César Frederico dos Santos

O NATURALISMO DE MADDY E A AVALIAÇÃO DE CANDIDATOS A AXIOMA EM TEORIA DOS CONJUNTOS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Filosofia para a obtenção do Grau de Mestre em Filosofia.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Mariano Nogueira Coelho

Florianópolis

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, César Frederico dos
O naturalismo de Maddy e a avaliação de candidatos a axioma em teoria dos conjuntos [dissertação] / César Frederico dos Santos ; orientador, Antonio Mariano Nogueira Coelho - Florianópolis, SC, 2012.
166 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas. Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Inclui referências

1. Filosofia. 2. filosofia da matemática. 3. teoria dos conjuntos. 4. naturalismo. I. Coelho, Antonio Mariano Nogueira. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, professor Antonio Mariano, excelente professor desde a minha graduação, sempre muito atencioso durante todo o mestrado, e principal responsável pela minha formação filosófica nos conteúdos que foram decisivos para esta dissertação, desde tópicos em lógica e teoria dos conjuntos até filosofia da matemática em geral.

Agradeço aos membros da banca de qualificação, professores Décio Krause e Cezar Mortari, que também contribuíram de modo essencial para minha formação tanto na graduação quanto no mestrado, e que me instigaram, na qualificação, a expressar um posicionamento com respeito à filosofia de Maddy, o que resultou na seção final desta dissertação.

Agradeço ainda a todos os autores que facilitaram o acesso a suas ideias disponibilizando, ou permitindo que disponibilizassem, seus livros e artigos gratuitamente na web.

RESUMO

Em um certo sentido, a matemática usual pode ser reduzida à teoria dos conjuntos, isto é, os objetos matemáticos usuais podem ser definidos como conjuntos, e os teoremas que governam esses objetos podem ser provados em ZFC. Todavia, existem enunciados importantes — a hipótese do contínuo é o mais célebre deles — que são independentes de ZFC. A existência de enunciados independentes levanta a questão da necessidade e conveniência de estender ZFC pela adição de novos axiomas. Nesse contexto, é interessante dispor de critérios claros que permitam avaliar candidatos a axioma para uma extensão da teoria dos conjuntos que decidiria enunciados independentes. Maddy tem se dedicado intensamente à filosofia da teoria dos conjuntos, com destaque para a investigação de critérios para seleção de axiomas. Nesta dissertação, nosso objetivo é seguir o percurso de Maddy nessa investigação, atentando especialmente a sua defesa da autonomia da matemática com respeito à filosofia e às ciências naturais e ao correspondente papel preponderante da argumentação extrínseca nas discussões que estabeleceram os axiomas da atual teoria. Como pano de fundo filosófico, o naturalismo em matemática de Maddy é também objeto privilegiado da nossa atenção neste trabalho.

Palavras-chave: teoria dos conjuntos, naturalismo em matemática, Penelope Maddy.

ABSTRACT

In a certain sense, ordinary mathematics can be reduced to set theory, i.e., general mathematical objects can be defined as sets and the theorems about them can be proved from ZFC. However, there are important statements — the continuum hypothesis is the most famous among them — which are independent of ZFC. The existence of these statements raises a question about the necessity and convenience of extending ZFC, adding to it new axioms. In this context, it is interesting to have clear criteria for evaluating axiom candidates for an extension of ZFC that would decide independent statements. Maddy has focused intensely on philosophy of set theory, emphasizing the investigation of criteria for selection of set-theoretic axioms. In this dissertation, our goal is to understand and explain Maddy's investigation, with special attention to her defense of the autonomy of mathematics with respect to philosophy and natural sciences and the corresponding leading role of extrinsic arguments in the debates that established the current axioms of set theory. As philosophical background, naturalism in mathematics is also a privileged object of our attention in this work.
Keywords: set theory, naturalism in mathematics, Penelope Maddy.

SUMÁRIO

Introdução 11
1 TEORIA DOS CONJUNTOS 15
1.1 AXIOMAS 16
1.2 OS ORDINAIS E A DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS 24
1.3 OS CARDINAIS E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO 32
1.4 NÚMEROS INTEIROS, RACIONAIS, REAIS E COMPLEXOS 36
1.5 O UNIVERSO CONJUNTISTA 38
1.6 MODELOS DE ZFC, PROVAS DE CONSISTÊNCIA E A INDEPENDÊNCIA DE CH 41
2 TEORIA DOS CONJUNTOS COMO FUNDAMENTO DA MATEMÁTICA 49
3 MATEMÁTICA, FILOSOFIA E FÍSICA 61
3.1 MOTIVAÇÃO MATEMÁTICA DOS AXIOMAS 63
3.2 MATEMÁTICA E FILOSOFIA 85
3.3 MATEMÁTICA E FÍSICA 104
4 A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE MADDY 127
4.1 MAXIMIZAÇÃO E UNIFICAÇÃO 132
4.2 OBJETIVIDADE MATEMÁTICA 135
5 UM PARECER SOBRE PONTOS DA FILOSOFIA DE MADDY 145
REFERÊNCIAS 161

INTRODUÇÃO

Há séculos, a filosofia tem se dedicado a justificar nossas crenças mais básicas, e essa sempre foi uma tarefa árdua, por vezes ingrata. Para justificar por que assumimos uma crença, precisamos assumir outras crenças, e para justificar estas, novamente precisamos assumir outras, e assim por diante, na rota de uma regressão infinita. A maneira tradicional de barrar a regressão infinita consistia em supor que em algum momento atingíamos crenças óbvias, que dispensavam justificação por meio de outras crenças, porque gozavam de verdade clara e evidente. Essas verdades óbvias eram chamadas de *postulados* ou *axiomas*. A dificuldade, então, residia em descobrir quais eram as verdades óbvias adequadas, mas pouco se duvidava de que havia algo desse tipo. A geometria era a prova. Tudo mudou, porém, especialmente nos séculos XIX e XX. O surgimento das geometrias não-euclidianas, da teoria da relatividade, da teoria dos conjuntos com seus paradoxos, foram eventos que desbancaram do posto de verdade óbvia muita coisa tida como tal até então, e acabaram por lançar dúvidas sobre a própria noção tradicional de axioma. Atualmente, muito se duvida de que existam verdades óbvias, ou mesmo apenas verdades, sobre as quais se possa fundar nosso sistema de crenças. Apesar disso, continuamos impelidos pela necessidade de justificar nossas crenças e, sobretudo nas ciências formais, continuamos tendo de parar o encadeamento das justificativas em postulados ou axiomas. A diferença é que, agora, muitas vezes os axiomas não são mais pensados como verdades óbvias, embora os dicionários insistam nessa definição. Naturalmente surge a pergunta: o que caracteriza um axioma, no sentido atual?

O novo sentido de axioma está longe de ser bem definido e claro. Evidentemente, sob a perspectiva formal, um axioma, em uma dada teoria, nada mais é que uma fórmula da linguagem daquela teoria. Essa é a parte fácil da resposta. A parte intrigante e mais interessante, porém, está fora do alcance da perspectiva formal: o que diferencia uma fórmula de outra, e faz com que uma seja tomada como axioma, e a outra não? O que faz com que um sistema formal seja preferido a outro? A intuitividade continua sendo um requisito valorizado, mas difícil de avaliar em um cenário em que clareza e evidência ficaram para trás.

Hoje a tarefa filosófica de justificar nossas crenças tem diante de si não só a missão de encontrar ou lançar pressupostos básicos, como antigamente, mas também o desafio de reinterpretar a noção de axioma. A teoria dos conjuntos[1] é um bom objeto de estudo sob esse aspecto por diversas razões. Uma delas é que a investigação sobre conjuntos em seu estado atual conta com uma teoria axiomática — seus pressupostos estão em alguma medida explícitos — o que nos permite partir de um ponto avançado, em que uma grande parte do trabalho já foi feito. Examinar historicamente como esse trabalho se deu, como se consolidaram os atuais axiomas da teoria dos conjuntos, contribui para compreender as transformações por que passou a noção de axioma. Outra razão é que a teoria dos conjuntos pode, em certo sentido, ser vista como integrante dos pressupostos mais básicos da matemática, e a matemática, por sua vez, tem sido vista pela tradição filosófica como integrante essencial dos pressupostos mais básicos do conhecimento em geral. Assim, no quadro amplo da investigação filosófica de nossas crenças mais fundamentais, o exame da teoria dos conjuntos, por um lado, é um estudo de caso — estudamos com interesse filosófico a teoria dos conjuntos em busca das justificativas dos seus pressupostos — e, por outro, ilumina a questão mais ampla dos fundamentos do conhecimento em geral.

Penelope Maddy tem se dedicado intensamente ao estudo filosófico da teoria dos conjuntos. Atenta ao desenvolvimento atual da teoria, os objetivos filosóficos de Maddy estão vigorosamente ligados à discussão matemática em torno dos enunciados independentes, como a hipótese do contínuo. Suplementar a teoria dos conjuntos com novos axiomas é uma saída vislumbrada por muitos para essa discussão, mas que passa inevitavelmente pela avaliação e comparação de vários candidatos a axioma, tarefa que seria auxiliada pela presença de critérios claros para julgar os diferentes candidatos. A filosofia de Maddy visa justamente fornecer elementos para a reflexão acerca desses critérios. Para tal, Maddy concentra-se no estudo histórico do desenvolvimento da teoria dos conjuntos, coletando os argumentos que foram decisivos no estabelecimento dos axiomas atuais. Combinando as análises históricas com aspectos contemporâneos, Maddy busca conclusões que possam auxiliar no debate atual sobre novos axiomas. Colateralmente, Maddy desenvolve uma posição *naturalista* em filosofia da matemática, posteriormente batizada de *filosofia segunda*, que proporciona uma imagem filosófica inovadora da matemática como um todo. Acompanhar as ideias de Maddy sobre esses temas é o nosso objetivo nesta dissertação.

[1] O uso de artigo definido singular diante de 'teoria dos conjuntos' é um abuso de linguagem, visto haver uma grande variedade de teorias de conjuntos. Vamos cometê-lo ao longo de todo o texto. Pode-se entender, na maior parte das vezes, que estamos nos referindo à teoria padrão, ZFC.

Para tanto, algum conhecimento técnico básico sobre a teoria dos conjuntos é imprescindível. Por isso começamos, no capítulo 1, pela apresentação de aspectos iniciais de teoria dos conjuntos. Toda discussão filosófica requer previamente um conhecimento mínimo do tema que discute. Esse conhecimento pode ser pressuposto ou pode ser fornecido. Optamos por fornecê-lo em parte, recapitulando sucintamente alguns aspectos da teoria que mencionamos nos capítulos subsequentes, como forma de sedimentar um terreno comum sobre o qual a discussão filosófica possa fluir.

No capítulo 2, tratamos de entender, seguindo Maddy, a relação entre a teoria dos conjuntos e os demais ramos da matemática usual sob o aspecto fundacional. Examinamos em que sentido pode-se afirmar que a teoria dos conjuntos constitui os fundamentos da matemática.

Uma tese central do naturalismo de Maddy é a defesa da autonomia da matemática, no que opõe-se ao naturalismo quiniano, que subordinava a matemática às ciências naturais. A matemática atual, diz Maddy, é tão indiferente a considerações de cunho científico quanto a ponderações estritamente filosóficas. A matemática progride por suas próprias luzes, sustenta Maddy, e não guiada por concepções filosóficas ou visando proximidade com as ciências naturais, como filósofos e mesmo matemáticos têm visto a questão. O capítulo 3 reconstitui os argumentos de Maddy a favor dessa tese, os quais baseiam-se sobretudo no exame de episódios da história recente da matemática ligados ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Na seção 3.1, examinamos as justificativas matemáticas que foram importantes para a fixação dos axiomas atuais da teoria dos conjuntos. Na seção 3.2, vimos por que é inadmissível que as justificativas dos conhecimentos matemáticos em geral, e dos axiomas da teoria dos conjuntos em particular, sejam filosóficas; na seção 3.3, vimos por que é inadmissível que elas sejam científicas.

No capítulo 4, toma forma a filosofia da matemática de Maddy. A partir da ideia de argumentação extrínseca, introduzida no capítulo 3, abordamos como Maddy formula duas máximas matemáticas norteadoras da avaliação de candidatos a axioma da teoria dos conjuntos, *unificar* e *maximizar*. Essas máximas exemplificam o tipo de considerações genuinamente matemáticas que, em vez de ponderações filosóficas ou relacionadas à aplicação científica, efetivamente guiam o desenvolvimento da matemática. *Unificar* e *maximizar* seguem um esquema explicativo interessante, que mais tarde permitiu que Maddy desenvolvesse uma explicação da objetividade matemática em certo sentido “pós-metafísica” — como ela a qualifica em seu último livro (Cf.

MADDY, 2011, p. 116) — que também é tema do capítulo 4.

Sua explicação da objetividade matemática e a noção de prática matemática — como o leitor notará, uma noção importante que permeia as principais discussões nesta dissertação, por ser crucial ao naturalismo de Maddy — são alvo de uma avaliação crítica, à guisa de conclusão, na seção final.

Entendemos que a obra de Maddy toca em pontos essenciais para a compreensão do empreendimento matemático, notadamente a percepção de que a matemática, assim como as demais atividades humanas, está sujeita a mudanças históricas, aliada à consciência de que a matemática é uma disciplina autônoma e que deve ser entendida em seus próprios termos. São esses pontos que intentamos destacar nas páginas seguintes.

1 TEORIA DOS CONJUNTOS

Existe uma grande variedade de teorias dos conjuntos, com diferenças importantes entre elas. No entanto, existe uma variedade de teoria dos conjuntos mais comum, que é a mais estudada e a que está presente na maior parte dos livros introdutórios, que se consolidou como a teoria padrão. Esta é a *teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha*, comumente referida por *ZFC*. É essa teoria que vamos apresentar aqui. Mesmo ZFC pode ser apresentada com muitas variações. Em nossa apresentação, vamos mesclar elementos principalmente de Kunen (1980), Kunen (2009), Enderton (1977), Machover (1996) e Hrbacek e Jech (1999).

Nossa breve exposição da teoria dos conjuntos visa subsidiar temas desenvolvidos nos capítulos seguintes. Para tal, os assuntos abordados aqui apresentam, em um grau um pouco maior de precisão e detalhamento, alguns dos tópicos sobre teoria dos conjuntos mencionados mais à frente. Na maior parte das vezes, não vamos desenvolver as provas dos teoremas que citarmos. Essas provas podem ser encontradas nas referências mencionadas acima.

ZFC, tal como entendido aqui, é uma teoria de primeira ordem. Isso quer dizer que a linguagem de ZFC é uma linguagem de 1ª ordem, que os axiomas de ZFC incluem axiomas lógicos, e que os teoremas de ZFC são consequências de seus axiomas e de regras de inferência. Uma caracterização formal de teorias de 1ª ordem pode ser encontrado, por exemplo, em Shoenfield (1967). Para nossos propósitos, e principalmente para facilitar a leitura do que vem a seguir, é suficiente dizer que adotamos uma linguagem de 1ª ordem composta pelos seguintes símbolos lógicos:

$$\wedge, \neg, \exists, =, (,)$$

além de uma lista infinita de variáveis $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, \ldots$. Os dois primeiros símbolos podem ser lidos, intuitivamente, como *e* e *não*. Os demais conectivos lógicos, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, que se leem respectivamente como *ou*, *implica* e *se e somente se*, são definidos a partir dos primitivos $\wedge$ e $\neg$ da maneira usual. $\exists$ é o quantificador existencial, que pode ser lido como *existe*. O quantificador universal, $\forall$, que pode ser lido como *para todo*, é definido a partir do quantificador existencial da maneira usual. O predicado binário de igualdade, =, é considerado aqui um símbolo lógico, e os parênteses são usados para assegurar a leitura única das fórmulas.

O único símbolo não-lógico que ZFC utiliza é $\in$, símbolo de predicado binário que intuitivamente pode ser lido como *pertence a*, *é elemento de* ou *é membro de*. Símbolos adicionais de que precisaremos serão oportunamente introduzidos como abreviações de expressões em que ocorrem unicamente os símbolos apresentados aqui ou outros símbolos previamente definidos. Introduzimos já algumas notações:

(a) Outras letras do alfabeto latino (A, a, B, b, etc.), grego (α, β, γ, etc.) e hebraico ($\aleph$) podem ser usadas.

(b) $x \notin y$ e $x \neq y$ abreviam, respectivamente, $\neg(x \in y)$ e $\neg(x = y)$.

(c) Para nos referir a uma fórmula qualquer com as variáveis $x_1, ..., x_n$ dentre suas variáveis livres, escrevemos $\phi(x_1, ..., x_n)$.

(d) $\exists! x\, \phi(x)$ abrevia $\exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi(y) \to x = y)$, onde $\phi(y)$ resulta da substituição de x por y em $\phi(x)$, submetida às restrições usuais.

Se ϕ é uma fórmula, um *fecho universal* de ϕ é uma sentença obtida pela quantificação universal de todas as suas variáveis livres. Por exemplo, se ϕ é $x = y$, então $\forall x \forall y(x = y)$ e $\forall y \forall x(x = y)$ são fechos universais de ϕ. Como todos os fechos universais de ϕ são equivalentes, podemos falar diretamente, cometendo um inofensivo abuso de linguagem, *do* fecho universal de ϕ.

1.1 AXIOMAS

Passamos a apresentar os axiomas não-lógicos de ZFC. Ao mesmo tempo, vamos apresentando resultados que nos interessam e definindo recursos que facilitam os desenvolvimentos subsequentes. Dentre esses recursos, incluem-se noções conjuntistas importantes, como união e intersecção de conjuntos, bem como outras noções matemáticas básicas, como as de relação e função. Assim, à medida que vamos apresentando ZFC, já vamos formando a compreensão de como noções e entidades matemáticas usuais encontram definições precisas em termos conjuntistas. Não vamos nos demorar discutindo o papel que cada axioma cumpre na teoria. Tratamos desse tema na seção 3.1, em que abordamos as justificativas matemáticas dos axiomas. As formulações dos axiomas bem como as definições que apresentamos nesta seção seguem Kunen (2009), exceto quando mencionamos outra referência.

Axioma 1 (Extensionalidade)**.** $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$

O axioma de extensionalidade é o critério de identidade para conjuntos. Ele afirma que dois conjuntos são iguais se têm a mesma extensão, isto é, se todo elemento de x é elemento de y e vice-versa. Em outras palavras, um conjunto é totalmente determinado por seus elementos.

Axioma 2 (Esquema de Separação)**.** *Para toda fórmula ϕ sem y livre, o fecho universal de uma fórmula obtida pelo seguinte esquema é um axioma de separação:*

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$$

O esquema de axiomas de separação dá origem a infinitos axiomas, um para cada fórmula ϕ da linguagem de ZFC. Pelo axioma da extensionalidade, o y que um axioma de separação afirma existir é único, e vamos denotá-lo por $\{x : x \in z \wedge \phi\}$ ou $\{x \in z : \phi\}$. Intuitivamente, a fórmula ϕ representa uma propriedade que os elementos de y têm de satisfazer. Ela pode ter qualquer número finito de variáveis livres, mas nenhuma delas pode ser y. Essa restrição visa evitar definições auto-referenciais, que podem acarretar contradições. Por exemplo, se permitíssemos que ϕ fosse a fórmula $x \notin y$, teríamos uma contradição caso houvesse algum z não vazio.

O esquema de axiomas de separação exprime a ideia de que, dados um conjunto z e uma propriedade expressa por ϕ, existe um conjunto y composto pelos elementos de z que satisfazem aquela propriedade. Ele é uma limitação do *princípio de compreensão*, segundo o qual dada uma propriedade ϕ, existe um conjunto composto pelos elementos que satisfazem ϕ. O princípio de compreensão permite que os elementos que satisfazem ϕ sejam coletados no universo, ao passo que o esquema de separação exige que esses elementos sejam coletados somente dentro de um conjunto z "previamente" existente. Essa limitação, devida a Zermelo (2010a), visa evitar paradoxos ligados ao princípio de compreensão. O mais notável deles é o paradoxo de Russell. Suponha que ϕ seja a fórmula $x \notin x$. Seja $\mathbf{R}$ a coleção de todos os x tais que $x \notin x$. Então, dado um conjunto x qualquer, $x \in \mathbf{R} \leftrightarrow x \notin x$. Considerando o próprio $\mathbf{R}$, temos $\mathbf{R} \in \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, o que leva a uma contradição.

Não dispomos do princípio de compreensão na teoria dos conjuntos, mas por vezes podemos preferir apresentar um conjunto como definido por uma propriedade. Podemos fazer isso, desde que tomemos alguns cuidados. Para tal, introduzimos a notação $\{x : \phi(x)\}$. Informalmente, dizemos que $\{x : \phi(x)\}$ define uma *classe*. Se conseguimos provar em ZFC que existe um conjunto A tal que $\forall x(x \in A \leftrightarrow \phi(x))$, este conjunto é único pela extensionalidade, e o denotamos por $\{x : \phi(x)\}$. Nesse caso, dizemos que $\{x : \phi(x)\}$ *existe*. Porém, se não há tal conjunto, dizemos que $\{x : \phi(x)\}$ *não existe*, ou *forma uma classe própria*. Dizemos que a fórmula $\phi(x)$ especifica tal classe própria, e a denotamos por uma letra maiúscula em negrito. De todo enunciado em que usamos uma classe própria, podemos eliminá-la substituindo-a pela fórmula que a especifica. Por exemplo, o enunciado $\forall x(x \in \mathbf{R})$ pode ser reescrito como $\forall x(x \notin x)$. Formalmente, não existe distinção entre uma classe própria e a fórmula que a especifica.

Extensionalidade e separação nos permitem provar dois teoremas importantes.

Teorema 1.1.1. $\exists y \forall x(x \notin y)$

Pela lógica subjacente — a lógica clássica de primeira ordem —, sabemos que o domínio da teoria não pode ser vazio, e portanto existe pelo menos um conjunto z. Aplicando separação sobre z com a propriedade $x \neq x$, obtemos um conjunto sem elemento algum. O teorema 1.1.1 diz que existe um conjunto vazio. Pelo axioma da extensionalidade, esse conjunto é único, e vamos denotá-lo por $\varnothing$. O conjunto vazio pode ser definido assim: $\varnothing = \{x : x \neq x\}$.

Teorema 1.1.2. $\neg\exists z \forall x(x \in z)$

O teorema 1.1.2 diz que a classe de todos os conjuntos não é um conjunto, ou seja, forma uma classe própria. Denotamos essa classe por $\mathbf{V}$. A classe universal pode ser definida assim: $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$.

Apenas com esses dois axiomas, não provamos que existem mais conjuntos além do vazio. Podemos, a partir do vazio, seguir formando classes — $\{x : x = \varnothing\}$, $\{x : x = \varnothing \vee x = \{\varnothing\}\}$, e assim por diante — mas não podemos provar que tais classes são conjuntos. O único conjunto já formado de que dispomos é $\varnothing$, e os únicos axiomas para formar conjuntos de que dispomos são os dados pelo esquema de separação, e do $\varnothing$ não temos como separar nenhum outro conjunto diferente. É certo que assumimos que existia um conjunto no domínio da teoria e dele separamos o vazio; mas não temos como provar que aquele conjunto já não era o próprio vazio. Para ver isso, basta considerar que o domínio contenha apenas $\varnothing$ e interpretar $\in$ como $\varnothing$. Os axiomas 1 e 2 são verdadeiros, e a sentença $\forall y(y = \varnothing)$ também é verdadeira. Logo, os axiomas 1 e 2 não podem refutar $\forall y(y = \varnothing)$.

O esquema de separação, sozinho, não capta todas as instâncias interessantes do princípio de compreensão. Precisamos de mais axiomas, instâncias presumivelmente seguras do princípio de compreensão, que nos permitam formar mais conjuntos sem nos levar a contradições.

Axioma 3 (Par)**.** $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

O axioma do par afirma que, dados conjuntos x e y quaisquer, existe um conjunto z que tem x e y entre seus elementos. Por separação, existe o conjunto cujos elementos são apenas x e y: $\{w \in z : w = x \vee w = y\}$. Pela extensionalidade, tal conjunto é único, e o denotamos por $\{x, y\}$. O axioma do par nos permite formar conjuntos com um elemento (quando $x = y$) ou dois elementos, mas não nos permite formar conjuntos com mais elementos.

Axioma 4 (União)**.** $\forall w \exists z \forall y \forall x(x \in y \wedge y \in w \rightarrow x \in z)$

O axioma da união diz que, dado qualquer conjunto w, existe um conjunto z ao qual pertencem os elementos dos elementos de w. Isso permite a formação de conjuntos com qualquer número finito de elementos. Por exemplo, suponha que A é um conjunto com dois elementos, e queremos a partir dele formar um conjunto B com três elementos. O processo é simples. Usando o axioma do par, obtemos $\{A\}$; usando par novamente, obtemos $\{A, \{A\}\}$; então fazemos a união deste último para obter B. B tem os mesmos elementos de A, mais um elemento, que é o próprio A (observaremos adiante que A não pode ser elemento de A, por conta do axioma do fundamento). Se repetirmos o processo colocando B no lugar de A, obteremos um conjunto com quatro elementos, sobre o qual podemos repetir o processo e obter um conjunto com cinco elementos, e assim sucessivamente. Também podemos formar conjuntos com quaisquer n elementos “previamente” dados. Por exemplo, formamos o conjunto cujos elementos são A, B, C aplicando o axioma do par para obter $\{A, B\}$ e $\{C\}$ e depois $\{\{A, B\}, \{C\}\}$, sobre o qual aplicamos união para obter $\{A, B, C\}$.

Com os axiomas introduzidos até aqui podemos definir alguma noções conjuntistas básicas.

Definição (Inclusão de conjuntos)**.** Para quaisquer conjuntos A e B, a expressão $A \subset B$, que intuitivamente pode ser lida como A *está contido em* B ou A *é subconjunto de* B, abrevia $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$. Isto é, A está contido em B se e somente se todo elemento de A é elemento de B.

Definição (Par ordenado)**.** Para distinguir a ordem dos elementos de um conjunto, quando isso for importante, definimos o *par ordenado* de a e b, denotado $\langle a, b \rangle$, como o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Essa é a conhecida definição de Kuratowski. Outras definições seriam possíveis, como por exemplo $\{\{\varnothing, a\}, \{\{\varnothing\}, b\}\}$. A única exigência que uma definição de par ordenado deve cumprir é assegurar que, se $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle$, então $x = z$ e $y = w$. É fácil ver que a definição que adotamos, e a alternativa, cumprem essa exigência.

Definição (União)**.** Para qualquer conjunto A, definimos o conjunto *união* de A, denotado por $\bigcup A$, como: $\{x : \exists y \in A(x \in y)\}$. Para C e D quaisquer, $C \cup D$ é definido como $\bigcup\{C, D\}$.

$\bigcup A$ existe porque, pelo axioma da união, existe um conjunto B ao qual pertencem os elementos dos elementos de A. $\bigcup A$ resulta de separação sobre B: $\{x \in B : \exists y \in A(x \in y)\}$.

Definição (Intersecção)**.** Para qualquer conjunto $A \neq \varnothing$, definimos o conjunto *intersecção* de A, denotado por $\bigcap A$, como: $\{x : \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$. Para C e D quaisquer, $C \cap D$ é definido como $\bigcap\{C, D\}$.

$\bigcap A$ existe porque podemos tomar um conjunto B qualquer tal que $B \in A$, já que $A \neq \varnothing$, e separar dele o conjunto $\bigcap A$, assim: $\{x \in B : \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$. A intersecção não é definida para $A = \varnothing$ porque $\bigcap A = \mathbf{V}$ (se $A = \varnothing$, $y \in A \rightarrow x \in y$ é verdadeira para todo y).

Definição (Diferença)**.** Para conjuntos A e B quaisquer, definimos o conjunto *diferença* de A e B, nesta ordem, que denotamos por $A \smallsetminus B$, como segue: $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definição (Sucessor)**.** Para qualquer conjunto x, o conjunto *sucessor de* x, denotado por $S(x)$, é definido assim: $S(x) = x \cup \{x\}$.

Definição (Conjunto unitário)**.** Para denotar que x é um *conjunto unitário*, introduzimos a notação $UNIT(x)$, definida assim: $UNIT(x)$ *se e somente se* $\exists y \in x \forall z \in x(z = y)$.

Definição (Relação)**.** R é uma relação se e somente se R é um conjunto composto apenas por pares ordenados, isto é, $\forall z \in R\, \exists x \exists y(z = \langle x, y\rangle)$.

- $dom(R) = \{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$
- $im(R) = \{y : \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$

Estamos justificados nas nossas definições de $dom(R)$ e $im(R)$, que lemos *domínio* de R e *imagem* de R, respectivamente, porque esses conjuntos podem ser separados em $\bigcup\bigcup R$, assim:

$$dom(R) = \{x : x \in \bigcup\bigcup R \wedge \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

$$im(R) = \{y : y \in \bigcup\bigcup R \wedge \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

Como é usual, escrevemos xRy para denotar que $\langle x, y\rangle \in R$ e $x \not R\, y$ para denotar que $\langle x, y\rangle \notin R$.

Definição (Função)**.** R é uma *função* se e somente se R é uma relação e

$$\forall x \in dom(R)\ \exists! y \in im(R)(\langle x, y\rangle \in R)$$

Isto é, R é uma função se é uma relação e, para todo $x \in dom(R)$, existe um único y tal que $\langle x, y\rangle \in R$. Nesse caso, $R(x)$ denota tal y. Acrescentamos algumas notações e definições usuais relacionadas a funções:

- $f : A \to B$ significa que f é uma função, $A = dom(f)$ e $im(f) \subset B$, e $f : A \to B$ também denota a própria função f.

- $f : A \to B$ é *injetiva* se e somente se $\forall x, x' \in A\ (f(x) = f(x') \to x = x')$.

- $f : A \to B$ é *sobrejetiva* se e somente se $im(f) = B$.

- $f : A \to B$ é *bijetiva* se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

- $f \upharpoonright C = \{\langle x, y\rangle \in f : x \in C\}$ (lê-se f restrita a C).

Embora os axiomas introduzidos até aqui tenham nos permitido definir função e relação, ainda não podemos formar funções e relações a partir de subconjuntos do produto cartesiano de dois conjuntos quaisquer, digamos $A \times B$, como é usual. Com esses axiomas, não podemos definir o produto cartesiano, porque não podemos provar que $A \times B$ existe. Em geral, o produto cartesiano é definido a partir do axioma do conjunto das partes ou a partir de axiomas de substituição. Por simplicidade, vamos usar o primeiro para definir o produto cartesiano.

Axioma 5 (Conjunto das Partes)**.** $\forall x \exists y \forall z(z \subset x \to z \in y)$

Este axioma, também chamado de *axioma do conjunto potência*, diz que para qualquer conjunto x, existe um conjunto y ao qual pertencem todos os subconjuntos de x. Aplicando separação sobre y, definimos o *conjunto das partes* de x, denotado por $\wp(x)$, como: $\{w \in y : w \subset x\}$. $\wp(x)$ é exatamente o conjunto de todos os subconjuntos de x. Outra denominação para $\wp(x)$ é *conjunto potência* de x. A definição a seguir segue Enderton (1977, p. 37).

Definição (Produto Cartesiano)**.** Para quaisquer conjuntos A e B, definimos o *produto cartesiano* de A por B, denotado por $A \times B$, como: $\{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$.

$A \times B$ existe porque pode ser separado em $\wp(\wp(A \cup B))$, assim:

$$\{w \in \wp(\wp(A \cup B)) : \; w = \langle x, y\rangle \; \wedge \; x \in A \; \wedge \; y \in B\}$$

É oportuno observar que essa justificativa da definição de produto cartesiano, que resume uma prova da existência de $A \times B$, depende da nossa definição de par ordenado. Se quiséssemos uma prova da existência de $A \times B$ que valesse para qualquer definição apropriada de par ordenado, poderíamos usar axiomas de substituição, como faz Kunen (2009, p. 26).

Axioma 6 (Esquema de Substituição)**.** *Para toda fórmula $\phi(x, y)$ sem z livre, o fecho universal de uma fórmula obtida pelo seguinte esquema é um axioma de substituição:*

$$\forall x \in w \, \exists! y \, \phi(x, y) \to \exists z \forall x \in w \, \exists y \in z \, \phi(x, y)$$

O esquema de axiomas de substituição, assim como o esquema de separação, dá origem a infinitos axiomas, um para cada fórmula $\phi(x, y)$ da linguagem de ZFC. Intuitivamente, em cada instância do esquema de substituição, a fórmula $\exists! y \, \phi(x, y)$ representa uma função f, cujos argumentos são os $x \in w$, e os valores são os $y \in z$. O conjunto w funciona como o domínio de f, e o axioma de substituição garante a existência do conjunto z, que funciona como o contradomínio de f. A imagem de f é o conjunto obtido por separação sobre z: $\{y : y \in z \wedge \exists x \in w \, \phi(x, y)\}$.

A teoria dos conjuntos pode ser dita uma teoria do infinito, o que ressalta a importância concedida na teoria ao estudo de conjuntos infinitos[1]. Entretanto, os axiomas que temos até agora não nos habilitam a provar a existência de nenhum conjunto infinito. Para ver isso, seguindo Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 44), vamos chamar um conjunto a qualquer de *hereditariamente finito* se ele for finito, seus elementos forem finitos, os elementos de seus elementos forem finitos, etc.. Em outras palavras, a será hereditariamente finito se os conjuntos $a, \bigcup a, \bigcup\bigcup a, \ldots$ forem todos finitos. Podemos constatar facilmente que os axiomas anteriores produzem conjuntos hereditariamente finitos quando aplicados a conjuntos hereditariamente finitos. Por exemplo,

[1]Estamos usando informalmente as noções de finitude e infinitude, que serão definidas à frente.

um axioma de separação, se aplicado a um conjunto hereditariamente finito, separa dele um subconjunto também hereditariamente finito. A união de um conjunto hereditariamente finito, resulta num conjunto hereditariamente finito. Raciocínio semelhante vale para os outros axiomas. Lembrando que, no início, o único conjunto cuja existência conseguimos provar foi $\varnothing$, concluímos que, com os axiomas de 2 a 6, podemos provar a existência de infinitamente muitos conjuntos, mas não podemos provar a existência de um conjunto que não seja hereditariamente finito. Para tal, precisamos de um novo axioma.

Axioma 7 (Infinito)**.** $\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$

O axioma 7 afirma a existência de um conjunto infinito. Isso é obtido afirmando-se que existe um conjunto x tal que, se y é elemento de x, o sucessor de y, $S(y)$, também o é. Mas, se $S(y)$ é elemento de x, $S(S(y))$ também o é. Igualmente para $S(S(S(y)))$, e assim por diante. Portanto, x será infinito se asseguramos que há pelo menos um elemento em x, o que é feito no axioma pela expressão $\varnothing \in x$.

Agora vamos introduzir um axioma que difere dos outros em um aspecto importante. Todos os axiomas acima, com exceção do axioma da extensionalidade, afirmam que certas classes são conjuntos, isto é, que certas coleções de elementos que satisfazem uma propriedade especificada são conjuntos. Nesse sentido, eles são casos particulares do princípio de compreensão, como mencionamos acima. O próximo axioma não é um caso particular desse princípio.

Axioma 8 (Escolha – AC)**.** $\forall z(\varnothing \notin z \wedge \forall x, y \in z\,(x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing) \rightarrow \exists w \forall x \in z\,(UNIT(w \cap x)))$

Em palavras, o axioma da escolha afirma que, para todo conjunto z a que não pertence o conjunto vazio e cujos elementos são dois a dois disjuntos, existe um conjunto w tal que a intersecção de w com qualquer elemento de z resulta sempre num conjunto unitário. Intuitivamente, a ideia é que o conjunto w, chamado de *conjunto escolha*, é obtido escolhendo-se um único elemento de cada elemento de z. Desse modo, o que esta versão do axioma da escolha afirma é que, cumpridas as condições exigidas de z, sempre é possível obter um conjunto escolha.

Existem várias outras formas de apresentar o axioma da escolha propriamente dito, todas equivalentes entre si. Preferimos a forma acima porque ela exige poucas definições. No entanto, essa forma exige que os elementos do conjunto z sejam dois a dois disjuntos, o que pode dar a falsa impressão de que estamos limitados a aplicar o axioma da escolha somente a conjuntos com essa característica. Na verdade, não existe tal limitação, visto que se pode provar a partir do axioma 8 uma sentença equivalente — de fato, uma outra formulação do axioma da escolha —, que dispensa essa exigência. Vamos somente enunciar essa outra formulação.

Definição (Função escolha)**.** Seja F um conjunto tal que $\varnothing \notin F$. Uma *função escolha* para F é uma função g tal que $dom(g) = F$ e $g(x) \in x$ para todo $x \in F$.

Teorema 1.1.3 (Escolha)**.** *Todo conjunto F tal que $\varnothing \notin F$ tem uma função escolha.*

A função escolha permite selecionar um elemento de cada conjunto que pertence a F. A particularidade do axioma da escolha é que ele não especifica a função escolha nem o conjunto escolha, isto é, não dá uma regra para selecionar um elemento de cada conjunto de F. Aliás, se especificasse tal regra, ele seria dispensável, pois bastaria usar um axioma de separação sobre $\bigcup F$ para selecionar os elementos desejados. O uso do axioma da escolha é indispensável justamente quando não é possível especificar uma regra. Nesses casos o axioma da escolha garante que, apesar disso, a função escolha existe.

Por fim, introduzimos o axioma do fundamento.

Axioma 9 (Fundamento)**.** $\forall x(x \neq \varnothing \to \exists y \in x(y \cap x = \varnothing))$

O axioma 9 também é conhecido como *axioma da regularidade.* Ele afirma que todo conjunto x não-vazio possui ao menos um elemento y do qual ele é disjunto. O axioma do fundamento impõe essa exigência para impedir a existência de conjuntos que pertençam a si mesmos e de ciclos. De fato, se existisse um conjunto a tal que $a \in a$, formaríamos o conjunto $\{a\}$ e este violaria o axioma do fundamento. Similarmente, se existissem conjuntos $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que $a_1 \in a_2 \in ... \in a_n \in a_1$, formaríamos o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e este violaria o axioma do fundamento. Classes com essas características podem ficar de fora da teoria porque não tomam parte na definição de nenhum objeto matemático.

ZFC é a teoria que inclui os axiomas de 1 a 9. Por vezes, é interessante referir-se a uma teoria de conjuntos sem um ou outro axioma. ZF é a teoria que inclui os axiomas de 1 a 7 mais o axioma 9 (isto é, o axioma da escolha fica de fora), e ZF^- é ZF menos o axioma 9.

1.2 OS ORDINAIS E A DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Estamos acostumados a usar numerais ordinais para assinalar a posição, ou ordem, de indivíduos em uma fila: 1º, 2º, 3º, etc.. Se deixamos de lado a natureza dos indivíduos na fila, constatamos que todas as filas de mesmo comprimento exibem um mesmo padrão no que diz respeito à sua ordenação. Em teoria dos conjuntos, são os conjuntos ordinais que descrevem esse padrão. A noção intuitiva de fila é captada pela definição formal de conjunto bem ordenado, e a cada conjunto bem ordenado é associado um ordinal que se parece com ele — i.e., isomorfo a ele — para expressar seu tipo de ordem. As definições e teoremas apresentados nesta seção seguem principalmente Kunen (1980).

Definição (Isomorfismo)**.** Para A e B conjuntos quaisquer, e R e S relações, dizemos que $\langle A, R\rangle$ é *isomorfo* a $\langle B, S\rangle$ — em símbolos, $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ — se e somente se há uma função bijetiva $f : A \to B$, chamada um *isomorfismo* de $\langle A, R\rangle$ para $\langle B, S\rangle$, tal que: $\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$

Antes de tratar dos ordinais, vamos definir algumas noções e enunciar alguns fatos sobre ordens.

Definição (Ordem total)**.** Uma *ordem total* (estrita) é um par $\langle A, R\rangle$, em que A é um conjunto qualquer e R é uma relação, tal que R *ordena totalmente* A. Isto é, sobre A, a relação R é:

- transitiva: $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$
- tricotômica: $\forall x, y \in A(xRy \vee x = y \vee yRx)$
- irreflexiva: $\forall x \in A(\neg(xRx))$

Se $\langle A, R\rangle$ é uma ordem total e $B \subset A$, então $\langle B, R\rangle$ também é uma ordem total, visto que a definição não exige que $R \subset A \times A$.

Usando nosso conhecimento intuitivo sobre o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$), podemos notar que a ordem *menor que* sobre eles é uma ordem total. Mais precisamente, o par $\langle \mathbb{Z}, <_Z \rangle$ é uma ordem total, onde $<_Z$ é uma relação transitiva, tricotômica e irreflexiva sobre $\mathbb{Z}$. O par $\langle -1, 0\rangle \in <_Z$. Usando a notação introduzida antes, escrevemos simplesmente $-1 <_Z 0$.

Definição (Menor elemento)**.** Seja $\langle A, R\rangle$ uma ordem total. $a \in A$ é o *menor elemento* de A com respeito a R, se e somente se: $\forall x \in A(aRx \vee a = x)$

Definição (Boa ordem)**.** Um par $\langle A, R\rangle$ é uma *boa ordem* se e somente se é uma ordem total e todo subconjunto não-vazio de A tem um menor elemento com respeito a R. Nesse caso, dizemos que R *bem ordena* A.

$\langle \mathbb{Z}, <_Z \rangle$ não é uma boa ordem, pois nem todo subconjunto seu tem menor elemento com respeito a $<_Z$. Por exemplo, tome o subconjunto dos inteiros negativos: $... < -3 < -2 < -1$. Mas, se nos limitamos aos naturais ($\mathbb{N}$), usando nosso conhecimento intuitivo sobre eles, vemos que $\langle \mathbb{N}, <_N \rangle$ é uma boa ordem. Se $\langle A, R\rangle$ é uma boa ordem, para cada $x \in A$, definimos $pred(A, x, R) = \{y : y \in A \ \wedge \ yRx\}$. O conjunto $pred(A, x, R)$ é chamado de *segmento inicial* de A determinado por x com respeito a R, ou também de conjunto dos *predecessores* de x em A com respeito a R. Por exemplo, $pred(\mathbb{N}, 3, <_N) = \{0, 1, 2\}$. Na sequência, dois teoremas importantes sobre boas ordens.

Teorema 1.2.1. *Se $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ são boas ordens, então ocorre exatamente uma das situações a seguir:*

(a) Para algum x de A, $\langle pred(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle$;

(b) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$;

(c) Para algum y de B, $\langle A, R\rangle \cong \langle pred(B, y, S), S\rangle$.

Resumidamente, dadas duas boas ordens, ou uma é isomorfa à outra, ou um segmento inicial de uma é isomorfo à outra.

Teorema 1.2.2 (Boa ordenação)**.** *Para todo conjunto A, existe um par $\langle A, R\rangle$ tal que R bem ordena A.*

Mais diretamente, o teorema 1.2.2, também chamado de *teorema da boa ordem*, afirma que todo conjunto pode ser bem ordenado. A prova do teorema da boa ordenação usa o axioma da escolha de maneira essencial. Na verdade, o teorema da boa ordenação é equivalente, em ZF, ao axioma da escolha.

Definição (Conjunto transitivo)**.** Um conjunto x é *transitivo* se e somente se todo elemento de x é um subconjunto de x, isto é: $\forall y \in x(y \subset x)$.

A "relação" $\in$ em **V** não é transitiva. Por exemplo, considere $x = \varnothing$, $y = \{\varnothing\}$ e $z = \{\{\varnothing\}\}$; $x \in y$, $y \in z$, mas $x \notin z$. Porém, se restrita apenas a conjuntos transitivos, ela é transitiva. Exemplos de conjuntos transitivos são $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$.

Colocamos "relação" entre aspas ao nos referirmos a $\in$ porque $\in$ não é uma relação no sentido previamente definido. Como para todo x, obtemos $\{x\}$, a relação $\in$ teria entre seus elementos todos os pares ordenados da forma $\langle x, \{x\}\rangle$, o que por si só já é tão grande quanto a classe universal. A "relação" $\in$ é, portanto, uma classe própria.

Definição (Ordinal)**.** Um conjunto x é um *ordinal* se e somente se x é transitivo e x é bem-ordenado por $\in$.

Mais formalmente, afirmar que x é bem ordenado por $\in$ significa dizer que $\langle x, \in_x \rangle$ é uma boa ordem em que $\in_x = \{\langle y, z \rangle \in x \times x : y \in z\}$. Os conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ e $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ são exemplos de ordinais. O conjunto $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$ não é um ordinal, visto que os elementos $\varnothing$ e $\{\{\varnothing\}\}$ não estão relacionados por $\in$, o que fere a tricotomia.

Ao nos referirmos a um ordinal x, podemos às vezes não mencionar explicitamente a relação $\in_x$. Assim, escrevemos $x \cong \langle A, R \rangle$ para $\langle x, \in_x \rangle \cong \langle A, R \rangle$ e, quando $y \in x$, $pred(x, y)$ para $pred(x, y, \in_x)$. A seguir apresentamos alguns fatos sobre os ordinais.

Teorema 1.2.3.

(a) Se x é um ordinal e $y \in x$, então y é um ordinal e $y = pred(x, y)$.

(b) Se x e y são ordinais e $x \cong y$, então $x = y$.

(c) Se x e y são ordinais, então exatamente uma das situações seguintes é verdadeira: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$.

(d) Sejam x, y e z ordinais. Se $x \in y$ e $y \in z$, então $x \in z$.

(e) Se z é um conjunto não-vazio de ordinais, então $\exists x \in z \forall y \in z (x \in y \vee x = y)$.

Corolário 1.2.4. *Se A é um conjunto de ordinais e $\forall x \in A \forall y \in x (y \in A)$, então A é um ordinal.*

Os itens (c), (d) e (e) do teorema 1.2.3 implicam que todo conjunto de ordinais é bem ordenado. A outra condição do enunciado do corolário 1.2.4 garante que A é transitivo. O corolário 1.2.4 implica que o conjunto de todos os ordinais, se existisse, seria também um ordinal, o que engendraria uma contradição. Esse fato, que ficou conhecido como *paradoxo de Burali-Forti*, prova o teorema seguinte.

Teorema 1.2.5. $\nexists z \forall x (x \text{ é ordinal} \rightarrow x \in z)$

Se existisse tal z, teríamos o conjunto $\mathbf{ON} = \{x : x \text{ é ordinal.}\}$. Pelo corolário 1.2.4, **ON** seria um ordinal e, portanto, $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$. Mas se **ON** é um ordinal, em **ON** vale a irreflexividade; logo $\mathbf{ON} \notin \mathbf{ON}$. Isso é uma contradição. Portanto, **ON**, a coleção de todos os ordinais, é uma classe própria.

O teorema a seguir garante que a cada boa ordem pode ser associado um ordinal que representa o seu tipo.

Teorema 1.2.6. *Se $\langle A, R\rangle$ é uma boa ordem, existe um único ordinal C tal que $\langle A, R\rangle \cong C$.*

Seguindo Kunen (1980, p. 17), esboçamos uma demonstração do teorema 1.2.6. Que o ordinal é único conclui-se do teorema 1.2.3 (b). Para provar a existência, fazemos $B = \{a \in A :$ existe um ordinal x tal que x é isomorfo a $\langle pred(A, a, R), R\rangle\}$. Seja f a função cujo domínio é B tal que $f(a)$ é o ordinal x isomorfo a $\langle pred(A, a, R), R\rangle$. Seja $C = im(f)$. C é um conjunto de ordinais e é transitivo. Pelo corolário 1.2.4, C é um ordinal. Prova-se que f é um isomorfismo de $\langle B, R\rangle$ em C. Temos que $B = A$ ou $B = pred(A, b, R)$ para algum $b \in A$. Mas, se $B = pred(A, b, R)$, como C é isomorfo a $\langle B, R\rangle$, $b \in B$ e, portanto, $B \neq pred(A, b, R)$, o que é uma contradição. Logo, $B = A$.

A prova do teorema 1.2.6, esboçada acima, usa um axioma de substituição de maneira essencial para justificar a existência do conjunto f. No axioma de substituição usado, $\phi(x, y)$ é a fórmula

$$\langle pred(A, a, R), R\rangle \cong x$$

Dado que $\forall a \in B\ \exists! x\ \phi(x, y)$, o conjunto C é formado por separação sobre o conjunto z que o axioma de substituição afirma existir. Então o conjunto f é definido por separação sobre $B \times C$.

Definição. Para toda boa ordem $\langle A, R\rangle$, $tipo(A, R)$ denota o único ordinal C tal que $\langle A, R\rangle \cong C$.

Agora vamos ver como os números naturais podem ser definidos em ZFC. Intuitivamente, notamos que os números naturais, na ordem usual *menor que*, formam um conjunto bem ordenado. Então, independentemente da constituição de cada número natural, ou de como eles venham a ser definidos na teoria dos conjuntos, $tipo(\mathbb{N}, <_N)$ será um ordinal se a definição for fiel a nossas intuições. Essa constatação indica que talvez o caminho mais fácil para definir o conjunto dos naturais em ZFC seja identificá-lo diretamente com seu tipo. A seguir, vamos mostrar como cada natural, e o conjunto de todos os naturais, são definidos como ordinais.

Para facilitar a exposição, de agora em diante podemos usar letras gregas para variar sobre ordinais. Essa notação vai nos permitir escrever $\forall\alpha ...$ em vez de $\forall\alpha(\alpha$ é ordinal $\rightarrow ...)$, por exemplo. Outra modificação é a seguinte: dado que $\in$ bem ordena os ordinais, vamos escrever $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$. Essa notação tem a vantagem de ser bastante intuitiva quando tratamos dos naturais. $\alpha \leq \beta$ abrevia $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$, e $\beta > \alpha$ e $\beta \geq \alpha$ abreviam, respectivamente, $\alpha < \beta$ e $\alpha \leq \beta$.

O mesmo vale quando usamos palavras: por exemplo, α menor que β significa que α pertence a β.

Teorema 1.2.7. *Para todo α, $S(\alpha)$ é um ordinal, $\alpha < S(\alpha)$ e $\forall\beta(\beta < S(\alpha) \leftrightarrow \beta \leq \alpha)$.*

Definição (Ordinal sucessor e ordinal limite)**.** α é um *ordinal sucessor* se e somente se $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$. α é um *ordinal limite* se e somente se $\alpha \neq \varnothing$ e α não é um ordinal sucessor.

Se definimos 0 como $\varnothing$, podemos definir os naturais maiores que 0 como os primeiros ordinais sucessores.

Definição (Números naturais)**.** $0 = \varnothing$, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, $3 = S(2)$, etc...

Desdobrando a definição, temos:

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing \\
&1 = S(0) = \{\varnothing\} = \{0\} \\
&2 = S(1) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
&3 = S(2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}, \text{ etc...}
\end{aligned}$$

Intuitivamente, a ideia é que cada natural é definido como o conjunto dos números naturais menores que ele. De maneira mais precisa, a definição de número natural é a seguinte.

Definição (Número natural)**.** α é um *número natural* se e somente se $\forall\beta \leq \alpha(\beta = 0 \ \vee \ \beta$ é um ordinal sucessor$)$.

Os números naturais formam um segmento inicial dos ordinais. Intuitivamente, cada número natural maior que zero é um ordinal obtido pela aplicação da função sucessor repetida um número finito de vezes sobre 0. Se β é o menor ordinal que não é assim obtido, β não é um ordinal sucessor, e então β e todos os ordinais maiores não satisfazem a definição de número natural.

Agora que temos uma definição precisa de número natural, podemos separar os números naturais do conjunto x que o axioma do infinito afirma existir, e assim obter o conjunto de todos os naturais. Mas primeiro devemos nos certificar de que todos os naturais estão em x. Se pudéssemos usar o princípio de indução, isso seria muito simples, mas seria circular, visto que vamos enunciar o princípio de indução em termos do conjunto dos naturais, que estamos buscando formar. Vamos proceder por redução ao absurdo. Suponha que n é um natural e que $n \notin x$. Então $n \neq 0$, visto que $0 \in x$, e $n = S(m)$ para algum m. $m < n$,

m é um natural e $m \notin x$, pois senão $S(m)$ pertenceria a x. Como $m \in n$, $n \setminus x \neq \varnothing$. Seja n' o menor elemento de $n \setminus x$. Aplicando o argumento acima a n' encontramos um $m' < n'$ tal que $m' \notin x$. Mas $m' \in n$, visto que n é transitivo. Isto é uma contradição: n' é o menor elemento de n e $m' < n'$.

Portanto, por separação sobre x, existe o conjunto dos números naturais. Usualmente conhecemos esse conjunto por $\mathbb{N}$, mas em teoria dos conjuntos ele comumente é denotado por outro símbolo.

Definição. ω é o conjunto dos números naturais.

O axioma do infinito é equivalente à afirmação de que ω existe. Preferimos a formulação que apresentamos antes porque ela requer menos definições.

Teorema 1.2.8. *ω é o menor ordinal limite.*

Pelo corolário 1.2.4, ω é um ordinal. Todo $n < \omega$ é um ordinal sucessor ou 0. Portanto, se ω é um ordinal limite, ele é o menor. De fato, ω é um ordinal limite, caso contrário ele seria um número natural (se ω fosse um natural, $\omega \in \omega$, o que engendraria uma contradição).

O que garante que os elementos de ω são representantes fiéis dos números naturais é que eles satisfazem os *axiomas de Peano* para a aritmética dos naturais. De fato, os axiomas de Peano são teoremas de ZFC.

Teorema 1.2.9 (Axiomas de Peano)**.**

(a) $0 \in \omega$

(b) $\forall n \in \omega(S(n) \in \omega)$

(c) $\forall n, m \in \omega(n \neq m \to S(n) \neq S(m))$

(d) ***(Indução)*** $\forall X \subset \omega((0 \in X \wedge \forall n \in X(S(n) \in X)) \to X = \omega)$

Como no caso do par ordenado, outras definições dos números naturais são possíveis, desde que satisfaçam os axiomas de Peano. Para ilustrar como prossegue a reconstrução da aritmética dos números naturais em ZFC, enunciamos o *teorema da recursão*, que vai nos permitir definir a adição e a multiplicação de números naturais. A partir daqui, seguimos principalmente Enderton (1977, p. 73 e seguintes).

Teorema 1.2.10 (Recursão em $\boldsymbol{\omega}$)**.** *Seja A um conjunto qualquer, $a \in A$ e $F : A \to A$. Então existe uma única função $h : \omega \to A$ tal que:*

- $h(0) = a$
- $h(S(n)) = F(h(n))$ *para todo* $n \in \omega$.

Para definir a adição nos naturais, usamos o teorema 1.2.10 para definir para cada número natural n uma função $A_n : \omega \to \omega$ tal que:

- $A_n(0) = n$
- $A_n(S(m)) = S(A_n(m))$ para todo $m \in \omega$.

Cada função A_n define o que é somar um natural qualquer a n. Por exemplo, a função A_5 define o que é somar um número natural qualquer a 5. Para ver como isso funciona, consideremos o caso de $A_5(2)$, isto é, somar 2 a 5:

$$\begin{array}{l} A_5(0) = 5 \\ A_5(1) = A_5(S(0)) = S(A_5(0)) = 6 \\ A_5(2) = A_5(S(1)) = S(A_5(1)) = 7 \end{array}$$

Temos uma função para cada número natural, mas queremos uma função única para a soma de naturais x e y quaisquer. Para tanto, a partir de todas as funções A_n, vamos definir a soma como uma *operação binária*. Uma *operação binária em um conjunto* A é uma função $f : A \times A \to A$. Abreviamos $f(\langle x, y \rangle)$ por $x\ f\ y$.

Definição (Soma)**.** *Soma* é uma operação binária em ω, denotada por $+$, tal que, para n e m pertencentes a ω,

$$n + m = A_n(m)$$

A multiplicação de naturais é definida a partir da soma procedendo quase do mesmo modo. Usamos o teorema 1.2.10 para definir para cada número natural n uma função $M_n : \omega \to \omega$ tal que:

- $M_n(0) = 0$
- $M_n(S(m)) = M_n(m) + n$ para todo $m \in \omega$.

Definição (Multiplicação)**.** *Multiplicação* é uma operação binária em ω, denotada por $\cdot$, tal que, para n e m pertencentes a ω,

$$n \cdot m = M_n(m)$$

Pode ser provado que as propriedades usuais da soma e da multiplicação, tais como associatividade e comutatividade, são satisfeitas por essas definições. No entanto, como nosso objetivo é apenas exemplificar como noções matemáticas podem ser definidas em termos conjuntistas, não vamos prosseguir no desenvolvimento da aritmética dos naturais. Isso pode ser encontrado em diversos livros introdutórios de teoria dos conjuntos, tais como Enderton (1977).

Para finalizar nossa exposição sobre os ordinais, apresentamos uma versão mais abrangente do teorema da recursão, tomada de Kunen (1980, p. 25), de que necessitamos para os desenvolvimentos subsequentes.

Teorema 1.2.11 (Recursão transfinita em **ON**). *Se* $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, *então existe uma única* $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{V}$ *tal que* $\forall\alpha(\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \upharpoonright \alpha))$.

Esse teorema assegura que a recursão vale não só em ω, mas vale também na classe de todos os ordinais. Enunciamos o teorema 1.2.11 usando classes próprias, contudo em vez delas poderíamos ter usado as fórmulas que as definem. Preferimos usar diretamente as classes para encurtar o enunciado e privilegiar a compreensão. Contudo, é importante notar que uma asserção verdadeira sobre *todas as classes* equivale a um esquema de teoremas. O enunciado 1.2.11 representa, então, um esquema de teoremas: cada par de fórmulas que definem "funções" **F** e **G** dá origem a um teorema. Outra coisa a notar é que definimos o termo "função" apenas para conjuntos, e não para classes. Contudo, podemos usar termos definidos apenas para conjuntos, ao tratar de classes, sempre que for possível converter os enunciados onde eles aparecem em fórmulas da linguagem de ZFC que não fazem referências a classes.

1.3 OS CARDINAIS E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Ao passo que os ordinais dizem respeito à ordenação dos conjuntos, os cardinais dizem respeito aos tamanhos dos conjuntos. Assim como associamos a cada conjunto um ordinal que é seu tipo de ordem, vamos associar a cada conjunto um cardinal que representa seu tamanho. Nesta seção, seguimos principalmente Kunen (1980) e Kunen (2009).

Usamos funções injetivas para comparar o tamanho de conjuntos.

Definição. Para conjuntos A e B quaisquer, definimos:

(a) $A \leq B$ se e somente se há uma função injetiva de A em B.

(b) $A \approx B$ se e somente se há uma função bijetiva de A em B.

(c) $A \prec B$ se e somente se $A \preceq B$ e $B \npreceq A$.

$A \succ B$ significa $B \prec A$ e $A \succeq B$ significa $B \preceq A$.

Teorema 1.3.1. *Se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, então $A \approx B$.*

O teorema 1.3.1 é chamado de *teorema de Schröder-Bernstein* ou também de *teorema de Cantor-Bernstein*. O teorema da boa ordem (1.2.2) assegura que todo conjunto pode ser bem ordenado, e o teorema 1.2.6 garante que toda boa ordem é isomorfa a um único ordinal. Portanto, para todo conjunto A, existe ao menos um α tal que $A \approx \alpha$. Isso indica que podemos usar ordinais para medir o tamanho de conjuntos.

Definição (Cardinalidade)**.** Para todo conjunto A, a *cardinalidade* de A, denotada por $|A|$, é o menor α tal que $A \approx \alpha$.

Definição (Cardinal)**.** α é um *cardinal* se e somente se $\alpha = |\alpha|$.

A cardinalidade apreende a noção de tamanho de um conjunto. Os cardinais são os ordinais que "medem" tamanhos de conjuntos. Intuitivamente, um ordinal é um cardinal se ele for o menor ordinal daquele tamanho. Mais formalmente, α é um cardinal se e somente se $\forall \beta < \alpha (\beta \not\approx \alpha)$.

Definição (Supremo)**.** Para qualquer α, o *supremo* de α, denotado por $sup(\alpha)$, é o conjunto $\bigcup \alpha$.

O supremo de α é também chamado de *menor cota superior* de α, por que $\bigcup \alpha$ é o menor ordinal β tal que $\beta \geq \xi$ para todo $\xi \in \alpha$. A seguir, algumas propriedades dos cardinais.

Teorema 1.3.2.

(a) Todo cardinal $\geq \omega$ é um ordinal limite.

(b) Todo $n \in \omega$ é um cardinal.

(c) Se A é um conjunto de cardinais, então $sup(A)$ é um cardinal.

(d) ω é um cardinal.

Em português, usamos os cardinais "um", "dois", "três", etc., para contar objetos e determinar o tamanho de coleções, e usamos os numerais ordinais "primeiro", "segundo", "terceiro", etc., para ordenar objetos. Em teoria dos conjuntos, como mostra o teorema 1.3.2 (b), ambos tornam-se os mesmos conjuntos $1, 2, 3, \ldots$. Para todo $\alpha < \omega$, α é um cardinal. Mas isso não se preserva para os $\alpha > \omega$.

A partir dos resultados (b) e (d) do teorema 1.3.2, estamos habilitados a definir as noções de finito, infinito e as noções correlatas de enumerabilidade como segue.

Definição. Para qualquer conjunto A, dizemos que A é *finito* se e somente se $|A| < \omega$. $|A|$ é *enumerável* se e somente se $|A| \leq \omega$. A é *infinito* se A não é finito. A é *não-enumerável* se A não é enumerável.

Da definição de enumerável, conclui-se que todo conjunto finito é enumerável, e um conjunto infinito A é enumerável se existir uma função bijetiva de A em ω. Todos os naturais são finitos, e o cardinal de qualquer conjunto finito é um natural. ω é o primeiro cardinal infinito e ω é enumerável. Isso aliado ao teorema 1.3.2 (a) permite concluir que todo cardinal infinito é um ordinal limite. Porém, ainda não provamos que existe algum cardinal infinito maior que ω. O teorema de Cantor permite mostrar isso.

Teorema 1.3.3 (Cantor)**.** *Para qualquer conjunto A, $A \prec \wp(A)$.*

Pelo teorema de Cantor, $|\wp(\omega)| \succ \omega$ e portanto $|\wp(\omega)|$ é não-enumerável. Essa conclusão depende do axioma da escolha, pois assumimos que $\wp(\omega)$ tem uma cardinalidade, o que é uma consequência do teorema da boa ordem (1.2.2). No entanto, seria possível provar a existência de um cardinal não-enumerável sem usar o axioma da escolha, mas não vamos tratar disso aqui (veja, p.ex., Kunen (2009, p. 54-55)).

Ainda não definimos o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, mas vamos recorrer ao nosso conhecimento intuitivo sobre os reais para mostrar que $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade de $\wp(\omega)$, e que portanto $\mathbb{R}$ é não-enumerável. Para nos auxiliar nessa tarefa, antes vamos definir a exponenciação de cardinais.

Definição. ${}^{B}A = \{f : f \text{ é uma função } \wedge \; dom(f) = B \; \wedge \; im(f) \subset A\}$.

${}^{B}A$ existe porque ${}^{B}A \subset \wp(B \times A)$.

Definição (Exponenciação de cardinais)**.** Para quaisquer cardinais κ e λ, $\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$.

Essa definição também depende do axioma da escolha para garantir a existência de $|{}^{\lambda}\kappa|$ para qualquer ${}^{\lambda}\kappa$. O teorema seguinte revela a proximidade entre certas potências do cardinal 2 e o conjunto potência de x, $\wp(x)$.

Teorema 1.3.4. ${}^{A}2 \approx \wp(A)$.

Pela definição da exponenciação de cardinais, $2^{|A|} = |{}^{A}2|$. É consequência do teorema 1.3.4 que $|{}^{A}2| = |\wp(A)|$. Portanto, $2^{|A|} = |\wp(A)|$. Em particular, $2^{\omega} = |\wp(\omega)|$. Como sabemos que $\wp(\omega)$ é não-enumerável, para mostrar que $\mathbb{R}$ é não-enumerável nos basta mostrar que $|\mathbb{R}| = 2^{\omega}$, que equivale a mostrar que $\mathbb{R} \approx {}^{\omega}2$.

Teorema 1.3.5. $\mathbb{R} \approx {}^{\omega}2$.

Esboçamos uma prova do teorema 1.3.5 seguindo Enderton (1977, p. 149). Pelo teorema de Schröder-Bernstein (1.3.1), para demonstrar o teorema 1.3.5 é suficiente mostrar que $\mathbb{R} \preceq {}^{\omega}2$ e ${}^{\omega}2 \preceq \mathbb{R}$. Para tanto, primeiro observamos que $f(x) = \tan(\pi(2x-1)/2)$ é uma função bijetiva do intervalo aberto $(0,1)$ em $\mathbb{R}$; portanto $\mathbb{R} \approx (0,1)$. Então basta mostrar que $(0,1) \preceq {}^{\omega}2$ e ${}^{\omega}2 \preceq (0,1)$.

Para mostrar que $(0,1) \preceq {}^{\omega}2$, definimos uma função que mapeia o real de expansão binária $0,110010...$ na função de ${}^{\omega}2$ cujos valores são $1,1,0,0,1,0,....$ De modo geral, mapeamos cada real x na função f de ${}^{\omega}2$ tal que, para todo n, $f(n)$ é igual ao n-ésimo dígito da expansão binária de x. Sempre tomamos a expansão binária que não tem uma cauda infinita de uns, de modo a descartar expansões binárias adicionais do mesmo número.

Para mostrar que ${}^{\omega}2 \preceq (0,1)$, definimos uma função que mapeia a função f de ${}^{\omega}2$ cujos valores sucessivos são $1,1,0,0,0,1,0,...$ no real cuja expansão decimal é $0,1100010....$ De modo geral, mapeamos cada função f de ${}^{\omega}2$ no real x tal que, para todo n, $f(n)$ é igual ao n-ésimo dígito da expansão decimal de x.

Isso conclui a demonstração. $\mathbb{R}$ é não-enumerável. Pode-se mostrar de modo mais simples, pelo método diagonal de Cantor, que $\mathbb{R}$ é não-enumerável. Mas preferimos o caminho pelo teorema 1.3.5 porque assim ganhamos também o resultado $|\mathbb{R}| = |\wp(\omega)|$.

Usando $\wp(x)$, pelo teorema de Cantor (1.3.3) obtemos cardinais ainda maiores: $|\wp(\wp(\omega))| \succ |\wp(\omega)|$, $|\wp(\wp(\wp(\omega)))| \succ |\wp(\wp(\omega))|$, e assim sucessivamente. Pelo teorema 1.2.3, sabemos que a classe de todos os cardinais infinitos é bem ordenada por $\in$. Se quisermos fazer uma lista de seus elementos em ordem ascendente, colocamos na primeira posição o menor cardinal infinito, ω, que chamamos de $\aleph_0$; na segunda posição, colocamos o menor cardinal infinito maior que $\aleph_0$, que chamamos de $\aleph_1$; na terceira posição, colocamos o menor cardinal infinito maior que $\aleph_0$ e $\aleph_1$, que chamamos de $\aleph_2$; e assim por diante. O teorema de Cantor garante que, dado qualquer cardinal α, existe um cardinal maior que ele, de sorte que a existência dos $\aleph_\alpha$ está assegurada, e portanto podemos definir o seguinte.

Definição. Para todo α, α^+ é o menor cardinal maior que α.

Usando recursão transfinita (1.2.11), definimos os $\aleph_\alpha$ de maneira completa e mais precisa.

Definição.

- $\aleph_0 = \omega$.
- $\aleph_{\alpha+1} = {\aleph_\alpha}^+$.
- $\aleph_\gamma = sup(\{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\})$, se γ é um ordinal limite.

$\alpha + 1$ é uma abreviação de $S(\alpha)$. Sabemos, por definição, que ω é o cardinal $\aleph_0$; sabemos que $|\wp(\omega)| > \omega$, mas não sabemos determinar a posição de $|\wp(\omega)|$ na lista dos $\aleph_\alpha$. Ou seja, não sabemos onde posicionar o cardinal do conjuntos dos números reais, também chamado de cardinal do contínuo, nessa lista. Considerando esse problema, Cantor conjecturou uma hipótese.

Definição (Hipótese do contínuo - CH)**.** $|\wp(\omega)| = \aleph_1$.

De maneira mais geral, Cantor também conjecturou o seguinte.

Definição (Hipótese generalizada do contínuo - GCH)**.** Para todo α, $|\wp(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$.

A hipótese do contínuo e a hipótese generalizada do contínuo podem ser apresentadas de várias maneiras. Outra maneira usual, baseada no teorema 1.3.4, é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{CH:} \quad & 2^{\aleph_0} = \aleph_1. \\ \text{GCH:} \quad & 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}, \text{ para todo } \alpha. \end{aligned}$$

Intuitivamente, a hipótese do contínuo afirma não haver conjuntos de tamanho intermediário entre o tamanho de ω, $\aleph_0$, e o tamanho do contínuo, $2^{\aleph_0}$. Equivalentemente, a hipótese do contínuo pode ser formulada como afirmando que todo subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$ tem o mesmo tamanho que $\mathbb{R}$.

1.4 NÚMEROS INTEIROS, RACIONAIS, REAIS E COMPLEXOS

Dando continuidade à construção de objetos matemáticos usuais em ZFC, vamos mostrar rapidamente um modo de prosseguir com a definição dos números inteiros, racionais, reais e complexos, a partir da definição dos números naturais introduzida anteriormente. Nesta seção, seguimos principalmente Enderton (1977).

Definição (Relação de equivalência)**.** Para quaisquer relação R e conjunto A, R é uma *relação de equivalência* em A se e somente se R é:

- reflexiva: $\forall x \in A(xRx)$.
- simétrica: $\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow yRx)$.
- transitiva: $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Definição (Classe de equivalência)**.** Seja R uma relação de equivalência em A. Para todo $x \in A$, definimos a *classe de equivalência* de x, denotada por $[x]$, como $\{y \in A : yRx\}$. $A/R = \{[x] : x \in A\}$.

A existência de A/R, o conjunto das classes de equivalência de A por R, é justificada usando-se um axioma de substituição em que a fórmula ϕ representa uma função f tal que $dom(f) = A$ e $f(x) = [x]$.

Para definir os inteiros, começamos por definir uma relação de equivalência $\sim$ em $\omega \times \omega$ tal que $\langle m, n\rangle \sim \langle p, q\rangle$ se e somente se $m+q = p+n$. Informalmente, o que queremos é que, se $m - n = p - q$, então $\langle m, n\rangle \sim \langle p, q\rangle$. Por exemplo, $\langle 0, 1\rangle \sim \langle 8, 9\rangle$, pois $0 - 1 = 8 - 9 = -1$. Então vamos definir o inteiro -1 como $[\langle 0, 1\rangle]$. Fazemos o mesmo para os demais inteiros: $-2 = [\langle 0, 2\rangle]$, $-3 = [\langle 0, 3\rangle]$, etc.. Note que $0 = [0, 0]$, $1 = [1, 0]$, etc.. Ou seja, por essa definição, os inteiros positivos não são iguais aos naturais. O conjunto dos inteiros é definido assim: $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/\sim$.

Para definir os racionais, procedemos de modo muito semelhante. Definimos uma relação de equivalência $\simeq$ em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{\varnothing\})$ tal que $\langle m, n\rangle \simeq \langle p, q\rangle$ se e somente se $m \cdot q = p \cdot n$. É claro, essa definição pressupõe que tenhamos definido a multiplicação em $\mathbb{Z}$, $\cdot$, de maneira adequada. Informalmente, o que queremos é que, se $m/n = p/q$, então $\langle m, n\rangle \simeq \langle p, q\rangle$. Por exemplo, $\langle 1, 2\rangle \simeq \langle 3, 6\rangle$, pois $1/2 = 3/6 = 0,5$. Assim, definimos o racional $1/2$ ou $0,5$ como $[\langle 1, 2\rangle]$. Fazemos o mesmo para os demais racionais, e o conjunto de todos os racionais é definido assim: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{\varnothing\}))/\simeq$.

Para definir os reais, a estratégia precisa ser outra. Usamos pares de naturais para definir os inteiros, e pares de inteiros para definir os racionais, mas não podemos esperar poder usar pares de racionais para definir os reais, visto que não há racionais suficientes. Os racionais formam um conjunto infinito enumerável, ao passo que os reais formam um conjunto infinito não-enumerável (teorema 1.3.5). Definimos os reais por conjuntos infinitos de racionais, os chamados cortes de Dedekind. A ideia é que cada real x seja definido pelo conjunto dos racionais menores que x.

Definição (Corte de Dedekind)**.** Um *corte de Dedekind* é um subconjunto x de $\mathbb{Q}$ tal que:

(a) $\varnothing \neq x \neq \mathbb{Q}$.

(b) x é *fechado para baixo*, i.e., $\forall q, r \in \mathbb{Q}(q \in x \wedge r < q \rightarrow r \in x)$.

(c) x não tem *maior elemento*, i.e., $\nexists\, q \in x(\forall r \in x(r \leq q))$.

A definição acima pressupõe, é claro, que tenhamos definido apropriadamente a relação menor que, <, em $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ é então definido como o conjunto de todos os cortes de Dedekind.

Por fim, definimos cada número complexo como um par de reais $\langle x, y\rangle$ representando $x+iy$, e o conjunto de todos os complexos é definido assim: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dadas essas definições, $\omega \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R} \not\subset \mathbb{C}$. Mas existe um isomorfismo de ω em um subconjunto de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ em um subconjunto de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}$ em um subconjunto de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}$ em um subconjunto de $\mathbb{C}$.

1.5 O UNIVERSO CONJUNTISTA

$\mathbf{V}$ é o universo conjuntista. Acima definimos $\mathbf{V}$ como a classe $\{x : x = x\}$. Provamos que $\mathbf{V}$ é uma classe própria, e para além disso não demos mais informações sobre $\mathbf{V}$. Nesta seção, nosso objetivo é iluminar algumas características importantes da classe $\mathbf{V}$. Para tal, seguimos principalmente Kunen (1980) e Kunen (2009).

Kunen (1980, p. 94) comenta que há pelos menos dois tipos de coisas que não interessam à teoria dos conjuntos usual, e que portanto não precisam estar no universo da teoria. O primeiro tipo é composto por todas as coisas que não são conjuntos. Como vimos, nossas definições até agora foram feitas apenas em termos de conjuntos, conjuntos de conjuntos, conjuntos de conjuntos de conjuntos, etc.. Todos os objetos de que tratamos são *hereditariamente* conjuntos. Existem teorias de conjuntos cujo universo pode incluir *indivíduos* ou *urelementos*, mas esse não é o caso de ZFC. Em ZFC, a inexistência de urelementos é consequência do axioma da extensionalidade e do teorema 1.1.1, visto que existe apenas um objeto sem membros, o conjunto vazio.

O segundo tipo de coisas que não interessam à teoria dos conjuntos usual é composto por classes comumente consideradas “patológicas”, tais como classes x, z e w tais que $x = \{x\}$, $z = \{w\}$ e $w = \{z\}$. Essas classes poderiam muito bem ser hereditariamente conjuntos, mas o fato é que conjuntos assim nunca são requeridos na definição dos objetos matemáticos. Por exemplo, nas definições que demos acima para os números naturais, inteiros, racionais e reais, não empregamos conjuntos assim. O axioma do fundamento é o responsável por deixá-los de fora do universo da teoria. Embora a presença desses conjuntos patológicos nada mude com respeito às definições dos objetos matemáticos usuais — admiti-los ou bani-los do universo seria indiferente, nesse quesito —, a vantagem de excluí-los é que isso proporciona uma caracterização mais clara do universo conjuntista. Há teorias dos conjunto não-usuais que permitem conjuntos com essas características, e essas teorias têm suas próprias vantagens.

O axioma do fundamento faz do universo conjuntista a classe dos conjuntos bem-fundados, que denotamos por $\mathbf{WF}$. Intuitivamente, os conjuntos bem-fundados são aqueles que podem ser obtidos a partir do $\varnothing$ pela iteração das operações conjuntistas união e conjunto das partes. Assumir o axioma do fundamento significa assumir que $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$; de fato, prova-se em ZF^{-} que a asserção $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ é equivalente ao axioma do fundamento. De maneira mais precisa e completa, definimos $\mathbf{WF}$ como segue.

Definição. Por recursão transfinita, definimos V_α para todo ordinal α:

(a) $V_0 = \varnothing$.

(b) $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$.

(c) $V_\alpha = \bigcup\{V_\xi : \xi < \alpha\}$, se α é um ordinal limite.

Os V_α correspondem, intuitivamente, a estágios sucessivos em que os conjuntos são criados. A união de todos esses estágios forma a classe $\mathbf{WF}$.

Definição. $\mathbf{WF} = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$.

A união é definida para conjuntos, mas $\{V_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$ é uma classe própria. Dadas nossas convenções sobre o uso de classes, toda a expressão $\bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$ pode ser trocada pela fórmula $\exists\alpha(x \in V_\alpha)$. A classe própria $\mathbf{WF}$ é composta pelos x que satisfazem tal fórmula. Um conjunto x é dito *bem-fundado* se $x \in \mathbf{WF}$.

Pelo teorema de Cantor, sabemos que $|V_\alpha| < |V_{\alpha+1}|$. Cada estágio é maior que seu anterior, e podemos saber exatamente a cardinalidade de cada V_α. Pelo teorema 1.3.4, sabemos que $|V_{\alpha+1}| = 2^{|V_\alpha|}$. Como $|V_0| = 0$, temos $|V_1| = 2^0 = 1$, $|V_2| = 2^1 = 2$, $|V_3| = 2^2 = 4$, $|V_4| = 2^4 = 16$, $|V_5| = 2^{16} = 65536$, ..., $|V_\omega| = \omega$, $|V_{\omega+1}| = 2^\omega$, ..., e assim sucessivamente.

Para todo conjunto bem-fundado, definimos $rank(x)$ como o menor β tal que $x \in V_{\beta+1}$. Intuitivamente, $rank(x)$ é o primeiro estágio em que os elementos de x estão todos disponíveis. O conjunto x é obtido no estágio seguinte, $V_{rank(x)+1}$. Portanto, se $\beta = rank(x)$, $x \subset V_\beta$, $x \notin V_\beta$ e $x \in V_\alpha$ para todo $\alpha > \beta$.

Prova-se que **WF** é fechada sobre todas as operações conjuntistas. Isto é, dados dois conjuntos x e y quaisquer pertencentes a **WF**, $\{x \in y : \phi(x)\}$, $\{x, y\}$, $\bigcup x$, $\wp(x)$, bem como conjuntos resultantes de outras operações, pertencem todos a **WF**. É fácil perceber isso. Por exemplo, para $\wp(x)$, tome $\alpha = rank(x)$. Então, $x \subset V_\alpha$. Veja que $\wp(x) \subset V_{\alpha+1}$ e portanto $\wp(x) \in V_{\alpha+2}$. Para $\{x, y\}$, tome α como sendo o maior entre $rank(x)$ e $rank(y)$. Então, x e y estão contidos em V_α, x e y pertencem a $V_{\alpha+1}$ e $\{x, y\} \in V_{\alpha+2}$. Os demais casos seguem raciocínios semelhantes.

Disso concluímos que os conjuntos $\omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ estão todos em **WF** pois, conforme suas definições, todos eles são construídos a partir do $\varnothing$ pela aplicação de operações conjuntistas.

A seguir, apresentamos algumas propriedades de **WF** que nos permitem obter uma imagem intuitiva mais clara dos estágios V_α.

Teorema 1.5.1.

(a) Todo V_α é um conjunto transitivo.

(b) Se $\alpha \leq \beta$, então $V_\alpha \subset V_\beta$.

(c) $V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha = \{x \in \boldsymbol{WF} : rank(x) = \alpha\}$.

(d) $V_\alpha = \{x \in \boldsymbol{WF} : rank(x) < \alpha\}$.

(e) Se $x \in y$ e $y \in \boldsymbol{WF}$, então $x \in \boldsymbol{WF}$ e $rank(x) < rank(y)$.

Cada estágio V_α é composto por todos os elementos dos estágios anteriores (teorema 1.5.1 (b)), mais alguns elementos (1.5.1 (c)). A cada um desses novos elementos acrescentados em V_α pertencem apenas elementos dos estágios anteriores, pelo item (d). Como esses elementos dos estágios anteriores também pertencem a V_α, cada V_α é um conjunto transitivo, que é o que afirma o item (a). O item (e) assegura que **WF** é uma classe transitiva, e torna explícito que um elemento x só pode pertencer a um conjunto y se x tiver sido formado "antes" de y.

Teorema 1.5.2.

(a) $\forall\alpha(\alpha \in \boldsymbol{WF} \wedge rank(\alpha) = \alpha)$.

(b) $\forall\alpha(V_\alpha \cap \boldsymbol{ON} = \alpha)$.

Cada ordinal α está contido no estágio V_α e pertence aos estágios maiores ou iguais a $V_{\alpha+1}$, e não pode haver dois ordinais diferentes contidos no mesmo estágio. Em uma visão intuitiva, os ordinais formam a "coluna vertebral" do universo **V**. A Figura 1 é uma representação intuitiva dos sucessivos estágios que compõem **V**.

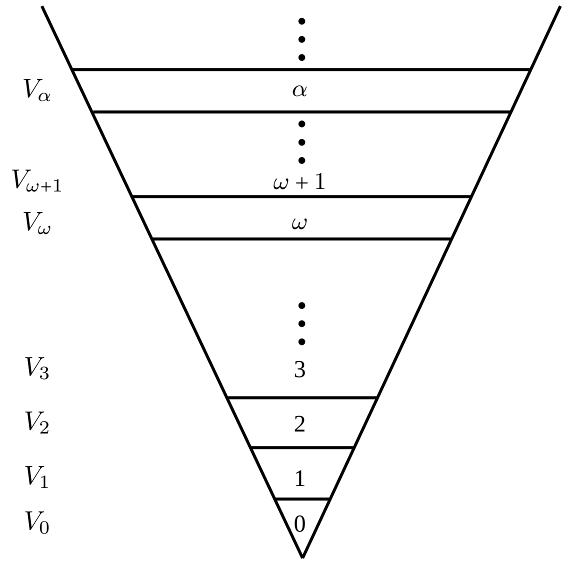

Figura 1: O universo conjuntista.

1.6 MODELOS DE ZFC, PROVAS DE CONSISTÊNCIA E A INDEPENDÊNCIA DE CH

Uma sentença S é dita independente de um teoria T se T não prova S nem $\neg S$. Em geral, a independência de S é provada mostrando-se que $T + S$ e $T + \neg S$ são consistentes. A consistência de uma teoria, por sua vez, pode ser provada construindo-se um modelo para ela. Tais provas baseiam-se no teorema de correção.

Teorema 1.6.1 (Correção)**.** *Se uma teoria tem modelo, então ela é consistente.*

Um *modelo* para uma teoria de 1ª ordem T é uma estrutura para a linguagem de T na qual todos os axiomas não-lógicos de T são verdadeiros. Uma *estrutura* para uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ é um par $\langle D, I\rangle$, em que D é um conjunto não-vazio, chamado de *universo* ou *domínio* da estrutura, e I é uma *função interpretação* que associa a cada símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}$ outro que não a igualdade um conjunto de ênuplas de elementos de D (I poderia também interpretar símbolos de função, mas como a linguagem de ZFC não tem tais símbolos, desconsideramos essa possibilidade aqui).

As noções de estrutura e modelo, tais quais as outras noções matemáticas e lógicas que vimos até agora, são definidas em termos de conjuntos em ZFC. Modelos para muitas teorias matemáticas são construídos em ZFC, mas não é possível construir em ZFC um modelo para a própria ZFC. A seguinte versão do segundo teorema de incompletude de Gödel impede isso.

Teorema 1.6.2 (Segundo teorema de incompletude de Gödel)**.** *A consistência de ZFC não pode ser provada em ZFC.*

Se ZFC tivesse um modelo, pelo teorema de correção, ZFC seria consistente. Mas modelos são construídos em ZFC, e portanto construir um modelo para ZFC em ZFC seria provar a consistência de ZFC em ZFC, o que contrariaria o segundo teorema de incompletude de Gödel. Logo, não podemos obter em ZFC um modelo de ZFC.

O segundo teorema de incompletude de Gödel vale não só para ZFC, mas também para outras teorias. Por exemplo, em outra versão, o segundo teorema de incompletude de Gödel diz que a consistência da aritmética não pode ser provada na aritmética. Cabe, porém, uma ressalva. Deve-se levar em conta como se exprime a consistência de uma teoria. O teorema 1.6.2 vale para um modo particular de definir consistência, mas existem modos alternativos aos quais esse teorema não se aplica (como mostra Feferman (1960)). Intimamente relacionado ao teorema 1.6.2, está o primeiro teorema de incompletude Gödel, do qual apresentamos a versão seguinte.

Teorema 1.6.3 (Primeiro teorema de incompletude de Gödel)**.** *Não existe uma extensão consistente, completa e axiomatizável de ZFC.*

Se supusermos que ZFC é consistente, o teorema 1.6.3 diz que, se uma extensão de ZFC for axiomatizável, não será completa; se for completa, não será axiomatizável. ZFC não é completa, e a hipótese do contínuo é um exemplo de sentença indecidível nessa teoria. Assim como o teorema 1.6.2, o primeiro teorema de incompletude de Gödel vale também para outras teorias. Por exemplo, em outra versão sua, ele afirma que não existe uma extensão consistente, completa e axiomatizável da aritmética. O primeiro teorema de incompletude tem consequências importantes, mas aqui vamos nos limitar a explorar as consequências do segundo teorema de incompletude para provas de consistência em teoria dos conjuntos.

ZFC não prova a própria consistência, mas a consistência de teorias mais fracas que ZFC pode ser provada em ZFC. Por exemplo, é possível construir um modelo para os axiomas de Peano em ZFC, e desse modo provar em ZFC a consistência da aritmética de Peano. Uma prova da consistência de ZFC pode ser obtida de maneira semelhante, em uma teoria mais forte que ZFC; mas tal teoria também não poderá provar sua própria consistência, o que nos deixa em uma condição similar.

Provas de consistência têm um papel importante em teoria dos conjuntos, dentre outros motivos porque elas permitem estabelecer a independência de certas sentenças com respeito à teoria dos conjuntos. Por exemplo, prova-se a independência da hipótese do contínuo mostrando-se que, se ZFC é consistente, então ZFC+CH e ZFC+ $\neg$CH são consistentes. Porém, provas de consistência tais como a de ZFC+CH e de ZFC+$\neg$CH não podem ser feitas da maneira usual, isto é, apresentando-se um modelo no sentido definido acima para ZFC+CH e outro para ZFC+ $\neg$CH, pelas razões que discutimos. É preciso usar outros meios para conseguir um efeito semelhante. Seguimos Kunen (1980) para esboçar como isso pode ser feito.

Dado qualquer conjunto de sentenças S da linguagem da teoria dos conjuntos e qualquer classe $\mathbf{M}$ não-vazia, se deixamos as variáveis das sentenças de S "variarem" sobre $\mathbf{M}$ e provamos, em uma teoria T, que as sentenças de S "são verdadeiras" em $\mathbf{M}$, então teremos mostrado que a consistência de T implica a consistência de S. Vamos deixar essas noções mais precisas.

Definição (Relativização)**.** Para qualquer classe $\mathbf{M}$ e qualquer fórmula ϕ, definimos $\phi^{\mathbf{M}}$, a *relativização* de ϕ a $\mathbf{M}$, por indução sobre ϕ, como:

(a) $(x = y)^{\mathbf{M}}$ é $x = y$.

(b) $(x \in y)^{\mathbf{M}}$ é $x \in y$.

(c) $(\phi \wedge \psi)^{\mathbf{M}}$ é $\phi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}}$.

(d) $(\neg\phi)^{\mathbf{M}}$ é $\neg(\phi^{\mathbf{M}})$.

(e) $(\exists x\,\phi)^{\mathbf{M}}$ é $\exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \phi^{\mathbf{M}})$.

De acordo com nossas convenções sobre o uso de classes, $\mathbf{M}$ é uma fórmula. Então, o que a definição acima faz é definir uma fórmula $\phi^{\mathbf{M}}$ a partir da fórmula ϕ e da fórmula que especifica $\mathbf{M}$, que podemos representar também por $\mathbf{M}$. Assim, a fórmula (e) na verdade é $\exists x(\mathbf{M}(x) \wedge \phi^{\mathbf{M}})$. *Grosso modo*, $\phi^{\mathbf{M}}$ é obtida a partir de ϕ pela substituição de todas as ocorrências de $\exists x$ por $\exists x \in \mathbf{M}$. Na presença do quantificador universal, substituímos $\forall x...$ por $\forall x \in \mathbf{M}$, isto é, $\forall x(x \in \mathbf{M} \to ...)$.

Intuitivamente, para uma fórmula ϕ qualquer, $\phi^{\mathbf{M}}$ diz que ϕ é verdadeira quando suas variáveis ligadas variam sobre os elementos de $\mathbf{M}$. Mais precisamente, definimos como segue.

Definição. Seja $\mathbf{M}$ uma classe qualquer.

(a) Para uma sentença ϕ, "*ϕ é verdadeira em* $\mathbf{M}$" significa $\phi^{\mathbf{M}}$.

(b) Para um conjunto de sentenças S, "*S é verdadeiro em* $\mathbf{M}$" ou "$\mathbf{M}$ *é um modelo para S*" significa que toda sentença de S é verdadeira em $\mathbf{M}$.

Agora podemos falar em *modelos* de teoria dos conjuntos, no novo sentido definido acima, sem contrariar o segundo teorema de incompletude de Gödel. Afirmar que uma classe $\mathbf{M}$ é um modelo de S significa dizer que podemos provar, a partir dos axiomas que estamos usando, todas as sentenças de S relativizadas a $\mathbf{M}$. Provas de consistência relativa empregando essas definições apoiam-se no teorema 1.6.4.

Teorema 1.6.4. *Sejam S e T dois conjuntos de sentenças na linguagem da teoria dos conjuntos, e $\boldsymbol{M}$ uma classe qualquer. Se provamos a partir de T que $\boldsymbol{M} \neq \varnothing$ e $\boldsymbol{M}$ é um modelo para S, então $Con(T) \to Con(S)$.*

$\mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(S)$ é só uma forma abreviada de escrever que a consistência de T implica a consistência de S.

Um exemplo. Usando o teorema 1.6.4, provamos a consistência da negação do axioma do infinito ($\neg$Inf) com os demais axiomas de ZFC fazendo T = ZFC, S = ZFC − Inf + $\neg$Inf e $\mathbf{M} = V_\omega$. Em palavras, S é o conjunto de todos os axiomas de ZFC exceto o axioma do infinito, mais a negação do axioma do infinito. $\mathbf{M}$ é V_ω, um conjunto infinito cujos elementos são todos finitos. Informalmente, por um raciocínio semelhante ao desenvolvido na página 22, podemos ver que todas as sentenças de S são verdadeiras em V_ω. Por exemplo, o axioma do par é verdadeiro porque, se $x, y \in V_\omega$, então $\{x, y\} \in V_\omega$; o axioma do fundamento é verdadeiro porque $V_\omega \subset \mathbf{WF}$; e o axioma do infinito falha, pois não existe conjunto infinito em V_ω. Portanto, $\neg$Inf é verdadeira em V_ω. Formalmente, provam-se em ZFC todos os axiomas de S relativizados a V_ω. Por exemplo, prova-se $(\neg\mathrm{Inf})^{\mathbf{M}}$, que traduz-se na seguinte sentença:

$$\neg\exists x \in V_\omega(\varnothing \in x \wedge \forall y \in V_\omega(y \in x \to S(y) \in x))$$

Pelo teorema 1.6.4, Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC $-$ Inf $+$ $\neg$Inf).

As provas em ZFC da independência da hipótese do contínuo com relação à ZFC também empregam o expediente da relativização. A primeira etapa da prova de independência da hipótese do contínuo foi realizada por Gödel. Sua prova pode ser transferida para ZF, permitindo mostrar que, se ZF é consistente, então ZF+AC+GCH é consistente. A segunda etapa foi realizada por Cohen, que provou que, se ZFC é consistente, então ZFC+ $\neg$CH é consistente.

Gödel definiu um modelo para ZF que ficou conhecido como *o universo construtível*, e é geralmente representado por $\mathbf{L}$. $\mathbf{L}$ é definido por recursão transfinita de maneira similar a $\mathbf{WF}$, mas com uma diferença importante. Ao passo que em $\mathbf{WF}$ $V_{\alpha+1}$ reúne todos os subconjuntos de V_α, em $\mathbf{L}$ $L_{\alpha+1}$ reúne apenas os subconjuntos definíveis de L_α com parâmetros em L_α. A classe $\mathbf{L}$ é construída como segue.

Definição. Por recursão transfinita, definimos L_α para todo ordinal α:

(a) $L_0 = \varnothing$.

(b) $L_{\alpha+1} = \{x \subset L_\alpha : x \text{ é definível}\}$.

(c) $L_\alpha = \bigcup\{L_\xi : \xi < \alpha\}$, se α é um ordinal limite.

Definição. $\mathbf{L} = \bigcup\{L_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$

Se $x \in \mathbf{L}$, x é dito um *conjunto construtível*. Para todo x tal que $x \in \mathbf{L}$, $x \in \mathbf{WF}$, pois todo subconjunto definível de L_α pertence a $\wp(L_\alpha)$; mas o inverso não é *necessariamente* verdadeiro. $\mathbf{L}$ é dito um *modelo interno* de ZFC. O *axioma da construtividade* é a afirmação de que todos os conjuntos são construtíveis, isto é, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

A prova de consistência de Gödel nos fornece que $\mathbf{L}$ é um modelo de ZF e também do axioma da construtividade. Em particular, o axioma da construtividade pode ser adicionado a ZF sem perigo de produzir "novas" contradições. Além disso, mostra-se em ZF que o axioma da construtividade implica o axioma da escolha e GCH.

A prova de Cohen, que estabeleceu por fim a independência da hipótese do contínuo, consistiu em construir modelos para ZFC+ $\neg$CH. Cohen desenvolveu um método inovador de estender modelos de ZFC, chamado *forcing*. De maneira muito resumida, tomando por base a explicação intuitiva de Hrbacek e Jech (1999, p. 275-277), o método *forcing* consiste em adicionar ao universo subconjuntos de ω sobre os quais se podem provar alguns fatos, tais como que são infinitos e que diferem de qualquer outro conjunto no universo original. Nesses universos estendidos, prova-se que todos os axiomas de ZFC são verdadeiros. Adicionando ao universo uma quantidade adequada de conjuntos "novos", obtém-se modelos nos quais $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ para quase todo $\alpha > 0$. Isto é, constroem-se modelos em que a cardinalidade do contínuo é $\aleph_1$, mas também constroem-se modelos em que a cardinalidade do contínuo é $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc., ou seja, modelos em que vale $\neg$CH. A cardinalidade do contínuo só não pode ser aquilo que é impedido pelo teorema de König, por exemplo, $\aleph_\omega$.

Diante da independência da hipótese do contínuo, há pelo menos duas posições a tomar. Uma é considerar a prova de independência o fim da questão. Para quem pensa assim, Gödel e Cohen trouxeram à tona tudo o que se podia saber sobre a hipótese do contínuo, e a partir daí podemos ter diversas teorias de conjuntos: uma cantoriana, em que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, e outras não-cantorianas, em que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$, similarmente ao que ocorre com as geometrias euclidiana e não-euclidianas. A outra posição consiste em pensar que a independência da hipótese do contínuo indica que o nosso entendimento atual sobre os conjuntos como refletido pelos axiomas de ZFC é insuficiente, e portanto deve haver alguma propriedade fundamental dos conjuntos que ainda desconhecemos. Os partidários dessa posição defendem que devemos buscar axiomas adicionais, capazes de decidir a hipótese do contínuo.

Gödel, realista convicto, partilhava dessa segunda posição (GÖDEL, 1983). Cohen inicialmente também se aproximava da segunda posição. De maneira um tanto obscura, referindo-se à sua própria opinião, ele escreveu o seguinte: "um ponto de vista que o autor sente que pode por fim vir a ser aceito é que CH é obviamente falsa". (COHEN, 2008, p. 151). Posteriormente, porém, Cohen passou a esposar uma posição, digamos, formalista, segundo a qual a hipótese do contínuo não tem um significado intrínseco (Cf. KANAMORI, 2008, p. 369), no que se aproxima da primeira posição.

Os enunciados independentes de ZFC tais como a hipótese do contínuo encontram-se na fronteira do conhecimento matemático, um terreno fértil para a investigação filosófica. Posicionar-se de um ou de outro modo, com relação a essas questões, envolve um montante considerável de reflexão. Nos capítulos seguintes tratamos de explorar alguns aspectos envolvidos nessas reflexões sob a perspectiva do naturalismo em matemática desenvolvido por Penelope Maddy. Como primeiro passo, no próximo capítulo avaliamos em que sentido se pode afirmar, dada a reconstrução da matemática em ZFC da qual uma pequena parte foi esboçada aqui, que a teoria dos conjuntos é o *fundamento* da matemática.

2 TEORIA DOS CONJUNTOS COMO FUNDAMENTO DA MATEMÁTICA

Vimos que cada número natural é definido como um conjunto particular, e que o conjunto de todos os números naturais é ω. As propriedades básicas dos números naturais — os axiomas de Peano — são então provadas como teoremas de ZFC. Vimos também como os números inteiros, racionais, reais e complexos são definidos como conjuntos. De modo similar, todos os outros objetos matemáticos usuais podem ser definidos como conjuntos e suas propriedades provadas como teoremas de ZFC. Isso significa que, do ponto de vista lógico, a matemática usual torna-se um grande sistema formal cujos axiomas são os axiomas de ZFC, e tudo o mais é provado como teorema desse sistema. Pensando metaforicamente, podemos imaginar esse grande sistema formal como um edifício no qual os axiomas lógicos e os demais axiomas de ZFC constituem os fundamentos, e todos os outros teoremas e definições são construídos sobre eles, apoiando-se nos fundamentos, como se fossem os andares superiores do edifício. De fato, essa visão metafórica é bastante difundida. Ela está presente nas páginas iniciais de muitos livros-texto de teoria dos conjuntos. Hrbacek e Jech (1999, p. 1) dizem: “neste livro, queremos desenvolver a teoria dos conjuntos como um fundamento para outras disciplinas matemáticas”. Kunen (2009, p. 7) segue a mesma linha: “estudamos teoria dos conjuntos primeiro porque ela é o fundamento de tudo”. Machover (1996, p. 9) não foge à regra: “A teoria dos conjuntos ocupa uma posição fundamental no edifício da matemática moderna”.

O largo emprego dessa metáfora mostra o quanto ela é apropriada para representar o sentimento que matemáticos e filósofos nutrem pela teoria dos conjuntos. Entretanto, como toda figura de linguagem, essa também pode levar a equívocos. É importante avaliar com cuidado que tipo de *sustentação* a teoria dos conjuntos é capaz de dar ao edifício da matemática.

O maior risco dessa visão metafórica do papel lógico desempenhado pela teoria dos conjuntos é que ela pode evocar uma antiga tradição em epistemologia que, levando mais longe a metáfora, queria que os fundamentos fossem sólidos; assim como os alicerces de um edifício, mais firmes que os andares superiores. É um fato da engenharia que a fragilidade dos fundamentos pode levar todo o edifício ao colapso. Na tradição epistemológica, solidez está associada à certeza, clareza e evidência. Analogamente à engenharia, esperava-se que os fundamentos de uma disciplina fossem mais certos, mais claros e evidentes que o restante da disciplina que se desejava fundamentar. Ainda de acordo com a tradição epistemológica, a reconstrução lógica de uma disciplina tinha o poder de revelar os pressupostos mais básicos nos quais a disciplina se apoiava, seus fundamentos. Tudo estaria bem se a análise lógica encontrasse pressupostos mais certos, claros e evidentes que o restante da disciplina. Fundamentos dessa natureza, aliados à estrita dedução lógica das demais verdades da disciplina a partir deles, garantiriam solidez a todo o edifício. Fundamentos menos certos levariam o edifício a estremecer.

A teoria dos conjuntos não é fundamento da matemática nesse sentido clássico. Quando dizem que a teoria dos conjuntos é o fundamento da matemática, os matemáticos não estão empregando inteiramente a metáfora dos fundamentos no sentido da epistemologia tradicional. O sentido clássico continua sintonizado com o entendimento atual na medida em que a reconstrução lógica da matemática na teoria dos conjuntos é comparada a um edifício em que os axiomas de ZFC estão no começo, na base, e tudo o mais é construído sobre eles. A parte da metáfora que não se aplica mais é a exigência de que os fundamentos sejam mais sólidos — no sentido de mais certos, claros e evidentes — que os andares superiores. Não sujeito às mesmas condições que obras de engenharia civil, o edifício da matemática não precisa de solidez nas bases, ao menos naqueles sentidos clássicos.

Separa a antiga da nova metáfora dos fundamentos uma profunda transformação no modo como é encarada a análise lógica de uma disciplina e o papel dos axiomas. Kunen traz três exemplos de emprego do método axiomático que ilustram o antigo e o novo modos de ver a axiomatização de uma disciplina. O primeiro exemplo, a axiomatização da geometria, feita por volta de 300 a.C por Euclides, é a ilustração mais exata da antiga concepção. De acordo com a visão clássica grega, os axiomas da geometria euclidiana eram encarados como "afirmações de fé", isto é, "fatos obviamente verdadeiros sobre o espaço físico real, dos quais se podem derivar outros fatos verdadeiros mas não óbvios, de tal forma que estudando geometria se está estudando a estrutura do mundo real" (KUNEN, 2009, p. 6). O segundo exemplo de Kunen, a teoria dos grupos[1], cujo tratamento axiomático foi dado por Cayley no

[1]A teoria de grupos é uma teoria de primeira ordem $\mathtt{G}$ cujo único símbolo não-lógico é a função binária $*$ e cujos axiomas não-lógicos são os seguintes:
A. $\forall xyz(x * (y * z) = (x * y) * z)$
B. $\exists u(\forall x(x * u = u * x = u) \land \forall x \exists y(x * y = y * x = u))$
Modelos de $\mathtt{G}$ são estruturas $\langle G, * \rangle$ tais que G é um conjunto e $*$ é uma função de $G \times G$ em G e que satisfazem os axiomas A e B. O axioma A requer que $*$ seja

século XIX, ilustra a atual concepção. Os axiomas da teoria dos grupos são vistos como afirmações definicionais: “os axiomas não capturam nenhuma ‘verdade universal’; eles servem apenas para definir uma classe de estruturas útil” (KUNEN, 2009, p. 6). Ao passo que na visão clássica da geometria euclidiana os axiomas pretendiam estar sujeitos a uma única interpretação — desejava-se que eles expressassem propriedades básicas dos objetos geométricos do mundo físico real — os axiomas da teoria dos grupos podem ser interpretados de infinitos modos. Qualquer estrutura que satisfaça os axiomas da teoria dos grupos é uma interpretação possível dessa teoria[2].

As duas posturas são muito diferentes, e essa diferença não está no próprio sistema axiomático, mas nas intenções de quem o aborda. Tanto como afirmações de fé quanto como definicionais, os axiomas podem ser apresentados formalmente em uma linguagem lógica, de sorte que não haverá nada no próprio sistema formal que permita distinguilos. São as explicações que acompanham a apresentação do sistema formal, mas que não o integram, que revelam as intenções de quem o aborda e, por conseguinte, revelam se aquele sistema está sendo encarado como afirmação de fé ou definicionalmente. Daí que o mesmo sistema formal pode servir aos dois propósitos. No caso dos axiomas tomados como afirmações de fé, a abordagem começa por uma explicação intuitiva das noções básicas envolvidas, os chamados conceitos primitivos, para os quais se podem introduzir símbolos primitivos na linguagem formal. Em seguida, é apresentada uma lista de afirmações sobre aqueles conceitos, que são reconhecidas como verdadeiras com base nas explicações anteriores. Essas afirmações são mapeadas em sentenças expressas na linguagem formal, e então passam a constituir os axiomas do sistema. Com os sistemas axiomáticos vistos como definicionais, a abordagem é outra. Símbolos primitivos são introduzidos desacompanhados de uma explicação intuitiva de seus significados. Os axiomas são uma lista de sentenças que articulam os símbolos primitivos, mas não existe a intenção de que eles sejam verdadeiros sobre aqueles símbolos, inclusive porque não está em tela o significado dos símbolos. A explicação intuitiva é dispensada, dentre outros motivos, porque um sistema axiomático definicional pode se aplicar a um grande número de conceitos diferentes. Ora o sistema pode ser “interpretado” como referindo-se a uns conceitos, ora como referindo-se a outros, mas

---

associativa e o axioma B exige a existência de elemento identidade u e, para cada elemento de G, a existência de um inverso y.

[2]Mais precisamente, é um modelo dessa teoria, conforme nossas definições no capítulo 1, página 42. Por abuso de linguagem, vamos simplesmente falar em “interpretação da teoria” quando caberia falar em “modelo da teoria”.

isso não tem importância para o sistema formal como tal. Quando um sistema axiomático é encarado como afirmações de fé, a interpretação pretendida está fixada, e o estudo do sistema axiomático está atrelado ao estudo daquela interpretação. Num sistema axiomático visto como definicional, não se fica preso a uma interpretação específica; a interpretação dada ao sistema varia de acordo com o que se quer mostrar.

O terceiro exemplo de Kunen é a teoria dos conjuntos. Quando a primeira axiomatização bem sucedida foi apresentada por Zermelo em 1908, os axiomas eram vistos como afirmações de fé. A matemática até então era composta por vários sistemas axiomáticos desconexos que com o advento da teoria dos conjuntos puderam ser subsumidos a ela. Ainda dentro do ideal clássico, os matemáticos acreditavam que essa redução da matemática à teoria dos conjuntos melhorava a situação epistemológica da matemática, pois a partir de então havia prova para todas as proposições matemática usuais, e as únicas verdades que precisavam ser postuladas eram os axiomas de ZFC. Pensavam que os axiomas descreviam verdadeiramente características básicas dos conjuntos, que alguns acreditavam constituir uma realidade independente. Gödel, por exemplo, afirmava que "os conceitos e teoremas da teoria dos conjuntos descrevem alguma realidade bem determinada"(GöDEL, 1983, p. 476). No entanto, essas ideias não duraram muito tempo. O desenvolvimento da teoria dos conjuntos tornou cada vez mais implausível pensar em seus axiomas como afirmações de fé. O trabalho do próprio Gödel foi responsável, em parte, por essa transformação. Segundo Kanamori,

> Antes de Gödel, os principais interesses [dos teóricos conjuntistas] eram sobre o que conjuntos *são* e como conjuntos e seus axiomas podem servir como uma base redutiva para a matemática. (...) Depois de Gödel, os principais interesses tornaram-se o que conjuntos *fazem* e como a teoria dos conjuntos há de avançar como um campo autônomo da matemática. (KANAMORI, 2007, p. 39)

Como vimos na seção 1.6, para provar a consistência relativa de GCH e do axioma da escolha, Gödel construiu um *modelo interno* da teoria dos conjuntos. Com isso, Gödel inaugurou um método de provas de consistência relativa em teoria dos conjuntos que consiste na reinterpretação da teoria de forma a construir um modelo *não-trivial*, isto é, que não combina, necessariamente, com a interpretação pretendida. Na interpretação pretendida, o universo é composto por todos os conjuntos, ao passo que no modelo interno de Gödel o universo é limitado apenas aos conjuntos contrutíveis. Quando axiomas são encarados como afirmações de fé, o interesse fica restrito a estudar apenas *o* universo intuitivo, aquele que se acredita corresponder à realidade subjacente à teoria. Mas o método de Gödel consiste opostamente na criação de um modelo em que o universo é ajustado para provar a consistência relativa de uma ou outra proposição. Nesse sentido não importa mais o que os conjuntos *são* — pois conforme varia o modelo considerado, varia o que são os conjuntos. A preocupação predominante, atesta Kanamori, passou da ontologia — o que são os conjuntos — para a epistemologia — o que podemos provar sobre os conjuntos (Ibid.).

O próxima passo foi dado por Cohen. Para provar a consistência relativa da negação de GCH e da negação do axioma da escolha, Cohen criou o método de *forcing*, que permite construir modelos em que a cardinalidade do contínuo é quase qualquer cardinal maior ou igual a $\aleph_1$, como vimos em 1.6. O *forcing* tornou-se um método geral e flexível de estender modelos de ZFC, deslocando ainda mais o interesse da questão sobre o que são os conjuntos, pois expandiu grandemente as possibilidades de criar interpretações não-triviais da teoria, para a questão sobre o que se pode provar sobre os conjuntos. Kanamori sintetiza a transformação que o *forcing* proporcionou na teoria dos conjuntos:

> Com sugestões claras de um modo novo e concreto de construir modelos, teóricos conjuntistas apressaram-se e usando *forcing* rapidamente foi estabelecida uma cornucópia de resultados de consistência relativa (...) Rapidamente, ZFC tornou-se totalmente diferente da geometria euclidiana e muito mais parecida com a teoria dos grupos, com uma larga gama de modelos da teoria dos conjuntos sendo investigados por seu próprio interesse. A teoria dos conjuntos experimentou uma mudança profunda (...) (KANAMORI, 2008, p.351)

Kunen enfatiza a mesma transformação (Cf. KUNEN, 2009, p. 7). Diante desse panorama criado pelas inovações metodológicas de Gödel e Cohen, não é mais possível encarar os axiomas de ZFC como afirmações de fé que descrevem uma realidade bem determinada de conjuntos. A interpretação pretendida de ZFC, que inicialmente era vista como espelhando aquela realidade, agora é encarada como apenas mais uma dentre tantas interpretações da teoria. A exemplo da teoria dos grupos, os axiomas da teoria dos conjuntos são então pensados como axiomas definicionais que delimitam uma classe de modelos sobre os quais recai o interesse matemático.

Afora os rumos matemáticos da teoria dos conjuntos, filosoficamente também há razões para não tomar seus axiomas como afirmações de fé. Lembra Quine que a certeza e obviedade de axiomas da teoria dos conjuntos são inferiores à certeza e obviedade de muitos dos teoremas que se provam a partir deles (QUINE, 1969, p. 70). Por exemplo, a aritmética dos números naturais, cujas propriedades básicas são capturadas pelos axiomas de Peano, desfruta de muito mais evidência e apelo à obviedade do que a teoria dos conjuntos. No entanto, os axiomas de

Peano são provados como teoremas de ZFC. Sob a perspectiva fundacional clássica essas provas têm pouco valor, pois é como se se tentasse provar o mais certo recorrendo ao menos certo.

A carência de obviedade ou de verdade evidente dos axiomas de ZFC pode ser ilustrada justamente por aquele que é considerado, por vezes, seu axioma mais evidente, o axioma da extensionalidade. De acordo com esse axioma, por exemplo, o conjunto dos quadrados de números reais é o mesmo que o conjunto dos números reais não-negativos porque eles têm os mesmos elementos. A diferença de sentido, de *intensão*, entre as propriedades que usamos para apresentar o conjunto, é irrelevante para a teoria de conjuntos. Mas para quem defende a autoevidência do axioma da extensionalidade, não é apenas a irrelevância da intensionalidade que nos faz admitir a extensionalidade como axioma na teoria dos conjuntos. O fato, dizem eles, é que conjuntos *são* entidades puramente extensionais. Nessa linha, Boolos (1983, p. 501) diz que “o axioma da extensionalidade desfruta de um status epistemológico especial compartilhado por nenhum dos outros axioma de ZF”. Para ele, o axioma da extensionalidade é, de certa forma, analítico, isto é, verdadeiro em virtude do significado das palavras que o compõem. O que o axioma da extensionalidade afirma seria, de acordo com Boolos, apenas um desdobramento direto do conceito de conjunto. Assim, a obviedade do axioma da extensionalidade seria equivalente à obviedade de sentenças como “todo solteiro não é casado” e “irmãos têm irmãos”, que claramente expressam propriedades presentes nos próprios conceitos de solteiro e irmão, respectivamente.

Estaria tudo bem se fosse ponto pacífico que a noção de conjunto é extensional, assim como é ponto pacífico que solteiros não são casados. Ocorre que se pode muito bem conceber conjuntos intensionais, sem nenhum absurdo. Ao discutir o axioma da extensionalidade, Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 27-28), por exemplo, admitem claramente que conjuntos podem ser tanto intensionais quanto extensionais: “de um ponto de vista intensional, o conjunto de todos os números reais não-negativos e o conjunto de todos os quadrados de números reais não são necessariamente idênticos, mesmo que tenham a mesma extensão”. A negação do axioma da extensionalidade pode também fazer sentido, ao passo que o absurdo é gritante quando se negam outras sentenças em geral vistas como analíticas, dizendo, p.e., “algum solteiro é casado”. Segundo Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, a noção puramente extensional de conjunto foi *escolhida* para ser a noção básica da teoria dos conjuntos por razões pragmáticas[3].

[3] Ver discussão na seção 3.1, página 79.

Mesmo o mais sereno dos axiomas de ZFC não tem a obviedade a seu favor. Em harmonia com a visão definicional dos axiomas, pode-se pensar que em ZFC o axioma da extensionalidade *especifica* que conjuntos são extensionais porque, para os propósitos matemáticos visados pela teoria, apenas conjuntos extensionais interessam.

Não foi só a teoria dos conjuntos que passou por uma transformação no modo de encarar seus axiomas. Mesmo a geometria euclidiana, epítome de sistema axiomático reputado como *afirmação de fé*, deixou de ser o estudo das propriedades básicas do espaço real — pelo menos desde Einstein ela é sabidamente problemática como descrição do espaço físico real — para ser o estudo dos modelos que satisfazem seus axiomas. Contemporaneamente, é muito mais natural conceber sistemas axiomáticos como definicionais do que como afirmações de fé. O ideal da epistemologia tradicional, que procurava pela análise lógica revelar os alicerces sólidos das ciências está, ao menos na matemática, abandonado.

Há ainda outros riscos menores envolvidos com a metáfora dos fundamentos. Um deles, e para o qual Kunen também chama a atenção, é pensar que, por ser a teoria dos conjuntos o fundamento da matemática, toda a informação exigida para desenvolver a matemática, e mesmo para compreender a própria teoria dos conjuntos, esteja contida nela. “Teoria dos conjuntos é a teoria de tudo, mas isso não significa que você possa entender [uma] apresentação axiomática de teoria dos conjuntos se você não sabe absolutamente nada”, diz Kunen (2009, p. 28). Antes de poder compreender uma apresentação axiomática formal da teoria dos conjuntos, é preciso ter o que Kunen chama de *raciocínio finitista*. Por exemplo, para entender o que é um axioma formal, é preciso entender o que é uma fórmula lógica, o que por sua vez exige entender o que é uma expressão, isto é, uma sequência finita de símbolos. Embora as noções de finitude e infinitude tenham definição formal em ZFC (como vimos na p. 34), antes mesmo de começar a entender ZFC é preciso ter uma noção prévia de finitude. É com base nesse conhecimento metateórico, que do ângulo da compreensão precede o conhecimento teórico, que as várias noções da teoria formal são apresentadas e explicadas. Embora constitua o fundamento lógico da matemática, da perspectiva da experiência de aprendizado a teoria dos conjuntos está bastante além dos fundamentos. Como dizia Russell, “as coisas mais óbvias e fáceis em matemática não são as que vêm logicamente no começo; são aquelas que, do ponto de vista da dedução lógica, começam em algum lugar do meio” (RUSSELL, 2007, p. 18). Se na perspectiva lógica a teoria dos conjuntos ocupa os alicerces do edifício, sob o enfoque da compreensão ela ocupa andares intermediários, e os alicerces são ocupados pelas noções metateóricas.

O papel que o raciocínio finitista desempenha não se resume apenas a ser indispensável na compreensão de uma teoria formal como ZFC. Uma ideia de raciocínio finitista foi especialmente importante no programa de Hilbert, no início do século XX, que buscava formalizar as teorias matemáticas usuais e demonstrar a consistência, de forma absoluta, dessas teorias formais. A teoria dos conjuntos permite a formalização das teorias matemáticas usuais, e permite também provar a consistência dessas teorias. Mas essas são provas relativas, como discutimos na seção 1.6. Uma prova absoluta da consistência da matemática exige uma prova absoluta da consistência da teoria dos conjuntos, isto é, uma prova que não exija assumir duvidosamente a consistência de uma outra teoria, caso contrário seria novamente uma prova de consistência relativa. Porém, toda prova tem que tomar lugar em alguma teoria. Hilbert, então, desejava uma teoria suficientemente simples para que sua consistência fosse intuitiva e obviamente dada, sem precisar prová-la. Ele escolheu uma versão elementar da aritmética, mais simples que a aritmética usual, que ele chamou de "matemática finitária". Essa teoria trata de um domínio de entidades em algum sentido concretas — os símbolos de um sistema formal — cuja verdade e consistência, queria Hilbert, podia ser verificada pelos sentidos. Se Hilbert atingisse seu intento, provando a consistência absoluta da teoria dos conjuntos provaria também a consistência da matemática usual, e com isso garantiria a segurança da matemática e de seus métodos. Assim, mesmo que o caráter fundacional da teoria dos conjuntos não pudesse ser aquele desejado pela epistemologia tradicional, ao menos a teoria dos conjuntos garantiria que a matemática construída sobre ela estava livre de contradições[4].

Ocorre que a matemática finitária de Hilbert, sendo uma simplificação da aritmética, é, naturalmente, parte da teoria dos conjuntos. Uma prova da consistência da teoria dos conjuntos na matemática finitária seria, portanto, uma prova da consistência da teoria dos conjuntos na própria teoria dos conjuntos. Contudo, o segundo teorema de incompletude de Gödel impede tal prova[5]. A consistência da teoria dos conjuntos só pode ser provada em uma teoria mais forte que a teoria dos conjuntos, ou seja, não há como escapar de provas de consistência

---

[4]Uma apresentação didática do programa de Hilbert, na qual nos baseamos, pode ser encontrada em Silva (2007), capítulo 5, *O Formalismo*.

[5]Esse é o entendimento dominante, mas Detlefsen (1986) defende que esse argumento contra o programa de Hilbert baseado no segundo teorema de Gödel não é conclusivo.

relativas. O programa de Hilbert, pelo menos da maneira como é geralmente entendido, é irrealizável. Além de a teoria dos conjuntos não ser capaz de dotar a matemática da certeza almejada pela epistemologia tradicional, o fracasso do programa de Hilbert mostra que nem mesmo a consistência da matemática, um requisito aparentemente mais singelo, pode ser assegurada pela teoria dos conjuntos.

Mais uma confusão a respeito do papel fundacional da teoria dos conjuntos consiste em pensar que uma definição de um objeto matemático na teoria dos conjuntos pode ser tomada como revelando a verdadeira identidade daquele objeto. Por exemplo, ao ver que o número dois pode ser definido, como fez von Neumann e nós seguimos na seção 1.2, pelo conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, a confusão é pensar que o número dois é, *na verdade*, o conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. A constatação de que a teoria dos conjuntos não goza de nenhum privilégio epistemológico sobre a aritmética dos números naturais já torna inverossímil imaginar que ela teria o poder de revelar a verdadeira identidade dos números naturais. Mas nem é preciso ir tão longe. Benacerraf (1983a) mostra que isso é impossível por uma razão matemática: há infinitas formas de definir os números na teoria dos conjuntos, todas funcionando igualmente bem. Zermelo, por exemplo, definiu o número dois pelo conjunto $\{\{\varnothing\}\}$. Esse fenômeno não acontece só com os números, pelo contrário, é comum a muitas definições de objetos matemáticos em termos conjuntistas. Em geral, há razões técnicas para preferir uma definição a outra, mas não são razões suficientes para justificar uma tese metafísica de que um objeto é, de fato, um conjunto e não outro. Em suma, embora objetos matemáticos possam ser representados como conjuntos, eles não tem de ser conjuntos.

As discussões acima nos recomendam não concluir que a fundamentação lógica na teoria dos conjuntos dote a matemática de mais certeza, muito menos que a torne isenta de contradições ou que revele a verdadeira identidade dos objetos matemáticos, se é que há tal coisa. Mas se esses anseios filosóficos não se realizam pela teoria dos conjuntos, o que sobra? Sobra o fato matemático, por si só muito notável, de que todos os objetos matemáticos usuais podem ser definidos em termos de conjuntos, e que todos os teoremas da matemática usual podem ser provados como teoremas de ZFC. Do ponto de vista matemático, isso é o que basta. "Pontos, números, funções, produtos cartesianos e outros objetos matemáticos", diz Moschovakis, "claramente não são conjuntos" (MOSCHOVAKIS, 2006, p. 33). Apesar disso, continua Moschovakis, "iremos descobrir dentro do universo dos conjuntos *representações fiéis* de todos os objetos matemáticos de que necessitamos, e iremos estudar teoria dos conjuntos com base no enxuto sistema axiomático de Zermelo **como se todos os objetos matemáticos fossem conjuntos**" (Ibid., p. 34). Independentemente da real natureza dos objetos matemáticos, a teoria dos conjuntos, por meio de representações fiéis desses objetos, pode dar informações preciosas sobre eles. Para as finalidades matemáticas, tratar os objetos matemáticos de maneira unificada, *como se* fossem conjuntos, podendo deixar de lado a preocupação com suas reais identidades, é o que interessa.

As principais contribuições da teoria dos conjuntos nos fundamentos da matemática advêm de seu poder unificador. Moschovakis diz que "na prática matemática padrão, atual, 'tornar uma noção precisa' é essencialmente sinônimo de 'defini-la na teoria dos conjuntos'. A teoria dos conjuntos é a linguagem oficial da matemática, exatamente como a matemática é a linguagem oficial da ciência"(Ibid., p. vii). Quando os objetos dos diversos ramos da matemática são definidos na mesma linguagem, nos mesmos termos conjuntistas, áreas antes separadas passam a figurar em um mesmo campo. Isso abre novas possibilidades de expansão do conhecimento matemático, como ilustra Maddy:

> as interconexões entre seus ramos são iluminadas; teoremas clássicos são traçados a uma origem comum; métodos efetivos podem ser transferidos de uma área para outra; o poder total dos princípios conjuntistas mais básicos pode ser trazido a operar sobre problemas até então insolúveis; a viabilidade de prova de novas conjecturas pode ser avaliada; e sistemas axiomáticos ainda mais fortes encerram a promessa de consequências ainda mais férteis. (MADDY, 1997, p. 28)

Todas essas possibilidades a que se refere Maddy se abrem porque a teoria dos conjuntos realiza, na matemática, o tão desejado ideal científico de unificação teórica. As diversas frentes de investigação são harmonizadas em uma só grande teoria que dá conta das questões usuais, serve de língua franca entre pesquisadores de diferentes ramos, e é poderosa o suficiente para guiar o desenvolvimento ulterior da disciplina, ainda que haja vários problemas matemáticos em aberto cuja solução exige a extensão da teoria. A teoria dos conjuntos converte-se, assim, numa arena comum onde disputas matemáticas são decididas ou declaradas indecidíveis de acordo com os axiomas usuais. Maddy resume assim:

> Finalmente, e talvez mais fundamentalmente, esta única arena para a matemática proporciona uma corte de apelação final para questões de existência e prova matemáticas: se você quer saber se existe um objeto matemático de um certo tipo, você pergunta (em última análise) se existe um substituto conjuntista daquele tipo; se você deseja saber se uma dada afirmação é demonstrável ou refutável, você quer dizer (em última análise), demonstrável ou refutável a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos. (MADDY, 1997, p. 26)

Sumarizando o que viemos discutindo até aqui, a despeito dos ideais filosóficos fundacionalistas tradicionais, a teoria dos conjuntos não está nos fundamentos da matemática porque seja mais clara e evidente que o restante da matemática, ou porque proteja a matemática de contradições, ou ainda porque revele a verdadeira identidade dos objetos matemáticos. A teoria dos conjuntos, do ponto de vista filosófico tradicional, é frustrante. Ela não pode fornecer o tipo de certeza e segurança que a epistemologia procurava, nem pode responder às tradicionais indagações ontológicas sobre a real natureza dos entes matemáticos. Porém, do ponto de vista matemático, a teoria dos conjuntos é um sucesso. A célebre frase de Hilbert (2006, p. 83), "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós", expressa a dimensão desse sucesso. A teoria dos conjuntos está nos fundamentos da matemática por razões lógico-matemáticas: seu poder unificador permite reconstruir sobre ela toda a matemática usual e isso traz uma série de vantagens matemáticas, dentre elas a formação de uma arena unificada que funciona decisivamente na resolução de questões de existência e prova matemáticas. Embora a metáfora dos fundamentos continue perfeitamente cabível do ponto de vista lógico-matemático, restringindo-se à caracterização técnica do papel fundacional da teoria dos conjuntos, do ponto de vista filosófico tradicional essa metáfora não faz sentido, e a teoria dos conjuntos estaria mais bem posicionada ao lado dos demais ramos da matemática no que tange ao status do conhecimento.

3 MATEMÁTICA, FILOSOFIA E FÍSICA

Vimos no capítulo anterior que a teoria dos conjuntos é fundamental para a matemática não por razões filosóficas, mas sim por razões matemáticas. Essa conclusão aponta na direção da filosofia segunda de Maddy. Para Maddy, é um fato muito significativo que questões matemáticas e também científicas tenham sido resolvidas independentemente da solução das disputas filosóficos a elas relacionadas. O desenvolvimento da teoria dos conjuntos, e o modo como ela se consolidou nos fundamentos da matemática, ilustram esse fato. Embora até hoje inexista uma teoria filosófica sólida sobre a natureza das entidades matemáticas (se é que tal coisa é possível) e, em particular, sobre a natureza dos conjuntos, os matemáticos foram capazes de desenvolver, desde o final do século XIX, uma poderosa teoria sobre conjuntos. Nesse percurso, muitas das questões filosóficas relacionadas não foram resolvidas, permanecendo em aberto e altamente polêmicas até hoje, mas as questões matemáticas tiveram solução, e a teoria dos conjuntos progrediu e tornou-se uma área importante e fundamental da matemática. Dado esse cenário, a conclusão óbvia é que as questões matemáticas não foram decididas com base em considerações filosóficas (Cf. MADDY, 1997, p. 191).

Apesar disso, é muito comum o pensamento, mesmo entre matemáticos, de que algumas questões fundamentais da matemática pedem abordagem filosófica. Encontramos em Kunen (2009, p. 3-4) uma expressão desse pensamento:

> em matemática, escrevem-se axiomas e provam-se teoremas a partir dos axiomas. A justificação para os axiomas (porque eles são interessantes, ou verdadeiros em algum sentido, ou são dignos de ser estudados) é parte da motivação, ou física, ou filosofia, não parte da matemática. A matemática propriamente consiste em dedução lógica a partir dos axiomas.

Se circunscrevermos a matemática apenas à dedução lógica a partir dos axiomas, pensar como Kunen parece ser, à primeira vista, inevitável. Como toda a matemática usual pode ser derivada da teoria dos conjuntos, o trabalho usual em matemática de fato pode ser visto como sendo, em última análise, apenas dedução lógica a partir de axiomas. Naturalmente, antes de começar a dedução é preciso ter presentes a lógica e os axiomas não-lógicos que serão empregados. Mas se todo o trabalho matemático é apenas dedutivo, o trabalho de estabelecer a lógica e os axiomas, que não é dedutivo, não pode ser matemático.

Ao mesmo tempo, esse trabalho não é arbitrário, nem têm os matemáticos ou quem quer que seja a liberdade de realizá-lo de acordo com seus caprichos. Disso conclui-se que as justificativas para a lógica e para os axiomas da teoria dos conjuntos encontram-se em razões extra-matemáticas. Tradicionalmente a física e a filosofia são as disciplinas mais cotadas para abrigar essas razões.

Essa visão, embora muito difundida, é sujeita à contestação. Uma análise histórica do desenvolvimento da teoria dos conjuntos, como a feita por Maddy e outros, revela que foram razões matemáticas, e não filosóficas ou físicas, que levaram à eleição dos atuais axiomas da teoria dos conjuntos. A primeira coisa a notar é que, diferentemente do que possa sugerir a imagem de que o trabalho em matemática é sempre dedutivo, não é o caso, claro, que o trabalho matemático só possa começar depois que os axiomas estejam lançados. Não é fiel à história a cena em que alguns axiomas são postulados, por razões físicas, filosóficas ou de outra natureza, e a partir daí os matemáticos seguem a tirar consequências desses axiomas. A maior parte das axiomatizações, como é largamente sabido, é um processo ulterior. Da Costa, por exemplo, afirma que o procedimento de axiomatização "só poderá ser empregada em disciplinas que já atingiram certo grau de maturidade, através de evolução que em alguns casos tem que ser lenta." (da COSTA, 2008, p. 35). O que ocorre é que os axiomas são postulados, posteriormente, tendo que atender ao requisito de dar conta da dedução dos conhecimentos que a disciplina, já madura, alcançara. Esse é o caso da teoria dos conjuntos. Os axiomas foram moldados de forma a dar conta de recuperar o que Cantor e outros pioneiros já haviam desenvolvido, bem como tendo em vista a redução da matemática clássica à teoria dos conjuntos. Então, antes de ter justificativas físicas, filosóficas ou de outra procedência, eles têm justificativa matemática: os axiomas são esses porque esses permitem atingir as metas matemáticas visadas pela teoria[1].

Seguindo de perto Maddy (1997), a seguir desenvolvemos três linhas argumentativas a favor da tese de que as justificativas dos axiomas são, antes de tudo, matemáticas. Esses argumentos têm em comum a atenção dispensada à prática matemática, e não tanto ao discurso dos matemáticos sobre essa prática ou à tradição filosófica, o que está muito de acordo com a filosofia segunda de Maddy. Começamos por avaliar

[1]Certamente, quando Kunen separa a justificação dos axiomas da matemática propriamente dita, ele não está se referindo ao processo de desenvolvimento histórico da matemática. Trata-se, antes, de uma visão idealizada da matemática sem finalidade histórica. Ele explica em (KUNEN, 2009, p. 188) que está assumindo o que chama de *postura formalista oficial* em matemática. Veja discussão na página 101.

os argumentos e as discussões dos próprios matemáticos acerca da axiomatização da teoria dos conjuntos, e em seguida passamos a examinar por que a motivação dos axiomas frequentemente não é nem filosófica nem física.

3.1 MOTIVAÇÃO MATEMÁTICA DOS AXIOMAS

A axiomatização de uma disciplina, como dissemos acima, em geral é um processo posterior, e a teoria dos conjuntos não fugiu à regra. Isso quer dizer que, antes do estabelecimento dos atuais axiomas, já havia entre os matemáticos não só uma noção preliminar sobre o que eram conjuntos, mas também uma substancial teoria em franco desenvolvimento. Enderton (1977, p. 11) comenta: "é claro que nossa seleção dos axiomas será guiada pelo desejo de refletir tão acuradamente quanto possível nossas ideias informais (pré-axiomáticas) com respeito a conjuntos e classes". Daí que uma forma de justificar os axiomas da teoria dos conjuntos é defender que eles fazem justiça a essa noção pré-axiomática de conjuntos. Muitos argumentos a favor dos axiomas apontam nessa direção.

Porém, é preciso esclarecer o que se entende por "ideias pré-axiomáticas". Em um sentido cronológico, ideias pré-axiomáticas são aquelas que matemáticos do final do século XIX, tais como Cantor, Dedekind, Frege e Zermelo nutriam antes da axiomatização da teoria dos conjuntos no início do século XX. A teoria axiomática de conjuntos germinou a partir dessas ideias, mas modificou-as consideravelmente. A concepção de conjunto foi modificada, dentre outros motivos, porque a hoje chamada *noção ingênua de conjunto* levava a contradições[2]. Cantor expressou sua compreensão de conjunto como "uma coleção, reunida em uma totalidade, de certos objetos bem distintos de nossa percepção ou pensamento" ou ainda como "muitos, que podem ser pensados como um, i.e., uma totalidade de elementos definidos que pode ser combinada em um todo por uma lei" (CANTOR, 1932; apud BOOLOS, 1983, p. 486). Zermelo (2010a, p. 190-191) formula sua axiomatização afirmando explicitamente que a "a definição original de 'conjunto' de Cantor (...) certamente requer alguma restrição" a fim de evitar contradições. A postura de Zermelo ilustra que foi a própria axiomatização da teoria dos conjuntos que contribuiu para produzir a atual noção infor-

[2]Tais como o paradoxo de Russell e o paradoxo de Burali-Forti, expostos nas páginas 17 e 27 do capítulo 1.

mal, não axiomática, de conjunto[3]. Os matemáticos referem-se à atual noção informal como a *interpretação pretendida* da teoria dos conjuntos. Quando Enderton, na passagem citada acima, menciona as "ideias informais (pré-axiomáticas) com respeito a conjuntos", está referindo-se à interpretação pretendida, à atual concepção informal de conjunto, e não àquela de Cantor e Dedekind. De fato, Enderton começa sua apresentação da teoria dos conjuntos explicando informalmente a interpretação pretendida, e introduz posteriormente os axiomas como capturando propriedades daquela interpretação. A interpretação pretendida não é pré-axiomática no sentido cronológico.

A abordagem de Shoenfield (1977, p. 322) é similar à de Enderton:

> Idealmente, um sistema axiomático é formado como segue. Primeiro, selecionamos os conceitos básicos e explicamos sua natureza tão completamente quanto possível. Então, escrevemos axiomas para os conceitos. Se tudo vai bem, nossa explicação tornará claro que os axiomas são verdadeiros. Procuraremos apresentar os axiomas da teoria dos conjuntos dessa maneira. Começaremos, portanto, com uma explicação da noção de conjunto. (...) veremos que essa explicação é totalmente útil, não só para justificar os axiomas da teoria dos conjuntos, mas também para investigar novos axiomas e para provar teoremas sobre eles.

Na sequência, Shoenfield dedica-se a examinar, informalmente, a noção de conjunto. Um conjunto, diz Shoenfield, é uma coleção de objetos. Esses objetos são chamados de membros do conjunto. Quaisquer objetos podem ser membros de um conjunto, continua Shoenfield, inclusive outros conjuntos, e um conjunto é completamente determinado pelos seus membros. Shoenfield observa que, para fins matemáticos, não interessam outros objetos diferentes de conjuntos, de sorte que membros que não sejam conjuntos são desconsiderados. Shoenfield previne, ainda, que não é qualquer coleção de objetos que forma um conjunto. Por exemplo, uma coleção z que possui entre seus membros a própria coleção z não é um conjunto. Isso tem a ver com o processo pelo qual os conjuntos são formados. Explica Shoenfield que, para formar um novo conjunto, podemos selecionar como seus membros apenas conjuntos que já foram formados antes. Ele acrescenta que a explicação dessa restrição não é difícil: "quando estamos formando o conjunto z escolhendo seus membros, ainda não temos o objeto z, e portanto não podemos usar z como um membro de z"(Ibid., p. 323). A análise desse

[3]Na verdade, há várias noções informais de conjunto, assim como há várias axiomatizações. Porém, vamos continuar usando o singular, referindo-nos assim *à* axiomatização e *à* noção informal mais comuns.

processo de formação de conjuntos, explica Shoenfield, mostra que os conjuntos são formados em estágios. Em cada estágio, cada coleção de conjuntos formados nos estágios anteriores constitui um conjunto daquele estágio. No primeiro estágio, não há estágios anteriores, então temos apenas o $\varnothing$. No segundo estágio, temos $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$; no terceiro estágio, temos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, e assim por diante. Isso produz uma série infinita enumerável de estágios. Fazendo a união infinita desses estágios e tomando todos os subconjuntos dessa união formamos um novo estágio para além daquela série infinita. A formação de conjuntos segue assim indefinidamente. "Sempre que você puder pensar que a construção está acabada, em vez disso você toma a união de todos os estágios obtidos até então, toma o conjunto potência dessa união, e continua", resume Enderton (1977, p. 8). Esse processo de formação de conjuntos em estágios, também chamado de *concepção iterativa de conjunto*, pode ser entendido como produzindo a interpretação pretendida da teoria dos conjuntos, qual seja, a hierarquia cumulativa $\mathbf{V}$, o universo conjuntista[4].

Dado esse panorama informal, Shoenfield então adota a estratégia que anunciara de justificar os axiomas da teoria mostrando que eles são verdadeiros de acordo com a concepção de conjunto. No caso do axioma da extensionalidade, a justificativa é mais direta e não por conta da concepção iterativa propriamente dita. Para Shoenfield, o fato de que um conjunto seja determinado exclusivamente pelos seus membros integra o conceito de conjunto. Esse tipo de defesa do axioma da extensionalidade não é peculiar a Shoenfield, pelo contrário. Shoenfield defende o axioma da extensionalidade por razão similar a que, no capítulo anterior (p. 54), vimos Boolos endossá-la. Para ambos, o axioma da extensionalidade expressa uma verdade sobre os conjuntos porque ele não passa de um desdobramento do próprio conceito de conjunto. Ambos veem o axioma da extensionalidade como analítico.

Shoenfield apresenta justificativas a partir da concepção iterativa para os demais axiomas que ele inclui em ZFC: separação, união, conjunto potência, substituição, infinito, fundamento e escolha. Vejamos com mais detalhes, como ilustração da estratégia de justificação de Shoenfield através da concepção iterativa, os casos do axioma de separação, conjunto potência e infinito.

Recapitulando, a ideia do axioma de separação é que, dado um conjunto A e uma propriedade P, podemos formar o conjunto B cujos

[4]Veja a seção 1.5. Essa descrição intuitiva do processo de formação de estágios que apresentamos aqui é bem superficial, e pode ser especificada de diversas maneiras. Uma delas é a que se encontra em Boolos (1983).

membros são os membros de A que têm a propriedade P. A estratégia de defesa do axioma de separação através da concepção iterativa consiste em mostrar que, quaisquer que sejam o conjunto A e a propriedade P, existe um estágio no qual o conjunto B é formado. Lembremos que, em cada estágio, são formados todos os conjuntos possíveis a partir dos conjuntos pré-existentes nos estágios anteriores — isto é, todas as combinações possíveis de elementos existentes nos estágios anteriores formam um conjunto no estágio atual. Então suponha que o conjunto A seja formado no estágio S. Disso concluímos que todos os elementos de A, inclusive os que satisfazem P, já estavam disponíveis para seleção pelo menos no estágio anterior a S. Portanto, o conjunto B é formado, no mais tardar, no estágio S (SHOENFIELD, op. cit., p. 325).

A estratégia de defesa do axioma do conjunto potência é similar. Dado qualquer conjunto A, é preciso mostrar que a concepção iterativa assegura a existência do conjunto B composto por todos os subconjuntos de A. Se o conjunto A é formado no estágio S, todos os seus membros estavam disponíveis no estágio anterior a S, do que se conclui que todos os subconjuntos de A também são formados no estágio S. O conjunto B, que reúne todos os subconjuntos de A, é então formado no estágio seguinte a S (Ibid., p. 326).

A defesa do axioma do infinito a partir da concepção iterativa é levemente mais elaborada, mas segue ainda a mesma estratégia de mostrar que, em algum estágio, é formado o conjunto desejado. No caso, é preciso mostrar que em algum estágio obtém-se o conjunto infinito cuja existência é afirmada pelo axioma. Uma maneira usual de apresentar o axioma do infinito, que foi a adotada no capítulo 1, consiste em afirmar a existência de um conjunto Y tal que $\varnothing \in Y$, e qualquer que seja $x \in Y$, $x \cup \{x\}$ também pertence a Y. Para mostrar que o conjunto Y de fato existe de acordo com a concepção iterativa, Shoenfield procede assim. Seja x_0 o conjunto vazio, e seja x_{n+1} o conjunto $x_n \cup \{x_n\}$. O conjunto vazio, x_0, pode ser obtido em qualquer estágio. Se x_n é formando em um estágio, então x_{n+1} é formado no estágio seguinte. Suponha que cada x_n seja formado no estágio S_n. Todos os elementos do conjunto Y estão, pois, disponíveis para coleta nos estágios S_n, e existe um estágio S, depois de todos os S_n, no qual pode ser formado o conjunto Y, coletando-se os elementos $x_0, x_1, x_2, \dots$ (Ibid.).

Esses raciocínios, quando apresentados como argumentos a favor dos axiomas da teoria dos conjuntos, pretendem mostrar que os axiomas são adequados porque nada mais fazem que explicitar propriedades já presentes na noção informal de conjunto ou que podem ser facilmente deduzidas dela. Em suma, procuram mostrar que os axiomas fazem justiça à uma noção apropriada de conjunto, o que faz da teoria uma boa axiomatização. A esse tipo de justificativa, que apela à conformação dos axiomas a alguma concepção subjacente, ou mesmo à intuição e à autoevidência, Maddy chama de *justificação intrínseca* (Cf. MADDY, 1997, p. 37).

Não obstante, convém examinar em que medida os argumentos ligados à concepção iterativa podem ser considerados como justificativas que contribuíram *para a aceitação* dos axiomas. A razão para essa desconfiança levantada agora já havia sido insinuada acima: a própria axiomatização da teoria dos conjuntos moldou a noção informal de conjunto. A concepção iterativa não é pré-axiomática no sentido cronológico, e portanto é improvável que os argumentos delineados acima tenham contribuído para a aceitação dos axiomas. Focando no processo histórico de desenvolvimento da teoria dos conjuntos, veremos que não foram os axiomas escolhidos para casar o melhor possível com uma noção informal já pronta, foi a noção informal que foi sendo remodelada e esclarecida à medida que a axiomatização progredia. Daí que defender os axiomas com base na argumentação de que eles fazem justiça à concepção iterativa, sendo que a própria concepção iterativa é, de certa forma, um produto da axiomatização, pode soar um tanto circular. Novamente, Zermelo fornece uma ilustração de como a concepção de conjunto mudou conforme sedimentava-se a axiomatização da teoria. Uma diferença importante entre as axiomatizações de Zermelo de 1908 (ZERMELO, 2010a) e de 1930 (ZERMELO, 2010b) é que, nesta última, Zermelo inclui os axiomas do fundamento e de substituição, que estavam ausentes na primeira. Ambos os axiomas são essenciais para a concepção iterativa. Sem o axioma do fundamento, o processo de formação de conjuntos não precisa ocorrer em estágios, nada impedindo que um conjunto tenha entre seus membros um conjunto que ainda não tenha sido formado. Por exemplo, sem o axioma do fundamento, um conjunto pode pertencer a si mesmo. Isso era admitido no sistema axiomático de Zermelo de 1908. O axioma de substituição[5] é incluído por Zermelo por sugestão de Fraenkel e devido aos trabalhos de von Neumann, que mostraram que o axioma de substituição é indispensável para a formalização da recursão transfinita (Cf. KANAMORI, 2010, p. 390). A recursão transfinita, por sua vez, é indispensável para a definição dos estágios na teoria formal. Comenta Kanamori a respeito desses dois axiomas:

[5]Como vimos na seção 1.1, o esquema de axiomas de substituição dá origem a infinitos axiomas de substituição, de modo que seria mais adequado referir-se aos axiomas de substituição no plural. No entanto, aqui estamos usando o singular, assim como fizemos com o axioma de separação, acima, por uma questão de estilo e, neste caso particular, por uma razão adicional: na formulação de Zermelo, que guarda certa proximidade com uma formulação de segunda ordem, o axioma de substituição é apenas um axioma, e não um esquema de axiomas.

> Na teoria dos conjuntos moderna, os axiomas de substituição e do fundamento concentram-se na noção de conjunto, com o primeiro tornando possível os meios da recursão e indução transfinitas, e o segundo tornando possível a aplicação desses meios para gerar resultados sobre todos os conjuntos. *Em uma inversão notável*, o que veio a ser considerado como a concepção iterativa subjacente tornou-se uma heurística para motivar os axiomas da teoria dos conjuntos em geral. (Ibid., p. 391; grifo nosso)

Kanamori chama a atenção para o fato de que a concepção iterativa, produto da adição ulterior dos axiomas de substituição e do fundamento, tenha sido tomada como a noção subjacente de conjunto e a partir daí venha sendo usada para justificar até mesmo os axiomas anteriormente incluídos, como vimos Shoenfield fazer[6]. Não por outra razão, Shoenfield destaca que é apenas "idealmente" que a formação de um sistema axiomático parte dos conceitos para os axiomas. Na realidade pode acontecer o contrário, ou mesmo o desenvolvimento concomitante de conceitos e axiomas, como aconteceu na teoria dos conjuntos. Ainda assim, uma análise posterior da teoria, vendo-a *idealmente* como se seus axiomas tivessem sido perfeitamente ajustados para corresponder a uma noção informal conhecida de antemão, tem seu valor, como atesta o artigo de Shoenfield. Dentre outras coisas, esse tipo de trabalho mostra que, no estado da arte da teoria, seu tratamento formal combina-se com a compreensão informal que se tem do tema, isto é, os axiomas são todos verdadeiros na interpretação pretendida. Em suma, evidencia que a axiomatização não contraria o atual entendimento do tema ao mesmo tempo em que capta suas principais nuances. Isso, sem dúvida, conta a favor dos axiomas e aumenta a confiança neles. Porém, essa análise não revela as razões originais que levaram os matemáticos, inicialmente, a aceitar os axiomas da teoria dos conjuntos e simultaneamente elaborar a concepção iterativa. Para identificar essas razões é preciso voltar-se a uma análise histórica, e não idealizada, do desenvolvimento da teoria.

Quais foram as razões que levaram os matemáticos a formular a concepção iterativa? São várias. O próprio Shoenfield, em sua análise da noção de conjunto, toca em uma delas: a concepção iterativa barra os paradoxos da teoria de conjuntos, tais como o paradoxo de Russell. Shoenfield explica como isso ocorre. Recapitulando, o paradoxo de Russell segue assim: seja R o conjunto cujos membros são todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Isto é, $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. Se

[6] Kanamori data o início do uso da concepção iterativa como motivadora da teoria dos conjuntos a partir dos trabalhos de Gödel e Zermelo no início dos anos 1930 (Cf. KANAMORI, 2007, p. 35-36).

substituímos x por R, temos uma contradição: $R \in R \leftrightarrow R \notin R$. Porém, de acordo com a concepção iterativa essa substituição não pode ser feita, o que impede a contradição. Quando estamos formando o conjunto R, o escopo da variável x compreende apenas os conjuntos formados em estágios anteriores. Como R não foi formado nos estágios anteriores, ele não está no escopo da variável e portanto não pode substituí-la (SHOENFIELD, op. cit., p. 323). Outros paradoxos, como os ligados à classe universal e à classe de todos os ordinais, também são bloqueados pela mesma razão, pois não existe um estágio em que se possam coletar todos os membros dessas classes, o que impede que elas sejam formadas como conjuntos.

A esse tipo de justificativa, que apela para as consequências dos princípios em questão, sem se remeter a uma concepção ou realidade subjacente pré-existente, Maddy chama de *justificação extrínseca* (MADDY, 1997, p. 37). Se entendemos que o fato de barrar contradições conta a favor da aceitação da concepção iterativa, estamos chamando a atenção para as consequências dessa concepção — ela impede contradições — e não para aspectos intrínsecos como sua autoevidência ou correspondência a algo subjacente. Independentemente de características próprias que possam ter os objetos que se estão descrevendo, o que importa, para justificações extrínsecas, é que os princípios empregados produzam uma boa teoria. Evitar contradições é, na matemática clássica, requisito primordial para boas teorias.

Todavia, estritamente a concepção iterativa não é, claro, indispensável para barrar os paradoxos. A primeira axiomatização da teoria dos conjuntos, apresentada por Zermelo (2010a) em 1908, não incluía os axiomas de substituição e do fundamento, importantes para a concepção iterativa, como aponta Kanamori no trecho que citamos acima, mas ainda assim barrava os paradoxos conhecidos por meio do axioma de separação. Como discutimos na seção 1.1, a chave para barrar os paradoxos está na limitação do *princípio de compreensão*, e o axioma de separação faz justamente isso. Por esse axioma, uma coleção determinada por uma propriedade é um conjunto somente se ela for subconjunto de um conjunto previamente dado. Assim o paradoxo de Russell não surge, porque o conjunto R, ainda não formado, não pode ser elemento de um conjunto previamente dado, e então a propriedade de não pertencer a si mesmo não pode ser avaliada com relação ao próprio R. Também não é possível formar o conjunto de todos os ordinais ou o conjunto universo, já que não é possível dispor, previamente, de um conjunto que contenha todos os ordinais ou todos os conjuntos, para aplicar sobre eles a separação. Mesmo que os conjuntos não estejam estratificados como na concepção iterativa, a restrição posta pelo axioma de separação é suficiente para barrar os paradoxos conhecidos. Aliás, afastar o perigo de paradoxos é a justificativa mais cabal com relação ao axioma de separação, e essa é uma justificativa claramente extrínseca.

Mas, se os paradoxos já estavam barrados pelo axioma de separação, o que levou Zermelo a assumir a concepção iterativa em 1930? Há outras razões, extrínsecas, ligadas aos axiomas de substituição e do fundamento, que justificam a adoção da concepção iterativa.

Felgner (2010, p. 178-179) e Kanamori (2010, p. 390) contam os motivos que levaram Zermelo e a comunidade de peritos em teoria dos conjuntos a adotar esses dois axiomas. Em 1921, em uma carta para Zermelo, Fraenkel apontava que, em sua teoria com os axiomas de 1908, não era possível provar a existência, por exemplo, de conjuntos de cardinalidade $\aleph_\omega$. Respondendo a Fraenkel, Zermelo reconhece a necessidade de um novo axioma e apresenta uma formulação do axioma de substituição, ao qual chama de "axioma de atribuição", embora um pouco resistente por considerar o conceito de "atribuição" não suficientemente definido. Em 1922, Fraenkel publica um artigo em que defende a adoção do axioma de substituição, e o mesmo faz Skolem, independentemente de Zermelo e Fraenkel, enfatizando também sua necessidade para provar a existência de conjuntos de cardinalidade $\aleph_\omega$ e apresentando uma caracterização precisa da noção de substituição na linguagem formal da teoria dos conjuntos. Mas foi o trabalho de von Neumann, também nos anos de 1920, que mostrou o papel indispensável do axioma de substituição na formalização da recursão transfinita e, por conseguinte, na prova da existência de conjuntos definidos por recursão transfinita, e sedimentou de vez a adoção do axioma de substituição.

Os trabalhos de Fraenkel, Skolem e von Neumann apontaram razões extrínsecas para a inclusão do axioma de substituição na teoria dos conjuntos. Embora possa ser defendido também por razões intrínsecas — em termos de limitação de tamanho, p.ex., como discutimos abaixo — decisivas para sua aceitação foram, desde o início, suas consequências. A discussão dos matemáticos em torno do axioma de substituição não se concentrou em avaliar em que medida ele captava com precisão a noção de conjunto, ou em que medida podia ser tomado como uma verdade óbvia, mas concentrou-se no seu papel indispensável na prova de resultados matemáticos importantes, notadamente na formalização da recursão transfinita. Até mesmo Boolos, adepto da justificação intrínseca dos axiomas pela concepção iterativa, reconhece que os axiomas de substituição "não são derivados da concepção iterativa" e afirma: "a razão para a adoção dos axiomas de substituição é bastante simples: eles têm muitas consequências desejáveis e (aparentemente) nenhuma indesejável" (BOOLOS, 1983, p. 500).

Enquanto o axioma de substituição tem a seu favor o papel essencial que também desempenha na prova de resultados matemáticos de áreas para além da teoria dos conjuntos — Maddy cita os trabalhos de Martin e Friedman, que provaram que o axioma de substituição é indispensável na teoria de conjuntos de números reais (MADDY, 1997, p. 59) — as consequências benéficas do axioma do fundamento limitam-se à própria teoria dos conjuntos. O fato é que conjuntos que não são bem-fundados não têm aplicação na matemática usual, podendo ser desconsiderados com segurança, como discutimos na seção 1.5. O axioma do fundamento proporciona uma imagem limpa do universo conjuntista, estratificado na hierarquia cumulativa e livre do que Kunen (1980, p. 101) e Boolos (1983, p.491) chamam de 'patologias' ou 'esquisitices', que seriam protagonizadas por conjuntos que pertencem a si mesmo e ciclos de pertinência, se estes fossem admitidos na teoria.

Kanamori (2010, p. 391) destaca o "efeito operativo combinado dos axiomas de substituição e fundamento" na composição da noção de conjunto presente em Zermelo (2010b). Kanamori também sublinha, entre as consequências benéficas do fundamento, sua função na consolidação da teoria dos conjuntos como campo autônomo da matemática:

> Atualmente é quase banal que fundamento é o axioma desnecessário para a reconstrução da matemática em termos conjuntistas, mas esse axioma atribui à pertinência a notável característica que distingue investigações específicas da teoria dos conjuntos como um campo autônomo da matemática. De fato, pode ser dito com justiça que a teoria dos conjuntos moderna é, basicamente, um estudo concebido em boa-fundação, a doutrina cantoriana da boa-ordem adaptada à concepção gerativa de conjuntos zermeliana. (Ibid.)

Apesar da história brevemente narrada acima, que recomenda que a concepção iterativa não seja tomada como motivadora dos axiomas, visto que ela surgiu depois da axiomatização, ainda há uma forma de ver a concepção iterativa como justificadora dos axiomas. Boolos adota uma estratégia nesse sentido. Ele defende que foi apenas um acaso histórico o fato de que se tenha chegado à concepção iterativa pelo caminho da superação dos paradoxos da teoria ingênua de conjuntos. Para Boolos, a concepção iterativa, "que amiúde impressiona as pessoas como inteiramente natural, livre de artificialidades, de forma nenhuma *ad hoc*, e tal que elas mesmas talvez pudessem tê-la formulado" (BOOLOS, 1983, p. 489), não pode ser vista como apenas um meio de bloquear os paradoxos. Boolos considera que outras teorias de conjuntos incompatíveis com ZF — ele refere-se, p. ex., às teorias NF e ML, de Quine — usam “restrições técnicas artificiais (...) *somente porque* de outro modo paradoxos poderiam surgir”(Ibid., p. 490), mas que esse não é o caso de ZF e da concepção iterativa:

> ZF isolada (junto com suas extensões e subsistemas) não é uma teoria de conjuntos somente (aparentemente) consistente mas também uma teoria de conjuntos independentemente motivada: há, por assim dizer, ‘um pensamento por trás dela’ sobre a natureza dos conjuntos que poderia ter sido desenvolvido mesmo se, impossivelmente, a teoria ingênua de conjuntos fosse consistente. (...) uma concepção de conjunto diferente da concepção ingênua poderia ser desejada mesmo se a concepção ingênua fosse consistente (...) (Ibid.).

É difícil não reconhecer a “naturalidade” da concepção iterativa. Hipoteticamente, pode-se até conceder que, independentemente dos paradoxos da concepção ingênua, a concepção iterativa fosse desenvolvida e preferível, como sustenta Boolos. Mas isso tudo não passa de um exercício especulativo. O fato é que, historicamente, os axiomas precederam a concepção iterativa, e que portanto houve razões outras, não apoiadas nessa concepção, que motivaram os axiomas. Só posteriormente, quando a concepção iterativa tomou forma, é que foi possível avaliar retrospectivamente os axiomas com respeito a ela. Sobre a concepção iterativa, Kanamori comenta:

> Isso [a concepção iterativa] abriu a porta para uma apropriação metafísica no seguinte sentido: é como se houvesse alguma noção de conjunto que está ‘lá’, em termos da qual os axiomas devem encontrar alguma justificação adicional. Mas a teoria dos conjuntos não tem obrigações particulares de espelhar alguma noção prévia de conjunto que chegou *a posteriori*. (KANAMORI, 2007, p. 36)

Qual o problema dessa “apropriação metafísica” de que fala Kanamori? Podemos ver pelo menos duas ordens de problemas. Primeiro, corre-se o risco de transformar o fato notável de a matemática encontrar sua fundamentação na teoria dos conjuntos em um fenômeno imensamente surpreendente. Pois se ZFC é vista como uma teoria “independentemente motivada”, uma teoria de conjuntos que foi desenvolvida buscando-se apenas elucidar o conceito de conjunto, torna-se impressionante que toda a matemática usual seja redutível a teoria dos conjuntos. Mais um passo, e não seria muito despropositado ver ZFC como mais um exemplar dos “milagres” da matemática: teorias que são desenvolvidas de maneira despretensiosa e que, depois, encontram larga e inesperada aplicação. Embora haja exemplares genuínos desse fenômeno matemático, esse não é o caso da teoria dos conjuntos[7]. O

[7] Maddy (2007, p. 329-343) faz uma interessante desmistificação dos chamados

desenvolvimento de ZFC esteve intimamente ligado à meta de fundamentar a matemática, e por isso a redução da matemática a ZFC não surpreende. Além disso, ZFC não espelha apenas uma concepção de conjunto, mas é suscetível a variadas interpretações, e a prática matemática atual em teoria dos conjuntos se enriquece justamente dessa flexibilidade, como discutimos no capítulo 2. Isso nos traz à segunda ordem de problemas com a "apropriação metafísica" da concepção iterativa. Favorecer uma visão metafisica da teoria oculta os fatores que matematicamente foram decisivos na sua formação, fatores estes que são reconhecidos quando se dá atenção à prática da matemática. Além de provocar uma distorção histórica, a "apropriação metafisica" não contribui para o avanço da teoria. Nas discussões sobre os rumos da teoria dos conjuntos com respeito às questões independentes, a "apropriação metafisica" pode desviar a atenção para fatores irrelevantes, preocupações filosóficas distantes da prática matemática, deixando em segundo plano o que é matematicamente mais importante.

O caso do axioma do infinito ilustra bem a disparidade entre as razões que estavam em jogo no processo de axiomatização e a justificação posterior pela concepção iterativa. Acima vimos como Shoenfield mostra que esse axioma é verdadeiro na hierarquia cumulativa. Porém, antes mesmo do surgimento da concepção iterativa, o axioma do infinito já figurava na axiomatização de 1908 de Zermelo. Antes de mais nada, porque a teoria dos conjuntos sempre fora, desde seu início com Cantor, uma teoria do infinito. Além dessa, há uma outra razão muito forte para incluir o axioma do infinito. Sem ele, não é possível desenvolver na teoria dos conjuntos um dos ramos mais importantes da matemática, a análise (um desdobramento do cálculo diferencial e integral), pois a definição dos números reais exige a existência de conjuntos infinitos[8]. Aliás, sem o axioma do infinito, a teoria dos conjuntos fica confinada essencialmente à aritmética (Cf. KUNEN, 2009, p. 75). Como não se pode provar que existe um conjunto infinito a partir dos outros axiomas, sua existência precisa ser postulada[9]. Vale notar que é postulada a existência de um conjunto infinito *em ato*, isto é, um conjunto infinito completo, inteiramente dado como uma totalidade, que pode ser manipulada como um objeto simples, individual. Essa ideia foi bastante polêmica, pois para muitos matemáticos, com destaque para Poincaré e Brouwer, ela parecia contraintuitiva. Alegavam que é possível conceber apenas uma infinitude em potência — um conjunto ao qual sempre podemos adicionar, indefinidamente, um novo elemento

"milagres da matemática aplicada". Os argumentos de Maddy podem ser adaptados para desencorajar qualquer tentativa de tomar a redução da matemática à teoria dos conjuntos como mais um milagre.

[8] Como esboçamos na seção 1.4

[9] Veja discussão na página 44

—, mas jamais um infinito atual (Cf. SILVA, 2007, p. 146, 150). Apesar dessas objeções, a estratégia de defesa do axioma do infinito não seguiu pela via de mostrar sua plausibilidade intuitiva, nem sua adequação a uma noção subjacente. Dispunha-se de um argumento matematicamente muito mais decisivo: sem ele, a matemática ficaria seriamente mutilada, privada dos números reais. Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 45) resumem o ponto:

> Tratar dos números naturais sem ter o conjunto de todos os números naturais não causa mais inconvenientes que, digamos, tratar dos conjuntos sem ter o conjunto de todos os conjuntos. Ademais, a aritmética dos números racionais também pode ser desenvolvida nesse quadro. Entretanto, se se está interessado em análise, então conjuntos infinitos são indispensáveis, pois a noção mesma de um número real não pode ser desenvolvida por meio apenas de conjuntos finitos. Por isso temos que adicionar um axioma existencial que garanta a existência de um conjunto infinito.

Entre os adeptos da concepção iterativa como motivação dos axiomas, existe discordância no que tange ao axioma da escolha. Shoenfield (1977, p. 335) apresenta uma justificação do axioma da escolha com base na concepção iterativa, ao passo que, para Boolos, "parece que, infelizmente, a concepção iterativa é neutra com respeito ao axioma da escolha"(BOOLOS, 1983, p. 501). Boolos aponta o fato de o axioma da escolha ser independente de ZF, o que mostra, sustenta Boolos, que nem o axioma nem sua negação podem ser derivados da concepção iterativa. O fato é que Shoenfield e Boolos têm concepções iterativas diferentes, mas não vamos abordar essas diferenças aqui. A polêmica em torno do axioma da escolha avança para muito além da concepção iterativa. Ele é, sem dúvida, o mais polêmico da axiomatização de Zermelo de 1908. Zermelo já o havia empregado em 1904 para provar o Teorema da Boa-ordem, e mesmo antes disso o axioma já fora empregado inadvertidamente por muitos outros matemáticos, inclusive por Cantor, como apontou Zermelo (1967, p. 187). Embora atualmente o axioma da escolha seja considerado indispensável, a polêmica que o cercou deixou marcas ainda vivas. Comenta Machover (1996, p. 79): "tendo em vista seu status um tanto controverso, quando o Axioma da Escolha é necessário para provar um resultado matemático, costuma-se apontar isso". Essa prática costumeira pode ser constatada sem dificuldade em diversos livros-texto de teoria dos conjuntos.

A polêmica em torno do axioma da escolha tem causa em dois aspectos seus. Primeiro, afirma Machover, o axioma da escolha "é um postulado puramente existencial: ele afirma que existe um conjunto — a função escolha — sem caracterizá-lo como a extensão de alguma propriedade especificada previamente" (MACHOVER, 1996, p. 78). Em outras palavras, o axioma da escolha afirma a existência de um conjunto mas não dá nenhuma pista sobre como construí-lo. Nesse aspecto o axioma da escolha difere de outros axiomas da teoria dos conjuntos, os quais afirmam que certas construções sobre conjuntos resultam em novos conjuntos. Por exemplo, o axioma do conjunto potência afirma que, dado um conjunto x qualquer, existe o conjunto y formado por todos os subconjuntos de x. Esse axioma dá a regra de construção do conjunto que ele afirma existir: "tome a coleção de todos os subconjuntos de x, e isto será um conjunto", ou seja, y é definido como a extensão da propriedade *ser subconjunto de x*. O axioma da escolha cala sobre a propriedade que definiria a função escolha. Por isso Jech diz que o axioma da escolha tem um tipo de "natureza não-construtiva" que era contrário às ideias dominantes na matemática até o final do século XIX, para as quais "existência em matemática era sinônimo de construção" (JECH, 1977, p. 346). Até então afirmar a existência de uma entidade matemática exigia, em geral, mostrar como obtê-la. O axioma da escolha não mostra como obter a função escolha e, mais que isso, há casos em que não é possível explicitar tal função. Por exemplo, pelo axioma da escolha — que é equivalente ao teorema da boa-ordem — sabemos, em particular, que o conjunto dos números reais pode ser bem-ordenado. No entanto, não é possível *apresentar* nenhuma boa-ordem dos reais (Cf. JECH, 1977, p. 348).

Shoenfield (1977) explica essa aparente perplexidade. Primeiro, ele mostra que o axioma da escolha é verdadeiro de acordo com a concepção iterativa. Seja x um conjunto qualquer. Sabemos que $\bigcup x \times x$ é um conjunto e, portanto, foi formado em um estágio S. Os pares $\langle z, y\rangle$ tais que $z \in y$ e $y \in x$ são formados, pois, antes de S. Assim, a função escolha f é criada no estágio S, onde podemos coletar um par $\langle z, y\rangle$ para cada y em $x \setminus \{\varnothing\}$. Então Shoenfield pergunta-se:

> o que queremos dizer quando afirmamos que podemos coletar um $\langle z, y\rangle$ para cada y? Obviamente não queremos dizer que uma pessoa pode realmente coletar esses pares, visto que pode haver infinitos deles. Nem queremos dizer que há uma regra para coletá-los; pois não importa como interpretamos a palavra *regra*, não há razão pela qual possamos pensar que uma tal regra deveria existir para todo conjunto x. Assim tudo que podemos dizer é que há uma coleção de conjuntos que contém exatamente um par $\langle z, y\rangle$ para cada y. Se interpretamos uma coleção como sendo uma divisão arbitrária dos objetos disponíveis entre membros e não membros da coleção, é razoável afirmar que uma tal coleção existe. (Ibid., p. 336)

O segundo aspecto polêmico do axioma da escolha está ligado a suas consequências. Ele permite provar alguns resultados contraintuitivos. Um dos mais citados é o "Paradoxo" de Banach-Tarski, segundo o qual uma bola, por assim dizer, pode ser dividida em um número finito de partes que podem ser rearranjadas, sem deformação, de modo a obter duas bolas do mesmo tamanho que a bola original. Embora a ideia pareça paradoxal quando pensamos em uma bola real, esse não é propriamente um paradoxo, mas sim um teorema de teoria dos conjuntos, cuja prova usa de maneira essencial o axioma da escolha. Jech explica que "não há nada de paradoxal com esse teorema: as partes da bola são simplesmente conjuntos não-mensuráveis" (JECH, op. cit., p. 352).

Mesmo não sendo propriamente paradoxos, resultados como o de Banach-Tarski poderiam ser considerados excêntricos o suficiente para recomendar a rejeição do axioma da escolha como princípio matemático. Mas essa não seria uma decisão sábia, pois o veto ao axioma da escolha produziria bizarrices similares. "O axioma da escolha tem algumas consequências estranhas (contraintuitivas), mas sua negação tem consequências ainda mais estranhas", assevera Machover (1996, p. 78). Sem o axioma da escolha não é possível provar resultados muito intuitivos. Por exemplo, não é possível provar que a união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável. Esse fato básico é amplamente usado em análise e, comenta Jech, "a maior parte das pessoas sequer imagina que sua prova usa o axioma da escolha" (JECH, op. cit., p. 348).

O uso tácito do axioma da escolha e suas consequências indispensáveis são argumentos que Zermelo chama em sua defesa no artigo *Uma nova prova da possibilidade de uma boa-ordem*. Publicado em 1908, esse artigo é uma reação às criticas que sua prova do teorema da boa-ordem de 1904 recebera. Maddy (1997, p. 54) nota que, na defesa que Zermelo faz do axioma da escolha é possível identificar com clareza tanto justificativas intrínsecas quanto extrínsecas. Isso se nota na seguinte passagem, em que Zermelo responde às criticas que recebera de Peano:

> como Peano chegou a seus próprios princípios fundamentais (...)? Evidentemente foi analisando os modos de inferência que no curso da história tornaram-se reconhecidos como válidos e apontando que os princípios são intuitivamente evidentes e necessários para a ciência — considerações que podem todas ser igualmente bem argumentadas em favor do princípio disputado (ZERMELO, 1967, p. 187).

Apegar-se à evidência intuitiva é uma via de justificação claramente intrínseca. Apontar a necessidade para a ciência, isto é, ressaltar que o axioma da escolha é indispensável para provar resultados matemáticos importantes, é a estratégia de justificativa extrínseca encampada por Zermelo. Por parte da defesa intrínseca, Zermelo assinala que o axioma da escolha já era empregado tacitamente por diversos matemáticos, o que conta a favor da sua autoevidência:

> Que este axioma, mesmo sem ter sido nunca formulado no estilo de um livro-texto, tem frequentemente sido usado, e com sucesso, nos mais diversos campos da matemática, especialmente em teoria dos conjuntos, por Dedekind, Cantor, F. Bernstein, Schoenflies, J. König e outros é um fato indisputável (...). O uso tão extensivo de um princípio somente pode ser explicado por sua autoevidência (Ibid.).

Na sequência Zermelo mostra-se um ferrenho defensor da autoevidência: "não importa se a autoevidência é em certo grau subjetiva — ela é certamente uma fonte necessária de princípios matemáticos (...). A afirmação de Peano de que ela não tem nada a ver com matemática falha em fazer justiça a fatos manifestos" (Ibid.). Bastante significativo nesse trecho é o reconhecimento por parte de Zermelo de que há uma certa subjetividade nesse tipo de justificativa, o que parece conduzi-lo a terrenos mais objetivos:

> Mas a questão que pode ser objetivamente decidida, se o princípio é *necessário para a ciência*, eu gostaria agora de submeter para julgamento apresentando um número de teoremas e problemas elementares e fundamentais que, na minha opinião, não poderiam ser tratados de modo algum sem o princípio da escolha (Ibid.).

Segue-se uma lista de sete teoremas de teoria dos conjuntos e de análise cujas provas envolvem o axioma da escolha. Em quinto lugar Zermelo põe o teorema que citamos acima, que assegura que a união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis resulta num conjunto enumerável. Posteriormente descobriu-se uma série de outros teoremas, nas mais variadas áreas da matemática — análise, topologia, álgebra abstrata — , cuja prova depende essencialmente do axioma da escolha (Cf., p.ex., Maddy (1997, p. 56)).

A exposição de Zermelo não deixa dúvida de que ele leva em igual conta tanto a "autoevidência" quanto a "necessidade para a ciência" como formas legítimas de argumentação a favor de princípios matemáticos. Entretanto, é reveladora a associação que Zermelo faz da autoevidência com uma certa subjetividade, e da justificação extrínseca com maior objetividade. Ao passo que a justificação extrínseca tem a seu favor provas de teoremas que mostram de maneira irrefutável o papel que o axioma desempenha na teoria, o recurso à autoevidência é algo mais subjetivo, pessoal, porque depende da imagem que cada um faz da matemática. Uma passagem de Jech, ao avaliar razões para aceitar o axioma da escolha, ilustra esse ponto:

> Se vamos aceitá-lo [o axioma da escolha], devemos acreditar em sua

> *plausibilidade*. Devemos nos certificar de que os argumentos que usam o axioma da escolha e os resultados que são obtidos com sua ajuda não são contrários a nossa imagem do universo matemático (embora eu pudesse não insistir muito neste ponto. Afinal de contas, exemplos 'contraintuitivos' são abundantes em matemática. Basta olhar a construção de Weierstrass de funções contínuas não-diferenciáveis) (JECH, 1977, p. 350).

No comentário entre parênteses, Jech chama a atenção para a abundância de teoremas contraintuitivos na matemática, o que diminui a confiança na intuição e na autoevidência, e praticamente o dispensa de avaliar a plausibilidade do axioma da escolha. Se por um lado "é um fato manifesto" que a autoevidência cumpriu um papel importante na matemática, como defende Zermelo, por outro lado também é um fato manifesto que a ausência de autoevidência, a contrariedade à intuição matemática ou à plausibilidade, não são razões determinantes para a rejeição de princípios que se mostraram "necessários para a ciência", como afiança Jech. Isso mostra que a justificação extrínseca tem um certo grau de primazia sobre justificativas intrínsecas baseadas na intuição. Não por outra razão Jech evoca como pontos a serem considerados na avaliação do axioma da escolha sua *conveniência* — "seu uso largamente difundido em muitos ramos da matemática nos últimos 50 anos fala claramente em favor do axioma" (Ibid.) —, sua *consistência* com os demais axiomas — esse resultado é devido a Gödel, conforme tratamos na seção 1.6 — e a *necessidade* de seu emprego em provas de certos teoremas. Todas razões puramente extrínsecas (Cf. JECH, 1977, p. 350).

Até aqui vimos que justificativas extrínsecas foram decisivas na elaboração ou aceitação dos axiomas de separação, substituição, fundamento, infinito e escolha. Os demais axiomas — extensionalidade, par, união e conjunto potência — foram historicamente menos controversos mas, à semelhança dos primeiros, podem ser defendidos tanto por argumentação intrínseca quanto extrínseca. Porém, justamente por terem sido menos polêmicos, é mais sutil a diferenciação do peso que teve cada linha de argumentação. A defesa desses axiomas geralmente passa pela concepção iterativa — que já tivemos a oportunidade de ver, acima, operando em favor do axioma do conjunto potência — e pela *doutrina de limitação de tamanho*, de caráter ambíguo, podendo ser vista tanto como justificação intrínseca quanto extrínseca (Cf. MADDY, 1997, p. 51). As defesas dos axiomas do par e da união pela concepção iterativa são muito similares à defesa do axioma do conjunto potência, de sorte que não nos dedicaremos a examiná-las. Antes de prosseguirmos com o exame da doutrina de limitação de tamanho, convém voltar a examinar o axioma da extensionalidade, para ver como ele pode ser defendido extrinsecamente.

Como dissemos acima, a justificativa intrínseca mais usual do axioma da extensionalidade consiste em tomá-lo como uma proposição analítica. De acordo com essa posição, conjuntos são, por sua natureza, extensionais. À ideia de extensionalidade opõe-se a ideia de intensionalidade. A distinção remonta a Frege: os nomes *estrela da manhã* e *estrela da tarde* são extensionalmente iguais, pois ambos designam o planeta Vênus, mas intensionalmente diferentes, pois possuem sentidos diversos (Cf. PENCO, 2006, p. 56-57). Se conjuntos são entidades extensionais, o conjunto P dos primos entre 3 e 8 e o conjunto I dos ímpares entre 3 e 8 são o mesmo conjunto. Porém, dizer que um número é primo não é o mesmo que dizer que ele é impar. Se conjuntos fossem entidades intensionais, P e I poderiam ser dois conjuntos diversos. Embora tenha triunfado a visão extensional de conjuntos, não parece absurda a ideia de que conjuntos pudessem ser intensionais. Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 28) explicam porque prevaleceu a noção extensional:

> Primeiro, a noção extensional de conjunto é mais simples e clara que qualquer possível noção intensional de conjunto. Segundo, ao passo que há apenas uma noção extensional de conjunto, pode haver muitas noções intensionais de conjunto, dependendo do propósito para o qual esses conjuntos são necessários (...). Terceiro (...), começando com a simples noção extensional de conjunto podemos obter, por meio dos axiomas, um sistema de teoria dos conjuntos no qual noções muito mais complicadas podem ser construídas. Em particular, seremos capazes de construir noções intensionais de conjunto dentro do nosso sistema.

Os motivos apresentados por eles não se apegam a uma análise da noção de conjunto. Conjuntos tanto poderiam ser intensionais quanto extensionais, dizem Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, mas o fato é que a noção extensional é mais vantajosa. Isso qualifica seus argumentos como extrínsecos. A noção de coextensionalidade — ter os mesmos elementos — é mais fácil de entender que a de cointensionalidade — ser definido pela mesma propriedade — porque dispomos de uma compreensão mais firme da pertinência que da noção de mesma propriedade (Cf. MADDY, 1997, p. 39). Além disso, noções intensionais podem diferir grandemente. Por exemplo, conforme a noção de intensionalidade adotada, as propriedades *azul ou vermelho* e *vermelho ou azul* podem ser a mesma ou não. A noção de extensionalidade é mais vantajosa porque não apresenta essas variações. Por fim, ficando com a noção extensional de conjunto não se perde nada, pois noções intensionais de conjunto podem ser definidas posteriormente.

Para finalizar nossa discussão sobre as justificativas dos axiomas da teoria dos conjuntos, vejamos como operam os argumentos ligados à limitação de tamanho. A ideia básica da limitação de tamanho consiste na distinção entre dois tipos de coleções, as que são conjuntos e as que, por serem "muito grandes", não são conjuntos. Nos primórdios da teoria dos conjuntos era difundida a ideia de que qualquer coleção formava um conjunto (esse é apenas um outro modo de enunciar o princípio de compreensão). Atualmente, como vimos no capítulo 1, existe uma distinção entre as coleções que são conjuntos e as que não são. Estas últimas são chamadas de *classes próprias*. A formulação precisa dessa distinção é atribuída a von Neumann, que a empregou em 1925 (von NEUMANN, 1967). Mas mesmo antes de von Neumann, Cantor já distinguira entre coleções que são e coleções que não são conjuntos. É verdade que Cantor expressou a ideia de conjunto como "uma coleção, reunida em uma totalidade, de certos objetos bem distintos de nossa percepção ou pensamento" (CANTOR, 1932; apud BOOLOS, 1983, p. 486), mas ele não pensava que *qualquer* coleção fosse um conjunto. Havia certas coleções, que ele chamava de *absolutamente infinitas*, que eram muito grandes para que fossem tomadas como um único objeto. Em uma carta para Dedekind em 1899, posteriormente publicada por Zermelo, Cantor escreve:

> Se nós começamos pela noção de uma multiplicidade definida (um sistema, uma totalidade) de coisas, é necessário, como eu descobri, distinguir dois tipos de multiplicidades (...) Pois uma multiplicidade pode ser tal que a suposição de que todos os seus elementos 'estão juntos' leva a uma contradição, de tal modo que é impossível conceber tal multiplicidade como uma unidade, como 'uma coisa acabada'. Tais multiplicidades eu chamo de *absolutamente infinitas* ou *multiplicidades inconsistentes*" (CANTOR, 1967, p. 114).

Cantor dá como exemplos de multiplicidades absolutamente infinitas "a totalidade de todas as coisas pensáveis", isto é, a classe universal, e "o sistema de todas as cardinalidades" (Ibid.), cujo caráter de multiplicidade inconsistente deve-se a uma contradição similar à encontrada um ano antes por Burali-Forti. Cantor provara que havia conjuntos infinitos de diferentes tamanhos, mas para além desses infinitos tratáveis em sua teoria, havia o *infinito absoluto*, coleções tão grandes que não seria possível pensá-las como um objeto singular. Cantor percebeu que as contradições, tais como o Paradoxo de Burali-Forti, surgem quando essas multiplicidades inconsistentes são tomadas como se fossem conjuntos (Cf. MACHOVER, 1996, p. 12-13).

Além do Paradoxo de Burali-Forti, o Paradoxo de Russell, descoberto em 1902, contribuiu decisivamente para a distinção entre dois tipos de coleções. Ao passo que o Paradoxo de Burali-Forti surge apenas depois de longas exposições técnicas, o Paradoxo de Russell sai do princípio de compreensão irrestrita em poucos passos, como vimos acima. Embora o princípio de compreensão seja o responsável pelas antinomias, a solução das antinomias não poderia exigir o descarte completo do princípio de compreensão, a rejeição de todas as suas instâncias, pois isso inviabilizaria a teoria. Ademais, muitas instâncias suas não são prejudiciais. Daí que a solução visada teria que oferecer um meio de distinguir entre instâncias prejudiciais e não prejudiciais. Machover enxerga na solução de Zermelo (2010a) a aplicação de "uma ideia similar àquela considerada por Cantor: limitação de tamanho". Continua Machover: "os axiomas de Zermelo incluem certos casos particulares do princípio de compreensão, os quais são considerados seguros porque — tanto quanto se pode dizer — eles não permitem a formação de conjuntos excessivamente grandes e não dão origem a antinomias" (Ibid., p. 14). A limitação de tamanho opera, então, justamente como uma diretriz para seleção das instâncias inofensivas do princípio de compreensão, já que os paradoxos têm relação com conjuntos muito grandes. Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 32) enunciam assim a doutrina da limitação de tamanho: "iremos admitir somente aquelas instâncias do esquema de axiomas de compreensão que asseveram a existência de conjuntos que não são excessivamente grandes comparados a conjuntos que já temos". Mesmo sem consenso acerca de uma caracterização precisa do que conta como "excessivamente grande", a limitação de tamanho faz sentido. A ideia é avaliar comparativamente o tamanho das coleções candidatas a conjunto a partir dos conjuntos já disponíveis. Por exemplo, coleções menores ou do mesmo tamanho de conjuntos já disponíveis podem ser seguramente consideradas conjuntos. Esse é o pensamento por trás do axioma de separação de Zermelo. Se o conjunto original não é muito grande (e de fato não é muito grande, caso contrário não seria um conjunto), então o subconjunto que é separado – composto pelos elementos que satisfazem determinada propriedade – igualmente não pode ser muito grande. Resume Machover (1996, p. 18): "se $B \subset A$ e A não é muito grande, então B igualmente não pode ser muito grande". O princípio de compreensão, diversamente, não está de acordo com a limitação de tamanho, pois os elementos são separados do universo, que é uma coleção excessivamente grande.

Outros casos particulares do princípio de compreensão a que se refere Machover são os axiomas do par, da união, do conjunto potência e de substituição (Ibid., p. 21, 30). É muito fácil ver que o axioma do par é adequado conforme a doutrina de limitação de tamanho, pois ele afirma a existência de conjuntos com apenas dois elementos, que claramente não podem ser muito grandes em nenhum sentido relevante.

As defesas dos axiomas da união e do conjunto potência pela limitação de tamanho são um pouco mais delicadas, pois esses axiomas têm maior potencial expansivo. Muitas vezes a união de um conjunto pode resultar num conjunto bem maior. Por exemplo, a união do conjunto unitário $\{B\}$ pode resultar num conjunto de cardinalidade infinita, bastando para isso que B tenha cardinalidade infinita. Porém, isso não afronta diretamente a limitação de tamanho, pois como o próprio B é um conjunto, ele não é muito grande, e portanto a união de $\{B\}$ não pode resultar num conjunto muito grande. Machover (1996, p. 19) explica assim:

> Intuitivamente, a ideia por trás do Axioma da União é que, se A é um conjunto, então ele não tem 'excessivos' membros; e cada um deles, sendo [um conjunto], por sua vez não tem 'excessivos' membros. Portanto $\bigcup A$ — obtida agregando-se uma quantidade não excessiva de coleções, nenhuma das quais é muito grande — não pode ela mesma ser muito grande.

O axioma do conjunto potência tem um poder expansivo maior que o axioma da união. Por exemplo, enquanto o conjunto dos números naturais, ω, tem cardinalidade infinita enumerável, o conjunto de todos os subconjuntos de ω, $\wp(\omega)$, tem a mesma cardinalidade do contínuo. O teorema de Cantor mostra que $\wp(x)$ é sempre estritamente maior que x. Apesar disso, em favor da adequação do axioma do conjunto potência com a limitação de tamanho costuma-se argumentar que o conjunto resultante, ainda que maior, não pode ser muito grande, pois se originou de um conjunto que não era muito grande (embora, a rigor, não se saiba quão maior é o conjunto resultante). Segundo Machover, "intuitivamente, a ideia por trás do Axioma do Conjunto Potência é que embora $\wp(A)$ possa ser bem maior — de fato, muito maior que A — seu tamanho é, no entanto, limitado, visto que o próprio A não é muito grande" (Ibid., p. 20).

Mesmo que sua adequação à doutrina de limitação de tamanho seja um tanto frágil e discutível, o axioma do conjunto potência tem outro argumento a seu favor: o fato de ser crucial para provar a existência de conjuntos infinitos não-enumeráveis. Introduzindo o axioma do conjunto potência, Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1973, p. 34-35) comentam:

> Os axiomas do par e da união não nos dão liberdade suficiente para formar novos conjuntos, mesmo que façamos suposições bastante fortes sobre a existência de conjuntos iniciais. De fato, assumamos que existem conjuntos infinitos do tipo chamado enumerável, e mesmo uma quantidade enumerável de tais conjuntos. Nem mesmo com essa suposição os axiomas do par e da união seriam fortes o suficiente para

> garantir a existência de um conjunto não-enumerável; por exemplo, a existência de um contínuo (...) Veremos que para este propósito o conjunto potência é suficiente (...)

Por um argumento puramente extrínseco de peso, o axioma do conjunto potência é favorecido aludindo-se a seu papel crucial no tratamento dos números reais na teoria dos conjuntos. É uma razão similar a que justifica a adoção do axioma do infinito, como vimos acima. A esse respeito, Maddy (1997, p. 54) afiança: "esse estilo de argumento será persuasivo para qualquer um ciente do valor da redução conjuntista do contínuo, e a ampla gama de matemática a isto subjacente".

Já vimos acima os argumentos extrínsecos, aduzidos por Fraenkel, Skolem e von Neumann, que foram decisivos para a inclusão do axioma de substituição. Complementarmente, o axioma de substituição também pode ser defendido pela limitação de tamanho. Uma forma de enunciar em 2ª ordem o axioma de substituição é dizer que, se f é uma função e o domínio de f ($dom(f)$) é um conjunto, então $im(f)$ também é um conjunto. Por conseguinte, f também é um conjunto. Dentro dos preceitos da limitação de tamanho, Machover (1996, p. 30) afirma que "a ideia intuitiva por trás do Axioma de Substituição é que f tem exatamente 'tantos' membros quantos tem $dom(f)$: para cada $a \in dom(f)$, f contém o correspondente par $\langle a, fa \rangle$. Portanto, se $dom(f)$ não é excessivamente grande, f propriamente também não o é".

A limitação de tamanho está sujeita a considerações semelhantes às que fizemos acima sobre a concepção iterativa. Se por um lado a limitação de tamanho pode ser tomada como uma estratégia para evitar os paradoxos, o que a qualifica como argumentação extrínseca, por outro lado ela pode ser concebida como a expressão de uma noção subjacente de conjunto, o que a qualifica como intrínseca. No primeiro caso, axiomas que respeitam a limitação de tamanho são vistos positivamente porque têm a desejável consequência de não engendrar os paradoxos conhecidos. No segundo caso, esses mesmos axiomas são vistos como expressando uma ideia intuitiva pré-axiomática segundo a qual conjuntos são coleções não muito grandes. É inegável que há uma ligação estreita entre a doutrina de limitação de tamanho e o afastamento do risco de paradoxos, presente já no trabalho de Cantor. O que é mais difícil de determinar é se foi unicamente para afastar os paradoxos que a limitação de tamanho foi formulada, ou se a limitação de tamanho apenas expressa como os conjuntos realmente são e, atentando para a natureza dos conjuntos, temos a felicidade de não cair nas armadilhas dos paradoxos.

Ao longo de toda nossa discussão sobre a motivação matemática dos axiomas, tentamos mostrar que a argumentação extrínseca tem mais peso matemático que a argumentação intrínseca, embora muitos vejam a situação de outra forma. O que queremos sublinhar agora, para afastar mal entendidos, é que ambas as formas de argumentação são legitimamente matemáticas. A limitação de tamanho e a concepção iterativa, mesmo que tomadas como integrantes de um conceito intuitivo de conjunto subjacente aos axiomas, são visões genuinamente matemáticas a respeito dos conjuntos. Então, independentemente da importância que atribuamos às justificativas extrínsecas e intrínsecas, e mesmo independentemente dessa distinção, é um fato que são matemáticas as justificativas para os axiomas comumente aduzidas pelos matemáticos. Esse era o primeiro ponto que desejávamos fortalecer com essa discussão.

Mas há um segundo ponto que queremos abordar — a objetividade matemática — e para esse a distinção entre argumentação extrínseca e intrínseca é fundamental. Zermelo, ao sustentar extrínseca e intrinsecamente o axioma da escolha, dá a pista: a argumentação intrínseca — ele fala de autoevidência — é mais subjetiva que a argumentação extrínseca — a necessidade para a ciência. Mas a matemática é, entre todas as ciências, o padrão de objetividade. Dado o caráter mais subjetivo das justificativas intrínsecas, somos levados a pensar que a argumentação extrínseca desempenhe função mais importante na objetividade matemática e, por conseguinte, na própria matemática. Foi isso que procuramos mostrar até aqui. Ademais, autoevidência, intuição e conformação a alguma noção subjacente são subjetivas porque dependem da imagem que cada matemático forma sobre o assunto de que trata. O que é intuitivo para um pode não ser intuitivo para outro; isso depende de fatores como a experiência pessoal de cada matemático. Ao passo que a argumentação extrínseca se apoia em provas tecnicamente reconhecidas por toda a comunidade, faltam dados objetivos, decisivos, que poderiam pacificar questões sobre autoevidência e intuição. Não raro matemáticos empregam suas visões particulares sobre a natureza dos conjuntos ou das entidades matemáticas em geral para sustentar a introdução de novas entidades ou princípios. Não raro, igualmente, matemáticos discordam nesses assuntos. Essa constatação leva Maddy a concluir o seguinte:

> Dada a ampla gama de visões que os matemáticos tendem a abraçar nesses assuntos [a natureza dos entes matemáticos] parece improvável que (...) todos pudessem concordar sobre qualquer concepção única da natureza dos objetos matemáticos em geral, ou dos conjuntos em particular; a Filósofa Segunda conclui que tais comentários podem

> ser tratados como apartes coloridos ou auxiliares heurísticos, mas não como parte da estrutura evidencial do assunto. O que importa para propósitos metodológicos é que todos os envolvidos sentem a força dos tipos de considerações que temos focado aqui; essas são as convicções compartilhadas que verdadeiramente guiam a prática (MADDY, 2011, p. 53).

O tipo de consideração que Maddy foca são os variados argumentos extrínsecos empregados a favor e contra hipóteses e axiomas em teoria dos conjuntos. Em poucas palavras, resume Maddy, a prática matemática em teoria dos conjuntos é guiada pela máxima "adote meios efetivos para os fins matemáticos desejados" (Ibid., p. 52). Os fins matemáticos desejados "variam da solução de problemas relativamente locais, passando por prover fundamentos, até buscas mais em aberto de promissoras avenidas matemáticas" (Ibid.). A concessão de maior importância à argumentação extrínseca, para a qual Maddy chama a atenção, vai de encontro à uma generalizada preferência, pelo menos aparente, dos matemáticos pela argumentação intrínseca. Ao abordar esse tema, Maddy confessa: "eu gostaria de ventilar a sugestão herética de que, de fato, justificações intrínsecas são secundárias às extrínsecas"(Ibid., p. 134). Toda nossa discussão, nesta seção, visou suportar essa posição herética.

Por ora, convém analisar outro aspecto: a que se deve a ampla gama de visões discordantes que matemáticos estariam dispostos a abraçar sobre a natureza das entidades matemáticas, e porque é difícil que eles concordem nesse ponto? Essa pergunta nos leva ao tema da próxima seção.

3.2 MATEMÁTICA E FILOSOFIA

Na seção anterior nosso objetivo foi destacar as razões matemáticas que moldaram a axiomatização da teoria dos conjuntos. Nesta seção queremos sustentar que a justificação dos axiomas não é apoiada em considerações filosóficas. Para tal, novamente baseando-nos em Maddy, intentamos mostrar que, em geral, não são reflexões filosóficas que resolvem polêmicas e problemas matemáticos. A direção de nossa argumentação já foi apontada no final da seção anterior: usualmente, matemáticos discordam em suas posições filosóficas, mas concordam em matéria de matemática.

Comumente, se queremos formular uma teoria sobre x, precisamos ter algum contato com x. Vejamos a astronomia, por exemplo. Deixando de lado preocupações filosóficas, para elaborar uma teoria sobre o movimento dos planetas, é preciso olhar atentamente para o céu, melhor se dispondo de equipamentos que amplifiquem a visão. Uma boa teoria sobre o movimento dos planetas tem que dar conta dos fenômenos observados no céu. Se seguirmos raciocínio semelhante com relação à matemática, concluiremos que para formular uma teoria sobre números, ou sobre conjuntos, precisamos de algum contato com números, ou com conjuntos. Mas o que são números e conjuntos? Que tipo de contato os matemáticos têm com esses objetos que lhes permite elaborar teorias sobre eles? Essas questões parecem prementes quando o que está em discussão é a avaliação da adequação dos axiomas de uma teoria aos objetos de que trata a teoria. Uma vez que o astrônomo já tenha formulado leis gerais sobre o movimento dos planetas, idealmente pode prosseguir seu trabalho com os olhos voltados para a terra, apenas procedendo por dedução para saber, por exemplo, quando e onde Vênus estará visível no céu. Essa parte do trabalho do astrônomo é similar àquele que Kunen considera ser o trabalho propriamente matemático, isto é, a dedução lógica a partir dos axiomas. Mas há situações que exigem mais que isso. Caso encontre uma questão que suas leis sejam incapazes de responder, o astrônomo então pode voltar seu olhar novamente para o céu em busca de outras regularidades que solucionem o problema. E o matemático, para onde volta o seu olhar quando encontra uma questão que seus axiomas não podem decidir?

A hipótese do contínuo é o mais célebre dos enunciados independentes da teoria dos conjuntos. Cantor conjecturou que não existiria infinito algum de tamanho intermediário entre o tamanho do infinito dos números naturais e o tamanho do infinito dos números reais, mas nunca conseguiu provar sua hipótese. Como vimos na seção 1.6, a hipótese do contínuo é independente de ZFC. Embora a hipótese do contínuo não tenha solução em ZFC por aqueles métodos matemáticos usuais a que se refere Kunen — dedução lógica a partir dos axiomas[10] — há muito trabalho matemático convencional, dedutivo, que pode ser feito com respeito a ela. Por exemplo, as provas de Gödel e Cohen que estabelecem a independência da hipótese do contínuo são dedutivas. Além disso, desde que foi provada sua independência, vem se investigando se o acréscimo de um ou outro axioma a ZFC, adequado em algum sentido, responde ao problema do contínuo. Os axiomas da construtividade, de grandes cardinais e de determinação são os mais comumente citados como capazes de decidir várias questões independentes quando adicionados a ZFC (Cf. MADDY, 1997, p. 73 e seguintes).

[10] A não ser, é claro, que se considere que a prova de independência é sua solução final.

Avaliar se e como esses axiomas resolvem o problema do contínuo é um trabalho dedutivo indispensável para qualquer tentativa de solucionar a questão. Apesar de todo o esclarecimento que o trabalho matemático dedutivo pode trazer com respeito às questões independentes — que axiomas podem resolvê-las e de que modo, quais as inter-relações entre esses axiomas, suas consequências, etc. — a pura dedução não é capaz de decidir uma questão muito importante: qual é, se houver, a resposta certa? Por dedução se sabe que, se o axioma da construtividade (V=L) é adicionado a ZFC, a hipótese do contínuo é teorema de ZFC+V=L. Porém, não há como saber, por dedução, se a hipótese do contínuo é "verdadeira" e nem mesmo se o axioma da construtividade é, em algum sentido metateórico, "verdadeiro". A teoremicidade ou "verdade" de uma questão independente, do ponto de vista dedutivo, é sempre relativa aos axiomas que se acrescentam a ZFC. Mas a "verdade" dos axiomas é relativa a quê? Aliás, faz sentido falar em "verdade" de proposições matemáticas desse tipo? Por não ser possível decidir tais questões empregando métodos estritamente matemáticos, isto é, unicamente dedutivos, é que se tende a pensar que a filosofia, a física ou outras disciplinas cumprem papel importante na justificação dos axiomas.

Quando astrônomos se deparam com questões em aberto na sua pesquisa, eles comumente não precisam recorrer à filosofia. A astronomia dispõe de métodos e instrumentos de observação do universo, com os quais pode buscar descobrir novas propriedades dos corpos celestes e complementar sua teoria. Muito embora se possa afirmar com justiça que os astrônomos, em última análise, estão apoiados em uma concepção filosófica de mundo — por exemplo, eles são de certa forma realistas, pois acreditam que os corpos celestes têm existência própria e independente do observador — não se costuma pensar que o estabelecimento da existência de um novo tipo de corpo celeste, como buracos negros, dependa de reflexão filosófica. Matemáticos, diversamente, estão prestes a tropeçar na especulação filosófica quando precisam se referir ao *objeto* de suas teorias, e mais ainda quando são chamados a explicar como *descobrem* novas características desses objetos. Como na astronomia, o realismo é uma posição filosófica difundida na matemática; mas opostamente à astronomia, matemáticos não têm métodos nem instrumentos de observação das entidades matemáticas. Se para astrônomos um certo realismo é uma posição confortável, pouco polêmica e até corroborada pela prática científica, para matemáticos o realismo é uma posição filosófica cercada de toda polêmica e incerteza que costumeiramente rodeia as discussões filosóficas. "O típico matemático ativo é um [realista] durante a semana e um formalista aos domingos", comentam Davis e Hersh (1982, p. 321) expressando a fragilidade das posições realistas em matemática. Eles complementam: "isto é, quando ele está fazendo matemática, ele está convencido de que está lidando com uma realidade objetiva cujas propriedades está tentando determinar. Mas então, quando desafiado a dar uma explicação filosófica desta realidade, ele acha mais fácil fingir que não acredita em nada disso"(Ibid.). Dar conta de sustentar uma posição realista em matemática é um empreendimento filosófico árduo. Não que sustentar o formalismo seja filosoficamente mais fácil — o formalismo tem suas próprias dificuldades, estando igualmente enredado em polêmicas e incertezas — mas é uma posição filosófica mais confortável para os matemáticos, pelo menos como forma de desviar de perguntas sobre o realismo.

O ponto é que astrônomos e cientistas naturais em geral dispõem de boas explicações sobre como chegam ao conhecimento do que alegam conhecer. O funcionamento de seus instrumentos e métodos é explicado em detalhes, bem como suas relações com o aparelho cognitivo humano. É claro que essas explicações, como tudo mais, são suscetíveis ao escrutínio e crítica filosóficos, mas apesar disso elas são seguras e abrangentes o suficiente para deixar os cientistas naturais tranquilos com parte de suas crenças realistas. Toda a discussão filosófica em torno do realismo científico, sem dúvida legítima filosoficamente, importa muita mais aos filósofos que aos cientistas. Na matemática é diferente. Se por um lado os matemáticos alcançam um grau de certeza superior ao de qualquer outra ciência — cientistas naturais trabalham com corroboração; matemáticos têm provas —, no outro extremo eles são incapazes de compartilhar da tranquilidade dos cientistas naturais no que tange à explicação de suas certezas. As provas, que representam o ápice da certeza matemática, baseiam-se em axiomas e regras de inferência. Mas axiomas e regras de inferência baseiam-se em quê? Não havendo explicação do conhecimento matemático à altura das explicações dos aspectos experimentais do conhecimento científico, os matemáticos ficam diretamente expostos ao escrutínio e crítica filosóficos. Toda a discussão filosófica em torno do conhecimento matemático importa igualmente a filósofos e a matemáticos *que pararam para pensar* sobre a justificação de seu conhecimento. Por motivos óbvios, é justamente nas áreas mais próximas dos fundamentos da matemática, em especial lógica e teoria dos conjuntos, que a discussão filosófica está mais presente.

Não é difícil de entender, dado esse panorama de proximidade entre filosofia e os fundamentos da matemática, por que matemáticos estão dispostos a abraçar uma ampla gama de visões discordantes sobre a natureza das entidades matemáticas, e porque é improvável que eles cheguem a um acordo nesse ponto. A primeira razão para isso, que já aduzimos acima, é que a polêmica e a incerteza são companheiras inseparáveis dos problemas filosóficos. Mas há uma importante razão adicional, e essa mais ligada às próprias características da matemática, que é bem ilustrada pelas posições realistas. Comumente vemos a matemática como uma disciplina que se dedica ao estudo de entidades abstratas, que independem de tempo e lugar. Isso põe, de saída, uma dificuldade para os defensores do realismo em matemática a qual realistas nas ciências naturais na maior parte das vezes não estão expostos. Realistas em matemática precisam explicar, *grosso modo*, como é possível a existência de algo fora do tempo e do espaço. Nos parágrafos seguintes, nos concentramos em discutir as fragilidades do realismo típicas de suas versões aplicadas à matemática.

Mesmo sendo o pano de fundo filosófico mais difundido entre matemáticos, o realismo se transveste em muitas variantes. Para os nossos propósitos, convém destacar uma característica comum a muitos realismos, que é o recurso a analogias com as ciências naturais, em especial com a física. Uma definição inicial que Maddy apresenta, quando ainda partidária do realismo na matemática, exemplifica bem a importância dessas analogias:

> Realismo, então (em uma primeira aproximação), é a visão que a matemática é a ciência dos números, conjuntos, funções, etc., assim como a física é o estudo de objetos físicos ordinários, corpos astronômicos, partículas subatômicas, e assim por diante. Isto é, a matemática trata dessas coisas, e o modo como essas coisas são é o que faz enunciados matemáticos verdadeiros ou falsos (MADDY, 1990, p. 2).

Contemporaneamente, o maior desafio ao realismo é aquele posto por Benacerraf em seu influente artigo *Mathematical Truth*, de 1973 (BENACERRAF, 1983b). O desafio de Benacerraf apresenta sua face mais ameaçadora quando visto a partir de posições nominalistas. A Figura 2 é uma ilustração por Burgess e Rosen (1997) dessa visão radical do desafio de Benacerraf.

"Sujeitos de carne e osso de um lado, objetos etéreos do outro, e uma grande parede causalmente impenetrável no meio" (BURGESS; ROSEN, 1997, p. 29), é o problema insolúvel no qual os nominalistas veem os realistas metidos. Nominalistas pensam assim, segundo Burgess e Rosen, apoiados em duas premissas. A primeira é a a chamada *teoria causal do conhecimento*, segundo a qual todo conhecimento exige algum contato entre o sujeito que conhece e o objeto que é conhecido. A segunda premissa é que não é possível haver interação causal com

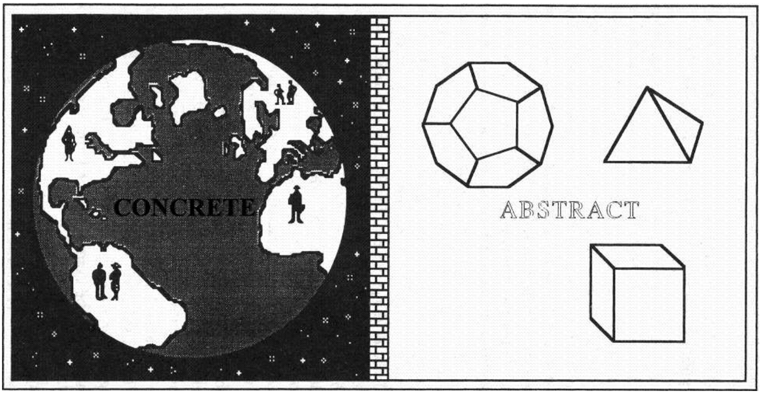

Figura 2: Como nominalistas veem o realismo em matemática (BURGESS; ROSEN, 1997, p. 30).

entidades abstratas, ou seja, os nominalistas entendem que entidades abstratas são causalmente impassíveis e causalmente inativas. Dadas essas duas premissas, "a conclusão é explícita: 'não temos conhecimento de entidades abstratas' " (Ibid.).

Burgess e Rosen (1997, p. 28) anotam que, embora Benacerraf nunca tenha se autodenominado nominalista, seu artigo (BENACERRAF, 1983b) "fez mais que qualquer outro trabalho para incentivar simpatia pelo nominalismo como tal". Naquele trabalho, Benacerraf defende que são insatisfatíveis as condições de verdade que o realismo requer para as proposições matemáticas. O realismo em matemática, que Benacerraf chama de posição "*standard*" devido a sua popularidade entre os matemáticos, endossa uma teoria correspondencial da verdade segundo a qual uma proposição matemática é verdadeira se corresponde a fatos sobre uma realidade independente de entidades matemáticas. São condições análogas às impostas pelo realismo na física — uma proposição física é verdadeira se corresponde a fatos sobre a realidade física — mas com uma diferença crucial: entidades matemáticas são abstratas. Dada a natureza das entidades abstratas — impassíveis e inativas do ponto de vista causal —, dada a "grande parede" de que falam Burgess e Rosen, a condição de verdade nunca pode ser avaliada. Diz Benacerraf:

> Uma abordagem tipicamente 'standard' (pelo menos nos casos de teoria dos números ou teoria dos conjuntos) irá retratar condições de verdade [para proposições matemáticas] em termos de condições sobre objetos cuja natureza, como normalmente concebida, localiza-os além do alcance dos meios de cognição humana mais bem compreendidos (e.g., percepção sensível e similares) (BENACERRAF, 1983b, p. 409).

O realismo, nesses termos, é incompatível com a possibilidade de haver conhecimento matemático. Mas como certamente temos algum conhecimento matemático, o realismo nesses termos não pode ser defendido. Nominalistas tomam esse argumento de Benacerraf como refutação do realismo, e então rejeitam totalmente a existência de entidades abstratas. Entretanto, obviamente os próprios realistas não veem a situação assim. Uma estratégia comum para desfazer aquela imagem radical ilustrada na Figura 1 é derrubar a "grande parede" que separa as entidades abstratas do mundo físico, propondo algum meio de comunicação entre os dois lados. Gödel, por exemplo, propunha que a *intuição matemática* tinha o poder de conectar os dois mundos (Cf. MADDY, 1997, p. 90-91). Outra estratégia consiste em rejeitar que haja duas realidades distintas. É o caso de Maddy (1990). Naquele trabalho, Maddy defendia uma posição realista que admitia uma teoria causal do conhecimento mas negava que entidades abstratas fossem impassíveis e inativas causalmente. Isso porque no realismo de Maddy não havia dois mundos separados por uma "grande parede". Entidades abstratas e concretas pertenciam ao mesmo mundo, e ambas eram percebidas por meio de nossos sentidos usuais. Maddy chegou a esboçar uma interessante explicação neurológica da percepção de entidades abstratas tais como conjuntos. Outra alternativa aos realistas passa por rejeitar a teoria causal do conhecimento, que tem suas próprias dificuldades, mas com as quais não vamos nos ocupar aqui.

À parte nominalismo e realismos moderados, outra reação típica às dificuldades da posição *standard* são as posições a que Benacerraf chama de combinatorialistas. Uma sentença matemática é verdadeira, em posições combinatorialistas, se ela é um teorema de um sistema axiomático especificado, isto é, se ela pode ser derivada dedutivamente, de maneira formal, dos axiomas da teoria. Essas posições "quase invariavelmente fixam-se em características sintáticas (combinatoriais) das sentenças" e nelas "o predicado de 'verdade' é sintaticamente definido", caracteriza Benacerraf (1983b, p. 406-407). Formalismos, de certa forma, são próximos a posições combinatorialistas. Condições de verdade sintáticas têm a vantagem de assegurar a possibilidade de haver conhecimento matemático. Por isso é compreensível que muitos matemáticos, quando pressionados a explicar como têm conhecimento matemático, escapem do realismo do cotidiano para posições combinatorialistas, como assinalam Davis e Hersh (1982, p. 321). Sobre esse ponto, Benacerraf afirma o seguinte:

> A visão "combinatorial" da verdade matemática tem raízes epistemológicas. Ela parte da proposição de que, quaisquer que sejam os "objetos" da matemática, nosso conhecimento é obtido por provas.

> Provas são ou podem ser (para alguns, devem ser) escritas ou faladas; matemáticos podem examiná-las e acordar que elas *são* provas (Ibid., p. 416).

Os combinatorialismos estabelecem condições de verdade muito mais palpáveis que os realismos. Todavia, eles também têm sua própria parcela de dificuldades a enfrentar. O primeiro teorema de incompletude de Gödel impede que a noção de verdade seja assimilada integralmente à noção de teoremicidade, caso nossa teoria seja, como desejamos, consistente e axiomatizável. Mas isso pode não ser um problema, admite Benacerraf, se abandonamos a ambição de conhecer todas as verdades (BENACERRAF, 1983b, p. 406). Mas há outra dificuldade para os combinatorialismos; Benacerraf requer que "qualquer teoria que professe teoremicidade como condição de verdade explique também a conexão entre verdade e teoremicidade"(Ibid., p. 408). Teorias formais há de toda sorte; os combinatorialistas ou formalistas são convidados a explicar por que algumas teorias formais são preferidas a outras. Uma posição formalista tradicional que afirme que teorias matemáticas não são verdadeiras nem falsas, escapa de ter que explicar a conexão entre verdade e teoremicidade, mas não escapa de ter que explicar porque algumas teorias são preferíveis a outras, e de explicar porque muitas teorias matemáticas aplicam-se tão bem à realidade física. Posições combinatorialistas que admitem a verdade de teorias matemáticas, por sua vez, precisam enfrentar diretamente a o desafio de conectar verdade a teoremicidade.

Benacerraf não trata deste ponto, mas é um fato que matematicamente as condições de verdade que importam são as que ele atribui ao combinatorialismo. De forma geral, matematicamente uma sentença é adjetivada de verdadeira se ela é um teorema da teoria dos conjuntos. Isso põe aos realistas um desafio extra. Além de explicar como é possível o conhecimento das entidades matemáticas, eles também têm que explicar, como os combinatorialistas, o que teoremicidade tem a ver com verdade. A princípio, nada garante que, por ter uma prova em um sistema formal, uma sentença seja verdadeira no sentido correspondencial. Realistas têm em elevada estima a analogia entre a matemática e as ciências naturais, e é justamente nas ciências naturais onde se mostra vivamente a importância do descompasso entre as consequências da teoria e a realidade. A necessidade de ajustar a teoria é percebida justamente quando consequências deduzidas da teoria não se verificam em experimentos ou observações. Idealmente, não é a realidade que se molda à teoria, mas o contrário, a teoria que se molda à realidade. Na matemática, teoremas são aceitos sem evidência adicional — se a existência de um conjunto é provada na teoria dos conjuntos, então esse conjunto existe na matemática. Isso é muito diverso do que ocorre nas ciências naturais e do que uma posição coerentemente realista em matemática exigiria. Nas ciências naturais, a existência de uma entidade prevista pela teoria só pode ser declarada depois de confirmada de uma forma ou de outra por experimentos ou observação. Se entidades matemáticas gozam de uma existência independente similar à dos objetos físicos, a teoremicidade não basta, por si, como condição de verdade. Se o realista não quer desautorizar por razões filosóficas métodos matemáticos consagrados, ele deve oferecer uma explicação convincente sobre como a teoremicidade se combina tão perfeitamente com a realidade independente das entidades matemáticas. Sem isso, nada impede que a realidade seja "tristemente não cooperativa", como lembra Maddy (2011, p. 58).

Quando Maddy formulou seu realismo, estava preocupada em explicar como é possível conhecer entidades abstratas, o que era uma resposta ao desafio de Benacerraf aos realismos (Cf., p.ex., Maddy (1990, p. 36 e seguintes)). Poucos anos depois, Maddy mudou de posição e elaborou seu naturalismo, quando se deu conta de que há um desacordo difícil de superar entre a prática matemática e as explicações realistas (MADDY, 1997, p. 130-132). O que consideramos acima um desafio extra aos realismos, inspirado na crítica de Benacerraf aos combinatorialismos, é uma expressão desse desacordo. A prática matemática consagrou a prova em sistemas axiomáticos, especialmente a prova na teoria de conjuntos, como critério final de verdade em matemática. Se o realismo tivesse de fato algum peso na avaliação da verdade de proposições matemáticas, a teoremicidade poderia ser um bom indício de verdade, mas não o critério final de verdade. A pouca influência do realismo na matemática tal como é praticada também aparece quando consideramos as razões que os matemáticos aduzem para justificar os axiomas da teoria dos conjuntos.

Como vimos na seção 3.1, argumentos extrínsecos foram mais decisivos que argumentos intrínsecos nas discussões que acompanharam a axiomatização da teoria dos conjuntos. Isso, por si, já é um fato relevante que fragiliza abordagens realistas. Pois se o realismo fosse importante para a prática matemática, seria de se esperar que os argumentos intrínsecos — o apelo à conformação dos axiomas com alguma concepção ou realidade subjacente, à intuição e à autoevidência — fossem os mais decisivos. Ainda faltaria explicar qual a natureza dessa realidade subjacente e que tipo de acesso se tem a ela, mas estaria claro que os matemáticos estavam agindo guiados por suas propaladas convicções realistas. Mas, a despeito do discurso matemático-filosófico, se encontra na prática o privilegiamento de justificações extrínsecas, o que faz mais duvidosa a importância prática do realismo. Porém, os próprios realistas não veem a situação assim. Gödel, um realista convicto, não via incompatibilidade entre justificações extrínsecas e realismo, muito pelo contrário. Justificações extrínsecas na matemática, defendia Gödel, são tão legítimas quanto na física:

> Podem existir axiomas tão abundantes em suas consequências verificáveis, lançando tanta luz sobre um campo inteiro, e produzindo poderosos métodos para resolver problemas (...) que, não importa se eles são intrinsecamente necessários ou não, eles teriam de ser aceitos pelo menos no mesmo sentido que qualquer teoria física bem estabelecida (GöDEL, 1983, p. 477).

Novamente vemos o realismo em matemática apoiado numa analogia com a física. Agora convém avaliar até que ponto essa analogia se sustenta. É indiscutível que leis físicas são por vezes postuladas de forma a dar conta de fenômenos observados mesmo sem se ter evidência direta da validade dessas leis. Por exemplo, não há evidência direta para a lei física que diz que nada pode superar a velocidade da luz. No entanto, essa lei mostra seu valor pelas suas consequências: assumindo-a, explica-se um sem número de fenômenos. Gödel defende que o mesmo se passa na matemática. Um axioma como o do infinito, por exemplo, é adotado porque sem ele não há como dar conta dos números reais na teoria dos conjuntos. Em face da importância indiscutível dos números reais na matemática, o axioma do infinito está assim extrinsecamente justificado. Até aqui a analogia vai bem, mas prosseguindo um pouco mais encontraremos aqueles mesmos problemas do realismo a que aludimos acima. O primeiro problema é o clássico desafio de Benacerraf. Admitamos que a reconstrução dos reais na teoria dos conjuntos seja evidência extrínseca a favor do axioma do infinito, à semelhança de justificações extrínsecas para leis físicas. Mas como os matemáticos sabem que os reais existem? Números reais são entidades abstratas, e os realistas deveriam explicar que tipo de contato os matemáticos têm com eles para acreditarem na sua existência. Apenas depois de assegurada a "existência real" dos números reais é que a argumentação extrínseca a favor do axioma do infinito poderia ser aceita em termos similares aos que sustentam leis físicas. Sobre a analogia entre física e matemática pretendida por Gödel, Benacerraf comenta:

> Para ser sincero, há uma analogia superficial. Pois, como Gödel aponta, "verificamos" os axiomas deduzindo consequências concernentes a áreas nas quais aparentemente temos "percepção" mais direta (intuições claras). Mas nunca nos dizem como conhecemos mesmo essas proposições mais claras (BENACERRAF, 1983b, p. 415-416).

Vejamos como se manifesta o segundo problema. Comumente, as consequências de um axioma ou de uma lei física não se limitam àquelas que inicialmente justificaram sua formulação. No caso da física, onde o realismo tem importância prática, as consequências adicionais não são tomadas como verdades sem antes haver algum tipo de evidência extra a seu favor. É preciso realizar um experimento, fazer novas observações, enfim. Na matemática não é assim. Se o axioma venceu a barreira da dúvida e foi incorporado à teoria canônica, suas consequências são aceitas sem mais delongas, sem necessidade de comprovação adicional. Na matemática, quando se trata da teoria canônica — a teoria dos conjuntos, quando falamos da matemática usual como um todo — teoremicidade implica verdade. O axioma do infinito é adotado, dentre outras razões, porque sem ele não se consegue definir os números reais na teoria dos conjuntos. Mas suas consequências se estendem para muito além do conjunto dos números reais. Combinando-o com os demais axiomas, prova-se a existência de conjuntos infinitos muitíssimo maiores. Dispensando evidência adicional, o que um físico não faria, os matemáticos aceitam a existência desses conjuntos.

Parece improvável esperar que o realismo sustente a argumentação extrínseca na matemática por analogia à argumentação extrínseca na física. Na física argumentação extrínseca e realismo andam a par e passo. Na matemática, a relação entre argumentação extrínseca e realismo é menos direta. Por argumentação extrínseca, axiomas são postulados para cumprir objetivos matemáticos. Se um axioma serve ao objetivo proposto, sem ao mesmo tempo trazer consequências indesejáveis, há razão suficiente para recomendar sua adoção. Evidências do tipo relacionado a alguma forma de realismo não são requeridas.

Admitindo os pontos que viemos discutindo até aqui, admitindo que realmente há um descompasso entre o difundido discurso realista e a prática matemática, o que fazer então? Uma reação seria pôr em dúvida uma enorme parte da matemática até que se encontrasse a evidência adicional requerida por um realismo *standard* mais coerente. Mas essa reação, além de extremada, é muito improvável. Pouquíssimos estariam dispostos a pôr em xeque, por motivos unicamente filosóficos, um empreendimento tão bem sucedido quanto a matemática contemporânea. Uma reação bem mais condizente com o comportamento filosófico contemporâneo seria manter a matemática e seu status epistemológico preservados, e modificar somente a fundamentação filosófica até se encontrar uma posição que explique aquele status, assumido de antemão, sem cair nos problemas do realismo *standard*. De fato, esse é o caminho seguido por muitas filosofias da matemática alternativas ao realismo. Desnecessário dizer que, mesmo que elas sejam bem sucedidas em evitar os problemas do realismo, elas têm suas próprias parcelas de sérias dificuldades a enfrentar.

Mas se o sucesso da matemática atual é incontestável e se não estamos dispostos a negar-lhe o caráter de conhecimento, ambas as coisas mesmo sem dispor de uma fundamentação filosófica sólida, para que serviria tal fundamentação? Se já estamos seguros do conhecimento matemático, por que requerer evidência adicional? Pergunta Maddy: "porque raciocínios matemáticos perfeitamente sólidos requereriam suplementação? Não há alguma coisa errada quando métodos matemáticos racionais são postos em questão desse jeito?" (MADDY, 2011, p. 58). O ponto chave da filosofia segunda de Maddy é mostrar que sim, há algo errado quando se pensa que métodos matemáticas consagrados pela prática, seguros conforme os critérios matemáticos correntes, demandam fundamentação filosófica.

Ressaltar a importância preponderante da prática matemática — base da filosofia segunda de Maddy — encerra, contudo, um perigo. É um "fato manifesto", como afirma Zermelo[11], que faz parte da prática matemática evocar razões filosóficas, sobretudo realistas e relacionadas à intuição e autoevidência. É inegável que integra a prática matemática o recurso a justificativas intrínsecas sempre que possível. Se a intenção é privilegiar a prática matemática, pode-se contra-argumentar, deveríamos levar em conta que é uma prática padrão entre matemáticos entender o seu trabalho como um empreendimento dedicado a descobrir fatos sobre uma realidade de entidades matemáticas independentes. A própria Maddy, tanto em seu momento realista quanto em seu momento naturalista, reconhece isso. "Eles [os matemáticos] vêem-se a si mesmos e a seus colegas como investigadores descobrindo as propriedades de vários distritos fascinantes da realidade matemática", diz Maddy (1990, p. 1). Em Maddy (1997, p. 87), ela admite que

> o realismo tem o mérito de combinar com um bem conhecido aspecto da experiência de fazer matemática, o que poderia ser chamado de 'fenomenologia' da experiência matemática. Eu tenho em mente a impressão geralmente notada entre matemáticos de que eles não são livres para proceder como desejarem, de que seu trabalho é constrangido pelas propriedades de alguma coisa externa.

O recurso ao realismo, longe de ser uma prática isolada, está integrado às demais práticas matemáticas e, inclusive, pode ser capaz de direcionar os rumos da pesquisa. Por exemplo, um anti-realista poderia pensar que a prova da independência da hipótese do contínuo é a resposta final do problema do contínuo: "ela não é verdadeira nem falsa, e não há nada mais o que fazer", ele poderia dizer. Um realista, por outro lado, não pode se contentar com uma prova de independência. Se há uma realidade autônoma de conjuntos, naquela realidade a hipótese

[11] Conforme citação na página 77.

do contínuo tem um valor de verdade determinado. Gödel mais uma vez é um bom exemplo:

> Uma prova da indecidibilidade da conjectura de Cantor a partir dos axiomas aceitos de teoria dos conjuntos (...) não poderia de nenhum jeito resolver o problema. (...) os conceitos e teoremas conjuntistas descrevem alguma realidade bem determinada, na qual a conjectura de Cantor deve ser verdadeira ou falsa. Daí que sua indecidibilidade a partir dos axiomas assumidos hoje pode apenas significar que esses axiomas não contêm uma descrição completa daquela realidade (GöDEL, 1983, p. 476).

A postura realista estimula Gödel a continuar a pesquisa, a avaliar novos axiomas que decidam a hipótese do contínuo. Como é possível privilegiar a prática matemática e, ao mesmo tempo, recusar o realismo, tão penetrante na prática matemática? A resposta já está esboçada nos vários parágrafos acima. Todo esse discurso realista visto em Gödel e em outros matemáticos, sustenta Maddy, é só um acessório, pura *prosa*, e na verdade não tem peso na solução de problemas matemáticos. O termo *prosa*, que Maddy usa para referir-se ao discurso filosófico dos matemáticos, ela toma emprestado de Wittgenstein (Cf. MADDY, 1997, p. 166). "O que um matemático (...) é tentado a dizer sobre a objetividade e realidade de fatos matemáticos," assegura Wittgenstein, "não é uma filosofia da matemática, mas sim alguma coisa de que a filosofia deveria *tratar*" (WITTGENSTEIN, 1999, §254). *Tratamento* que deve ser aplicado naquele sentido de sua filosofia terapêutica. Como é sabido, a filosofia do segundo Wittgenstein calca-se na ideia de que problemas filosóficos originam-se a partir de confusões linguísticas, quando expressões são usadas fora de seu contexto original. O papel terapêutico do filósofo consiste em recolocar as expressões em seus contextos ordinários, onde não causam confusão. O realismo em matemática e todos os problemas filosóficos que ele traz consigo são, na visão de Wittgenstein, um exemplo claro do mau uso de expressões como "realidade" e "correspondência", empregadas fora de seu contexto original, as ciências naturais.

> Considere o artigo do professor Hardy ("Mathematical Proof") e sua observação que "a proposições matemáticas corresponde — em algum sentido, ainda que sofisticado — uma realidade". (...) Então se você esquece onde a expressão "uma realidade corresponde a" está realmente em casa — O que é "realidade"? Pensamos em "realidade" como alguma coisa a qual podemos apontar. É isto, aquilo. Professor Hardy está comparando proposições matemáticas a proposições físicas. Essa comparação é extremamente enganosa. (WITTGENSTEIN, 1976, p. 239-240)

A tarefa da filosofia wittgensteiniana na matemática é separar do discurso matemático propriamente dito esse discurso fora de contexto, o qual seria responsável por engendrar problemas filosóficos, como as preocupações de Benacerraf com o acesso a entidades abstratas. De acordo com Wittgenstein, "o que é levado a desaparecer por uma tal crítica são nomes e alusões que ocorrem no cálculo, daí o que eu desejo chamar *prosa*. É muito importante distinguir tão estritamente quanto possível entre cálculo e este tipo de prosa" (WITTGENSTEIN, 1979; apud MADDY, 1997, p. 166). Maddy vê sua filosofia naturalizada da matemática operando de acordo com esse objetivo proposto por Wittgenstein que, na sua interpretação, advoga "a excisão de toda filosofia tradicional e, em seu lugar" recomenda "atenção cuidadosa aos detalhes da prática em si" (MADDY, 1997, p. 171).

Agora municiados com a distinção wittgensteiniana entre *prosa* e *cálculo*, podemos voltar a Gödel (1983) e analisar até que ponto suas referências ao realismo são dispensáveis. Logo depois de defender em bases realistas que uma prova da independência da hipótese do contínuo não poderia ser encarada como a solução final do problema, no trecho que citamos acima, Gödel prossegue: "é possível apontar caminhos pelos quais a decisão de uma questão, que é indecidível a partir dos axiomas usuais, pode no entanto ser obtida" (Ibid., p. 476). Os caminhos que Gödel aponta passam por motivações intrínsecas e extrínsecas. As motivações intrínsecas concentram-se na análise do conceito de conjunto:

> Primeiro de tudo, os axiomas da teoria dos conjuntos de modo algum formam um sistema fechado em si mesmo, mas, totalmente ao contrário, o próprio conceito de conjunto [a concepção iterativa] no qual eles são baseados sugere sua extensão por novos axiomas que afirmam a existência de ainda mais iterações da operação "conjunto de" (Ibid.).

Gödel refere-se à extensão da teoria dos conjuntos pela adição de axiomas que afirmam a existência de grandes cardinais. Essa linha de argumentação é claramente intrínseca, já que, assegura Gödel, esses novos axiomas "apenas desdobram o conteúdo do conceito de conjunto explicado acima [a concepção iterativa]" (Ibid., p. 477). Trata-se da mesma linha argumentativa pela concepção iterativa que discutimos na seção 3.1. Tudo isso está de pleno acordo com a posição realista de Gödel, e ele mesmo aponta isso algumas páginas à frente:

> Mas, apesar de seu afastamento da experiência sensorial, nós temos sim alguma coisa como uma percepção também dos objetos da teoria dos conjuntos, como é visto pelo fato de que os axiomas se impõem a nós como sendo verdadeiros. Eu não vejo nenhuma razão por que devêssemos ter menos confiança nesse tipo de percepção, i.e., na intuição matemática, que na percepção sensível (...) Que novas intuições matemáticas que levam a uma decisão de problemas tais como a hipótese do contínuo de Cantor são perfeitamente possíveis foi apontado

antes (pp. [476-7]) (Ibid., p. 484).

Nesse parágrafo, Gödel deixa claro que a sua defesa da extensão da teoria dos conjuntos com base na concepção iterativa (que ele faz nas páginas 476 e 477 de seu artigo) está baseada na sua posição realista por que é tarefa da *intuição matemática* perscrutar os objetos matemáticos e subsidiar a elucidação e aprimoramento do conceito de conjunto. Gödel pretende que a *intuição matemática* seja uma faculdade análoga à percepção sensível. No cenário realista de Gödel, existe uma realidade independente de objetos matemáticos, e é tarefa dos matemáticos exercitarem sua *intuição matemática* para descobrir como esses objetos são; os axiomas da teoria dos conjuntos expressam verdades sobre esses objetos — e esta é a razão pela qual eles "se impõem a nós"—, e novos axiomas podem ser intuídos do mesmo jeito.

Dado esse cenário, como distinguir a *prosa* do *cálculo*? O que é matematicamente menos contestável é que há uma forma de estender a concepção iterativa de modo a admitir a existência de grandes cardinais, o que torna aceitáveis axiomas que afirmem a existência de grandes cardinais, desde que se assuma a concepção iterativa e essa extensão. Toda a explicação complementar de Gödel em termos de *intuição matemática* e analogia com a física é altamente polêmica e duvidosa, e não precisamos acrescentar mais nada além do dito acima acerca dos problemas do realismo para reforçar seu caráter controvertido. Todavia, a força do argumento de Gödel no sentido de mostrar que há meios objetivos, não arbitrários, de estender a teoria dos conjuntos não fica prejudicada mesmo que ignoremos seu realismo e a suposta faculdade da *intuição matemática*. Por exemplo, Shoenfield (1977, p. 342 e seguintes) aborda a mesma proposta de extensão da teoria dos conjuntos pela adição de axiomas de grandes cardinais baseando-a na concepção iterativa, sem contudo posicionar-se filosoficamente. Um matemático que quisesse se opor a Gödel, recusando a proposta de estender a teoria pelo acréscimo de axiomas de grandes cardinais, faria melhor se buscasse mostrar matematicamente pontos falhos ou negativos da proposta de extensão da concepção interativa, do que se atacasse a *intuição matemática* por razões filosóficas. A discussão filosófica nesse caso seria inócua, se não por outras razões ao menos porque o vigor do argumento permanece integral depois de extirpados os acessórios filosóficos, como mostra Shoenfield. A distinção entre *prosa* e *cálculo* é clara.

Outro ponto a notar em Gödel (1983), é que ele faz um movimento similar ao que vimos em Zermelo (1967, p. 187), sobre o qual discutimos na seção anterior (p. 77). Depois de tratar das razões intrínsecas que permitiriam a extensão da teoria dos conjuntos, advindas do exercício da *intuição matemática*, Gödel evoca razões extrínsecas:

> Em segundo lugar, entretanto, mesmo desconsiderando a necessidade intrínseca de algum novo axioma, e mesmo no caso em que ele não tenha qualquer necessidade intrínseca, uma decisão provável sobre sua verdade é possível também de outro modo, qual seja, indutivamente pelo estudo de seu "sucesso". Sucesso aqui significa fecundidade em consequências, em particular em consequências "verificáveis", isto é, consequências demonstráveis sem o novo axioma, mas cujas provas com a ajuda do novo axioma são consideravelmente mais simples e fáceis de descobrir, e tornam possível combinar em uma prova muitas provas diferentes (Ibid., p. 477).

Zermelo recorreu a justificativas extrínsecas diante da constatação de que justificativas intrínsecas com base em autoevidência poderiam ser censuradas como subjetivas demais. Gödel convoca motivações extrínsecas considerando a hipótese de não haver justificativas intrínsecas à mão. O ponto importante a ressaltar é que, para ambos, as justificativas extrínsecas têm poder decisivo independentemente da necessidade intrínseca. Não importa se um princípio é ou não autoevidente, ou se está ou não implícito no conceito de conjunto; se ele for necessário para a ciência ou fecundo em consequências, há razões para aceitá-lo. Obviamente fecundidade e necessidade demonstram-se com *cálculo* e não com *prosa*. As avaliações de Zermelo e Gödel parecem ratificar a tese wittgensteiniana que afirma a supremacia do *cálculo* sobre a *prosa*, e a tese maddyana que afirma a primazia da argumentação extrínseca sobre a intrínseca.

Lançar mão da *prosa* é um costume difundido entre matemáticos. Lembremos Kunen (2009, p. 3-4), por exemplo, que afirma que a justificativa dos axiomas é parte da motivação, da filosofia, ou da física, e não da matemática. Essa sua asserção também pode ser contada como *prosa*, no sentido de que ela tem pouco efeito sobre a matemática que ele faz. Kunen é um matemático que se interessa por questões filosóficas, e que de fato desenvolve considerações filosóficas muito pertinentes (ver, p.ex., Kunen (2009, p. 186-194)). Mas, como um matemático competente, Kunen emprega e concentra-se majoritariamente em métodos e raciocínios matemáticos. Quando justifica a introdução de uma definição ou a necessidade de um teorema, Kunen aduz razões matemáticas. Ele procede da mesma maneira quando justifica a introdução de um axioma. Por exemplo, ao justificar a introdução do axioma de substituição, em vez de levantar razões filosóficas ou físicas, Kunen menciona uma razão matemática: pelos axiomas que ele introduzira até então, não é possível definir o produto cartesiano, de sorte que ele precisa de novos axiomas, e os axiomas de substituição servem para tanto (Cf.

KUNEN, 2009, p. 26). De fato, qualquer outro matemático competente procederia do mesmo jeito. Independentemente de diferenças em suas posições filosóficas, de se interessarem por filosofia ou não, os métodos que os matemáticos contemporâneos empregam são praticamente os mesmos. O próprio Kunen salienta esse ponto.

Kunen (2009, p. 186-194) desenvolve uma breve discussão sobre filosofia da matemática, em especial no que concerne ao modo como diferentes escolas filosóficas encaram a verdade de teoremas sobre conjuntos infinitos encontrados em altos estratos do universo conjuntista. Kunen trata de três posições filosóficas: *platonismo*, que é a posição que aqui estamos chamando de realismo; *finitismo*, que é a posição que nega a existência de conjuntos infinitos; e *formalismo*, que para Kunen é a posição segundo a qual a matemática limita-se a provas formais a partir dos axiomas de ZFC. Para platonistas, aqueles teoremas são verdadeiros com respeito a algum universo ideal onde existem conjuntos infinitos. Finitistas, que aceitam apenas conjuntos finitos, repudiam aqueles teoremas sobre conjuntos infinitos vendo-os como sem significado. Formalistas, por sua vez, abstêm-se de se posicionar sobre o valor de verdade daqueles teoremas. Eles

> adotam uma posição agnóstica que é consistente com o finitismo e o platonismo. Oficialmente, eles dizem (como fizemos no Capítulo 0) que a matemática consiste em provas formais a partir dos axiomas de ZFC. Isto nos dá o padrão atual para aceitação de artigos em revistas. Claramente, a maior parte dos escritos em matemática não se refere a qualquer sistema axiomático formal, mas se você submete um artigo na área de análise que argumenta corretamente usando princípios formalizáveis em ZFC, o parecerista irá contá-lo como correto (embora não necessariamente valha a pena publicá-lo) (KUNEN, 2009, p. 188).

Em seu agnosticismo, os formalistas preferem não se comprometer com a verdade dos teoremas. Mas eles também não negam que proposições matemáticas possam fazer sentido e ser verdadeiras. Pelo contrário, o formalista de Kunen é agnóstico porque ele "pode argumentar que talvez existam algumas verdades em ZFC, mas ainda não entendemos quanta verdade" (Ibid.). Mas o que mais nos interessa destacar da citação de Kunen é sua afirmação de que esse tipo de formalismo é o "padrão atual" de correção matemática, aquele empregado na avaliação pelos pares. Se por um lado realismos ou platonismos são a compreensão filosófica *standard* entre os matemáticos, por outro lado — e é para isto que Kunen nos chama a atenção — restringir-se ao formalismo agnóstico é um modo de deixar as divergências filosóficas de fora do trabalho matemático propriamente dito. Kunen mesmo adota a posição oficial quando afirma que a matemática propriamente consiste em dedução lógica a partir de axiomas (no capítulo 0 de Kunen (2009, p. 3-4), trecho que citamos na página 61). Esse recurso à posição formalista oficial é uma outra faceta daquele fenômeno a que se referem Davis e Hersh (1982, p. 321). Além de serem realistas durante a semana e formalistas aos domingos, podemos dizer que os matemáticos, mesmo que sejam platonistas ou finitistas na cozinha, são discretamente formalistas na sala. No espaço público, as convicções íntimas ficam ocultas, de sorte que o trabalho profissional de um matemático não precisa revelar suas convicções filosóficas. Continua Kunen:

> Essa visão oficial formalista não impede que os matemáticos tenham suas próprias visões privadas sobre o significado de ZFC; essas visões usualmente não são discerníveis a partir de seus trabalhos publicados. O autor de um artigo sobre análise funcional pode ser um platonista, mas também o autor poderia possivelmente ser um finitista que simplesmente acha um jogo divertido (ou um caminho rápido para uma posição permanente) publicar tais artigos. O autor também poderia ser um formalista (Ibid.).

Isso é muito diverso do que ocorre em outras áreas, como por exemplo nas ciências humanas, em que as publicações profissionais revelam as convicções filosóficas do autor. Nessas áreas não há duas coisas como *prosa* e *cálculo*, simplesmente porque divergências na posição filosófica subjacente implicam divergências nos assuntos afetos à própria ciência. Na matemática não é assim que se passa. Matemáticos podem ter profundas divergências quanto a suas convicções filosóficas, sem contudo divergirem sobre a validade de axiomas e teoremas. Por isso suas publicações profissionais, quando não tratam explicitamente de filosofia, não permitem divisar suas posições filosóficas.

Mathematical Logic, livro de Shoenfield, é outro exemplo de um trabalho matemático que adota explicitamente a postura oficial de deixar posições filosóficas de fora, cortar a *prosa* e se dedicar apenas ao *cálculo*. Em seu prefácio, Shoenfield avisa:

> A lógica matemática tem estado sempre proximamente conectada à filosofia da matemática. Eu geralmente evitei questões filosóficas exceto quando elas estavam intimamente conectadas com o material matemático. Eu não pedirei desculpas, entretanto, se ocasionalmente afirmei uma posição filosófica sem observar que a opinião contrária é também largamente aceita (SHOENFIELD, 1967, p. iii).

Seu livro é uma referência clássica na área de lógica. Por estar a lógica tão ou mais envolvida com filosofia que a teoria dos conjuntos, talvez alguém esperasse que o autor abordasse assuntos filosóficos. Mas, apesar de toda a polêmica filosófica que cerca a área, Shoenfield pode seguramente ignorar questões filosóficas, sem que isso prejudique sua exposição matemática. A supressão da *prosa* não prejudica o *cálculo*. Mas, ainda que deixe alguma *prosa* se infiltrar, não é por descortesia que Shoenfield não pedirá desculpas; é porque a posição filosófica que ele eventualmente tenha afirmado, mesmo que oposta a outras posições filosóficas, é indiferente para o desenvolvimento do tema. Como leitores, podemos desconsiderá-la, sem prejuízo do conteúdo matemático.

Estratégia similar à de Shoenfield é a adotada pelos matemáticos na maioria das vezes, como nota Kunen. Questões filosóficas estão ausentes da maior parte dos textos matemáticos e, quando estão presentes, como em Kunen (2009), os conteúdos matemático e filosófico podem ser perfeitamente separados. Se o assunto é tipicamente matemático, seguramente o conteúdo filosófico pode ser ignorado sem prejuízo do conteúdo matemático, como é o caso em Kunen (2009). Nisso a matemática se assemelha às ciências naturais. Na maior parte dos artigos e livros científicos, discussões filosóficas estão ausentes. Para argumentar a favor de suas teses, o cientista natural alude a experimentos, observações, medições, cálculos, etc., isto é, usa métodos cientificamente reconhecidos. O matemático, como não poderia deixar de ser, a favor de suas teses escreve provas, deduz e avalia consequências de hipóteses, etc., isto é, emprega métodos matematicamente reconhecidos. Assim, ao largo da filosofia, cientistas e matemáticos desenvolvem o conhecimento científico e matemático. Tudo isso parece indicar que a filosofia, no sentido de uma filosofia primeira, divorciada da prática, não tem papel a cumprir na justificação do conhecimento matemático.

Temos reunido razões para desacreditar principalmente o realismo em matemática. Cabe a pergunta: somente por que o realismo falha em explicar o conhecimento matemático, e outras abordagens parecem falhar também, devemos concluir que não existe alguma posição filosófica satisfatória nesse assunto? Formalismo, finitismo, nominalismo, arrealismo, etc., ou algum *-ismo* ainda não imaginado poderia estear a matemática? A resposta é negativa, não porque isso seja impossível[12], mas porque é desnecessário fundamentar a matemática em alguma outra coisa que não a própria matemática. Já comentamos acima que, se concedemos de antemão o status de conhecimento às proposições matemáticas, o que é uma premissa para qualquer teoria filosófica do conhecimento matemático que almeje um mínimo de aceitação atualmente, não faz sentido exigir fundamentação filosófica suplementar. Ademais, o caráter supérfluo de qualquer fundamentação filosófica é patente, dado que posturas filosóficas não têm efeito

[12] Mas é altamente improvável. Não foi por falta de esforço ou de tempo que os filósofos ainda não conseguiram elaborar uma fundamentação do conhecimento matemático livre de dificuldades o suficiente para angariar a simpatia de boa parte da comunidade de filósofos e matemáticos.

nos resultados da prática matemática contemporânea[13], como ilustra o testemunho de Kunen. Por fim, basta examinar a história das duas disciplinas, filosofia e matemática, para perceber que enquanto a filosofia esteve envolvida em impasses insuperáveis, a matemática seguiu produzindo conhecimento. É indiscutível que a matemática também enfrentou muitas polêmicas, e que muitas delas tiveram origem em discordâncias filosóficas. A disputa entre Hilbert e Brouwer, formalistas e intuicionistas, por exemplo, tem uma forte motivação filosófica. Mas o ponto a destacar da história das duas disciplinas é que, muito embora as discordâncias filosóficas subjacentes não tenham sido resolvidas[14], para as questões matemáticas conseguiu-se uma solução consensual, pelo menos entre os matemáticos. Dado que os debates matemáticos chegaram a termo mesmo que os debates filosóficos continuassem em aberto, o que se pode concluir é que os debates matemáticos não foram resolvidos com base em considerações filosóficas (MADDY, 1997, p. 191). Essa é uma conclusão basilar do naturalismo de Maddy.

Mas não só as considerações filosóficas são indiferentes para a matemática. As ciências, igualmente, não servem de guia para a solução de impasses na matemática contemporânea. Nem mesmo a física, tradicionalmente a ciência mais matematizada, exerce influência capaz de pesar decisivamente nos rumos da matemática atual.

3.3 MATEMÁTICA E FÍSICA

Um item importante do naturalismo matemático de Maddy é a ideia de que a matemática é autônoma, isto é, que ela não está sujeita a diretrizes impostas por nenhuma outra disciplina. A matemática deve ser tratada em seus próprios termos, defende Maddy. Até aqui temos seguido suas ideias para mostrar que, na prática, questões matemáticas resolvem-se matematicamente (seção 3.1) e que, apesar das preocupações filosóficas dos filósofos e mesmo dos matemáticos, ques-

[13] A não ser, é claro, que o matemático tenha posições muito radicais e não se sinta constrangido em não adotar a posição oficial.

[14] As discussões filosóficas sobre o espólio do programa de Hilbert continuam em aberto. Embora a opinião majoritária seja de que os teoremas de incompletude de Gödel impedem sua realização plena, há quem defenda que o programa de Hilbert sobrevive. Por exemplo, Michael Detlefsen esposa essa posição em Detlefsen (1986) e Detlefsen (1992). Pelo lado dos intuicionistas, destaca-se Michael Dummett (veja, p.ex., Dummett (1978)). Embora o intuicionismo de Dummett tenha diferenças importantes com relação ao de Brouwer, as consequências das teses de ambos para a lógica e para a matemática têm similaridades significativas (Cf. BROWN, 2008, p. 82-83, 123-125).

tões filosóficas têm pouca serventia na prática matemática (seção 3.2). Mas isso ainda não nos habilita a sustentar a autonomia da matemática. Recordemos que Kunen assinala que as justificativas dos axiomas da teoria dos conjuntos, os mais fundamentais da matemática, podem ser filosóficas, físicas ou de outra ordem. Já tratamos de sustentar, seguindo Maddy, que é vã a busca por motivações filosóficas. Com efeito, ainda necessitamos examinar as relações entre matemática e física, e se essas relações poderiam ser motivadoras dos axiomas mais básicos da matemática.

Tradicionalmente, matemática e física têm estado muito próximas. No início da ciência moderna, cientistas como Galileu e Newton tomaram a matemática como a linguagem própria da natureza, e converteram a ciência no empreendimento que intentava explicar os fenômenos naturais a partir de leis matemáticas, reputadas como perfeitas e imutáveis. Esta passagem de Galileu, frequentemente citada, é ilustrativa dos ideais científicos de então:

> A Filosofia [natureza] está escrita naquele grande livro que sempre esteve diante de nossos olhos — isto é, o universo — mas não podemos entendê-la se primeiro não aprendermos a linguagem e alcançarmos os símbolos em que ela está escrita. O livro está escrito em linguagem matemática, e os símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem a ajuda das quais é impossível compreender uma única palavra dele; sem o que se perambula em vão por uma labirinto escuro (GALILEI, 1964-66. apud KLINE, 1972., p. 328-329).

A ciência desde Galileu avançou enormemente e, embora a visão do mundo e do modo de fazer ciência tenha se modificado muito, a matemática continua desempenhando um papel essencial na nossa compreensão do universo. Essa estreita e histórica ligação entre a matemática e as ciências naturais forjou a filosofia da matemática de Quine. O uso indispensável da matemática nas ciências naturais, afiança Quine, legitima o conhecimento matemático e ao mesmo tempo nos obriga a admitir que entidades matemáticas existem. Esse é, *grosso modo*, o conhecido *argumento de indispensabilidade* de Quine a favor do realismo em matemática. Maddy (1997, p. 104) comenta que "ao longo das últimas décadas, o argumento de indispensabilidade tem sido um fator tão influente a favor do realismo quanto o problema de Benacerraf tem sido influente contra o realismo". A partir do argumento de indispensabilidade, um realista pode advogar que não importa que não consigamos explicar a conexão entre matemáticos e seus objetos de estudo; ao aceitar as nossas melhores teorias científicas sobre o mundo, estamos inevitavelmente comprometidos com uma ontologia que inclui objetos matemáticos. Da perspectiva do realismo quiniano, o problema de Benacerraf é apenas um problema epistemológico em aberto, e não uma refutação do realismo. Maddy encarava o problema assim até pelo menos 1990, quando ainda endossava o argumento de indispensabilidade de Quine (Cf. MADDY, 1990, p. 159). Seu realismo de então incluía uma tentativa de responder ao desafio de Benacerraf empregando uma epistemologia naturalizada.

Assim, vemos novamente bater à nossa porta o realismo em matemática, contra o qual combatemos na seção anterior. Mas desta vez não são razões unicamente filosóficas que o trazem, mas principalmente científicas. Rememoremos o naturalismo de Quine: "o reconhecimento de que é dentro da ciência mesma, e não em alguma filosofia anterior, que a realidade há de ser identificada e descrita" (QUINE, 1981a, p. 21). Nossas melhores teorias são as científicas, atesta Quine, e nossos melhores métodos de expandir o conhecimento são igualmente os científicos, de sorte que, se a filosofia almeja ser bem sucedida, ela deve aspirar a padrões científicos (Cf. HYLTON, 2007, p. 7-8). Para Quine, a filosofia e os filósofos não gozam de nenhuma vantagem, não têm nenhuma primazia, na fundamentação do conhecimento. Quine inverte uma longa tradição filosófica: não é a filosofia que fundamenta a ciência, mas é a ciência que pode fundamentar alguma filosofia que se pretenda viável. A filosofia não está em terreno mais seguro que a ciência (pelo contrário), e por isso não tem cabimento buscar na filosofia fundamentação para a ciência e nem para a matemática. De acordo com o naturalismo de Quine, essa fundamentação deve ser buscada na própria ciência. Daí que qualquer tentativa de sustentar uma filosofia da matemática, inclusive realista, com razões puramente filosóficas estaria em desacordo com o pensamento de Quine.

Para Quine, a matemática se ampara nas ciências naturais. É "dentro da ciência mesma" que encontramos a matemática operando de maneira indispensável, e é o papel essencial que ela desempenha nas ciências naturais que assegura seu *status* de conhecimento. Mas na medida em que aceitamos a matemática empregada nas ciências como conhecimento, em pé de igualdade com o conhecimento científico, não podemos ignorar a vasta ontologia de entidades abstratas que ela pressupõe. Isso nos impele a abraçar o realismo em matemática, advoga Quine, e a realidade dos objetos matemáticos fica, assim, subordinada à utilidade deles nas ciências naturais.

O argumento de indispensabilidade, embora simples de ser apresentado, é resultante de uma extensa reflexão dentro da filosofia de Quine, que articula principalmente suas ideias com respeito ao naturalismo, ao critério de compromisso ontológico e ao holismo. Para entender o que está por trás do argumento de indispensabilidade, vamos repassar esses aspectos da filosofia quiniana.

O critério de compromisso ontológico é uma resposta ao problema do não-ser, especialmente afiada por Quine para cortar a grossa "barba de Platão", aquela que "historicamente provou-se obstinada tirando frequentemente o fio da navalha de Occam" (QUINE, 1963, p. 2). Quine usa essas bem-humoradas figuras para representar a dificuldade tradicionalmente imposta a quem está do lado negativo de uma discussão ontológica. Alguém que queira, por exemplo, sustentar que seres mitológicos da *Odisseia* são fantasias de Homero, deve tomar o cuidado de não cair no embaraço de dizer "há coisas que Homero diz existir, como a monstruosa Cila, que não existem" pois estaria em flagrante contradição: teria afirmado que existem coisas que não existem. Mas ainda que dissesse apenas "Cila não existe" para escapar da contradição, seu opositor poderia retrucar: "se Cila não existe, como está falando significativamente dela?" Por trás dessa exigência de que Cila exista de algum modo para que possamos falar sobre ela está a ideia de que nomes devem ter referência objetiva para que enunciados que os incluam sejam significativos. Essa ideia está no cerne do problema do não-ser.

Quine mostra que essa ideia é indevida. A chave, diz Quine seguindo Russell, é distinguir entre a forma gramatical e a forma lógica de um enunciado. Por exemplo, no enunciado "Cila é insaciável", "Cila" gramaticalmente é um nome. Na forma lógica desse enunciado, contudo, "Cila" não precisa — e não deve — ser encarada como um nome. Pois se traduzimos "Cila" por uma constante individual c e o enunciado inteiro por

$$Sc \tag{1}$$

em que S está no lugar de "é insaciável", caímos nas dificuldades de que tratamos acima. Na interpretação de uma linguagem lógica, constantes devem denotar um elemento existente no domínio, mas c não poderia denotar nada. Para eliminar o problema, Quine segue a doutrina das descrições definidas de Russell. Primeiro, o nome "Cila" pode ser trocado por uma descrição definida — "o monstro habitante do rochedo do lado oposto de Caríbdis no estreito de Messina", p.ex.. A descrição definida começa com o artigo definido "o", que subentende a *existência* e a *unicidade* do indivíduo caracterizado pela descrição. Esses dois aspectos implícitos devem, na forma lógica, ser explicitados. A forma lógica do nome gramatical "Cila", então, fica assim:

$$\exists x(Rx \wedge \forall y(Ry \to y = x)) \tag{2}$$

em que R está no lugar de "monstro habitante do rochedo do lado oposto de Caríbdis no estreito de Messina". A expressão $\forall y(Ry \to y = x)$ cumpre o papel de garantir a unicidade. O enunciado inteiro "Cila é insaciável" é reescrito em linguagem lógica deste modo:

$$\exists x(Rx \wedge \forall y(Ry \to y = x) \wedge Sx) \tag{3}$$

em que S, como acima, está no lugar de "é insaciável". O retorno dessa sentença à linguagem natural torna-se "Existe exatamente um monstro habitante do rochedo do lado oposto de Caríbdis no estreito de Messina, e este monstro é insaciável".

A vantagem da forma lógica (3) sobre a (1) é que, ao passo que seria desorientador pensar no significado de (1) no caso de c não denotar, a sentença (3) é simplesmente falsa. A sentença (3) é uma forma de apresentar enunciados de inexistência sem assumir compromissos existenciais. Usando o mesmo recurso, é trivial afirmar que Cila não existe sem cair em contradição: $\neg\exists x(Rx \wedge \forall y(Ry \to y = x))$. Uma limitação da abordagem de Russell é que, como ela diz respeito apenas a descrições definidas, o problema poderia continuar de pé para nomes que talvez não pudessem ser convertidos em descrições definidas. Mas para isso Quine dá uma solução: construir predicados sobre os próprios nomes. Assim, em vez de usar uma descrição definida usual para o nome Pégaso, podemos usar "a coisa que pegaseia"; para Cila, "a coisa que cilaseia", e assim com outros nomes. Com esses recursos, não precisamos mais pensar que nomes exigem denotação para que sejam significativos, de sorte que defensores do lado negativo de uma discussão ontológica podem falar tranquilamente sem se comprometerem com a existência exatamente daquilo que desejam negar[15].

Ao mesmo tempo em que a navalha de Quine oferece solução ao enigma platônico do não-ser, ela proporciona um critério claro para estabelecer com que entidades uma teoria está comprometida: "uma teoria está comprometida com aquelas e apenas com aquelas entidades a que as variáveis ligadas da teoria tem de ser capazes de se referir a fim de que as afirmações feitas na teoria sejam verdadeiras" (QUINE, 1963, p. 13-14); ou, de forma mais abreviada, "ser é ser o valor de uma variável" (Ibid., p. 15). Comprometemo-nos com a existência apenas daquelas entidades que afirmamos existir. O critério de compromisso ontológico de Quine, embora encerre dificuldades que não vamos tratar aqui, ajuda na discussão sobre o que há porque torna clara a distinção entre ontologias rivais e diminui o risco de mal-entendidos. No entanto,

[15] Nossa apresentação das descrições definidas segue Penco (2006, p. 70-74).

ele é apenas um critério de *comprometimento* ontológico, e não um *critério ontológico*, ou seja, ele não permite decidir entre ontologias rivais.

É certo que a matemática clássica está "envolvida até o pescoço por compromissos com uma ontologia de entidades abstratas" (Ibid., p. 13), e é certo também que, pelo critério de compromisso ontológico de Quine, se aceitarmos a matemática usual estaremos comprometidos com a existência daquelas entidades, isto é, seremos realistas em matemática. Mas porque devemos aceitar a matemática? Nos tempos de Platão, não havia dúvida de que devíamos aceitá-la. A matemática era vista como parte do estudo das Formas eternas e imutáveis, e portanto integrante da mais alta estirpe do conhecimento. Essas ideias, entretanto, não são mais satisfatórias para filósofos contemporâneos com inclinação científica (Cf. MADDY, 2011, p. 3). Conciliar a visão científica, que tem forte viés empirista, com a matemática tornou-se um problema importante na filosofia moderna e contemporânea. Se é apenas a experiência empírica que corrobora nossas teorias, como confiar na matemática, que aparentemente não está sujeita à confirmação empírica?

Quine é totalmente empirista nesse sentido. Para ele, "a estimulação dos receptores sensoriais constitui, em última análise, toda a evidência na qual cada um terá podido basear-se para chegar à sua imagem do mundo" (QUINE, 1969, p. 75). Com efeito, se existe alguma evidência a favor da matemática, ela deve ser encontrada na experiência sensível. Todavia, não é simples conceder, excetuando talvez para as partes mais básicas da aritmética dos números naturais, que proposições matemáticas, teoremas em geral bastante abstratos, possam encontrar alguma confirmação na estimulação sensorial. Quine então responde com seu *holismo*.

Primeiro de tudo, não se deve esperar encontrar evidência empírica para cada enunciado matemático isolado. De acordo com Quine (1969, p. 79), um enunciado, seja ele matemático ou científico, "não dispõe de nenhum cabedal de implicações ao nível da experiência que possa ser dito próprio a ele" e, portanto, não pode ser empiricamente comprovado de modo isolado. Somente "uma massa substancial de teoria, tomada em conjunto, terá comumente implicações no domínio da experiência" (Ibid.). Isso quer dizer que dispomos de evidência apenas para teorias, e não para enunciados individuais. Não podemos testar enunciados individuais porque, em geral, um enunciado é consequência de uma emaranhada teia de enunciados assumidos anteriormente e de raciocínios sobre eles. Assim, quando se realiza um experimento científico, não é apenas a hipótese mais proximamente considerada que está sendo testada. É a teoria inteira que está sendo posta à prova, englobando todas as sentenças que a integram e em particular aqueles enunciados que contribuíram mais diretamente na formulação daquela hipótese. Se o experimento trouxer um resultado negativo, toda a teoria ficará sob suspeita: "o insucesso mostra que um ou mais de um dos enunciados é falso, mas não mostra qual" (Ibid.).

Nesse quadro holístico, a matemática ganha evidência indireta. A evidência para a matemática advém do largo uso que as ciências empíricas fazem dela. Por exemplo, quando uma teoria física usa cálculos matemáticos para prever um fenômeno e aquela previsão se confirma em experimentos, o sucesso dos experimentos oferece evidência tanto para a teoria física quanto para a matemática empregada. Nesse sentido, a evidência para a matemática é também empírica. Sem abrir mão do empirismo, podemos confiar na matemática. É oportuno notar que talvez um empirista mais radical, ou um nominalista, não ficasse contente com a infinidade de entidades abstratas que a aceitação da matemática traz consigo, e arrazoasse que, muito embora a matemática seja de fato usada pela ciência, talvez pudéssemos fazer ciência sem empregar matemática[16]. Contudo, para Quine essa alternativa não existe. Ele assume que o uso da matemática nas ciências é indispensável. Mais do que poder confiar na matemática, *temos que* confiar na matemática.

Dado o naturalismo quiniano, que afirma que as ciências naturais fornecem a melhor teoria que temos sobre o mundo; dado o papel indispensável que a matemática desempenha nas ciências; dado seu critério de compromisso ontológico, de acordo com o qual estamos comprometidos com aquelas entidades que afirmamos existir; e dado que a matemática afirma a existência de infinitas entidades abstratas, temos como conclusão que aceitar a existência dessas entidades é imprescindível para nossa compreensão do mundo. Este é o argumento de indispensabilidade a favor do realismo em matemática. Não podemos evitar a matemática e todas as entidades abstratas que ela afirma existir, simplesmente porque a matemática é indispensável para a nossa atual melhor compreensão do mundo. Assim, mesmo admiradores de uma ontologia enxuta, mesmo aqueles que têm uma queda por paisagens desertas, como o próprio Quine (1963, p. 4), precisam se render ao populoso universo matemático.

Antes de passarmos às objeções de Maddy ao argumento de indispensabilidade, resta examinar um tópico importante do holismo. Para

[16]Hartry Field tenta mostrar que isso é possível. Maddy (1990, p. 159 e seguintes) apresenta e discute a estratégia de Field.

Quine, todo tipo de conhecimento se apoia no mesmo tipo de evidência. Ele não distingue a evidência que nos faz acreditar na ciência da evidência que nos faz acreditar na matemática. À vista disso, não é somente a matemática que é justificada apenas por evidência indireta; mesmo teorias científicas, como as teorias da física, também só dispõem de evidência indireta. Este é um traço marcante do holismo quiniano, central para dispensar a distinção, tão cara a Carnap, entre enunciados analíticos e sintéticos. De acordo com Carnap, as proposições matemáticas são *analíticas*, isto é, verdadeiras em virtude de características da própria linguagem, e por isso o conhecimento matemático teria o caráter de ser *a priori*, isto é, independente da experiência sensível. As proposições das ciências, por sua vez, são para Carnap *sintéticas*, isto é, verdadeiras em virtude de características do mundo, e portanto o conhecimento científico seria *a posteriori*. Quine nega que haja uma bem demarcada diferença epistemológica entre a matemática e as ciências empíricas tal qual faz crer a distinção carnapiana, e de fato dispensa essa distinção porque afirma ser possível dar conta das verdades presumidamente *a priori* sem evocá-la (Cf. HYLTON, 2007, p. 75).

De acordo com o holismo, só temos justificação para aceitar um enunciado, seja ele matemático ou científico, se ele for integrante de uma teoria que, tomada como um todo, permita-nos compreender o mundo da melhor maneira possível, isto é, permita-nos tratar os estímulos que recebemos pela experiência sensível de maneira superior a que qualquer outra teoria disponível possibilitaria. A matemática, e também a lógica, não são totalmente autossuficientes, autônomas, independentes do resto do nosso conhecimento. Elas são, pelo contrário, integradas com nosso conhecimento como um todo, e as razões que nos levam a acreditar nelas, como já dissemos acima, advêm dos papéis que desempenham dentro do nosso amplo sistema de crenças. Mas, ressalta Quine, são também razões como essas que nos fazem acreditar em muito do conhecimento supostamente sintético das ciências empíricas. Quine sustenta que nem todo conhecimento científico é diretamente baseado em observação no mesmo sentido que uma sentença como “há uma mesa à minha frente” pode ser diretamente baseada (Cf. HYLTON, 2007, p. 74-77). Para a maior parte do conhecimento científico, esse tipo de observação direta não está disponível. Teorias científicas são aceitas por evidências tão indiretas quanto aquelas que sustentam a matemática e a lógica:

> Matemática e lógica são baseadas em observação somente daquele modo indireto pelo qual aspectos das ciências naturais são baseados em observação; a saber, como participantes de um todo organizado que, formado a partir de suas bordas empíricas, harmoniza-se com a observação. Preocupa-me instar o caráter empírico da lógica e da

> matemática não mais que o caráter não empírico da física teórica; é sim em seu parentesco que estou insistindo, e numa doutrina de gradualismo (QUINE, 1994, p. 100).

A teoria molecular é um exemplo de teoria científica que, para Quine, só dispõe de evidência indireta. De acordo com a física, uma mesa, que na aparência é sólida, é na verdade "um enxame de moléculas vibrantes", diz Quine (1966a, p. 233). Ele então compara a mesa a um monte de palha que, visto de longe, parece sólido. No entanto, se nos aproximamos do monte de palha, podemos distinguir as palhas individuais. "Por outro lado, não podemos ter nenhum vislumbre das moléculas distintas da mesa; elas são, nos dizem, muito pequenas" (Ibid.). A questão é que a evidência que nos faz acreditar que um monte de palha é formado por inúmeras palhas individuais não é da mesma natureza que a evidência que faz os físicos acreditarem na teoria molecular, segundo Quine. Na falta da experiência direta presente no primeiro caso, defende Quine que as evidências indiretas a favor da teoria molecular se manifestam na forma de benefícios teóricos. Quine classifica esses benefícios em cinco categorias:

> Uma é simplicidade: leis empíricas concernentes a fenômenos aparentemente dissimilares são integradas em uma teoria compacta e unitária. Outra é familiaridade de princípio: as leis já familiares de movimento são postas a servir onde, de outro modo, leis independentes teriam sido necessárias. Uma terceira é escopo: a teoria unitária resultante implica uma gama de consequências testáveis maior que qualquer acumulação semelhante de leis distintas poderia ter implicado. Uma quarta é fecundidade: novas extensões bem sucedidas da teoria são estimuladas. A quinto é preciso dizer: tais consequências testáveis da teoria, quando testadas, resultaram bem, afora umas exceções esparsas que podem, com a consciência tranquila, ser contabilizadas como interferências inexplicadas (QUINE, 1966a, p. 234).

São estes mesmos benefícios teóricos — simplicidade, familiaridade, escopo, fecundidade e sucesso nos testes —, os quais se traduzem também em conveniência e elegância, que sustentam nossas crenças em geral, e nossas crenças na matemática em particular. Para Quine, esse tipo de evidência é simplesmente tudo o que a evidência é (Cf. MADDY, 1997, p. 156). Considerando o papel das convenções na teoria dos conjuntos — ideias postuladas com o único fim de proporcionar benefícios teóricos —, em que Carnap vira um meio de distinguir entre matemática e ciências naturais — apenas a matemática seria verdadeira por convenção —, Quine comenta:

> O que parecia cheirar a convenção na teoria dos conjuntos (...) era a "escolha deliberada, proposta sem a companhia de qualquer tentativa de justificação outra que não em termos de elegância e conveniência"; e a quais hipóteses teóricas de ciência natural o mesmo caráter não

> poderia ser atribuído? Pois certamente a justificação de qualquer hipótese teórica pode, enquanto hipótese, consistir em não mais que na elegância ou conveniência que a hipótese traz para o corpo de leis e dados a que pertence (QUINE, 1966b, p. 114).

O emprego de convenções não serve como critério de demarcação entre teoria dos conjuntos (e por conseguinte, matemática) e ciências naturais, alega Quine contra Carnap, porque tanto numa quanto noutra convenções cumprem funções semelhantes; hipóteses das ciências naturais também são postuladas, de acordo com Quine, visando somente a realização daqueles cinco benefícios teóricos. Toda evidência que há é empírica; mas evidência empírica, para Quine, é composta por uma combinação de virtudes teóricas.

Com relação à lógica e à matemática, Quine precisa se pronunciar sobre algumas dificuldades concernentes a sua posição holista. Primeiro, é um fato que tendemos a ver a lógica e a matemática como imunes à falsificação. Pensá-las como analíticas foi uma estratégia tradicional para dar conta desse fato. Carnap, como já mencionamos, advogava a tese de que sentenças matemáticas não podem ser empiricamente falsificadas porque a verdade delas seria demonstrável recorrendo-se apenas a fatos linguísticos, em que não entram considerações sobre o mundo (Cf. HYLTON, 2007, p. 61). Mas, ao rejeitar a distinção entre analítico e sintético, *a priori* e a *posteriori*, e asseverar que evidências a favor da matemática e das ciências naturais são do mesmo tipo, Quine abre a possibilidade de falsificação empírica da lógica e da matemática, visto que elas passam a depender de características do mundo.

No entanto, responde Quine, não estamos inclinados a falsificar a lógica e a matemática — preferindo sempre alterar outras asserções de nossas teorias, quando algo falha — devido à larga aplicação que fazemos dessas disciplinas. Usamos lógica em todos os ramos do conhecimento, e pelo menos as partes mais elementares da matemática são usadas com quase a mesma extensão. Daí que qualquer alteração na lógica ou nas partes básicas da matemática acarretaria uma mudança tão extensa em todo o nosso sistema de conhecimento, com implicações tão gerais e pulverizadas, que equivaleria a destruir nossas teorias e começar de novo. Dificilmente uma mudança de tal sorte poderia ter benefícios teóricos (vale dizer, evidência) que compensassem uma reconfiguração tão grande do nosso sistema de conhecimento. Quine fala de uma “máxima de mutilação mínima”, que recomenda, diante da falha de uma teoria, modificá-la o mínimo possível de forma a reconciliá-la com a experiência. Com respeito à lógica, Hylton (2007, p. 78) traduz tal máxima assim: “sempre tente descrever e explicar qualquer situação de um modo que não viole as leis da lógica”. Discutindo a proposta de Birkhoff e von Neumann de uma lógica alternativa, motivada por resultados da física quântica, Quine explica:

> Quaisquer que sejam os méritos técnicos do caso, poderia citar de novo a máxima da mutilação mínima como uma consideração dissuasiva. Eu de fato localizo as afirmações da física um tanto acima das de teoria dos conjuntos, porque vejo a justificação da matemática somente na medida em que ela contribui para a nossa ciência integral da natureza. É uma questão de afastamento dos dados de observação; a física está menos afastada que a teoria dos conjuntos. De todo modo não subestimemos o preço de uma lógica alternativa. Há uma séria perda de simplicidade, especialmente quando a nova lógica não é nem mesmo uma lógica veritativa-funcional polivalente. E há uma perda, ainda mais séria, no que conta como familiaridade. (...) Isso só começa a ilustrar o obstáculo de ter que pensar a partir de uma lógica alternativa. O preço talvez não seja totalmente proibitivo, mas que os retornos sejam bons (QUINE, 1994, p. 86).

Outra dificuldade sobre a qual Quine precisa se pronunciar diz respeito à matemática pura. Dentro do holismo, o *status* de conhecimento da matemática está garantido para aquelas partes que encontram aplicação nas ciências empíricas, mas o que dizer da matemática pura, que não tem aplicação científica? Mais: se é o emprego da matemática nas ciências empíricas que garante significatividade àquelas partes da matemática, então a matemática pura seria desprovida de significado? Hylton (2007, p. 79) diz que essa "é uma questão que Quine toma com seriedade" e explica que, para Quine, o ponto é que matemática aplicada e matemática pura não são nitidamente separáveis. Embora a matemática pura exceda enormemente as necessidades matemáticas da ciência, Quine a vê, em parte, como uma continuidade da matemática aplicada:

> Eu vejo esses excessos como uma simples questão de ampliação. Temos um exemplo modesto desse processo já nos números irracionais: nenhuma medida poderia ser suficientemente precisa para ser acomodada por um número [ir]racional, mas admitimos os extras para simplificar computações e generalizações. Alta teoria dos conjuntos é mais do mesmo (QUINE, 1986, p. 400).

Porém, nem toda a matemática pura goza de direitos ontológicos. Continua Quine:

> Eu reconheço infinitos não-enumeráveis somente porque eles são impostos a mim pelas sistematizações conhecidas mais simples de assuntos mais bem-vindos. Magnitudes para além de tais demandas, e.g., $\beth_\omega$ ou números inacessíveis, eu vejo apenas como recreação matemática e sem direitos ontológicos. Conjuntos que são compatíveis com 'V=L' no sentido da monografia de Gödel proporcionam um corte conveniente (Ibid.).

Apesar disso, a significatividade da matemática pura está garantida porque seu vocabulário é uma continuação do vocabulário da matemática aplicada. Falando dos "níveis mais altos da teoria dos conjuntos", Quine diz: "vemo-os como significativos porque eles são expressos no mesmo vocabulário e gramática da matemática aplicada, então não podemos simplesmente desprezá-los como sem sentido, a não ser impondo um recorte absurdamente estranho na nossa gramática" (QUINE, 1992, p. 94).

Isso finaliza nossa apresentação do argumento de indispensabilidade de Quine e das teses correlatas sobre o holismo e o critério de compromisso ontológico. Passamos a avaliar suas fragilidades. O argumento de indispensabilidade nos recomenda aceitar a existência real de entidades matemáticas. Sendo um argumento a favor do realismo em matemática, incumbe-nos apreciar como enfrenta os desafios ao realismo de que tratamos na seção anterior. O primeiro é o clássico problema de Benacerraf, o desafio de explicar a conexão entre os matemáticos e as entidades abstratas que os realistas afirmam existir. Sem essa explicação, argumenta Benacerraf, o realista estaria impondo às sentenças matemáticas condições de verdade impossíveis de cumprir, o que acabaria por impossibilitar o conhecimento matemático. O argumento de indispensabilidade nada diz sobre como matemáticos e entidades abstratas interagem; essa permanece uma questão em aberto, como comentamos acima. Entretanto, mesmo sem essa conexão, no realismo procedente do argumento de indispensabilidade o conhecimento matemático está justificado: é porque a matemática é tão largamente usada com sucesso nas ciências empíricas que podemos confiar nela. Isso torna um tanto menor, de um ponto de vista epistemológico, o problema de explicar a interação entre matemáticos e entidades abstratas, já que está garantido o caráter de conhecimento da matemática. Mas o segundo obstáculo ao realismo continua de pé: como explicar a ligação de verdade com teoremicidade? Ou, num sentido mais amplo, como explicar a ligação entre a justificativa holística do conhecimento matemático e as justificativas matemáticas desse mesmo conhecimento?

No panorama quiniano, o caráter de conhecimento de sentenças matemáticas está assegurado se: (a) elas são diretamente empregadas pelas ciências empíricas; ou se (b) elas fazem parte de um extensão de (a) que simplifica computações e generalizações. Mesmo se admitíssemos que todas as sentenças da matemática enquadram-se em uma das duas condições, ainda restaria um problema de ordem epistemológica. Há um descompasso entre as justificativas holísticas do conhecimento matemático e as justificativas de fato consideradas pelos matemáticos.

Provas a partir de axiomas e de outros teoremas são as justificativas usuais das afirmações matemáticas. Na falta destas, os matemáticos tecem considerações a respeito de plausibilidade e vantagens teóricas, mas ainda assim apoiados em razões matemáticas, como exemplificam as discussões a respeito dos axiomas da teoria dos conjuntos que vimos na seção 3.1. Quine não sugere que os matemáticos deixem de confiar em suas provas e considerações matemáticas, mas afirma que o conhecimento matemático está justificado não por aquelas provas e considerações, mas pela sua função na ciência. Hylton (2007, p. 79) nota a dificuldade a que isso leva: "geralmente não justificamos uma afirmação matemática apelando para sua aplicação (...) Como esses fatos combinam com a imagem de Quine da matemática justificada holisticamente, por seu papel indispensável na nossa teoria como um todo? Não há nenhuma resposta explícita a essa questão no trabalho de Quine".

É explorando esse descompasso entre o panorama quiniano e a prática matemática, sobre o qual Quine não se pronuncia, que Maddy encontra razões para rejeitar o holismo, o critério de compromisso ontológico e por conseguinte o argumento de indispensabilidade.

Uma primeira ruptura com o holismo surge da constatação de que cientistas não se satisfazem apenas com as cinco virtudes teóricas que Quine conta como evidência. Maddy (1997, p. 133-143) fundamenta essa tese examinando a história da teoria atômico-molecular, a mesma que Quine (1966a, p. 233) usa, nos trechos citados acima, para ilustrar as virtudes teóricas.

Modernamente, a teoria atômica começou com o trabalho do químico inglês John Dalton nas primeiras décadas do século XIX. Maddy (1997, p. 138) destaca que, depois de um século de desenvolvimento, por volta de 1900 "a teoria atômica desfrutava de todas as cinco virtudes teoréticas em abundância". Por exemplo, a teoria trazia simplicidade — diversas leis sobre o comportamento de gases e sobre combinações químicas haviam sido explicadas e integradas em termos de átomos e moléculas — e era imensamente fecunda — embora nascida na química, suas consequências logo espalharam-se pela física, p.ex. — para mencionar apenas duas virtudes. No entanto, contrapõe Maddy, "apesar das virtudes da teoria atômica, os cientistas não concordavam sobre a realidade dos átomos" (Ibid.). Maddy cita eminentes figuras da época, tais como o químico Ostwald e o matemático Poincaré, que reconheciam os benefícios da teoria atômica, mas ainda assim clamavam por uma comprovação mais direta da existência de átomos. De uma perspectiva quiniana, toda a evidência que poderia haver para a teoria atômica já estava presente, e o clamor por mais comprovação seria improcedente. Mas o fato, objeta Maddy, é que a comunidade científica não estava satisfeita:

> Claramente, esta avaliação da teoria atômica pela comunidade envolvia mais que as cinco virtudes teóricas (...) A comunidade, como um todo, reconhecia a necessidade de algo além das cinco virtudes, alguma coisa merecedora das frases 'verificação experimental' e 'teste direto' (Ibid., p. 138-139).

A carência de mais evidência era notada não só por opositores da teoria atômica. Mesmo simpatizantes, como Einstein e Perrin, que foram depois os principais responsáveis pela comprovação da hipótese atômica, reconheciam a necessidade de mais corroboração. Em suas *Notas Autobiográficas*, fazendo um panorama do estado da física nos anos em que estudava em Zurique, Einstein lembra que "a teoria atômica podia ser encarada mais como um símbolo visual do que como conhecimento sobre a composição real da matéria" (EINSTEIN, 1982, p. 28). Mais à frente nas mesmas *Notas*, comentando sobre suas pesquisas por volta de 1905, Einstein diz: "meu objetivo principal era encontrar fatos que assegurassem, da melhor forma possível, a existência de átomos de tamanhos finitos definidos" (Ibid., p. 50). Perrin, em sua clássica exposição da teoria atômica, publicada em 1913, em que reapresenta seus resultados experimentais que contribuíram para a comprovação da teoria, escreve: "a teoria atômica triunfou. Seus oponentes, que até recentemente eram numerosos, convenceram-se e abandonaram um depois do outro a posição cética que foi por um longo período legítima e sem dúvida útil" (PERRIN, 1916, p. 207-208).

O triunfo da teoria atômica veio no final da primeira década do século XX. Newburgh, Peidle e Rueckner (2006), que repetiram com finalidade pedagógica o experimento decisivo de Perrin, contam a história assim:

> Em 1905, muitos cientistas como Mach e Ostwald, partidários do positivismo filosófico, consideravam energia como a realidade física fundamental e concebiam átomos e moléculas como ficções matemáticas. Einstein fez uma análise estatística do movimento molecular e seus efeitos sobre partículas suspensas em um líquido. A partir desta análise, ele calculou a média quadrática de deslocamento [mean square displacement] dessas partículas. Em [um artigo de 1905] ele argumenta que a observação desse deslocamento permitiria uma determinação exata das dimensões atômicas. Ele também reconhecia que a falha em observar esse movimento seria um forte argumento contra a teoria cinético-molecular do calor.
>
> A confirmação experimental das predições sobre a relação entre a média quadrática de deslocamento e o número de Avogadro, bem como a explicação física do fenômeno do movimento browniano, levaram à

> aceitação da teoria atômica ou cinético-molecular. Como Sommerfeld destaca em sua contribuição para o 70º aniversário de Einstein, 'O antigo opositor do atomismo, Wilhelm Ostwald, disse-me uma vez que ele fora convertido ao atomismo pela explanação completa do movimento browniano'.
>
> Perrin, um experimentalista brilhante, acreditava firmemente na realidade molecular. Ele fez uma série de experimentos na primeira década do século XX, um dos quais dependia do cálculo da média quadrática de deslocamento de partículas suspensas feito por Einstein. Seus resultados confirmaram a relação de Einstein e assim a teoria cinético-molecular.

Entre 1908 e 1911, Perrin publicou uma sequência de trabalhos em que expunha os resultados experimentais que obtivera. Suas conclusões foram rapidamente aceitas. Além de Ostwald, outros opositores, como Poincaré, também convenceram-se sem demora (Cf. MADDY, 1997, p. 141-142).

A partir do caso da teoria molecular, Maddy conclui que o comportamento da comunidade científica não combina com a abordagem de Quine. Na prática, os cientistas não veem o amplo sucesso empírico de uma teoria como confirmando todas as suas partes. Em alguns casos, como na teoria atômica, uma hipótese central pode ser vista como não mais que uma ficção útil até que um teste específico seja realizado (Cf. MADDY, 1997, p. 142). Essa evidência adicional é requerida especialmente para afirmações existenciais. Contemporaneamente, os experimentos que vêm sendo conduzidos para provar a existência da partícula subatômica bóson de Higgs ilustram essa exigência. O bóson de Higgs é um componente vital do Modelo Padrão de partículas físicas, modelo este que desfruta em abundância de virtudes teóricas. Apesar de seu papel indispensável numa bem sucedida teoria, os cientistas continuam perseguindo uma confirmação direta de sua existência[17].

Na matemática a prática é bem outra. Maddy exemplifica a diferença evocando o comportamento dos matemáticos com respeito ao axioma da construtividade. Como já mencionamos, quando acrescentado a ZF, o axioma da construtividade permite decidir muitas questões independentes, dentre elas a hipótese do contínuo. Maddy (1997, p. 105) lembra que Quine, demonstrando coerência com sua crença na homogeneidade das evidências que amparam a matemática e as ciências naturais, revela simpatia pelo axioma da construtividade. Isso se manifesta na passagem que citamos antes (p. 114), e também aqui:

> Sentenças adicionais, tais como a hipótese do contínuo e o axioma

[17] Para informação rápida e acessível sobre o bóson de Higgs, visite o sítio do CERN: http://cms.web.cern.ch/news/about-higgs-boson

> da escolha, que são independentes daqueles axiomas [de ZF], podem ainda ser submetidas a considerações de simplicidade, economia e naturalidade que contribuem geralmente para moldar teorias científicas. Tais considerações favorecem o axioma da construtividade de Gödel, 'V=L'. Ele desativa os voos mais gratuitos de alta teoria dos conjuntos, e além disso implica o axioma da escolha e a hipótese do contínuo (QUINE, 1992, p. 94).

A opinião de Quine sobre o axioma da construtividade diverge da opinião corrente na comunidade de teóricos conjuntistas. O que é uma vantagem para Quine, é visto pela comunidade de matemáticos como uma restrição indevida da noção de conjunto. O próprio Gödel rejeita o axioma da construtividade por esse motivo (Cf. MADDY, 1997, p. 82-84). Apenas para exemplificar a opinião corrente: Moschovakis (1980, p. 610) afirma que "o argumento chave contra a aceitação de V=L (...) é que o axioma da construtividade parece restringir indevidamente a noção de conjunto arbitrário"; Hrbacek e Jech (1999, p. 277-278), depois de mencionarem várias consequências positivas do axioma da construtividade, ponderam que "por outro lado, parece não haver qualquer boa razão intuitiva para acreditar que todos os conjuntos são construtíveis; a facilidade com que o método de *forcing* (...) estabelece a possibilidade de existência de conjuntos não-construtíveis pode sugerir exatamente o oposto."

Ao passo que nas ciências naturais a economia ontológica é valorizada — aceita-se apenas a existência de entidades, se não imprescindíveis, perto disso, e ainda assim somente depois de haver evidência direta para tanto — na matemática, e em particular na teoria dos conjuntos, a atitude ontológica é mais liberal. Maddy (1997, p. 131) sumariza assim: "*grosso modo*, a cientista postula somente aquelas entidades sem as quais não pode dar conta de nossas observações, enquanto a teórica conjuntista postula tantas entidades quantas ela possa, sem inconsistência". Essa diferença vai de encontro à analogia entre ciências naturais e matemática, premissa básica do holismo quiniano. O caso do axioma da construtividade mostra que os matemáticos não estão dispostos a regular a ontologia da matemática pela sua aplicação científica e, mais ainda, mostra que o tipo de evidência que opera na matemática e permite a postulação de, *grosso modo*, tantas entidades quantas se possa, é muito diverso do tipo de evidência requerido pelas ciências naturais. Na matemática, virtudes teóricas (mas não exatamente aquelas cinco que Quine compila) têm potencial decisivo em questões existenciais independentes. Pode-se defender a existência de uma entidade com base apenas no argumento de que isso produz uma boa teoria. Nossa discussão na seção 3.1 procurou enfatizar justamente esse ponto. Nas ciências naturais, não importa quão boa seja a teoria ensejada pela entidade postulada, se a realidade não colaborar. A história da ciência está repleta de exemplos que mostram que, por mais desejável que fosse uma hipótese, por mais virtudes que ela trouxesse, os cientistas tiveram que ceder diante da evidência empírica[18]. Na seção 3.2, sublinhar a diferença de comportamento entre matemáticos e cientistas diante de virtudes teóricas nos ajudou a defender a ideia de que o realismo tem pouco efeito prático na matemática. Agora, essa mesma diferença mostra que não é adequado tratar uniformemente as evidências do conhecimento científico e matemático.

Não precisamos caracterizar com precisão a diferença entre evidência nas ciências naturais e evidência na matemática. Para nossos propósitos, é suficiente perceber que há diferenças importantes, principalmente no que tange a questões existenciais. Enquanto na matemática afirmações existenciais podem estar guiadas por um certo "princípio de maximização" (MADDY, 1997, p. 131)[19], nas ciências naturais afirmações existenciais seguem um certo princípio de economia e exigem comprovação em algum sentido direta. Isso é suficiente para lançar dúvidas sobre o holismo. Não é o caso que todo o corpo do conhecimento esteja justificado com base nos mesmos tipos de evidência. Isso também tem consequência direta para o argumento de indispensabilidade. Se o conhecimento matemático se vale de justificativas próprias, é mais difícil sustentar que o emprego da matemática nas ciências é argumento a favor da realidade das entidades matemáticas, simplesmente porque entidades matemáticas são postuladas independentemente de seu emprego na ciência, e com base em evidências muito diferentes daquelas que valem na ciência.

Mais dificuldades para o argumento de indispensabilidade provêm do critério de compromisso ontológico. Recuperemos o caso da teoria atômica. Antes dos experimentos de Perrin, os cientistas que se dedicavam ao desenvolvimento da teoria atômica, envolvidos em questões como o cálculo dos pesos atômicos, p. ex., estavam certamente

[18]Maddy (1997, p. 132) cita um exemplo. Einstein e Infeld (1938, p. 120-123) contam que, tentando compreender mecanicamente como a luz se propagava no éter, os cientistas esperavam, por razões de simplicidade teórica, que a luz fosse uma onda longitudinal. No entanto, vários experimentos mostravam que a luz se comportava como uma onda transversal. Eles expressam assim a frustração: "Isso é muito triste! Devemos estar preparados para dificuldades tremendas na tentativa de descrever o éter mecanicamente"(Ibid., p. 123). Maddy apresenta a moral da história: "quando tentamos descrever algo objetivo, o de que gostamos não é necessariamente o que é verdadeiro" (Ibid.)

[19]Tema desenvolvido no capítulo 5.

comprometidos com a existência de átomos, mas não do mesmo modo que estavam comprometidos com a existência de objetos físicos ordinários, como gases e utensílios de laboratório. A existência de átomos era vista como uma hipótese. Ainda que afirmassem "existem átomos", o "existe" dessa afirmação não valia o mesmo que o "existe" de uma afirmação como "existem gases". Essa diferença leva Maddy a sugerir que a afirmação "existem átomos" mencionada antes da confirmação da hipótese atômica guardava um caráter ficcional. "Talvez a noção de que todas as afirmações existenciais estejam em pé de igualdade — a 'univocidade do 'existe' ' como Quine a chama — seja imprecisa como um reflexo da função da linguagem científica", conclui Maddy (1997, p. 143). Ademais, a indispensabilidade dos átomos para a teoria atômica não era o bastante para selar a questão da existência de átomos. Maddy comenta:

> o caso dos átomos torna claro que a aparência de indispensabilidade de uma entidade em nossas melhores teorias científicas não é geralmente suficiente para convencer cientistas de que ela é real. Se ainda esperamos tirar conclusões sobre a existência de entidades matemáticas a partir da aplicação da matemática na ciência, devemos ser mais atentos aos detalhes de como a matemática aparece na ciência e como ela funciona lá (Ibid., p. 143).

Dadas essas ponderações, antes de concluir, do emprego indispensável da matemática, que objetos matemáticos existem, devemos atentar para o grau de comprometimento com a existência desses objetos que os cientistas demonstram e, sendo indispensável o uso da matemática, se os cientistas encaram isso como comprovação da realidade dos objetos matemáticos. Assim posto, o quadro não é animador para o argumento de indispensabilidade. "Se abrimos qualquer texto de física com essas questões em mente", diz Maddy (Ibid.), "a primeira coisa que notamos é que muitas aplicações de matemática ocorrem na companhia de suposições que sabemos ser literalmente falsas". Grande parte da aplicação científica da matemática ocorre em contextos idealizados. Por exemplo, para simplificar os cálculos, físicos consideram o oceano infinitamente profundo quando estudam as ondas em sua superfície, ou consideram plana a superfície da Terra quando calculam trajetórias. Idealização semelhante está presente quando cientistas usam funções contínuas para representar quantidades como energia, carga e momento angular, que sabem ser quantizadas. A aplicação da matemática em contextos idealizados, advoga Maddy, não pode ser evocada para justificar a existência real dos objetos matemáticos envolvidos. Mesmo que funções contínuas cumpram um papel indispensável na teoria quântica, parece inapropriado sustentar que o contínuo existe porque é aplicado em idealizações de situações que a própria teoria não vê como contínuas. “Em face disso,” avalia Maddy, “um argumento de indispensabilidade baseado em tal aplicação da matemática na ciência seria risível: deveríamos acreditar no infinito porque ele desempenha um papel indispensável na nossa melhor abordagem científica de ondas de água?” (Ibid.).

Um argumento de indispensabilidade responsável, requer Maddy, deve estar baseado em aplicações literais da matemática, e não em idealizações. O problema é que é difícil encontrar aplicações literais, exceto talvez para as partes mais básicas da matemática. Por exemplo, equações diferenciais são largamente empregadas nas ciências empíricas, nas mais variadas situações. Para que tais equações sejam literalmente aplicáveis, o fenômeno físico em questão deve ser realmente contínuo. Maddy avalia várias aplicações de equações diferenciais, e conclui que permanecem “sérias dúvidas sobre a existência de algum fenômeno físico que seja literalmente contínuo”(Ibid., p. 152). Talvez todas as aplicações da matemática dos números reais nas ciências naturais não sejam mais que idealizações. “Parece improvável que um argumento de indispensabilidade responsável (...) suporte a existência de mais que umas poucas (se tanto) entidades matemáticas”, arremata Maddy (Ibid., p. 153).

Tudo isso faz crer que os cientistas tratam as entidades matemáticas de maneira especial. Quando um cientista usa uma equação diferencial, ele não põe em questão a existência de números reais; ele sequer ventila a necessidade de confirmação da existência desses números. É outro o caso quando ele usa a teoria atômica; aí sim ele está preocupado com a existência real de átomos. Em suma, as pressuposições ontológicas que acompanham a matemática aplicada não são tratadas com o mesmo cuidado epistemológico que secunda hipóteses sobre a existência de entidades físicas. Cientistas, em geral, não se afligem com a ontologia da matemática que empregam:

> Como regra, físicos parecem tranquilos em usar qualquer matemática que seja conveniente e efetiva, sem preocupação com pressuposições de existência matemática envolvidas (...) e — ainda mais surpreendente — sem preocupação com requisitos sobre a estrutura física pressupostos por aquela matemática (Ibid., p. 155).

Maddy encontra em Feynman, Leighton e Sands (1963) um exemplo do descompromisso dos cientistas com as pressuposições da matemática que empregam. Feynman discute brevemente o conceito de tempo na física e recapitula como foi aumentando, ao longo da história, a precisão da medida do tempo na ciência, desde o suposto uso da própria pulsação por Galileu, até os osciladores eletrônicos e relógios atômicos. A cada inovação, foi possível medir um intervalo cada vez menor, atingindo a precisão de até 10^{-24} segundo. Feynman então indaga a seus estudantes:

> Que dizer de tempos ainda menores? Existe "tempo" em uma escala ainda menor? Faz algum sentido falar de tempos menores se não podemos medir — ou talvez nem mesmo pensar sensivelmente sobre — algo que acontece em um tempo mais curto? Talvez não. Essas são algumas das questões em aberto que vocês estarão perguntando-se e talvez respondendo nos próximos vinte ou trinta anos (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963, p. 5-3).

A determinação da estrutura do tempo é uma questão em aberto. Apesar disso, Feynman não tem ressalvas em representar matematicamente o tempo como contínuo. Algumas páginas à frente (Ibid., p. 8-2), Feynman usa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para representar o movimento de um corpo, em que o argumento da função simboliza tempos e o valor, posições. Maddy então nota que "o estranho é que essa representação final pressupõe que o tempo é infinitamente divisível — em termos matemáticos, que o tempo não é apenas denso, mas contínuo"(MADDY, 1997, p. 155). Essa representação vai de encontro à questão deixada em aberto anteriormente. Usar números reais para representar o tempo permite que se tomem intervalos tão pequenos quanto se queira, mas de fato não se sabe se a estrutura física do tempo comporta dividi-lo continuamente. Feynman não pode ser acusado de ignorar as questões filosóficas envolvidas:

> Vimos agora dois exemplos de movimento, adequadamente descritos com ideias muito simples, sem sutilezas. No entanto, *há* sutilezas — várias delas. Em primeiro lugar, o que queremos dizer por *tempo* e *espaço*? De fato essas profundas questões filosóficas devem ser analisadas com muito cuidado na física ...(FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1963, p. 8-2).

Mas entre as questões que devem ser analisadas com cuidado Feynman não conta a adequação de representar o tempo por números reais. Representar o movimento por uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ envolve tomar decisões sobre pressuposições físicas e matemáticas. Feynman se preocupa com as pressuposições físicas dessa representação. Ele menciona que há fatos da teoria da relatividade e da mecânica quântica que ele está negligenciando, mas não se preocupa com as pressuposições matemáticas sobre a estrutura do tempo. Segundo Maddy, a tranquilidade de Feynman é uma expressão do costume dos cientistas de usar a matemática que é mais conveniente para seus cálculos, sem se importar com as afirmações existenciais e com as pressuposições sobre a estrutura física que essa matemática requer. É como se, para os cientistas, a matemática fosse um "armazém bem abastecido de estruturas abstratas"(MADDY, 2011, p. 35). Eles valem-se dessas estruturas para representar fenômenos físicos, mas não assumem compromisso com a fidelidade completa da representação.

Essa aplicação mais ou menos descomprometida da matemática nas ciências tem implicações epistemológicas importantes. "Por exemplo", diz Maddy, "o sucesso de teorias que incluem a continuidade do tempo ou espaço-tempo (...) não é visto como confirmando que esses itens são de fato contínuos; essas questões são consideradas totalmente abertas"(MADDY, 2007, p. 317). Além disso, o sucesso de tais teorias também não é visto como confirmação da existência de números reais. Em geral, o bem sucedido e indispensável uso de certas estruturas matemáticas nas ciências naturais não é visto, nem por cientistas nem por matemáticos, como evidência de que os fenômenos representados por aquelas estruturas são de fato similares a elas, nem que tais estruturas existam.

Não é possível sustentar uma abordagem holística diante desses exemplos, nem um critério de compromisso ontológico que supõe a univocidade do 'existe'. Quando se trata da introdução de entidades físicas, os cientistas são renitentes. A questão da existência real da entidade é central. O papel que ela desempenha na teoria é visto como evidência a favor de sua existência, mas ainda assim é requerida uma comprovação direta, como vimos no caso dos átomos. Com as entidades matemáticas implicadas pela matemática que a ciência usa, não acontece nem uma coisa nem outra. Elas são introduzidas sem celeuma — ao menos entre os cientistas — e ninguém clama por comprovação de sua existência, nem pensa que seu papel na teoria tenha algo a ver com isso.

> Em síntese, pressuposições de existência matemática na ciência, e suas correlatas pressuposições sobre a estrutura da realidade física, não são tratadas em paridade epistêmica com pressuposições físicas ordinárias: seus padrões de introdução são mais fracos, e seus papéis em teorias bem sucedidas não têm força confirmatória; elas são de uma vez favorecidas e trivializadas. O problema é que esta dissimilitude enfraquece as bases do argumento quiniano original (MADDY, 1997, p. 156).

O argumento de indispensabilidade de Quine fica abalado quando confrontado com essas observações. De fato, a matemática desempenha um papel indispensável nas ciências naturais, que constituem as melhores teorias que temos sobre mundo. Com isso Maddy está de acordo. O problema é que esse papel indispensável não é tomado, nem por cientistas nem por matemáticos, como confirmação do conhecimento matemático, muito menos da existência de entidades matemáticas, como comprova o exame atento da prática científica e matemática. O critério de compromisso ontológico, na parte em que supõe que todas as afirmações existenciais devem ser tratadas homogeneamente, não é fiel como descrição da linguagem científica. Semelhantemente, o holismo, na medida em que trata homogeneamente a evidência de que dispomos para acreditar em átomos, em objetos físicos ordinários e também na matemática, não faz justiça ao modo como cientistas e matemáticos veem a evidência para esta última.

Antes de encerrarmos esta seção, um último ponto. A tese de Maddy contra o argumento de indispensabilidade se baseia no exame de casos concretos de prática científica e matemática, como vimos; mas talvez possamos desconfiar que se outros exemplos fossem selecionados, a conclusão poderia ser outra. Afinal, a matemática tem milênios de história, e a variedade de exemplos é imensa. De fato, casos concretos de prática matemática e científica de séculos passados podem ser trazidos à tona para contraporem-se aos exemplos selecionados por Maddy. Nos tempos de Galileu, Descartes e Newton, matemática e física estavam tão próximas que podiam ser consideradas uma ciência só. Talvez a abordagem quiniana se saísse melhor se nos circunscrevêssemos àqueles tempos. Mas isso não traria problemas para Maddy. Suas teses não pretendem abrangência universal. Ela não afirma que, em absoluto, a matemática segue seu rumo independentemente da física e de outras ciências empíricas. Maddy reconhece que mudanças históricas ocorrem, e no curso dessas mudanças, uma tese filosófica que era adequada em uma época, pode deixar de ser em outra (Cf. MADDY, 2011, p. 2). Ela pretende que suas teses valham para a matemática contemporânea. O que ela quer salientar é que, atualmente, a matemática segue seu próprio caminho, perseguindo metas que independem dos rumos das ciências empíricas. Essa constatação sobre o cenário contemporâneo faz Maddy rejeitar o intento quiniano de fundamentar o conhecimento matemático nas ciências naturais. Além disso, sua discordância de Quine não se resume apenas a uma disputa filosófica. Sua filosofia tem, por assim dizer, uma finalidade prática. Maddy pretende fazer uma filosofia da ciência e uma filosofia da matemática que contribuam para o debate científico e matemático. O pano de fundo de sua filosofia da matemática é a busca por meios objetivos de julgar axiomas que possivelmente venham a decidir questões independentes da teoria dos conjuntos, o que é uma meta mais matemática que filosófica. Da perspectiva maddyana, o problema com a abordagem de Quine é que, ao afastar-se da prática matemática, ela falha em fornecer tais meios. O argumento de indispensabilidade aponta em direção diversa daquela visada pelos matemáticos, como se expressa na preferência de Quine por V=L, oposta à opinião predominante entre matemáticos. A reação de Maddy à falha da abordagem quiniana é concentrar-se na prática matemática contemporânea. Ela então emprega seu arsenal de análise e crítica filosóficas para tentar encontrar, dentro da própria matemática, parâmetros objetivos para avaliar candidatos a axiomas de teoria dos conjuntos. Com essa finalidade prática em vista, faz todo sentido a atenção que Maddy dispensa à prática matemática atual, e à formulação de teses filosóficas que priorizam questões contemporâneas ainda que não reflitam circunstâncias do passado.

No naturalismo de Quine, era chave a subordinação da matemática às ciências naturais. Como vimos, Maddy rejeita tal subordinação, mas ainda assim se denomina naturalista. O ponto é que Maddy enfatiza outra característica do naturalismo quiniano. Entender o naturalismo de Maddy, o tema inicial do nosso próximo capítulo, ajuda a compreender o palco em que se desenrola sua filosofia da matemática.

4 A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE MADDY

Nos capítulos anteriores, ocupamo-nos em confrontar certos aspectos da prática matemática com algumas posições difundidas na filosofia da matemática. Seguimos as análises de Maddy e, de maneira geral, concluímos que aquelas posições não se coadunam com práticas que vêm tomando força na matemática pelo menos desde o final do século XIX, e que são dominantes na matemática contemporânea. Primeiro, vimos no capítulo 2 que a teoria dos conjuntos, contrariando expectativas filosóficas, integra os fundamentos da matemática principalmente por razões estritamente técnicas, que trazem vantagens matemáticas, mas não realizam anseios fundacionalistas tradicionais. O capítulo 3 procurou mostrar que, na prática, disputas matemáticas resolvem-se com argumentos matemáticos, sustentados em metas matemáticas, e não em alguma filosofia subjacente. Finalizamos o capítulo 3 vendo como Maddy entende que o argumento de indispensabilidade de Quine, seu holismo e seu critério de compromisso ontológico são incompatíveis com práticas científicas e matemáticas atuais.

As discussões dos capítulos anteriores nos deixam a um passo de concluir que a matemática é um campo de conhecimento autônomo, independente das ciências naturais e das variadas filosofias da matemática. Não alcançamos essa conclusão imediatamente porque falta analisar um ponto importante. Verificar o distanciamento entre a prática matemática e as filosofias da matemática tradicionais não basta para concluir que a matemática seja *de direito* autônoma. Pode ser que a prática simplesmente não mais corresponda ao que deveria ser, de acordo com o entendimento filosófico. Os matemáticos podem estar conduzindo suas investigações para o rumo errado. O naturalismo em matemática de Maddy é o elemento que falta para arrematar o argumento, afastando essa possibilidade. Esse é o tema central deste capítulo. Finalizamos esboçando como Maddy dá conta do empreendimento matemático autônomo a partir de sua perspectiva naturalizada.

O distanciamento crescente entre a prática matemática e as posições filosóficas tradicionais coincide com o desenvolvimento da matemática pura a partir do século XIX. Maddy cita Morris Kline e outros historiadores da matemática que abordam a transformação que varreu a matemática nesse período. Durante a maior parte da história da matemática, afirma Kline (1972, p. 1028), predominou a visão

> ... [d]os gregos, [de] Descartes, Newton, Euler e muitos outros [que] acreditavam que a matemática era a descrição precisa de fenômenos reais (...) eles viam seu trabalho como o descobrimento do desenho

> matemático do universo. A matemática de fato lidava com abstrações, mas essas eram não mais que as formas ideais dos objetos físicos ou acontecimentos. Mesmo conceitos como funções e derivadas eram demandados por fenômenos reais e serviam para descrevê-los.

Mas os laços estreitos entre a matemática e o mundo natural passaram a se afrouxar, conta Kline (1972, p. 1029), quando "gradualmente e inadvertidamente os matemáticos começaram a introduzir conceitos que tinham pouco ou nenhum significado físico direto"[1]. O surgimento dos números negativos e complexos são passos iniciais nessa direção, mas foi o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e das geometrias com espaços com mais de três dimensões que consolidou a transformação. "A matemática estava progredindo para além de conceitos sugeridos pela experiência", continua Kline, e os matemáticos vinham se dando conta de que

> [a matemática] não era mais, se alguma vez havia sido, uma leitura da natureza. (...) por volta de 1850, a visão de que a matemática pode introduzir e lidar com conceitos talvez arbitrários e teorias que não têm interpretação física imediata mas que podem, contudo, ser úteis (...) ganhou aceitação (Ibid., p. 1030-1031).

Cantor (apud Kline (1972, p. 1031)) expressa nitidamente a nova visão: "a matemática é inteiramente livre em seu desenvolvimento (...) A essência da matemática radica em sua liberdade". Depois de citar essa mesma passagem de Cantor, Maddy (2011, p. 7) arremata: "este sentimento aparece no pensamento de muitos dos matemáticos mais inovadores do final do século XIX; hoje, esta é a ortodoxia padrão. A matemática progride por suas próprias luzes, independentemente de laços com o mundo físico". E, podemos acrescentar, independentemente das filosofias que tentam dar conta do conhecimento matemático, ditar seus objetivos e diretrizes.

Embora seja essa a ortodoxia da prática matemática, não é obrigatório, em princípio, que a filosofia da matemática seja pautada por tal ortodoxia. Como os intuicionistas liderados por Brouwer que se rebelaram contra a então nascente ortodoxia no início do século XX, quinianos convencidos sobre a subordinação da matemática às ciências naturais podem fazer o mesmo. Eles podem avaliar a transformação em direção à matemática pura como um desvio de rota indevido, e sugerir que os matemáticos voltem a trilhar o caminho correto, reorientando seus métodos à luz da compreensão filosófica quiniana dos propósitos da matemática, isto é, aproximando-a novamente do mundo natural. É oportuno salientar, contudo, que uma postura filosófica que enxergue

[1]O fato de um conceito matemático não ter significado físico direto, como diz Kline, não impede, é claro, que ele possa ter aplicação na física.

necessidade de reforma está julgando mal sucedida, em algum grau, a matemática praticada atualmente. Maddy não considera mal sucedida a matemática atual, pelo contrário. Inspirada na posição de Quine com respeito às ciências naturais, Maddy opõe-se a posturas reformistas sobre a matemática.

Adeptos do naturalismo de Quine resistiriam a recomendar reformas às ciências empíricas. Porém, como vimos na seção 3.3, o argumento de indispensabilidade distancia-se não só da prática matemática, mas também da prática científica. O caso da teoria atômica mostra que cientistas não se convenceram da existência de átomos enquanto não havia uma 'prova direta' disso, mesmo sendo os átomos indispensáveis para a melhor teoria vigente[2]. Diante do descompasso entre a análise filosófica e a prática científica, seria contrário ao naturalismo de Quine afirmar que os cientistas exageraram ao requerer um teste direto da existência de átomos, que deveriam ter se contentado com a evidência teórica já disponível. O naturalismo prega que não cabe à filosofia criticar, por razões puramente filosóficas, extra-científicas, métodos bem sucedidos das ciências. "O naturalismo de Quine, como eu o entendo", diz Maddy (1997, p. 182), "toma os métodos científicos reais como fundamentais". Se a imagem dos métodos científicos captada pelo argumento de indispensabilidade difere dos métodos reais, então isso "significa simplesmente que há uma tensão entre os argumentos de indispensabilidade quinianos e o naturalismo quiniano", conclui Maddy (Ibid.). Não é difícil imaginar que, para um quiniano sensibilizado pelo exemplo da teoria atômica, seria razoável abandonar ou modificar o argumento de indispensabilidade para preservar o naturalismo.

Pelo lado da matemática, contudo, a postura quiniana poderia ser bem diferente. Assim como ocorre nas ciências naturais, aplicado à matemática o argumento de indispensabilidade leva Quine a conclusões contrárias às predominantes entre matemáticos, como sua simpatia pelo axioma da construtividade (Cf. QUINE, 1992, p. 94) e sua classificação de certos objetos de altos estratos do universo conjuntista como "recreação matemática sem direitos ontológicos" (Cf. QUINE, 1986, p. 400). Mas, diferentemente do que faz em relação às ciências empíricas, o naturalismo de Quine não reconhece os métodos próprios da matemática. De seu ponto de vista holista, a matemática e as ciências empíricas compartilham, por assim dizer, dos mesmos métodos, aqueles que Quine identifica primordialmente como os métodos das ciências naturais. Esses métodos estão livres de um tribunal extra-científico, mas os métodos próprios da matemática, na medida em que se afastam dos métodos das ciências naturais, podem ser julgados em um tribunal ci-

[2]Como visto à pagina 116.

entífico. É nesse ponto que Maddy discorda mais veementemente de Quine.

> Julgar os métodos matemáticos a partir de um ponto de vista externo à matemática, digamos a partir de um ponto de vista da física, parece-me ir de encontro ao espírito fundamental que subjaz a todo naturalismo: a convicção de que um empreendimento bem sucedido, seja ele ciência ou matemática, deve ser entendido e avaliado em seus próprios termos, que um tal empreendimento não deve estar sujeito à crítica nem precisa de justificação vinda de um ponto de vista externo, supostamente superior (MADDY, 1997, p. 184).

Para Maddy, a matemática atual, como um todo, é um empreendimento bem sucedido. Quine talvez visse uma parte da matemática atual como desviada do bom caminho. Maddy, contudo, pensa que mesmo os objetos presentes nos altos estratos do universo conjuntista, ainda que sem qualquer perspectiva de aplicação nas ciências naturais, são objetos matemáticos tão legítimos quanto aqueles empregados nas ciências. "O que eu proponho aqui", continua Maddy (Ibid.),

> é um naturalismo em matemática que concede o mesmo respeito às práticas matemáticas que Quine concede às práticas científicas. São, afinal de contas, esses métodos — os métodos reais da matemática — não os substitutos quinianos, que têm levado ao notável sucesso da matemática moderna. Onde Quine afirma que a ciência "não responde a qualquer tribunal supra-científico, e não necessita de qualquer justificação para além de observação e do método hipotético-dedutivo" (QUINE, 1981b, p. 72), o naturalista em matemática acrescenta que a matemática não responde a qualquer tribunal extra-matemático e não necessita de qualquer justificação para além de provas e do método axiomático. Onde Quine considera a ciência independente de filosofia primeira, meu naturalista considera a matemática independente tanto de filosofia primeira quanto das ciências naturais (...) — em suma, independente de qualquer padrão externo (MADDY, 1997, p. 184).

Para não trair o naturalismo quiniano naquilo que ela considera ser seu ponto mais importante — o respeito à autonomia de uma prática bem sucedida — Maddy rejeita a tese quiniana da subordinação da matemática às ciências naturais, e passa a tratá-las em pé de igualdade. Para Quine os métodos das ciências naturais não estão sujeitos a julgamento por um tribunal filosófico, o que significa que é a filosofia que deve curvar-se em caso de discordância entre métodos científicos bem sucedidos e prescrições filosóficas. Maddy estende esse tratamento aos métodos próprios da matemática. "Se nossa explicação da matemática entra em conflito com práticas matemáticas bem sucedidas, é a filosofia que deve ceder", diz Maddy (1997, p. 161). É da perspectiva da prática matemática real, vista como bem sucedida, que Maddy critica e rejeita o argumento de indispensabilidade de Quine, contrário aos usos da prática real. E é a partir dessa mesma perspectiva que Maddy constrói sua filosofia da matemática.

Ela se dedica à filosofia da matemática com uma meta clara: encontrar meios objetivos de avaliar candidatos a axioma de teoria dos conjuntos que possivelmente venham a decidir questões independentes dos axiomas atuais. Isso a diferencia das filosofias da matemática tradicionais em um ponto chave. Ao passo que nessas filosofias as questões centrais são tipicamente filosóficas — perguntam-se sobre a natureza das entidades matemáticas ou sobre a possibilidade de conhecimento matemático, por exemplo — o alvo de Maddy é, em primeiro lugar, matemático. A busca por novos axiomas para a teoria dos conjuntos é um tema de investigação matemática importante para os teóricos conjuntistas enquanto tais, diferentemente de reflexões sobre a realidade das entidades matemáticas ou sobre a possibilidade de conhecimento matemático, que até podem interessar aos matemáticos, mas apenas quando eles transitam da matemática para a filosofia da matemática. Mirando seu alvo pragmático, Maddy busca desenvolver sua filosofia da matemática partindo "de dentro" da própria matemática, continuamente com a matemática, evitando adotar uma perspectiva externa (Cf. MADDY, 1997, p. 188 e seguintes). Os problemas filosóficos que interessam primordialmente a Maddy são aqueles engendrados pelo próprio empreendimento matemático. No curso de suas investigações, os matemáticos elaboraram a teoria dos conjuntos para, dentre outras razões, servir de arcabouço para a matemática usual, e então descobriram importantes questões matemáticas independentes dela. Diante dessas questões, os próprios matemáticos passaram a refletir sobre sua teoria, sobre a importância, a possibilidade e os meios de decidir ou não as questões independentes, sobre possíveis novos axiomas. Essa reflexão sobre a matemática motivada por razões genuinamente matemáticas é o tipo de filosofia que Maddy considera legítima e proveitosa para a matemática.

Maddy vê do mesmo modo a relação entre filosofia da ciência e as ciências em geral. É por isso que ela chama sua abordagem naturalista de *filosofia segunda*. Opostamente a uma filosofia primeira, que quer antes de tudo avaliar as condições de possibilidade do conhecimento científico, estipular normas metodológicas, e só depois fazer ciência, Maddy propõe começar fazendo ciência. Depois, diante dos percalços que a própria investigação científica encontra, entra secundariamente a reflexão filosófica, a colaborar com a ciência, em um esforço só, visando a superação daqueles dificuldades. A filosofia segue-se à ciência.

4.1 MAXIMIZAÇÃO E UNIFICAÇÃO

Passemos, pois, a tratar da questão central na filosofia de Maddy: como avaliar candidatos a axioma em teoria dos conjuntos? Os capítulos anteriores fornecem pistas claras. Um possível novo axioma deve trazer vantagens matemáticas manifestas, e não deve ter desvantagens sérias. A intuitividade e plausibilidade do candidato — aspectos intrínsecos — também têm certa importância, mas decisivos mesmo são os argumentos sobre as vantagens matemáticas, os argumentos extrínsecos. Considerações filosóficas, do tipo afeto à filosofia primeira, e considerações sobre aplicabilidade nas ciências empíricas são irrelevantes. Não apenas os candidatos a novos axiomas, como também a própria extensão da atual teoria padrão em direção a uma nova teoria padrão, têm que se provar mais vantajosos que outras opções[3].

Mas quais são os parâmetros de avaliação das vantagens de cada opção? Por certo, o que é encarado como vantagem depende do objetivo que se tem em mente. Trata-se de uma avaliação dos meios mais adequados aos fins propostos. Assim, para avaliar um candidato a axioma, é importante ter clareza sobre as finalidades da teoria dos conjuntos. Um axioma será vantajoso se for adequado para a realização daquelas finalidades.

Como pode mostrar a prática dos teóricos conjuntistas, são vários os propósitos que levaram os matemáticos a desenvolver a teoria dos conjuntos. Para ficar apenas entre alguns de seus fundadores: Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos partindo de suas pesquisas sobre a representação de funções por séries trigonométricas; Dedekind introduziu conjuntos em seu estudo sobre os números reais; e Zermelo dedicou-se a axiomatizar a teoria dos conjuntos empenhado, principalmente, em acalmar as controvérsias sobre sua prova do teorema da boa-ordenação a partir do axioma da escolha (Cf. MADDY, 2011, p. 41-47). Porém, mais do que apenas investigar problemas locais, muitos matemáticos, incluídos os mencionados antes, dedicaram-se à teoria dos conjuntos guiados pelo propósito mais abrangente de prover fundamentos para a matemática usual. Como vimos no capítulo 2, constituir-se numa arena comum onde disputas matemáticas podem ser decididas ou declaradas indecidíveis é, segundo Maddy, uma meta central da teoria dos conjuntos. Para avaliar as vantagens dos candidatos a axiomas e os rumos

[3] Entre as outras opções estariam a concentração na investigação dos diversos modelos de ZFC, sem pretensão de estender a teoria, ou ainda a multiplicação de várias teorias de conjuntos concorrentes, nenhuma delas vista como padrão, respondendo divergentemente às questões independentes.

que a teoria pode tomar diante das questões independentes, Maddy se concentra na meta fundacional da teoria dos conjuntos.

"Uma consequência metodológica de adotar a meta fundacional é imediata", diz Maddy (1997, p. 208-209): "se seu objetivo é fornecer um sistema único em que todos os objetos e estruturas da matemática possam ser modelados ou instanciados, então você deve visar uma teoria única, fundamental, de conjuntos". Em um cenário hipotético em que várias teorias diferentes e divergentes concorressem de igual para igual na reconstrução da matemática usual, não seria possível falar em uma "arena comum". É o relativo consenso em torno de ZFC como *teoria padrão* que assegura a existência de fundamentos para a matemática no sentido técnico que discutimos no capítulo 2. Se os matemáticos pretendem que a teoria dos conjuntos permaneça desempenhando seu papel nos fundamentos da matemática, se essa ainda é uma meta central, ao considerar as questões independentes os matemáticos devem levar em conta a necessidade de *unificação* em torno de uma teoria padrão. Maddy acredita que os peritos em teoria dos conjuntos estão empenhados nessa direção:

> se os teóricos conjuntistas não estivessem motivados por uma máxima deste tipo [unificadora], não haveria pressão para decidir CH, para decidir as questões de teoria descritiva dos conjuntos, ou para escolher entre candidatos alternativos a novo axioma; seria suficiente considerar uma multiplicidade de teorias de conjuntos alternativas (Ibid., p. 209).

Buscar a unidade da teoria é um meio efetivo de promover sua meta fundacional, mas não é o único. Além da *unificação*, a meta fundacional ainda engendra outro compromisso metodológico importante, a *maximização*. Vimos no início deste capítulo que, ao longo do século XIX, a investigação matemática foi se distanciando cada vez mais da aplicação, das ciências empíricas, e aproximando-se da matemática pura. "Como um resultado desse desenvolvimento", atesta Maddy (1997, p. 210), "a matemática pura contemporânea é feita sob a pressuposição de que os matemáticos podem ser livres para investigar todo e qualquer objeto, estrutura e teoria que capturem seus interesses matemáticos". Sendo assim, a arena comum constituída pela teoria dos conjuntos deve ser ampla o suficiente, generosa o bastante, para atender a liberdade criativa da matemática pura, propõe Maddy. Se a teoria dos conjuntos deve ser o fundamento de uma matemática que se desenvolve livremente, "então a teoria dos conjuntos não deve impor quaisquer limitações por si mesma (...); os axiomas conjuntistas a partir dos quais os teoremas matemáticos hão de ser provados devem ser tão poderosos e férteis quanto possível. Assim, a meta de fundamentar a matemática sem atravancá-la gera a recomendação metodológica de maximizar" (Ibid., p. 210-211). Além disso, a recomendação de maximizar serve também a outras metas da teoria dos conjuntos não relacionadas com seu papel fundacional: "afinal de contas, a própria teoria dos conjuntos, como um ramo da matemática, compartilha do encargo contemporâneo de perseguir o que quer que seja de interesse matemático" (Ibid., p. 211 n.6).

A maximização está associada à capacidade de uma teoria provar a existências de mais tipos de isomorfismo, quando comparada a outra. Fundamentar a matemática na teoria dos conjuntos passa por encontrar substitutos conjuntistas para as diversas estruturas matemáticas. Uma teoria que prova mais tipos de isomorfismo é maximizante porque permite representar estruturas mais variadas.

Sob o prisma fundacional, a reação às questões independentes deve se pautar por ambas as máximas de unificação e maximização. Um candidato a novo axioma será vantajoso, do ponto de vista fundacional, na medida em que promover as duas simultaneamente. Porém, há uma tensão entre elas:

> ante alternativas como $V = L$ e MC, o modo mais fácil de *maximizar* seria adotar ambas as teorias, para usar aquela que fosse mais útil em uma dada situação. Mas [o requisito por] *unificar* não aconselha esse curso. A argúcia de aplicar maximizar e unificar virá no esforço por satisfazer ambas as recomendações de uma vez (Ibid., p. 213)[4].

Apesar da tensão entre as duas máximas, no caso de V=L comparado a outros axiomas concorrentes, Maddy defende que é possível conciliá-las. Com alguns concorrentes de V=L obtêm-se teorias que provam a existência de todos os tipos de isomorfismo proporcionados por ZFC+V=L, além de muitos outros. Assim, essas teorias maximizam sobre ZFC+V=L ao mesmo tempo que mantêm a unificação. Face às diretrizes de maximização e unificação, V=L perde para seus concorrentes. É oportuno lembrar que o argumento de indispensabilidade de Quine favorece V=L, indo de encontro à opinião dos matemáticos em geral[5]. As noções de maximização e unificação, por outro lado, concebidas por Maddy a partir da generalização de aspectos da prática matemática real, parecem fazer justiça ao entendimento dos matemáticos sobre a questão.

Todavia, talvez nem sempre seja possível satisfazer ambas as máximas ao mesmo tempo. O caso da hipótese do contínuo ilustra a dificuldade.

> Nesse caso, pode acontecer que não seja possível maximizar e unificar simultaneamente. Pode acontecer, por exemplo, que ZFC possa ser

[4]MC é um axioma que afirma a existência de cardinais mensuráveis.
[5]Veja discussão na página 119.

> estendida de várias maneiras incompatíveis — cada uma com consequências diferentes para o tamanho do contínuo — e que nenhuma consideração matemática defensável permita-nos escolher entre elas. Se isso acontecer, a pressão por maximizar pode muito bem levar a comunidade a sacrificar [o requisito por] unificar, isto é, a abraçar uma variedade de teorias, todas com diferentes valores para o tamanho do contínuo (MADDY, 1997, p. 211-212).

A incerteza que os critérios de unificação e maximização deixam pairando sobre a hipótese do contínuo faz justiça à posição dos matemáticos sobre o tema. Apesar de perceber "pressão para decidir CH" (Ibid., p. 209), que ela liga a um impulso por unificação, Maddy (1997, p. 196) comenta que nada que ela "tenha visto na literatura recente ou ouvido de profissionais contemporâneos é particularmente encorajador. Não há consenso geral sobre CH — como há contra V=L (...) — e os métodos sobre os quais há consenso geral são todos inadequados para sua solução". Tendo se originado da generalização de práticas conjuntistas, os critérios de unificação e maximização são igualmente e inevitavelmente limitados para ajudar em alguma decisão sobre a hipótese do contínuo.

A exemplo do que acontece com CH, as máximas de unificação e maximização também podem ser insuficientes diante da questão mais geral sobre estender ZFC em direção a uma nova teoria padrão ou admitir uma série de teorias incompatíveis com respeito aos enunciados independentes. A unificação pede claramente pela preservação de uma teoria padrão, mas, parafraseando o que Maddy disse a respeito de CH, a pressão por maximizar pode muito bem levar a comunidade a sacrificar a unificação e a abraçar uma variedade de teorias, todas com diferentes respostas para os diversos enunciados independentes. No caso de V=L comparado a outros candidatos, esse caminho não traz ganho real em maximização. Mas em outros casos, pode haver maximização real.

4.2 OBJETIVIDADE MATEMÁTICA

Apesar de insuficientes para tratar de questões matemáticas importantes, as noções de maximização e unificação dão ensejo a um modo novo de abordar um problema filosófico chave: a explicação da *objetividade matemática*. Dentre as atividades consideradas cognitivas, a matemática é geralmente reconhecida como a mais objetiva. Isso reforça a expectativa de que a comunidade de peritos em teoria dos conjuntos há de alcançar um consenso sobre os enunciados independentes, ainda que as máximas de unificação e maximização sejam insuficientes para delinear os contornos desse consenso. Maddy toma a objetividade da matemática como um dado derivado diretamente da

> fenomenologia pura da prática, do que se sente ao fazer matemática. Qualquer coisa, desde resolver um problema de lição de casa até provar um novo teorema envolve o reconhecimento imediato de que esse não é um empreendimento em que qualquer coisa serve, em que podemos seguir livremente nossos caprichos pessoais ou coletivos; esse é, ao contrário, um empreendimento objetivo por excelência (MADDY, 2011, p. 114)

Explicar a origem da objetividade matemática é um dos problemas típicos das filosofias da matemática tradicionais. A filosofia de Maddy mira principalmente o debate matemático propriamente dito e, de início, concede pouca importância a problemas tipicamente filosóficos, como vimos acima. Apesar disso, seu esforço acabou rendendo frutos também no que concerne a indagações tradicionais da filosofia. Oferecer um tratamento inovador do fenômeno da objetividade matemática é um deles.

Uma parte da objetividade da matemática deriva, indubitavelmente, da sua natureza lógico-dedutiva. Porém, a objetividade presente na parte do trabalho matemático que vem nos ocupando desde os capítulos anteriores — justamente o estabelecimento dos axiomas fundamentais — não pode ser explicada pela dedução lógica. Uma pergunta intrigante é, pois, o que explica a objetividade na instituição dos axiomas fundamentais?

Os critérios de maximização e unificação respondem parcialmente a essa questão. Apesar de suas limitações, essas máximas apontam numa direção promissora. Elas dão lugar a uma "forma de objetividade matemática que não depende da existência de objetos matemáticos ou da verdade de enunciados matemáticos" (MADDY, 2011, p. 116). Em uma argumentação pautada pelas máximas de unificação e maximização, não entram em cena considerações sobre a ontologia da teoria dos conjuntos e sobre a 'verdade' dos candidatos a axioma. Por exemplo, o argumento de Maddy contra V=L se sustenta na comparação entre este axioma e outros candidatos no que diz respeito aos tipos de isomorfismo cuja existência eles provam, e para isso não é preciso especular sobre alguma realidade subjacente, sobre noções implícitas no conceito de conjunto ou ainda sobre a 'verdade' de V=L. Na medida em que essas máximas capturam as ponderações que realmente decidem uma disputa matemática, elas revelam aspectos objetivos da prática matemática em teoria dos conjuntos que nada têm a ver com ideias sobre ontologia e sobre 'verdade', e que não decorrem dos métodos dedutivos usuais. Comumente a objetividade matemática, no âmbito pré-axiomático, é atribuída à existência de uma realidade bem definida de entidades abstratas. Mas, como vimos no capítulo anterior, são tantas as divergências filosóficas sobre a natureza dessa realidade, sobre os meios de acessá-la e principalmente sobre sua existência, que se torna algo implausível querer apoiar a objetividade matemática em um terreno tão subjetivo e disputável quanto as ideias filosóficas sobre a ontologia da matemática. É preciso haver outros fatores que assegurem a objetividade no âmbito pré-axiomático. As máximas de unificação e maximização exemplificam tipos gerais de considerações independentes de ontologia, e independentes também das discussões sobre ontologia, que pautam os debates matemáticos.

Embora as máximas de unificação e maximização sejam, a nosso ver, bons exemplos dos processos pelos quais atua a objetividade matemática conforme entendida por Maddy, é preciso dizer que a tese de Maddy sobre a objetividade matemática é uma elaboração posterior. Quando apresentou o seu naturalismo e formulou um argumento contra V=L a partir dessas máximas (em Maddy (1997)), ela ainda não havia elaborado a noção de objetividade matemática que apresenta em Maddy (2011), e sobre a qual estamos tratando aqui. Nesta sua obra recente, é a ideia de "profundidade matemática" que dá origem a uma forma de objetividade que ela qualifica como "pós-metafísica" (Cf. MADDY, 2011, p. 116). A noção de profundidade matemática vai nos servir, aqui, para tratar de um ponto relacionado aos critérios de unificação e maximização que ainda não abordamos, mas a que devemos atentar a fim de evitar um possível mal-entendido.

Unificação e maximização são os conceitos principais daquele que Maddy chama de "modelo naturalizado da prática matemática" em teoria dos conjuntos. Maddy constrói esse modelo a partir de um processo que se baseia na análise da prática histórica e contemporânea em teoria dos conjuntos. "Observe-se que muito desse processo", Maddy (1997, p. 199) chama a atenção, "emprega métodos familiares das ciências naturais. O primeiro passo — construção do modelo naturalizado — ocorre em um espírito mais ou menos *sociológico*: o registro histórico é examinado e o discurso contemporâneo analisado" (grifo nosso). Unificação e maximização são, pois, generalizações de aspectos encontrados na análise, por assim dizer, histórico-sociológica da prática matemática.

Enfatizamos a independência dos critérios de maximização e unificação com respeito a compromissos ontológicos e a concepções sobre verdade. Todavia, a prioridade que Maddy concede à prática matemática e aos métodos compartilhados pela comunidade de teóricos conjuntistas, aliada a passagens como a que citamos no parágrafo anterior, levantam uma questão: parece que, no mesmo grau em que Maddy se afasta de compromissos com as noções tradicionais de ontologia e verdade, ela se aproxima de uma concepção sociológica do conhecimento matemático. Nas explicações realistas tradicionais, é uma realidade subjacente de entidades bem determinadas que garante o caráter objetivo do conhecimento matemático. Maddy supostamente trocaria esse substrato ontológico da objetividade matemática por um substrato sociológico: o que garantiria o caráter objetivo do conhecimento matemático — nisto consiste o mal-entendido que queremos afastar — seriam certos modos de pensar e proceder compartilhados pela comunidade de matemáticos. A matemática seria a atividade humana objetiva por excelência *apenas porque* os matemáticos compartilham certas crenças. O "modelo naturalizado da prática matemática" seria uma peça de estudo sociológico, que explicitaria as crenças compartilhadas pelos matemáticos. Fossem outras as ideias e práticas compartilhadas, não fosse a objetividade um valor estimado pelos matemáticos, e a matemática seria diferente. Essa explicação da objetividade matemática seria irreconhecível para muitos matemáticos. Ela não corresponde à "fenomenologia pura da prática" a que Maddy se refere. E, de fato, não corresponde à ideia de Maddy sobre a objetividade matemática.

Não são os modos de pensar e proceder compartilhados que produzem a objetividade na matemática; ao contrário, é a natureza objetiva da matemática que promove o relativo consenso entre os matemáticos em torno de certos modos de pensar e proceder, rebate Maddy (Cf. MADDY, 2011, p. 82). Exatamente como no realismo, mas sem uma realidade subjacente. Na ausência desta realidade, falta explicar, pois, qual é o substrato objetivo que promove a convergência de conclusões quando a dedução lógica é insuficiente. O que é que os matemáticos estão perseguindo, nesses casos, que os leva a conclusões relativamente consensuais? "Profundidade matemática" é a resposta de Maddy.

Não é só no âmbito pré-axiomático que a dedução lógica é insuficiente. Isso também ocorre em outros momentos. Um deles é a formação de conceitos matemáticos. "Na vizinhança lógica de qualquer conceito matemático central", anota Maddy (2011, p. 79), "há inúmeras alternativas e pequenas alterações que simplesmente não são comparáveis em sua importância matemática". Tomemos o conceito de grupo, por exemplo. Maddy lembra que "no início, (...) quando apenas grupos finitos eram conhecidos, Cayley requeria somente leis de associatividade e cancelamento, das quais a existência de identidade e inversos podia ser derivada" (MADDY, 2007, p. 355). Mas quando se passou a considerar grupos infinitos, essa formulação não foi suficiente. Foi preciso incluir na definição de grupo a exigência de elemento identidade e inversos. O fato relevante é que a lógica pura e simples não privilegia de modo algum a segunda formulação sobre a primeira, nem privilegia essas formulações sobre várias outras perfeitamente consistentes presentes na vizinhança do conceito de grupo. Apesar disso, nenhuma dessas formulações poderia, presumivelmente, servir tão bem aos propósitos matemáticos quanto o conceito atual (Cf. MADDY, 2007, p. 355). O conceito atual de grupo

> destaca-se da multidão por capturar as similaridades importantes entre estruturas de áreas da matemática amplamente diferentes, e por permitir que essas similaridades sejam desenvolvidas dentro de uma teoria rica e fértil. Em modos que os historiadores da matemática explicam em detalhes, 'grupo' efetivamente abre as portas para uma matemática profunda, de um modo que outras [formulações na vizinhança] não fazem (MADDY, 2011, p. 79).

E então Maddy conclui:

> o que guia nossa formação de conceitos, além da exigência lógica por consistência, é o modo como alguns conceitos logicamente possíveis rastreiam profundas preocupações matemáticas que outros perdem (Ibid., p. 79).

No caso dos grupos, a preocupação em tela é teorizar sobre uma variada gama de estruturas diferentes mas que compartilham características matemáticas importantes. Nesse sentido, exigir, por exemplo, que grupos fossem comutativos ou que fossem não-comutativos seria contraproducente, "porque existem similaridades estruturais profundas entre grupos comutativos e não comutativos cujo rastreamento é matematicamente fértil" (Ibid.). Essas similaridades estruturais são independentes do conceito de grupo e preexistiam a ele. Em uma linguagem figurada (e apenas nesse sentido), é admissível dizer que as semelhanças 'estavam lá' esperando por serem descobertas, até que os matemáticos formulassem o conceito de grupo adequado para rastreá-las. Elas constituem o parâmetro objetivo que pautou a definição de grupo. Foi a percepção de tais similaridades entre estruturas matemáticas diversas, acrescida à preocupação de teorizar sobre elas, que garantiu objetividade na definição do conceito de grupo, que permitiu que os matemáticos consensualmente destacassem uma formulação dentre as várias logicamente consistentes. A formulação destacada foi aquela que era matematicamente mais profunda.

Para Maddy, o que se passa com relação aos axiomas de teoria dos conjuntos é análogo. Existe na vizinhança lógica dos axiomas em suas formulações atuais uma variedade de formulações próximas, alternativas mas com pequenas alterações, incomparáveis em sua importância matemática[6]. "Nesses casos, também, muito mais que consistência está em jogo", salienta Maddy (2011, p. 80). "Aqueles candidatos favorecidos diferem de alternativos e quase-vizinhos *porque eles rastreiam o que podemos chamar de topografia da profundidade matemática*"(Ibid. grifo nosso). Tal topografia está para a teoria dos conjuntos assim como certas similaridades entre estruturas matemáticas estão para a teoria dos grupos.

> Essa topografia está acima e além das conexões meramente lógicas entre enunciados e, ademais, ela é inteiramente objetiva: assim como independe de nós quais partes da matemática pura servem melhor às necessidades das ciências naturais, assim como independe de nós que seria contraproducente insistir que todos os 'grupos' fossem comutativos, também independe de nós que recorrer a conjuntos e ordinais transfinitos permite-nos capturar fatos sobre a unicidade de representações trigonométricas, que o Axioma da Escolha tem uma incrível variedade de formas diferentes e cumpre um papel fundamental em muitas áreas diferentes, que grandes cardinais arranjam-se em uma hierarquia que serve como uma medida efetiva da força de consistência, que determinação é a propriedade de regularidade raiz para conjuntos projetivos e inter-relaciona-se com grandes cardinais, e assim por diante. Esses são os fatos que (...) pautam nossos métodos conjuntistas, e esses fatos (...) não se originam de nós mesmos como sujeitos.
>
> Uma generosa variedade de expressões é usada tipicamente para identificar o fenômeno a que estou me referindo aqui: profundidade matemática, fertilidade matemática, efetividade matemática, importância matemática, produtividade matemática, e assim por diante. (Eu tenho usado e continuarei a usar tais termos mais ou menos indistintamente.) (MADDY, 2011, p. 80-81).

Argumentação extrínseca tem tudo a ver com profundidade matemática. Uma boa teoria é caracterizada pela sua fertilidade ou profundidade matemática. A estratégia geral da argumentação extrínseca consiste em mostrar que a definição, axioma ou teoria em questão produz uma boa teoria. O intento da argumentação extrínseca é, pois, revelar quão matematicamente profunda, fértil, efetiva, é a ideia proposta. As qualidades matemáticas da ideia proposta são, então, vistas como evidência a favor de sua incorporação. Por exemplo,

> o fato de cardinais mensuráveis serem matematicamente férteis nos modos x, y, z (e essas vantagens não serem superadas por desvantagens

[6]Não estamos nos referindo a formulações equivalentes dos axiomas, como por exemplo as diversas formulações em que se apresenta o axioma da escolha. Estamos referindo-nos a formulações diferentes, contudo igualmente consistentes e, num sentido intuitivo, próximas.

> conexas) é evidência para a existência deles. Por quê? Em razão daquilo que os conjuntos são: repositórios de profundidade matemática. Eles marcam um veio matematicamente rico dentro da indiscriminada rede de possibilidades lógicas (MADDY, 2011, p. 82-83).

Em linguagem metafórica, os métodos matemáticos são rastreadores de profundidade matemática, e os conjuntos são marcadores da topografia da profundidade matemática. A profundidade matemática está para a argumentação extrínseca assim como 'a natureza do objeto', ou 'o conceito de conjunto' está para a argumentação intrínseca. Porém, há uma diferença crucial. O objeto e o conceito são entidades obscuras, cuja apreensão depende de intuição, outra noção obscura, ao passo que a investigação da profundidade matemática é proporcionada pelos métodos usuais da matemática. Por isso Maddy sugere que o rastreamento da fertilidade matemática dá conta da "fenomenologia pura da prática" de modo superior à abordagem realista tradicional. 'A natureza do objeto' ou 'o conceito de conjunto' não se apresentam diretamente aos matemáticos. "O que se apresenta a eles", diz Maddy (2011, p. 116-117), "é a profundidade, a importância, a iluminação gerada por um dado conceito matemático, teorema ou método. Um matemático pode empalidecer e gaguejar, inseguro de si mesmo, quando confrontado com questões sobre verdade e existência, mas quanto a julgamentos de importância e profundidade matemáticas, ele transborda de convicção".

Onde a dedução lógica é insuficiente, a profundidade matemática é o substrato objetivo sobre o qual se formam conclusões relativamente consensuais. Ademais, Maddy ressalta que a profundidade matemática não é uma noção que dependa de crenças, opiniões ou atitudes compartilhadas pelos matemáticos.

> (...) julgamentos sobre profundidade matemática não são subjetivos: eu posso apreciar certo tipo de teorema matemático, mas minha preferência idiossincrática não transforma em matemática profunda, efetiva ou fértil certos meios conceituais ou axiomáticos em direção àquela meta; a esse respeito, toda a comunidade matemática pode estar cega para as virtudes de um certo método ou enamorada por uma busca meramente na moda, sem mudar os fatos subjacentes sobre o que é e o que não é matematicamente importante (Ibid., p. 81).

Se os matemáticos passassem a investigar em outras direções, sem relação com o que Maddy tem chamado de profundidade matemática, isso poderia ser encarado como um desvio de rota indevido.

> A chave aqui é que a fertilidade matemática não é definida como 'aquilo que nos permite alcançar nossas metas', independentemente de quais sejam elas; ao contrário, nossas metas matemáticas são *apropria-*

> *das* somente na medida em que satisfazê-las incrementa nossa compreensão das marcas subjacentes da fertilidade matemática (Ibid., p. 82, grifo nosso).

Mas como é definida a profundidade matemática? Maddy pensa que essa não é uma pergunta importante. Ela reconhece não ter elaborado "um tratamento satisfatório da profundidade matemática — o que eu disse permanece desconfortavelmente metafórico" (MADDY, 2011, p. 117), admite. Embora a ideia de profundidade matemática possa ser mais bem desenvolvida, Maddy afirma que "a noção em questão não está sendo proposta como uma candidata a análise conceitual ou algo do tipo". É preciso lembrar do compromisso do seu naturalismo com a prática matemática: os métodos da matemática não carecem de nenhuma justificativa adicional, para além daquela fornecida pela própria matemática. Em cada caso particular, na prática os matemáticos sabem diferenciar o que é matematicamente frutífero do que não é, mesmo na ausência de uma explicação ou regra geral sobre a profundidade matemática. Em geral, são importantes as considerações sobre a profundidade matemática de casos específicos, sobre o quanto tal ou qual resultado ilumina uma determinada área, sobre suas consequências vantajosas, etc., e esse é o ponto relevante. Isso sinaliza que, ainda que fosse possível fornecer uma explicação geral da profundidade matemática, ela seria dispensável. Sobre isso, Maddy (2011, p. 81) comenta:

> duvido que uma tentativa de dar uma explicação geral sobre o que realmente é 'profundidade matemática' seja produtiva; parece-me que a expressão é mais bem entendida como um termo guarda-chuva para vários tipos de virtudes especiais que claramente percebemos em nossos exemplos ilustrativos de formação de conceitos e escolha de axiomas. Mas mesmo que esteja errada sobre isso, mesmo que algo geral possa ser dito sobre o que faz esta ou aquela parte da matemática contar como importante, ou frutífera, ou o que seja, eu resistiria em afirmar que esse 'algo geral' proveria uma justificação mais fundamental para a matemática em tela: nossa análise de filosofia segunda sugere fortemente que as justificativas contextuais específicas que temos considerado até aqui são suficientes por si mesmas, que elas não necessitam nem admitem suplementação de outra origem.

Maddy parece querer que a profundidade matemática seja entendida como uma coleção de diversas características matemáticas desejáveis, não necessariamente relacionadas entre si no sentido de todas compartilharem traços comuns. Nesse sentido, a abordagem filosófica do que conta como matematicamente profundo deve ser caso a caso. As diversas justificativas para os axiomas de teoria dos conjuntos que examinamos na seção 3.1 fornecem exemplos variados dessas características vantajosas. Em uma nota aposta ao trecho citado acima, Maddy afirma que sua intenção, ao dedicar tanto tempo ao exame de vários casos de prática matemática, visa fazer com que o leitor "sinta" o que é a profundidade matemática (Cf. MADDY, 2011, p. 81 n.9). As noções de maximização e unificação generalizam alguns traços produtivos em teoria dos conjuntos, mas estão muito longe de constituírem-se numa regra geral para avaliação de candidatos a axiomas. Como vimos, elas são efetivas no que diz respeito ao axioma da construtividade, mas pouco ajudam no caso da hipótese do contínuo, por exemplo. O que é matematicamente mais produtivo, com respeito a CH, ainda é uma questão em aberto.

A característica chave do naturalismo em matemática maddyano é a convicção de que essa é uma disciplina autônoma, que não responde nem à filosofia, nem às ciências naturais. Assim sendo, a objetividade da matemática tem que estar fundada na própria matemática. O exame histórico-sociológico da prática matemática, defende Maddy, é a ferramenta adequada para revelar as características que fazem da matemática um empreendimento bem sucedido, autônomo e objetivo. Isso, contudo, não implica a conclusão antecipada de que "a matemática é o que os matemáticos fazem". Pelo contrário, o exame da prática matemática torna manifesto de imediato que a matemática não é uma disciplina em que tenham expressão caprichos pessoais ou coletivos, opiniões particulares ou de um grupo. Observar o que os matemáticos fazem, quando estão fazendo boa matemática, evidencia que seus métodos e argumentos são pautados em alto grau por metas matemáticas independentes de anseios pessoais ou coletivos, mas fortemente dependentes de características matemáticas comumente adjetivadas como profundas, férteis, produtivas, etc.. Não é a prática dos matemáticos que determina o que a matemática é, ou para onde ela progride. Pelo contrário, é o que a matemática é — aquelas características abarcadas sob o rótulo de profundidade matemática — que determina como os matemáticos procedem, quais são os melhores métodos, enfim. Essa é a noção pós-metafísica de objetividade matemática de Maddy.

5 UM PARECER SOBRE PONTOS DA FILOSOFIA DE MADDY

É hora de avaliar o que vimos até aqui. Como é comum a todo pensamento filosófico, a filosofia da matemática de Maddy não é imune a fragilidades, e está sujeita a reparos e críticas. Nesta seção final, abordamos aquelas que entendemos serem algumas de suas dificuldades, mas sem deixar de destacar seus pontos fortes.

A "prática matemática" é um elemento chave na filosofia de Maddy. Seu naturalismo pretende ser fiel à prática matemática, e suas críticas a outras filosofias da matemática concentram-se no quanto essas filosofias distanciam-se, são indiferentes ou opõem-se à prática. Mas, apesar de sua centralidade, Maddy não explicita diretamente o que entende por "prática matemática". Como veremos a seguir, caracterizar o que seja a prática matemática não é uma tarefa simples, e a ausência de uma discussão mais profunda sobre o tema dá margem a questionamentos.

Friedman é um dos que criticam Maddy por esse viés. Ele sugere que Maddy limita-se a um recorte pouco abrangente da prática matemática:

> Maddy e seus colaboradores têm concentrado suas investigações naturalistas na comunidade de teoria dos conjuntos. Eu penso que expandir suas investigações para a comunidade matemática mais ampla seria interessante e oportuno para eles. Entender essa comunidade será consideravelmente mais difícil, a partir da perspectiva naturalista, mas o esforço extra envolvido vale a pena (FEFERMAN et al., 2000, p. 445).

Em seus textos, Maddy comumente alude de forma genérica à "prática matemática". Friedman chama a atenção, entretanto, para o fato de Maddy considerar sobretudo a prática matemática *na teoria dos conjuntos*, olvidando aspectos importantes da prática em outras áreas da matemática. Friedman sugere que seria interessante para Maddy considerar a prática de outras áreas porque, segundo ele, "a diferença de perspectiva dos teóricos conjuntistas versus os matemáticos que não são teóricos conjuntistas é enorme" (FEFERMAN et al., 2000, p. 434). Certas posições de Maddy, como sua opinião sobre o papel fundacional da teoria dos conjuntos, por exemplo, podem ter sido afetadas pela limitação de suas análises à perspectiva dos teóricos conjuntistas. Sobre a perspectiva dos matemáticos que não atuam na teoria dos conjuntos, Friedman comenta:

> A maior parte dos matemáticos [que não atuam em teoria dos conjuntos] geralmente reconhece a teoria dos conjuntos como o veículo

> mais conveniente para obter rigor em matemática. Com este propósito, surgiu uma interpretação conjuntista mais ou menos padrão da matemática, com ZFC geralmente aceita como o padrão-ouro em rigor. (...) Para os matemáticos, a matemática não é, enfaticamente, um ramo da teoria dos conjuntos. A interpretação impecável da matemática na teoria dos conjuntos não compromete os matemáticos com a visão de que problemas em teoria dos conjuntos são problemas na matemática (FEFERMAN et al., 2000, p. 434-435).

Segundo Friedman, para os matemáticos em geral o principal papel da teoria dos conjuntos na matemática é ser um instrumento de formalização para obter rigor. Esse, porém, é um papel bem mais modesto do que ser uma "arena unificada para a matemática" que se constitui numa "corte de apelação final para questões de existência e prova matemáticas", função que Maddy (1997, p. 26) atribui à teoria dos conjuntos, tomando por base aspectos da prática dos teóricos conjuntistas. Diante das diferenças entre as perspectivas dos matemáticos ordinários, como tomada por Friedman, e dos teóricos conjuntistas, como tomada por Maddy, ambas alegadamente integrantes da prática matemática, qual visão deve prevalecer? Deve-se favorecer a visão do especialista ou deve-se adotar a visão de maior abrangência, compartilhada pela maior parte dos matemáticos? Qual é a visão compartilhada pela maior parte dos matemáticos? Vale um critério estatístico? O que é "prática matemática" é uma questão a que se deve responder empiricamente?

Nem Maddy nem Friedman demoram-se nessas questões, embora Friedman insinue que contagens estatísticas tenham influência nessa discussão. Depois de afirmar que a teoria dos conjuntos tem reduzidas interconexões com os demais campos da prática matemática, Friedman acrescenta:

> Para o cético, o grau de extremo isolamento [da teoria dos conjuntos] pode ser submetido a vários testes, incluindo referências de citações — discriminadas até por natureza e qualidade. Usando uma noção importante da estatística, a teoria dos conjuntos é um *outlier* extremo (FEFERMAN et al., 2000, p. 435).

Friedman prossegue argumentando que é possível alcançar conclusões opostas às de Maddy alicerçando-se igualmente em aspectos da prática matemática. Ele critica a máxima maddyana *maximizar*, e por conseguinte o argumento de Maddy contra o axioma da construtividade. Tudo depende de *qual* prática matemática é considerada. Se são as metas e procedimentos dos teóricos conjuntistas que estão em jogo, Friedman concede que a maximização é desejável:

> O teórico conjuntista está buscando fenômenos conjuntistas profundos, e então V=L é rejeitado porque restringe o universo conjuntista

> tão drasticamente que toda sorte de fenômenos estão demonstravelmente ausentes. (...) Para o teórico conjuntista, "quanto mais dificuldades e fenômenos conjuntistas, melhor" (FEFERMAN et al., 2000, p. 436 e p. 436 n.48).

Porém, se estão em jogo as metas e procedimentos dos matemáticos ordinários, que não atuam na teoria dos conjuntos, vale o oposto. Diz Friedman:

> Para o matemático ordinário, dado que a teoria dos conjuntos é meramente um veículo para interpretar a matemática de modo a estabelecer rigor, e não matematicamente importante por si mesma, quanto menos dificuldades e fenômenos conjuntistas, melhor. I.e., menos é mais e mais é menos. Assim, se os matemáticos estivessem preocupados com os resultados independentes da teoria dos conjuntos — e eles geralmente não estão — então V=L [seria] de longe a solução mais atrativa para eles (FEFERMAN et al., 2000, p. 436-437).

Schiemer (2010) desenvolve um raciocínio similar ao de Friedman. A maximização é um valor importante enquanto a teoria é tomada como uma área matemática relevante por si mesma, com seus próprios objetivos, afirma Schiemer. Porém, quando alguma meta fundacional é colocada em primeiro plano — isto é, quando a teoria dos conjuntos é vista a partir de seu uso por outras áreas da matemática — a maximização deixa de ser desejável (Cf. SCHIEMER, 2010, p. 335-336). Lembremos da discussão na página 134, em que dissemos que, para Maddy, o requisito por maximização deriva tanto do papel fundacional quanto das metas próprias da teoria dos conjuntos. Schiemer e Friedman entendem que a maximização é decorrência apenas destas últimas. "Está longe de ser evidente que princípios minimizadores (...) sejam menos razoavelmente baseados na prática matemática que o princípio de Maddy para a maximização em teoria dos conjuntos", conclui Schiemer (2010, p. 336).

A ideia de basear a filosofia da matemática na prática matemática pode ser entendida como uma tentativa de afastar-se da especulação pura e simples, levando a discussão filosófica para um terreno mais concreto, para a realidade relativamente mais acessível da metodologia da matemática. Contudo, a noção de prática matemática não é trivial, e pode não servir a esse propósito se não for ela mesma explicitamente discutida. As conclusões díspares a que se pode chegar alegadamente baseando-se na prática matemática ilustram esse ponto. Bem mais extremas que as ponderações de Friedman e Schiemer, são as posições defendidas por Hersh (1997). Assim como Maddy, ele também adota a prática matemática como parâmetro de avaliação do sucesso de uma filosofia da matemática: "uma descrição da matemática é inaceitável se não for compatível com o que as pessoas fazem, especialmente com o que os matemáticos fazem", escreve Hersh (1997, p. 30). Ele também reconhece a autonomia da matemática: "avalie um corpo de pensamento de acordo com suas próprias metas e pressuposições", diz Hersh (1997, p. 24), e "entenda-o historicamente, no sentido de história das ideias", complementa. Esses são princípios orientadores de sua filosofia da matemática. Hersh, todavia, chega a conclusões bem diferentes das de Maddy. Ele opõe-se frontalmente às filosofias da matemática que reservam um lugar de destaque para a teoria dos conjuntos na matemática. Apoiado na sua própria concepção da prática matemática, Hersh justifica-se dizendo que "a imagem conjuntista da matemática não é convincente porque a teoria dos conjuntos é irrelevante para a maior parte da matemática dominante" (Ibid., p. 179).

As posições de Hersh em filosofia da matemática são bastante polêmicas, a ponto de Burgess (2008, p. 24 n. 1) comentar que Hersh (1997) é "um livro que deixa um filósofo profissional de cabelo em pé", mas não pretendemos criticá-lo ou endossá-lo aqui. O que nos interessa destacar, a partir dos exemplos de Hersh, Friedman e Schiemer, é que são muito variadas as posições filosóficas que podem ser defendidas a partir de aspectos da prática matemática. À primeira vista, parece que a diversidade de práticas vigentes permite que algumas sejam mais enfatizadas que outras, por assim dizer, ao gosto do freguês. Por outro lado, é inegável que dar conta da prática matemática como um todo é um desafio que requer um esforço descomunal.

Assim, não precisamos ficar com o entendimento de Hersh, Friedman ou Schiemer sobre a prática matemática, em detrimento da concepção de Maddy. Ao conceder papel secundário à visão do especialista, eles podem estar sendo tão parciais quanto Maddy. Ademais, talvez para os objetivos de Maddy seja realmente mais relevante tratar especificamente da prática em teoria dos conjuntos, e não da prática matemática como um todo. O ponto interessante a considerar, contudo, é que uma filosofia da matemática que se pretenda baseada na prática matemática não pode se furtar à tarefa de explicitar e justificar o recorte da prática matemática que está assumindo, bem como reconhecer que sua filosofia é relativa a esse recorte. De fato, Maddy reconhece que sua filosofia é relativa a um recorte temporal da prática matemática, e justifica essa opção[1], mas ela não justifica a abrangência um tanto limitada do seu recorte dentro da diversidade de práticas e objetivos da matemática contemporânea.

Cabe notar, ainda, que mesmo no que concerne à prática con-

[1]Ver discussão na página 125.

temporânea *em teoria dos conjuntos*, o recorte de Maddy também pode ser criticado por descuidar de aspectos relevantes do desenvolvimento presente da teoria. Se considerarmos as análises de Kanamori e Kunen sobre as transformações que a teoria dos conjuntos experimentou a partir do advento do método de *forcing*, que abordamos brevemente na página 53, veremos que o modo como Maddy encara o universo conjuntista V pode ser considerado, sob a ótica deles, um tanto inadequado. Como exploramos no capítulo 2, Maddy entende que a teoria dos conjuntos fornece para a matemática uma "arena *única* para a qual todas as questões locais de coerência e prova podem ser referenciadas" (MADDY, 2011, p. 34, grifo nosso). Maddy identifica essa arena única a V, e afirma que "buscar uma teoria unificada deste universo *único* V" (Ibid., p. 63 n. 4, grifo nosso) é um dos motores da investigação em teoria dos conjuntos. Contrastando com a opinião de Maddy, Kunen e Kanamori veem os teóricos conjuntistas, depois do *forcing*, não mais interessados em um universo *único* V, mas antes interessados em explorar a multiplicidade de modelos[2] de ZFC que essa técnica permite obter. Nessa abordagem, V é encarado apenas como um modelo de base a partir do qual outros modelos são obtidos, e "tomar V como um modelo de base", diz Kanamori (2008, p. 370-371), "vai contra a ideia de V como o universo de todos os conjuntos". "Na verdade, V tornou-se uma letra *esquemática* para um modelo de base", resume Kanamori (2008, p. 371). Ao aproximar a teoria dos conjuntos atual da teoria dos grupos, Kunen quer ressaltar o mesmo fenômeno (Cf. KUNEN, 2009, p. 7). Em sua análise da prática matemática em teoria dos conjuntos, Maddy parece não levar em conta essa mudança de perspectiva sobre V. Ao prender-se a um entendimento sobre V característico do período anterior ao *forcing*, Maddy pode estar desprezando um ponto importante da prática conjuntista atual.

Outro elemento chave da filosofia de Maddy, que muito enfatizamos nos capítulos anteriores, é a ideia de que a matemática é uma disciplina autônoma. No prefácio de seu último livro — *Defending the Axioms* (MADDY, 2011) — Maddy resume assim sua visão da autonomia da matemática:

> Assim como uma perspectiva fundamentalmente naturalista opõe-se a *criticar* um pouco que seja de matemática com base em considerações extra-matemáticas, tal perspectiva opõe-se com igual intensidade a *apoiar* um pouco que seja de matemática com base em considerações extra-matemáticas (MADDY, 2011, p. ix).

De fato, vimos na seção 3.2 como Maddy rejeita tentativas de justificar ou criticar a matemática a partir de argumentos filosóficos. Em

[2]Modelos entendidos conforme definido à página 44.

contraste, todavia, vimos no capítulo 4 como Maddy elabora, em seu último livro, uma explicação da objetividade matemática que não escapa à qualificação de *filosófica*. À primeira vista, parece haver um conflito na obra de Maddy entre, por um lado, rejeitar a influência da filosofia na matemática e, por outro, continuar inevitavelmente fazendo filosofia da matemática. Face a essa aparente incoerência, convém examinarmos em que medida a filosofia de Maddy é resistente a suas próprias críticas. Será que sua filosofia não está condenada a ser tão indiferente para a prática matemática quanto as filosofias que ela critica?

Não há incoerência real na postura de Maddy com respeito à filosofia. Ela consegue afastar o perigo de incoerência distinguindo entre dois tipos de filosofia. Há a *filosofia primeira* e a *filosofia segunda*. A que ela critica é a primeira, a que ela faz é a segunda. Salvo alguns comentários esparsos e uma breve explicação no início do capítulo 4, não exploramos essa distinção com a mesma profundidade que Maddy a explora. Essa distinção é tão importante que, desde *Second Philosophy* (MADDY, 2007), Maddy passa a denominar sua posição filosófica de "filosofia segunda", e não mais "filosofia naturalizada", como fazia antes. Basicamente, a diferença entre as duas formas de filosofia é que a filosofia primeira, seguindo moldes cartesianos e kantianos, vem antes da ciência, é uma fundamentação ou propedêutica do empreendimento científico, ao passo que a filosofia segunda vem depois da ciência, e aborda questões filosóficas que surgem no bojo do desenvolvimento científico, empregando para tal métodos científicos. Com respeito à matemática, vale o mesmo. Filosofia primeira é aquela que visa fundamentar ou justificar filosoficamente o conhecimento matemático, enquanto a filosofia segunda é aquela que se ocupa de questões que surgem da própria investigação matemática, e usa raciocínios e argumentos tipicamente matemáticos para abordá-las. Perguntar-se por critérios para avaliar candidatos a axiomas em teoria dos conjuntos — a questão principal da filosofia de Maddy — é uma questão a que se chega por consequência do próprio desenvolvimento da matemática, é filosofia segunda[3].

Menos clara, porém, é a classificação como filosofia primeira ou segunda da explicação de Maddy para a objetividade matemática, em Maddy (2011). Perguntar-se sobre a origem da objetividade matemática não é uma questão concernente aos assuntos próprios da matemática, e nem surge no curso natural da investigação matemática.

[3]A distinção entre filosofia primeira e filosofia segunda feita por Maddy é muito mais elaborada e sutil do que faz crer a nossa breve descrição, aqui. A concepção de Maddy não comporta, por exemplo, um teste último que permita distinguir filosofia primeira de filosofia segunda (Cf. MADDY, 2007, p. 349 n. 12).

Pelo contrário, essa é uma questão tipicamente filosófica. No entanto, Maddy pode se defender alegando que essa questão surge no curso da investigação científica usual. Em nossa investigação do mundo, conta Maddy, começamos com nossos métodos usuais de percepção e observação, teorização e experimentação, fazendo ciência natural. Essa investigação, contudo, não ocorre sem o auxílio indispensável da matemática. A matemática faz parte do nosso esforço de compreensão do mundo. Logo percebemos, porém, que ela não compartilha dos mesmos métodos das ciências naturais e que trata de entidades bastante diferentes dos objetos físicos. Isso desperta nosso interesse científico sobre a matemática. Assim como a ciência põe-se a explicar como ocorre a percepção de objetos físicos, por que certos métodos de experimentação são mais confiáveis que outros, etc., compreender como opera a matemática, qual a natureza dos objetos matemáticos, também pode estar no âmbito dos interesses científicos. Compreender como funciona a matemática faz parte do nosso esforço de compreensão do mundo. Nesse sentido, a pergunta por uma explicação da objetividade matemática enquadra-se como filosofia segunda (Cf. MADDY, 2011, p. 38-39). Vale destacar que outras questões típicas de filosofia primeira ressurgem, pela mesma porta, como questões de interesse da filosofia segunda. Por exemplo, ressurge a avaliação da validade dos métodos de investigação da ciência. Uma diferença crucial, porém, é que na abordagem da filosofia segunda, que reconhece os métodos científicos como os melhores disponíveis — ainda que falíveis — para conduzir nossa investigação sobre o mundo, o tratamento dessas questões ocorrerá em bases estritamente científicas, e não filosóficas. O exame da objetividade matemática procede igualmente em bases científicas: Maddy estuda a história da matemática, faz uma análise em certo sentido sociológica da prática contemporânea, emprega estudos de psicologia[4]. Nesse processo, ela conclui que a matemática é autônoma com respeito à ciência, e que sua objetividade se deve, portanto, a fatores matemáticos.

Assim, a explicação de Maddy para a objetividade matemática não é filosofia primeira. A pergunta tem origem científica e o método de investigação é, em certo sentido, científico, tudo de acordo com os preceitos da filosofia segunda. Essa conclusão livra Maddy do perigo de incoerência, levantado três parágrafos acima. Porém, não está claro que sua filosofia, ainda que *segunda*, possa escapar da indiferença por parte da prática matemática.

O que está claro é que a *pergunta* pela objetividade matemá-

[4] O uso que Maddy faz de estudos psicológicos é exemplificado por sua filosofia da lógica. Veja Maddy (2007, seção III.5).

tica *não é* matemática. Se os matemáticos, enquanto tais, não estão interessados na pergunta, interessar-se-iam pela resposta? Ainda que admitamos que sim, resta saber se a resposta tem potencial para contribuir com o debate matemático. De acordo com Maddy, o potencial para contribuir está diretamente relacionado ao conteúdo matemático da resposta, visto que a matemática, sendo autônoma, exige ser tratada em seus próprios termos. A explicação de Maddy para a objetividade matemática — baseada sobretudo no conceito de profundidade matemática — possui certamente algum conteúdo matemático, mas tal conteúdo advém de uma leitura da metodologia da matemática, e não da matemática propriamente dita. O que queremos dizer é que a ideia de profundidade matemática pode perfeitamente integrar uma teoria filosófica ou científica — histórico-sociológica — sobre a metodologia da matemática, mas não integra nenhuma teoria matemática. É algo bem diferente do conceito de maximização, por exemplo, que Maddy define na teoria dos conjuntos. Sem dúvida os casos exemplares de profundidade matemática que Maddy menciona são genuinamente matemáticos; naqueles casos, as disputas se resolveram por considerações matemáticas independentes de posicionamentos filosóficos. O que tem pouco a ver com matemática, porém, é a afirmação de que aqueles casos são exemplos de situações em que os matemáticos rastrearam a "topografia da profundidade matemática". Essa é uma tese tão extra-matemática quanto as explicações realistas, por exemplo, que veem naqueles casos o rastreamento de características de uma realidade independente de objetos matemáticos. É fácil perceber isso, se imaginarmos dois matemáticos hipotéticos, o primeiro convencido pelos argumentos de Maddy de que está rastreando a "topografia da profundidade matemática", e o segundo realista, crente de que está descobrindo propriedades de entidades independentes. Ambos podem concordar sobre a melhor solução para uma determinada disputa matemática, ainda que suas posições filosóficas deem explicações diferentes para o que está se passando. Retomando uma distinção maddyana que abordamos na seção 3.2, profundidade matemática é *prosa*, e não *cálculo*.

Classificar sua explicação da objetividade matemática como filosofia segunda ajudou antes, mas não ajuda agora. O fato de sua explicação ser mais científica que filosófica não contribui agora porque a matemática também é, como ela defende, independente da ciência. Tudo indica que sua filosofia, pelo menos no que tange a explicação da objetividade matemática, também está condenada a ficar à margem do debate matemático. Isso não compromete diretamente o valor da sua explicação — a questão suscita um interesse científico e filosófico legítimo, por mais que seja indiferente para a matemática. Todavia, isso compromete um objetivo central da sua filosofia, que é a pretensão de colaborar com o debate matemático (Cf. MADDY, 1997, p. 199). Sua afirmação de que seria improdutivo aplicar-se a uma explicação geral da profundidade matemática, que citamos na página 142, parece indicar que Maddy está ciente dessa limitação.

Mas talvez estejamos sendo injustos com pelo menos uma parte do trabalho de Maddy. A pergunta pela explicação da objetividade matemática não é matemática, mas a inquirição sobre a necessidade de novos axiomas em teoria dos conjuntos, como já dissemos, é francamente matemática. A esse respeito, a contribuição da filosofia de Maddy para o debate matemático, de acordo com seus próprios parâmetros, pode ser mais frutífera. Seu argumento contra V=L é formulado em teoria dos conjuntos (Cf. MADDY, 1997, seção III.6). Ela usa a análise filosófica e histórico-sociológica para isolar os métodos mais eficazes de argumentação em teoria dos conjuntos, exatamente como ela faz ao abordar a questão da objetividade matemática. Mas a diferença é que, depois, ela desenvolve seu argumento inteiramente dentro da teoria dos conjuntos, como se procede em um debate matemático usual. Maddy explica assim seu modo de proceder no caso do argumento contrário a V=L:

> Nesse ponto, a naturalista não está fazendo sociologia ou ciência natural de qualquer tipo; ela está usando métodos da matemática, não aqueles da ciência, e ela está fazendo exatamente como um matemático faria, exceto que suas escolhas dentre os estilos de argumentação disponíveis são guiadas pelos resultados da análise histórica prévia. Em outras palavras, ela está operando dentro da matemática (...) está fazendo aquilo que o sociólogo poderia chamar de "tornando-se nativa" (MADDY, 1997, p. 199).

Essa diferença de procedimento entre seu argumento contra V=L, em Maddy (1997), e sua explicação da objetividade matemática, em Maddy (2011), marca uma mudança de posição na filosofia de Maddy. Ela "torna-se nativa" em *Naturalism in Mathematics* (1997), mas não em *Defending the Axioms* (2011). Neste último livro, Maddy adota um *modus operandi* mais distante do seu naturalismo de 1997 e, em um importante aspecto que vamos especificar a seguir, mais próximo da filosofia tradicional. O conceito de profundidade matemática está no centro dessa mudança, e a própria Maddy chama a atenção para isso.

Dado o protagonismo que Maddy concede à prática matemática, é natural supor que as conclusões de uma filosofia naturalista da matemática alterem-se acompanhando mudanças na prática matemática. De fato, Maddy reconhece que mudanças históricas ocorrem, e no curso dessas mudanças, uma tese filosófica que era adequada em uma época, pode deixar de ser em outra (Cf. MADDY, 2011, p. 2). Sua filosofia é reflexo da transformação por que passou a prática matemática a partir do final do século XIX em direção à matemática pura, conforme discutimos no início do capítulo 4. Igualmente, sua crítica ao argumento de indispensabilidade de Quine baseia-se essencialmente nessa transformação histórica, que culminou no afastamento da matemática de suas aplicações e na consequente autonomia da matemática. Maddy admite sem pestanejar que, se sua filosofia fosse desenvolvida em outra época, resultaria em algo diferente.

> Uma Filósofa Segunda em tempos passados teria mais facilidade com essas questões [relativas à objetividade da matemática pura], porque a matemática e as ciências naturais não estiveram sempre tão nitidamente distinguidas como atualmente. (...) Para uma Filósofa Segunda neste clima [das épocas de Galileo, Newton e Fourier], o estudo dos métodos matemáticos seria uma parte inseparável de sua investigação geral dos métodos científicos (MADDY, 2007, p. 344-345).

Matemática e ciências empíricas estavam unidas de um modo especial no passado, e isso poderia engendrar uma filosofia da matemática concordante com o holismo quiniano nesse aspecto. Contudo, esse não é o caso hoje. Temos aí um exemplo claro de uma filosofia que poderia ser adequada no passado, mas que não é mais admissível atualmente. Essa relatividade temporal, todavia, incomoda alguns filósofos. Solomon Feferman é um deles:

> Enquanto Maddy permanece evocando a prática matemática em geral no escopo do seu naturalismo, ela não pensa sobre os muitos momentos em sua história [da matemática] em que a questão sobre que entidades hão de ser admitidas na matemática e sobre que métodos são legítimos tiveram de ser enfrentadas, levando a substanciais revisões de adequado para inadequado e vice-versa. Ao ligar-se à prática matemática, esse tipo de naturalismo está em perigo de ser indevidamente transitório (FEFERMAN et al., 2000, p. 409).

Maddy acrescenta que, na mesma oportunidade, Feferman acusara seu naturalismo de "relativista" e "paroquial"[5](FEFERMAN et al., 2000, p. 420). Respondendo a Feferman, Maddy afirma:

> É claro que é verdadeiro que nossos julgamentos racionais de que princípios matemáticos e métodos são melhores mudarão à medida que saibamos mais: temos menos razão hoje para admitir infinitesimais do que tínhamos antes de Cauchy e Weierstrass; temos mais razão agora para admitir grandes cardinais do que tínhamos, por exemplo, quando Ulam definiu mensuráveis primeiramente em 1930. Eu não

[5]Feferman et al. (2000) é uma versão consolidada para publicação de um debate entre os autores — Feferman, Friedman, Maddy e Steel — que aconteceu no encontro anual da ASL (*Association for Symbolic Logic*) em junho de 2000.

> vejo como isso pode ser mais alarmante que o fato de cientistas terem mais razão agora para acreditar em átomos do que tinham antes de Einstein e Perrin; aprendemos novas coisas, adquirimos novas evidências, modificamos nossas teorias, tanto na matemática quanto na ciência. Desse modo as justificativas naturalistas irão mudar à medida que nossa compreensão aumenta, mas eu não penso que isso faça essas justificativas mais 'indevidamente transitórias' que nossas teorias científicas (FEFERMAN et al., 2000, p. 420-421).

Maddy assume as consequências de fazer uma filosofia fundada na prática matemática e, mais que isso, vê essas consequências como positivas. Aprendemos mais com o tempo, portanto é racional que nossas ideias — matemáticas, científicas e filosóficas — mudem. Essa transitoriedade confessa, entretanto, guarda um risco. E se a mudança na prática matemática não for motivada por algo que, pelos critérios atuais, conte como aumento do conhecimento? Se, pelo contrário, a mudança for motivada por um fator externo, filosoficamente condenável, como a influência de uma ideologia política ou religiosa, por exemplo? Maddy finca pé em seu naturalismo e afirma que, se a mudança atingir a comunidade matemática inteira, não há o que fazer senão se render a ela: "a [filósofa] naturalista não tem bases independentes a partir das quais possa opor-se a uma conclusão de toda a comunidade; se a comunidade de fato atinge uma decisão estável sobre uma questão metodológica com base na consideração X, que a naturalista pensava digna de excisão, isso contaria simplesmente como refutação da avaliação naturalista de X." (MADDY, 1997, p. 198). Para ilustrar esse ponto, Maddy imagina um exemplo extremo. Suponha, pede Maddy, que os matemáticos decidissem rejeitar a lei de não-contradição — de sorte que 2+2=4 e 2+2=5, por exemplo, fossem ambas aceitas — com base no objetivo social de favorecer a auto-estima de crianças em idade escolar. "Isso pareceria uma invasão flagrante da matemática por considerações não matemáticas", afirma Maddy (1997, p. 198 n.9). No entanto, ela reconhece que, "se os próprios matemáticos insistissem que não era isso, que estavam perseguindo uma meta legitimamente matemática (...), eu não encontro nada no naturalismo matemático apresentado aqui que desse razões para protestar" (Ibid.).

Essa era a opinião de Maddy em 1997. Em *Second Philosophy*, sua obra de 2007, Maddy mantém mais ou menos a mesma posição, apenas acrescentando que, caso os matemáticos resolvessem tomar um rumo assim estranho, o interesse da filosofia segunda pela matemática diminuiria. Maddy aposta que, se os praticantes dessa nova matemática com metas tão divergentes das atuais retivessem consigo a denominação de "matemáticos", provavelmente outra disciplina surgiria no vácuo deixado pelo desaparecimento dos antigos matemáticos, e então o interesse da filosofia recairia sobre essa nova disciplina (Cf. MADDY, 2007, p. 350-351). Em 2011, contudo, Maddy muda de posição radicalmente, apoiando-se na noção de profundidade matemática. Se os matemáticos tomassem outros rumos, sem relação com o que Maddy tem chamado de profundidade matemática, isso poderia ser encarado como um desvio de rota indevido: "nossas metas matemáticas *são apropriadas* somente na medida em que satisfazê-las incrementa nossa compreensão das marcas subjacentes da fertilidade matemática", proclama Maddy (2011, p. 82, grifo nosso). Sem muito destaque, ela chama a atenção para a mudança em uma nota de rodapé:

> Aqui finalmente estão as bases que permitem rejeitar o niilismo da nota de rodapé 9 na p. 198 de [1997], e mesmo a versão abrandada de [2007] pp. 350-351. Se os matemáticos desviarem-se do caminho da profundidade matemática, eles estarão se perdendo, mesmo que ninguém se dê conta disso (MADDY, 2011, p. 82 n. 42).

O conceito de profundidade matemática estabelece, agora, as bases independentes de que a filósofa naturalista não dispunha em *Naturalism in Mathematics* para opor-se a uma conclusão de toda a comunidade matemática. Até *Second Philosophy*, o único material que embasava sua filosofia era a prática matemática. Se a prática mudasse, a filosofia não tinha outro remédio senão mudar. Em *Defending the Axioms*, porém, Maddy alega ter encontrado, a partir do exame da prática matemática contemporânea (até aqui de acordo com seu naturalismo passado), a rocha dura sobre a qual se funda a prática matemática. A partir de agora, parece que Maddy entende que a própria filosofia pode se apoiar nessa rocha e, em último caso, desprezar os meios que a levaram a encontrá-la, isto é, a priorização da prática matemática. A filosofia passa a ocupar, então, uma perspectiva privilegiada: caso os matemáticos desviem-se da meta de perseguir a profundidade matemática, a filosofia pode criticá-los. Isso representa uma mudança enorme em seu naturalismo, e mereceria uma explicação maior que a que coube em uma nota de rodapé. Maddy nos deixa curiosos sobre como seria possível conciliar sua nova posição filosófica com pontos cruciais do seu antigo naturalismo, se é que tal conciliação é possível.

Um desses pontos é o caráter assumidamente transitório de sua filosofia. Antes Maddy defendia que as teses filosóficas devem mudar, quando a evolução das ciências e da matemática assim pedirem. Agora, entretanto, há um limite para as mudanças admissíveis: a busca da profundidade matemática deve ser preservada no foco da investigação. É verdade que Maddy faz essa ressalva no contexto de uma mudança hipotética em direção a metas vistas como descabidas, considerando os critérios atuais. Mas, e se as novas metas não fossem assim tão descabidas? Por exemplo, e se novos campos da pesquisa científica abrissem espaço para novas aplicações inusitadas da matemática na investigação da natureza física, e isso despertasse em toda a comunidade matemática um renovado interesse pela matemática aplicada, deixando estagnadas áreas e métodos de investigação típicos da matemática pura? Nessa situação, talvez os métodos mais adequados de resolver disputas passassem a estar relacionados à aplicabilidade, e não à profundidade matemática. Uma filosofia que, numa tal situação futura hipotética, se ativesse à profundidade matemática, seria tão inútil para o debate matemático quanto é, hoje, uma filosofia que se atém a argumentos sobre a aplicabilidade da matemática nas ciências. Se um dos objetivos principais da filosofia naturalista é contribuir para o debate matemático, uma filosofia que não acompanha as mudanças no debate matemático tem pouca chance de prosperar nesse objetivo.

Outro ponto que desperta curiosidade é o quanto sua crítica a Quine precisa ser modificada. Em que bases Maddy pode continuar recusando de maneira justa a subordinação da matemática às ciências naturais? Pois Maddy admite que houve um tempo em que a investigação matemática estava subordinada a interesses científicos. O que ela não aceita é continuar a subordinar a matemática contemporânea às ciências empíricas, pois desde então a matemática mudou. Quine não é cego para essa mudança, porém ele vê partes da matemática pura como "recreação matemática sem direitos ontológicos" (QUINE, 1986, p. 400) ou, por assim dizer, como matemática que desviou-se de sua meta principal, que saiu do bom caminho. Para Quine, o bom caminho é manter-se próximo à matemática aplicada; para Maddy, o bom caminho é manter-se fiel à profundidade matemática. Como decidir entre um e outro? Como não pensar que é a matemática pura contemporânea que está desviada do bom caminho? A postura de Quine com respeito a partes da matemática pura contemporânea é análoga à postura de Maddy com respeito a uma matemática futura hipotética que vire as costas para a profundidade matemática. Maddy criticara a posição quiniana com base na prática matemática. Mas agora que ela admite que a comunidade inteira pode perder-se, mesmo que ninguém se dê conta disso, como saber se a comunidade já não se perdeu no passado, quando passou a priorizar a matemática pura sobre as aplicações? Nesse caso, Quine teria razão.

O naturalismo de Maddy rejeita não só o argumento de indispensabilidade de Quine, mas qualquer argumento que queira criticar um empreendimento *bem sucedido* em termos outros que não os seus próprios[6]. Maddy estaria traindo esse preceito básico do seu naturalismo? Talvez a chave para a questão estivesse na avaliação do *sucesso* do empreendimento matemático. A matemática atual é bem sucedida, mas uma matemática futura hipotética que despreze a profundidade matemática talvez fosse mal sucedida, e portanto poderia ser criticada em termos que não os seus próprios. O problema com esse raciocínio é que ele é inconciliável com a pretensa autonomia da matemática. Se a matemática é autônoma, a avaliação do sucesso da matemática tem de acontecer em termos matemáticos. E nos termos de uma matemática futura hipotética que alimente metas desconectadas da profundidade matemática, provavelmente ela será bem sucedida. Não é possível dizer que a matemática é autônoma *apenas enquanto não se afastar da busca pela profundidade matemática*, porque isso já não seria autonomia. Isso seria subordinação da matemática a uma filosofia ou às teses de uma análise histórico-sociológica da prática matemática de uma época específica.

Enquanto tomada *apenas* como uma explicação filosófica ou histórico-sociológica do fenômeno da objetividade na matemática contemporânea, a ideia de que a investigação matemática se pauta pelo rastreamento da profundidade, fertilidade, produtividade matemáticas, enfim, tem mérito inegável. Maddy troca o misterioso mundo de entidades abstratas do realismo por um conjunto de características que os matemáticos são *experts* em reconhecer usando seus métodos convencionais, e com isso traz a objetividade matemática para o âmbito dos fenômenos mundanos. Ademais, a simples explicação da objetividade matemática não fere a autonomia da matemática. Se entendida como uma explicação momentânea — adequada para a matemática de hoje —, ela é compatível com a ideia de que a matemática pode continuar buscando a profundidade matemática ou o que for por suas próprias luzes, ou passar a orientar-se para outras direções, caso o desenvolvimento da própria disciplina leve a isso. O problema, o alvo da nossa crítica, não é a explicação da objetividade em si, mas o fato de Maddy acreditar que a partir dessa explicação ela tenha bases para "rejeitar o niilismo" de *Naturalism in Mathematics.* Ao proceder assim, a nosso ver Maddy põe-se contra seu próprio naturalismo, e cai no mesmo erro que critica em outras filosofias.

Como dissemos, Maddy não dá destaque, não elabora em *Defending the Axioms* essa mudança de posição com respeito a suas obras

[6]Cabe aqui uma pergunta pela linha demarcatória que separa o âmbito matemático do extra-matemático. Maddy rejeita a ideia de uma linha demarcatória bem definida, mas isso não invalida a distinção (Cf. MADDY, 1997, p. 188 e seguintes).

anteriores. Talvez essa mudança não deva ser levada tão a sério quanto fizemos aqui. Todavia, embora apenas sutilmente notada em *Defending the Axioms*, ela pode ser considerada a expressão de uma característica que perpassa a obra de Maddy desde *Naturalism in Mathematics*. Existe uma tensão na filosofia de Maddy entre priorizar a prática matemática — ela faz dos consensos metodológicos da comunidade matemática a matéria-prima e os parâmetros de avaliação de qualquer filosofia da matemática — e recusar a ideia de que a matemática é o que os matemáticos fazem. A explicação da objetividade pela noção de profundidade matemática é um produto dessa tensão[7]. A partir dessa noção, Maddy afirma que o fator determinante é a busca pela profundidade matemática; os matemáticos fazem o que fazem *porque* estão buscando a profundidade matemática. Mas, depois da discussão acima, podemos nos perguntar se o naturalismo de Maddy é compatível com uma posição que identifique como fator determinante outra coisa que não a prática matemática em si. Não seriam a própria prática matemática, os consensos metodológicos da comunidade e suas transformações encadeadas ao longo da história que, autonomamente, delineariam o que é a matemática e balizariam as metas da investigação matemática? Maddy flerta com uma concepção histórico-sociológica da matemática desse tipo, mas repele-a sistematicamente. A noção de profundidade matemática é seu lance final, ao menos por ora, nessa peleja, afastando-a de vez de uma concepção histórico-sociológica da matemática, e ao mesmo tempo, a nosso ver, ameaçando seu naturalismo.

Sumarizando, o trabalho de Maddy em *Defending the Axioms* guarda duas diferenças importantes com relação a seu naturalismo passado: ela se dedica à prosa sem autocensura, ao explicar a objetividade matemática pelo conceito de profundidade matemática; e ela arrisca-se a adotar essa noção como ponto de vista privilegiado para julgar a matemática, movimento que ela havia vetado explicitamente no passado. Apesar disso, entendemos que Maddy é bem sucedida, em sua última obra e nas anteriores, em mostrar que a matemática é autônoma com respeito à filosofia e às ciências. A dificuldade consiste em conciliar a autonomia da matemática com a explicação do fenômeno matemático. Na medida em que a explicação do empreendimento matemático se limita a ser uma *explicação*, ainda que talhada em termos extra-matemáticos, ela não precisa ser vista como contrária ao reconhecimento da autonomia da matemática. Uma explicação desse tipo

[7]Discutimos na página 137 e seguintes como a noção de profundidade matemática permite a Maddy evitar a fundamentação da objetividade matemática em um substrato sociológico.

será, inevitavelmente, prosa, quando vista a partir da matemática, mas talvez isso não a faça menos interessante. O que parece contrário ao reconhecimento da autonomia da matemática é a conversão da explicação em *norma*, em parâmetro de avaliação da própria matemática. Esse é um ponto que exigiria maior reflexão. Ele se relaciona com a bem conhecida polêmica sobre o caráter meramente descritivo ou potencialmente normativo das explicações naturalistas. Se um naturalismo circunscreve-se à mera descrição, ele deixa de desempenhar uma função vital do pensamento filosófico, que é a crítica; porém, se ele se arroga funções normativas, corre o risco de instituir um tribunal filosófico para julgar a ciência ou, no caso em tela, para julgar a matemática. Essa discussão transcende o escopo deste trabalho.

REFERÊNCIAS

BENACERRAF, P. What numbers could not be. In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). *Philosophy of Mathematics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983a. p. 272–294.

BENACERRAF, P. Mathematical truth. In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). *Philosophy of Mathematics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983b. p. 403–420.

BOOLOS, G. The iterative conception of set. In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). *Philosophy of Mathematics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 486–502.

BOOLOS, G. Must we believe in set theory? In: ______. *Logic, Logic, and Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1998. p. 120–132.

BROWN, J. R. *Philosophy of Mathematics: a contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. New York: Routledge, 2008.

BURGESS, J. P. Numbers and ideas. In: ______. *Mathematics, Models, and Modality: selected philosophical essays*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008. p. 23–30.

BURGESS, J. P.; ROSEN, G. *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, 1932; apud BOOLOS, 1983.

CANTOR, G. Letter to dedekind. In: HEIJENOORT, J. van (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967. p. 113–117.

COHEN, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Mineola, New York: Dover Publications, 2008.

da COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Hucitec, 2008.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1982.

DETLEFSEN, M. *Hilbert's Programme*. Dordrecht, Holland: Reidel, 1986.

DETLEFSEN, M. On an Alleged Refutation of Hilbert's Program using Gödel's First Incompleteness Theorem. In: DETLEFSEN, M. (Ed.). *Proof, Logic and Formalization*. London: Routledge, 1992. p. 199–235.

DUMMETT, M. Truth. In: *Truth and other enigmas*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978. p. 1–24.

EINSTEIN, A. *Notas Autobiográficas*. Tradução de Aulyde Soares Rodrigues. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. *The Evolution of Physics*. London: Cambridge University Press, 1938.

ENDERTON, H. B. *Elements of set theory*. New York: Academic Press, 1977.

FEFERMAN, S. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, v. 49, p. 35–92, 1960.

FEFERMAN, S.; FRIEDMAN, H. M.; MADDY, P.; STEEL, J. R. Does mathematics need new axioms? *The Bulletin of Symbolic Logic*, v. 6, p. 401–446, 2000. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/420965>. Acesso em: ago/2012.

FELGNER, U. Introductory note to 1908b. In: EBBINGHAUS, H.-D. et al. (Ed.). *ERNST ZERMELO: Collected Works*. [S.l.]: Springer, 2010. Volume I, p. 160–189.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1963.

FRAENKEL, A. A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: Elsevier, 1973.

GALILEI, G. *Opere*. [S.l.]: G. Barbera, 1964–66. apud KLINE, 1972.

GöDEL, K. What is Cantor's continuum problem? In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). *Philosophy of Mathematics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 470–485.

HERSH, R. *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press, 1997.

HILBERT, D. Sobre o infinito. In: CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. (Ed.). *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática*. São Paulo: UNESP, 2006. p. 76–91.

HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. Boca Raton: Taylor & Francis, 1999.

HYLTON, P. *Quine*. New York: Routledge, 2007.

JECH, T. J. About the axiom of choice. In: BARWISE, J. (Ed.). *Handbook of mathematical logic*. Amsterdam: Elsevier, 1977. p. 345–370.

KANAMORI, A. *Set theory from Cantor to Cohen*. [s.n.], 2007. Disponível em: <http://math.bu.edu/people/aki/16.pdf>. Acesso em: fev/2012.

KANAMORI, A. Cohen and set theory. *The Bulletin of Symbolic Logic*, Sept. 2008. Volume 14, number 3, pp. 351-378. Disponível em: <http://math.bu.edu/people/aki/14.pdf>. Acesso em: fev/2012.

KANAMORI, A. Introductory note to 1930a. In: EBBINGHAUS, H.-D. et al. (Ed.). *ERNST ZERMELO: Collected Works*. [S.l.]: Springer, 2010. Volume I, p. 390–399.

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press, 1972.

KUNEN, K. *Set Theory: an introduction to independence proofs*. Amsterdam: Elsevier, 1980.

KUNEN, K. *The Foundations of Mathematics*. London: College Publications, 2009. Disponível em: <http://www.math.wisc.edu/~kunen/notes_post.ps (versão parcial)>. Acesso em: abr/2012.

MACHOVER, M. *Set theory, logic and their limitations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

MADDY, P. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1990.

MADDY, P. *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1997.

MADDY, P. *Second Philosophy: a naturalistic method*. Oxford: Oxford University Press, 2007.

MADDY, P. *Defending the Axioms: on the philosophical foundations of set theory*. Oxford: Oxford University Press, 2011.

MOSCHOVAKIS, Y. *Descriptive Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1980.

MOSCHOVAKIS, Y. *Notes on Set Theory*. [S.l.]: Springer, 2006.

NEWBURGH, R.; PEIDLE, J.; RUECKNER, W. Einstein, Perrin, and the reality of atoms: 1905 revisited. *American Journal of Physics*, Carlisle, Pennsylvania, June 2006. Volume 74, Issue 6, pp. 478. Disponível em: <http://physlab.lums.edu.pk/images/f/fe/Ref1.pdf>. Acesso em: abr/2012.

PENCO, C. *Introdução à filosofia da linguagem*. Petrópolis: Vozes, 2006.

PERRIN, J. *Atoms*. Translation by D. Ll. Hammick. New York: D. Van Nostrand Company, 1916. Disponível em: <http://archive.org/details/atomsjean00perrrich>. Acesso em: abr/2012.

QUINE, W. V. O. On what there is. In: *From a logical point of view*. New York: Harper Torchbooks, 1963. p. 1–19.

QUINE, W. V. O. Posits and reality. In: ______. *The ways of paradox and other essays*. New York: Randon House, 1966a. p. 233–241.

QUINE, W. V. O. Carnap and logical truth. In: ______. *The ways of paradox and other essays*. New York: Randon House, 1966b. p. 100–125.

QUINE, W. V. O. Epistemology naturalized. In: *Ontological Relativity and other essays*. New York: Columbia University Press, 1969. p. 69–90.

QUINE, W. V. O. Things and their place in theories. In: ______. *Theories and Things*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1981a. p. 1–23.

QUINE, W. V. O. Five milestones of empiricism. In: ______. *Theories and Things*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1981b. p. 67–72.

QUINE, W. V. O. Reply to Parsons. In: HAHN, E.; SCHILPP, P. A. (Ed.). *The Philosophy of W. V. Quine*. Peru, Illinois: Open Court, 1986.

QUINE, W. V. O. *Pursuit of truth*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1992.

QUINE, W. V. O. *Philosophy of Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1994.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SCHIEMER, G. Fraenkel's axiom of restriction: axiom choice, intended models and categoricity. In: LöWE, B.; MüLLER, T. (Ed.). *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. London: College Publications, 2010. p. 307–340. Disponível em: <http://www.lib.uni-bonn.de/PhiMSAMP/Book/>. Acesso em: set/2012.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Natick, Massachusetts: Association for Symbolic Logic, 1967.

SHOENFIELD, J. R. Axioms of set theory. In: BARWISE, J. (Ed.). *Handbook of mathematical logic*. Amsterdam: Elsevier, 1977. p. 321–344.

SILVA, J. J. da. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Unesp, 2007.

von NEUMANN, J. An axiomatization of set theory. In: HEIJENOORT, J. van (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967. p. 393–413.

WITTGENSTEIN, L. *Wittgenstein's lectures on the Foundations of Mathematics. Cambridge, 1939*. Hassocks, Sussex: The Harvester Press, 1976.

WITTGENSTEIN, L. *Wittgenstein and the Vienna Circle*. Oxford: Basil Blackwell, 1979; apud MADDY, 1997.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações Filosóficas*. Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

ZERMELO, E. A new proof of the possibility of a well-ordering. In: HEIJENOORT, J. van (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967. p. 183–198.

ZERMELO, E. Investigations in the foundations of set theory i. In: EBBINGHAUS, H.-D. et al. (Ed.). *ERNST ZERMELO: Collected Works.* Berlin: Springer, 2010a. Volume I, p. 188–229.

ZERMELO, E. On boundary numbers and domains of sets: new investigations in the foundations of set theory. In: EBBINGHAUS, H.-D. et al. (Ed.). *ERNST ZERMELO: Collected Works.* Berlin: Springer, 2010b. Volume I, p. 400–431.