Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
e
Computação Científica

Ideais Primitivos de C*-álgebras

Allysson Gomes Dutra

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis, maio de 2012.

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

e

Computação Científica

Ideais Primitivos de C*-álgebras

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Allysson Gomes Dutra

Florianópolis, maio de 2012.

Ideais primitivos de C*-álgebras

por

Allysson Gomes Dutra

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador em Exercício da Pós-Graduação
em Matemática e Computação Científica

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC - Orientador)

Prof. Dr. Alcides Buss (UFSC)

Prof. Dr. Danilo Royer (UFSC)

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)

Florianópolis, 10 de maio de 2012.

Á minha família.

Agradecimentos

É o momento de agradecer a quem tornou possível este trabalho; agradeço então a todos os professores que tive ao longo da minha tragetória de estudante, em especial ao professor Everaldo (8º série) que me despertou o interesse na matemática, ao meu grande amigo Reginaldo que me incentivou a ingressar na universidade e me apresentou as somas de Riemann. Agradeço ao professor Ruy Exel, que me orientou sabiamente e junto com muitos outros professores do departamento de matemática da UFSC me inspiraram a permanecer nesta carreira que é tão difícil. Agradeço aos professores Alcides Buss, Danilo Royer e Alexandre Baraviera por terem aceito compor a minha banca de defesa de mestrado e pelas correções, esclarecimentos e sugestões de melhora para o trabalho. Um estado de espirito equilibrado ao longo de qualquer carreira é o que determina a permanencia com paixão na mesma, é impossível conseguir tal equilibrio sozinho, então agradeço a minha família (Mãe, Vó, Irmão e Irmã) e amigos pelo apoio e momentos felizes. Muitos são os que me ajudaram ao longo destes 3 anos em florianópolis, em particular, em muitos dos momentos díficeis que passei aqui tive apoio do casal mais generoso desta ilha: Luiz Henrique e Thalita Mônica, obrigado por tudo. Aos companheiros de mestrado: Aster, Deividi, Edson, Eric, Gustavo, Jaqueline, Maira, Mateus, Sara, Soyara, Thiane e Tiara, muito obrigado pela amizade. Agradeço também o apoio financeiro do cnpq. E por fim agradeço o guia único de todos, comumente chamado de Deus.

Resumo

Começamos este trabalho definindo alguns conceitos preliminares em C*-álgebras, onde abordamos o teorema de Gelfand, que trata de representar cada C*-álgebra abeliana A por $C_0(\Omega(A))$, onde $\Omega(A)$ (caracteres) é um espaço Hausdorff localmente compacto. Num segundo momento trabalhamos o conceito de representação de C*-álgebras, onde o caso particular das representações irredutíveis tem papel análogo ao dos caracteres no caso abeliano, os núcleos de tais representações formam o espaço dos ideais primitivos $Prim(\mathcal{A})$.

Quando nos restringimos ás C*-álgebras separáveis o espaço $Prim(\mathcal{A})$ possui a propriedade de Baire, propriedade esta que é importante para se concluir a equivalência entre os conceitos de ideal primo fechado e ideal primitivo, e desta equivalência decorre a sobriedade de $Prim(\mathcal{A})$.

Na parte final do trabalho estudamos o importante teorema de Dauns-Hofmann, que nos deu suporte para a demonstração do isomorfismo de Dixmier, e este último usamos para demonstrar o isomorfismo entre $Z(\mathcal{A})$ e $C_0(Prim(\mathcal{A}))$ no caso em que $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$ é Hausdorff.

Palavras-chave: C*-álgebras, ideais primitivos, ideais pri-

mos, teorema de Dauns-Hofmann

Abstract

We start this work defining some premilinary concepts in C*-algebras, where we discuss the Gelfand theorem, wich deals with the representation of each abelian C*-algebra A by $C_0(\Omega(A))$, where $\Omega(A)$ (characters) is a locally compact Hausdorff spaces. Subsequently, we focus on the concept of the C*-algebras representation, where the particular case of irreducible representations has similar role of the characters in the abelian case, the kernel of such representations form the space of primitives ideals *Prim(A)*.

When we are restricted to separables C*-algebras the *Prim(A)* space has the Baire property, wich is important to conclude the equivalence between the concepts of closed prime ideal and primitive ideal, and from this equivalence derives the sobriety of the *Prim(A)*.

In the last chapter, we study the important theorem of Dauns-Hofmann, which gave us support for the demonstration of the Dixmier isomorphism, and this last one we used to demonstrate the isomorphism between $Z(A)$ and $C_0(Prim(A))$

in the case where *Prim*$(\tilde{A})$ is Hausdorff.

Key-words: C*-algebras, primitives ideals, prime ideal, Dauns-Hofmann theorem

Sumário

Introdução

Iniciaremos este trabalho definindo a estrutura das C*-álgebras e abordando alguns de seus conceitos e propriedades. Faremos um breve estudo sobre as C*-álgebras abelianas, onde demonstraremos o importante teorema de Gelfand. Definiremos os funcionais positivos e veremos algumas de suas propridades, conceito esse que terá papel fundamental no estudo das representações de C*-álgebras, pois ele será usado para construirmos um tipo especial de representação chamada GNS, e a partir delas mostraremos o teorema de Gelfand-Naimark. Apresentaremos as representações irredutíveis e mostraremos sua relação com o conceito de estado puro. Definiremos os ideais primitivos e ideais primos, e veremos que os ideais primitivos sempre são primos. Apresentaremos um espaço topológico chamado de espectro de C*-álgebras.

Estudaremos o espaço dos estados puros de C*-álgebras separáveis, onde mostraremos que este espaço é polonês. Concluiremos que este espaço também é de Baire, e através de uma aplicação canônica entre os estados puros e os ideais primitivos poderemos provar que este último espaço também é de Baire, e a partir disto poderemos mostrar que ideiais primos são primitivos e com isso concluir a sobriedade do espaço dos ideais primitivos de uma C*-álgebra separável.

Nos dedicaremos também a demonstrar o teorema de Dauns-Hofmann com base nas ideias do artigo: A SIMPLE PROOF OF THE DAUNS-HOFMANN THEOREM ([4]) de GEORGE A. ELLIOTT e DORTE OLESEN. Tal teorema será necessário para provar a sobrejetividade do isomorfismo de Dixmier, que descreve o centro da álgebra dos multiplicadores de uma C*-álgebra como as funções contínuas e limitadas do espaço dos ideais primitivos no corpo complexo. Com base no isomorfismo de Dixmier mostraremos que o centro de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, cujo espaço $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$ é Hausdorff, é isomorfo a $C_0(Prim(\mathcal{A}))$.

No apêndice veremos duas noções de unitização para C*-álgebras sem unidade que foram importantes para os teoremas de isomorfismo do capítulo 4. Construiremos a álgebra dos duplo centralizadores de uma C*-álgebra, que dará origem as duas noções de unitização.

Os resultados auxiliares (teoremas, lemas, corolários...) usados nas demonstrações dos teoremas principais deste trabalho foram todos enunciados ao longo deste e na maioria das vezes remetemos o leitor a consulta da referência [1] para acessar suas demonstrações.

Capítulo 1

Conceitos preliminares.

Neste primeiro capítulo definiremos a estrutura das C*-álgebras e abordaremos alguns de seus conceitos e propriedades. Faremos um breve estudo sobre as C*-álgebras abelianas, onde demonstraremos o importante teorema de Gelfand. Estudaremos a noção de unidade aproximada, que dará suporte para demonstrar algumas propriedades importantes para este trabalho. Definiremos os funcionais positivos e veremos algumas de suas propridades, conceito esse que terá papel fundamental no estudo das representações de C*-álgebras.

1.1 C*-álgebras.

Começaremos definindo uma álgebra de Banach A, que é um espaço de Banach dotado de uma multiplicação que o torna também uma álgebra sobre seu corpo, e satisfaz $||ab|| \leq ||a||||b||$ para todos $a, b \in A$. Se A possui unidade multiplicativa 1, pede-se $||1|| = 1$.

Definição 1.1. *Uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach sobre o corpo dos números complexos dotada de uma aplicação conjugada-linear $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, tal que $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^*a^*$, $||a^*|| = ||a||$ e $||a^*a|| = ||a||^2$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$.*

A aplicação * é chamada de involução, o elemento a^* é dito adjunto de a, e a é auto-adjunto quando $a = a^*$. Dado um subconjunto B de uma C*-algebra, o conjunto $B^* = \{b^*; b \in B\}$ é chamado de adjunto de B, e B é dito auto-adjunto quando $B^* = B$. Um elemento u de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ com unidade é dito unitário quando $u^*u = uu^* = 1$, e o conjunto dos elementos unitários é denotado por $U(\mathcal{A})$. Por fim, definimos a classe dos elementos normais, que são os elementos a tais que $a^*a = aa^*$.

Definição 1.2. *Uma subálgebra de uma C*-álgebra é chamada* *de C*-subálgebra quando é auto-adjunta e fechada na norma.*

Note que as C*-subálgebras são C*-álgebras. A seguir abordaremos exemplos de C*-álgebras e C*-subálgebras.

Exemplo 1.3. *Se H é um espaço de Hilbert, então o espaço dos operadores limitados $B(H)$ é uma C*-álgebra com unidade.*

Exemplo 1.4. *Se H é um espaço de Hilbert, então o espaço dos operadores compactos $K(H)$ é uma C*-subálgebra de $B(H)$.*

Exemplo 1.5. *O corpo dos complexos $\mathbb{C}$ é uma C*-álgebra sob as operações usuais, involução definida pelo conjugado, e norma definida pelo módulo.*

O teorema de Gelfand-Naimark que abordaremos na seção de representações, garante surpreendentemente que "qualquer C*-álgebra é uma C*-subálgebra de $B(H)$ para um espaço de Hilbert H adequado".

Sendo A uma álgebra com unidade, um elemento $a \in A$ é inversível se existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$; o conjunto dos elementos inversíveis de A é denotado por $Inv(A)$. Como generalização do conceito de auto-valores das álgebras das matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, definimos o espectro de um elemento $a \in A$

pelo conjunto

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin Inv(A)\}.$$

Exemplo 1.6. *Seja $A = C(\Omega)$, onde Ω é um espaço compacto Hausdorff. Então $\sigma(f) = f(\Omega)$ para todo $f \in A$.*

Observação 1.7. *Em alguns casos, para evitar ambiguidades, denotaremos o espectro de um elemento a da álgebra A por $\sigma_A(a)$.*

No caso de uma álgebra A sem unidade, a definição do espectro de um elemento $a \in A$ é dada considerando-se o seu espectro na unitização $\tilde{A}$ (ver apêndice!) de A; ou seja,

$$\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a).$$

Teorema 1.8. *[2.1.11. Theorem [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra com unidade. Se $\mathcal{B}$ é uma C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$, contendo a unidade de $\mathcal{A}$, então para cada $b \in \mathcal{B}$ tem-se*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b).$$

Proposição 1.9. *[1.2.4. Lemma. [1] e 1.2.5. Theorem [1]]Seja A uma álgebra de Banach com unidade e $a \in A$. O espectro $\sigma(a)$ de a é um subconjunto fechado não-vazio contido no disco centrado na origem com raio $||a||$.*

Exemplo 1.10. *Seja* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base ortonormal para um espaço de Hilbert* H*, e considere o operador shift* $u : H \to H$ *definido por* $u(e_n) = e_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. O adjunto* u^* *é o backward shift, definido por* $u^*(e_n) = e_{n-1}$ *para* $n > 1$*, e* $u^*(e_1) = 0$*. Segue que* $u^*u = 1$*, e portanto* $||u|| = ||u^*|| = 1$*. Suponhamos que* $x = \sum \alpha_n e_n$ *é um autovetor de* u *associado a um autovalor* λ *de* u*, então*

$$\begin{aligned} u(\sum \alpha_n e_n) = \lambda \sum \alpha_n e_n \quad &\Rightarrow \\ \sum \alpha_n u(e_n) = \sum \lambda \alpha_n e_n \quad &\Rightarrow \\ \sum \alpha_n e_{n+1} = \sum \lambda \alpha_n e_n \quad &\Rightarrow \\ 0 = \lambda \alpha_1 \text{ e } \alpha_n = \lambda \alpha_{n+1} \quad & \end{aligned}$$

como u *é injetor tem-se* $\lambda \neq 0$*, assim* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = 0$ *e portanto* $x = 0$*, absurdo, então* u *não possui autovalores. Cada* $\lambda \in \mathbb{C}$ *com* $|\lambda| < 1$ *é autovalor de* u^* *com autovetor associado* $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e_n$*. Note que* $u - \lambda I$ *não é inversível se e somente se* $u^* - \overline{\lambda} I$ *é não inversível, então pela proposição acima segue que*

$$\sigma(u) = \sigma(u^*) = D = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}.$$

Para cada a em uma algebra de Banach A, definimos seu raio espectral por

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Pela proposição acima o raio espectral é sempre finito. Note que no caso do exemplo 1.6 o raio espectral de um elemento de $C(\Omega)$ coincide com sua norma. A proposição que segue mostra que isso acontece abstratamente sempre que o elemento é auto-adjunto.

Proposição 1.11. *[2.1.1. Theorem, [1]] Se a é um elemento auto-adjunto de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$, então $r(a) = ||a||$.*

Exemplo 1.12. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da C^*-álgebra $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ não é auto-adjunta e tem 1 como único autovalor, então seu raio espectral é 1, entretanto é fácil concluir que sua norma é maior que 1.

Adiante um outro resultado relativo a elementos auto-adjuntos que diz que o espectro de tais elementos é constituido somente de números reais.

Proposição 1.13. *[2.1.8. Theorem. [1]] Seja a é um elemento auto-adjunto de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$, então $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Uma classe importante de elementos auto-adjuntos são os chamados positivos. Um elemento a de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é positivo quando seu espectro admite somente números não negativos, ou seja, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, o conjunto de tais elementos será denotado por $\mathcal{A}^+$.

Em verdade, qualquer elemento a de uma C*-álgebra pode ser escrito como combinação linear de elementos auto-adjuntos, a saber,

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i \left[\frac{i(a^* - a)}{2} \right].$$

Veremos na seção de C*-álgebras abelianas que, na verdade, é possível escrever qualquer elemento de uma C*-álgebra como combinação linear de elementos positivos.

Como último conceito desta seção definimos a noção de *-homomorfismo, que será o mais importante no tratamento das C*-álgebras neste trabalho.

Definição 1.14. *Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo de álgebras entre as C*-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e φ preserva os adjuntos, isto é, $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$ para todo $a \in A$, então φ é um *-homomorfismo. Se em adição φ é bijetiva, então φ é dito um *-isomorfismo.*

Exemplo 1.15. *Facilmente vê-se que, o operador $T_u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*

definido na C-álgebra* $\mathcal{A}$ *por* $T_u(a) = uau^*$*, é um *-isomorfismo para cada* $u \in U(\tilde{\mathcal{A}})$*.*

Proposição 1.16. *[2.1.7.Theorem, [1]] Um *-homomorfismo* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *entre C*-álgebras é necessáriamente contrativo.*

1.2 C*-álgebras abelianas

Exemplo 1.17. *Seja* X *um espaço topológico, o espaço das funções contínuas limitadas* $f : X \to \mathbb{C}$ *é uma C*-álgebra abeliana com unidade, sob as operações pontuais, sob a involução definida por* $f^* = \bar{f}$ *e sob a norma do supremo. Esta álgebra é denotada por* $C_b(X)$*.*

Exemplo 1.18. *Uma função* $f \in C_b(X)$ *zera no infinito, se para todo* $\varepsilon > 0$ *o conjunto* $|f|^{-1}([\varepsilon, \infty))$ *é compacto; o espaço de tais funções é uma C*-subálgebra de* $C_b(X)$ *e é denotada por* $C_0(X)$*.*

(Em caso de dúvidas sobre os dois exemplos acima o leitor interessado pode consultar o exemplo 30 da referência [9]).

Observação 1.19. *Quando o espaço topológico* X *é compacto o espaço das funções contínuas* $C(X)$ *é claramente igual aos espaços* $C_b(X)$ *e* $C_0(X)$*.*

Definição 1.20. *Um caracter de uma álgebra de Banach abeliana A é um homomorfismo não-nulo $\tau : A \to \mathbb{C}$. Denotaremos por $\Omega(A)$ o conjunto dos caracteres de A.*

Teorema 1.21. *[1.3.3.Theorem, [1]] Se A é uma álgebra de Banach abeliana, então:*

(i) Se $\tau \in \Omega(A)$, tem-se $||\tau|| \leq 1$. Se A tem unidade então $||\tau|| = 1 = \tau(1)$.

(ii) Se A tem unidade, segue que o conjunto $\Omega(A)$ é não vazio, e a aplicação $\tau \mapsto Ker(\tau)$ define uma bijeção entre $\Omega(A)$ e o conjunto de todos os ideais maximais de A.

Pelo teorema anterior o conjunto dos caracteres $\Omega(A)$ associado a álgebra de Banach A, está contido na bola fechada unitária do espaço dual A^*. Dotaremos o conjunto $\Omega(A)$ com a topologia relativa $fraca^*$, e chamaremos o espaço topológico $\Omega(A)$ de espaço dos caracteres, ou espectro, de A. Como consequência do teorema de Banach-Alaoglu segue o resultado;

Teorema 1.22. *[1.3.5. Theorem. [1]] Se A é uma algebra de Banach abeliana, então o espaço dos caracteres $\Omega(A)$ é localmente compacto e Hausdorff. Se A tem unidade, então $\Omega(A)$ é compacto.*

Em geral o espaço dos caracteres de uma álgebra de Banach abeliana pode ser vazio, como é o caso de $A = \{0\}$. Tome uma álgebra de Banach abeliana A em que o espaço dos caracteres $\Omega(A)$ é não vazio, e para cada $a \in A$ considere a função $\hat{a}$ definida por

$$\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C},\ \tau \mapsto \tau(a).$$

Repare que a topologia do espaço dos caracteres é a menor tal que todas as funções $\hat{a}$ são contínuas, e cada conjunto

$$\{\tau \in \Omega(A); |\tau(a)| \geq \varepsilon\}$$

é um subconjunto fraco* fechado da bola fechada unitária de A^* para cada $\varepsilon > 0$, e portanto é fraco* compacto pelo teorema de Banach-Alaoglu. Portanto, $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$. A função $\hat{a}$ é chamada de transformada de Gelfand de a.

Teorema 1.23. *[1.3.4. Theorem, [1]]. Seja A uma álgebra de Banach abeliana.*

1] *Se A possui unidade, então $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$ para cada $a \in A$.*

2] *Se A não possui unidade, então $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$ para cada $a \in A$.*

No caso das *-álgebras de Banach abelianas, sem unidade, não nulas; não se tem em geral que seu espaço dos caracteres é não vazio.

Exemplo 1.24. *[Exemplo da Camila, [9]] Tome o espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com a norma usual, involução dada por $a^* = \overline{a^T}$ e o produto definido por $ab = 0$. Este espaço é uma *-álgebra de Banach abeliana não-vazia e sem unidade. Veremos agora que o espaço dos caracteres $\Omega(\mathcal{M})$ é vazio: Seja $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo, então para cada $a \in \mathcal{M}$ tem-se*

$$0 = \tau(0) = \tau(a^2) = \tau(a)^2 \Rightarrow \tau(a) = 0.$$

Portanto $\tau \equiv 0$.

Porém, se acrescentarmos a estrutura adicional das C*-álgebras, garantimos que seu espectro é não vazio. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra abeliana, sem unidade, e não nula. Então $\mathcal{A}$ contém um elemento auto-adjunto $a \neq 0$. Pela proposição 1.11 tem-se $r(a) = ||a||$; portanto, da compacidade do espectro da unitização $\tilde{\mathcal{A}}$, a transformada de Gelfand $\hat{a}$ atinge valor de máximo, então existe $\tau \in \Omega(\tilde{\mathcal{A}})$ tal que $|\tau(a)| = ||a|| \neq 0$. Consequentemente, a restrição de τ a $\mathcal{A}$, é um caractere de $\mathcal{A}$.

Logo, o espectro de qualquer C*-álgebra abeliana, não nula, é não vazio.

Lema 1.25. *[2.1.9. Theorem, [1]] Se τ é um caracter em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ para cada $a \in \mathcal{A}$.*

Teorema 1.26. *(Gelfand) Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra abeliana e não-nula, então a representação de Gelfand*

$$\Gamma : \mathcal{A} \to C_0(\Omega(\mathcal{A})), \ a \mapsto \hat{a},$$

*é um *-isomorfismo isométrico.*

Demonstração. A transformação Γ é um homomorfismo. Segue do lema imediatamente anterior que, se $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$, então $\Gamma(a^*)(\tau) = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \Gamma(a)^*(\tau)$ para cada $a \in \mathcal{A}$, então Γ é um *-homomorfismo. Segue da proposição 1.11 e do teorema 1.23 que

$$\begin{aligned} ||\Gamma(a)||^2 = ||\Gamma(a)^*\Gamma(a)|| &= ||\Gamma(a^*a)|| \\ &= \sup_{\tau \in \Omega(\mathcal{A})} |\Gamma(a^*a)(\tau)| \\ &= \sup |\widehat{a^*a}(\Omega(\mathcal{A}))| \\ &= \sup |\sigma(a^*a)| \\ &= r(a^*a) = ||a^*a|| = ||a||^2. \end{aligned}$$

Portanto a transformação Γ é isométrica.

Claramente, $\Gamma(\mathcal{A})$ é uma subálgebra fechada de $C_0(\Omega(\mathcal{A}))$, separa pontos de $\Omega(\mathcal{A})$, e para cada $\tau \in \Omega(\mathcal{A})$ existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\Gamma(a)(\tau) \neq 0$. O teorema de Stone-Weierstrass garante que $\Gamma(\mathcal{A})$ é densa em $C_0(\Omega(\mathcal{A}))$, então $\Gamma(\mathcal{A}) = C_0(\Omega(\mathcal{A}))$. $\square$

Observação 1.27. *Podemos dizer que, a classe das álgebras $C_0(X)$ onde X é um espaço topológico, citada no exemplo 2.20, é a morada das C^*-álgebras abelianas; e antes do teorema de Gelfand o interior dessa casa (espaço X) era bastante bagunçado, e depois deste chegou-se na maior organização possível (X localmente compacto e Hausdorff) desta morada.*

A seguir aplicaremos o teorema de Gelfand para mostrar que qualquer elemento auto-adjunto a de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ com unidade pode ser decomposto como uma combinação linear de elementos positivos. É fácil ver que o conjunto

$$C^*(1,a) = \overline{span\{1, a, a^2, a^3, ...\}}$$

é uma C*-subálgebra abeliana de $\mathcal{A}$, e é a menor que contém a e 1. Segue do teorema 1.23 e da proposição 1.13, que a representação de Gelfand $\hat{a}$ é uma função em $C_0(\Omega(C^*(1,a)))$

com imagem contida em $\mathbb{R}$. Note que as funções

$$\hat{a}^+ = \frac{|\hat{a}| + \hat{a}}{2} \text{ e } \hat{a}^- = \frac{|\hat{a}| - \hat{a}}{2}$$

são positivas, e portanto elementos positivos da C*-álgebra $C_0(\Omega(C^*(1,a)))$, e ainda $\hat{a} = \hat{a}^+ - \hat{a}^-$ com $\hat{a}^+\hat{a}^- = 0$. Logo, aplicando o *-isomorfismo de Gelfand inverso em $\hat{a} = \hat{a}^+ - \hat{a}^-$ obtemos a decomposição desejada.

A decomposição de elementos auto-adjuntos em termos de elementos positivos é essencial para demonstrar o resultado que segue.

Proposição 1.28. *[2.2.4.Theorem, [1]] Se a é um elemento arbitrário de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$, então a^*a é positivo.*

Outro resultado útil que decorre do teorema de Gelfand é a existência de "raiz quadrada"de elemento positivo, ou seja:

Proposição 1.29. *[2.2.1.Theorem, [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e $a \in \mathcal{A}^+$. Então existe um único $b \in \mathcal{A}^+$ tal que $b^2 = a$ (b será denotado por $a^{\frac{1}{2}}$).*

1.3 Unidade aproximada.

Nesta seção estudaremos alguns resultados importantes para demonstrar, de forma simples, um dos resultados centrais dessa dissertação; o teorema de Dauns-Hofmman.

Definição 1.30. *Uma unidade aproximada para uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é uma rede $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos positivos da bola unitária fechada de $\mathcal{A}$ tal que $a = \lim au_\lambda = \lim u_\lambda a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Proposição 1.31. *[3.1.1. Theorem. [1]]Toda C*-álgebra $\mathcal{A}$ admite um aproximante unital.*

A existencia de um aproximante unital é essencial na demonstração do teorema que segue.

Proposição 1.32. *[1.1.1.,3.1.3., 3.1.4. Theorems, [1]] Se I é um ideal fechado de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então*

1] *I é auto-adjunto e portanto uma C*-subálgebra de $\mathcal{A}$.*

2] *O quociente $\mathcal{A}/I$ é uma C*-álgebra sob as operações usuais, a involução definida por $(a+I)^* = a^*+I$, e a norma quociente definida por $||a + I|| = \inf_{b\in I} ||a - b||$.*

Proposição 1.33. *[3.1.5.Theorem, [1]] Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um *-homomorfismo injetivo entre as C*-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então φ é necessariamente isométrica.*

Proposição 1.34. *[3.1.6. Theorem, [1]] Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um *-homomorfismo entre C*-álgebras, então $\varphi(A)$ é uma C*-subálgebra de $\mathcal{B}$.*

Proposição 1.35. *[3.1.7.Theorem, [1]] Sejam $\mathcal{B}$ e I uma C*-subálgebra e um ideal fechado na C*-álgebra $\mathcal{A}$ respectivamente. Então $\mathcal{B} + I$ é uma C*-subálgebra de $\mathcal{A}$.*

1.4 Funcionais lineares positivos.

Os funcionais tratados nesta seção serão essenciais no estudo das representações de C*-álgebras do próximo capítulo. Veremos agora a definição e algumas propridades boas de tais funcionais.

Definição 1.36. *Um funcional linear $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é dito positivo se $\tau(\mathcal{A}^+) \subseteq= \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Proposição 1.37. *[3.3.1.Theorem, [1]] Se τ é um funcional linear positivo em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então τ é limitado.*

Proposição 1.38. *[3.3.2.Theorem, [1]] Se τ é um funcional linear positivo em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ e $|\tau(a)|^2 \leq ||\tau||\tau(a^*a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Proposição 1.39. *[3.3.7.Theorem, [1]] Seja τ um funcional linear positivo em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$.*

1] *Para cada $a \in \mathcal{A}$, $\tau(a^*a) = 0$ se e somente se $\tau(ba) = 0$ para todo $b \in \mathcal{A}$.*

2] *A desigualdade $\tau(b^*a^*ab) \leq ||a^*a||\tau(b^*b)$ vale para todos $a, b \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.40. *Um funcional linear positivo em uma C*-álgebra é um estado quando sua norma é 1. O conjunto dos estados de $\mathcal{A}$ é denotado por $E(\mathcal{A})$.*

Proposição 1.41. *Seja τ um estado na C*-álgebra $\mathcal{A}$, então o funcional $\tau(u^* \cdot u)$ também é um estado para todo $u \in U(\tilde{\mathcal{A}})$.*

Demonstração. O operador $T_u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definido por $T_u(a) = uau^*$ é um *-isomorfismo, então pela proposição 1.33 é isométrico. Portanto o funcional $\tau(u^* \cdot u)$ é positivo, e

$$\begin{aligned} ||\tau(u^* \cdot u)|| &= \sup_{a\in\mathcal{A}} \frac{|\tau(u^*au)|}{||a||} \\ &= \sup_{a\in\mathcal{A}} \frac{|\tau(u^*T_u(a)u)|}{||T_u(a)||} \\ &= \sup_{a\in\mathcal{A}} \frac{|\tau(a)|}{||a||} = ||\tau|| = 1. \end{aligned}$$

Logo $\tau(u^* \cdot u)$ é um estado.

$\square$

A proposição a seguir, cuja tese diz que o conjunto dos estados é não vazio, é demonstrado via teoremas de Gelfand e de Hahn-Banach.

Proposição 1.42. *[3.3.6.Theorem, [1]] Se a é um elemento normal de uma C^*-álgebra não-nula $\mathcal{A}$, então existe um estado τ de $\mathcal{A}$ tal que* $||a|| = |\tau(a)|$.

Capítulo 2

Representações de C*-álgebras.

Neste capítulo estudaremos a noção de representação de C*-álgebras. Construiremos um tipo especial de representação a partir de um funcional positivo chamada GNS, e a partir delas mostraremos o teorema de Gelfand-Naimark. Apresentaremos as representações irredutíveis e mostraremos sua relação com o conceito de estados puros. Definiremos os ideais primitivos e ideais primos, e veremos que os ideais primitivos sempre são primos. Apresentaremos um espaço topológico chamado de espectro de C*-álgebras.

2.1 Representação GNS.

Definição 2.1. *Uma representação de uma C*-álgebra* $\mathcal{A}$ *é um par* (H, π) *onde* H *é um espaço de Hilbert e* $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ *é um *-homomorfismo. Dizemos que* (H, π) *é fiel quando* π *é injetiva.*

Uma representação (H, π) de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é dita não-degenerada quando

$$[\pi(\mathcal{A})(H)] = \overline{span\{\pi(a)(h); a \in \mathcal{A}, h \in H\}} = H.$$

Exemplo 2.2. *O par* $(\mathbb{C}, \tau)$ *em que* τ *é um caracter em uma C*-álgebra* $\mathcal{A}$ *abeliana é uma representação não-degenerada de* $\mathcal{A}$.

Exemplo 2.3.

Se $(H_\lambda, \pi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de representações de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então a sua soma direta (H, π), onde $H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ e $\pi(a)((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (\pi_\lambda(a)(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H$, é uma representação de $\mathcal{A}$. Ainda, se para cada elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$ existir $\lambda \in \Lambda$ tal que $\pi_\lambda(a) \neq 0$, então (H, π) é fiel.

Agora construiremos a representação GNS (ou representação Gelfand-Naimark-Segal) associada a um funcional linear positivo. Se τ é um funcional linear positivo em uma C*-álgebra, é fácil checar, pela proposição 1.39, que o conjunto

$$N_\tau := \{a \in \mathcal{A}; \tau(a^* a) = 0\}$$

é um ideal a esquerda fechado de $\mathcal{A}$, e que a aplicação

$$(\mathcal{A}/N_\tau)^2 \to \mathbb{C}, \ (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \tau(b^* a),$$

é um produto interno bem definido no espaço vetorial $\mathcal{A}/N_\tau$. Denotaremos por H_τ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $\mathcal{A}/N_\tau$.

Para cada $a \in \mathcal{A}$, defina o operador $\pi(a) \in B(\mathcal{A}/N_\tau)$ por

$$\pi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau.$$

Novamente pela proposição 1.39, segue facilmente que $||\pi(a)|| \leq ||a||$. Então o operador $\pi(a)$ possui uma extensão a um operador limitado $\pi_\tau(a)$ em H_τ. É fácil mostrar que a aplicação

$$\pi_\tau : \mathcal{A} \to B(H_\tau), \ a \mapsto \pi_\tau(a),$$

é um *-homomorfismo. Então (H_τ, π_τ) é uma representação, e será chamada de representação GNS de $\mathcal{A}$ associada ao funcional positivo τ.

Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra não nula, definimos a representação universal como sendo a soma direta da família $(H_\tau, \pi_\tau)_{\tau \in E(\mathcal{A})}$.

Teorema 2.4. *(Gelfand-Naimark) Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra, então ela possui uma representação fiel. Especificamente, a representação universal é fiel.*

Demonstração. Seja (H, π) a representação universal de $\mathcal{A}$, e suponhamos que $\pi(a) = 0$ para $a \in \mathcal{A}$. Pela proposição 1.42 existe um estado τ em $\mathcal{A}$ tal que $||a^*a|| = \tau(a^*a)$. Com base nas proposições 1.28 e 1.29 tomemos o elemento $b = (a^*a)^{\frac{1}{4}}$, então

$$||a||^2 = ||a^*a|| = \tau(a^*a) = \tau(b^4) = ||\pi_\tau(b)(b + N_\tau)||^2.$$

Como $\pi_\tau(b^4) = \pi_\tau(a^*a) = \pi_\tau(a^*)\pi_\tau(a) = 0$, segue que para todo $x \in H_\tau$ temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle \pi_\tau(b^4)(x), x \rangle &= \langle \pi_\tau(b^2)(x), \pi_\tau(b^2)(x) \rangle \\ &= ||\pi_\tau(b^2)(x)||^2, \end{aligned}$$

então $\pi_\tau(b^2) = 0$; portanto, para todo $x \in H_\tau$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \langle \pi_\tau(b^2)(x), x \rangle &= \langle \pi_\tau(b)(x), \pi_\tau(b)(x) \rangle \\ &= ||\pi_\tau(b)(x)||^2 \Rightarrow \pi_\tau(b) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $a = 0$, logo (H, π) é fiel. □

Seja I um ideal fechado de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Pelo teorema de Gelfand-Neimark existe uma representação fiel (H, π)

(não-degenerada) da C*-álgebra $\mathcal{A}/I$, então $(H, \pi \circ q)$ é uma representação (não-degenerada) de $\mathcal{A}$ tal que $Ker(\pi \circ q) = I$, onde q é a aplicação canônica entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/I$. Assim concluimos que todo ideal fechado de $\mathcal{A}$ é o núcleo de alguma representação não-degenerada de $\mathcal{A}$.

2.2 Representações irredutíveis e estados puros.

Se (H, π) é uma representação de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, dizemos que um vetor $x \in H$ é cíclico se $[\pi(\mathcal{A})x] = H$, onde

$$[\pi(\mathcal{A})x] := \overline{span\{\pi(a)(x); a \in \mathcal{A}\}}.$$

Quando (H, π) admite um vetor cíclico, ela é chamada de representação cíclica.

Para o caso das representações GNS associadas a estados tem-se a garantia de que esta possui vetor cíclico. O resultado seguinte mostra, usando o teorema da representação de Riesz, como um estado pode ser descrito em termos da representação GNS associada e de um vetor cíclico.

Proposição 2.5. *[5.1.1.Theorem, [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra* *e $\tau \in S(\mathcal{A})$. Então existe um único vetor $x_\tau \in H_\tau$ tal que*

$$\tau(a) = \langle a + N_\tau, x_\tau \rangle \quad (a \in \mathcal{A}).$$

E ainda, x_τ é um vetor cíclico unitário de (H_τ, π_τ) e

$$\pi_\tau(a)(x_\tau) = a + N_\tau \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Definição 2.6. *Se K é um subespaço do espaço vetorial H, dizemos que K é invariante por um operador $T : H \to H$ se $T(K) \subseteq K$. K é invariante por um subconjunto S de $B(H)$ se é invariante por todos os elementos de S.*

Definição 2.7. *Uma representação (H, π) de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é dita irredutível se $\{0\}$ e H são os únicos subespaços fechados de H invariantes por $\pi(\mathcal{A})$.*

Exemplo 2.8. *O par $(\mathbb{C}, \tau)$ em que τ é um caracter em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ abeliana é uma representação irredutível de $\mathcal{A}$.*

Dado um subconjunto C de uma álgebra A, definimos o comutante C' como sendo todos os elementos de A que comutam com todos os elementos de C. Se C é um subconjunto auto-adjunto de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então é fácil mostrar que C' é uma C*-subálgebra.

Proposição 2.9. *[5.1.5.Theorem, [1]] Seja (H, π) uma representação não-nula de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$.*

1] *(H, π) é irredutível se e somente se $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$, onde $1 = id_H$.*

2] *Se (H, π) é irredutível, então todo vetor não-nulo de H é cíclico para (H, π).*

Definição 2.10. *Um estado τ em uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$ é puro quando, para todo funcional linear positivo ρ em $\mathcal{A}$ tal que o funcional $\tau - \rho$ é positivo, necessáriamente existe um número $t \in [0, 1]$ tal que $\rho = t\tau$.*

O conjunto dos estados puros de $\mathcal{A}$ será denotado por $P(\mathcal{A})$.

Proposição 2.11. *[5.1.6.Theorem, [1]] Seja τ um estado em uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$.*

1] *τ é puro se e somente se (H_τ, π_τ) é irredutível.*

2] *Se $\mathcal{A}$ é abeliana, então τ é puro se e somente se é um caractere de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 2.12. *Segue deste último resultado que para C^*-álgebras abelianas $\mathcal{A}$ tem-se $P(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{A})$.*

Exemplo 2.13. *Seja H um espaço de Hilbert, e $\mathcal{A} = K(H)$ os operadores compactos em H. Se $x \in H$, então o funcional*

$$w_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto \langle u(x), x \rangle,$$

é positivo, e se x é unitário, w_x é um estado. No exemplo 5.1.1. *da referência [1] é demonstrado que os estados puros de $\mathcal{A}$ são precisamente os estados w_x, onde x é vetor unitário de H.*

Duas representações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ são ditas unitariamente equivalentes se existe um operador unitário $u : H_1 \to H_2$ tal que $\pi_2(a) = u\pi_1(a)u^*$ para todos $a \in \mathcal{A}$. É facilmente verificável que equivalência unitária é uma relação de equivalência. O resultado a seguir dá uma caracterização útil para avaliar a equivalência unitária de representações.

Proposição 2.14. *[5.1.4.Theorem, [1]] Suponhamos que (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são representações de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ com vetores cíclicos x_1 e x_2 respectivamente. Então existe uma transformação linear unitária $u : H_1 \to H_2$ tal que $x_2 = u(x_1)$ e $\pi_2(a) = u\pi_1(a)u^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$ se e somente se*

$$\langle \pi_1(a)x_1, x_1 \rangle = \langle \pi_2(a)x_2, x_2 \rangle$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

A próxima proposição revelará a equivalência unitária entre uma representação com vetor cíclico unitário e a representação GNS associada a algum estado.

Proposição 2.15. *[5.1.7. Theorem, [1]] Seja (H, π) uma representação de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$, e seja x um vetor cíclico unitário de (H, π). Então a função*

$$\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad a \mapsto \langle \pi(a)(x), x \rangle,$$

é um estado de $\mathcal{A}$ e (H, π) é unitariamente equivalente a (H_τ, π_τ). E ainda, se (H, π) é irredutível, então τ é puro.

Se x é um vetor unitário de um espaço de Hilbert H, denotaremos por w_x o estado

$$B(H) \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto \langle u(x), x \rangle.$$

O resultado a seguir será útil no capítulo 4 para mostrar que uma importante aplicação entre os espaços dos estados puros e dos ideais primitivos de uma C*-álgebra (espaço que definiremos na próxima seção) é aberta.

Proposição 2.16. *[5.1.15.Theorem, [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e suponha que $(H_\lambda, \pi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de representações de*

$\mathcal{A}$. Se τ é um estado puro de $\mathcal{A}$ tal que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Ker(\pi_\lambda) \subseteq Ker(\tau),$$

*então τ pertence ao fecho *-fraco em $\mathcal{A}^*$ do conjunto*

$$S = \{w_x \pi_\lambda; \lambda \in \Lambda, x \in H_\lambda \text{ } e \text{ } ||x|| = 1\}.$$

Agora definiremos as noções de restrição e extensão de representações de C*-álgebras. Seja (H, π) uma representação de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, e suponha que $\mathcal{B}$ é uma C*-subálgebra e que K é um subespaço de H invariante por $\pi(\mathcal{B})$. Então a aplicação

$$\mathcal{B} \to B(K), \quad b \mapsto \pi(b) \mid_K,$$

define uma representação de $\mathcal{B}$, e a denotaremos por $(H, \pi)_{\mathcal{B},K}$. Quando

$$K = [\pi(\mathcal{B})(H)] = \overline{span\{\pi(b)(h); b \in \mathcal{B}, h \in H\}}$$

a representação $(H, \pi)_{\mathcal{B},K}$ é chamada de restrição de (H, π) a $\mathcal{B}$.

Proposição 2.17. *[5.5.1.Theorem, [1]] Seja $\mathcal{B}$ uma C*-subálgebra de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ e suponha que (H, π) é uma representação não-degenerada de $\mathcal{B}$. Então existe uma representação* *não-degenerada* $(\overline{H}, \overline{\pi})$ *de* $\mathcal{A}$ *e um subespaço fechado* K *de* $\overline{H}$ *invariante por* $\overline{\pi}(\mathcal{B})$ *tal que* (H, π) *é unitariamente equivalente a* $(\overline{H}, \overline{\pi})_{\mathcal{B},K}$*. Se* (H, π) *é cíclica (respectivamente irredutível), podemos tomar* $(\overline{H}, \overline{\pi})$ *cíclica (respectivamente irredutível).*

Chamaremos a representação $(\overline{H}, \overline{\pi})$ de $\mathcal{A}$, citada na proposição acima, de extensão da representação (H, π) de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$.

Um ponto x de um conjunto convexo C em um espaço vetorial X é um ponto extremo de C, se dados $y, z \in C$ tais que $x = \frac{y+z}{2}$, tem-se necessariamente que $x = y = z$.

Proposição 2.18. *[5.1.8 Theorem, [1]] Se* $\mathcal{A}$ *é uma C*-álgebra, então o conjunto* $\mathcal{S}$ *dos funcionais lineares positivos contrativos em* $\mathcal{A}$ *é convexo e compacto na topologia fraca*. O conjunto dos pontos extremos de* $\mathcal{S}$ *é formado pelo funcional zero e os estados puros de* $\mathcal{A}$*.*

O resultado que segue garante que toda C*-álgebra não-nula possui estados puros.

Proposição 2.19. *[5.1.11.Theorem, [1]] Seja a um elemento positivo de uma C*-álgebra* $\mathcal{A}$ *não-nula. Então existe um estado puro de* $\mathcal{A}$ *tal que* $||a|| = \rho(a)$*.*

Proposição 2.20. *[5.1.12.Theorem, [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, e $a \in \mathcal{A}$. Então existe uma representação irredutível (H, π) de $\mathcal{A}$ tal que $||a|| = ||\pi(a)||$.*

Para cada funcional linear positivo τ em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ tem-se, pelas proposições 1.38 e 1.39, a continência $N_\tau + N_\tau^* \subseteq Ker(\tau)$. O proximo resultado caracteriza os estados puros avaliando a continência contrária.

Proposição 2.21. *[5.3.4.Theorem, [1]] Se τ é um estado em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então τ é puro se e somente se $Ker(\tau) \subseteq N_\tau + N_\tau^*$.*

Seja A uma álgebra. Um ideal a esquerda L é dito modular se existe um elemento $u \in A$ tal que $a - ua \in L$ para todo $a \in A$. Um ideal I é modular se existe $u \in A$ tal que $a - ua, a - au \in I$ para todo $a \in A$. No caso das álgebras com unidade, todos ideais e todos ideais a esquerda são modulares. O resultado a seguir diz que existe uma relação biunívoca entre os estados puros e o conjunto de todos ideais a esquerda modulares e maximais de uma C*-álgebra.

Proposição 2.22. *[5.3.5.Theorem, [1]] Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra não-nula, então a correspondência $\tau \mapsto N_\tau$ é uma bijeção dos* *estados puros $P(\mathcal{A})$ com o conjunto R de todos ideais a esquerda, modulares e maximais.*

Note que, se $\mathcal{A} \neq \{0\}$ é abeliana, então para cada $\tau \in P(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{A})$ tem-se $N_\tau = Ker(\tau)$, assim pelo resultado anterior a correspondência $\tau \mapsto N_\tau$ é uma bijeção de $\Omega(\mathcal{A})$ para o conjunto de todos os ideais modulares maximais de $\mathcal{A}$.

Proposição 2.23. *[5.2.4.Theorem, [1]] Se τ é um estado puro em uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}/N_\tau = H_\tau$.*

2.3 Ideais Primitivos e Primos.

Começaremos enunciando o resultado que possibilita a definição de um dos objetos de estudos dessa seção.

Proposição 2.24. *[5.4.1.Theorem, [1]] Seja L um ideal a esquerda modular em uma algebra A. Então existe o maior ideal I de A contido em L, e sua descrição é*

$$I = \{a \in A; aA \subseteq L\}.$$

Definição 2.25. *Se L é um ideal a esquerda, modular e maximal em uma álgebra A, o ideal I associado a L, conforme a proposição acima, é chamado de primitivo. Denotaremos o conjunto dos ideais primitivos de A por $Prim(A)$.*

Note que $Ker(\pi_\tau)$ é o ideal associado ao ideal a esquerda modular e maximal N_τ, no contexto da proposição 2.24, para cada estado puro τ de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Pois, por conta da proposição 2.23 tem-se

$$Ker(\pi_\tau) = \{a \in \mathcal{A}; \pi_\tau(a)(\mathcal{A}/N_\tau) = 0\} = \{a \in \mathcal{A}; a\mathcal{A} \subseteq N_\tau\}.$$

Assim sendo, com base na observação acima e nas proposições 2.22, 2.9 e 2.15 mostra-se a seguinte caracterização dos ideais primitivos.

Proposição 2.26. *[5.4.2. Theorem, [1]] Um ideal I de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é primitivo se e somente se, existe uma representação irredutível não-nula (H, π) de $\mathcal{A}$ tal que $I = ker(\pi)$.*

Exemplo 2.27. *Seja $\tilde{\mathcal{A}}$ a unitização de uma C*álgebra $\mathcal{A}$. Consideremos a representação*

$$\delta : \tilde{\mathcal{A}} \to B(\mathbb{C}), \quad \delta(a, \lambda)(\beta) = \lambda\beta.$$

Obviamente δ é irredutível, e $Ker(\delta) = \mathcal{A}$. Portanto, pela proposição acima $\mathcal{A}$ é um ideal primitivo de $\tilde{\mathcal{A}}$.

Se S é um subconjunto de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, denotaremos por $hull(S)$ o conjunto dos ideais primitivos que contenham S. Se R é um conjunto não-vazio de ideais primitivos de $\mathcal{A}$, denotaremos por $Ker(R)$ a interseção dos membros de R. Definimos $Ker(\emptyset) = \mathcal{A}$.

Proposição 2.28. *[5.4.3. Theorem, [1]] Se I é um ideal próprio modular de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então $hull(I)$ é não vazio. Se I é um ideal próprio fechado em $\mathcal{A}$, então*

$$I = Ker(hull(I));$$

isto é, I é a interseção dos ideais primitivos que o contém.

Com base na proposição acima concluimos que os ideais modulares maximais de uma C*-álgebra são primitivos; ou seja, os ideais primitivos são os análogos aos ideais modulares maximais de C*-álgebras abelianas, pois nestas esses conceitos coincidem (5.4.4. Theorem, [1]).

Agora definiremos uma topologia para o espaço dos ideais primitivos $Prim(\mathcal{A})$, de tal forma que quando $\mathcal{A}$ é abeliana o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é homeomorfo ao espaço dos caracteres $\Omega(\mathcal{A})$. A seguinte proposição nos revelará tal topologia;

Proposição 2.29. *[5.4.6. Theorem. [1]] Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra, então existe uma única topologia em $Prim(\mathcal{A})$ tal que para cada subconjunto R o conjunto $hull(Ker(R))$ é o fecho de R.*

A topologia de $Prim(\mathcal{A})$ citada acima consiste dos abertos

$$\Gamma_{jac} = \{hull(Ker(R))^c; R \subseteq Prim(\mathcal{A})\},$$

esta topologia é chamada de topologia de Jacobson.

Quando C*-álgebras abelianas possuem unidade os espaços de seus caracteres são compactos. O teorema 5.4.8 da referência [1] diz que o espaço dos ideais primitivos também é compacto para C*-álgebras unitais. A próxima proposição mostra uma importante relação entre os ideais fechados e os conjuntos fechados de $Prim(\mathcal{A})$;

Proposição 2.30. *[5.4.7. Theorem, [1]] Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então;*

1] *$Prim(\mathcal{A})$ é um T_0-espaço.*

2] *A correspondência $I \mapsto hull(I)$ é uma bijeção entre o conjunto dos ideais fechados de $\mathcal{A}$ e o conjunto dos subconjuntos fechados de $Prim(\mathcal{A})$.*

3] *Se I_1, I_2 são ideais fechados de $\mathcal{A}$, então $I_1 \subseteq I_2$ se e somente se $hull(I_2) \subseteq hull(I_1)$.*

Definição 2.31. *Um ideal fechado I de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é dito primo se, dados dois ideais fechados J_1, J_2 de $\mathcal{A}$ tais que $J_1 J_2 \subseteq I$, obrigatoriamente tem-se $J_1 \subseteq I$ ou $J_2 \subseteq I$.*

Proposição 2.32. *[5.4.5 Theorem, [1]] Se I é um ideal primitivo de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então I é primo.*

Em geral não se tem que ideais primos de C*-álgebras são primitivos, o leitor interessado em um contra-exemplo pode consultar o artigo [5] de Nik Weaver. Entretanto, no capítulo 4 mostraremos o importante resultado que diz que em C*-álgebras separáveis todo ideal primo é primitivo.

Lema 2.33. *[1.1.9. Teorema, [8]] Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. O espaço dos caracteres $\Omega(C_0(X))$ é homeomorfo a X pela regra $x \mapsto \tau_x$, onde $\tau_x(f) = f(x)$.*

No exemplo concreto a seguir obteremos todas as representações irredutíveis e mostraremos que os ideais primitivos correspondentes é T_1-espaço mas não é T_2-espaço.

Exemplo 2.34. • *Consideremos a C*-álgebra*

$$\mathcal{A} = \{f \in C([0,1], M_2(\mathbb{C})); f(1) \text{ } diagonal\}.$$

Tome as representações $\pi_{x_0} : \mathcal{A} \to B(\mathbb{C}^2)$ onde $\pi_{x_0}(f)$ é definido pela matriz $f(x_0)$ para cada $x_0 \in [0,1]$.

Se $x_0 < 1$, então π_{x_0} é sobrejetora e portanto uma representação irredutível.

Se $x_0 = 1$, *então* $\pi_1 = \pi_1^1 \oplus \pi_1^2$, *onde*

$$\pi_1^1 = \pi_1|_{0\oplus\mathbb{C}} \text{ e } \pi_1^2 = \pi_1|_{\mathbb{C}\oplus 0}$$

são representações irredutíveis. Essas representações têm associadas todos os ideais primitivos de $\mathcal{A}$. *De fato, repare que* $Z(\mathcal{A})$ *é isomorfo a* $C([0,1])$ *e portanto* $\Omega(Z(\mathcal{A}))$ *é homeomorfo a* $\Omega(C([0,1]))$, *então pelo lema 2.33, para cada* $\tau \in \Omega(Z(\mathcal{A}))$ *tem-se* $\tau(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in [0,1]$.

Seja (H, π) *uma representação irredutível, então pelo item 1] da proposição 2.9 segue que* $\pi|_{Z(\mathcal{A})}$ *é um caracter, e portanto obedece a regra* $\pi|_{z(\mathcal{A})}(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in [0,1]$. *O próximo passo será mostrar que* $Ker(\pi_{x_0}) \subseteq Ker(\pi)$; *suponhamos que* $f \in \mathcal{A}$ *e* $f(x_0) = 0$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $||f(x) - f(x_0)|| = ||f(x)|| < \varepsilon$ *quando* $|x - x_0| < \delta$; *escolha* $\alpha \in C([0,1])$ *de tal forma que* $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha(x) = 1$ *para* $x \in [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1]$ *onde* $\alpha(x_0) = 0$. *Segue que*

$$\begin{aligned} ||f\alpha - f|| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad ||\pi(f\alpha - f)|| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad ||\pi(f)\pi(\alpha I) - \pi(f)|| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\alpha I \in Z(\mathcal{A})$, *obtemos*

$$||\pi(f)\pi(\alpha I) - \pi(f)|| \quad = \quad ||\pi(f)\alpha(x_0)I - \pi(f)|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad ||\pi(f)|| = 0$$

Portanto $f \in Ker(\pi)$.

Se $x_0 < 1$ *temos o seguinte:* π_{x_0} *é sobrejetora, então* $\mathcal{A}/Ker(\pi_{x_0}) \approx B(\mathbb{C}^2) = K(\mathbb{C}^2)$. *A representação* $(H, \tilde{\pi})$ *de* $\mathcal{A}/Ker(\pi_{x_0})$ *definida por* $\tilde{\pi}(a + Ker(\pi_{x_0})) = \pi(a)$ *é irredutível. No exemplo 5.1.1 de [1] conclui-se que toda representação irredutível não nula de um espaço de operadores compactos é unitariamente equivalente a representação inclusão, portanto* $Ker(\tilde{\pi}) = \{0\}$. *Então* $\pi(f) = 0 \Rightarrow f + Ker(\pi_{x_0}) \in Ker(\tilde{\pi}) = \{0\}$, *logo* $Ker(\pi) = Ker(\pi_{x_0})$.

Se $x_0 = 1$, *então*

$$Ker(\pi_1) = Ker(\pi_1^1) \cap Ker(\pi_1^2) = Ker(\pi_1^1)Ker(\pi_1^2) \subseteq Ker(\pi).$$

Pela proposição 2.32 $Ker(\pi)$ *é primo, então*

$$Ker(\pi) = Ker(\pi_1^1) \text{ ou } Ker(\pi_1^2).$$

Logo

$$Prim(\mathcal{A}) = \{Ker(\pi_{x_0}); x_0 \in [0, 1)\} \cup \{Ker(\pi_1^1), Ker(\pi_1^2)\}.$$

- Se $Ker(\pi_1^1) \in hull(I_1)^c$ e $Ker(\pi_1^2) \in hull(I_2)^c$, então existem $f_1 \in I_1$ e $f_2 \in I_2$ tais que $f_1(1) \neq 0$ e $f_2(1) \neq 0$, portanto existe $\delta > 0$ e $t_0 \in (1-\delta, 1)$ de tal forma que $f_1(t_0) \neq 0$. Como π_{t_0} é sobrejetora, segue que $\pi_{t_0}(I_1)$ é um ideal não nulo em $M_2(\mathbb{C})$ que é simples, então $\pi_{t_0}(I_1) = M_2(\mathbb{C})$, assim existe $g_1 \in I_1$ onde $g(t_0) = id_2$. Da mesma forma existe $g_2 \in I_2$ onde $g_2(t_0) = id_2$, portanto $g_1(t_0)g_2(t_0) = id_2$. Assim, $g_1 g_2 \in I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$, e consequentemente

$$\emptyset \neq hull(I_1 \cap I_2)^c \subseteq hull(I_1)^c \cap hull(I_2)^c.$$

Logo $Prim(\mathcal{A})$ não é Hausdorff.

- Dados $Ker(\pi_{x_0}), Ker(\pi_{x_1}) \in Prim(\mathcal{A})$ com $x_0 \neq x_1$ em $[0,1]$, temos que $Ker(\pi_{x_0})$ pertence ao aberto $hull(Ker(\pi_{x_1}))^c$ pois, para isto acontecer, basta que exista $f \in \mathcal{A}$ de tal forma que $f(x_0) = 0$ e $f(x_1) \neq 0$. É claro que $Ker(\pi_{x_1})$ não pertence a $hull(Ker(\pi_{x_1}))^c$. Da mesma forma $Ker(\pi_{x_1})$ pertence ao aberto $hull(Ker(\pi_{x_0}))^c$ e não pertence a $hull(Ker(\pi_{x_1}))^c$. Logo $Prim(\mathcal{A})$ é T_1-espaço.

2.4 Espectro de C*-álgebras

Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra não-nula, denotaremos por $\hat{\mathcal{A}}$ o conjunto das classes de equivalência unitárias de representações irredutíveis não-nulas de $\mathcal{A}$. Se (H, π) é uma representação irredutível não-nula de $\mathcal{A}$, denotaremos sua classe de equivalência por $[H, \pi]$, e definimos $Ker[H, \pi] = Ker(\pi)$. A aplicação canônica entre $\hat{\mathcal{A}}$ e $Prim(\mathcal{A})$ é definida por

$$\theta : \hat{\mathcal{A}} \to Prim(\mathcal{A}), \quad [H, \pi] \mapsto Ker[H, \pi].$$

Dotaremos o conjunto $\hat{\mathcal{A}}$ com a menor topologia que torne a aplicação θ contínua, e chamaremos o espaço topológico $\hat{\mathcal{A}}$ de espectro de $\mathcal{A}$. Com um pouco de trabalho pode-se mostrar que a aplicação θ é aberta, fechada e sobrejetora. Se R é um subconjunto de $\mathcal{A}$ definamos $hull'(R) = \theta^{-1}(hull(R))$, então a correspondência $I \mapsto hull'(I)$ é uma bijeção entre os ideais fechados de $\mathcal{A}$ e os subconjuntos fechados $\hat{\mathcal{A}}$.

O resultado a seguir caracteriza o fecho de subconjuntos de $\hat{\mathcal{A}}$.

Proposição 2.35. *Seja S um subconjunto do espectro $\hat{\mathcal{A}}$ da C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Então $\overline{S} = \theta^{-1}(\overline{\theta(S)})$.*

Demonstração. Como θ é contínua temos que $\theta(\overline{S}) \subseteq \overline{\theta(S)}$, então

$$\overline{S} \subseteq \theta^{-1}(\theta(\overline{S})) \subseteq \theta^{-1}(\overline{\theta(S)}).$$

Como $\overline{S}$ é fechado, existe um ideal fechado I em $\mathcal{A}$ tal que

$\overline{S} = \theta^{-1}(hull(I))$, então

$$\begin{aligned} \theta(S) \subseteq \theta(\overline{S}) \subseteq hull(I) \quad &\Rightarrow \quad Ker(\theta(S)) \supseteq Ker(hull(I)) = I \\ &\Rightarrow \quad hull(Ker(\theta(S))) \subseteq hull(I) \\ &\Rightarrow \quad \theta^{-1}(\overline{\theta(S)}) \subseteq \theta^{-1}(hull(I)) = \overline{S}. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Propriedades topológicas.

Começaremos este capítulo estudando o espaço dos estados puros de C*-álgebras separáveis, onde mostraremos que este espaço é polonês. Concluiremos que este espaço também é de Baire, e através de uma aplicação canônica entre os estados puros e os ideais primitivos poderemos provar que este último espaço também é de Baire. Sendo o espaço dos ideais primitivos de C*-álgebras separáveis de Baire, poderemos mostrar que ideiais primos são primitivos e com isso concluir a sobriedade de $Prim(\mathcal{A})$.

3.1 Espaço dos estados puros $P(\mathcal{A})$.

O espaço dos estados puros de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é o conjunto $P(\mathcal{A})$ dotado da topologia fraca* relativa. Nesta seção temos o objetivo de demonstrar que $P(\mathcal{A})$ é polonês.

Definição 3.1. *Um espaço topológico é um espaço polonês se é completamente metrizável e separável.*

Seguem alguns resultados suficientes para cumprir o objetivo dessa seção:

Lema 3.2. *Seja D um subconjunto denso de um espaço normado A. Sejam, $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede limitada por $M \geq 0$ e τ, em A^* tal que $|\tau_\lambda(d) - \tau(d)| \to 0$ cada $d \in D$, então τ_λ converge para τ na topologia fraca*.*

Demonstração. Se $d \in D$, o resultado segue facilmente considerando a seguinte desigualdade;

$$\begin{aligned} |\tau_\lambda(x) - \tau(x)| &\leq |\tau_\lambda(x) - \tau_\lambda(d)| + |\tau_\lambda(d) - \tau(d)| \\ &+ |\tau(d) - \tau(x)| \\ &\leq 2M||x - d|| + |\tau_\lambda(d) - \tau(d)|. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *Se A é um espaço normado separável, então a bola fechada $B^*[0,1]$ do espaço dual A^* é um espaço polonês compacto na topologia fraca* relativa.*

Demonstração. • Seja $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um denso enumerável de A. Dados $\tau, \rho \in B^*[0,1]$, consideremos

$$d^*(\tau,\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \tau\left(\frac{d_k}{||d_k||}\right) - \rho\left(\frac{d_k}{||d_k||}\right) \right|.$$

É fácil ver que d^* é uma métrica em $B^*[0,1]$.

• Vejamos agora que a métrica d^* é compatível com a topologia fraca* relativa. Seja $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em $B^*[0,1]$. Se $d^*(\tau_\lambda,\tau) \to 0$, como $d^*(\tau_\lambda,\tau) \geq \frac{1}{2^k}|\tau_\lambda(\frac{d_k}{||d_k||}) - \tau(\frac{d_k}{||d_k||})|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $|\tau_\lambda(d_k) - \tau(d_k)| \to 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo lema 3.2 a rede $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge para τ na topologia fraca*.

Agora se $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge para τ na topologia fraca*, segue que $\frac{1}{2^k}|\tau_\lambda(\frac{d_k}{||d_k||}) - \tau(\frac{d_k}{||d_k||})| \to 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4}$ e existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \frac{1}{2^k} \left| \tau_\lambda\left(\frac{d_k}{||d_k||}\right) - \tau\left(\frac{d_k}{||d_k||}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2k_0}$$

para $k = 1, ..., k_0$. Como $|\tau_\lambda(\frac{d_k}{||d_k||}) - \tau(\frac{d_k}{||d_k||})| \leq 2$ para cada

$k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} d^*(\tau_\lambda, \tau) &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \left| \tau_\lambda \left(\frac{d_k}{||d_k||} \right) - \tau \left(\frac{d_k}{||d_k||} \right) \right| \\ &+ \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \tau_\lambda \left(\frac{d_k}{||d_k||} \right) - \tau \left(\frac{d_k}{||d_k||} \right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $\lambda \geq \lambda_0$.

Logo $B^*[0,1]$ é metrizável.

• Pelo teorema de Alaoglu (Theorem 1.6.9 [2]) o espaço $(B^*[0,1], d^*)$ é compacto, e portanto completo.

• Segue da teoria de espaços métricos que quando tais espaços são compactos, então são separáveis, portanto $(B^*[0,1], d^*)$ é separável.

Logo $B^*[0,1]$ é um espaço polonês compacto relativo a topologia fraca*. □

Um subconjunto de um espaço topolológico é chamado de G_δ se for formado por uma interseção enumerável de conjuntos abertos. A seguir abordaremos um resultado últil relativo a esse conceito.

Proposição 3.4. *Todo subconjunto aberto e cada subconjunto G_δ de um espaço polonês é polonês na topologia relativa.*

Demonstração. Seja (P, Γ) um espaço polonês, e d uma métrica completa associada.

• Dado $U \in \Gamma$, consideremos a função com domínio em U definida por $f(x) = \frac{1}{d(x,P-U)}$. É fácil mostrar que

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

define uma métrica em U, e que (U, d) é homeomorfo a (U, d'). Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço (U, d'), então existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $d'(x_1, x_n) \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_n)| \leq K \quad &\Rightarrow \quad |f(x_n)| \leq K + |f(x_1)| \\ &\Rightarrow \quad d(x_n, P - U) \geq \frac{1}{K + |f(x_1)|} \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $d \leq d'$, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em (P, d), e portanto existe $x \in P$ tal que $d(x_n, x) \to 0$, então

$$d(x, P - U) \geq \frac{1}{K + |f(x_1)|} \Rightarrow x \in U$$

e

$$d'(x_n, x) = d(x_n, x) + |f(x_n) - f(x)| \to 0.$$

Logo o espaço (U, d') é completo, e portanto (U, Γ_{rel}) é polonês.

• Seja U um subconjunto G_δ de P, então $U = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ onde cada $U_n \in \Gamma$. Pelo resultado anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma métrica completa d_n em U_n, tal que (U_n, d_n) é homeomorfo a (U_n, d). Podemos supor sem perda de generalidade que as métricas d_n são limitadas por 1; pois caso contrário podemos tomar $d'_n = min\{d_n, 1\}$. É fácil mostrar que

$$d'(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y)$$

define uma métrica em U, e que (U, d') é homeomorfo a (U, d).

Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de cauchy em (U, d'). Como $d' \geq d_1$, então a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em (U, d_1), portanto existe $x \in U$ tal que $d_1(x_k, x) \to 0$, mas isto implica que $d_n(x_k, x) \to 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$k \geq k_0 \Rightarrow d_n(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2n_0},\ n = 1, ..., n_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} k \geq k_0 \Rightarrow d'(x_k, x) &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} d_n(x_k, x) \\ &+ \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_k, x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo o espaço (U, d') é completo, portanto (U, Γ_{rel}) é polonês. $\square$

Proposição 3.5. *Seja E um espaço localmente convexo e Hausdorff, e seja C um subconjunto metrizável, compacto e convexo de E, então o conjunto dos pontos extremos $\mathcal{E}$ de C é G_δ de C.*

Demonstração. Consideremos os conjuntos

$$F_n = \{c \in C; c = \frac{a+b}{2}, d(a,b) \geq \frac{1}{n}, a, b \in C\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Cada F_n é fechado em C. De fato, dada uma sequência $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em F_n tal que $c_k \to c$, tem-se que $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ e $d(a_k, b_k) \geq \frac{1}{n}$. Sendo C compacto, existem subsequências $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ e $(b_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tais que $a_{k_l} \to a$ e $b_{k_l} \to b$, e ainda $d(a_{k_l}, b_{k_l}) \to d(a,b) \geq \frac{1}{n}$. Portanto $c = \frac{a+b}{2}$ com $d(a,b) \geq \frac{1}{n}$, ou seja, $c \in F_n$.

Temos que $C - F_n$ é aberto em C para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora mostraremos que

$$\mathcal{E} = \cap_{n\in\mathbb{N}}(C - F_n).$$

Se $c \in \mathcal{E}$, então

$$c = \frac{a+b}{2} \quad \Rightarrow \quad c = a = b \Rightarrow d(a,b) = 0 < \frac{1}{n} \Rightarrow c \notin F_n$$

para todo n natural, portanto $c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}(C - F_n)$. Agora tome $c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}(C - F_n)$ e suponha que $c = \frac{a+b}{2}$. Segue que $d(a, b) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas isto implica que $d(a, b) = 0$; ou seja, $c = a = b$. Portanto $c \in \mathcal{E}$. Logo $\mathcal{E}$ é um G_δ de C. □

Teorema 3.6. *Se $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra separável, então o espaço dos estados puros $P(\mathcal{A})$ é polonês.*

Demonstração. Pela proposição 2.18 o espaço $\mathcal{S}$ dos funcionais lineares positivos em $\mathcal{A}$ é convexo e compacto na topologia fraca*, e o conjunto dos pontos extremos de $\mathcal{S}$ é $P(\mathcal{A}) \cup \{0\}$. Pela proposição 3.3 $\mathcal{S}$ é metrizável; portanto, pela proposição 3.5 $P(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ é um G_δ de $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ é polonês, segue pela proposição 3.4 que $P(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ é polonês. Logo, como $P(\mathcal{A})$ é aberto em $P(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, tem-se, novamente pela proposição 3.4, que $P(\mathcal{A})$ é polonês. □

3.2 Espaços de Baire.

Nesta seção mostraremos que o espaço dos estados puros $P(\mathcal{A})$ de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é Baire, e ainda, depois de alguns resultados preliminares concluiremos esta seção provando que o espaço dos ideais primitivos $Prim(\mathcal{A})$ também é Baire quando

$\mathcal{A}$ é separável.

Definição 3.7. *Um espaço topológico é um espaço de Baire se toda interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos também é denso.*

Exemplo 3.8. *Se tomarmos o espaço dos números racionais* $\mathbb{Q}$*, temos que a interseção enumerável de densos* $\cap_{q\in\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} - q)$ *é vazia, então esse um espaço que não é Baire.*

O próximo teorema revelará uma classe de espaços de Baire.

Teorema 3.9. *[Theorem 1.5.8, Baire category theorem, [2]] A interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de um espaço métrico completo também é denso.*

Corolário 3.10. *Todo espaço polonês é espaço de Baire.*

Demonstração. Teorema 3.9. □

Corolário 3.11. *O espaço dos estados puros* $P(\mathcal{A})$ *de uma* C^**-álgebra separável* $\mathcal{A}$*, é um espaço de Baire.*

Demonstração. Teorema 3.6 e corolário 3.10. □

O próximo teorema é um importante resultado chamado de teorema da transitividade, ele será útil na demonstração do lema seguinte.

Teorema 3.12. *[5.2.2. Theorem, [1]](Kadison) Seja (H, π) uma representação irredutível de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$ não-nula, e suponha que $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ são elementos de H tais que $x_1, ..., x_n$ são linearmente independentes. Então existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\pi(a)(x_1) = y_1, ..., \pi(a)(x_n) = y_n$. Se existe um operador v auto-adjunto em H tal que $v(x_1) = y_1, ..., v(x_n) = y_n$, então podemos escolher um $a \in \mathcal{A}$ com $\pi(a)$ auto-adjunto também. Se $id_H \in \pi(\mathcal{A})$ e existe um operador unitário u em H tal que $u(x_1) = y_1, ..., u(x_n) = y_n$, então podemos escolher um $a \in \mathcal{A}$ com $\pi(a)$ unitário também. Podemos supor que $\pi(a) = e^{iw}$ para algum elemento w auto-adjunto de $\pi(\mathcal{A})$.*

Lema 3.13. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e τ e ρ estados puros de $\mathcal{A}$. Então*

1] *As funções $\langle \pi_\tau(\cdot)x, x \rangle$ são estados puros para todo $x \in H_\tau$ com $||x|| = 1$.*

2] *As representações (H_τ, π_τ) e (H_ρ, π_ρ) são unitariamente equivalentes se e somente se existe algum $x \in H_\tau$ com $||x|| = 1$ tal que $\rho = \langle \pi_\tau(\cdot)x, x \rangle$.*

Demonstração. **1]** Segue aplicando as proposições 2.11 (1), 2.9 (2) e 2.15.

2] Como existe um operador unitário u entre H_ρ e H_τ tal que $\pi_\rho(a) = u^*\pi_\tau(a)u$ para todo $a \in \mathcal{A}$, então pela proposição 2.5 tem-se

$$\begin{aligned}\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)x_\rho, x_\rho\rangle &= \langle u^*\pi_\tau(a)ux_\rho, x_\rho\rangle \\ &= \langle \pi_\tau(a)ux_\rho, ux_\rho\rangle.\end{aligned}$$

A recíproca segue direto da proposição 2.15.

□

Lema 3.14. *Sejam τ e ρ estados puros de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$. As representações (H_τ, π_τ) e (H_ρ, π_ρ) de $\mathcal{A}$ são unitariamente equivalentes se e somente se $\rho = \tau(u^* \cdot u)$ para algum $u \in U(\tilde{\mathcal{A}})$.*

Demonstração. Sendo (H_τ, π_τ) e (H_ρ, π_ρ) unitariamente equivalentes temos pela proposição 3.13 que existe $x \in H_\tau$ com $||x|| = 1$ tal que $\rho = \langle \pi_\tau(\cdot)(x), x\rangle$. Consideremos a representação irredutível $(H, \tilde{\pi}_\tau)$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ onde $\tilde{\pi}_\tau(a, \lambda) = \pi_\tau(a) + \lambda id_H$. Segundo o teorema de transitividade (teorema 3.12) existe $u \in \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\tilde{\pi}_\tau(u)$ é unitário e $\tilde{\pi}_\tau(u)(x_\tau) = x$, e ainda $\tilde{\pi}_\tau(u) = e^{iw}$ para algum w auto-adjunto em $\tilde{\pi}_\tau(\tilde{\mathcal{A}})$. Então podemos tomar $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\tilde{\pi}_\tau(a) = w$. Veremos agora que u pode ser tomado unitário em $\tilde{\mathcal{A}}$; temos que $w' = (a^* + a)/2$ é auto-adjunto e $\tilde{\pi}_\tau(w') = w$, portanto $\tilde{\pi}_\tau(e^{iw'}) = e^{iw}$. Logo

$$\begin{aligned}\rho(a) = \langle \pi_\tau(a)(x), x\rangle &= \langle \pi_\tau(a)(\tilde{\pi}_\tau(u)(x_\tau)), \tilde{\pi}_\tau(u)(x_\tau)\rangle \\ &= \langle \pi_\tau(u^*au)(x_\tau), x_\tau\rangle = \tau(u^*au).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\rho = \tau(u^* \cdot u)$ para algum $u \in U(\tilde{\mathcal{A}})$, então pela proposição 2.5 tem-se que

$$\begin{aligned}\langle \pi_\rho(a)x_\rho, x_\rho\rangle &= \langle \pi_\tau(u^*au)x_\tau, x_\tau\rangle \\ &= \langle \pi_\tau(a)\pi_\tau(u)x_\tau, \pi_\tau(u)x_\tau\rangle.\end{aligned}$$

Então pelas proposições 2.9 e 2.14 segue que as representações em questão são unitariamente equivalentes. □

Corolário 3.15. *Dados $\tau \in P(\mathcal{A})$ e $u \in U(\tilde{\mathcal{A}})$, então*

$$\rho = \tau(u^* \cdot u) \in P(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Da segunda parte do lema anterior segue que as representações GNS dos estados τ e $\tau(u^* \cdot u)$ são unitariamente equivalentes, como τ é puro segue que (H_τ, π_τ) é irredutível, e portanto (H_ρ, π_ρ) é irredutível. logo ρ é puro. □

Lema 3.16. *Para cada C^*-álgebra $\mathcal{A}$, a aplicação canônica $\alpha : P(\mathcal{A}) \to \hat{A}$ definida por $\alpha(\tau) = [H_\tau, \pi_\tau]$ é contínua, aberta e sobrejetora.*

Demonstração. • Seja $F \subseteq \hat{A}$ fechado. Se $\tau \in \overline{\alpha^{-1}(F)}$, então existe uma sequência $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\alpha^{-1}(F)$ tal que $\tau_n \to \tau$.

Tomemos $a \in \bigcap_{[H,\pi]\in F} Ker[H,\pi]$, então $\pi_{\tau_n}(b^*a^*ab) = 0$ para todo $b \in \mathcal{A}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, assim pela proposição 2.5 tem-se

$$\begin{aligned}
\tau_n(b^*a^*ab) &= \langle \pi_{\tau_n}(b^*a^*ab)x_\tau, x_\tau\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \tau(b^*a^*ab) = 0 \\
&\Rightarrow \langle \pi_\tau(b^*a^*ab)x_\tau, x_\tau\rangle \\
&= \langle \pi_\tau(a)\pi_\tau(b)x_\tau, \pi_\tau(a)\pi_\tau(b)x_\tau\rangle \\
&= ||\pi_\tau(a)\pi_\tau(b)x_\tau||^2 = 0.
\end{aligned}$$

Como x_τ é cíclico, segue que $\pi_\tau(a) = 0$, portanto

$$\bigcap_{[H,\pi]\in F} Ker[H,\pi] \subseteq Ker(\pi_\tau).$$

Segue que

$$\theta([H_\tau,\pi_\tau]) \in hull(Ker(\theta(F))) = \overline{\theta(F)}$$

então

$$\alpha(\tau) = [H_\tau,\pi_\tau] \in \theta^{-1}(\overline{\theta(F)}) = \overline{F} = F,$$

assim tem-se $\tau \in \alpha^{-1}(F)$. Ou seja, $\alpha^{-1}(F)$ é fechado, logo α é contínua.

• Segue da proposição 2.15 que α é sobrejetora.

• Seja F um fechado de $P(\mathcal{A})$ tal que

$$\tau \in F \Leftrightarrow \tau(u^* \cdot u) \in F \ \forall u \in U(\tilde{\mathcal{A}}).$$

Então pelos lemas 3.13 (2) e 3.14 obtem-se

$$F = \{w_x \pi_\tau; \tau \in F, x \in H_\tau, ||x|| = 1\}.$$

Pela proposição 2.35 temos que

$$\overline{\alpha(F)} = \theta^{-1}(\overline{\theta(\alpha(F))},$$

então se $\alpha(\tau) \in \overline{\alpha(F)}$ segue que $\theta(\alpha(\tau)) \in \overline{\theta(\alpha(F))}$, portanto

$$Ker(\theta(\alpha(F))) \subseteq Ker(\alpha(\tau)) \subseteq Ker(\tau).$$

Pela proposição 2.16 concluimos que $\tau \in \overline{F} = F$, e portanto $\alpha(\tau) \in \alpha(F)$. Logo $\alpha(F)$ é fechado.

• Seja O um subconjunto aberto de $P(\mathcal{A})$, consideremos o conjunto auxiliar

$$O' = \{\tau(u^* \cdot u); \tau \in O, u \in U(\widetilde{A})\}.$$

Pelo lema 3.14 os conjuntos O e O' têm mesma imagem pela aplicação canônica α. É fácil ver que para cada $u \in U(\hat{\mathcal{A}})$, a aplicação $\delta_u : P(\mathcal{A}) \to P(\mathcal{A})$ bem-definida (corolário 3.15) por $\delta_u(\tau) = \tau(u^* \cdot u)$ é um homeomorfismo, então

$$O' = \bigcup_{u \in U(\mathcal{A})} \delta_u(O)$$

é aberto.

Note que

$$\tau \in O' \Leftrightarrow \tau(u^* \cdot u) \in O' \ \forall u \in U(\hat{\mathcal{A}})$$

e portanto, para $F = P(\mathcal{A}) - O'$ temos

$$\tau \in F \Leftrightarrow \tau(u^* \cdot u) \in F \ \forall u \in U(\hat{\mathcal{A}}).$$

Consequentemente, dados $\tau \in O'$ e $\rho \in F$, segue do lema 3.14 que as representações π_τ e π_ρ não são unitáriamente equivalentes, ou seja, as imagens de O' e F pela aplicação canônica α são disjuntas. Portanto

$$\hat{\mathcal{A}} - \alpha(O) = \hat{\mathcal{A}} - \alpha(O') = \alpha(F).$$

Logo α é aberta.

□

Corolário 3.17. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. A aplicação canônica $\gamma = \theta \circ \alpha$ do espaço $P(\mathcal{A})$ no espaço $Prim(\mathcal{A})$ é contínua, aberta e sobrejetora.*

Demonstração. Segue do fato de α e θ serem contínuas abertas e sobrejetoras. $\square$

Corolário 3.18. *Se $\mathcal{A}$ é separável, então o espaço $Prim(\mathcal{A})$ possui uma base topológica contável.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.6 o espaço $P(\mathcal{A})$ é metrizável e separável, então possui uma base topológica contável. É fácil ver que a imagem, pela aplicação canônica, de uma base topológica contável de $P(\mathcal{A})$ é uma base topológica contável de $Prim(\mathcal{A})$. $\square$

Teorema 3.19. *Se $\mathcal{A}$ é separável, então o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é de Baire.*

Demonstração. Seja $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de abertos e densos de $Prim(\mathcal{A})$. Consideremos a coleção $\{D'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ das imagens inversas, pela aplicação canônica γ de $P(\mathcal{A})$ em $Prim(\mathcal{A})$, dos membros da coleção $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Segue facilmente do Teorema 3.17 que os membros da coleção $\{D'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são abertos e densos em $P(\mathcal{A})$, então pelo fato de o espaço $P(\mathcal{A})$ ser de Baire (corolário 3.11), tem-se que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D'_n$ é denso, e segue facilmente da continuidade da aplicação canônica γ que

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ é denso em $Prim(\mathcal{A})$. Logo o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é de Baire. □

3.3 Sobriedade do espaço $Prim(\mathcal{A})$

Como está insinuado no título desta seção, o nosso objetivo aqui será mostrar que o espaço dos ideais primitivos $Prim(\mathcal{A})$ de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é sóbrio, mas para cumprir esse objetivo deveremos nos restringir as C*-álgebras separáveis, pois sob esta restrição poderemos provar (graças ao fato de $Prim(\mathcal{A})$ ser Baire) a equivalência entre os conceitos de ideal primitivo e primo de $\mathcal{A}$; esse fato, junto com a relação biunívoca existente entre os ideais primos de $\mathcal{A}$ e os fechados irredutíveis de $Prim(\mathcal{A})$ implicam a sobriedade de $Prim(\mathcal{A})$.

Um subconjunto fechado F de uma espaço topológico X é dito irredutível quando dados $B_1, B_2 \subseteq X$ fechados tais que $F \subseteq B_1 \cup B_2$ obrigatoriamente $F \subseteq B_1$ ou $F \subseteq B_2$.

Definição 3.20. *Um espaço topológico é um espaço sóbrio se todo subconjunto fechado irredutível é o fecho de um único ponto.*

Teorema 3.21. *Se $\mathcal{A}$ é separável, então todo ideal primo fechado é primitivo.*

Demonstração. • Suponhamos primeiramente que o ideal fechado $\{0\}$ de $\mathcal{A}$ é primo. De acordo com o corolário 3.18, existe uma base topológica contável $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $Prim(\mathcal{A})$ com todos os membros diferentes do vazio. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} Ker(Prim(\mathcal{A}) - U_n) \cap Ker(U_n) &= Ker(Prim(\mathcal{A})) \\ &= Ker(hull(\{0\})) \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

e existe um ideal fechado I_n de $\mathcal{A}$ tal que

$$\begin{aligned} Prim(\mathcal{A}) - U_n = hull(I_n) &\Rightarrow Ker(Prim(\mathcal{A}) - U_n) \\ &= Ker(hull(I_n)) \\ &= I_n \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, como $\{0\}$ é primo, segue que $Ker(U_n) = \{0\}$, então

$$\overline{U_n} = hull(Ker(U_n)) = hull(\{0\}) = Prim(\mathcal{A}),$$

ou seja, o subconjunto aberto U_n é denso no espaço $Prim(\mathcal{A})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como vimos no teorema 3.19, o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é de Baire, consequentemente $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso, portanto diferente do vazio, e ainda, pelo fato de $Prim(\mathcal{A})$ ser espaço-T_0, possui um único ponto J. Então,

$$\begin{aligned} hull(\{0\}) = Prim(\mathcal{A}) &= hull(Ker(\{J\})) \\ &= hull(J) \\ &\Rightarrow J = \{0\}. \end{aligned}$$

Logo o ideal primo $\{0\}$ é primitivo.

• Agora, se I é um ideal primo fechado qualquer de $\mathcal{A}$, então é fácil ver que $\{I\}$ é um ideal primo fechado em $\mathcal{A}/I$. Segue da primeira parte da demonstração que $\{I\}$ é primitivo em $\mathcal{A}/I$, portanto existe uma representação irredutível (H, π) de $\mathcal{A}/I$ tal que $Ker(\pi) = \{I\}$; sendo $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ a aplicação canônica, é fácil ver que $(H, \pi \circ i)$ é uma representação irredutível de $\mathcal{A}$ tal que $Ker(\pi \circ i) = I$. Logo o ideal primo I é primitivo. $\square$

Lema 3.22. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. Se F é um subconjunto fechado irredutível de $Prim(\mathcal{A})$, então $F = hull(I)$ com I ideal primo fechado de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue da proposição 2.30 que $F = hull(I)$ com I ideal fechado de $\mathcal{A}$. Sejam I_1 e I_2 ideais fechados de $\mathcal{A}$ tais que $I_1 I_2 \subseteq I$. Como $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$ (pág. 82 [1]), segue, ainda pela proposição 2.30, que

$$hull(I) \subseteq hull(I_1 \cap I_2) = hull(I_1) \cup hull(I_2).$$

Portanto

$$\begin{aligned} hull(I) &= hull(I) \cap [hull(I_1) \cup hull(I_2)] \\ &= [hull(I) \cap hull(I_1)] \cup [hull(I) \cap hull(I_2)] \end{aligned}$$

Como $hull(I)$ é fechado irredutível segue que

$$\begin{aligned} hull(I) &= hull(I) \cap hull(I_i),\ i = 1\ ou\ 2 \\ &\Rightarrow hull(I) \subseteq hull(I_i), i = 1\ ou\ 2 \\ &\Rightarrow I_i \subseteq I, i = 1\ ou\ 2. \end{aligned}$$

Logo I é primo. □

Teorema 3.23. *Se $\mathcal{A}$ é separável, então o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é sóbrio.*

Demonstração. Seja F um subconjunto fechado irredutível do espaço $Prim(\mathcal{A})$. Segue do lema 3.22 que $F = hull(I)$, onde I é um ideal primo fechado. Pelo teorema 3.21 o ideal I é primitivo. Ou seja; F é o fecho de um único ponto, onde esta unicidade está garantida pela biunivocidade da aplicação "hull"entre os ideais fechados de $\mathcal{A}$, e os subconjuntos fechados de $Prim(\mathcal{A})$. Logo o espaço $Prim(\mathcal{A})$ é sóbrio. □

Capítulo 4

Teorema de Dauns-Hofmann

Neste capítulo nos dedicaremos a demonstrar o teorema de Dauns-Hofmann com base nas ideias do artigo: A SIMPLE PROOF OF THE DAUNS-HOFMANN THEOREM ([4]) de GEORGE A. ELLIOTT e DORTE OLESEN. Tal teorema será necessário para provar a sobrejetividade do isomorfismo de Dixmier, que descreve o centro da álgebra dos multiplicadores de uma C*-álgebra como as funções contínuas e limitadas do espaço dos ideais primitivos no corpo complexo. Com base no isomorfismo de Dixmier mostraremos que o centro de uma

C*-álgebra $\mathcal{A}$, cujo espaço $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$ é Hausdorff, é isomorfo a $C_0(Prim(\mathcal{A}))$.

4.1 Teorema de Dauns-Hofmann

Lema 4.1. *Seja A um espaço normado e $J_0, ..., J_n$ subespaços fechados de A tais que para cada $k = 0, ..., n-1$ o isomorfismo linear canônico*

$$(J_0 + ... + J_k)/((J_0 + ... + J_k) \cap J_{k+1}) \to (J_0 + ...J_{k+1})/J_{k+1}$$

é uma isometria. Se $a \in J_0 + ... + J_n$, então existem $a_0 \in J_0, ..., a_n \in J_n$ tais que $a = a_0 + ... + a_n$ e $||a_i|| \leq 3||a||$ para cada $i = 0, ..., n$.

Demonstração. [4] □

Teorema 4.2. *(Dauns-Hofmann) Seja A uma C*-álgebra. Se $a \in A$ e $f \in C_b(Prim(A))$, então existe um único $f_a \in A$ tal que*

$$f_a - f(J)a \in J, \ \forall J \in Prim(A).$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que $0 \leq f \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, consideremos os seguintes abertos de $Prim(A)$:

$$U_i = f^{-1}(](i-1)n^{-1}, (i+1)n^{-1}[), \quad i = 0, ..., n.$$

É fácil ver que $Prim(A) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$.

Pela proposição 2.30 existem ideais fechados $I_0, ..., I_n$ de A tais que $hull(I_i) = Prim(A) - U_i$ para $i = 0, ..., n$.

Pela proposição 1.35 segue que $\sum_{i=0}^{n} I_i$ é um ideal fechado. Como

$$\bigcup_{i=0}^{n} I_i \subset \sum_{i=0}^{n} I_i \Rightarrow hull\left(\sum_{i=0}^{n} I_i\right) \subset hull\left(\bigcup_{i=0}^{n} I_i\right)$$

e ainda

$$\begin{aligned} hull\left(\bigcup_{i=0}^{n} I_i\right) &= \bigcap_{i=0}^{n} hull(I_i) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} Prim(A) - U_i \\ &= Prim(A) - \bigcup_{i=0}^{n} U_i \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Portanto, pela biunivocidade da aplicação "hull"obtemos

$$hull\left(\sum_{i=0}^{n} I_i\right) = \emptyset = hull(A) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} I_i = A.$$

Segue da proposição 1.33 que os *-isomorfismos canônicos

$$(I_0+,...,+I_k)/((I_0+,...,+I_k)\cap I_{k+1}) \to (I_0+,...,I_{k+1})/I_{k+1},$$

para $k = 0,...,n-1$, são isometrias. Então pelo lema 6.11 existem $a_0 \in I_0,...,a_n \in I_n$ tais que $a = \sum_{i=0}^{n} a_i$ com $||a_i|| \leq 3||a||$ para $i = 0,...,n$.

Para cada $J \in Prim(A)$ fixo, é fácil ver pela construção dos abertos $\{U_i\}_{i=0}^{n}$ que existe $i_0 \in \{0,...,n-1\}$ tal que $J \in U_{i_0} \cup U_{i_0+1}$ e $J \notin U_i$ para o restante dos indices, então $|in^{-1} - f(J)| \leq n^{-1}$ para $i = i_0, i_0+1$ e

$$J \in Prim(A) - U_i = hull(I_i) \Rightarrow a_i \in J$$

para cada $i \in \{0,...,n\} - \{i_0, i_0+1\}$. Consequentemente, considerando $b_n = \sum_{i=0}^{n} in^{-1}a_i$, segue que

$$\begin{aligned}
||b_n - f(J)a + J|| &= ||\sum_{i=0}^{n} in^{-1}a_i - \sum_{i=0}^{n} f(J)a_i + J|| \\
&= ||\sum_{i=0}^{n}(in^{-1} - f(J))a_i + J|| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |in^{-1} - f(J)|||a_i + J|| \\
&= \sum_{i=i_0}^{i_0+1} |in^{-1} - f(J)|||a_i + J||
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=i_0}^{i_0+1} n^{-1}||a_i + J|| \\
&= \sum_{i=i_0}^{i_0+1} n^{-1}||a_i|| \\
&\leq 6n^{-1}||a||.
\end{aligned}
$$

Agora veremos que a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Para $n \leq m$ fixos, temos, por conta da proposição 2.20, que existe uma representação irredutível (H, π) de $\mathcal{A}$ tal que $||\pi(b_n - b_m)|| = ||b_n - b_m||$. Pela proposição 2.26 $Ker(\pi)$ é um ideal primitivo.

$$
\begin{aligned}
b_m - b_n &= \sum_{i=0}^{m} im^{-1}a_i^m - \sum_{i=0}^{n} in^{-1}a_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{m}(im^{-1} - f(J))a_i^m + \sum_{i=0}^{m} a_i^m f(J) \\
&- \sum_{i=0}^{n} a_i^n f(J) - \sum_{i=0}^{n}(in^{-1} - f(J))a_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{m}(im^{-1} - f(J))a_i^m + f(J)a \\
&- f(J)a - \sum_{i=0}^{n}(in^{-1} - f(J))a_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{m}(im^{-1} - f(J))a_i^m
\end{aligned}
$$

$$+ \sum_{i=0}^{n}(in^{-1} - f(J))a_i^n.$$

Então

$$\begin{aligned}
||b_m - b_n|| &= ||\pi(b_m - b_n)|| \\
&= ||\pi(\sum_{i=0}^{m}(im^{-1} - f(J))a_i^m \\
&+ \sum_{i=0}^{n}(in^{-1} - f(J))a_i^n)|| \\
&= ||\pi(\sum_{i=i_0}^{i_0+1}(im^{-1} - f(J))a_i^m \\
&+ \sum_{i=i_1}^{i_1+1}(in^{-1} - f(J))a_i^n)|| \\
&\leq \sum_{i=i_0}^{i_0+1} |(im^{-1} - f(J))|||\pi(a_i^m)|| \\
&+ \sum_{i=i_1}^{i_1+1} |(in^{-1} - f(J))|||\pi(a_i^n)|| \\
&\leq \sum_{i=i_0}^{i_0+1} m^{-1}||a_i^m|| \\
&+ \sum_{i=i_1}^{i_1+1} n^{-1}||a_i^n|| \\
&\leq m^{-1}6||a|| + n^{-1}6||a|| \leq 6||a||n^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto existe $f_a \in A$, tal que $b_n \to f_a$, e consequentemente

$b_n + J \to f_a + J$. Ou seja;

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|b_n - f(J)a + J\| = 0 \quad &\Rightarrow \quad \|\lim_{n\to\infty} b_n - f(J)a + J\| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \|f_a - f(J)a + J\| = 0 \\ &\Rightarrow \quad f_a - f(J)a \in J. \end{aligned}$$

Tomemos $f'_a \in A$ tal que $f'_a - f(J)a \in J$ para todo $J \in Prim(A)$, então $f'_a - f_a \in J$ para todo $J \in Prim(A)$, portanto

$$f'_a - f_a \in ker(Prim(A)) = \{0\} \Rightarrow f'_a = f_a.$$

Logo f_a é único. $\square$

4.2 Isomorfismo de Dixmier

Se uma representação (H, π) de $\mathcal{A}$ for irredutível, então pela proposição 2.17 existe uma representação $(\overline{H}, \overline{\pi})$ irredutível de $M(\mathcal{A})$ que "estende"(H, π). Pela proposição 2.9 tem-se $\overline{\pi}(M(\mathcal{A}))' = \mathbb{C}1$. Como $\overline{\pi}(ZM(\mathcal{A})) \subseteq \overline{\pi}(M(\mathcal{A}))'$, então $\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})}$ é um *-homomorfismo complexo não-nulo, portanto uma representação irredutível (caracter) de $ZM(\mathcal{A})$.

Lema 4.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. Para cada representação irredutível (H, π) de $\mathcal{A}$ tem-se que*

$$Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})}) = \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq Ker(\pi)\}.$$

Demonstração. Seja $z \in Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$ e $a \in \mathcal{A}$. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}(z) = 0 &\Rightarrow \overline{\pi}(za) = 0 \\
&\Rightarrow \overline{\pi}(za)|_K = 0 \\
&\Rightarrow \pi(za) = 0 \\
&\Rightarrow za \in Ker(\pi) \\
&\Rightarrow z\mathcal{A} \subseteq Ker(\pi).
\end{aligned}$$

Seja $z \in \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq Ker(\pi)\}$, então $\pi(za) = 0$, $\Rightarrow \overline{\pi}(za) = 0 \Rightarrow \overline{\pi}(z)\overline{\pi}(a) = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, sendo π cíclica segue que $\overline{\pi}(z)|_K = 0$. Como $\overline{\pi}(z) = \lambda id_{\overline{H}}$, segue que $\overline{\pi}(z) = 0$, logo $z \in Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$.

□

Lema 4.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. A aplicação*

$$R : Prim(\mathcal{A}) \to Prim(ZM(\mathcal{A}))$$

definida por $R(Ker(\pi)) = Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$ está bem-definida, é contínua e sua imagem é densa.

Demonstração. • Pelo lema 5.1 R está bem-definida.

• Se F é um subconjunto fechado de $Prim(ZM(\mathcal{A}))$, então $F = hull(I)$, onde I é um ideal fechado de $ZM(\mathcal{A})$. Pelo lema

5.1 temos que

$$R(J) = \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J\},$$

então

$$\begin{aligned} R^{-1}(F) &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); R(J) \in hull(I)\} \\ &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J\} \supseteq I\} \\ &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); \overline{I\mathcal{A}} \subseteq J\} \\ &= hull(\overline{I\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Como $\overline{I\mathcal{A}}$ é um ideal fechado de $\mathcal{A}$, conclui-se que $R^{-1}(F)$ é fechado, e portanto R é contínua.

- Temos que

$$\begin{aligned} \overline{R(Prim(\mathcal{A}))} &= hull(Ker(R(Prim(\mathcal{A})))) \\ &= hull(Ker(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J)\}_{J \in Prim(A)})) \\ &= hull(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq ker(Prim(\mathcal{A}))\}) \\ &= hull(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq \{0\}\}) \\ &= hull(\{0\}) \\ &= Prim(ZM(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

(A penúltima igualdade acima ocorre pelo fato de $\mathcal{A}$ ser um ideal essencial em $M(\mathcal{A})$.) Logo a imagem de R é densa. $\square$

Teorema 4.5. *(Dixmier) Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. Então a aplicação $\psi : ZM(\mathcal{A}) \to C_b(Prim(\mathcal{A}))$ definida por*

$$\psi(z)(Ker(\pi)) = \hat{z}(Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})),$$

*onde $\hat{z}$ é a transformada de Gelfand de z, é um *-isomorfismo.*

Demonstração. O fato de ψ ser *-homomorfismo injetivo segue facilmente do *-isomorfismo de Gelfand para $ZM(\mathcal{A})$ e da densidade de $R(Prim(\mathcal{A}))$ em $Prim(ZM(\mathcal{A}))$ (lema 5.2).

Sejam $f \in C_b(Prim(\mathcal{A}))$ e $a \in \mathcal{A}$. Pelo teorema de Dauns-Hofmann existe um único $f_a \in \mathcal{A}$ tal que $f_a - f(J)a \in J$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$. Defina $L_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $L_f(a) = f_a$, e $R_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $R_f(a) = f_a$.

Seja $b \in \mathcal{A}$. Temos que $af_b - f(J)ab \in J$ e $f_ab - f(J)ab \in J$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$, então pela unicidade de f_{ab} segue que

$$f_{ab} = af_b = f_ab \Rightarrow aL_f(b) = R_f(a)b,$$

portanto $(L_f, R_f) \in M(\mathcal{A})$.

Temos que

$$f_{ab} = af_b = f_ab \Rightarrow L_fL_a(b) = L_aR_f(b) = L_{f_a}(b),$$

então $L_fL_a = L_aL_f = L_{f_a}$ e por uma conta análoga $R_aR_f = R_fR_a = R_{f_a}$. Portanto (L_f, R_f) comuta com todos elementos de $\mathcal{A}$, e como $\mathcal{A}$ é um ideal essencial em $M(\mathcal{A})$, tem-se

$$z_f = (L_f, R_f) \in ZM(\mathcal{A}).$$

Uma vez que $(z_f - f(J)1)a = f_a - f(J)a \in J$, segue pelo lema 5.1 que $z_f - f(J)1 \in R(J)$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$. Portanto

$$\begin{aligned}
(\hat{z_f} - f(J)\hat{1})(R(J)) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{z_f}(R(J)) = f(J)\hat{1}(R(J)) \\
&\Rightarrow \quad \psi(z_f)(J) = f(J)\psi(1)(J) = f(J) \\
&\Rightarrow \quad \psi(z_f) = f.
\end{aligned}$$

Logo ψ é um *-isomorfismo.

□

4.3 Isomorfismos

Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Consideremos a unitização $\tilde{\mathcal{A}}$; sabemos que (ver apêndice) $\mathcal{A}$ pertence a $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$, agora veremos que $hull_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\}$. Suponhamos que existe um ideal I de $\tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{A} \subsetneq I \subseteq \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}1$, então existe $(a, \lambda) \in I$ com $\lambda \neq 0$, assim $\frac{1}{\lambda}[(a, \lambda) - (a, 0)] = (0, 1) \in I$, logo $I = \tilde{\mathcal{A}}$.

Lema 4.6. *A aplicação canônica*

$$\omega : Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\} \to Prim(\mathcal{A})$$

definida por $\omega(P) = P \cap \mathcal{A}$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. aplicação do teorema 5.5.5. de [1] junto com a observação acima. $\square$

Definição 4.7.

$$C_{f(\mathcal{A})=0}(Prim(\tilde{\mathcal{A}})) := \{f \in C(Prim(\tilde{\mathcal{A}})); f(\mathcal{A}) = 0\}.$$

Lema 4.8. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* C^**-álgebra sem unidade. A aplicação*

$$\psi\mid_{Z(\mathcal{A})}: Z(\mathcal{A}) \to C_{f(\mathcal{A})=0}(Prim(\tilde{\mathcal{A}}))$$

onde ψ *é o isomorfismo de Dixmier para* $\tilde{\mathcal{A}}$*, é um *-isomorfismo.*

Demonstração. Mostraremos somente a sobrejetividade de $\psi\mid_{Z(\mathcal{A})}$, pois o restante segue diretamente do isomorfismo de Dixmier.

Seja $f \in C_{f(\mathcal{A})=0}(Prim(\tilde{\mathcal{A}}))$. Segue da sobrejetividade de ψ que existe $(a, \lambda) \in Z(\tilde{\mathcal{A}})$ tal que $\psi(a, \lambda) = f$, então $\psi(a, \lambda)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) = 0$. Como vimos no exemplo 2.27 a representação δ é irredutível e $Ker(\delta) = \mathcal{A}$, portanto $\psi(a, \lambda)(\mathcal{A}) = \delta(a, \lambda) = \lambda id_{\mathbb{C}} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \psi\mid_{Z(\mathcal{A})}(a) = f$. $\square$

Lema 4.9. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma* C^**-álgebra sem unidade, onde o espaço* $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$ *é Hausdorff. Então a aplicação*

$$C_{f(\mathcal{A})=0}(Prim(\tilde{\mathcal{A}})) \to C_0(Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\}), \;\; f \mapsto f\mid_{Prim(\tilde{\mathcal{A}})-\{\mathcal{A}\}}$$

*é um *-isomorfismo.*

Demonstração. Mostraremos somente a sobrejetividade. Seja $f \in C_0(Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\})$; tome a função $f' : Prim(\tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{C}$ definida por $f'(\mathcal{A}) = 0$ e, $f' = f$ em $Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\}$. A função f' é contínua em $\mathcal{A}$, pois pelo fato de conjuntos compactos serem fechados em espaços Hausdorff tem-se que $[|f'|^{-1}([\epsilon, \infty))]^c$ é vizinhança aberta de $\mathcal{A}$ para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

Teorema 4.10. *Seja $\mathcal{A}$ um C*-álgebra sem unidade com $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$ Hausdorff. Então a aplicação*

$$Z(\mathcal{A}) \to C_0(Prim(\mathcal{A})), \quad z \mapsto \psi(z) \mid_{(Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\})} \circ \omega^{-1},$$

*onde ψ é o isomorfismo de Dixmier para $\tilde{\mathcal{A}}$, é um *-isomorfismo.*

Demonstração. O lema 4.8 nos diz que $Z(\mathcal{A})$ é *-isomorfo a $C_{f(\mathcal{A})=0}(Prim(\tilde{\mathcal{A}}))$, e o lema 4.9 diz que este último é *-isomorfo a $C_0(Prim(\tilde{\mathcal{A}}) - \{\mathcal{A}\})$, e ainda segue do lema 4.6 que este último é *-isomorfo a $C_0(Prim(\mathcal{A}))$. Logo segue o resultado. $\square$

O dois últimos lemas desta seção não valem em geral sem a hipótese Hausdorff sobre o espaço dos primitivos, pois se tomarmos a C*-álgebra dos operadores compactos $\mathcal{A} = K(H)$

em algum espaço de Hilbert H, segue que $Z(\mathcal{A}) = \{0\}$ e $Prim(\tilde{\mathcal{A}}) = \{\{0\}, \mathcal{A}\}$ (não-Hausdorff, pois $\{0\}$ é um ponto denso em $Prim(\tilde{\mathcal{A}})$), entretanto

$$C_0(Prim(\mathcal{A})) = \mathbb{C}.$$

Capítulo 5

Teoremas de isomorfismo

5.1 teoremas de isomorfismo

Seja I um ideal fechado de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Pelo teorema de Gelfand-Neimark existe uma representação fiel (H, π) (não-degenerada) da C*-álgebra $\mathcal{A}/I$, então $(H, \pi \circ q)$ é uma representação (não-degenerada) de $\mathcal{A}$ tal que $Ker(\pi \circ q) = I$, onde q é a aplicação canônica entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/I$. Assim concluimos que todo ideal fechado de $\mathcal{A}$ é o núcleo de alguma representação não-degenerada de $\mathcal{A}$.

Seja (H, π) uma representação (não-degenerada) de $\mathcal{A}$, então pela proposição 2.17 existe uma representação $(\overline{H}, \overline{\pi})$ (não-degenerada) de $M(\mathcal{A})$ que "extende"(H,π), então $Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$ é um ideal fechado de $ZM(\mathcal{A})$.

Lema 5.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Para cada representação não-degenerada (H,π) de $\mathcal{A}$ tem-se que*

$$Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})}) = \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq Ker(\pi)\}.$$

Demonstração. Seja $z \in Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$ e $a \in \mathcal{A}$. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \overline{\pi}(za) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \overline{\pi}(za)|_K = 0 \\
&\Rightarrow \quad \pi(za) = 0 \\
&\Rightarrow \quad za \in Ker(\pi) \\
&\Rightarrow \quad z\mathcal{A} \subseteq Ker(\pi).
\end{aligned}$$

□

Se $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{I}(ZM(\mathcal{A}))$ denotam os ideais fechados de $\mathcal{A}$ e de $ZM(\mathcal{A})$ respectivamente, então segue do lema anterior que a aplicação

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) \to \mathcal{I}(ZM(A)), \quad Ker(\pi) \mapsto Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$$

está bem-definida, e preserva interseções.

Se uma representação (H, π) de $\mathcal{A}$ for irredutível, então ainda pela proposição 2.17 existe uma representação $(H', \overline{\pi})$ irredutível de $M(\mathcal{A})$ que "extende"(H, π). Pela proposição 2.9 tem-se $\overline{\pi}(M(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$, como $\overline{\pi}(ZM(\mathcal{A})) \subseteq \overline{\pi}(M(\mathcal{A}))'$, então $\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})}$ é um *-homomorfismo compexo não-nulo, portanto uma representação irredutível (caractere) de $ZM(\mathcal{A})$.

Lema 5.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. A plicação $R : Prim(\mathcal{A}) \to Prim(ZM(\mathcal{A}))$ definida por $R(Ker(\pi)) = Ker(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})})$ é contínua e sua imagem é densa.*

Demonstração. • Se F é um subconjunto fechado de $Prim(ZM(\mathcal{A}))$, então $F = hull(I)$, onde I é um ideal fechado de $ZM(\mathcal{A})$. Pelo lema 5.1 temos que

$$R(J) = \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J\},$$

então

$$\begin{aligned} R^{-1}(F) &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); R(J) \in hull(I)\} \\ &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); \{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J\} \supseteq I\} \\ &= \{J \in Prim(\mathcal{A}); \overline{I\mathcal{A}} \subseteq J\} \\ &= hull(\overline{I\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Como $\overline{I\mathcal{A}}$ é um ideal fechado de $\mathcal{A}$, conclui-se que $R^{-1}(F)$ é fechado, e portanto R é contínua.

- Temos que

$$\begin{aligned}
\overline{R(Prim(\mathcal{A}))} &= hull(Ker(R(Prim(\mathcal{A})))) \\
&= hull(Ker(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq J)\}_{J\in Prim(A)})) \\
&= hull(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq ker(Prim(\mathcal{A}))\}) \\
&= hull(\{z \in ZM(\mathcal{A}); z\mathcal{A} \subseteq \{0\}\}) \\
&= hull(\{0\}) \\
&= Prim(ZM(\mathcal{A})).
\end{aligned}$$

(A penúltima igualdade acima ocorre pelo fato de $\mathcal{A}$ ser um ideal essencial em $M(\mathcal{A})$.) Logo a imagem de R é densa. □

Teorema 5.3. *(Dixmier) Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então a aplicação $\psi : ZM(\mathcal{A}) \to C_b(Prim(\mathcal{A}))$; definida por*

$$\psi(z)(Ker(\pi)) = \hat{z}(\overline{\pi}|_{ZM(\mathcal{A})}),$$

*onde $\hat{z}$ é a transformação de Gelfand de z, é um *-isomorfismo.*

Demonstração. O fato de ψ ser *-homomorfismo injetivo segue facilmente do *-isomorfismo de Gelfand para $ZM(\mathcal{A})$ e da densidade de $R(Prim(\mathcal{A}))$ em $Prim(ZM(\mathcal{A}))$ (lema 5.2).

Sejam $f \in C_b(Prim(\mathcal{A}))$ e $a \in \mathcal{A}$. Pelo teorema de Dauns-Hofmann existe um único $f_a \in \mathcal{A}$ tal que $f_a - f(J)a \in J$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$. Defina $L_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $L_f(a) = f_a$, e $R_f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $R_f(a) = f_a$.

Seja $b \in \mathcal{A}$. Temos que $af_b - f(J)ab \in J$ e $f_a b - f(J)ab \in J$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$, então pela unicidade de f_{ab} segue que

$$f_{ab} = af_b = f_a b \Rightarrow aL_f(b) = R_f(a)b,$$

portanto $(L_f, R_f) \in M(\mathcal{A})$.

Temos que

$$f_{ab} = af_b = f_a b \Rightarrow L_f L_a(b) = L_a R_f(b) = L_{f_a}(b),$$

então $L_f L_a = L_a L_f = L_{f_a}$ e por uma conta análoga $R_a R_f = R_f R_a = R_{f_a}$. Portanto (L_f, R_f) comuta com todos elementos de $\mathcal{A}$, e como $\mathcal{A}$ é um ideal essencial em $M(\mathcal{A})$, tem-se

$$z_f = (L_f, R_f) \in ZM(\mathcal{A}).$$

Uma vez que $(z_f - f(J)1)a = f_a - f(J)a \in J$, segue pelo lema 5.1 que $z_f - f(J)1 \in R(J)$ para todo $J \in Prim(\mathcal{A})$. Portanto

$$\begin{aligned}
(\hat{z_f} - f(J)\hat{1})(R(J)) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{z_f}(R(J)) = f(J)\hat{1}(R(J)) \\
&\Rightarrow \quad \psi(z_f)(J) = f(J)\psi(1)(J) = f(J) \\
&\Rightarrow \quad \psi(z_f) = f.
\end{aligned}$$

Logo ψ é um *-isomorfismo.

$\square$

Apêndice

Capítulo 6

Unitizações.

Aqui trataremos duas noções de unitização para C*-álgebras sem unidade que foram importantes para os teoremas de isomorfismo do capítulo 4. Construiremos a álgebra dos duplo centralizadores de uma C*-álgebra, que dará origem as duas noções de unitização.

6.1 Unitização $M(\mathcal{A})$.

6.1.1 A álgebra duplo centralizador.

Definição 6.1. *Seja A uma C*-álgebra. Um duplo centralizador em A é um par (L, R) de funções com domínio e contra-*

domínio em A tais que $aL(b) = R(a)b$ para todos $a, b \in A$.

Nesta seção A sempre denotará uma C*-álgebra e $M(A)$ o conjunto de seus duplo centralizadores.

Lema 6.2. *Denotemos a bola unitária fechada de A por $B_A[0,1]$. Então para cada $a \in A$ tem-se*

$$||a|| = \sup_{b \in B_A[0,1]} ||ba||.$$

Demonstração. Dados $a \in A$ e $b \in B_A[0,1]$, segue que

$$||ba|| \leq ||b||||a|| \leq ||a||.$$

Tome $b = \frac{a^*}{||a||} \in B_A[0,1]$, então

$$||ba|| = ||\frac{a^*}{||a||}a|| = \frac{||a||^2}{||a||} = ||a||.$$

Logo $||a|| = \sup_{b \in B_A[0,1]} ||ba||$.

□

Corolário 6.3. *Dados $a, b \in A$, se $ca = cb$ para todo $c \in A$, então $a = b$.*

Demonstração. Se $c(a - b) = 0$ para todo $c \in A$, então

$$0 = \sup_{c \in B_A[0,1]} ||c(a - b)|| = ||a - b|| \Rightarrow a = b.$$

□

Proposição 6.4. *Seja $(L, R) \in M(A)$. Então*

(i) L e R são operadores lineares contínuos em A.

(ii) $L(ab) = L(a)b$ para todos $a, b \in A$.

(iii) $R(ab) = aR(b)$ para todos $a, b \in A$.

Demonstração. Serão demonstradas as afirmações relativas a L. As relativas a R são provadas analogamente.

(i) • Sejam $a, b, c \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} cL(\lambda a + \beta b) &= R(c)(\lambda a + \beta b) \\ &= \lambda R(c)a + \beta R(c)b \\ &= \lambda cL(a) + \beta cL(b) = c(\lambda L(a) + \beta L(b)). \end{aligned}$$

Logo pelo corolário 6.3 tem-se

$$L(\alpha a + \beta b) = \alpha L(a) + \beta L(b).$$

• Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em A tal que

$$lim_{n \to \infty} ||a_n - a|| = lim_{n \to \infty} ||L(a_n) - b|| = 0.$$

Temos que

$$||cL(a) - cb|| \leq ||cL(a) - cL(a_n)|| + ||cL(a_n) - cb||$$

$$\begin{aligned} &= ||R(c)(a-a_n)|| + ||c(L(a_n)-b)|| \\ &\leq ||R(c)||||a-a_n|| + ||c||||L(a_n)-b|| \to 0. \end{aligned}$$

Segue que $cL(a) = cb$ para todo $c \in A$, então pelo corolário 6.3 $L(a) = b$. Logo, pelo teorema do gráfico fechado o operador L é contínuo.

(ii) Sejam $a, b, c \in A$. Temos que

$$cL(ab) = R(c)(ab) = (R(c)a)b = cL(a)b.$$

Logo, pelo corolário 6.3 tem-se $L(ab) = L(a)b$.

□

Agora sabemos que dado $(L, R) \in M(A)$, as funções L e R são operadores limitados, assim podemos calcular suas normas da forma usual. O lema que segue diz que a norma dos operadores L e R são iguais.

Lema 6.5. *Dado* $(L, R) \in M(A)$, *tem-se* $||L|| = ||R||$.

Demonstração. Seja $a \in S(A)$. Então pelo lema 6.2 temos

$$\begin{aligned} ||L(a)|| &= \sup_{b \in S(A)} ||bL(a)|| \\ &= \sup_{b \in S(A)} ||R(b)a|| \\ &\leq \sup_{b \in S(A)} ||R(b)|| = ||R||. \end{aligned}$$

Segue que $||L|| \leq ||R||$. A desigualdade contrária segue analogamente. Logo $||L|| = ||R||$. $\square$

Definição 6.6. *Dado um operador linear limitado $T : A \to A$, a função $T^* : A \to A$ é definida por*

$$T^*(a) = (T(a^*))^*.$$

Dado $(L, R) \in M(A)$, denotaremos por $(L, R)^*$ o par (R^*, L^*).

Lema 6.7. *Se $(L, R) \in M(A)$, então $(L, R)^* \in M(A)$.*

Demonstração. Dados $a, b \in A$, tem-se

$$[aR^*(b)]^* = R(b^*)a^* = b^*L(a^*) = [(L(a^*))^*b]^* = [L^*(a)b]^*.$$

Logo $(L, R)^* = (R^*, L^*) \in M(A)$. $\square$

Lema 6.8. *Dados $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então*

(i) $(L_1L_2, R_2R_1) \in M(A)$.

(ii) $(L_1 + L_2, R_1 + R_2) \in M(A)$.

(iii) $(\lambda L_1, \lambda R_1) \in M(A)$.

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in A$, então

$$aL_1L_2(b) = R_1(a)L_2(b) = R_2R_1(a)b.$$

Logo $(L_1L_2, R_2R_1) \in M(A)$.

(ii) Segue facilmente.

(iii) Segue facilmente.

□

Teorema 6.9. *Sejam* $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *As operações, involução e norma a seguir definem uma estrutura de* C^**-álgebra com unidade em* $M(A)$*:*

(i) $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$,

(ii) $\lambda(L_1, R_1) = (\lambda L_1, \lambda R_1)$,

(iii) $(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$,

(iv) $(L_1, R_1)^* = (R_1^*, L_1^*)$,

(v) $||(L_1, R_1)|| = ||L_1|| = ||R_1||$.

Demonstração. Nesta demonstração só abordaremos a completude do espaço na norma, e a igualdade $||T^*T|| = ||T||^2$ para todo $T \in M(A)$, pois o restante é trivial.

• Seja $((L_n, R_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $M(A)$. Seque que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $B(A)$, que é completo, então

$$L_n \to L \in B(A) \text{ e } R_n \to R \in B(A).$$

Dados $a, b \in A$, tem-se

$$\begin{aligned} aL(b) &= a \lim L_n(b) \\ &= \lim aL_n(b) \\ &= \lim R_n(a)b \\ &= (\lim R_n(a))b = R(a)b, \end{aligned}$$

então $(L, R) \in M(A)$. Temos que

$$||(L_n, R_n) - (L, R)|| = ||L_n - L|| \to 0.$$

Logo $M(A)$ é completo.

- Dados $(L, R) \in M(A)$ e $a \in A$ com $||a|| \leq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} ||L(a)||^2 &= ||L(a)^* L(a)|| \\ &= ||L^*(a^*)L(a)|| \\ &= ||a^* R^* L(a)|| \leq ||R^* L|| = ||(L, R)^*(L, R)||. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} ||(L, R)||^2 = ||L||^2 &= \sup_{||a|| \leq 1} ||L(a)||^2 \\ &\leq ||(L, R)^*(L, R)|| \\ &\leq ||(L, R)^*||||(L, R)|| = ||(L, R)||^2. \end{aligned}$$

Logo $||(L, R)^*(L, R)|| = ||(L, R)||^2$. $\square$

Observação 6.10. *A unidade da C*-algebra $M(A)$ é o duplo centralizador (I, I), onde $I(a) = a$ para todo $a \in A$.*

Agora queremos identificar a C*-álgebra A como um ideal fechado da C*-álgebra $M(A)$. Claramente para cada $a \in A$, o par (L_a, R_a) onde $L_a(b) = ab$ e $R_a(b) = ba$ para todo $b \in A$, são duplo centralizadores em A, estes serão úteis na proposição que segue para identificar A em $M(A)$.

Proposição 6.11. *Dada a aplicação $\mu : A \to M(A)$ definida por $\mu(a) = (L_a, R_a)$, seguem os resultados:*

*(i) A aplicação μ é um *-homomorfismo isométrico e $\mu(A)$ é um ideal fechado em $M(A)$.*

(ii) μ é sobrejetiva se e somente se A possui unidade.

(iii) Se A é comutativa, então $M(A)$ também é.

Demonstração. (i) • Segue facilmente que μ é *-homomorfismo.

• Se $\mu(a) = 0$ então $L_a = 0$ e $R_a = 0$, portanto $ab = 0 = ba$ para todo $b \in A$. Segue do corolário 6.3 que $a = 0$, portanto μ é injetiva. Logo, pela proposição 1.33 μ é isométrica.

• Pela proposição 1.34 segue que $\mu(A)$ é uma C*-subálgebra de $M(A)$. Dados $a, b \in A$ e $(L, R) \in M(A)$, temos que

$$LL_a(b) = L(ab) = L(a)b = L_{L(a)}(b)$$

e

$$R_aR(b) = R(b)a = bL(a) = R_{L(a)}(b).$$

Portanto

$$\begin{aligned} (L, R)\mu(a) &= (L, R)(L_a, R_a) \\ &= (LL_a, R_aR) \\ &= (L_{L(a)}, R_{L(a)}) = \mu(L(a)). \end{aligned}$$

Analogamente chega-se que $\mu(R(a)) = \mu(a)(L, R)$. Logo $\mu(A)$ é um ideal fechado de $M(A)$.

(ii) • Se μ é sobrejetiva, então existe $e \in A$ tal que $\mu(e) = (I, I)$, segue que $L_e = I = R_e$. Ou seja, $eb = b = be$ para todo $b \in A$.

• Reciprocamente, se A possui unidade e, então $\mu(e) = (I, I) \in \mu(A)$. Como o ideal $\mu(A)$ possui a unidade de $M(A)$ então $\mu(A) = M(A)$.

(iii) Suponhamos que A é comutativa. Dados $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in$

$M(A)$ e $a, b \in A$. Temos que

$$\begin{aligned}
L_1L_2(a)b &= L_1(L_2(a))b \\
&= L_1(L_2(a)b) \\
&= L_1(bL_2(a)) \\
&= L_1(R_2(b)a) \\
&= L_1(aR_2(b)) \\
&= L_1(a)R_2(b) \\
&= R_2(b)L_1(a) \\
&= bL_2(L_1(a)) \\
&= L_2(L_1(a))b = L_2L_1(a)b.
\end{aligned}$$

Pelo corolário 6.3 tem-se $L_1L_2 = L_2L_1$. Analogamente mostra-se que $R_1R_2 = R_2R_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
(L_1, R_1)(L_2, R_2) &= (L_1L_2, R_2R_1) \\
&= (L_2L_1, R_1R_2) = (L_2, R_2)(L_1, R_1).
\end{aligned}$$

$\square$

A seguir daremos dois exemplos de algebras de duplo centralizadores cujos cálculos podem ser encontrados nas páginas 82 e 83 da referência [1].

Exemplo 6.12. *Considerando o espaço dos operadores compactos $K(H)$ em um espaço de Hilbert H, tem-se*

$$M(K(H)) = B(H),$$

onde $B(H)$ é o espaço dos operadores limitados em H.

Exemplo 6.13. *Considerando Ω um espaço Hausdorff e localmente compacto, tem-se $M(C_0(\Omega)) = C_b(\Omega)$.*

6.2 Unitização $\tilde{A}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra sem unidade. Pela proposição 6.11 $\mathcal{A}$ é um ideal fechado em $M(\mathcal{A})$, então pela proposição 1.35 a soma direta $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}1$ é uma C*-subálgebra de $M(\mathcal{A})$. Chamaremos a C*-álgebra $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}1$ de unitização de $\mathcal{A}$ e a denotaremos por $\tilde{\mathcal{A}}$. Consideremos o *-homomorfismo

$$\tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}, \quad a + \lambda 1 \mapsto \lambda.$$

É fácil ver que $\mathcal{A}$ é o núcleo desta aplicação, portanto um ideal primitivo de $\tilde{\mathcal{A}}$, e ainda, se $\mathcal{A}$ não possui unidade, segue pelo teorema do isomorfismo que $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$.

Referências Bibliográficas

[1] Gerard J. Murphy **C*-Algebras and Operator Theory**, Academic press,INC, 1990.

[2] V.S. Sunder **Functional Analysis:Spectral Theory**, Institute of Mathematical Sciences Madras 600113 INDIA, 2000.

[3] J. Dixmier **Les C*-algèbres et leurs représentations**, Gauthier-Villars,Paris,1964.

[4] George A. Elliott e Dorte Olesen **A Simple proof of the Dauns-Hofmann theorem**, MATH.SCAND.34 (1974), 231-234.

[5] Nik Weaver. **A prime C*-algebra that is not primitive**, 6 julho 2001, 1-5.

[6] May Nilsen. **The stone-Cech compactificacion of Prim(A)**, 1995, 377-383.

[7] Robert C. Busby. **Double centralizers and extensions of C*-álgebras**, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 132, No. 1 (Jun., 1968), pp. 79-99.

[8] Rui Miguel Coutinho Palma **Produtos Cruzados C*. Invertibilidade numa Álgebra de Operadores Funcionais.** Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática e Aplicações, Universidade Técnica de Lisboa, 2008, 6.

[9] Camila Fabre Sehnem. **O teorema de Gelfand,** Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação em matemática da universidade federal de santa catarina para obtenção do título de licenciada em matemática, 2011, 65.