O) usando uma lógica relevante, porém esta possibilidade deixaremos em aberto no momento, podendo ser retomada em projetos futuros.

Acreditamos ter chegado a uma interpretação formal adequada para dilemas morais e termos conseguido construir um sistema que o comporte. Mas nem de longe estamos no fim da pesquisa ... o que não é ruim!

BIBLIOGRAFIA

AQVIST, L. Deontic Logic. In: Gabbay, D.; Guenthner, F. **Handbook of Philosophical Logic.** v. II: Extensions of classical logic. Dordrecht: D. Reidel, 1984, p. 605–714.

BEAUCHAMP, T. L.; CHILDRESS, J. F. **Principles of biomedical ethics**. 5th ed. New York: Oxford University Press, 2001.

CHELLAS, B. F. **Modal logic**: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

CRUZ, A. M. P. **Lógica deôntica paraconsistente**: paradoxos e dilemas. Natal: EDUFRN, 2005.

DA COSTA, N. C. A. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. São Paulo: HUCITEC – EDUSP, 1980.

DA COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D.; BUENO, O. Paraconsistent logics and paraconsistency. In: Dale Jacquette; Dov M. Gabbay; Paul Thagard; John Woods. (Org.). **Handbook of the Philosophy of Science**. v. 5: Philosophy of Logic. Dordrecht: Elsevier, 2007, p. 655–781.

DE GREEF, J. Lógica deôntica. In: CANTO-SPERBER, M. (Org.) **Dicionário de ética e filosofia moral**. v. 1. Tradução de Ana Maria Ribeiro-Althoff et al. São Leopoldo: UNISINOS, 2003.

ENGELHARDT, T. **Fundamentos da Bioética**. São Paulo: Loyola, 1998.

FORRESTER, J. W. **Being good and being logical**: Philosophical groundwork for a new deontic logic. Armonk, NY; London: M. E. Sharpe, 1996.

GENSLER, H. J. **Formal Ethics**. London/New York: Routledge, 1996.

———. **Ethics: A Contemporary Introduction**. London/New York: Routledge, 1998.

GOWANS, C. W. (Org.) **Moral Dilemmas**. New York: Oxford University Press, 1987.

———. **Innocence Lost**. New York: Oxford University Press, 1994.

HAACK, S. **Filosofia das Lógicas**. Tradução de Cezar A. Mortari e Luiz Henrique Dutra. São Paulo: UNESP, 1980.

HILPINNEN, R. (Org.) **Deontic logic**: introductory and systematic readings. Dordrecht: D. Reidel, 1971.

———. **New studies in deontic logic**: Norms, Actions, and the Fundations of Ethics. Dordrecht: D. Reidel, 1971.

HOBBES, Th. **Leviathan**. Indianapolis, Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc., 1994.

HUGHES, G. E.; CRESWELL, M. J. **A New Introduction to Modal Logic**. London, New York: Routledge, 1996.

KANT, I. **Fundamentação da metafísica dos costumes**. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

———. Moral Duties. In: GOWANS, C. W. (Org.) **Moral Dilemmas**. New York: Oxford University Press, 1987, p. 34–51.

MARCUS, R. B. Moral Dilemmas and Consistency. In: GOWANS, C. W. (Org.) **Moral Dilemmas**. New York: Oxford University Press, 1987, p. 188–204.

MENDELSON, E. **Introduction to Mathematical Logic**. 2. ed. New York: D. Van Nostrand, 1979.

MILL, J. S. **Utilitarianism**. New York: Prometheus Books, 1987.

MORSCHER, E. The Definition of Moral Dilemmas: a Logical Confusion and a Clarification. **Ethical Theory and Moral Practice** v. 5, p. 485–91, 2002.

PERON, N. M. **Lógicas da Inconsistência Deôntica**. Dissertação de mestrado, Pós-Graduação em Filosofia, Unicamp, 2009.

PUGA, L. Z. **Uma lógica do querer: preliminares sobre um tema de Mally**. Tese de Doutorado em Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1985.

SAUTTER, F. T. **Aspectos lógico-filosóficos dos dilemas morais**. http://w3.ufsm.br/filosofia/resenhas/a1067faf0ea7c8567243c53acd010a8d.pdf (acesso em 18 de março de 2009)

TESTA, R. R. **Dilemas Deônticos: Uma Abordagem Baseada em Relações de Preferência**. Dissertação de mestrado, Unicamp, 2008.

TUGENDHAT, E. **Lições sobre ética**. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2007.

VERNENGO, R. J. Sobre algumas relações lógicas entre sistemas normativos jurídicos e morais. **Revista Brasileira de Filosofia**, v. XXXVIII, n. 155. São Paulo, 1989.

WRIGHT, G. H. von. Deontic logic. **Mind**, New Series, v. 60, n. 237, 1951, p. 1–15.

———. **A new system of deontic logic**. Danish Yearbook of Philosophy, 1964.

———. **The varieties of goodness**. Bristol: Thoemmes, 1963. (2a. impressão de 1996).

WILLIAMS, B. Ethical consistency. In: GOWANS, C. W. (Org.) **Moral Dilemmas**. New York: Oxford University Press, 1987, p. 115–37.