



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - PPGECT**

**IVONE CATARINA FREITAS BURATTO**

**HISTORICIDADE E VISUALIDADE: PROPOSTA PARA UMA  
NOVA NARRATIVA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**FLORIANÓPOLIS-SC  
2012**



**IVONE CATARINA FREITAS BURATTO**

**HISTORICIDADE E VISUALIDADE: PROPOSTA PARA UMA  
NOVA NARRATIVA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora.

Orientadora: Dra. Cláudia Regina Flores

**FLORIANÓPOLIS-SC  
2012**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da  
UFSC.

Buratto, Ivone Catarina Freitas

Historicidade e visualidade [tese] : proposta para  
uma nova narrativa na Educação Matemática / Ivone  
Catarina Freitas Buratto ; orientadora, Cláudia Regina  
Flores - Florianópolis, SC, 2012.

241 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.  
Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e  
Tecnológica.

Inclui referências

1. Educação Científica e Tecnológica. 2.  
Historicidade e Visualidade. 3. Novas narrativas. 4.  
Educação Matemática. 5. Práticas do olhar. I. Flores,  
Cláudia Regina. II.

Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.  
III. Título.




UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E  
TECNOLÓGICA

**“Historicidade e visualidade: Proposta para uma nova narrativa na educação matemática”.**

Tese submetida ao Colegiado do Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação Científica e Tecnológica

**APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 30/07/2012**

Dr<sup>a</sup>. Cláudia Regina Flores (MEN/UFSC – Orientadora) 

Dr. Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP – Examinador) 

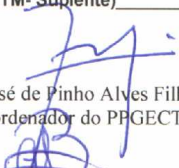
Dr. Iran Abreu Mendes (UFRN – Examinador) 

Dr<sup>a</sup>. Joseane Pinto de Arruda (CA/CED- Examinadora) 

Dr. David Antonio da Costa (MEN/CED - Examinador) 

Dr<sup>a</sup>. Claudia Glavam Duarte (MEN/CED – Suplente) \_\_\_\_\_

Dr<sup>a</sup>. Neri Both Carvalho (CFM/MTM- Suplente) \_\_\_\_\_

  
Dr. José de Pinho Alves Filho  
Coordenador do PPGECT

  
**Ivone Catarina Freitas Buratto**  
Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2012.

Dedico aos amantes dos estudos – eternos aprendizes:

Estudar. Entre ler e escrever.

Algo (se) passa. Perde-se  
em uma biblioteca em chamas.

Exercitar-se no silêncio.

Habitar labirintos. Aprender a ler e escrever cada vez de novo.

Defender a liberdade, a solidão, o desejo que permanece desejo

(LARROSA, 2003).

## IMAGENS DE GRATIDÃO

Iniciar um trabalho acadêmico com agradecimentos não é, apenas, o cumprimento de uma praxe. Felizes os que têm, ao final do seu percurso, a quem agradecer. No decorrer desses quatro anos e meio, simplificando 54 meses, acumularam-se situações diante das quais, sem a presença e a interferência de determinadas pessoas, eu não teria conseguido ir em frente. Dado o decurso de tempo, também corro o risco de esquecer alguém. Ainda assim, quero manifestar meus agradecimentos:

- ✓ a minha orientadora, Prof<sup>a</sup> Dra Cláudia Regina Flores, imagem estética presentificada, em todos os *planos*. Ser humano e profissional exemplar que soube evitar que a amizade construída atenuasse o rigor acadêmico;

Manifesto que, ao elaborar a tese, fui desafiada inúmeras vezes nas orientações, recebendo sempre auxílio da orientadora, de profissionais da área, de amigos, de professores e de parentes, como também de pessoas não pertencente ao círculo de convivência profissional. Foi assim que dividi e somei recursos a este trabalho de pesquisa.

Foi cansativo, mas fascinante... concedendo-me agora a satisfação memorável de reconhecer e agradecer modestamente a esses magníficos entusiasmos e inigualáveis colaboradores.

Mencioná-los seria um testemunho muito longo, optei por apenas transmitir um simples e significativo “DEUS OS ABENÇOE”.



## RESUMO

Esta tese trata do papel da historicidade e da visualidade para a formulação de uma nova narrativa na Educação Matemática. Para tanto, interrogamos como historicidade e visualidade podem se constituir como ferramentas para esta elaboração. Nosso objetivo, portanto, voltou-se para discutir e analisar de que modo esta nova narrativa poderia proporcionar uma compreensão do visual como construção cultural e histórica. Para esta discussão, validamos nossos preceitos embasados em estudos teóricos advindos da literatura nacional e internacional, que auxiliaram nossa proposta de fomentar a discussão sobre novas narrativas na contemporaneidade e de dar condições para romper com ideias tão enraizadas na estrutura educacional da matemática. Assim, trazemos uma contribuição sobre o modo de tratar história e visualidade em cursos de formação de professores, deixando claro que não tivemos a intenção, neste momento, de discutir e analisar tal proposta com os mesmos, mas de elaborar um texto escrito para subsidiar novas pesquisas para a continuidade do estabelecimento de novas fronteiras na Educação Matemática.

**Palavras chave:** Historicidade. Visualidade. Novas narrativas na Educação Matemática. Práticas do olhar.

## **ABSTRACT**

This thesis deals with the role of historicity and visibility to formulate a new narrative in Mathematics Education. Therefore, we question how historicity and visibility can be as tool for this elaboration. Our objective, therefore, turned to discuss and analyze how this new narrative could provide a visual understanding of how cultural and historical construction. For this discussion, we validated our precepts grounded in theoretical studies arising from national and international literature, which helped our proposal to foster discussion of new narratives in contemporary and give conditions to break ideas so ingrained in the educational structure of Mathematics. So, we bring a contribution on how to treat history and visibility on teachers training courses, making it clear, that we had no intention at this time, to discuss and analyze this proposal with them, but to prepare a written text to subsidize new research for the continuity of the establishment of new frontiers in Mathematics education.

**Keywords:** Historicity. Visibility. New Narrative in Mathematics Education. Practical of Looking.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Atividade de ensino-aprendizagem para o cálculo de área .....	69
Figura 2: Perspectiva isométrica .....	72
Figura 3: Perspectiva cavaleira.....	72
Figura 4: Perspectiva cônica .....	72
Figura 5: Representações pictóricas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção e imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial.....	74
Figura 6: Intersecção de domínios na matemática .....	80
Figura 7: Igreja da Assunção em Gênova .....	113
Figura 8: Gravura do Opúsculo intitulado Exemplos de uma maneira universal do S.G.D.L., tocando a prática da perspectiva...,1636 de Girard Desargues.....	119
Figura 9: Perspectiva cônica ou central.....	124
Figura 10: Esquema de uma perspectiva central .....	124
Figura 11: Perspectiva cavaleira.....	127
Figura 12: Perspectiva axonométrica, isométrica (a), dimétrica (b) e trimétrica (c).....	128
Figura 13: Construção moderna pelo método de pontos distantes .....	142
Figura 14: Dürer, Underweysung der Messung, Nürembergue, 1525....	144
Figura 15: Os quatro cavaleiros do apocalipse – Albrecht Dürer.....	151
Figura 16: Adão e Eva – Albrecht Dürer (1504).....	152

Figura 17: A máquina da janela de vidro .....	161
Figura 18: A máquina da rede metálica ou a máquina da janela quadriculada.....	162
Figura 19: A máquina da portinhola .....	163
Figura 20: San Jerónimo – Albrecht Dürer (1514) .....	182
Figura 21: O homem iluminado .....	183
Figura 22: Representa o mundo em perspectiva .....	184
Figura 23: Representação da experiência de Brunelleschi – 1413.....	187
Figura 24: Representação do método de Alberti.....	189
Figura 25: Espiral de Arquimedes-Dürer (forma discreta) .....	191
Figura 26: Espiral de Arquimedes-Dürer (forma contínua).....	193
Figura 27: San Jerónimo – Albrecht Dürer (1514) – Perspectiva de três pontos no infinito (X, Y e Z) sobre a mesma linha .....	196
Figura 28: Representação de Dürer do cubo (conforme Euclides) .....	201
Figura 29: Representação de Dürer do cubo (com cálculo algébrico) ...	202
Figura 30: Planificação do cubo proposta por Dürer .....	203
Figura 31: Construção do Eneágono proposto por Dürer .....	205
Figura 32: Eneágono modificado de Dürer .....	207
Figura 33: Adão e Eva – Albrecht Dürer (1504).....	211
Figura 34: Conotações representativas Adão e Eva – Albrecht Dürer (1504).....	213

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1: Algumas definições sobre visualização.....	58
Quadro 2: Definições para o termo visualização.....	61
Quadro 3: Alguns elementos da arquitetura renascentista.....	113

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>CAPÍTULO I NOVAS NARRATIVAS NA EDUCAÇÃO</b>	
<b>MATEMÁTICA</b> .....	23
1.1 DA HISTÓRIA À HISTORICIDADE .....	23
1.2 CULTURA VISUAL E A VISUALIDADE.....	34
1.3 DA VISUALIZAÇÃO À VISUALIDADE .....	42
1.4 SOBRE UMA ÉTICA PARA A DOCÊNCIA (DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA) .....	46
1.5 DA PROPOSTA .....	49
<b>CAPÍTULO II VISUALIZAÇÃO E EDUCAÇÃO</b>	
<b>MATEMÁTICA: UM ESTADO DA ARTE</b> .....	54
2.1 O TERMO VISUALIZAÇÃO NAS PESQUISAS.....	54
2.2 AS TENDÊNCIAS PARA A PESQUISA EM VISUALIZAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA .....	63
2.3 AS METODOLOGIAS NA PESQUISA EM VISUALIZAÇÃO.....	68
2.4 AS PESQUISAS E SUAS ABORDAGENS PEDAGÓGICAS ....	83
2.5 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA COM FOCO NA PERSPECTIVA .....	99
<b>CAPÍTULO III OS USOS DA PERSPECTIVA: PONTO DE PARTIDA PARA UMA NARRATIVA</b> .....	108

3.1	SOBRE O SURGIMENTO DE UMA TÉCNICA: A PERSPECTIVA .....	108
3.2	A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA ARQUITETURA .....	111
3.3	A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA ARTE .....	114
3.4	A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA GEOMETRIA PROJETIVA .....	116
3.5	A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DO DESENHO GEOMÉTRICO .....	121
	<b>CAPÍTULO IV PARA LEVAR A NOVA NARRATIVA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA .....</b>	<b>131</b>
4.1	HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA NUMA ABORDAGEM PROBLEMATIZADORA .....	132
4.2	UMA METODOLOGIA CENTRADA NA HISTÓRIA E NO VISUAL .....	138
4.2.1	Para tratar da história .....	140
4.2.2	Para compreender práticas do olhar .....	144
4.3	DÜRER: UM POUCO DE SUA HISTÓRIA E UM OLHAR SOBRE SUA PRÁTICA .....	149
4.4	DÜRER E AS PRÁTICAS NA GEOMETRIA: AS MÁQUINAS E O TREINO DO OLHAR .....	156

4.5	O OLHAR QUE SE DOUTRINOU .....	168
	<b>CAPÍTULO V EXPERIÊNCIAS E AS PRÁTICAS DO</b>	
	<b>OLHAR EM ALBRECHT DÜRER.....</b>	<b>173</b>
5.1	O DESAFIO PARA MUDAR .....	173
5.2	O PENSAMENTO EM GEOMETRIA .....	180
5.3	O OLHAR EM PERSPECTIVA PARA O INFINITO.....	195
5.4	A GEOMETRIZAÇÃO DO ESPAÇO .....	208
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>214</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>222</b>



## INTRODUÇÃO

Aprender não é absorver informação, é pensar, fazer perguntas, produzir hipóteses, analisar diferentes pontos de vista, duvidar, experimentar, compreender, trabalhar (MONTENEGRO, 2005, p. 76).

Estamos na contemporaneidade. Hoje não cabe “ensinar sem romper”. Isto é, não existe uma idade certa, um tempo certo, um local certo: este é o tempo do incerto e não do existe. O que existe é a convicção daquilo que se deseja, convicção integrante do processo. Se nós somos construídos, então o nosso objeto de pesquisa também é inventado, moldado e libertado de algumas raízes... Logo, temos que aprender a ver de outras maneiras, experimentar outros pontos de vista.

Aproveitamos essa deixa, para dizer que este trabalho tem uma história. É um trabalho que não nasceu com um objetivo pronto, com um problema de pesquisa acabado, com uma vertente histórica de pesquisa delimitada. É um trabalho que nasceu de uma luta travada de diversas maneiras. Em síntese, contarei a primeira parte da história, aquela que me virou do avesso.

Imaginem... estou agora falando de mim, professora da Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) e professora de disciplinas no Ensino Superior, na Licenciatura de Matemática e nas Engenharias, preparando planos de cursos como qualquer docente, todos os dias ajustando problemas e revisando processos metodológicos. Este

trabalho, identificado e entendido junto aos profissionais da área, assinalou a importância da compreensão perceptiva das informações visuais para a matemática nas aulas, registrando os fatos no sentido de aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens, em especial no ensino da geometria.

Como agir? Eu, você, nós, todos... queremos conhecer mais... a tarefa é difícil! Após algumas abordagens e com apoio da orientadora e de nosso grupo de estudos – GECEM (Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática) abrimos uma reflexão sobre o termo historicidade e passamos a considerar a história como uma estratégia para questionar hábitos, saberes e técnicas que atualmente usamos no ensino da matemática. É o momento de a historicidade definir ações, objetos, personagens!

Paro... e registro a complexidade do assunto. Observo à minha frente uma ponte sobre um rio<sup>1</sup>: estou em uma margem e meu objetivo está na outra. Com receios, mas determinada, hoje consigo ver que tudo é processo, é construção, tudo é moldado e que tudo está longe de estar pronto. Muito olhei, pensei, raciocinei, pesquisei e então acreditei que a realização do que buscava estava lá, do outro lado. Atravessei a ponte e

---

<sup>1</sup> Uso as metáforas ponte e rio porque as mesmas se autorrelacionam. Isto é, o conhecimento existe, está registrado, mas esta ordem de representação seria um modelo estável. Ou seja, pode ser construído de modos diferentes em lugares diferentes, com resultados semelhantes e ou iguais.

busquei olhar, moldar, construir e narrar um novo começo para superar algumas ideias, à procura de me libertar de alguns obstáculos já existentes e outros vindouros em relação à Educação e à Educação Matemática. Determinação esta também buscada em escritos de poesias como de Fernando Pessoa<sup>2</sup>:

Há um tempo em que é preciso abandonar as roupas usadas, que já tem a forma do nosso corpo, e esquecer os nossos caminhos, que nos levam sempre aos mesmos lugares. É o tempo da travessia. E, se não ousarmos fazê-la, teremos ficado, para sempre, à margem de nós mesmos.

Não se configura em esquecer/acabar com a ponte, pois o que está constituído está! A ponte sempre será um caminho, que poderá conter respostas e soluções para um problema, mesmo que a linguagem usada já não nos auxilie mais, pois as construções utilizadas ainda hoje não são neutras, nem as futuras elaborações, pois temos aí a ordem natural da evolução humana.

Para tanto, juntamos forças e exploramos o “deslocamento” da noção de história para a de historicidade e da visualização para a visualidade, marcando fortemente a proposta para uma nova narrativa na Educação Matemática.

---

<sup>2</sup> Fernando Antônio Nogueira Pessoa (1888-1935): nascido em Lisboa, mais conhecido como Fernando Pessoa, foi um poeta, filósofo e escritor.

Verificamos aqui a necessidade de contarmos sobre o rompimento com as ideias fortes e enraizadas de uma cultura machista e de uma ciência que supostamente vá dar conta de responder tudo e solucionar os problemas da educação, de ajudar o professor em suas metodologias e de ensiná-lo a ensinar geometria... Estas são ideias válidas e ainda em vigor. Estamos acostumados a trabalhar desta maneira e não conseguimos ver outro modo de olhar, de pensar. Assim, necessitamos de outras leituras!

Passamos para o outro lado da ponte, de fato a atravessamos. Sabemos que nada está pronto! Vamos então falar sobre o “deslocamento”. Entendemos que os processos estão em nós, mas alguns vão além, como as formas e as variadas regras de vários conceitos, que ainda vivem. Os confrontos e os enfrentamentos marcam nossas dificuldades, colocando-nos dúvidas e inseguranças. E é por meio do deslocamento da historicidade e da visualidade, como proposta para uma nova narrativa na Educação Matemática, que sugerimos um novo modo de olhar, de aprender, de ensinar e de conhecer. Enfim um novo modo de narrar esta proposta para ampliar o campo da Educação Matemática.

Completando as ideias aqui apresentadas e o rumo de algumas possibilidades de propostas de novas narrativas no campo da

historicidade e da visualidade na Educação Matemática, temos a dizer que nossa tese se configura da seguinte maneira:

No capítulo I propomos deslocar a história da matemática para o ponto de vista da historicidade e da visualização para a visualidade, construindo uma nova narrativa na Educação Matemática. Apresentamos nosso problema: como historicidade e visualidade podem se constituir ferramentas para a elaboração de uma nova narrativa na Educação Matemática? E o objetivo pauta-se na discussão de uma nova narrativa que permita trabalhar a historicidade e a visualidade, proporcionando uma compreensão do visual como construção cultural e histórica.

No capítulo II o termo visualização é explorado do ponto de vista de alguns estudiosos em visualização e Educação Matemática, articulado também com algumas tendências nas pesquisas nacionais e internacionais para a pesquisa neste campo. Neste capítulo apresentamos também o objetivo de mapear, estudar e compreender pesquisas que tratam de visualização e Educação Matemática, a fim de contribuímos para um estado da arte, ao mesmo tempo em que buscamos situar esta pesquisa na diferença com muitas destas que vêm sendo realizadas.

O capítulo III tem como objetivo compreender os usos e as elaborações conceituais da perspectiva, já que este saber faz parte deste trabalho, como a sugestão para provocar uma nova narrativa para o

campo da pesquisa em visualização e Educação Matemática. Neste espaço discutimos a perspectiva, como ela surgiu como técnica de desenho e como ela foi e é empregada em alguns domínios do conhecimento tais como a arte e a arquitetura. Além disso, buscamos compreender alguns de seus princípios e conceitos, que são tratados como objetos de ensino para a geometria.

No capítulo IV discutimos a história no ensino da matemática, destacando a importância da compreensão histórica dos saberes e práticas na escola. Buscando situar a historicidade e a visualidade como uma nova forma de conceber a história no ensino da matemática, propomos uma estratégia metodológica que abarque práticas do olhar no âmbito da história. Para situar esta proposta, propomos como ponto de partida o estudo da técnica da perspectiva aplicada por Albrecht Dürer (1471-1528). Tecemos, também, considerações a respeito do olhar, particularmente sobre como o olhar se tornou perspectivado, atentando para a multiplicidade de contextos em que o tema está inserido.

No capítulo V abordamos a prática do olhar e do representar utilizando os estudos de Dürer, a partir do qual tratamos como novas narrativas, e, atendendo as subjetividades do raciocínio em tempos pós-modernos, exploramos e discutimos o papel de produção de sujeitos, de formas de olhar e produzir matemática. Isto deverá conduzir à reflexão

sobre uma proposta para a Educação Matemática, permeada pela história, pelo visual e pela imagem. O conhecimento matemático e o modelo visual são compreendidos como resultado da elaboração prática de sujeitos culturais e históricos.

Para finalizar, enfatizamos que não temos um produto, um resultado acerca de toda esta nova narrativa. Asseguramos, assim, que temos algumas indicações por meio das quais, na busca de novas apropriações, fazemos destaques e evidências com vistas para a continuação de uma nova narrativa (de um novo trabalho). O importante é que tivemos que romper com determinadas formas de pensar, sobre a aprendizagem, isto é, frases que fecham com o velho discurso, ou seja, a “disponibilidade de melhorias” e de “velhas e antigas receitas”.

Estamos interessados em uma nova proposta de pensar, de aprender e de estabelecer uma narrativa, cujo principal desafio é montar, moldurar e construir comprometermos com o conhecimento da geometria com foco na perspectiva, por meio do ponto de vista de deslocamentos entre a história e a historicidade e a visualização e a visualidade. Pensando assim, este trabalho é uma etapa de um processo de construção epistemológica que não está concluído, posto que não há pretensão de findá-lo, porque essa é a ideia: tudo está longe de estar pronto.

E, assim, caro leitor, convido-o a atravessar o rio, pois já possuímos um belo começo e a falta da ponte não é obstáculo. Afinal, se você leu até aqui é porque compartilhamos muitos objetivos. Embarque nesta leitura e venha conhecer nossa história!



## **CAPÍTULO I – NOVAS NARRATIVAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Neste capítulo, enfatizaremos nossa proposta de deslocar a história da matemática para o ponto de vista da historicidade e da visualização para a visualidade, construindo, desta forma, uma nova narrativa na Educação Matemática. Neste mesmo ínterim, apresentaremos nosso problema de pesquisa, o qual está relacionado à historicidade, à visualidade e à formação de professores. O objetivo pauta-se na discussão de uma nova narrativa que permita trabalhar a historicidade e a visualidade, proporcionando uma compreensão do visual como construção cultural e histórica.

### **1.1 DA HISTÓRIA À HISTORICIDADE**

O homem produz o conhecimento por meio de processos derivados de suas interações com o meio em que vive. Este desenvolvimento é demorado, flexível e progressivo; e se dá, inicialmente, devido às necessidades de sobrevivência e, posteriormente, devido à busca da compreensão do mundo que o cerca.

Sendo a matemática uma atividade humana, nela se conjectura a razão. É o lugar onde os conceitos são construídos, elaborados, projetados – ou desfeitos, anulados, decompostos nas tentativas de solução das situações-problema oriundas do mundo perceptível aos

sentidos ou de reflexões teóricas relativas a modelos matemáticos obtidos por meio de generalizações das observações e hipóteses.

A compreensão acima nos é dada com o desenvolvimento de projetos, de estudos e de investigações, como os realizados por Davis e Hersh (1989, 1998); Gerdes (1991); Fossa (2001); Miguel e Miorim (2004); Mendes (2006, 2009). Isto nos demonstra que a ciência de conhecer a história da matemática nos permite realizar tentativas de praticar situações didáticas mais pertinentes para conseguir melhores aprendizagens. Tudo ocorre graças ao conhecimento que se pode ter sobre a origem da noção a ser ensinada, sobre o tipo de problema que ela visava resolver, as dificuldades que surgiram e o modo como foram superadas.

A história da matemática, assim, é um campo do conhecimento que permite ao professor de matemática a (re)elaboração de sua própria concepção referente a esta disciplina bem como a organização de abordagens pedagógicas que podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Sem com isso, claro, esperar que a história traga a resposta para todos os problemas do ensino.

Há um consenso na academia de que focar a história da matemática no âmbito do ensino de matemática deve possibilitar aos educandos uma percepção dessa disciplina como resultado de uma elaboração mental do homem, oportunizando investigações que

favoreçam a compreensão dos processos de formalização dos conhecimentos matemáticos. Segundo Davis e Hersh (1998), a matematização do mundo é tão intensa que a condição inicial para o reconhecimento de uma teoria científica é a sua descrição por meio da linguagem matemática, pois as ciências biológicas, e até mesmo as ciências sociais, estão cada vez mais matematizadas.

Porém problematizar nossa atualidade tendo por referencial os modos como ensinamos, como avaliamos, como pensamos que se aprende e os conteúdos que elegemos como objetos de ensino, não significa, necessariamente, buscar na história um ponto de partida, uma origem, ou uma resposta da ciência. Mas, sim, modificar nossas maneiras de fazer perguntas, procurando compreender sob quais parâmetros os saberes eleitos como objetos de ensino estão fundamentados, como surgiram e foram praticados determinados conceitos, que técnicas foram utilizadas e por quem. Disso, passa-se a discutir sobre um conjunto de regras e convenções que conduziram a formulação de novos saberes, propiciando, assim, subsídios para a percepção da relação com o saber enquanto produção histórica e desnaturalizando verdades estabelecidas.

Como exemplo, podemos nos referir à problemática da representação do espaço mensurável e geométrico, tido como racional, sendo abstração uma característica da matemática e sendo um dos

principais objetivos do ensino de matemática a formação de conceitos decorrentes das representações simbólicas que compõem uma linguagem específica. Apesar disto, a apropriação dessa linguagem, para muitos alunos, constitui uma grande dificuldade que conduz a questões como: “Para que serve isso?”, “Por que estudar este conteúdo?”.

Aqui, então, faz-se essencial um esclarecimento dos “porquês” e do “como” usar a história da matemática para seu ensino e aprendizagem. Jankvist (2009a, 2009b) reconhece que a literatura oferece uma série de argumentos para o uso da história no ensino da matemática e que a discussão centra-se na necessidade de desenvolver estudos empíricos que avaliem a eficácia de seu uso.

Em estudo teórico, Jankvist (2009a) propõe uma forma de organizar e estruturar a discussão das razões para o uso e as formas de uso da história na Educação Matemática, categorizando duas razões diferentes para o uso, articulando em três modos diferentes de uso, ou seja, as abordagens denominadas de iluminação, modular e baseada na história.

Para efeitos da presente pesquisa, focaremos apenas os argumentos do uso da história, por ele divididos em duas categorias: história como uma ferramenta e história como uma meta. Jankvist (2009b, p. 69) afirma que “assim, quando falamos sobre a eficácia do uso da história na educação matemática, parece razoável distinguir entre

a eficácia da história como uma ferramenta e a eficácia da história como uma meta” [tradução nossa].

Na primeira categoria, pode-se usar a história como um meio para ajudar a aprendizagem de conceitos ou teorias, não só em termos de motivação, mas também da cognição, por meio de diferentes modos de apresentação de conteúdos ou pela identificação de obstáculos epistemológicos<sup>3</sup>.

Na segunda categoria, afere-se o argumento de que a aprendizagem da história da matemática tem uma finalidade em si, serve a um propósito em si mesma, salientando-se o desenvolvimento e os aspectos evolutivos da matemática como disciplina. O objetivo principal, neste caso, é o de mostrar aos interessados que a matemática existe e se desenvolve por estar relacionada ao tempo, ao espaço e a diferentes culturas. Assim sendo, é uma disciplina que sofre evoluções porque possui e apresenta uma “face humana”.

Esta problematização da história na educação matemática leva a pensar uma história da matemática como uma potencialidade pedagógica. E, quando buscamos alicerce nas pesquisas nacionais,

---

<sup>3</sup> Obstáculos epistemológicos: termo introduzido por Bachelard (1938). Brousseau (1997) também utilizou a noção de obstáculos epistemológicos em sua teoria das situações didáticas, como em: “os obstáculos de origem epistemológica realmente são aqueles dos quais não se pode e nem se deve escapar, por causa de seu papel formativo no conhecimento que está sendo procurado. Eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos” (BROUSSEAU, 1997, p. 87).

encontramos argumentos favoráveis à utilização da mesma em sala de aula, nos estudos de Miguel e Miorim (2004, *apud* BARONI e BIANCHI, 2007, p. 25-36) relatando em síntese que:

- A compreensão da natureza e das características específicas do pensamento matemático e os estudos históricos da evolução dos conceitos matemáticos se constituem em um elo entre a matemática e outras áreas do conhecimento.
- O ensino da matemática pode tornar-se mais interessante por meio da seleção de tópicos, problemas e episódios considerados motivadores da aprendizagem. A matemática é uma disciplina dedutivamente orientada. Sendo assim, seu desenvolvimento histórico explica que a dedução vem depois de certa maturidade. Ela foi sempre construída a partir de conhecimentos prévios.
- O conhecimento da história da matemática possibilita a desmistificação e a desalienação de seu ensino. A matemática não é fruto de uma estrutura rígida, não deve ser vista como um produto a-histórico, mas sim como um processo intelectual humano contínuo, ligado a outras ciências, culturas e sociedades.

Segundo as autoras, outros fatores também se destacam quando se introduz a história da matemática como metodologia de ensino:

- O estudo das notações, terminologias, métodos e processos algorítmicos permite a professores e alunos a visualização das vantagens e/ou desvantagens das formalizações atuais da matemática. O objetivo é induzir historicamente, porém sem negligenciar o papel das técnicas matemáticas, em uma comparação entre a forma de apresentação da matemática contemporânea com a utilizada antigamente.
- Um ensino inspirado na história, cuja principal característica é que o assunto seja estudado apenas depois de o aluno ter sido suficientemente motivado, pode proporcionar uma reconstrução didática do desenvolvimento histórico de certos tópicos de matemática. Possibilitará tanto aos professores quanto aos alunos conhecer as dificuldades inerentes ao processo de construção do conhecimento matemático, assim como a apreciação da natureza da atividade matemática. Novas alternativas didáticas podem surgir destas (re)elaborações históricas dos conteúdos.

D'Ambrosio (1999) argumenta que uma abordagem adequada para incorporar a história da matemática à prática pedagógica deve enfatizar os aspectos socioeconômicos, políticos e culturais que propiciaram a criação matemática. Avançando nesses estudos, Mendes (2009) afirma que o uso da história da matemática como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem de matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos.

Para Mendes (2009), o ensino da matemática tem, nas informações históricas, um potencial amplo de utilização de saberes cheios de combinações que auxiliarão o desenvolvimento de uma Educação Matemática transdisciplinar. Este aspecto, segundo o autor, desafia ainda mais e aguça nossa curiosidade em pesquisar sobre a história da matemática como mediador didático conceitual na formação de professores.

Ainda Mendes (2009) traz uma proposta para a utilização da investigação histórica da matemática como um agente de cognição na Educação Matemática. O autor considera a história da matemática como “um princípio unificador entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática” que propicia a construção da aprendizagem dos estudantes.



Por um lado, a matemática se estabelece/se forma em diferentes contextos como, por exemplo, o da filosofia, das artes, da geografia, da biologia, da própria matemática. Por outro, há os aspectos culturais, pelos quais a mesma se articula com a visão da matemática como uma ciência construída socialmente, um produto histórico resultante da atuação do homem no ambiente em que está inserido, levando em conta a experimentação, o arranjo de técnicas, a função da representação, o lugar do sujeito na sociedade.

Segundo Mendes (2011, p. 12):

[...] a investigação em história da Matemática desenvolverá a perspicácia e o conhecimento do aluno sobre várias áreas matemáticas. Além disso, o estudo de vários tópicos matemáticos oferece múltiplas oportunidades para se aprender sobre outras áreas de conhecimento tão importantes quanto à Matemática e que nem sempre são discutidas na escola, principalmente, nas aulas de Matemática.

Com a demonstração deste panorama, pensamos que estamos inseridos neste contexto, ou seja, nos articulamos com a história no ensino da matemática. Porém vemos a história, não tanto como uma ferramenta ou uma meta, nem ainda como uma investigação histórica; mas, tomando o termo historicidade, passamos a considerar a história como uma estratégia para questionar hábitos, saberes e técnicas que, atualmente, usamos no ensino da matemática.

Segundo Jameson (1997, p. 290),

A historicidade, de fato, nem é uma representação do passado, nem uma representação do futuro (ainda que suas várias formas utilizem tais representações): ela pode ser definida, antes de mais nada, como uma percepção do presente como história, isto é, como uma relação com o presente que o desfamiliariza e nos permite aquela distância da imediaticidade que pode ser caracterizada finalmente como uma perspectiva histórica. É correto, ainda, observar que aqui está em jogo essencialmente um processo de retificação através do qual nos afastamos de nossa imersão no aqui e no agora (ainda não identificados como o “presente”) e o entendemos como um tipo de coisa – não meramente um “presente”, mas um presente que pode ser datado e rotulado [...].

Portanto essa possibilidade de ver o que se faz, se aplica ou se produz no presente deslocando-se dele mesmo é o que leva ao entendimento da época em que se vive como momento histórico, elaborando a historicidade em ações, objetos, personagens e transformando acontecimentos cotidianos em fatos. Le Goff (1990) diz que a historicidade “obriga a inserir a própria história numa perspectiva histórica” (p. 19). E, fundamentando-se no filósofo Paul Ricouer, Le Goff afirma que é na fronteira da história, no fim da história, que se compreendem os traços mais gerais de historicidade. Isto significa que as coisas, de uma maneira geral, têm uma história, refutando, no plano teórico, a noção de “sociedade sem história”. Por fim, cabe registrar que do conceito de historicidade de Le Goff (1990) se criam e se veem entrar novos objetos da história no campo da ciência histórica.

Neste entendimento acerca da historicidade vale ressaltar que há um afastamento da ideia da história inserida no ensino da matemática como um simples argumento para contar fatos e datas, personificar sujeitos, abstrair conceitos. Isso quer dizer que historicidade se afasta da ideia de historicizar. Enquanto esta última detém-se em narrar uma história, descrevendo linearmente um fato, a segunda tem o propósito de problematizar ideias, comportamentos e saberes impregnados na atualidade, buscando na tessitura da história os movimentos que levam a criação do que temos e do que somos.

Cabe-nos refletir como isso tudo pode ser transposto para as reflexões sobre história na Educação Matemática. Há que se considerar que não só os saberes que ensinamos em matemática têm história, e que não apenas a matemática como disciplina tem história, mas também têm história as experiências, as ações, as práticas que adotamos. De outro lado, não é só a matemática em si que pode ser considerada numa perspectiva da história, como também as próprias formações discursivas sobre ensinar e aprender, pois as relações que mantemos com a matemática são históricas. Além disso, têm-se condições de considerar que novos objetos de pesquisa podem ser problematizados, tais como as formas de olhar e representar empregados na Educação Matemática.

Neste último ponto, apresentamos o recorte histórico que se faz nesta pesquisa. De um lado, considera-se a história da perspectiva; de

outro, a história de práticas de olhar em perspectiva. O que tomamos é a história sobre a problemática de representação em perspectiva considerando, particularmente, os estudos do alemão Albrecht Dürer, à época renascentista. O empreendimento desejado nesta pesquisa não é, portanto, dialogar com a história da perspectiva na forma linear de seu desenvolvimento e sim nos lançarmos pelos caminhos variados do saber e das práticas, entendendo a representação do espaço e dos objetos no espaço que não se limita apenas à matemática. Estaremos, dessa maneira, atendendo ao nosso objetivo de provocar uma nova narrativa capaz de abranger historicidade e visualidade na Educação Matemática.

A partir disto, pensamos proporcionar uma compreensão do visual como construção cultural e histórica em relação à técnica da perspectiva. Para tanto, temos que refletir sobre este assunto em sua forma de problematização com a cultura na qual está inserida buscando subsídios para a percepção da relação com o saber enquanto produção histórica.

## 1.2 CULTURA VISUAL E A VISUALIDADE

A cultura visual e o termo visualidade têm se tornado proficientes como campos de estudo e de análise em diversas áreas do conhecimento, desde as artes, o cinema, a filosofia, a educação.

A atividade de delimitar exatamente ou de conceituar o que é cultura visual não é fácil, pois existem várias propostas e/ou questões

sobre o assunto, das quais muitas divergem. Segundo Knauss (2006), podemos considerar dois aspectos gerais na definição de cultura visual: uma restrita e outra abrangente. Flores (2010) resume os resultados dos estudos de Knauss (2006) afirmando:

Na primeira, cultura visual corresponde à cultura ocidental, marcada pela hegemonia do pensamento científico ou — na medida em que ela corresponde aos tempos recentes marcados pela imagem virtual e digital — pelo domínio da tecnologia. Na segunda, considera-se que a cultura visual serve para pensar diferentes experiências visuais ao longo da história em diversos tempos e sociedades (FLORES, 2010, p. 276).

No que tange ao conceito da expressão “cultura visual”, Dikovitskaya (2005) e Martins (2008) discorrem acerca deste campo do saber dizendo que:

Cultura Visual, também conhecida como estudos visuais, é um novo campo para o estudo da construção cultural do visual nas artes, mídia e vida cotidiana. É uma área de pesquisa e uma iniciativa curricular que olha a imagem visual como um ponto focal dos processos através dos quais o significado é feito no contexto cultural (DIKOVITSKAYA, 2005, p.1) [tradução nossa].

[...] é um campo transdisciplinar ou pós-disciplinar, a cultura visual se caracteriza como espaço conceitual de convergência que congrega discussões sobre diversos aspectos da visualidade buscando fomentar e responder questões que se entrecruzam a partir de campos de estudo como a história da arte, a estética, a teoria fílmica, os estudos culturais, a literatura e a antropologia. [...] a cultura visual aborda e discute a imagem a partir de outra perspectiva, considerando-a não apenas em termos do seu valor estético, mas, principalmente, buscando compreender o papel

social da imagem na vida da cultura (MARTINS, 2008, p. 29-30).

A voga da cultura visual, que pesquisa a construção cotidiana e social da experiência visual, emergiu, no Brasil, a partir dos anos noventa do século XX, recusando separações entre “cultura visual maior” e “cultura visual menor” – ou seja, não é hierárquica –, convergindo sua atenção para e dando importância às instituições de representações visuais (antes mencionadas). As representações visuais são fontes de produção e veiculação de significados construídos no decorrer de fatos sociais e históricos. Deste modo, uma das proposições fundamentais da cultura visual é a de discutir e cogitar sobre a “relevância que as representações visuais e as práticas culturais têm dado ao ‘olhar’ em termos das construções de sentido e das subjetividades no mundo contemporâneo” (HERNÁNDEZ, 2009, p. 27), buscando, por meio disto, considerar o importante papel da reflexão e da problematização da imagem como componente da produção cultural.

Em síntese, podemos afirmar que a cultura visual é um campo transdisciplinar que abrange diversas áreas relacionadas ao sistema de interpretação de cada cultura. Áreas estas que abarcam discussões sob o prisma da visualidade, podendo ser mencionadas as imagens multimidiáticas (televisão, internet, livros, jornais, revistas, publicidade e propaganda, dentre outras), artes visuais e imagens do cinema, como exemplos de imagens da cultura visual. Seu conteúdo, aquilo que este

campo abarca, deveria ser mediado consoante o intercruzamento de histórias de culturas e tecnologias. Desta forma, podemos sistematizar o pensamento sobre cultura visual com o que conclui Flores (2010):

[...] que a noção de cultura visual centra-se no visual como lugar onde se criam significados, priorizando-se a experiência cotidiana do visual e interessando-se pelos acontecimentos visuais nos quais se buscam informação, significado, prazer, conhecimento. Portanto, é uma estratégia para entender as relações do sujeito e das experiências visuais com a tecnologia do visual. Neste caso, entende-se como tecnologia visual qualquer forma de dispositivo desenhado para ser olhado e para construir o olhar (FLORES, 2010, p. 279).

Nestes estudos da cultura visual, o termo visualidade tem assumido um papel importante e há mesmo um consenso entre muitos pesquisadores de que visualidade é a palavra-chave neste campo de estudo. Visualidade descreve a soma de discursos que informam como nós vemos. Bryson (1988) explica:

Para os seres humanos orquestrarem coletivamente sua experiência visual em conjunto, é necessário que cada um submeta a sua experiência de retina com a descrição socialmente acordada (s) de um mundo inteligível. [...] Entre o sujeito e o mundo está inserido todo o montante de discursos que compõem a visualidade, aquela construção cultural, e fazem a visualidade diferente da visão, a noção de experiência visual sem mediação. Entre retina e mundo, é inserida uma tela de sinais, uma tela que consiste em todos os múltiplos discursos sobre a visão construída na arena social (BRYSON, 1988, p. 83-113) [tradução nossa].

Para Hal Foster (1988) visualidade é considerada como um fato social, sinalizando a investigação de técnicas históricas e determinações discursivas da vista. Tal significação nos serve de ajuda como estratégia de análise para dar consistência a nossa pesquisa, ensejando a cultura visual e a Educação Matemática. Mesmo que o valor da cultura visual se modifique entre um contexto cultural e outro, ou de um indivíduo para outro, a construção processual de interpretações se dá por meio de frequentes experiências.

Em um âmbito abrangente, podemos dizer que, na virada da década de 1980, deu-se, não só a convergência de várias abordagens, interesses e disciplinas em torno do campo comum da visualidade, como também uma percepção cada vez mais ampliada, inclusive fora dos limites acadêmicos, da importância dominante da dimensão visual na contemporaneidade. A difusão da comunicação eletrônica e a popularização da imagem virtual obrigaram à procura de novos parâmetros e instrumentos de análise que articulassem os esforços de Sociologia, Antropologia, Filosofia, Semiótica, Psicologia e Psicanálise, Comunicação, Cibernética e Ciências da Cognição. São campos que se estruturam como os estudos de comunicação de massa e, em particular, a tendência identificada principalmente nos Estados Unidos e na Inglaterra aos chamados "estudos culturais".



Nossa pesquisa desloca-se do entendimento da visualização para a visualidade. Como? Em se tratando do campo dos estudos culturais, quando se problematizam a imagem e o visual, passa-se a considerar não mais os aspectos cognitivos de apreensão e significado ou os aspectos semióticos, mas aqueles ligados à constituição de práticas e experiências do olhar e do representar. O olhar passa a ser visto como sendo formado pela visão e pela vista em meio às denominações de uma sociedade, de uma época; e o representar, como sendo possível a partir de técnicas e saberes instituídos como verdades.

Assim, podemos provocar uma definição mais delimitada para visualidade e também exemplificá-la dentro do nosso trabalho de pesquisador. Vejamos: entendemos a visualidade como um conjunto de formações discursivas acerca do visual, sendo que estas formações discursivas ocorrem a partir das práticas visuais. Como exemplo, citamos o caso da perspectiva, no qual se construiu a ideia de que para se ver em perspectiva era necessário fixar o olho num plano quadriculado. Isto foi se constituindo em uma prática visual ao ponto de se tornar um regime de verdade para olhar e representar à época renascentista. Este entendimento mostra que trabalhar com a visualidade significa compreender, na historicidade, como se construiu um discurso para o visual.

Por conseguinte, esta pesquisa tem a intenção de adentrar nos conceitos de historicidade, cultura visual e visualidade e com eles se articular, procurando tecer novas narrativas para a Educação Matemática. Além das referências citadas, buscamos suporte nos estudos de Flores (2007a, 2007b, 2008, 2010). Particularmente no artigo “Cultura visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares”, Flores (2010) vem ao encontro de nossas expectativas de:

[...] deslocar o foco para a semiótica, a psicologia cognitiva, a percepção visual, que têm fundamentado a pesquisa em visualização matemática, para acentuar cultura visual e visualidade como estratégia teórica e metodológica e como uma dimensão importante que abrange práticas do olhar na constituição de formas e experiências do olhar em matemática (FLORES, 2010, p. 291).

Embora a cultura visual seja um campo recente de estudo no Brasil e a influência do estudioso espanhol Fernando Hernández tenha sido notadamente reconhecida na área da educação e da arte, é importante salientar que existem algumas iniciativas de pesquisas combinando estudos visuais e visualização matemática em nosso país. Entre estas pesquisas, podemos citar o trabalho de dissertação de Meneguzzi (2009), que analisa os perspectógrafos de Albrecht Dürer no âmbito da história da perspectiva, propondo uma abordagem para a sala de aula, ao considerar um “perspectógrafo didático” como ferramenta

para olhar e construir imagens em perspectiva. Também Zago (2010) desenvolveu uma pesquisa de mestrado considerando a interação do olhar com a pintura contemporânea, demonstrando a cultura visual e a prática do olhar em matemática como possibilidade de visualização matemática. Estas pesquisas tratam da visualização articulada à história para o ensino da matemática<sup>4</sup>.

Da iniciativa de trazer reflexões da cultura visual na Educação Matemática (FLORES, 2010) e da proposição colocada em projeto de pesquisa que analisa de que maneira cultura visual e visualidade podem se constituir, ao mesmo tempo, como campo de estudo e metodologia para o ensino e a aprendizagem matemática<sup>5</sup>, esta pesquisa ganha espaço e força para ser realizada. Por outro lado, busca-se inspiração no trabalho de Hernández (2009) que, ao questionar a narrativa dominante sobre a educação, propõe a metáfora de “catadores da cultura visual” para construir uma nova narrativa na educação e na arte. Assim, este trabalho de pesquisa que ora se apresenta propõe, igualmente, questionar as narrativas empregadas na Educação Matemática, tão naturalizadas e tidas como único caminho para propor uma nova narrativa, pensando

---

<sup>4</sup> Estes trabalhos de pesquisa têm sido orientados pela Profa. Dra. Cláudia Regina Flores e seguem a proposição da linha Arte, Cultura e Visualização, no âmbito do Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática – GECEM.

<sup>5</sup> Trata-se do projeto de pesquisa intitulado “Arte e Visualidade: outros olhares para a visualização matemática”, desenvolvido pela Profa. Dra. Cláudia Regina Flores, na modalidade de pesquisa em produtividade pelo CNPq, 2011-2014.

sobre historicidade e visualidade ao tratar da história e da visualização no ensino da matemática.

### 1.3 DA VISUALIZAÇÃO À VISUALIDADE

Neste momento, cabe compreender como o conceito de visualização tem sido empregado em diversas pesquisas na área, supondo que ele tem sido empregado naturalmente. Um estudo sobre isso foi feito por Flores, Wagner e Buratto (2012). É a partir deste estudo que passamos a tratar sobre visualização na Educação Matemática.

Flores, Wagner e Buratto (2012) analisaram pesquisas internacionais e nacionais para compreender como o conceito de visualização vem sendo empregado, quais são estes conceitos e tendências nas pesquisas. Citam-se, por exemplo, os seguintes trabalhos: Presmeg (1986), Zimmerman e Cunningham (1991), Dreyfus (1991) e Arcavi (1999), que ressaltam a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática; Zimmerman (1991), Goldenberg (1991), Tall (1991), Cifuentes (2005, 2009) e Van Garderen (2006), que apresentam o consenso sobre visualização e raciocínio visual desenvolvido através da resolução de problemas; Gutiérrez (1996), Nemirowski e Noble (1997) e Borba e Villareal (2005), que fundamentam o processo da visualização através das tecnologias e softwares; Biza, Nardi e Zachariades (2008, 2010),

que, consideram as influências dos professores sobre o papel dos argumentos visuais na aprendizagem dos alunos.

No que se refere ao tema da visualização nas pesquisas brasileiras, as autoras realizaram um mapeamento nos anais do ENEM<sup>6</sup>, período 1998 a 2010, chegando à conclusão de que a maioria dos trabalhos selecionados se relacionam com atividades em sala de aula e aplicações de sequências didáticas para investigar/analisar dificuldades e potencialidades da visualização no ensino-aprendizagem, geralmente de conteúdos geométricos. A ocorrência deste fato foi conferida conforme os artigos de Guedes e Lobão (1998), Fainguelernt (2001), Maciel e Almouloud (2004), Viana (2007), Santos e Nacarato (2010), Siqueira e Bellemain (2010) e Teixeira (2010), que apresentam preocupações em produzir ou preparar atividades que desenvolvam a habilidade de demonstrar e validar as respostas por meio de conhecimentos matemáticos e visualização.

A partir deste estudo, as autoras citadas acima chegaram à conclusão de que o termo visualização empregado nas pesquisas é entendido:

Como processo de construção e transformação de imagens visuais mentais; como uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica; como processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de

---

<sup>6</sup> ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.

tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática; como forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê, extraindo padrões das representações (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 40).

As autoras, ainda, identificaram que:

[...] o fundamento teórico, para a grande maioria das pesquisas, é ainda subjacente aos estudos da psicologia cognitiva, valorizando o entendimento de processamento da informação visual e seus desmembramentos com questões relativas à percepção, à representação, à aprendizagem, à memória, à atenção e ao raciocínio (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 42).

O artigo é finalizado seguindo as investigações de Flores (2010), as quais também nos servem de argumento para justificar nossos estudos. Em síntese, reitera-se, então, a proposta para a pesquisa em Educação Matemática no interesse de problematizar questões do visual, da visão e da imagem no ensino e na aprendizagem matemática, delineando uma nova tendência para a pesquisa com a adoção do conceito de visualidade.

Para a compreensão e para a continuação de nossos estudos, trazemos à tona a diferenciação entre o termo visualização e o termo visualidade:

[...] enquanto visualização preocupa-se com a aprendizagem de conceitos e a desenvoltura de habilidades visuais, visualidade tende a problematizar o visual enquanto percepção natural e fisiológica e articula-se com práticas visuais no âmbito da história e da cultura (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 43). [grifo nosso].

Em nossos estudos, o termo visualização refere-se à percepção visual e ao mecanismo físico do olho ou cone visual. O termo visualidade refere-se à construção deste mecanismo, isto é, tende a problematizar o visual como construção do olho e do olhar a partir de experiências e práticas que ocorrem no âmbito da história. Portanto não mais formação natural e fisiológica. A visualidade, entendida como formação discursiva a respeito da própria vista, não é concebida como uma abordagem de forma isolada em uma ou em outra atividade, mas como um componente inerente à condição humana e cuja manifestação e expressão é culturalmente situada, isto é, varia de acordo com o meio e com a época em que o sujeito vive.

Nesse contexto, associamos a visualidade ao sentimento de prazer: prazer em olhar, perceber, fazer, realizar algo, gostar de olhar e de interpretar. Isto porque o olhar que busca harmonia e simetria proporcionando prazer foi instituído no Renascimento com a invenção da terceira dimensão, representada no papel. Este prazer está ligado ao interesse do aluno, pois o tratamento visual está associado a uma prática histórica permitindo criar atividades que busquem a reflexão sobre a constituição de nosso olhar e adequada ao desenvolvimento intelectual com o auxílio ou não de outros aparatos.

#### 1.4 SOBRE UMA ÉTICA PARA A DOCÊNCIA (DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA)

Num artigo provocante sobre mais estética, mais arte e mais vida para reinventar a escola e a própria docência, Laponte (2003) nos faz pensar sobre uma ética para a docência. A autora diz que “acreditamos na verdade prometida pela ciência, na soberania da razão, somos otimistas teóricos, utilitaristas, acreditamos que há verdades por trás das aparências. Somos pouco trágicos, pouco estéticos” (LAPONTE, 2003, p. 70).

No caso do professor de matemática, o problema parece crescer ainda mais. Afinal, somos formados por uma mesma matriz de racionalidade ocidental e moderna em que matemática e prática são atividades que provêm de uma realidade e de um ser universal. O distanciamento entre a teoria e a prática (como processo de aplicação de regras e técnicas desenvolvidas teoricamente) e o modo de ensinar tem, de fato, se constituído num modelo racional na formação do professor. Segundo Ribeiro (1999), esta é uma das preocupações da comunidade educacional sobre a qual, inclusive, há publicações no âmbito internacional. Estudos como os de Fossa (1995) e de Mendes (2001) demonstram que a principal influência do comportamento do futuro professor é sua própria história como aluno. Para além das teorias que entram em contato no seu processo de formação, o que marca seu



comportamento são as práticas adotadas por seus professores. Comenta D'Ambrosio (1993, p.39) que “futuros professores constroem seu conhecimento sobre o ensino da Matemática através de sua experiência com o ensino”.

Contudo os pesquisadores, preocupados com a formação do professor, têm procurado problematizar a formação inicial, buscando novas formas que vão além de uma formação para a racionalidade técnica. Entre estes pesquisadores, citamos Becker (1993, 1995, 2003), Fiorentini *et al.* (2002), Alarcão (2003), Buratto (2006), Nacarato (2007) e Thiollent (2007), que discutem novas metodologias para o ensino da matemática nas quais o professor provoca, ele mesmo, seus saberes. Outros estudos têm concentrado esforços para entender como o professor concebe os conhecimentos matemáticos, como é o caso dos trabalhos de Dickson *et al.* (1993), Ferreira *et al.* (2000), Diniz-Ferreira (2000), entre outros.

As tendências metodológicas das pesquisas citadas e de outras que seguem as mesmas linhas de investigação contribuem no potencial da criação de objetivos de estudos ajudando na compreensão, podendo ser utilizados como recursos para descoberta e justificação, devendo, então, continuar para a administração da nova realidade.

De acordo com Fiorentini (1998) e Bertoni (1995), as pesquisas levam à constatação de que é preciso envolver os professores em

atividades de modo que questionem acerca da própria prática docente desde o início da formação. E, para repensar a formação de professores buscando discutir um novo modelo, vamos além, sugerindo que se articule ao modo de ensinar práticas relacionadas com a historicidade e a visualidade e que lhes seja dada a oportunidade de construir e relacionar pensamentos, comportamentos e sentimentos em diferentes espaços e tempos e, ainda, em contextos de ensino na aprendizagem da matemática.

Um ensino que seja baseado na historicidade e na visualidade exige do profissional da educação uma reflexão e uma reavaliação de suas ações pedagógicas, para que ele se disponha a repensar as suas metodologias. Além disso, o educador necessita ter a consciência de que o raciocínio do aluno deverá ser analisado e avaliado no sentido de respeitar sua maneira de pensar e resolver as questões, desde que haja coerência entre suas relações e os dados do problema proposto.

Mas por que o professor precisa mudar sua relação com o saber e com a sua prática, ou construir novas relações? Ou por que o professor precisa atribuir um novo sentido para a história e para a visualização? O artigo de Flores e Sztajn<sup>7</sup> discute um conceito de história a partir da reflexão de estudos culturais e cultura visual, propondo que as fontes

---

<sup>7</sup> Versão preliminar de texto ainda não publicado, intitulado “*How can visual history and the art of fortifying serve in training math teachers?*”

visuais podem ser o lugar para o entendimento e a construção de novas relações com os saberes e as práticas em matemática. As autoras enfocam cinco pontos para debater a forma como novos entendimentos poderiam contribuir para a formação de um professor que fosse menos técnico e pragmático. Por fim, elas concluem dizendo que há uma discussão contemporânea que supõe a possibilidade de romper com as verdades universais, reconhecendo que nossas práticas e saberes são construídos em meio a regimes de verdade e relações de poder. Com isto tudo seria, no mínimo, correto de nossa parte, como pesquisadores, permitir que professores conheçam novas narrativas que podem também ser trabalhadas na Educação Matemática.

Não queremos, com isso, dizer que é preciso sobrecarregar o trabalho do professor. Queremos apenas, neste trabalho de pesquisa, pautar a ideia da proposta de uma nova articulação sobre a visualização e história a partir do entendimento de uma ética para docência. Isto, enfim, no sentido de que se pode trazer para a formação docente mais arte, mais vida, como defendeu Laponte.

### 1.5 DA PROPOSTA

Para trabalharmos com a história no ensino da matemática, temos visto o empreendimento de muitos pesquisadores para a elaboração de metodologias bem adequadas, bem dirigidas e bem delimitadas. Também para trabalhar com a visualização no ensino da matemática há

um empreendimento grande referente à oferta de metodologias que articulam questões visuais aos conteúdos matemáticos. Então é chegado o momento de nos empenharmos na perspectiva de propor uma nova narrativa. Esta narrativa tem a intenção de provocar um deslocamento do conceito de história da matemática para um ponto de vista da historicidade, e da visualização para o ponto de vista da visualidade.

Narrativas, para Hernández (2009, p. 11), “são formas de estabelecer a maneira como há de ser pensada e vivida a experiência”. O mesmo autor diz que “o principal problema que hoje enfrentam nossas escolas e universidade é a narrativa dominante sobre educação na qual se inserem e sua dificuldade em mudá-la”. Então o modelo tão enraizado sobre como agrupar os alunos para aprender, como ensinar, o que ensinar e como avaliar tem sucedido ao tempo e encontrado domínios férteis para germinar e crescer. Embora encontremos diferentes narrativas que circulam na atualidade, o modelo dominante continua dando voltas e não responde às necessidades de dar sentido a si, aos sujeitos e às suas práticas.

Contando com a ajuda de Larrosa (1999), podemos comparar o ato narrativo e, em nosso caso, o de novas narrativas para a Educação Matemática como o de comparado a uma viagem aberta, na qual:

[...] pode acontecer qualquer coisa, e não se sabe onde se vai chegar, nem mesmo se vai chegar a algum lugar. [...] E a experiência formativa seria, então, o que acontece numa viagem e que tem a

suficiente força para que alguém se volte para si mesmo, para que a viagem seja mais uma viagem interior (LARROSA, 1999, p. 52-53).

Destacamos, primeiramente, a narrativa como um modo de refletir, relatar e representar o tempo... o tempo que cria razões, desculpas, mitos, que reconstrói as histórias pessoais e sociais, de acordo com um modelo interpretativo dos acontecimentos. É neste espaço e nestas condições descritas acima que entramos com este trabalho de pesquisa. Numa abordagem inovadora para a Educação Matemática, pretende-se trazer à tona narrativas contemporâneas que possam ser problematizadas e refletidas nesta área de estudo. A proposta envolve, então, os novos entendimentos para a história e a visualização, utilizando conceitos estratégicos para construir uma nova narrativa na educação matemática, particularmente para a pesquisa que se ocupa da historicidade e da visualidade.

Para tanto, têm-se o pressuposto de que uma abordagem nesta direção envolveria a participação em práticas de refletir e investigar, em que o professor fosse desafiado a não apenas resolver problemas exploratórios já sistematizados, mas também de elaborar e explorar seus próprios problemas, formular suas hipóteses e conjecturas, testando-as e/ou provando-as, validando-as ou refutando-as no âmbito da sala de aula (sua comunidade investigativa). Portanto nosso objetivo é discutir e analisar uma nova narrativa que permita trabalhar a historicidade e a visualidade, proporcionando uma compreensão do visual como

construção cultural e histórica. A questão sobre as possibilidades de elaboração desta nova narrativa é destacada: como historicidade e visualidade podem se constituir ferramentas para a elaboração de uma nova narrativa na Educação Matemática?

Diante disto, procura-se discutir como nosso olhar se tornou em perspectiva, questionando, hoje, nossos hábitos em ver na matemática (FLORES, 2007a). Assim, a particularidade deste trabalho de pesquisa é, ao desencadear esta questão, analisar as práticas e estratégias técnicas de um artesão alemão, Albrecht Dürer, compreendendo como determinados discursos foram empregados na prática para formatar a representação do real, do olhar, mas também para alimentar verdades em torno de saberes matemáticos.

A matemática, assim, tanto desempenha um papel na formação de capacidades intelectuais e na estruturação do pensamento quanto na própria composição e possibilidade técnica para a representação se tornar uma realidade, como:

Não são os conteúdos em si e por si que importam, mas os conteúdos enquanto veículos de grandes realizações humanas [...] os conteúdos enquanto veículos de produção de bens culturais (materiais e espirituais) de esperanças e utopias sim [...] mas também os conteúdos enquanto veículos de produção de dominação, da desigualdade. Da ignorância, da miséria e da destruição [...] da natureza, de homens, de idéias e de crenças (MIGUEL *apud* ABREU, 1994, p. 70).

Dáí, enfim, a caracterização e a proposição desta Tese: constituir-se em um estudo teórico-analítico com apoio em um enfoque histórico acerca dos aspectos transdisciplinares que caracterizam as relações entre história, arte, matemática e Educação Matemática, bem como sua implicação na formação de professores, principalmente por investigar a relação entre historicidade e visualidade e as possibilidades de concretização de uma proposta metodológica para a abordagem do ensino de geometria.

Vale dizer que não temos a intenção, aqui, de experimentar e analisar tal proposta com professores, mas que, ao menos, pretendemos poder elaborar um argumento teórico sustentado e sustentável a fim de subsidiar novas pesquisas para a continuidade do estabelecimento de novas fronteiras na Educação Matemática.

## **CAPÍTULO II – VISUALIZAÇÃO E EDUCAÇÃO**

### **MATEMÁTICA: UM ESTADO DA ARTE**

Neste capítulo, abordaremos o termo visualização explorando o ponto de vista de alguns estudiosos na área da Educação Matemática. Também buscaremos articular algumas das tendências nas pesquisas internacionais e nacionais para a pesquisa neste campo. Ainda, numa análise de pesquisas que se envolvem com a temática, buscaremos compreender as metodologias e abordagens em que a academia vem se detendo. Por fim, dirigiremos o foco às pesquisas referentes ao ensino de geometria para perceber a importância dada a esta faceta na Educação Matemática.

Assim, este capítulo tem o objetivo de mapear, estudar e compreender pesquisas que trataram de visualização e Educação Matemática, a fim de contribuirmos para um estado da arte, ao mesmo tempo em que buscamos situar esta pesquisa na diferença com muitas destas que vêm sendo realizadas.

#### **2.1 O TERMO VISUALIZAÇÃO NAS PESQUISAS**

Existem muitos estudos que descrevem o ensino da matemática relacionado ao movimento da Educação Matemática com o intuito de tornar o seu ensino e a sua aprendizagem “mais significativa”, “mais motivada”, “mais histórica”, “mais argumentativa”, “mais criativa”,



“mais dinâmica”, “mais interativa”, “mais compreensiva” para quem aprende e quem ensina. Nesta linha de pesquisa, nacional ou internacional, podemos citar algumas obras, como as de Kilpatrick (1994), D’Ambrosio (1996, 1999), Duval (1999, 2004), Guzmán (2000), Passos (2000), Andrade e Nacarato (2004), Miguel e Miorim (2004), Miguel (2005), Cifuentes (2005, 2009), Flores (2007a, 2007b, 2008, 2010), Biza, Nardi e Zachariades (2008, 2010), Valente (2008), Mendes (2009), Passos, Nardi e Arruda (2010), dentre outras.

Os desenvolvimentos dos estudos citados acima se dão através da utilização de abordagens de alguns métodos e técnicas que a própria Educação Matemática desenvolveu e categorizou, como a Modelagem Matemática, a Etnomatemática, a História da Educação Matemática, a Formação de Professores que Ensinam Matemática, a História da Matemática e Cultura, podendo ainda ser mencionadas outras categorias. Nosso foco de estudo concentra-se na história e na visualização, situando-se no campo das práticas visuais inseridas em processos históricos e culturais. Portanto, sem querer se articular em categorias, a abordagem que se configura aqui pretende tecer narrativas diferenciadas.

Em particular, com as leituras indicativas sobre o tema da visualização na Educação Matemática, observamos que esta é vista como uma definição da realidade concreta, de onde se extraem as

informações e que, eventualmente, sofrerá as consequências das ações sugeridas pelo tratamento matemático de seu modelo. De outro lado, a visualização é entendida como uma expressão do pensamento, uma forma de olhar e de pensar que, segundo Cifuentes (2009), é uma forma de experiência ou uma forma de pensamento.

Para nos situarmos nesse processo complexo da atividade do olhar e do entendimento sobre a proposição do que é essa “forma de pensamento”, buscamos uma fundamentação teórica que permitisse conhecer melhor o que se tem de pesquisas em termos de visualização e sua relação com a Educação Matemática. Para completarmos nossa intenção de estudos, acrescentamos que não pudemos deixar de olhar também as pesquisas relacionadas ao ensino de geometria. Tal intuito foi para compreendermos melhor o porquê da tomada do tema visualização no ensino de geometria. Encontramos apoio nos registros dos efeitos provocados pela ausência do seu ensino, comentado por Lorenzato (1995):

[...] sem estudar geometria, os alunos não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, têm comprometidas as suas capacidades de resolverem as situações de vida que forem geometrizadas; abrangendo inclusive, assuntos pertinentes a muitas outras áreas, científicas ou não (LORENZATO, 1995, p. 4). [grifo nosso].

Ponderando a alegação acima exposta, torna-se importante destacar que a visualização na Educação Matemática originou-se,

conforme Presmeg (2006), com base no campo teórico da psicologia voltada para os aspectos relacionados com o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos e geométricos. Algumas pesquisas se inseriram no campo da semiótica, outras da fenomenologia ou, ainda, da didática da matemática.

Alguns pesquisadores (que citaremos no decorrer do texto) têm ampliado nosso campo teórico com seus trabalhos investigativos, incluindo conhecimentos diferentes, mas compatíveis entre si, em sua maioria de cunho psicológico e interessados em observar os processos de raciocínio matemático.

Encontramos contribuições teóricas e práticas nas pesquisas internacionais realizadas por Bishop (1973, 1983, 1989), Presmeg (1986, 2006), Cunningham (1991), Dreyfus (1991), Gutiérrez (1996), Arcavi (1999), Duval (1999), dentre outras, confirmando o já exposto, ou seja, as pesquisas em sua maioria priorizam o desenvolvimento do pensamento geométrico, estando relacionadas com o ensino e a aprendizagem, isto é, com o cognitivo.

Estes dados também se verificam e se conferem nos estudos com destaque em visualização e Educação Matemática nas pesquisas brasileiras. As mesmas são definidas como um processo de construção e

transformação de imagens visuais<sup>8</sup> mentais bem como de todo tipo de inscrições de natureza espacial, ambos usados na matemática (PRESMEG, 1986).

Comprovamos o dito organizando um esboço temporal (Quadro 1), no intuito de mostrarmos a proximidade existente entre interiorização teórica e seus diferentes significados, vinculados ou com a matemática, ou com a Educação Matemática, ou com a psicologia, ou com a pesquisa científica e verificamos que o foco da visualização está apoiado na percepção e na manipulação de imagens visuais:

**Quadro 1: Algumas definições sobre visualização**

(continua)

<b>Como os pesquisadores definem o conceito de visualização</b>		
<b>Autor</b>	<b>Ano/Página</b>	<b>Definição</b>
Presmeg	1986, p. 297	Visualização: “uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais.”
Bishop	1989, p. 8	“Visualização aparece na literatura com as idéias de imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, com ideias úteis para a Educação Matemática e que, embora seja considerada um conceito complexo, é necessário ser compreendida”. (tradução livre)
Dreyfus <sup>9</sup> <i>apud</i> Costa	2000, p. 169	“Visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica”.

---

<sup>8</sup> Imagens visuais: segundo Presmeg (1986) são esquemas mentais que descrevem a informação visual ou espacial.

**Quadro 1: Algumas definições sobre visualização**

(continua)

<b>Como os pesquisadores definem o conceito de visualização</b>		
<b>Autor</b>	<b>Ano/Página</b>	<b>Definição</b>
Cunningham	1991, p. 67	“Visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador de apoio à investigação nas ciências”.
Zimmermann e Cunningham	1991, p. 3	“Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão da matemática”
Senechal <sup>10</sup> <i>apud</i> Costa	2000, p. 170	“Visualização significa em linguagem usual ‘percepção espacial’ e assim é a reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões.”
Mariotti <sup>11</sup> <i>apud</i> Costa	2000, p. 170	“Visualização consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis”.
Solano e Presmeg	1995, p. 67	“Visualização é a relação entre imagens”.
Gúzman	1996, p. 13	“Visualização em matemática constitui um aspecto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático”.
Gutiérrez	1996, p. 19	Visualização na matemática é “um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas, ou provar propriedades”.

<sup>9</sup> DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking. *In*: P. Neshier e J. Kilpatrick. (Eds). Mathematics and cognition (p. 113-134). Cambridge: University Press. 1990.

<sup>10</sup> SENECHAL, M. Visualization and visual thinking. *In*: Joseph Malkevitch (Eds), Geometry Future, (p. 15-21), COMAP, Inc. USA. 1991.

<sup>11</sup> MARIOTTI, A. Images and concepts in geometrical reasoning. *In*: R. Sutherland e J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education, (p. 97-116). Nova Iorque: Springer. 1995.

**Quadro 1: Algumas definições sobre visualização**

(conclusão)

<b>Como os pesquisadores definem o conceito de visualização</b>		
<b>Autor</b>	<b>Ano/Página</b>	<b>Definição</b>
Nemirowsky e Noble	1997, p. 101	“Visualização é um ato que não se restringe somente aos aspectos mentais ou aos aspectos externos, mas um meio de estabelecer conexões entre esses dois meios.” (tradução nossa)
Arcavi	1999, p. 26	“Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de descrever a comunicação de informações, de pensar e de desenvolver idéias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados”. (tradução nossa)
Duval	1999, p. 9	“Visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, para ver em cada registro de representação.” (tradução nossa)
Passos	2000, p. 80	“Visualização é a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto”.
Cifuentes	2005, p. 71	“Visualizar é ser capaz de formular imagens e está no início de todo o processo de abstração”.
Van Garderen	2006, p. 496	“Visualização é a capacidade de manipular mentalmente, girar ou torcer, ou inverter um objeto pictoricamente estímulo apresentado”. (tradução nossa)
Leivas	2009, p. 111	“Visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.”
Flores	2010, p. 274	“Visualização matemática é entendida como uma expressão do pensamento, uma forma de olhar e de pensar”.

Fonte: Pesquisa da Autora (2012).

Quando conseguimos distinguir e compreender as diferenças existentes entre definições e, ao mesmo tempo, observar as percepções das relações de proximidade dos elementos neste mesmo campo, ou seja, nesta mesma área de pesquisa, é porque temos como referência que o tema visualização está relacionado aos mais diversos ramos da matemática e que também expressa detalhes qualitativos ou quantitativos na história, na filosofia, na psicologia, na pedagogia e em outras áreas do conhecimento.

Para melhor processarmos estes dados, ou seja, melhor abrangermos as convenções desenvolvidas pelos pesquisadores sobre as diferentes definições do termo visualização, (Quadro 2), podemos seguir a proximidade de interiorização teórica acompanhando as categorias indicadas na pesquisa realizada por Flores, Wagner e Buratto (2012), sendo:

**Quadro 2: Definições para o termo visualização**

(continua)

<b>Definições para o termo visualização</b>	
<b>Palavras chave</b>	<b>Agrupamento dos diferentes conceitos de visualização</b>
Imagens visuais mentais	Processo de construção e transformação de <b>imagens visuais mentais</b> , bem como de todo tipo de inscrições de natureza espacial.
Forma simbólica – modelos visuais	Interpretação e compreensão de <b>modelos visuais</b> e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de <b>forma simbólica</b> (a visualização como um processo útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática).

## Quadro 2: Definições para o termo visualização

(conclusão)

Definições para o termo visualização	
Palavras chave	Agrupamento dos diferentes conceitos de visualização
Representações concretas – relações abstratas	Atua-se sobre possíveis <b>representações concretas</b> , enquanto se descobrem as <b>relações abstratas</b> que interessam ao matemático.
Formação de imagens	É o processo de <b>formação de imagens</b> (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática.
Elementos visuais ou espaciais	É um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de <b>elementos visuais ou espaciais</b> , seja mental ou físico, realizada para resolver problemas, ou provar propriedades (imagens mentais, representação externa, processos de visualização e habilidade de visualização).
Atividade cognitiva – registros semióticos	Refere-se a uma <b>atividade cognitiva</b> que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, ou seja, visualização está ligada aos <b>registros semióticos</b> .
Forma de pensamento – experiência visual	Como uma <b>forma de pensamento</b> que tem como função contribuir na construção de significados e de sentidos, bem como servir de auxílio na compreensão da resolução de problemas (visualizar não é apenas ver o visível, mas tornar visível aquilo que se vê extraíndo padrões das representações e construindo o objeto a partir da <b>experiência visual</b> ).

Fonte: (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012).

Estas definições, em sua maioria, evidenciam uma proposição construtivista das ideias espaciais. A aprendizagem é voltada para a melhoria das condições do pensamento espacial para que o aluno possa pensar em novas relações com o conceito matemático, interligadas com o visual no ensino da matemática, aumentando as habilidades para a interpretação das transformações projetivas de modo a facilitar o entendimento de futuros conceitos geométricos.



## 2.2 AS TENDÊNCIAS PARA A PESQUISA EM VISUALIZAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dentre tantas definições e formas de se conceber o termo visualização, podemos ir além, isto é, nos debruçar em torno destes conceitos e traçar algumas tendências na área da educação matemática para a pesquisa em visualização e ensino de geometria, situando alguns autores, sendo:

- Visualização na geometria tridimensional como processo de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento dos elementos visuais e espaciais necessários para a resolução de problemas – método qualitativo no aspecto cognitivo (PRESMEG, 1986; GUTIÉRREZ, 1996; LIMA, 2001; MACIEL; ALMOULOU, 2004; PAVANELLO, 2004; COUY; FROTA, 2007; NOVAES; NASSER, 2007; CARVALHO, 2010).
- Visualização envolvendo processos mentais como: percepção, intuição, imaginação, representação, transformação, descoberta, construção, comunicação e reflexão (FAINGUELERNT, 1999; MURARI; BUSKE, 2005; LEIVAS, 2009).
- Visualização incorporada ao desenvolvimento curricular – disciplinas com conteúdos específicos (IKEGAMI, 1998;

NACARATO, 2001; FAINGUELERNT, 2001; LEIVAS, SOARES, 2010; TEIXEIRA, 2010; SMOLE; CÂNDIDO; 2010).

- Visualização relacionada aos ambientes computacionais (GRACIAS; BORBA, 1998; GUEDES; LOBÃO, 1998; KALEFF, 2001; SALOMÃO, 2001; SANTOS, 2001; BORBA; VILLAREAL, 2005; PEREIRA; FREITAS, 2010; JAVARONI, 2010; LAGE; FROTA, 2010; BENTO; LAUDARES, 2010; ROSSI; BISOGNIN, 2010).
- Visualização e as representações de registros semióticos (FLEMMING; LUZ, 1998; DUVAL, 1999, 2004; BRIGHENTI, 2001; PASSOS, 2001; FLORES; MORETTI, 2004; ANDRADE E MANRIQUE, 2007; MORACO, PIROLA; 2007; GOUVEIA; MISKULIN, 2010; MORETT; KALEFF, 2010).
- Visualização na percepção dos matemáticos sobre o papel das imagens, tratando-se da abstração e do gênero (NARDI; IANNONE, 2003).

Visualização no raciocínio matemático dos professores de matemática (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2008, 2010; MOORE-RUSSO; VIGLIETTI, 2010).

- Visualização e a didática da matemática: buscando o como melhorar e como utilizar a visualização na aprendizagem matemática – o uso pedagógico (NASSER, 1990; EISENBERG, 1991; BRASIL, 1998; FROTA, 2004).
- Visualização como formação discursiva, como prática do olhar (FLORES, 2003, 2007a; MENEGUZZI; FLORES, 2007; MENEGUZZI, 2009; ZAGO, 2010; WAGNER, 2012).

Se a observação e o estudo destas tendências podem revelar informações interessantes para determinadas atividades de análise didático-pedagógica, então elas podem ser ensinadas desde que sejam oferecidas experiências apropriadas aos alunos.

Mas Flores, Wagner e Buratto (2012) consideram que a maioria das teorias apoia-se em atividades, conforme citam:

Normalmente as etapas metodológicas que se lança mão são: construção da imagem mental, representação externa (representações gráfica, escrita ou falada) e, por fim, o processamento propriamente dito da visualização, onde uma ação mental ou física envolve as imagens para se completar (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 40).

E, ainda, segundo as autoras, em muitas situações sobre a teorização da visualização para a pesquisa, há pouca articulação “o que se percebe é que as pesquisas mais se apoiam em alguma abordagem

teórica para tratar dos problemas de visualização nos processos de ensino e aprendizagem do que, propriamente, teorizam a questão do visual para a educação matemática” (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 42).

Mesmo considerando o exposto acima, possuímos uma amostra apontando para uma considerável trajetória já estabelecida sobre o tema visualização em Educação Matemática. Então, vamos além, afirmando que têm ocorrido novos esforços com o objetivo de mostrar aos alunos e professores que a matemática é uma disciplina que não surgiu de forma arbitrária nem necessariamente, científica, mas sim que foi criada, construída, concretizada e compreendida pelo homem por meio da intuição, da imaginação, da percepção, da imagem visual, da reconstrução mental da representação de objetos e que esboça diferentes concepções de vários autores. Este interesse de conexão é encontrado em pesquisas como as de Flores (2007a, 2007b, 2008, 2010), Leivas (2009) e Mendes (2001, 2006, 2009, 2011), os quais buscam apoio no campo conceitual da história cultural problematizando nossos saberes constituídos nas problemáticas do passado (BURKE, 2005).

Para termos uma melhor visão destes aspectos de pesquisas, salientamos que Flores (2010, p. 273), em seus estudos, não propõe e nem discute os “[...] elementos para uma teoria geral da visualização [...]”, mas articula-se em:

[...] situar aí outra questão e incrementar o debate acerca da pesquisa em visualização para o ensino e aprendizagem matemática. O que se propõe é discutir acerca da visualidade, ou seja, sobre a problemática do visual. Isso considerando visualidade como objeto detentor de historicidade [...] (FLORES, 2010, p. 273).

Leivas (2009) considera em sua pesquisa que a Educação Matemática aponta a importância de incentivar por meios educacionais a compreensão da percepção das informações visuais necessárias para a formação matemática do educando:

A Educação Matemática tem mostrado interesse nas questões relativas ao visual e à representação por figuras de idéias e conceitos matemáticos por mais de uma centena de anos, segundo Bishop (1989), recorrendo ao auxílio visual, com base no conhecimento do que pode isso representar para a construção de conceitos matemáticos complexos que, juntamente com manipulações e personificações concretas dos objetos, são elementos poderosos para o ensino de Geometria e devem fazer parte do currículo de formação de professores (LEIVAS, 2009, p. 208) [grifo nosso].

E, ainda, tomando as considerações de Mendes (2009):

[...] a busca da reconstrução histórica do conhecimento matemático passa a ter significativas implicações pedagógicas na construção dos conhecimentos cotidiano, escolar e científico dos alunos, bastando para isso utilizarmos tais informações históricas numa perspectiva atual de geração do conhecimento matemático [...] Essa visão pode ser obtida pela investigação e pela análise das informações históricas da Matemática se a considerarmos como um princípio unificador desses aspectos e procurarmos mostrar como a produção do conhecimento matemático apresenta-se em diferentes contextos sócio-culturais e históricos (MENDES, 2009, p.10 e 22)

### 2.3 AS METODOLOGIAS NA PESQUISA EM VISUALIZAÇÃO

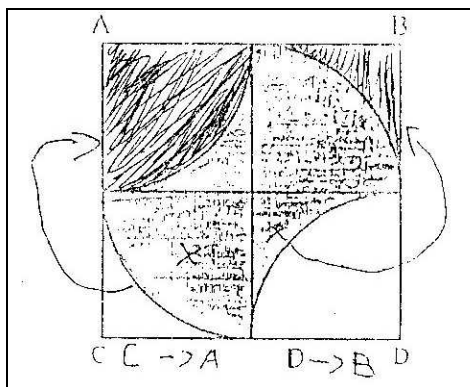
A discussão realizada acima nos proporcionou um melhor entendimento sobre o tema visualização, bem como a noção da abrangência das pesquisas. Agora, nosso objetivo é tomar algumas pesquisas para analisar as metodologias que foram empregadas no desenvolvimento das mesmas. Este intento se dá pela busca de uma ressignificação da prática de pesquisa dos saberes empregados, das questões elaboradas e das escolhas para análises. Isto quer dizer que, ao se propor o entendimento de como as pesquisas normalmente elaboram seu conteúdo, tanto teórico quanto metodológico, emprega-se um novo sentido para construir esta pesquisa. A retomada da diversificação das metodologias destas pesquisas nos dá condição de apresentarmos nossa proposta abrindo espaço para uma discussão mais abrangente, retratando um raciocínio mais aberto e elaborado.

Com base nas informações disponíveis (livros, teses, dissertações e artigos – físicos ou virtuais), selecionamos cinco pesquisas (três nacionais e duas internacionais) que investigaram experiências didáticas relacionadas às figuras geométricas e à visualização. Nosso critério de escolha deu-se pelo tema e a abordagem está centrada na visualização como suporte metodológico e elemento mediador do raciocínio dos aprendizes (alunos ou professores).

Flores-Bolda (1997) abordou, com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, situações de ensino-aprendizagem que continham a composição e a decomposição de figuras geométricas planas privilegiando o desenvolvimento da visualização em problemas de cálculos de áreas. A autora considera a visualização como fonte fundamental para ampliar a visão intuitiva e global, bem como para a compreensão das outras áreas da matemática. Constatou que existem dificuldades e bloqueios na habilidade da visualização centrados em dois pontos: em ver a figura, isto é, vê-la a partir de todas as possibilidades que ela pode oferecer; e em se apropriar dessa leitura eliminando fatores que possam interferir na busca errada da solução do problema.

Um exemplo citado pela autora em sua pesquisa esclarece o exposto (Figura 1):

**Figura 1: Atividade de ensino-aprendizagem para o cálculo de área**



Fonte: (FLORES-BOLDA, 1997, p. 122).

Neste caso, Flores-Bolda (1997) solicitou o cálculo da área da região hachurada tendo em vista o quadrado ABCD de lado 4 cm. E assim descreve:

Percebe-se que o aluno buscou uma reconfiguração que lhe permitisse a configuração de uma outra figura, ou seja, um retângulo de 2 cm de altura por 4 cm de largura, o que implica numa área de  $8\text{cm}^2$ . No entanto, para este aluno a resposta do cálculo da área da figura ficou em  $2\text{cm}^2$ . Isso significa que o aluno realiza uma boa reconfiguração, porém não realiza uma coordenação entre a figura e o que é dito no enunciado, procedendo assim por contagem de quadrados (FLORES-BOLDA, 1997, p. 122)

A autora aproveita o exemplo para enfatizar que as possibilidades heurísticas de uma figura requerem não só uma habilidade do visual mas também competências outras, que permitam concluir corretamente o exercício, ou seja, para além de uma visão geral que engloba figura e enunciado, é preciso dominar conhecimentos matemáticos que, no âmbito geral, levam o aluno a uma desenvoltura na aprendizagem matemática e, ainda, à utilização de figuras geométricas na resolução de problemas matemáticos que exigem uma certa aprendizagem de leitura e interpretação destas figuras.

Flores-Bolda (1997) conclui em sua pesquisa, embasada nos estudos de Düval (1999), que as dificuldades da visualização de figuras planas estão ligadas ou ao funcionamento cognitivo de cada indivíduo ou aos aspectos inerentes às figuras. E afirma que tais dificuldades não



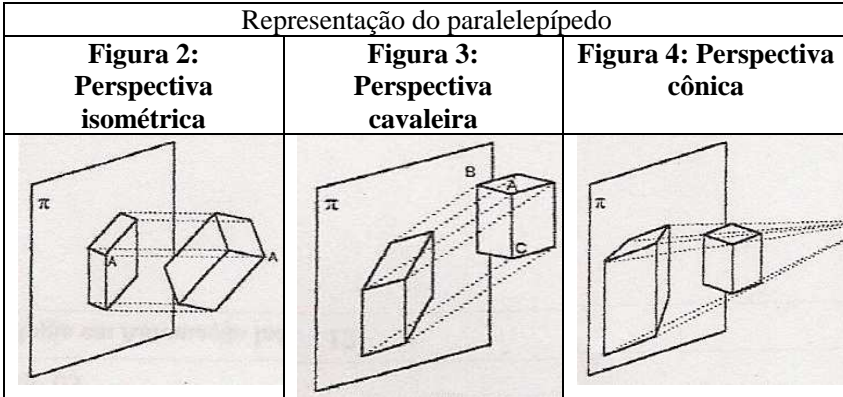
seriam decorrentes apenas do exercício da visualização de figuras geométricas planas e que, certamente, em torno da utilização de figuras tridimensionais na resolução de problemas matemáticos, uma complexidade de fatores diversos iriam interferir na visualização, sendo esta uma questão complexa que deveria ser melhor estudada.

Cavalca (1998) elaborou uma sequência didática com situações que favorecessem aos universitários o desenvolvimento das capacidades de interpretar e fazer representações gráficas planas de objetos do espaço e resolver problemas, utilizando o conceito de habilidade de processamento visual de Bishop (1983). Em outras palavras, empregou a interpretação de informação figurativa e o processamento visual de problemas. Esta habilidade espacial é composta pela interpretação de informações na forma de figuras, o que envolve tanto o entendimento da representação visual e do vocabulário como também os processos visuais, por manipulação de representações visuais e imagens e transformação de relações abstratas em representações visuais.

A partir desta ideia, o autor considera a visualização como sendo “[...] a recomposição mental da imagem de um objeto, evocada tanto pelo nome dele, quanto por suas características, representação gráfica, etc.” (CAVALCA, 1998, p. 34).

Neste contexto, um dos registros apresentados foi a percepção dos alunos sobre a existência de muitos modos de representação para

uma mesma figura geométrica, como a exemplificada a seguir (Figuras 2, 3 e 4):



Fonte: (CAVALCA, 1998)

Por meio dos resultados obtidos, o autor concluiu que os alunos observados passaram a relacionar espaço tridimensional e sua representação gráfica plana, de maneira significativamente mais apropriada, através do desenvolvimento das habilidades básicas citadas.

Consideramos, também, a pesquisa de Viana (2005) aplicada a alunos de Ensino Médio. Seu objetivo centrou-se em analisar o componente espacial da habilidade matemática, bem como a verificação da existência de relações entre este componente, o raciocínio espacial, as atitudes em relação à matemática e à geometria e o desenvolvimento escolar. Os sujeitos participantes foram avaliados por meio de duas provas utilizando lápis e papel, um teste psicológico de raciocínio

espacial e duas escalas de atitudes em relação à matemática e à geometria. A autora constatou:

[...] se é a imaginação visual que permite ao homem formar imagens mentais a partir da percepção direta ou não, manter essas imagens, manipulá-las mentalmente, transformá-las, para, por fim, representá-las externamente, a disciplina que melhor pode fornecer ao aluno do ensino médio a oportunidade de desenvolver as habilidades relativas à imaginação visual é a geometria (VIANA, 2005, p. 248).

Para tanto, seu trabalho faz referência aos processos de formação, inspeção e transformação de imagens mentais evidenciados nas fases de obtenção e de processamento da informação geométrica de problemas, com embasamento teórico na teoria de Krutetskii (1976)<sup>12</sup>, que define o conceito de habilidade matemática como uma característica psicológica individual capaz de influenciar o sucesso especificamente na atividade matemática.

Os problemas usados na pesquisa apresentam informações na forma verbal ou na forma mista (verbal e pictórica). As análises das interpretações das informações se deram:

- Quando na forma verbal: o sujeito deveria decodificar as propriedades e as relações de modo a representá-las

---

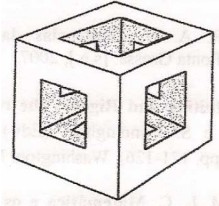
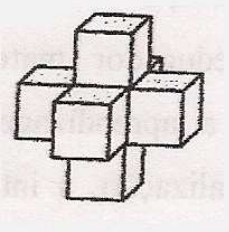
<sup>12</sup> KRUTETSKY, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1976.

mentalmente na forma de uma imagem tridimensional que traduzisse o conceito geométrico espacial.

- Quando na forma pictórica: o sujeito deveria decodificar as propriedades e as relações a partir do desenho bidimensional a fim de construir uma representação tridimensional do objeto.

Pode-se assim afirmar que, para o sujeito obter as informações geométricas iniciais do problema, deveria formar uma imagem mental em três dimensões, sendo esta construída quer a partir da informação verbal, quer a partir da percepção do desenho dado. Dentre os problemas apresentados na pesquisa consideramos, para tanto, um exemplo de informações na forma mista (Figura 5):

**Figuras 5: Representações pictóricas resultantes do processamento das informações geométricas relativas à inspeção de imagem com a função de uma nova referência conceitual espacial**

Problema 2 – Anexo 5, Viana (2005, p. 278) Informações na forma verbal e pictórica	Representação pictórica resultante (VIANA, 2005, p. 213)
<p>As arestas de um cubo de isopor medem 6cm. Buracos quadrados, de 2cm de lado, cortam o cubo, indo de uma face até à face oposta. As arestas desses buracos são paralelas às arestas do cubo, como na figura a seguir. Determine o volume da peça.</p> 	

Fonte: (VIANA, 2005).

A autora esclarece que alguns sujeitos solucionaram o problema indicado subdividindo o sólido em cubos e paralelepípedos menores e somaram seus volumes, resposta correta também válida. Mas outros sujeitos organizaram o interior vazado do cubo e assim formaram a imagem de um sólido representando a parte oca, caracterizando uma outra maneira organizacional e padronizada de aplicações das regras matemáticas e, desta forma, subtraíram o volume vazado do cubo inteiro. Especifica que, neste caso: “[...] o resultado da inspeção da imagem antiga foi traduzido na forma de uma imagem tridimensional, com as informações conceituais da geometria espacial necessárias para o prosseguimento da solução” (VIANA, 2005, p. 213). A partir deste e de outros resultados encontrados em sua pesquisa e embasados na discussão de seu referencial teórico, Viana (2005) conclui que os sujeitos mais habilidosos elaboram representações parciais e coerentes e não as utilizam com a função de assistência perceptual, gerando, assim, uma maior compreensão da complexidade de variáveis que interferem no rendimento da aprendizagem dos alunos em geometria.

Adentrando no campo das pesquisas internacionais, debruçamo-nos nos estudos de Biza, Nardi e Zachariades (2008). Estes pesquisadores expõem sobre a importância da visualização dentro da Educação Matemática e apontam os diferentes papéis que ela pode desempenhar no ensino e na aprendizagem matemática, como o

desenvolvimento curricular com ênfase na visualização; as percepções dos matemáticos e o uso da visualização; a relutância aparente dos alunos para se envolverem com visualização; as diferenças de gênero; as relações com a cognição etc. – apontando para os estudos realizados por Presmeg (2006).

Apresentam como foco central dessa pesquisa o papel da visualização no raciocínio matemático dos professores e exploram as influências destes nos “*feedbacks*” (comentários) aos alunos abrangendo diversos fatores como, por exemplo, a matemática, a epistemologia e a pedagogia.

O envolvimento dos professores na pesquisa de Biza, Nardi e Zachariades (2008) deu-se por meio da realização de tarefas de estudos mais pormenorizados sobre as origens teóricas deste tipo de atividade, isto é, sobre o conhecimento teórico do processo em questão. Também envolveu a reflexão sobre os objetivos de aprendizagem dentro de um problema matemático, sua interpretação e sua resolução, a análise de possíveis falhas nas soluções (podendo ser fictícias ou não) e a construção de um comentário, por escrito, relacionado ao desenvolvimento das soluções do problema proposto aos alunos.

Do tema em questão, infere-se o reconhecimento de uma linha tangente a uma curva em um ponto de inflexão. Sendo o problema: “Examine se a linha da equação  $y=2$  é tangente ao gráfico da função  $f$ ,

onde  $f(x)=3x^3 + 2$ .” (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2008, p. 2-179) [tradução nossa]. Os autores analisaram, nas respostas, dados como os das imagens persistentes da linha tangente, os das crenças sobre a suficiência de um argumento visual e os das crenças sobre o papel dos argumentos visuais na aprendizagem dos alunos. Em síntese, um dos objetivos daquele estudo foi o de explorar e relatar o papel da visualização com especial referência ao raciocínio matemático; e outro objetivo apontado foi o reconhecimento de influências no ensino dos professores por meio de seus comentários nas soluções dos alunos.

No decorrer das análises, os pesquisadores, perceberam várias influências nas respostas dos professores. Como exemplo, citam que quase todos os docentes fizeram distinção entre uma abordagem algébrica e uma abordagem gráfica nos recursos de respostas expressadas pelos alunos e incluíram em seus comentários uma declaração de avaliação sobre a suficiência/aceitabilidade de uma ou de ambas as abordagens deixando explícita, em muitas das vezes, sua opinião sobre a suficiência/aceitabilidade da abordagem gráfica ou sobre o papel do pensamento visual no desempenho da aprendizagem de seus alunos.

Biza, Nardi e Zachariades (2008) assinalam, ainda, que as respostas dos professores apresentam aparentes influências do contexto matemático do problema dentro da tarefa, utilizando-se de seus próprios

pontos de vista, como também dos pontos de vista formativos. Porém deixam claro que a falta de conhecimento de determinadas imagens causa problemas e “a representação gráfica de tangência em um ponto de inflexão, fica no caminho de cumprir o potencial no emprego da visualização” (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2008, p. 2-183) [tradução nossa].

Diversas outras pesquisas em Educação Matemática apontam para a importância do desenvolvimento da habilidade de visualizar tanto objetos do mundo real quanto em nível mais avançado, sendo que os objetivos destes estudos permanecem, na maioria das vezes, em torno dos conceitos, das propriedades e das estruturas matemáticas. Ainda com tal fim, abordamos a pesquisa de Moore-Russo e Viglietti (2010), que investigaram uma comunidade de futuros professores (em formação) e de professores iniciantes (egressos), com o apoio de imagens geradas por vídeos, e justificaram o propósito em Ma (1999)<sup>13</sup>; Ball, Thames e Phelps (2008)<sup>14</sup>; e Ball e Bass (2000)<sup>15</sup>, atendendo o

---

<sup>13</sup> MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

<sup>14</sup> BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, 59, 389-407, 2008.

<sup>15</sup> BALL, D. L.; BASS, H. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In BOALER, J. (Ed.), **Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics** (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex, 2000.



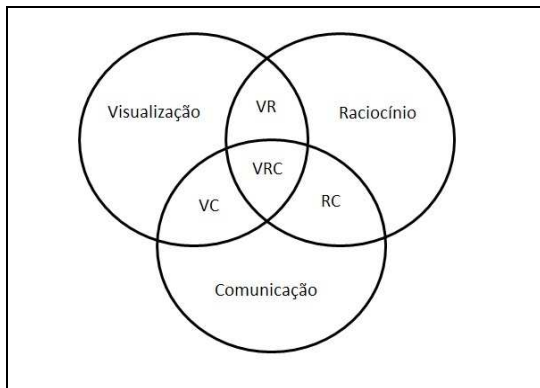
preceito de que os professores precisam de uma boa compreensão (unificada e flexível) dos conceitos matemáticos.

O objetivo daquela pesquisa (2010) foi explorar como os professores conceituam a divisão das regiões por eixos em um espaço geométrico tridimensional e como respondem à pergunta: “se os eixos do plano  $xy$  dividem-no em quatro regiões (chamadas quadrantes), em quantas regiões dividem os eixos do espaço  $xyz$ ?” (MOORE-RUSSO; VIGLIETTI, 2010 p. 1105) [tradução nossa]. A forma de análise da pesquisa foi realizada em um âmbito mais abrangente. Incluiu desde a descrição de tendências relacionadas ao envolvimento dos professores no problema matemático exposto até a utilização de gestos e ferramentas para apoiar ou complementar a comunicação juntamente com a fundamentação teórica e a visualização. Segundo as autoras, os padrões de respostas revelaram que o envolvimento com o problema abrange três domínios os quais se sobrepõem: a visualização, o raciocínio e a comunicação. Estes domínios são característicos de resolução de problemas matemáticos em geral, incluindo aí os problemas geométricos em particular. Eles (os domínios) sustentam a essência do envolvimento dos professores com o problema apresentado.

Em rápidas palavras, Moore-Russo e Viglietti (2010 p. 1109), interpretam os domínios da seguinte maneira:

- Visualização independe do raciocínio e da comunicação, é o ato de chamar uma imagem mental, não envolve a execução de quaisquer operações sobre a imagem mental.
- Raciocínio sem uma comunicação refere-se às análises internas de um indivíduo e suas interpretações para a compreensão pessoal, pode envolver representações simbólicas (manipulações algébricas) que impedem o uso de imagens mentais.
- Comunicação é a transmissão de informação pré-determinada ou factual. A mesma evoca conhecimento através da utilização de meios linguísticos ou simbólicos que não empregam o uso de imagens mentais. Ver Figura 6.

**Figura 6: Intersecção de domínios na matemática**



Fonte: (MOORE-RUSSO; VIGLIETTI, 2010, p. 1110) [tradução nossa].

As autoras discorrem que a intersecção dos domínios de visualização e raciocínio (VR) ocorreu quando os sujeitos utilizaram imagens ao analisar ou interpretar dentro de um determinado contexto; que a visualização e comunicação (VC) se cruzaram quando os professores usaram imagens para compartilhar o conhecimento que eles possuíam na tentativa de obter a compreensão dos outros integrantes; e que, na intersecção da comunicação e raciocínio (CR), eles usaram o discurso sem os ícones gráficos, compartilhando ideias matemáticas sem o emprego de imagens mentais. Por último, expõem a intersecção de visualização, raciocínio e comunicação (VRC) explicando que ocorreu quando os participantes trabalharam juntos realizando uma exploração ativa dos problemas, comunicando-se um com os outros por meio de representações externas da imagem mental. Comentamos, ainda, que todos os domínios e suas intersecções são exemplificados na pesquisa e que Moore-Russo e Viglietti (2010) justificam e exemplificam no texto que a sobreposição do VRC esteve presente em todos os grupos pesquisados.

Remarcamos, também, que outras pesquisas em Educação Matemática trilham o mesmo chão, como as de Parzysz (1988, 1991), Chaachoua (1997) , Rommevaux (1999) e Montenegro (2005), que assinalam a existência de dificuldades na aprendizagem de geometria

espacial fortemente relacionadas com à visualização, compreensão e apropriação de conceitos geométricos.

Da análise destes estudos, inferimos que as metodologias estão centradas no tratamento da geometria, na aprendizagem de conceitos, na habilidade visual. Apesar de existirem várias sugestões de métodos de pesquisa, e conseqüentemente de ensino, as pesquisas analisadas, pautam-se em métodos ou do lado da didática francesa<sup>16</sup> ou da análise do conhecimento e da desenvoltura frente às atividades de visualização. A preocupação é sempre voltada para o desenvolvimento de capacidades de visualização espacial, de raciocínio, de argumentação conceitual. Ainda que tenham envolvimento com a história, interpretação e análise, as mesmas se incorporam na estrutura cognitiva de quem as pratica.

Nossa questão, aqui, é outra, ou seja, centra-se em elaborar metodologicamente um trabalho que aborde historicidade e imagem para tratar sobre visualidade na formação de professores. Isto implica a discussão de práticas de olhar e o conhecimento matemático presente.

---

<sup>16</sup> Segundo Pais (2002), educadores matemáticos franceses na sua maioria desenvolveram um modo próprio de ver a educação centrada na questão do ensino da matemática. Vários educadores matemáticos do Brasil adotam alguma versão dessa tendência ao trabalhar com concepções dos alunos e com formação de professores, dentre outros temas, entidades relacionadas aos conceitos como de transposição didática, de contrato didático, de obstáculos epistemológicos e de engenharia didática.

## 2.4 AS PESQUISAS E SUAS ABORDAGENS PEDAGÓGICAS

Vamos refletir como se constituíram algumas pesquisas (com apresentação em ordem cronológica de publicação) no sentido do ensinar e aprender matemática, especificamente no ensino da geometria, tendo em consideração a relevância em contemplar a visualização do ponto de vista pedagógico.

Segundo Flores (2007a) a visualização no processo de ensino e aprendizagem da geometria se constitui um desafio. Pois, nas palavras da autora:

Não há dúvida de que o papel da visualização na aquisição dos conhecimentos geométricos é importante. Mas tal atividade é complexa; tão complexa que talvez seja ingênuo de nossa parte o desejo de melhorar o modo de ver de nossos alunos, a partir de um conjunto de atividades desenvolvidas em sala de aula, ou ainda, procurar explicar como a atividade do olhar se processa em cada um de nós. Talvez esta complexidade envolva muitos outros elementos que não estejam, unicamente, ligados às figuras em si, nem à capacidade visual de cada um de nós. Talvez fosse o caso de, antes de tudo, analisarmos o fato de que uma imagem é a representação de um modo de olhar (FLORES, 2007a, p. 20).

Esta concepção da “complexidade de melhorar o modo de ver de nossos alunos”, explorada por Flores (2007a), nos leva a buscar pesquisas que apresentem contribuições para o ensino de geometria com o objetivo de explorar as habilidades necessárias para a visualização a

partir do entendimento de algumas especificidades do termo visualização no campo da Educação Matemática.

Esta aproximação entre a Educação Matemática e a visualização pode ser percebida quando o tema é tratado em pesquisas<sup>17</sup> que apresentam vários níveis de escolaridade e em conteúdos diversos como as apontadas neste estudo: Passos (2000), Fábrega (2001), Bosquetti (2002), Miranda (2006), Rosalves (2006), Flores (2007a), Rodrigues Júnior (2007), Garcia (2007), Couy (2008), Leivas (2009), Meneguzzi (2009), Becker (2009), Seabra (2009), Fontana (2010), entre outras. São pesquisas pautadas em alternativas de intervenção que contribuem para a reformulação teórico-metodológica das propostas vigentes.

Neste sentido, Passos (2000)<sup>18</sup>, em sua pesquisa, trabalhou questões relacionadas à problemática do ensino da geometria, considerando o desenvolvimento cognitivo e os aspectos psicopedagógicos e epistemológicos das representações e interpretações geométricas na prática pedagógica, e enfatizando o processo de ensino-aprendizagem da geometria devido a sua complexidade. Em síntese, investigou como o aluno representa e interpreta representações geométricas e de que maneira o professor percebe e interpreta estas

---

<sup>17</sup> Pesquisas desenvolvidas em forma de TESE ou DISSERTAÇÃO

<sup>18</sup> PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglione. Doutorado 2000/Unicamp. (TESE): Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula, 2000.

representações. Esta autora considera que a visualização constitui um importante componente em sua pesquisa e aponta como necessária para recorrer/desenvolver as habilidades da intuição, da percepção e da representação, bem como, também, para a construção de conexões lógicas e de demonstrações, todas fundamentais para a formação matemática.

O termo visualização é considerado na pesquisa de Passos (2000) como:

[...] a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. Em outras palavras, seria a percepção visual do sujeito enquanto a construção de um processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em sua memória. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis (PASSOS, 2000, p. 80).

Em seus estudos, os dados analisados indicam que os alunos não conseguem representar determinadas propriedades desses objetos, prejudicando o processo de aprendizagem da geometria, isso porque apresentam dificuldades em “ler” o que as representações bidimensionais de objetos tridimensionais traduzem, não conseguindo, assim, identificar os diferentes elementos que os compõem. Conforme Passos (2000):

Os diferentes tipos de visualização que os estudantes necessitam, tanto em contextos

matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais, de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visivelmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis (PASSOS, 2000, p. 81).

Nesta mesma direção os dados referentes aos professores envolvidos na pesquisa, indicam que os mesmos não trabalham os conceitos geométricos considerados como os mais elementares no Ensino Fundamental e, quando experimentam ensinar estes conceitos, evidenciam-se as dificuldades:

[...] as professoras (sujeitos da pesquisa), quando tentam ensinar Geometria para seus alunos, apresentam muita dificuldade, tanto teórica quanto metodológica, que pode comprometer o processo de aprendizagem dos estudantes. Consequentemente, seus alunos desconhecem quase totalmente os mais primários conceitos geométricos [...] (PASSOS, 2000, p. 317).

Em seu trabalho, Passos (2000) considerou a visualização espacial, uma atividade de raciocínio baseada no uso dos elementos visuais e espaciais, no estabelecimento de relações e na manipulação de objetos concretos, integrando a visualização aos quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. Indica, também, que o desenvolvimento da visualização em sala de aula deve ser orientado com cuidado, pois se compreende que a construção do espaço e dos conceitos geométricos implica um processo gradual de elaborações e



reelaborações do sujeito para que, durante o processo de ensino-aprendizagem da geometria, os alunos possam formular hipóteses, raciocinar dedutivamente entender o papel dos modelos matemáticos.

Nossa pesquisa diferencia-se da pesquisa realizada por Passos (2000) no que se refere ao aspecto cognitivo. Não estamos interessados em como o ensino se procede e sim em como ele é construído. Para tanto, buscaremos auxílio no campo da cultura visual no que tange à visualidade.

Contemplando o termo visualização, mas com outro foco, Flores (2007a)<sup>19</sup> nos propõe reflexões que se fundamentam nas manifestações artísticas, no que diz respeito às artes plásticas e gráficas. Deste modo, a investigação da pesquisa ocorre na história da perspectiva para apresentar como se constituíram os sujeitos, os saberes, os modos de representar e de olhar, para compreendermos como a técnica da perspectiva central se desenvolveu interligada às problemáticas da modernidade.

A análise dos estudos de Flores (2007a) apoia-se em material encontrado no campo das artes, arquitetura e engenharia e nas técnicas, como as práticas artísticas do Renascimento quando da instauração da

---

<sup>19</sup> FLORES, Cláudia Regina. Finaliza suas investigações de doutoramento em 2003/UFSC e converte sua tese em livro em 2007. (TESE): **Olhar, saber, representar**: ensaios sobre a representação em perspectiva. (LIVRO): Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva. 2007.

técnica da perspectiva central associada às formas de ver, de pensar e de relacionar com o mundo físico, social e consigo mesmo. A autora ressalta que:

Tudo isso para compreendermos que se construiu um modo de olhar que é pautado numa técnica, a técnica da perspectiva, portanto, um modo de olhar que é racional, objetivo, perspectivado e que se faz, enfim, no modo atual de representação iconográfica e no modo de olhar essas representações. Significa, enfim, pensar a questão da visualização, na educação matemática, como trabalhada dentro de um regime específico de visibilidade, de saber, o que pode possibilitar o entendimento das complexidades desta atividade (FLORES, 2003, p. 9).

Os estudos de Flores (2007a) nos mostram que a visualização e a geometria têm uma intimidade que vão além da sala de aula e que também ultrapassam as barreiras das questões atuais. Isto fica explícito quando a autora nos diz que Leonardo Da Vinci, inspirado e ajudado por Pacioli, construiu/traçou desenhos buscando visualizar e sintetizar proposições euclidianas, mostrando a importância das imagens na compreensão e na obtenção do conhecimento.

Flores (2007a) nos oferece diferentes estudos que tratam do aspecto visual no ensino da geometria os quais enfatizam a associação entre a leitura do desenho em perspectiva e o objeto real. Adentrando na teoria da aprendizagem, destaca-se a metodologia de ensino que garante a desenvoltura do ver e, por resultado natural, ocorre a aprendizagem da geometria. Seu problema de pesquisa não está relacionado ao

funcionamento cognitivo do indivíduo, nem no entendimento da organização semiótica das figuras, e sim “[...] no limiar disso tudo, ou seja, na compreensão do como e de onde surge nosso modo de olhar e de representar as figuras geométricas, para daí pensar a educação do olhar no ensino de geometria” (FLORES, 2007a, p. 27).

Nesta perspectiva, Flores (2007a) não tece um quadro de referência teórica, optando por mostrar, no corpo do trabalho, os pressupostos sob os quais estava fundamentando sua pesquisa. E, quando discute seus estudos a respeito dos estudos de Raymond Düval<sup>20</sup>, levanta a questão de por que os alunos apresentam tantas dificuldades para olhar representações de figuras tridimensionais, justificando que:

[...] para aprender a ver, é preciso primeiro saber que para um mesmo objeto matemático existem muitas formas de representá-lo; depois, é necessária uma aprendizagem específica dos tratamentos inerentes a cada tipo de representação, bem como das passagens de um registro de representação a outro. Para o caso particular das figuras tridimensionais significa, então, reduzir a problemática do ver estas figuras representadas no plano às questões puramente de conversão de registros – a passagem da figura em 3D para a representação em 2D, por exemplo, a seus tratamentos e às operações suscetíveis, bem como o funcionamento cognitivo do aluno (FLORES, 2007a, p. 26).

---

<sup>20</sup> Raymond Düval estudioso francês que aborda os aspectos da representação semiótica para compreender e analisar os processos de ensino da matemática.

De fato, estas constatações que surgem em decorrência dos estudos e conclusões de Flores (2007a, p. 27) nos levam a reiterar sua pergunta “que implicações há em ‘como olhamos’ em relação a aprender a ver?”. A autora trabalha esta questão trazendo em seu texto estudos que nos mostram a existência de discussões e buscas de meios didáticos na intenção de amenizar as dificuldades da visualização de figuras geométricas e de possibilitar a aquisição da desenvoltura do visual levando o aluno a “aprender a ver”. Mas levanta, ainda, a questão de que se o objetivo é levá-lo a “aprender a ver”, então é necessária a verificação do fato “e, será isso verdadeiramente possível, a menos que seja um ato ilusório? Ora, os alunos não são transparentes, e nem mesmo podemos ter um olho dentro do olho do aluno para confirmar que ele realmente aprendeu a ver” (FLORES, 2007a, p. 27).

Com essas constatações sobre o olhar, ela sugere a necessidade de centrarmos em como olhamos e como se criaram modos de representar aquilo que olhamos. Para tanto, sua pesquisa investiga como a perspectiva capturou e normatizou nosso olhar, haja vista que a reflexão sobre o modo de representar as figuras no espaço possibilita pensar sobre os problemas de visualização no ensino da geometria.

Vale lembrar que, ainda hoje, o modo de desenhar sob o qual são feitas as representações de figuras geométricas no ensino de matemática se dá mediante as técnicas da perspectiva, principalmente a cavaleira e a linear, exigindo do

olhar o domínio do saber que envolve a representação (FLORES, 2007a, p. 166).

A abordagem de Flores (2007a) é bastante profícua no que se refere a sua problemática, estabelecendo referências com o saber e investigando a elaboração deste saber no que diz respeito à técnica que produziu um modo de olhar, de conceber e de representar o espaço. Para isto, a referida autora buscou na história como e onde emergiu nossa maneira de representar em perspectiva as figuras no espaço, não apenas no ensino de geometria, mas no modo de representação iconográfica.

Penso que saber os processos pelos quais nossos modos de olhar e de representar figuras foram construídos pode ajudar a entender as dificuldades e os erros de interpretação visual dos alunos. Isso não quer dizer que se encontram aí respostas de por que “os alunos não vêem no espaço”. Nem mesmo a justificativa das dificuldades de visualização como sendo oriundas do processo de constituição do olhar e do representar em perspectiva. Tentar explicar as dificuldades da visualização no ensino é inserir-se na objetivação da aprendizagem. O que quero dizer, enfim, diz respeito a compreender a construção de um olhar instaurado há séculos e que se faz, ainda hoje, como o efeito e o suporte para olhar e representar figuras (FLORES, 2007a, p. 176).

Com os estudos de Flores (2007a), compreendemos e refletimos que a técnica da perspectiva em sua forma de problematizações com a cultura na qual está inserida se faz importante para o campo da matemática e pode auxiliar no entendimento das dificuldades encontradas pelos alunos em relação à visualização das figuras, desnaturalizando verdades estabelecidas.

Podemos dizer que nossa pesquisa se aproxima muito da pesquisa realizada por Flores (2007a), no que se refere ao embasamento teórico sobre visualização matemática e formação de professores. Outra característica comum é que ambas as pesquisas não estão relacionadas ao funcionamento cognitivo do indivíduo. Flores (2007a) estabelece referências com o saber estudando a origem deste, no que diz respeito à técnica e ao modo de se conceber e de se representar o espaço. Mas nosso objetivo difere quando dirigimos nosso foco diretamente aos professores na busca da construção de um conhecimento geométrico, mais especificamente o da técnica da perspectiva que propõem uma abordagem pedagógica embasada teoricamente nas práticas visuais no âmbito da história da perspectiva e no momento atual, isto é, em seu campo de investigação, a sua própria sala de aula (sendo esta pesquisa de forma teórica, sem aplicações).

Frente a nosso interesse pela geometria, visualização e formação de professores buscamos referência também em Leivas (2009)<sup>21</sup>, que complementa nossas informações, afirmando a importância de se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização.

---

<sup>21</sup> LEIVAS, José Carlos Pinto. (Doutorado 2009/UFPR). TESE: **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009.

Leivas (2009) investigou as ementas de oito cursos de licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul com o objetivo de verificar como está sendo enfocado o ensino de geometria nesses cursos. Conforme o quadro-síntese por ele apresentado, apenas em quatro dos cursos analisados há indícios de que a intuição, a visualização e a imaginação sejam elementos norteadores desse ensino. Este autor entende que os conhecimentos matemáticos pensados e preparados para os futuros professores na licenciatura não são mediados de forma que o aluno compreenda sua relação com os conteúdos a ensinar. Nas palavras do autor:

No caso da Geometria, as questões são muito mais profundas em suas raízes, pois o professor, quando tem duas ou três disciplinas envolvendo esse conteúdo em sua formação inicial, além de tê-lo de forma dissociada daquela necessária ao ensino básico, não domina metodologias adequadas ao seu ensino. Pesquisas apontam um ensino dessa disciplina na escola básica que se limita ao uso de fórmulas, não privilegiando outras dimensões consideradas essenciais para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, apoiado, por exemplo, no tripé imaginação, intuição e visualização (LEIVAS, 2009, p. 18).

Se os futuros professores de matemática não desenvolvem essas habilidades, torna-se difícil, para eles, planejar atividades para a Educação Básica que se diferenciem do simples reconhecimento de figuras geométricas ou da apresentação de determinadas propriedades. Especialmente se os professores cometem erros em questões que

envolvem visualização, é de se supor que apresentem, também, estes problemas em suas práticas de ensino.

Para Leivas (2009), com a ajuda da imaginação visual podemos esclarecer alguns fatos e problemas da geometria e, além disso, é possível, em muitos casos representar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração. Neste sentido, o mesmo aponta conceitos de termos como:

**Imaginação:** forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito.

**Intuição:** um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto.

**Visualização:** como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos e geométricos (LEIVAS, 2009, p. 20-22)

O entendimento e a utilização desses conceitos favorecem o desenvolvimento de uma reflexão metodológica que também se constitui num desafio aos futuros professores devido aos problemas e às dificuldades no ensino e na aprendizagem da geometria.

Esse autor deixa clara em seus estudos a urgência na renovação ou inovação dos currículos da formação de professores de matemática,



que vai muito além da criação de duas ou três disciplinas ao longo do currículo. Propõe a criação de um componente curricular que possibilite a aquisição da cultura geométrica, isto é, a formação de disciplinas específicas de geometria e de disciplinas que consistiram em um método pedagógico, chamado por ele geometrização. Leivas (2009) conclui reforçando a idéia de que o currículo de um curso de licenciatura em Matemática – quando articulado com as habilidades da imaginação, da intuição e da visualização – propicia aos alunos novas maneiras de pensar e de fazer a sua própria matemática.

A diferença entre a pesquisa de Leivas (2009) e a nossa pesquisa é que ele reforça a ideia referente às alterações no currículo de um curso de licenciatura em Matemática, afirmando que o auxílio visual geométrico pode ser o “sujeito” a percorrer, de forma interdisciplinar, a geometria como componente curricular; e considera que a intuição, a imaginação e a visualização sejam elementos norteadores desse ensino, permitindo a aquisição de cultura geométrica. Já nossa pesquisa tem como propósito trabalhar a técnica da perspectiva dentro da possibilidade de articular a triangulação entre estudos culturais, visualidade e visualização matemática, de modo a possibilitar a construção do entendimento desse conhecimento aos professores, haja vista a complexidade desta atividade.

Considerando os conhecimentos, as interpretações, as reflexões e as discussões expostas nos temas investigados nas pesquisas mencionadas anteriormente, que detalham ou não um percurso metodológico, não podemos deixar de apresentar a pesquisa realizada por Meneguzzi (2009)<sup>22</sup>. Seus estudos não estão ligados aos modos de como o aluno aprende, ou seja, ao seu funcionamento cognitivo, e sim a novas formas de problematizar o ensino aliadas à história da matemática, com o intento de destacar as contribuições da história da perspectiva para a Educação Matemática, conduzindo-as para a sala de aula.

O principal objetivo da autora foi verificar como a história das máquinas e o ensino de geometria poderiam se articular. Originou-se assim seu problema de pesquisa, vale dizer que ele não está relacionado apenas à atividade do olhar, mas também ao emprego e apreensão de saberes. “Como as máquinas de Dürer – os perspectógrafos – podem ser trazidos ao ensino atual, a fim de se trabalhar conceitos geométricos espaciais, aliando a história da perspectiva e os conhecimentos empregados em torno da técnica de desenho?” (MENEGUZZI, 2009, p. 41).

---

<sup>22</sup> MENEGUZZI, Thatieli. (Mestrado 2009/UFSC). DISSERTAÇÃO: **Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática: história, geometria e visualização**. 2009.

Para atingir o objetivo, Meneguzzi (2009) desenvolveu questões que poderiam trabalhar o ensino de conceitos geométricos espaciais, a história da perspectiva e os perspectógrafos. As questões foram desenvolvidas levando em conta o referido tema, sua história e a sua problemática.

Quer dizer, buscamos a forma que Dürer desenvolveu matematicamente a problemática de representação do espaço por meio dos perspectógrafos. As questões criadas a partir desta história são, então, resolvidas por meio do perspectógrafo didático, desenvolvendo-as e simulando-as no âmbito didático, ou seja, na sala de aula. [...] Assim todas as questões propostas foram pensadas para a utilização do perspectógrafo didático levando-se em conta as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático. Estas formas de representação são tratadas com as técnicas da perspectiva, em específico a perspectiva Cavaleira e a perspectiva Central (MENEGUZZI, 2009, p. 79-80).

A partir de suas considerações, a autora mostrou que o desenho em perspectiva pode ser facilitado. Aliás, neste contexto, a representação em perspectiva se torna um lugar conhecido, dominado pelo aluno, contribuindo tanto como aspecto a ser olhado como sabido. A autora ainda conclui que:

A partir das atividades que foram desenvolvidas nesta pesquisa, podemos dizer que os perspectógrafos podem ser utilizados em sala de aula, logo o *perspectógrafo didático*. Supõe-se que quando o aluno manuseia a máquina ele terá a oportunidade de entrar em contato com a técnica do desenho em perspectiva, com a história desta perspectiva, bem como, com as complexidades implicadas pelo ato de olhar. Portanto, o aparelho

perspectivo coloca o aluno frente à possibilidade de representar corretamente um objeto matemático, mesmo não conhecendo os conceitos matemáticos envolvidos (MENEGUZZI, 2009, p. 116)

Por meio das atividades que ligaram a história dos perspectógrafos à teoria da perspectiva (desenho espacial), aos conceitos matemáticos, aos conceitos geométricos e à complexidade do olhar em ambiente de ensino atual, mobilizou-se no âmbito da Educação Matemática uma reflexão sobre a criação e o desenvolvimento de ideias matemáticas e de formas de visualização, além da riqueza cultural, acrescentando muito aos processos de ensino e de aprendizagem.

A pesquisa de Meneguzzi (2009) e a nossa pesquisa se associam à técnica da perspectiva e ao fato de não levar em consideração o funcionamento cognitivo dos sujeitos, em vez da motivação para a introdução de um novo conceito, teoria, método ou prova e aprofundar o estudo de determinados conteúdos.

Em contrapartida, nossos trabalhos se diferem no que se apresenta: Meneguzzi (2009) utilizou um perspectógrafo adaptado e sugeriu o desenvolvimento e simulações de questões didáticas criadas a partir da história, levando em consideração as diferentes formas de representar um mesmo objeto. E nossa proposta é trabalhar com problemas históricos, criar e recriar situações problemas, trabalhando questões de historicidade e visualidade, para propiciar uma compreensão

do visual como construção cultural e histórica em relação à técnica da perspectiva.

Independente da abordagem empregada, ou de quaisquer que sejam os conceitos que se adotem a respeito do termo visualização, acreditamos haver uma concordância na formação, no conhecimento e no método desempenhado pelo professor, conforme as pesquisas aqui citadas e as suas abordagens.

Outro aspecto importante em relação ao estudo da visualização vem na sequência deste tópico, o qual diz respeito à importância da geometria com foco na perspectiva.

## 2.5 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA COM FOCO NA PERSPECTIVA

A importância dos números e das operações é evidente pelo uso que lhes dão em nosso cotidiano. Porém não é suficiente ensinar os conteúdos que tenham uso evidente. A Matemática é um bem cultural. A cultura, entre outras coisas tem produzido Matemática, e a Geometria é parte desse evidente bem cultural.<sup>23</sup>

Iniciamos este tópico de estudo mencionando a importância do ensino e da aprendizagem da geometria, a qual é descrita como um corpo de conhecimentos fundamental para a compreensão do mundo e

---

<sup>23</sup> PORRAS, Marta. **Revista Novidades Educativas**. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico. Buenos Aires, n. 88, p. 24, 1998.

participação ativa do homem na sociedade. A importância de seu ensino vem sendo assunto de diversas pesquisas já há algum tempo, por exemplo: Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), Maioli (2002), Facco (2003), Flores (2003), Buratto e Flores (2004), Almouloud (2004), Buratto, Flores e Moretti (2005), Buratto (2006), entre outros. Isto se deve porque a mesma está presente em nosso dia a dia, como nas embalagens dos produtos, na arquitetura das casas e edifícios, na planta de terrenos, nos campos de futebol e quadras de esportes, e até na grafia das letras. Em inúmeras ocasiões, precisamos observar o espaço tridimensional como, por exemplo, na localização e na trajetória de objetos e na melhor ocupação de espaços. Temos que:

O estudo da geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual, os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas (BRASIL, 1998, p. 51).

Outro papel importante é o fato de a geometria estar relacionada à formação humana geral, ou seja, a de promover valores culturais e

estéticos importantes para uma melhor compreensão e apreciação das obras do homem (construções e trabalhos artísticos) ou da natureza.

Assim,

[...] é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 51).

Então, quando consideramos a geometria como uma linguagem para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos, vemos a importância de abordá-la na escola. Não há modelo ideal para ensinar geometria, depende de cada realidade concreta (aluno, professor, escola etc.). A compreensão do conteúdo a ser ensinado acontece pela utilização contínua e contextualizada dos conhecimentos, de modo que a situação de aprendizagem promova o manuseio de conhecimentos no contexto das práticas comuns do desenvolvimento intelectual.

Sabemos que a realidade se mostra diferente, em se tratando do ensino de geometria, especificamente. No Brasil, o ensino da geometria foi consideravelmente, reduzido ao longo de todo o Ensino Fundamental e Médio, sendo este problema apontado nas pesquisas de Pavanello (1993), Perez (1995), Lorenzato (1995), Gálvez (1996), Pirola (2000), Almouloud e Mello (2000), Passos (2000, 2005), Pereira (2001) e

Araújo (2004), as quais destacam que: “a geometria é um ramo importante da matemática, tanto como objeto de estudo, quanto como instrumento para outras áreas. Várias pesquisas apontam a geometria como um dos problemas de ensino e aprendizagem” (ALMOULOUD, 2003, p. 126).

Neste caso, acompanhamos os pesquisadores, aqui já citados, que afirmam que sem estudar geometria os alunos acabam por não desenvolver bem o pensamento geométrico e o raciocínio visual e, sem essa habilidade, terão dificuldades para resolver situações de vida que forem geometrizadas. Também não poderão se utilizar da geometria como fator condicionante da compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento, conforme registra Passos (2005, p. 18), “o desenvolvimento de conceitos geométricos é fundamental para o crescimento da capacidade de aprendizagem, que representa um avanço no desenvolvimento conceitual”.

Nesse sentido, a geometria assume um importante papel para o desenvolvimento de habilidades e competências tais como a percepção espacial e a resolução de problemas, uma vez que oferece às pessoas oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair.

De acordo com Gálvez (1996), no Ensino Fundamental, não se ensina aos alunos geometria para contribuir no desenvolvimento do



domínio de suas relações com o espaço, mas para reduzir a aprendizagem da geometria ao conhecimento de uma coleção de objetos definidos como fazendo parte de um saber cultural.

Este saber cultural se opõe ao saber funcional. O primeiro, na ausência do segundo, só serve para mostrar a outros que a pessoa sabe, suprimindo termos, definições e até demonstrações acumuladas na memória, frente à demanda explícita desse saber (que também pode ser um “saber fazer”, não só um “saber dizer”). O saber funcional, em troca, é aquele ao qual se recorre com finalidade de resolver um problema; são os esquemas ou modelos que utilizamos para enfrentar uma situação e tratar de nos adaptar a ela de um ponto de vista cognitivo (procura de explicações, tentativa de previsão de resultados, análise de fatores que intervêm, esforços de controle do curso dos processos reais) (GÁLVEZ, 1996, p. 249-250).

Conforme manifestado, os problemas de ensino e aprendizagem de geometria existem e estão aí colocados. Precisamos, então, buscar uma nova visão que favoreça a análise e a exploração de formas e de estruturas da geometria, e que também venha a favorecer a compreensão de outras áreas do conhecimento humano.

Em síntese, é preciso buscar uma condução, ou um processo, ou um método de ensino e de aprendizagem de uma geometria que permita ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, que lhe possibilite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive. Para tanto, é necessário criar condições nas quais ele passe da geometria pragmática (experimentação, manipulação e

descoberta de propriedades), a uma geometria conceitual, envolvendo construções geométricas, conjecturas, provas e demonstrações. Por exemplo, o raciocínio espacial, as simetrias e a visualização espacial podem ser facilitadores a partir da utilização de recursos computacionais e de outros recursos didáticos.

Neste contexto, podemos encontrar auxílio nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) que fornecem indicativos para qualificar o ensino da geometria.

1. Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas.
2. Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação.
3. Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas.
4. Usar a visualização e a modelação geométrica para resolver problemas. (PRINCÍPIOS E NORMAS, 2008, p. 112).

Ao indicar essas habilidades para a escola básica (Ensino Fundamental e Médio), no nosso entender, este documento de referência precisa ser do conhecimento dos futuros professores que atuarão nesse nível e por isso o professor da Licenciatura em Matemática deve conhecer os princípios que norteiam a Educação Matemática no cenário mundial. Alguns professores de matemática e pesquisadores têm feito avanços importantes e significativos, tornando os conteúdos matemáticos mais próximos da compreensão dos alunos,

disponibilizando, portanto, a aprendizagem de forma mais apreciável. Outros, certamente, acabaram mudando suas práticas, ancorados por novas ideologias educacionais, construindo uma nova relação com a matemática, com o seu ensino e a sua aprendizagem.

Diante de todo o exposto, ainda nos encontramos frente a um problema didático-pedagógico do ensino e da aprendizagem da geometria. Ou seja, desafios maiores se encontram quando relacionamos este ensino e esta aprendizagem ao ensino da técnica da perspectiva, cujo método é frequentemente desconhecido dos alunos e, ainda, muitas vezes desconhecido dos professores de matemática, aos quais cabe ensinar geometria. Tais desafios podem ser observados em pesquisas como a de Parzysz (1991), Cavalca (1998), Passos (2000) e Kaleff (2001), entre outros, que fazem alusão, expõem, discutem, questionam, argumentam e buscam métodos para obter a superação das dificuldades ou sanar a falta de conhecimentos dos alunos e dos professores.

A fim de re(considerar) a geometria no ensino, não pela via direta do espaço de sala de aula e da aprendizagem dos alunos e sim pela via do professor, é que este trabalho vem se ancorar. Para tanto, ousamos entrar em novos caminhos para o ensino da geometria com o objetivo de criar uma nova narrativa que permita trabalhar a historicidade e a visualidade e proporcione uma compreensão do visual como construção cultural e histórica em relação à técnica da perspectiva como

possibilidade para assegurar sua relação com o conhecimento matemático.

Por fim, cabe dizer, nesta proposição não é, necessariamente, o ensino da geometria que entra em jogo. Isto quer dizer não obrigatoriamente o ensino de conceitos e abstrações geométricas. Mas o que envolve é a discussão crítica pela história de condições de possibilidades e de práticas que levam determinados conhecimentos a se estabelecerem como saberes propriamente institucionalizados e escolarizados. Poderíamos dizer que, por meio da técnica da perspectiva, por exemplo, não só o tratamento com o conceito de retas paralelas, ângulos, plano, linha horizontal etc. mas também ideias matemáticas se estabeleceram em conceitos e enunciados, estabelecendo-se como verdades para olhar e desenhar, como por exemplo o infinito, a proporcionalidade, o espaço etc.

Para darmos conta de uma narrativa sobre visualidade e historicidade, vamos nos debruçar sobre a técnica da perspectiva. Isto para funcionar, como diz Flores (2007a), apenas como um diagrama sugestivo, que ajude a pensar sobre o olhar e o representar. Neste trabalho em particular, para ajudar a construir novas formas de pensar sobre o ensino de geometria e da matemática. Neste caso, sobre visualidade e historicidade das práticas de olhar e de representar em que

a matemática é tanto o suporte quanto o efeito para produzir olhares e imagens (Flores, 2007a).

### **CAPÍTULO III – OS USOS DA PERSPECTIVA: PONTO DE PARTIDA PARA UMA OUTRA NARRATIVA**

Neste capítulo passaremos a discutir sobre a perspectiva, seu surgimento como técnica de desenho e como ela foi e é empregada em alguns domínios do conhecimento tais como a arte e a arquitetura. Além disso, buscaremos compreender alguns de seus princípios e conceitos, que são tratados como objetos de ensino para a geometria. O objetivo deste capítulo é compreender os usos e as elaborações conceituais da perspectiva, já que tal saber faz parte deste trabalho como sugestão para provocar uma nova narrativa para o campo da pesquisa em visualização e Educação Matemática.

#### **3.1 SOBRE O SURGIMENTO DE UMA TÉCNICA: A PERSPECTIVA**

Conta-nos a história, conforme Flores (2007a), que na Antiguidade greco-romana e na Idade Média o “termo perspectiva tinha outro uso, quer dizer, um uso mais próximo da palavra grega *opiké*, significando *arte da visão* ou *ciência da visão*” (p. 54).

Com o acontecer da história, um novo homem emergiu. Tratava-se então de um homem que se voltava para dentro de si, portador de razão e agindo sobre o mundo: “[...] mas é evidente que certa mudança ocorreu no final da Idade Média,

mudança que conduziu à promoção de noções de proporção, de medida e de ordem matemática” (FLORES, 2007a, p. 83), o espaço foi mensurado. Então, para darmos sentido ao termo perspectiva temos que concebê-lo junto ao Renascimento, quando a técnica da perspectiva permitiu a representação de maneira realista, demonstrando o surgimento de uma nova prática de um modo de olhar, pensar e representar o espaço.

Surgiram naquele momento histórico técnicas para representar no plano o objeto que está no espaço. Para buscar estas soluções aos problemas de transpor para o plano um espaço tridimensional, experimentaram-se múltiplos processos empíricos, até a invenção, nos séculos XIV-XV, na Itália, das leis da perspectiva geométrica linear, chamada de clássica ou central. De acordo com Chuhurra (1971), a perspectiva central nasceu do princípio de que a realidade é imutável e que, assim sendo, deveria ter uma ordem pré-estabelecida.

Entre 1450 e 1480, a perspectiva tornou-se científica. Logo foi codificada e caracterizada com regras de construção, fundamentando alguns dados fixos e geométricos, como o ponto de fuga ao centro do quadro onde as linhas perpendiculares se convergem. O conjunto de elementos e intervalos diminuem proporcionalmente à medida que convergem, dando a ilusão de que o quadro tem profundidade. Esta solução racional, construída, elaborada, explorada, visualizada,

apreciada e apresentada serviu à estética clássica, revelando-se uma das mais satisfatórias para o espírito moderno do novo homem que surgia.

Podemos afirmar que a perspectiva central é muito mais elaborada ao representar o espaço, pois foi criada, investigada e produzida após longa exploração e observação. Surgiu numa época quando a ideologia era de ser o homem o centro do universo, apesar de que o principal objetivo da perspectiva central tenha sido resolver o espaço pictórico. “Daí a perspectiva como possibilidade técnica de se representar no papel aquilo que é visto, conhecido, no real” (FLORES, 2007a, p. 139).

O aperfeiçoamento da perspectiva central teve a contribuição de arquitetos como Brunelleschi<sup>24</sup> (1377-1446) e Alberti<sup>25</sup> (1404-1472); e do pintor Dürer<sup>26</sup> (1471-1528).

---

<sup>24</sup> Filippo Brunelleschi (1377-1446): nascido em Florença, começou a vida como ourives e posteriormente foi arquiteto e escultor, sendo pioneiro desta arte na Renascença. Na primeira fase de sua carreira de arquiteto, Brunelleschi redescobriu os princípios da perspectiva linear, que, conhecidos por gregos e romanos, ficaram esquecidos durante toda a Idade Média. Restabeleceu na prática o conceito de ponto de fuga e a relação entre a distância e a redução no tamanho dos objetos. Seguindo os princípios ópticos e geométricos enunciados por Brunelleschi, os artistas da época puderam reproduzir objetos tridimensionais no plano com surpreendente aparência de verdadeiro.

<sup>25</sup> Leon Batista Alberti (1404-1472): nascido em Gênova, foi um arquiteto e teórico de arte, um humanista italiano ao estilo do ideal renascentista e filósofo da arquitetura e do urbanismo, além de pintor, músico e escultor. Escreveu o tratado “Da Pintura” (1435) dirigido aos artistas para a aprendizagem, entre outras, das técnicas de representação do espaço em perspectiva.

<sup>26</sup> Albrecht Dürer (1471 – 1528): pintor alemão, contemporâneo de Leon Batista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e do amigo



A perspectiva, portanto, se fez técnica para a representação de uma diversidade de coisas e é conceituada no dicionário Houaiss (2009) como:

Substantivo feminino.

Rubrica: gravura, pintura – técnica de representação tridimensional que possibilita a ilusão de espessura e profundidade das figuras.

Derivação: por metonímia – a obra delineada segundo as regras dessa técnica.

Derivação: por extensão de sentido – vista ao longe, até onde os olhos alcançam; prospectiva; configuração externa; forma ou aparência sob a qual algo se apresenta (HOUAISS, 2009, p. 1561).

Enfim, com o domínio das diferentes técnicas da perspectiva, enriqueceram-se as ilustrações que representam figuras não planas em lugares planos. Temos encontrado, também, aplicações de perspectiva em diferentes áreas, como exporemos a seguir.

### 3.2 A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA ARQUITETURA

Na arquitetura a perspectiva corresponde à parte do desenho que ensina a representar, em um plano, os objetos tais como eles se apresentam à vista. Isto é, se representa os corpos, os objetos e a cena em três dimensões. Significa que, em superfícies planas, de duas dimensões, o aspecto da terceira dimensão, da profundidade, apresenta-se à nossa vista como formação de uma vista em perspectiva.

---

matemático deste último, Luca Pacioli, era considerado o melhor matemático dentre todos os artistas renascentistas.

A perspectiva pode ser feita na área de arquitetura através de três processos, segundo Fábrega, (2001):


1. a perspectiva *linear* ou *rigorosa*, também chamada *cônica* ou *artística*: baseia-se nas projeções cônicas, nas quais todas as linhas de projeção são concorrentes a um ponto, formando um cone. Esse ponto corresponde ao olho do observador. Essa perspectiva linear é a mais usada em desenho arquitetônico, como na representação de um edifício ou de partes da edificação.
2. a perspectiva *cavaleira*, também chamada de *cilíndrica*: é um caso de perspectiva cônica, em que o observador se encontra no infinito, numa certa direção. Baseia-se nas projeções cilíndricas oblíquas, e é usada em detalhes arquitetônicos e técnicos, como objetos isolados de menores dimensões, e na representação de peças e elementos de construção.
3. a perspectiva *axonométrica*: é uma projeção ortogonal feita sobre um plano oblíquo em relação às três dimensões do corpo a ser representado. Amplamente usada no campo da engenharia devido a simplicidade de construção. A aplicação mais usual da axonometria é na perspectiva de instalações hidráulicas e nas de peças, em que o problema de medidas é fundamental. (p. 12-13)

Em arquitetura, as perspectivas linear, cavaleira ou axonométrica, por meio de seus inúmeros processos, são construídas, de modo geral, segundo a linha do horizonte (LH), uma linha imaginária que tanto pode estar abaixo, acima ou no mesmo nível dos olhos do observador. Por fim, “é possível notar uma correspondência entre os tipos de

perspectivas da arquitetura e da arte, a perspectiva linear corresponde à central e a perspectiva cavaleira à paralela” (FÁBREGA, 2001, p. 13).

Como nossos estudos são focados nas técnicas da perspectiva, voltamos nosso olhar para alguns elementos da arquitetura renascentista, explicando que a mesma rompeu com a tradição gótica medieval, elegendo como modelo a arquitetura clássica. A título complementar, apresentamos o quadro de número 3, com a figura número 7.

### Quadro 3: Alguns elementos da arquitetura renascentista

<b>Figura 7: Igreja da Assunção em Gênova</b>	
<b>Alguns elementos da arquitetura renascentista</b>	
<b>Planta centrada</b>	
<b>A horizontalidade das linhas dos edifícios</b>	
<b>Uso de cúpulas</b>	
<b>Uso do arco de volta perfeita</b>	
<b>Aplicação das ordens arquitetônicas e dos frontões</b>	
<b>Equilíbrio e simetria das formas e volumes</b>	

Fonte: Pesquisa da Autora (2012)

Outra informação destacável com referência ao tema é exposta por Abreu e Lima (2004), que entendem os princípios arquitetônicos do Renascimento como uma visão estética social, baseada em conceitos

matemáticos e geométricos tendo como objetivo demonstrar a racionalidade artística.

Tendo em vista o exposto, podemos concluir que as transformações econômicas, políticas e sociais na Itália do século XV incluíram e readaptaram conceitos da cultura greco-romana. Os desenvolvimentos científicos produzidos culminaram num movimento arquitetônico baseado em princípios matemáticos e geométricos, intitulado os princípios arquitetônicos do Renascimento. Os ideais estéticos destes princípios estavam materializados nos elementos arquitetônicos: colunas e capitéis, por exemplo, e na articulação espacial destes, através do ritmo, proporção e simetria.

### 3.3 A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA ARTE

A arte renascentista é considerada por muitos historiadores da arte como uma arte de pesquisa, de invenções, inovações e aperfeiçoamentos técnicos. É uma arte que busca o aperfeiçoamento e o status de ciência. As novas invenções da física, matemática (perspectiva de Brunelleschi), da geometria, da anatomia (estudos de Michelangelo<sup>27</sup>), da engenharia (estudos de Leonardo da Vinci<sup>28</sup>) e da

---

<sup>27</sup> Michelangelo di Lodovico Buonarroti Simoni (1475-1564): nascido em Caprese, foi pintor, escultor, poeta e arquiteto, considerado um dos maiores criadores da história da arte do ocidente.

<sup>28</sup> Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452-1519): nascido em Anchiano, foi polímata, uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento, que se

filosofia, andaram ao lado das criações artísticas e arquitetônicas. Como por exemplo:

- a) invenção perspectiva intuitiva por Giotto<sup>29</sup> e Duccio<sup>30</sup>, sem proporção real e dava a todos os objetos igual profundidade;
- b) criação da perspectiva matemática por Brunelleschi (técnica do “olhar fixo”), tipo de arte que impressionava os sentidos e convidava ao desfrute visual;
- c) aperfeiçoamento da perspectiva por Leon B. Alberti, que introduziu a perspectiva central ou linear, que já se utilizava dos pontos de fuga.

Podemos afirmar, conforme Parramón (1993), que a perspectiva na arte permite ir além da concepção do real. Além de propor um mundo organizado, um espaço medido e um corpo perfeito, ela, a perspectiva, também pode sugerir um mundo irreal, de ilusão, que permite a

---

destacou como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico. É ainda conhecido como o precursor da aviação e da balística. Leonardo frequentemente foi descrito como o arquétipo do homem do Renascimento, alguém cuja curiosidade insaciável era igualada apenas por sua capacidade de invenção. É considerado um dos maiores pintores de todos os tempos e como possivelmente a pessoa dotada de talentos mais diversos a ter vivido.

<sup>29</sup> Giotto di Bondone (1266-1337): nascido em Colle Vespignano, foi pintor e arquiteto. Discípulo de Cinni di Pepo, mais conhecido na história da arte pela introdução da perspectiva na pintura, durante o Renascimento.

<sup>30</sup> Duccio di Buoninsegna (1255-1319): nascido em Siena, foi a figura mais importante da chamada Escola Sienesa. Considera-se que teve grande influência na formação do estilo chamado *Gótico Internacional*. Seu grande rival na época foi Giotto, mestre da Escola Florentina.

expressão da ansiedade, inquietude, tormenta o simples jogo do olhar determinado propositadamente pelo artista. É um universo muito sedutor.

Segundo Parramón (1993), a perspectiva é definida como um todo representativo da imagem que é análoga ao real na concepção das formas. Ela permite mergulhar nos caminhos do traçado e da visualização, permite escapar da composição do imaginário conforme convenções do processo, localizando a forma na dimensão da realidade existente.

Na arte o desenvolvimento da capacidade visual das formas, a noção de proporção e o desenvolvimento do traço contribuem para a expressão, a invenção e o surgimento de imagens. Além disso, a noção de espaço é construída pelo raciocínio da proporcionalidade, no estudo das relações de dimensão a ser construídas e na apresentação da forma estética.

#### 3.4 A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA GEOMETRIA PROJETIVA

O processo criativo deve produzir uma obra que combine desenho, harmonia e beleza. Estas qualidades também estão presentes na

criação matemática<sup>31</sup>. Esses dizeres nos levam a considerar que a técnica da perspectiva manteve influência no desenvolvimento da geometria projetiva.

De fato, encontramos referências a respeito da abordagem, em Boyer (1974), Taton (1986), Bessot e Le Goff (1993), Santos (2001), Flores (2007a) e outros, sendo que, em meados do século XIV e XV (no período da história do Renascimento), a técnica da perspectiva foi profundamente estudada em face das dificuldades encontradas pelos artistas, que pretendiam dar a seus quadros, uma aparência naturalista, tal qual a visão humana.

Levando em conta o referenciado (geometria, matemática e perspectiva), vale observar as informações de Flores (2007a, p. 164) que esclarece fatos sobre este momento histórico, relatando que em 1636, com a publicação do opúsculo intitulado “Exemplos de uma maneira universal do S.G.D.L, tocando a prática da perspectiva...”<sup>32</sup>, de Girard

---

<sup>31</sup> KLINE, M. (1953). *Mathematics in Western Cultura*. Oxford: Oxford University Press. New York, p. 523-525, 1977.

<sup>32</sup> Figura 8: Gravura do Opúsculo *Exemple de l'une des manières universelles du S:G:D:L: touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point; de distance; ny d'autre nature qui soit hors du champ de l'ouvrage* (Exemplos de uma da maneira universal de S.G.D.L tocando a prática da perspectiva sem o uso de qualquer terceiro ponto, da distância nem de outra natureza, que esteja fora do escopo desse trabalho – tradução nossa). A abreviação S.G.D.L, significa que o autor da obra era o Senhor Gerard Desargues de Lion.

Desargues<sup>33</sup>, o mesmo, formaliza um método que se unifica as várias formas estabelecidas de trabalhar e/ou elaborar a construção em perspectiva na época (Figura 8).

Em suma, podemos dizer que a contribuição fundamental de Desargues consiste no poder unificador de seus métodos inovadores. Sua ideia central é identificar quais são as propriedades que se conservam por projeção e, a partir daí, estudar a família das cônicas, que são todas projeções da circunferência.

Segundo Boyer (1974) vale lembrar que a renovação do interesse pelos métodos geométricos puros, sem a intervenção direta da álgebra deveu-se a Gaspard Monge<sup>34</sup>. Com o desenvolvimento da Geometria Descritiva, o mesmo resolvia definitivamente e de modo rigoroso, os problemas gráficos de representação de objetos tridimensionais no plano. Monge investigava, inspirando-se nos trabalhos de Euler<sup>35</sup>, as linhas de curvatura, elaborando uma teoria geral da curvatura, que aplicou em 1795 às quádricas. Conseguiu, simultaneamente, resolver

---

<sup>33</sup> Girard Desargues (1591-1661): engenheiro, arquiteto e geômetra francês.

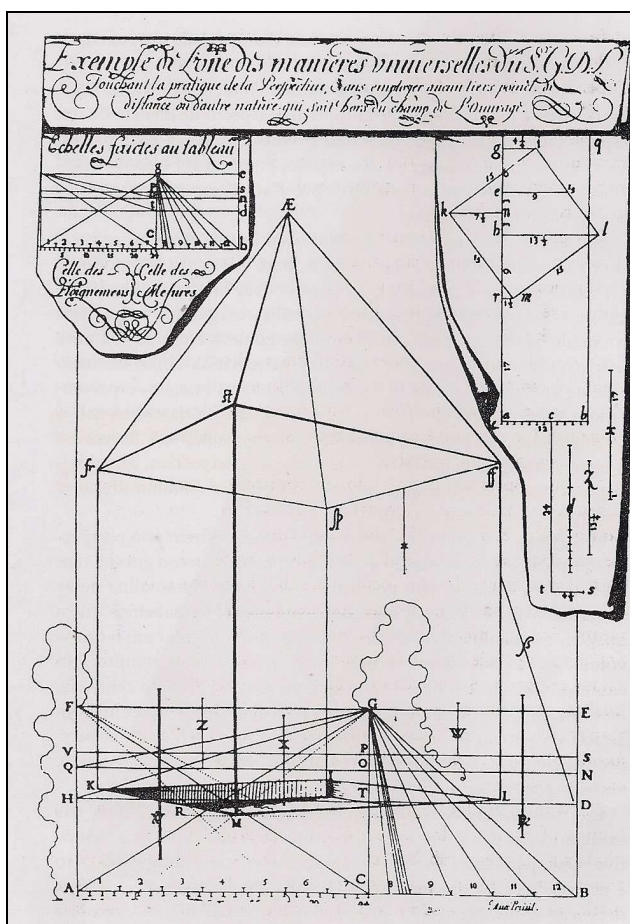
<sup>34</sup> Gaspard Monge (1746 - 1818): nascido em Beaune, foi matemático, geômetra, criador da geometria descritiva.

<sup>35</sup> Leonhard Paul Euler (1707 - 1783): foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler fez importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos. Ele também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para as análises matemáticas, como a noção de uma função matemática.



diversas equações diferenciais parciais por meio de sua teoria das superfícies. Coube ao mesmo o mérito de traduzir muitas questões relacionadas às equações diferenciais, colocando-as em linguagem geométrica.

**Figura 8: Gravura do Opúsculo intitulado *Exemples de uma maneira universal do S.G.D.L., tocando a prática da perspectiva...* 1636 de Girard Desargues**



Fonte: (TATON, 1986, p. 129-39).

Dentre os alunos de Monge mencionamos Jean-Victor Poncelet<sup>36</sup>, o qual em 1822 publicou o tratado das propriedades projetivas das figuras, sendo que, “o surgimento desta obra marca a criação efetiva da geometria projetiva, que é considerada como o estudo das propriedades geométricas que se conservam na projeção central” (FLORES, 2007a, p. 165).

Em síntese, segundo Boyer (1974) pode-se afirmar que o trabalho de Poncelet baseou-se sobre a noção de figuras homólogas (uma pode ser obtida da outra por uma sequência de projeções e seções), no princípio de continuidade (se uma figura é obtida de outra por “mudanças contínuas” qualquer propriedade da primeira vale para a segunda) e na ideia da reciprocidade polar em relação a uma cônica (base do Princípio da Dualidade).

Vale lembrar que destacamos apenas algumas das contribuições recebidas dos geômetras e dos matemáticos para podermos ter noção de quando a geometria tomou características e aspectos de ciência de um espaço infinito, isótropo, contínuo e homogêneo em suas partes; e, para sermos mais pontuais e exatos, trazemos Flores (2010, p. 166) a qual afirma que foi a partir de Desargues.

---

<sup>36</sup> Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867) foi um matemático/geômetra e engenheiro francês, aluno de Monge.

A descoberta da técnica da perspectiva no Renascimento abriu caminho para o desenvolvimento do pensamento moderno, logo o conhecimento matemático foi de grande relevância neste período “se as questões puramente geométricas se revestiram de tanta importância, foi em função de preocupações extremamente variadas, que iam da estética e da ótica à artilharia e teologia” (THUILLIER, 1994, p.61).

### 3.5 A PERSPECTIVA DO PONTO DE VISTA DO DESENHO GEOMÉTRICO

A técnica da perspectiva surgiu dos estudos matemáticos e trouxe uma nova maneira de representar a realidade, desta vez com maior precisão e de surpreendente nível qualitativo. A teoria da perspectiva, matematicamente criada, estabeleceu regras e princípios normativos que fizeram expandir, no mundo das artes, o controle do espaço. O domínio permitiu ultrapassar a compreensão do espaço real para um espaço imaginário, que extrapola o entendimento da nossa visão. Contudo, esta capacidade de representação só é alcançada quando dominamos os conceitos e os métodos de construção. Como um dos grandes colaboradores nesse processo, temos o arquiteto Filippo Brunelleschi, que desenvolveu uma demonstração da perspectiva por meio de um dispositivo óptico, representando, em escala, os objetos e mantendo a proporção entre seu tamanho real. Pouco tempo depois, quase todos os artistas florentinos utilizaram-se da perspectiva geométrica em suas

pinturas, para retratar uma cena única de forma coerente. Muitos empregavam o recurso de pisos em xadrez, que obedecia as regras geométricas e ajudava o artista a posicionar os objetos no espaço, passando a ser um novo método compositivo.

Outros artistas trouxeram importantes contribuições, como Leonardo da Vinci, que utilizava aspectos da geometria e da proporção na formação e construção de um quadro. Ele observou que a aparência dos objetos mudava, à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Desta forma, as linhas que delimitavam a silhueta do objeto, se tornavam menos distintas em grandes distâncias. Citamos também, Albrecht Dürer que utilizando os procedimentos de Brunelleschi e de Alberti produziu alguns subterfúgios mecânicos destinados a elaboração de desenhos em perspectiva.

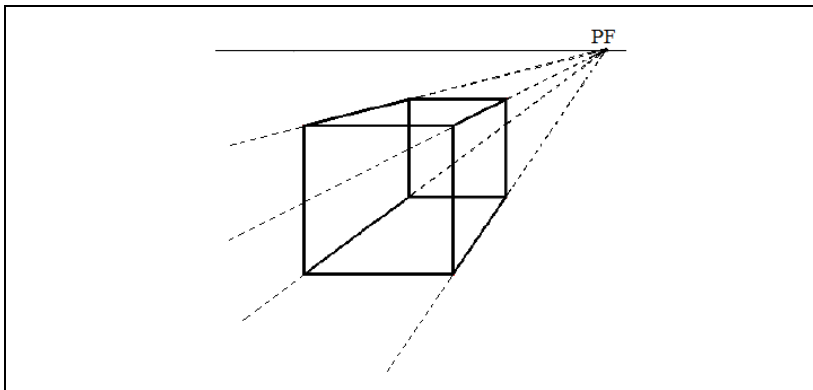
Os diferentes procedimentos consistiam, essencialmente, em imobilizar o olho do desenhista, depois determinar a intersecção de um raio visual com o plano do quadro. Estas evoluções dos traçados da perspectiva fundamentam sua metodologia de ensino e sua definição nos dias atuais.

A construção da perspectiva está inscrita na sua definição tradicional, ou seja, a representação da imagem como ela é percebida pelo ser humano. Desenha-se conforme as convenções: definimos a localização e a altura do observador, o ângulo de visão deste e

determinamos as fugas para onde convergem linhas paralelas, criando a idéia do tridimensional numa superfície bidimensional. Mas, o desenho em perspectiva não pode se resumir a um ato totalmente mecânico de localizar observador, ângulo visual, linha do horizonte, linha de terra e pontos de fugas e adequar o tipo de processo ao objeto que se queira retratar.

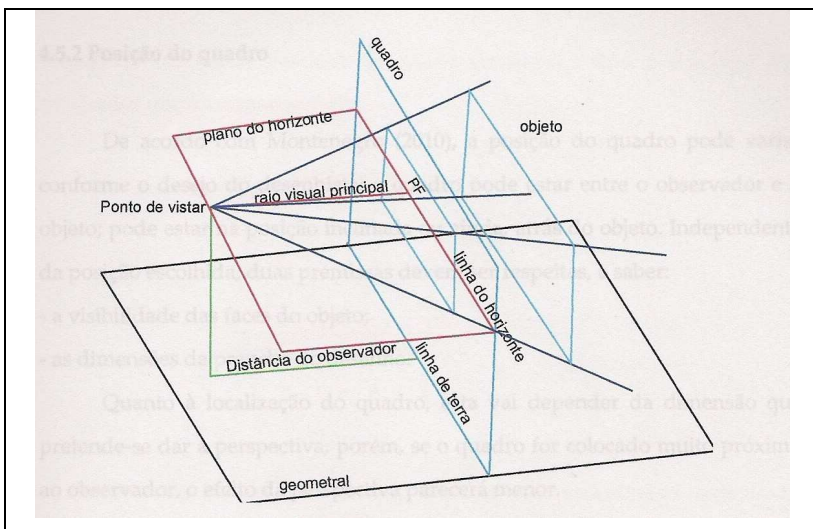
Segundo Wagner (2012, p.85) “Compreender a técnica da perspectiva significa também compreender uma maneira de pensar, de ver, de criar o que foi construído no passado e que se tornou hábito”. Para visualizarmos melhor este processo, enfatizamos apenas dois tipos de perspectivas: a perspectiva central ou cônica e a perspectiva paralela ou cilíndrica, sendo que:

Na **perspectiva central** é definido um ponto, chamado ponto de fuga (PF) (Figura 9) para onde convergem algumas das linhas retas paralelas, isto é, por este ponto passam as linhas de profundidade. O paralelismo é conservado somente em relação às faces paralelas ao plano de projeção.

**Figura 9: Perspectiva cônica ou central**

Fonte: (KODAMA, 2006, p. 21).

O desenho em perspectiva central (Figura 10) é considerado como o mais fiel. Logo, não podemos deixar de expor um esquema ilustrativo, onde o olhar do observador pode ser representado por uma pirâmide, chamada de pirâmide visual.

**Figura 10: Esquema de uma perspectiva central**

Fonte: (WAGNER, 2012, p. 83).

Para entendermos o posto, é necessário identificarmos alguns indicadores do esquema que pode ser explicado com base nos escritos de Leon B. Alberti:

- Plano geometral ou plano horizontal: é aquele sobre o qual se encontra o observador;
- Plano figurativo ou de projeção: é considerado na arte como sendo transparente e que se encontra na frente do observador;
- Quadro: é a parte do plano vertical de dimensões apropriadas, sobre a qual se reproduz o objeto;
- Linha de terra (LT): é a linha de intersecção entre o quadro e o plano geometral;
- Observador: é quem observa o objeto através do quadro para, depois, reproduzir sobre este;
- Linha do horizonte (LH): é uma linha situada no quadro, contida num plano imaginário paralelo ao plano geometral e que passa pelo olho do observador. A altura da linha do horizonte em relação à linha de terra equivale à altura do olho do observador em relação ao plano geometral;
- Ponto de vista (PV): é o olho do observador, o ponto de vista é o centro da projeção;
- Raios visuais: são as linhas retas que ligam o olho do observador a cada ponto do objeto;

- Raio principal: raio perpendicular que parte do ponto de vista e intercepta o plano do quadro formando uma perpendicular com este plano. Está situado entre a linha do horizonte e o raio visual central;
- Cone visual: é o conjunto dos raios visuais, sendo que o vértice do cone é formado pelo ponto de vista;
- Ponto de fuga (PG): é o lugar de convergência de todos os raios perpendiculares ao plano do quadro;
- Distância principal (DP): distância entre o ponto de fuga e o olho do observador;

Este tipo de projeção não corresponde absolutamente a uma visão natural, espontânea. O desenho em perspectiva do ponto de vista da matemática, ainda representa um expoente diante da representação no espaço tridimensional. Através desse recurso podemos criar e recriar imagens e ambientes. Seu domínio permite manipular realidades, fazendo surgir imagens que desafiam a compreensão, determinando relações entre a expressão do pensamento, da realidade e das ilusões.

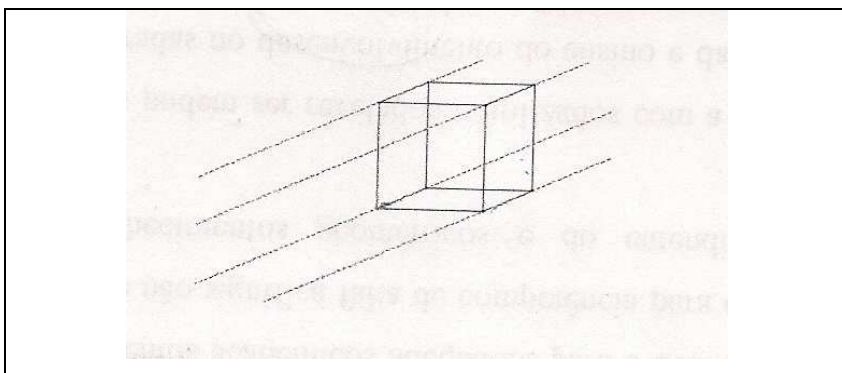
Na **perspectiva paralela**, o ponto de fuga é indeterminado, fica no infinito. Neste tipo de representação, há conservação do paralelismo das arestas. A perspectiva paralela se subdivide em dois grupos: perspectiva cavaleira e perspectiva axonométrica.



- A perspectiva cavaleira é uma projeção sobre um plano paralelo a uma das faces principais do objeto. O desenho obtido por esta projeção não está conforme o que se percebe com a visão, mas conforme o conhecimento que temos dos objetos representados, daí sua aceitação natural. O que ocorre, na verdade, é o embate entre os polos do que se vê e do que se sabe sobre o objeto.

Como exemplo, temos o desenho de um cubo (Figura 11). A representação de objetos 3D em perspectiva cavaleira apresenta outras propriedades como: conservação do paralelismo entre as arestas, uma das faces do objeto paralela ao plano de projeção, conservação dos pontos médios, e, geralmente, arestas visíveis para o observador traçadas com linhas cheias e as arestas não visíveis, com linhas tracejadas.

**Figura 11: Perspectiva cavaleira**

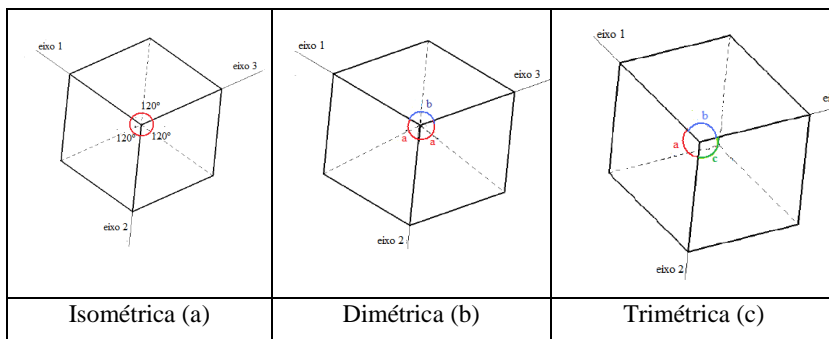


Fonte: (KODAMA, 2006, p. 22).

- Na perspectiva axonométrica não é necessário que uma das faces do objeto seja paralela ao plano de projeção. Fazem parte do grupo das perspectivas axonométricas: a perspectiva isométrica, a dimétrica e a trimétrica.

A perspectiva isométrica (Figura 12a) é um caso particular de perspectiva paralela, na qual os três eixos do espaço (largura, altura e profundidade) formam ângulos de  $120^\circ$  e as três arestas que saem de determinado vértice mantêm a mesma escala. Na perspectiva dimétrica (Figura 12b), as escalas das arestas são as mesmas sobre dois eixos e dois ângulos entre as três direções são iguais. E na perspectiva trimétrica (Figura 12c), todos os ângulos entre as três direções e as escalas das arestas são diferentes.

**Figura 12: Perspectiva axonométrica, isométrica (a), dimétrica (b) e trimétrica (c)**



Fonte: (KODAMA, 2006, p. 22-23).

Entretanto há outras tantas formas de representação plana de corpos tridimensionais usadas frequentemente na matemática e em

outras áreas científicas, técnicas ou artísticas. A seleção de uma ou de outra deve depender do uso que se vai fazer dela.

Por exemplo, no contexto escolar, que está em foco neste estudo, para o ensino da Geometria Espacial, a perspectiva cavaleira é a mais utilizada, tanto nos livros didáticos como nos desenhos realizados em sala de aula, pois as construções são simples, preservam-se importantes propriedades geométricas do objeto, é fácil de executar, oferece uma representação gráfica que corresponde a uma imagem mais próxima do que está à vista e estabelece um equilíbrio entre o que se vê e o que se sabe sobre o objeto (PARZYSZ, 1988).

Algumas pesquisas, como a de Cavalca (1998), têm se debruçado na defesa de que é preciso que o aluno compreenda as regras matemáticas para representação do desenho. Por este entendimento, é necessário preparar o campo da percepção visual e o seu raciocínio lógico, para que através das representações bidimensionais consiga fazer a leitura do desenho e processe as representações de modo a interpretá-las tridimensionalmente.

Acreditamos que a perspectiva deve ser ensinada como uma representação do espaço que vai além de um simples recurso gráfico, um modelo técnico, mas perpassa nosso universo visual. O domínio de sua construção e da visualização é de fundamental importância na

construção e exploração do conceito matemático, permitindo controlar a representação de um objeto ou de um determinado ambiente.

Mas, de outro lado, desenhar em perspectiva é fazer surgir um novo espaço, é criar, é representar, é visualizar. O papel da visualização é, portanto, fundamental nesta discussão. O visual fica tomado pela técnica, pois enquanto regra de desenho se transforma, também, em regra para olhar. Assim, no próximo capítulo passamos, efetivamente, a nossa proposta para levar a historicidade e a visualidade à Educação Matemática.

## **CAPÍTULO IV – PARA LEVAR A NOVA NARRATIVA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Neste capítulo passaremos a discutir sobre a história no ensino da matemática, destacando a importância da compreensão histórica dos saberes e práticas na escola. Buscando situar a historicidade e a visualidade como uma nova forma de conceber a história no ensino da matemática, propomos uma estratégia metodológica que abarque práticas do olhar no âmbito da história. Para situar esta proposta, propomos como ponto de partida o estudo da técnica da perspectiva aplicada por Albrecht Dürer, considerado responsável por divulgar na Alemanha a teoria italiana da perspectiva, retomando a imagem do quadro transparente e definindo a perspectiva também como visão transparente, inspirado nos escritos de Leon Batista Alberti.

Destacaremos neste espaço, os dois grandes objetivos de Dürer na composição de seu projeto enciclopédico, ou seja, um tratado: o de assentar as fundações da pintura sobre a certeza matemática e o de atender a um ensino da técnica da perspectiva acessível aos pintores e artesãos, sem deixar de mencionar o que ele teve de mais criativo, as máquinas de desenhar, chamadas perspectógrafos.

Teceremos, também, considerações a respeito do olhar, particularmente como ele se tornou perspectivado, atentando para a

multiplicidade de contextos em que o tema da técnica da perspectiva está inserido.

#### 4.1 HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA NUMA ABORDAGEM PROBLEMATIZADORA

Ensinar matemática tem sido tarefa difícil. As dificuldades intrínsecas somam-se aos problemas causados por uma visão distorcida da matéria, estabelecida desde os primeiros contatos pedagógicos. Um destes problemas é exatamente a descontextualização, pois no âmbito da escola, muitas vezes a matemática é apresentada aos alunos sem qualquer referência a sua história, enfatizando-se procedimentos e técnicas, em detrimento da reflexão acerca das ideias matemáticas e da percepção de significados para os algoritmos, tornando-se uma atividade mecânica.

Se a matemática é considerada uma criação humana e nesta perspectiva os objetos matemáticos são construções sócio-histórico-culturais desenvolvidas por métodos específicos de pensamento que contribuíram de forma particular para o desenvolvimento da sociedade, por que vivemos este paradoxo no ensino da matemática? A resposta não é tão simples assim, mas podemos ensaiar uma contribuição, embora limitada, importante. Ou seja, podemos interrogar que “parar” e “refletir” são tarefas mais difíceis do que reproduzir algo já proposto,

principalmente quando as atividades oferecidas aos alunos são desvinculadas do seu contexto social.

Neste sentido, Pérez Gómez (2001) nos auxilia dizendo que as interações das posturas, das metodologias, das didáticas, dos textos escritos e/ou falados deveriam ser abordadas na escola como um contexto cultural que apresenta um entrelaçamento de culturas, tais como cultura social, cultura crítica, cultura de experiência, cultura institucional, entre outras, sendo que cultura docente é a preconizada – pois é decorrente deste entrelaçamento de culturas e influencia diretamente a prática do professor na sala de aula. Logo, teríamos uma melhor interação se neste contexto houvesse uma retomada dos aspectos da cultura do aluno, a qual se torna necessária em nossas ações como educadores matemáticos. Assim, conceitua cultura:

[...] conjunto de significados, expectativas e comportamentos compartilhados por um determinado grupo social, o qual facilita e ordena, limita e potencializa os intercâmbios sociais, as produções simbólicas e materiais e as realizações individuais e coletivas dentro de um marco espacial e temporal determinado. A cultura, portanto, é o resultado da construção social, contingente às condições materiais, sociais e espirituais que dominam um espaço e um tempo. Expressa significados, valores, sentimentos, costumes, rituais, instituições e objetos, sentimentos (materiais e simbólicos) que circundam a vida individual e coletiva da comunidade (PÉREZ GOMES, 2001, p. 16).

Atualmente, no campo da Educação Matemática, as discussões e investigações quanto às práticas pedagógicas indicam a necessidade de superação da visão fragmentada e a-histórica da matemática. Nesta perspectiva, temos que os conhecimentos em história da matemática permitem compreender melhor como chegamos aos conhecimentos atuais e por que se ensina este ou aquele conteúdo.

Segundo Brito e Miorim (1999), a partir da aquisição de conhecimentos históricos e filosóficos dos conceitos matemáticos, o professor tem a possibilidade de diversificar suas técnicas pedagógicas e tornar-se mais criativo na elaboração de suas aulas, as quais podem provocar o interesse dos alunos para o estudo da matemática. Falamos isto porque estudar conteúdos matemáticos aproveitando a história, por meio de sua historicidade, nos possibilitaria mostrar as dificuldades, os anseios, as angústias, as fraquezas dos pensadores matemáticos, fazendo com que o aluno perceba que esforço e fracasso também fazem parte da aprendizagem. Conhecendo a história da matemática é possível perceber que:

As teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram, que foram desenvolvidas com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta (SIQUEIRA, 2007, p. 26).



Acompanhando Siqueira (2007), no que se refere à prática pedagógica, observamos que as problematizações, quando lançadas na sala de aula, partem do presente, não se preocupando em acrescentar à abordagem lógica uma abordagem histórica de natureza factual. Desta maneira, os alunos não processam o conhecimento, pois o ensinado não é parte natural do discurso de seu cotidiano.

Podemos dizer que uma das arestas deste assunto controverso é a melhoria na prática pedagógica, pois esta está na própria formação docente, ou seja, abrangendo um pouco mais, na cultura docente. Conforme Pérez Gómez (2001), hoje os professores, em sua grande maioria, continuam a desenvolver o ensino do jeito que o vivenciaram e acreditam ter aprendido. Este é, aliás, o argumento usado por muitos professores (em qualquer nível de ensino): “eu aprendi assim, por que haveria de ser diferente com o meu aluno?”.

O que se espera é que o docente, em interação com os seus alunos e com base nos conhecimentos já estabelecidos pelas diversas ciências, efetivamente crie e recrie conhecimentos próprios da atividade discente e docente. Isto é muito mais do que exercer o magistério como função de transmissão e recepção de conhecimentos prontos e acabados. Pois se admite hoje que o conhecimento constitui a mente e o pensamento dos sujeitos, portanto é um processo continuado e permanente. A mente do

sujeito nunca está pronta, é elástica, pode modificar-se constantemente na interação social e cultural.

A outra aresta está em podermos mediar os conhecimentos matemáticos revelando novos modos de pensar, de agir, de aprender com suporte na historicidade que é vista como uma fonte de diálogo a qual estabelece novas relações, respostas múltiplas e possibilidades para as respostas que procuramos no presente, mostrando as relações de poder nas diversas práticas sociais envolvidas na constituição, apropriação, ressignificação e transmissão do tema ou problema em estudo.

Neste sentido, Valente (2001) afirma que teríamos a possibilidade de entender com maior nitidez as práticas do fazer matemático, por meio de um estudo histórico da profissionalização do meio matemático, da análise da estruturação didática que orienta o campo intelectual da produção matemática e da contribuição das atividades didático-pedagógicas ao desenvolvimento das práticas matemáticas. Assim, uma possível reescrita da história da matemática deveria abordar o contexto cultural da produção e da circulação dos conhecimentos matemáticos, incluindo a matemática escolar como uma das formas de apropriação e reelaboração da prática matemática.

O exposto por Valente (2001) também ancora certas metodologias que podem propiciar uma formação mais ampla ao aluno,

observando-se os aspectos lógicos, históricos e culturais das produções matemáticas. O que se pretende é formar passo a passo um ensino de matemática que permita reflexões, análises, investigações e generalizações, de forma a desenvolver um ato educativo, com professores e alunos preparados como sujeitos sociais para a inserção na vida social pública – tanto como representantes quanto como atores de diferentes comunidades que participam do processo de constituição da matemática e da Educação Matemática.

Temos consciência de que o currículo de matemática que se complete com sua história é uma tarefa difícil. A implantação de um currículo que contemple o manifestado exige um bom conhecimento de história da matemática, de culturas e de questões que envolvam esse entrelaçado processo que chamamos de historicidade, e lógico, com uma mudança na postura dos professores. Essa circulação de ideias necessárias à produção continuada e cumulativa do conhecimento só se dará se o nosso interesse pela construção cultural e histórica da matemática seja mais do que uma moda, ou uma coisa artificial, devendo ser um novo conteúdo a ser conhecido, a ser compreendido e a ser aprendido por meio da historicidade.

## 4.2 UMA METODOLOGIA CENTRADA NA HISTÓRIA E NO VISUAL

As pesquisas de Mendes (2009) são consideradas importantes para este estudo, pois consideramos, assim como ele, a busca do entendimento pela história do conhecimento matemático. A história, assim sendo, passa a ter significativas implicações pedagógicas na construção do “conhecimento”<sup>37</sup>:

É necessário que passemos cada vez mais a discutir o processo gerativo da construção do conhecimento matemático, pois conhecer, é um processo extremamente dinâmico e jamais finalizado (processo histórico), sujeito ao contexto natural, cultural e social (MENDES, 2009, p. IV).

Isto significa que existe um forte consenso (FLORES, 2007a, 2010; MENDES, 2009; MENEGUZZI, 2009; ZAGO, 2010; WAGNER, 2012), de que esta área, ou seja, a história para pensar a educação, é uma fonte de problemas não rotineiros, em que estão envolvidos o exercício do olhar (em pinturas contemporâneas), a compreensão das diversas formas de olhar (considerando a cultura visual de diversas épocas e

---

<sup>37</sup> Admitimos o “conhecimento” segundo Mendes (2009, p. III): [...] o conhecimento é gerado e desenvolve-se historicamente nas mais variadas direções, fica claro que a Matemática trata de objetos culturais produzidos e utilizados em cada fase do desenvolvimento da sociedade humana ao longo dos anos. A transformação desses objetos culturais, no entanto, ocorre à medida que os outros objetos culturais, não necessariamente matemáticos, transformam-se e são incorporados ao *modus vivendi* de cada sociedade, em cada momento histórico de sua organização.

grupos sociais), a análise da técnica da perspectiva (nas máquinas para ver), a análise das formas de representação e de concepção do espaço e da geometria, bem como, a própria significação e entendimento dos saberes que passam a ser da escola.

Adentrando, portanto, na criação de uma metodologia que possa provocar uma nova narrativa, seguimos os passos de Flores (2012) que sugere o seguinte:

Metodologias visuais têm sido oferecidas para estudos de visão, regimes escópicos e práticas culturais da visualidade em diferentes campos (por exemplo, história, história da arte, arte, filosofia, etc) recentemente, tais metodologias foram introduzidas para muitos fins educacionais. Neste cenário, propus (Flores, 2010) que os princípios e metodologias de estudos da cultura visual possam ser potencialmente aplicados à pesquisa de visualização matemática, como segue:

- Para pensar sobre o visual através da cultura, das práticas sociais e relações de poder em que as imagens e as práticas da visualidade – ou seja, maneiras de olhar e produção do olhar – estão envolvidos.
- Para estudar a história das diversas tecnologias da cultura visual, tais como a técnica da perspectiva, fotografia, cinema, explorando a relação entre tecnologia e construção de visão.
- Para considerar o espaço, distância, perspectiva, luz, volume, profundidade, como enunciados que são interpretações de uma prática discursiva e incorporados em técnicas e efeitos através de imagens.
- Para analisar diferentes regimes visuais, enfatizando o papel da matemática na manutenção da homogeneização visual, ocularcentrismo e regime panóptico.

- Para usar a teoria da perspectiva para operar como um diagrama, uma hipótese de trabalho para pensar sobre o conhecimento, olhares, e representações de imagens (FLORES, 2012, s/p).

A partir daí, apresentamos uma estratégia metodológica apoiada no visual, enquanto problematizadora da visualidade, e pelo viés da historicidade, podendo ser esquematizada assim:

1. Problematizar a perspectiva e as formas de olhar no campo da história;
2. Discutir práticas do olhar instauradas pela técnica da perspectiva;
3. Analisar por meio de imagem conhecimentos que se tornam discursivos para olhar e representar.

#### **4.2.1 Para tratar da história**

Primeiro buscamos discutir, em forma de problematização, a história da invenção da perspectiva. Por exemplo, em Bessot e Le Goff (1990, p. 199), baseados na questão “*Mais où est donc passée la troisième dimension?*” que quer dizer: “Mas, onde passou, portanto, a terceira dimensão?”, e ainda, dos mesmos autores nos deparamos com outra pergunta “*comment exprimer la profondeur, le relief, que notre vision binoculaire est capable d'apprécier, dans une image "feinte" sur une surface?*” (LE GOFF, 1993, p. 199), isto é, como representar a profundidade, o relevo, que nossa visão binocular é capaz de apreciar,

numa imagem ‘simulada’ sobre uma superfície plana?, ou seja, como desenhar em perspectiva?

Para realizarmos esta discussão, acompanhamos os estudos dos próprios autores, que trazem o problema dos artesãos do Renascimento em criar a terceira dimensão no plano. Particularmente, Bessot e Le Goff (1993) trataram o trabalho de Dürer como sendo importante na divulgação dos métodos práticos de desenhar em perspectiva, principalmente entre os artesãos alemães<sup>38</sup>.

Uma de suas contribuições está relacionada à perspectiva linear que ofereceu as máquinas para olhar, estes modelos de máquinas (ver Figuras 17, 18 e 19) “incorporaram o cenário da perspectiva de um olho de frente para uma janela aberta ao mundo, e a pirâmide de raios visuais.” (BESSOT; LE GOFF, 1993, p. 221, tradução nossa). Estes mesmos autores, argumentam que o tratado de geometria prática, criado

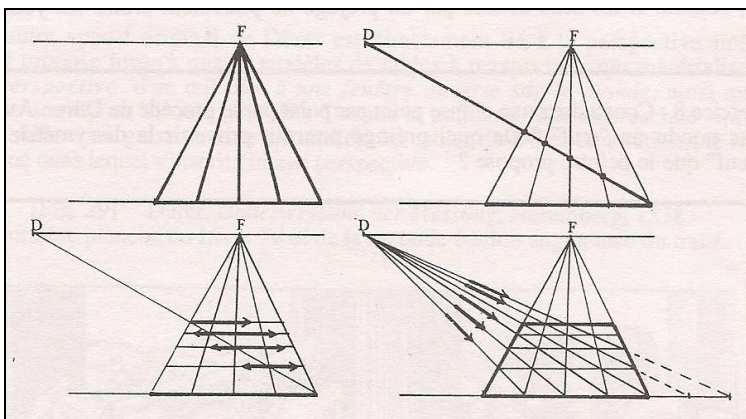
---

<sup>38</sup> É Leon Batista Alberti quem dá a esta regra a primeira formulação, sendo assim considerado como o teórico da perspectiva entendida como técnica de representação pictural. Escreveu o tratado *De Pictura* em 1435, para o uso dos artistas. Ele ensina a técnica de composição de uma base quadriculada para dar direção à mão e ao olho do artista. Para tanto, pode-se afirmar que a base quadriculada tem como função dar uma escala espacial antes de organizar os elementos no espaço. Outro esquema auxiliar encontrado no tratado de Alberti é a sugestão do uso de um véu, um “véu interceptor”, que por detrás de uma espécie de malha quadriculada, muito fina, o artista fixa seu olhar e desenha os contornos do modelo (Parramón, 1993). Este subterfúgio do véu inspirou Albrecht Dürer para a criação de suas máquinas perspectivas. O véu foi utilizado como instrumento pedagógico, para observar, compreender, medir e imaginar; utilizado também de uma forma pragmática para transferir aquilo que se vê.

por Dürer, faz uso original da dupla projeção, ao lado de sua abordagem tradicional para a descrição das obras arquitetônicas, utilizando-se rigorosamente das regras geométricas.

Como exemplo, temos a descrição ponto por ponto para a construção de uma cônica (Figura 13), em que se utilizam linhas que convergem para um ponto, sendo as diagonais dos quadrados de uma grade que estão inclinados a  $45^\circ$ , e em seguida se estabelece a distância destes pontos para o ponto principal, sendo a mesma distância que a do olho para a mesa.

**Figura 13: Construção moderna pelo método de pontos distantes**



Fonte: (BESSOT ; LE GOFF, 1993, p. 219)

Para tanto descrevem que:

Além do ponto de fuga principal F, é fixado no horizonte um ponto D (ou D' no outro lado de F) como FD (ou FD') é igual à distância do olho no quadro. O ponto D é encontrado para ser o ponto de fuga de linhas paralelas entre si e o chão (o solo), fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a principal linha de visão (ou a linha de terra). Este é o ponto

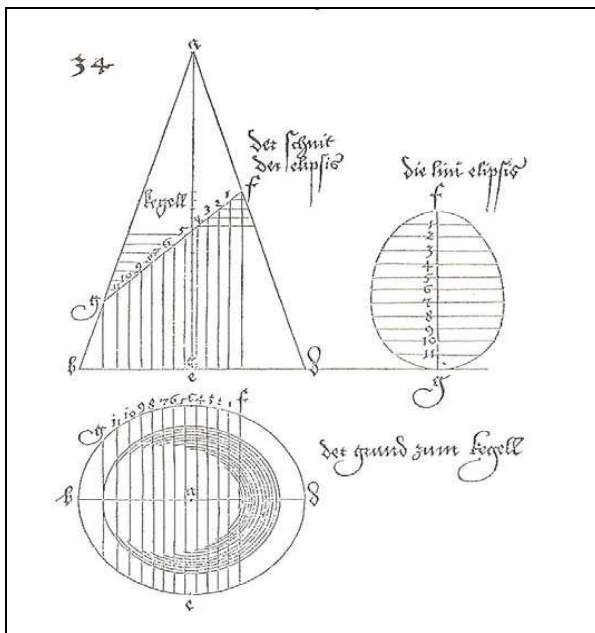


de fuga das diagonais de uma malha quadrada de pavimentação (BESSOT; LE GOFF, 1993, p. 219) [tradução nossa].

A exemplificação de um traçado de cônica que se utiliza da geometria do século XVI, e mais tarde no século XVIII, serve de inspiração para a geometria descritiva. É a representação da seção plana hiperbólica de um cone com base circular (Figura 14). Bessot e Le Goff (1993) expõem através do “exercício 8: Construir uma elipse ponto por ponto através do processo de Dürer. Você projetou um ‘ovo’? O viés pode vir da assimetria do ‘ovo’ que dispõe o pintor?” (BESSOT; LE GOFF, 1993, p. 220) [tradução nossa].

Em sua construção, verifica-se que o método de representação do sólido é por dupla projeção, do plano térreo e de elevação lateral, ocorrendo à transferência do número suficiente de pontos da elevação lateral para o plano térreo. A hipérbole normal, produzida por uma seção paralela ao eixo do cone, pode ser lida diretamente. As elipses produzidas por secções oblíquas podem ser obtidas expandindo proporcionalmente os seus eixos principais.

**Figura 14: Dürer, Underweysung der Messung, Nürembergue, 1525.**



Fonte: (DÜRER, 2000, Livro I, p. 167).

#### 4.2.2 Para compreender práticas do olhar

Não podemos apenas tratar a técnica como saber técnico. A técnica precisa ser explicada, entendida, de modo que se possa tratá-la também como saber para olhar, ou mesmo, como modo de olhar. Para tanto, apontamos o trabalho de Jay (1988) “*Scopic Regimes of Modernity*” – Regimes Escópicos da Modernidade – que faz referência ao fato de que a perspectiva renascentista conviveu desde cedo com outros sistemas paralelos de organização do visual. Neste caso, a teoria

da perspectiva é considerada como constituição de um regime visual, ou seja, de um modelo cartesiano de visão.

O autor define três “regimes escópicos” na modernidade: o perspectivismo cartesiano, a descrição na pintura e a visão barroca. O autor afirma que eles podem funcionar como paradigmas interpretativos em função das mudanças qualitativas e distintivas nas condições representativas.

Para esse estudo, destacamos o regime escópico do perspectivismo cartesiano que segundo Jay (1988) se mantinha nesta categoria:

[...] por aliar-se a uma visão científica de mundo que já não lê o mundo hermeneuticamente como um texto divino, mas preferencialmente o vê como situado num espaço-temporal matematicamente regular, preenchido com objetos naturais que só poderiam ser observados de fora pelo olho desapaixonado do pesquisador neutro (JAY, 1988, p. 9) [tradução nossa].

Com a instauração da técnica da perspectiva no Renascimento ocorreu a construção das representações em três dimensões. Cremos que com o desenvolvimento da visão epistemológica cartesiana aconteceram registros de alterações nas formas culturais de representação, indicando modificações mais profundas na experiência fenomenológica do tempo e do espaço, e na situação do corpo humano em relação ao mundo, além de poder observar as possibilidades de encenação do sujeito como condição da identidade social. Este modelo de visão se confunde com o

visual, criando-se uma maneira específica de olhar que é baseada na organização centrada, proporcionalizada e geométrica do espaço.

E, por fim, a discussão por meio de imagem acerca da junção de modos de olhar, serve, entre outras coisas, para estabelecer um contraponto a uma teoria social que reduz o processo histórico à ação de um sujeito exclusivo e define o movimento social por uma única direção. Ao contrário, procuramos relacionar a perspectiva e os saberes para representar a realidade em perspectiva com a historicidade e a visualidade.

As imagens, neste trabalho, são tomadas como o lugar de possibilidade para a discussão acerca da história, da invenção de saberes e da criação de formas específicas para olhar. Elas não são, portanto, depositórios de informações e conhecimentos, mas o resultado de escolhas culturais que tomam em si a forma de uma prática de olhar e desenhar. Neste sentido, seguimos Michael Baxandall (1988), o qual aponta que as obras (quadros) são produzidas a partir de uma experiência geral que sustenta modelos e padrões visuais construídos e que caracterizam a capacidade de entendimento de imagens. Em síntese, o autor nos aponta para o fato, que o olhar é um sentido construído socialmente e historicamente demarcado.

Ainda podemos citar Berger (1999) diante da intenção de estudar os modos de ver, algumas indicações podem nos servir para demarcar a

originalidade da problemática. Antes, porém, importa destacar que a perspectiva apoiada no conceito de cultura visual representa outro modo de pensar as imagens, a partir de uma abordagem particular. Nossa intenção, assim como a do autor, não trata de mera sobreposição de quadros teóricos sobre a imagem previamente consagrados e ratificação da separação tipológica dos objetos visuais por categorias materialmente distintas. Trata-se, sim, de nos inserirmos um pouco mais no jogo do saber e do conhecimento, interpretando como o olhar foi esquematizado para técnica da perspectiva.

Apoiamo-nos também nos estudos de Mitchell (1994), que afirma que para se discutir o estudo da imagem devemos nos concentrar em um jogo complexo entre visualidade, aparatos, instituições, corpos e figuração. Segundo o autor, cada um desses termos indica um complexo conjunto de práticas subjacentes que tornam possível a imagem e sua capacidade de conter sentido, sendo que estes planos não devem ser tomados individualmente. Conservando o que há de legítimo em cada um dos planos, podemos expor para um melhor entendimento as principais características, como seguem:

- **Visualidade** se refere ao registro visual em que a imagem e o sentido visual operam;

- **Aparato** diz respeito ao domínio do meio de expressão que condiciona a produção e a circulação, tal como a reprodução eletrônica em nossos dias;
- Ao nos referirmos às **instituições**, interessa observar as relações sociais organizadas em torno da produção da imagem e sua circulação;
- Os **corpos**, por sua vez, lembram-nos da necessidade de considerarmos a presença do observador, do espectador, como um “outro” necessário nos circuitos da promoção do significado visual, e de que alguém conduz o controle da imagem;
- O plano da **figuração** não permite esquecer que as imagens têm um papel privilegiado no sentido de representar ou figurar o mundo em formas visuais.

É deste modo que discutimos as imagens, por meio de um registro visual, exibindo a pluralidade dos conhecimentos. Neste sentido, temos a possibilidade de levantarmos questões que não são investigadas a partir do prisma da tradição disciplinar da história nos conteúdos da geometria. De acordo com nosso objetivo, estaremos adentrando no campo da cultura visual, sendo que a imagem toma então forma de problematização para o visual.

#### 4.3 DÜRER: UM POUCO DE SUA HISTÓRIA E UM OLHAR SOBRE SUA PRÁTICA

Flores (2007b) nos conta que Albrecht Dürer nasceu em 21 de maio de 1471, em Nuremberg, na Alemanha, onde também faleceu, em 6 de abril de 1528. Dürer era o terceiro de uma família de 18 filhos. Seu pai apresentou-lhe a carreira artística, ensinando-lhe o ofício de ourives. Aos 13 anos, ele desenhou um impressionante autorretrato.

A biografia de Dürer se desenvolve na transição de dois períodos artísticos muito importantes: o Gótico (período da história da Arte Medieval), ainda presente no norte da Europa, e o já estabelecido Renascimento, importado da Itália para a Alemanha.

Suárez (2006) vem nos acrescentar que ele, Dürer, foi gravurista, projetista, pintor e teórico e era considerado o “Leonardo da Vinci do Norte”. A arte de Dürer se aproxima muito da doutrina artística rediscutida na Itália da época, conhecida a princípio pelo nome de *Idéia*<sup>39</sup>. A essência de suas criações exprimia um impulso íntimo, vulgarmente conhecida como “inspiração”.

---

<sup>39</sup> Doutrina artística renascentista com o ideal de alcançar a harmonia e o equilíbrio comparáveis com as obras da antiga Grécia ou Roma. Uma forma de arte que removeu os detalhes estranhos e mostrou ao mundo como ele era: suas formas, cores e proporções, efeitos de luz e sombra, harmonia espacial, composição, perspectiva, anatomia.

Temos ainda, conforme Suárez (2006), que Dürer foi o primeiro artista em Nuremberg a lidar com a “pura criação” em gravura. Também foi o primeiro a estabelecer o chamado “direito de propriedade artística”, pois já marcava sobre as pranchas de madeira seu sinete (monograma AD – figura 15), declarando-se autor do desenho e registrando, assim, sua autoria. Suas gravuras compreendiam todas as temáticas: sagradas e seculares, paisagens, figuras humanas e de animais, elementos concretos em estreita relação com os abstratos.

Dürer em suas obras apresentava os ideais daquela época (o perspectivismo, a simetria, a proporcionalidade, a ordem e o equilíbrio) e que para tanto lançou mão de conceitos como o de beleza do proporcional, o de harmonia, o de sublime, o de estética, como se pode observar na figura 16.



Figura 15: Os quatro cavaleiros do apocalipse – Albrecht Dürer (1498)



Fonte: (THE BOOK OF ART. 1967, p. 117)

**Figura 16: Adão e Eva – Albrecht Dürer (1504)**



*Figura 1: Albrecht Dürer. Adão e Eva, 1504. Gravura em metal, 25,2 x 19,4 cm. Rijksmuseum, Amsterdam.*

Para confirmarmos o dito, basta observar a obra. Ele encontrou a fórmula para transmitir o belo, o harmônico, o sublime e aplicou na gravura a buril<sup>40</sup> Adão e Eva (1504). Este protótipo não deixa de ser uma representação da natureza, contando também com a inteligência e o poder de abstração do artista em todo seu conteúdo e temática.

O desenho, considerado “intelectual”, não satisfaz somente as obrigações de clareza e abstração, mas demonstra em si o resultado da marca mais fundamental da natureza humana – o pensamento.

Fonte: (THE BOOK OF ART. 1967, p. 118)

Nesta obra, interpretamos que, Dürer foi capaz de representar aquilo que o pensamento humano construiu sobre nossa origem em um lugar de harmonia, dando a impressão de estar representando o real. Neste caso, é interessante destacarmos alguns aspectos do discurso visual que está relacionado ao regime visual específico: estética, beleza,

<sup>40</sup> Gravura a buril: estilo apurado, modo de gravar, arte.

harmonia, simetria que coincide com a prática da perspectiva central, como vemos:

- Observamos no plano frontal o tamanho maior dos personagens – Adão e Eva – servindo de referência para compararmos as diminuições que ocorrem nos demais planos, ou seja, a diferença de grandeza que está relacionada ao intervalo de distância, pois a disposição de tudo o que compõe a obra não foi uma escolha aleatória, trata-se de um espaço geometrizado.
- Se olharmos para a disposição do casal, percebemos Eva do lado esquerdo de Adão, isto nos perpassa harmonia, proteção, bem querer, pois é o lado do coração.
- Em relação à diferença entre as alturas (homem/mulher) e o olhar de Adão para a face de Eva, e o olhar de Eva para a ação da serpente, compreendemos estas relações como uma constituição de um olhar sócio-cultural em que prevalece a força física e moral do sexo masculino, mas também revela o olhar de perspicácia da mulher, que se atenta a outros detalhes, além dos da sua própria espécie, sem falarmos na delicadeza do corpo e da expressão feminina.
- A organização da obra em relação ao tronco da árvore no meio do casal e ao fundo, e as diferentes espécies de animais

dispostas defronte, atrás e acima demonstram que os mesmos estão intimamente e intensamente postos em contato com a natureza, caracterizando um espaço ordenado, em movimento e perspectivado.

Enfim, no capítulo V, retomaremos esta imagem e nos reportaremos ao tratamento do espaço que é medido, calculado e geometrizado.

Suárez (2006) especifica, ainda, que as criações de Dürer tornaram-se populares principalmente por se tratarem de trabalhos gráficos. Na Alemanha, os desenhos tinham quase que o dever de comunicar, além de serem imprescindíveis para a popularidade do artista. Dürer sabia que somente por meio do aperfeiçoamento dos traços poria em prática seu sonho de juventude: a pintura.

Durante os dez anos que sucederam 1496, segundo Suárez (2006), Dürer passou de um artista relativamente desconhecido para alguém com uma ampla reputação como artista e como matemático. Dürer continuava interessado em aprender com os italianos, mas desta vez não no domínio das artes, mas sim no domínio da matemática. Visitou Luca Pacioli<sup>41</sup>, Jacopo de Barbari<sup>42</sup> e achou que deveria

---

<sup>41</sup> Luca Pacioli (1445-1517): nascido em Borgo di Sansepolcro, era matemático e destacou-se como o mestre do ábaco.

<sup>42</sup> Jacopo de Barbari (1440-1516): Ele se mudou de Veneza para a Alemanha em 1500, era pintor e desenhista, tornou-se o primeiro pintor italiano a ganhar notoriedade no norte da Europa.

aprofundar ainda mais o seu conhecimento matemático. E a partir de certa altura, a arte de Dürer, mostra a influência de teorias matemáticas, tais como a da proporção. Mas não foi só a teoria da proporção que influenciou seus trabalhos artísticos, também sua mestria em perspectiva conquistada através do estudo da geometria foi de grande importância.

Dürer foi além da pintura e da gravação. Conforme Flores (2007b) ele compôs dois tratados: “Instrução para medições à Régua e ao Compasso – Geometria e Perspectiva” (1525), “Sobre as Fortificações” (1527), além dos “Quatro livros das Proporções do Corpo Humano”, publicado por seu amigo Pirckheimer<sup>43</sup> seis meses após sua morte (1528).

Seu tratado *De La medida*, 1525, coloca em evidência, com exemplos simples, a técnica (o método) de Brunelleschi e de Alberti. O que queremos destacar neste contexto é que Dürer em sua obra procura oferecer regras para construir curvas, superfícies e sólidos capazes de serem evidenciados para os propósitos artísticos. Desta forma, o autor, constata em seus estudos que a perspectiva é acima de tudo profundidade de conhecimento, visão, abertura do espaço infinito, ausência de limites e limitações culturais, salientando assim o

---

<sup>43</sup> Willibald Pirckheimer (1470-1530): foi um alemão renascentista, advogado, escritor e humanista do Renascimento, uma figura rica e proeminente em Nuremberg, no século 16. Ele era o amigo mais próximo do artista Albrecht Dürer, que fez uma série de retratos dele.

verdadeiro simbolismo da perspectiva e o grande papel que ela desempenha na geometria. Ocorre então a explosão técnica da perspectiva, coincidindo com o período mais fecundo da civilização ocidental, designado Renascimento.

Segundo Flacon e Taton (1994), Dürer esteve totalmente absorvido pelo estudo das distorções das formas, colocadas a diferentes alturas. Sua perspectiva era definida por um só ponto de fuga. E seu empenho não esteve necessariamente num estudo teórico sobre a técnica, mas na construção de máquinas que nada mais eram do que instrumentos para representar em perspectiva – os perspectógrafos.

#### 4.4 DÜRER E AS PRÁTICAS NA GEOMETRIA: AS MÁQUINAS E O TREINO DO OLHAR

Dürer através de suas técnicas buscava a perfeição no desenho. Para tanto, lançava mão de conceitos geométricos para construir a perspectiva criando sua própria terminologia para facilitar a comunicação e para melhor se fazer compreender, tarefa muito bem empreendida com a utilização de suas máquinas, que treinavam o olhar em perspectiva.

Confirmamos tal fato através de Suárez (2006), quando consideramos o conteúdo sobre a curva formada pela justaposição de dois semicírculos de convexidade oposta que é por Dürer nomeada de “linhas serpentinhas” ou “linhas tortuosas”, para algumas espirais e

hélices a denominação é de “linhas de caracol”, entre outras. Em todos os momentos sua nomenclatura estabelece relações com a terminologia clássica, tornando-se mais acessível porque as construções descritas são apoiadas em figuras, nas quais, no mesmo espaço de tempo, aquele que procura o conhecimento encontra-o entre a imagem e o escrito. Portanto as figuras e as adaptações desempenham um papel de mediação entre a abstração e a prática.

Da mesma forma Dürer divulgou suas máquinas de desenhar pela Europa, no sentido de auxiliar todos os artistas, pois as mesmas facilitavam os difíceis problemas de perspectiva, nos quais os desenhos eram objetos vistos de frente apresentando dimensões reduzidas.

Tomamos como exemplo o Livro I, onde Dürer trata problemas de Geometria Linear que em geral eram empregados por matemáticos: linhas retas, curvas algébricas, parábolas, elipses e hipérbolas. A obra trata também da construção de hélices, concoides e epicicloides. O mesmo não investiga as propriedades matemáticas destas linhas. Limita-se a construí-las e consegue fazê-lo graças à aplicação de um método familiar a qualquer arquiteto ou carpinteiro: o método das projeções paralelas.

Segundo Flores (2007b) as noções matemáticas abstratas nos textos de Dürer são projetadas, escritas e construídas com

especificidades de concretização e materialização. Sendo que o mesmo se utiliza de conhecimentos provenientes dos *ateliers*, ele constrói alguns polígonos regulares como o pentágono, o heptágono, o eneágono e outros, reconhecendo o cunho matemático e geométrico destes.

No que diz respeito ao tratado de Dürer, Taton (1986, p. 166) nos afirma que lá encontramos “[...] a primeira concepção clara do papel do método das projeções e o emprego de procedimentos próximos em seu espírito da geometria descritiva elementar”. E ainda:

A importância histórica deste tratado é muito grande. Aí Dürer descreve um certo número de aplicações da geometria a arte, mas ao fazê-lo relativamente aos sólidos e às suas representações, nomeadamente através da perspectiva, acaba por fazer esses próprios tipos de representação penetrar nos domínios da geometria pura, abrindo-a a novos desenvolvimentos (VELOSO, 1998, p. 296).

Assim sendo, é através de seu tratado de perspectiva e projeção, principalmente os estudos sobre as seções cônicas, que Dürer inspirou Gaspard Monge, no fim do século XVIII, a formular e codificar de acordo com as regras as técnicas subjacentes à geometria descritiva.

Peiffer (1998) manifesta que Dürer explorou situações aparentemente simples na prática, mas difíceis de representar no papel, quando o referido é o que trata das regras e linguagem da matemática e da geometria. Para tanto, fez uso da régua e do compasso, como também da criação de máquinas para desenhar em perspectiva.



Dürer afirmava que a perspectiva de uma pintura não devia ser desenhada à mão, de forma livre, mas artificialmente construída, de acordo com princípios matemáticos. A geometria, para ele era experiência, prática, elaboração, assimilação de conhecimentos matemáticos que passam, imprescindivelmente, pelo olho. Esta teorização é demonstrada no seu tratado *De La medida*, 1525 – através das gravuras existentes em sua obra, facilmente é visualizada a geometria, a matemática e o processo da perspectiva. Segundo Peiffer (2000),

[...] a geometria de Dürer não é demonstrativa, sua estrutura não é dedutiva e a ordem de exposição nem sempre parece coerente aos olhos de um matemático. Mas, tampouco, é uma simples compilação, nem uma geometria prática [...]. A geometria de Dürer é construtiva e exata, no sentido em que persegue a construção a partir de regras, exata, aproximativa, de todas as formas naturais, animais ou vegetais, ou de artefatos, por exemplo, das cônicas, utilizadas na arte e na arquitetura de sua época (PEIFFER, 2000, p. 117).

Sendo assim, lembramos que a perspectiva não é a mera representação do espaço tridimensional, ela vai além de um simples recurso gráfico, transcendendo o universo visual. O homem, quando aprendeu a desenhar em perspectiva, realizou um dos seus maiores anseios relacionados à percepção: conseguiu transcrever com linhas e pontos o ambiente que o cercava. Foi o poder diante do espaço, o controle da representação de um objeto ou de um determinado ambiente.

O desenho em perspectiva não se resume a um ato totalmente mecânico de localizar observador, ângulo visual, linha do horizonte, linha de terra e pontos de fugas e adequar o tipo de processo ao objeto que se queira representar. Desenhar em perspectiva é fazer surgir uma nova forma, experimentando uma maravilhosa sensação de criação – a liberação do imaginário se confunde com a ansiedade do criar e do representar.

Também é na técnica da perspectiva que o aluno conhece os elementos, os métodos e coloca-se a desenhar guiado pelos seus olhos e por sua mente, esta, por sua vez, controlada pela criatividade, pelos conceitos da perspectiva e pelo desejo de representar a forma, transforma a representação em uma obra de arte.

Saber desenhar em perspectiva é poder controlar o espaço visual. Para tanto, nos conta Suárez (2006), que Dürer utilizou-se de um vidro através do qual olhava para o cenário que queria pintar, tal como nós, olhamos pela janela, olhamos para uma cena do exterior. Fixando o olhar, ele imaginava os raios de luz em direção a cada ponto da cena. O conjunto de linhas que representam esses raios foi denominado de "projeção". Dürer marcava um ponto no vidro no lugar onde a linha encontra o vidro. Este conjunto de pontos foi denotado de "seção". Assim, num primeiro momento, esta pintura realista reproduzia no vidro a localização, o tamanho e a posição relativa dos objetos, exatamente

como eles apareciam no vidro colocado entre o pintor e a cena a ser pintada. No momento seguinte, os contornos desenhados no vidro eram transferidos para o painel.

Em síntese, temos: os diferentes procedimentos imaginados e construídos por Dürer, que consistem, essencialmente, em imobilizar o olho de quem está desenhando, depois determinar a intersecção de um raio visual com o plano do quadro. Como segue:

**Figura 17: A máquina da janela de vidro**



Fonte: (DÜRER, 2000)

A máquina exposta na Figura 17 é organizada utilizando-se um painel de vidro enquadrado e fixado num quadro de madeira. O procedimento dá-se ao se colocar o objeto a ser representado a uma distância desejada, tirando-se os traços que se pretende desenhar sobre o painel de vidro.

O ponto de fuga e a linha horizontal são garantidos quando o olhar é mantido fixo, num único ponto de vista. A dificuldade percebida é a necessidade de apoiar na mão à parte da máquina que dá o ponto de

vista fixo, quando ocorre o deslocamento do ponto de vista a representação do artesão ou artista torna-se prejudicada.

**Figura 18: A máquina da rede metálica ou a máquina da janela quadriculada**



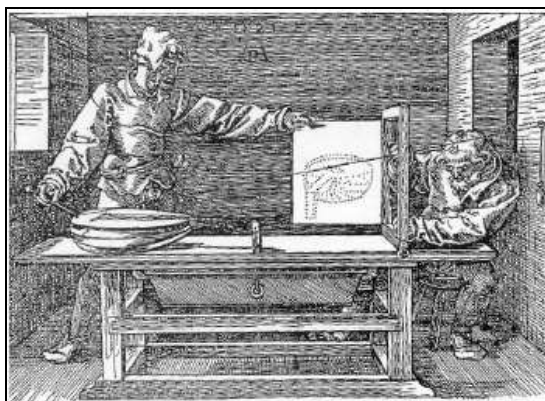
Fonte: (DÜRER, 2000).

A segunda máquina apresentada na Figura 18 denomina-se janela quadriculada, sendo um aprimoramento da primeira máquina (Figura 17). Além do vidro quadriculado, da folha quadriculada, este procedimento ganha também um visor ajustável à altura do olho do pintor. Este visor garante um único ponto de vista, sendo fixo, apresenta elementos como o ponto de fuga e a linha do horizonte, ocorrendo a possibilidade de aumentar ou diminuir a imagem do objeto a ser representado.

O desenho em perspectiva constitui uma representação linear que se vale de regras visuais como convergência de linhas, encurtamento das linhas e diminuições de medidas. Este tipo de desenho cria a ideia do tridimensional numa superfície bidimensional, que se identifica com a impressão visual recebida pelo observador. Nesta técnica, nos diz

Suárez (2006) que a função desta janela quadriculada era didática, pois os desenhos deveriam ser copiados de maneira fiel. A partir destes usos, a geometria passa a ser aceita como fundamento para construção de uma ciência da representação.

**Figura 19: A máquina da portinhola**



Fonte: (DÜRER, 2000).

A portinhola, máquina mostrada na figura 19, é equipada de uma pequena porta móvel e também de um fio estendido entre o ponto de vista e o objeto, concretizando assim o raio visual. O olhar, neste caso, é fixado pelo fio, pois este representa o olho. O ponto de fuga e a linha de horizonte também são fixados e determinados pelo desenhista e desta forma a direção que se quer olhar é precisa.

Neste caso, podemos nos servir de explicações do próprio Dürer em relação ao domínio da técnica utilizada na máquina de desenhar (Figura 19):

Com três fios é possível transladar uma pintura e registrar em uma tábua qualquer objeto que se possa alcançar com os olhos. Para o qual se faz o seguinte: Se estiver em uma sala, prega em uma parede uma agulha grande que servirá como olho humano. Passa por essa agulha um fio forte e coloque em seu extremo um peso de chumbo. Coloque uma mesa e uma tábua à distância que você quer do olho e da agulha em que está o fio. Por cima, transversal ao olho e a agulha, uma moldura vertical de alto a baixo, no lado que quiseres, tendo uma portinhola que se possa abrir e fechar. Esta pequena portinhola será a tábua onde você irá pintar. A seguir coloque dois fios cujo comprimento seja igual à altura e largura da moldura, um no centro do lado superior e outro no centro de uma lateral, deixe-os pendurados. A seguir prepare um prego de ferro largo com um anel na ponta, e passa ele pelo fio largo que está na agulha da parede. Pega o outro fio e leva ao lado da moldura e dá o outro para que segure em uma mão enquanto você se ocupa dos fios que estão na moldura. Utiliza-os da seguinte maneira: coloque um alaúde a distância que queira da moldura, sem movê-lo enquanto não for necessário, e faz teu companheiro esticar a agulha com o fio nos pontos essenciais do alaúde. Cada vez que pare no um e estique o fio comprido, prenda na moldura os dois fios para que se cruzem no comprimento. Fixe suas extremidades com cera e peça ao teu companheiro que solte o fio comprido. Fecha a portinhola e desenha na tábua o ponto em que se cruzam os fios. Volte a abrir a portinhola e faça o mesmo com o outro ponto, até que tenha pontuado todo o alaúde na tábua. Una com linhas todos os pontos que tenha desenhado na tábua e terá o resultado. Também se pode copiar outro objeto (DÜRER, 2000, p. 328 - 329).

Estas máquinas, que na verdade são instrumentos perspectivos, foram criadas e adaptadas com o propósito de auxiliar na concretização de alguns princípios da perspectiva central, consistindo,

fundamentalmente, em imobilizar o olho do desenhista. É bem verdade que a técnica da perspectiva permite representar os objetos semelhantes. Neste sentido, ter-se-á então, uma representação análoga da realidade. Imagens que tentam se assemelhar a esta, uma vez considerada a visão da realidade, faz-se concebida por padrões determinados pelo próprio conceito do real, com as quais se compartilham com o grupo social do qual faz parte.

De acordo com Flores (2007a), as utilizações dadas à perspectiva central condicionadas nas obras de arte do Renascimento proporcionaram um novo tipo de olhar, influenciando todo o pensamento ocidental. A técnica da perspectiva possibilitou a representação do pensamento e da visão, num momento em que o homem estabelecia suas regras tanto ligadas à geometria quanto à pura expressão do ver, e o mundo das artes se expandiu para o domínio do espacial.

Não importa se ela tenha sido empregada como mais um recurso de composição, conforme Leon Batista Alberti e Piero Della Francesca<sup>44</sup>

---

<sup>44</sup> Piero Della Francesca (1415-1492): nascido em Borgo San Sepolcro, foi um pintor italiano do *Quattrocento*, nome dado à segunda fase do movimento Renascentista italiano. Tal qual os grandes mestres de seu tempo, Piero primou sempre pela criatividade em relação ao passado medieval, apresentando técnicas e temáticas inovadoras como, por exemplo, o uso da tela e da pintura a óleo, o retrato, a representação da natureza, o nu, e, sobremaneira, a perspectiva e a criação do volume. No século XV, Piero Della Francesca, desenvolve uma pintura pessoal e solene, misturando formas geométricas e cores intensas. Sua pintura se diferencia pela utilização da geometria espacial e abstração.

a consideravam, ou como uma técnica de representação do espaço tridimensional, estabelecida por Leonardo Da Vinci e Albrecht Dürer. É sempre importante salientar que estes artistas, assim como os outros do período renascentista, contribuíram para fundamentar e expandir os conhecimentos da perspectiva, sempre denotando uma realização para artistas e desenhadores. O que importa é que a produção artística realizada na experiência proporcionada pela técnica da perspectiva tem ao seu alcance toda uma gama nova de sensações e abordagens que acabavam por permitir obras com perceptivas diferenciadas daquelas oferecidas pelos métodos da Idade Média. Esta experiência modificou a arte, sendo aplicada no controle das imagens, permitindo que sejam registradas a partir de um modo perspectivado do olhar.

Este modo perspectivado do olhar é mediado pela razão que se interpõe na atividade da visualização. Vale ainda mencionar que para expressar o real, o treino do olhar, está, segundo Flores (2007a), na “questão da imobilidade do olho ou do lugar do sujeito” (p. 127). Ou seja, cria-se desta forma um pensamento e um olhar objetivo, perspectivado e racionalizado. Pois,

De fato, obrigado a se posicionar no ponto de vista do dispositivo perspectivo, o espectador imóvel só pode ver um momento da narrativa que a pintura encena. [...] Daí a necessidade da janela, do vidro, do véu interceptor, o que torna legítima a violência imposta à vista: só se pode olhar, e representar, por meio de alguma coisa (FLORES, 2007a, p. 127).



Esclarecemos que de maneira alguma estes indicativos desvalorizam a técnica da perspectiva. Eles são colocados como forma elucidativa de um processo que se constituiu e se consolidou apresentando suas vantagens, de tal forma que já não mais questionamos seus pressupostos. O que registramos é que a mesma tem sido esquecida em muitos planos de ensino, sendo que o desinteresse é percebido em áreas diversificadas.

Destacamos que o desenho em perspectiva ainda representa uma qualidade diante da representação e do espaço tridimensional e que através de seu domínio teremos permissão de manipular realidades, fazendo surgir imagens que desafiam a compreensão, determinando relações entre a expressão do pensamento e da realidade.

Para melhor compreendermos esse processo, exporemos no Capítulo V a historicidade e visualidade no ensino da matemática, como também a arquitetura de uma metodologia que proporcione uma compreensão do visual como construção cultural e histórica com relação à técnica da perspectiva, a qual atentar-se-á para propostas de atividades de aprendizagem, articulando tópicos da geometria com a arte, a história e a visualidade. Para tanto, levaremos em consideração que a perspectiva é um todo representativo da imagem análoga do real na concepção das formas, mergulhando nos caminhos do traço e da visualização,

conforme técnica ou recurso adotado ou estabelecido em determinadas atividades, localizando a forma na dimensão da realidade existente.

#### 4.5 O OLHAR QUE SE DOUTRINOU

Em busca de dados sobre o interesse do homem em respirar um novo tempo e se aventurar na descoberta de si mesmo e do mundo que o rodeava, fomos “passar” pela história, e chegamos ao Renascimento europeu, onde o mesmo retirou o véu que encobria o espírito e o fazer humanos, indícios da Idade Média. Sem esse véu, o homem pôde respirar um novo tempo e se aventurar na descoberta de si mesmo e do mundo que o rodeava.

O homem com o transcórre do tempo, pôde olhar as estrelas, percorrer os mares-oceanos, descobrir novas terras e gentes, observar seu próprio corpo e debruçar-se sobre a natureza, percebendo formas físicas e químicas. A cada passo, o homem saía do mundo fechado medieval em direção ao universo infinito e moderno.

[...] a percepção da natureza e sua observação obrigam a um procedimento analítico sempre renovado, que requer um aprimoramento da forma de olhar esses objetos [...]. Esse olhar, é agora, resultante da permanente observação dos fenômenos, mais especializado e apurado, classificador e organizador (RODRIGUES; FALCON, 2000, p. 55)

Para além de nossos interesses, mas com muita importância, fazemos referência também às novas formas de comunicação que, com

seu surgimento, engrandeceram as artes, as ciências e as literaturas. E sentimos que o grande desfecho desse período se dá quando Galileu diz que o livro da natureza estava escrito em caracteres matemáticos.

Tendo em mente a importância da matemática como protagonista nas estratégias de construção do conhecimento, com contribuições imbricadas em todas as áreas do saber, sentimos a necessidade de realizarmos um recorte neste processo histórico e evidenciarmos a técnica da perspectiva, nosso foco. Este propósito nos auxiliará na interpretação e na representação das configurações geométricas apresentadas no Renascimento, quando o espaço se tornou métrico, homogêneo e infinito.

Foi neste momento que a ideia de visibilidade do mundo foi instaurada e este modo de intervenção estabeleceu um treinamento coletivo do nosso modo de olhar e ver. É aqui, que o homem institui a previsão, o planejamento, a organização e o controle sobre a natureza, criando a cultura moderna, tudo isto porque estamos imersos num mundo de forma, pois, para onde quer que se direcione o olhar, as ideias geométricas estão presentes no mundo tridimensional, seja na natureza, nas artes, na arquitetura ou em outras áreas do conhecimento.

Para auxiliar nosso entendimento no que concerne a estes novos conhecimentos e novas ideias em torno do modo de representação

instaurado no Renascimento, podemos recorrer às questões feitas por Flores (2007a):

Como a perspectiva capturou e colonizou nosso olhar? Como e de onde teria surgido a técnica da representação em perspectiva que se faz ao mesmo tempo efeito e suporte para olhar e para construir as imagens? Quer dizer, como esta técnica teria aberto as possibilidades para a fundação de um modo de olhar? (FLORES, 2007a, p. 34).

Não temos respostas prontas e imediatas, pois responder tais questões significaria estudar, analisar, compreender e relacionar sujeito, técnica e prática num caminho de mão dupla contemplando todos os termos do tripé ao mesmo tempo, sendo esta a nossa procura, o desvelamento do conhecimento através de uma reorganização de sujeito na sociedade, de um novo conceito de representação, de uma nova forma de visibilidade. Significa, então, que

O espaço do Renascimento não é um sistema habilidoso de representação de determinados valores imutáveis, ou antes dos únicos valores imutáveis da visão. Ele é um sistema perfeitamente adaptado a uma certa soma de conhecimentos. Não se pode compreendê-lo senão em função dos hábitos sociais, econômicos, científicos e políticos, em função dos costumes da época (FRANCASTEL, 1990, p. 27).

Podemos assim dizer que os procedimentos, a escrita, as representações da interação do homem com o mundo em relação ao seu olhar perspectivado nos outorgaram à visão um lugar privilegiado no processo de cognição, abrindo espaço para a percepção, para a

experiência, para a criação de dados de novos fatos. Esta indicação vem segundo Rodrigues e Falcon (2000):

O Renascimento significou novas formas de ser e de pensar a partir de um conceito dinâmico de homem, em que todas as concepções das relações humanas se tornaram dinâmicas, a começar pela relação entre o homem e a sociedade [...] em relação à natureza, o homem agora pode conquistá-la [...] (RODRIGUES; FALCON, 2000, p. 39).

Para compreendermos este significado de Renascimento colocado por Rodrigues e Falcon (2000), devemos ter ciência que este modo de vermos e de representarmos em perspectiva tem sua própria história e que ocorreu em um determinado momento – portanto não possui neutralidade. Para tanto, vamos até as obras de arte, ou melhor, ao plano pictural onde tudo é pensado, controlado e conduzido por regras:

Os olhos, por sua vez, deverão render-se a esta regra. Mergulhados na teia daquilo que rege a representação pictural, deverão submeter-se a ela ao mesmo tempo que guiá-la. Ou melhor, não serão bem os olhos a guiar a regra – estes estarão cegos e precisarão de muletas –, mas o raciocínio, a racionalidade sujeitando o olhar (FLORES, 2007a, p. 49).

Que regras são essas? Em nosso caso, os procedimentos empregados por Dürer. Estamos falando dos subterfúgios criados por ele para produzir desenhos em perspectiva, sendo esta a perspectiva central, valendo-se de um único ponto de fuga, um único ponto de vista, uma única direção, estando a imagem bem definida tecnicamente. No entanto, o aprisionamento do olhar que esta instituição instaurou

efetivou a criação de controles sociais com novos usos do espaço, homogêneo, visível, integrado, totalizado que possibilitou o domínio da imagem e do cálculo preciso de dimensões e volumes, doutrinando nosso olhar.

Buscamos um exemplo de ocorrência do descrito em Flores (2007a), sendo as construções de representações cartográficas, nas quais a iconografia complexa, que evocava um exercício teológico usado na época, passou a ter projeções geometrizadas e descritivas, sendo mais racionais e geográficas.

Este olhar da perspectiva tratou de ser efeito e suporte nas representações das figuras no espaço doutrinou nossa maneira de ver. Mas também favoreceu nossa percepção espacial e a visualização, sendo um conhecimento relevante para as diferentes áreas, permitindo que o homem desenvolvesse sua percepção, sua linguagem e seu raciocínio geométrico de forma a construir conceitos.

Assim, no Capítulo V passaremos a tratar especificamente sobre como analisar, por meio de imagem, “conhecimentos” que se tornam discursivos para olhar e representar, explorando as experiências e as práticas de Dürer.

## **CAPITULO V – EXPERIÊNCIAS E PRÁTICAS DO OLHAR EM ALBRECHT DÜRER**

Neste capítulo abordaremos a prática do olhar e do representar considerando os estudos de Dürer. A partir do que tratamos como novas narrativas, e atendendo às subjetividades do raciocínio em tempos pós-modernos, exploramos e discutimos o papel de produção de sujeitos, de formas de olhar e produzir matemática. Isto deverá conduzir a uma reflexão sobre uma proposta para a Educação Matemática, permeada pela história, pelo visual e pela imagem. O conhecimento matemático e o modelo visual são entendidos como resultados da elaboração prática de sujeitos culturais e históricos.

### **5.1 O DESAFIO PARA MUDAR**

O modo de ver, de olhar e de representar as condições distintas de objetos e/ou de sujeitos, a nosso ver, estabelecem melhor as finalidades de explicar as tentativas e ideias de sua produção social, econômica, geográfica, cultural e de seus ensaios de compreender e de construir os seus próprios conhecimentos.

Ainda, no início de nossos estudos, pensamos apenas em abranger nesta pesquisa a investigação de em que medida o ensino da geometria poderia auxiliar os alunos a articular diferentes pontos de vistas. Passamos então a investigar o ensino da perspectiva como auxílio

ao aluno nos diferentes pontos de vista sobre um objeto tridimensional e em que medida poderia auxiliá-los. Mudanças ocorreram... outros planos vieram... e hoje sugerimos as experiências e as práticas para olhar como um desafio para mudar, resultando nesta tese que restou denominada “A Historicidade e Visualidade: proposta para uma nova narrativa na Educação Matemática”.

Temos então um desafio proposto. Direcionar os estudos investigativos de nossa pesquisa para a historicidade e à visualidade. Sendo nesses estudos que nossos olhos encontram o seu rumo!

Acompanhamos Parzysz (1988), que sinteticamente nos revela que, após a antiguidade clássica, a forma de ver a realidade e o mundo se modificou. Então imaginem após os acontecimentos progressivos, utilitários, diversos, verdadeiros, difíceis e únicos do processo do Renascimento, que passaram a desafiar o nosso modo de ser, de ver, de olhar, de sentir e de representar o mundo e as coisas do mundo!

O essencial é sabermos que nosso modo de olhar, de desafiar para mudar, provoca ainda crenças, que representam modelos no plano daquilo que é visto no espaço tridimensional, pois cada povo, cada cultura visual, a cada época imersa em seus próprios sistemas de pensamentos, criou suas maneiras particulares de transpor para a superfície plana o mundo visível.



Se existem contextos, se existem técnicas de representações, se existem sujeitos... então existem métodos/procedimentos que desenvolvem e concebem estas crenças e nos mostram nossos lugares de sujeitos, como:

- Na produção e reprodução da obra, onde nos é demonstrado que os sujeitos planejam, pensam, refletem e analisam.
- No contar da história... fazer parte natural da sua existência! Ser parte do fato! É saber, é olhar, é trabalhar, é fabricar, é construir, é representar o objeto, ou seja, é ter um espaço experiencial, portanto, é aquele que vemos e representamos.
- No desenvolvimento da capacidade analítica, que pode ajudar na compreensão das dificuldades e dos erros de interpretações visuais dos alunos/das pessoas, podendo entender a construção de um olhar instaurado numa ordem de séculos atrás. Mas também podemos estar pensando no hoje e termos novas narrativas problemáticas, possibilitando novas formas do olhar. Podemos considerar o desenho em perspectiva central, por exemplo, como uma ferramenta adequada para a aprendizagem da geometria espacial.
- No representar propostas para uma nova narrativa na educação matemática, especificamente no campo da perspectiva, é difícil, o significado através dos quais o sentido

mais profundo de nós mesmos, como sujeitos, é construído. Conforme Walkerdine (1995, p. 224), “precisamos analisar essas práticas como discursivas e específicas, para entendermos seu papel de produção de sujeitos no seu interior, ao invés de ver ‘os contextos’ como algo periférico”.

- No explorar a geometrização em si e com outros problemas, outras representações, outras apropriações de produzir significados, ou seja, até mesmo com outras narrativas, quando:

O pensamento, numa era pós-moderna, precisa destruir essas fantasias e reconhecer que o pensamento é produzido nas práticas, está repleto de significado e emoções complexas, que o pensamento sobre o pensamento está profundamente conectado com as formas pela qual o poder e a regulação operam em nossa ordem social presente. Precisamos, portanto, construir novas e diferentes narrativas, que reconheçam práticas específicas, que vejam o lugar dessas histórias na construção de nós mesmos (WALKERDINE, 1995, p. 226).

Temos então o desafio para mudar e nossa mudança processa-se na utilização da historicidade e da visualidade, como propostas para uma nova narrativa da Educação Matemática, nas muitas produções de construções de conhecimentos que podem ter se tornado importantes ou não, podem ter sido transformadas em obra de arte ou não, podem ser para sempre lembradas nas memórias dos homens ou não.

Mas o que queremos trazer para esse momento é uma prática, é um pensamento distinto. Este modo de pensar e de fazer a prática se traduz em um ver, em um olhar e em um representar que permita produzir sentidos ao que está sendo pesquisado/interpretado/ensinado. Neste processo de ensino e de aprendizagem, as explicitações ou as clarificações de ideias e conceitos destacam-se com a temporalidade, com a pessoa e com o contexto, não sendo apresentados de forma linear.

Estes parâmetros são criados por Clandinin e Connelly (2000), que elegem o espaço da pesquisa narrativa como sendo um espaço tridimensional. Mas, em nosso caso, o tripé é embasado nos deslocamentos da história para a historicidade, da visualização para a visualidade e do ensino da geometria para a proposta do ensinar geometria com novas narrativas para a Educação Matemática.

Com essa perspectiva, ressalta-se a compreensão de que os novos processos de narrativas diferem-se. Neste caso, temos uma proposta de discussão de natureza reflexiva e problematizadora de uma prática docente e de novos saberes experienciais<sup>45</sup>. É necessário compreender

---

<sup>45</sup> A referência de uma prática docente e de novos saberes experienciais compreende a organização conjunta e reflexiva do desenvolvimento da tese. O processo de organização, construção e desenvolvimento deu-se da necessidade de estudar e juntar esforços sobre um conceito de história a partir da reflexão de estudos culturais e cultura visual, para concretizar novas relações de saberes e as práticas matemáticas, tecendo aspectos importantes na compreensão de posição, continuidade e interação do tema junto ao grupo de pesquisa GECM/UFSC.

que em um processo dinâmico as práticas imbricadas são impulsionadas na subjetividade e na experiência humana, ocorrendo interpretações de narrativas diferenciadas, e que sempre que retomadas podem se encontrar em processos emergentes diferentes, assim como também são marcadas pelos diferentes processos de escolarizações.

Então muitos são os procedimentos de fazer narrativa. Ousamos compreender e refletir sobre uma abordagem inovadora para a Educação Matemática, isto é, trazer à tona uma narrativa contemporânea que possa ser problematizada e refletida pelos sujeitos que estudam suas práticas – os educadores matemáticos (FLORES, 2010). Correspondendo a estas interações, lembramos que Walkerdine (1995, p. 208) enfatiza que “[...] estas ideias têm se tornado parte não apenas da forma pela qual nós temos pensado o pensamento, mas da forma pela qual este conhecimento constitui um componente central de aspectos [...]”, incorporando-nos nos deslocamentos conceituais.

Retornando ao foco da pesquisa, trazemos nossa questão à tona: como a historicidade e a visualidade podem se constituir como ferramentas para a elaboração de uma nova narrativa na Educação Matemática? Se as informações gerais se sincronizam com as práticas e as estratégias das técnicas de Dürer, compreendem-se, assim, novos discursos que na prática foram empregados para formatar a

representação do real e também para fundamentar verdades matemáticas.

Vale lembrarmos que esse novo processo de narrativa não deixa de possuir em seu caráter formativo, reflexivo e potencializador de produção de sentido à experiência. Contamos aqui que fomos desafiadas a compreender a matemática como um fator de desempenho na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, assim como sua própria composição e a possibilidade técnica para a representação se tornar uma realidade. Desafiadas, sim! Pois, nosso olhar é constituído de regras que formam um modelo interpretativo, tanto de espaço geometrizado, medido, controlado, como o de constituição da identidade do sujeito que direciona o olhar para as condições existenciais que estão no contexto, nas possibilidades e nas necessidades emergentes de produção do fato, contado apenas por um lado da história.

Esta tese apresenta condições para nos auxiliar na produção de uma nova versão da realidade de ensino-aprendizagem, de uma nova verificação empírica e de seus novos requisitos lógicos, que não se comparam aos andaimes do que já temos construído na Educação e na Educação Matemática.

Para tanto, continuamos firmando nossos três momentos seguintes da nova narrativa na Educação Matemática:

1. Problematizar a perspectiva no campo da história;
2. Discutir práticas do olhar instauradas pela técnica da perspectiva;
3. Analisar por meio de imagem “conhecimentos” que se tornam discursivos para olhar e representar.

Passaremos agora a discutir sobre o terceiro passo, ou seja, sobre conhecimentos que se tornaram verdades para olhar e representar.

## 5.2 O PENSAMENTO EM GEOMETRIA

A gravura a seguir é de “San Jerónimo”, uma das mais famosas obras de Albrecht Dürer, datada de 1514. Esta obra constitui uma solução inovadora na iconografia específica<sup>46</sup> e nas formas de representação pictórica do santo patrono dos humanistas cristãos.

Nesta representação observamos San Jerónimo em seu local de estudo, rodeado de elementos de sua época e de sua história. Vale notar que Dürer utilizou-se do reconhecimento da influência da figura humana

---

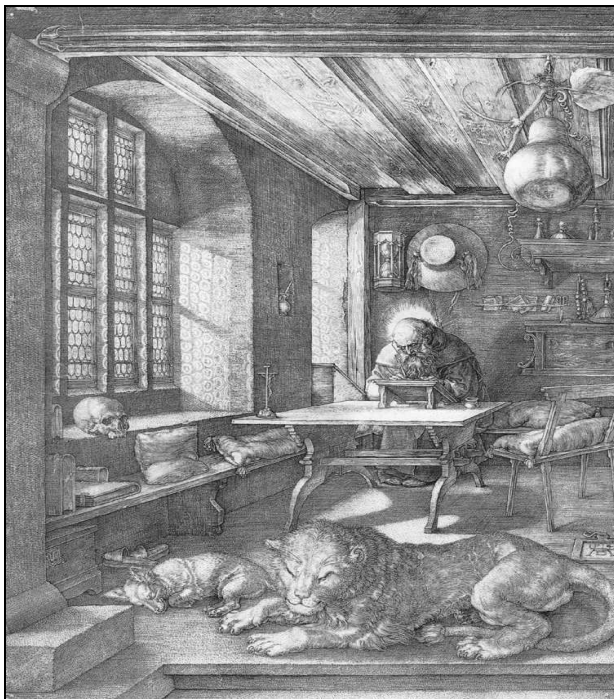
<sup>46</sup> A iconografia específica utilizada na gravura de San Jerónimo foi a xilogravura, uma das mais antigas técnicas de gravação na madeira. O desenho esculpido na madeira com uma goiva (ferramenta utilizada por artesãos ou artistas para talhar os contornos das peças na madeira, metal ou pedra). Depois se esfrega tinta na matriz e cobre-a de papel, inferindo-lhe pressão para reprodução do desenho nesse papel. Na xilogravura a imagem estampada não é invertida como em outras técnicas de gravuras e pode-se tirar várias cópias numeradas e assinadas pelo artista. ERRA, X. Visita dinamizada a *la exposición DE DÜRER A MORANDI* – disponível em: [http://www.ciudaddesaberes.es/not/visita\\_morandi.pdf](http://www.ciudaddesaberes.es/not/visita_morandi.pdf).

idosa (em inteligência e bondade), tendo estampado um homem muito idoso, aparentemente sábio e iluminado pela luz que vem da janela. De fato, o Renascimento situa o homem como ser pensante, centrado em sua razão e iluminado pelos conhecimentos.

Mas a capacidade analítica e fenomenológica, serve a algo mais, que não se apreende na imediata visualização do espaço, da localização e do método que acede de uma vez só o traçado geométrico e a geometria racional. Com efeito, o San Jerónimo de Dürer é um extraordinário exemplo da capacidade da xilogravura renascentista para sugerir também um espaço de interioridade e de meditação.

Em relação a este método, é importante notar que ele se dá sobre a ideia de que o espaço é mensurável e, portanto, todo ponto pode ser nele identificado. Voltaremos a falar sobre o assunto no próximo item.

**Figura 20: San Jerónimo – Albrecht Dürer (1514)**



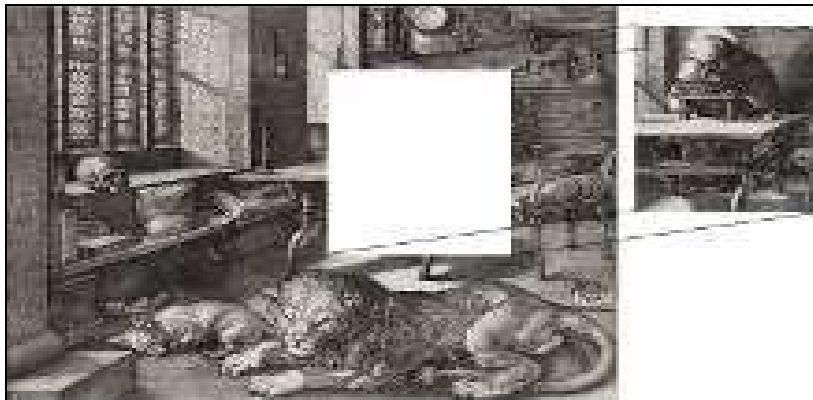
Fonte: (DEVLIN, 2002, p. 206).

Observemos a obra. O que vemos? Um homem a estudar. Mas a percepção de outros fatos e/ou detalhes na obra, nos tem motivado a tentar compreender e investigar a potencialidade das narrativas nos diferentes contextos em que a matemática e a educação se fazem presentes. Logo, nesta gravura não vemos apenas o homem a estudar, mas levamos em consideração a perspectiva e interpretação dos participantes fundamentais do contexto, primeiramente num discurso visual que está relacionado ao regime visual específico: estética, beleza,



harmonia, simetria que coincide com a prática da perspectiva central como:

**Figura 21: O homem iluminado**

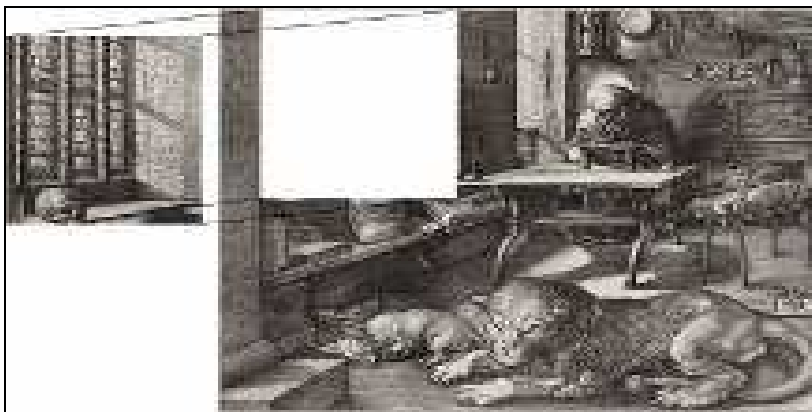


Fonte: (DEVLIN, 2002, p. 206 – imagem modificada).

- O homem iluminado: determina uma visão humanizada da fé, da resistência e da sabedoria de um mestre. Para além, do que percebemos, no uso das novas narrativas para o ensino na Educação Matemática, com a utilização, por exemplo, das imagens, especulando seus tópicos de profundidade, harmonia, ordem, equilíbrio e proporção, é preciso compreender o olhar matemático, construído há tempos para geometrizar as representações. Por fim acreditamos que hoje as novas narrativas viabilizam o ensino e a aprendizagem através da historicidade e da visualidade nas ações da Educação Matemática.

- O crucifixo: num plano recuado e sobre a mesa, focaliza a mensagem redentora num destino espiritual e transcendente, reforça uma postura penitente e de devoção cristã enquanto tradutor da bíblia.
- O crânio: evoca a condição humana e mortal, é como um espelho e destino de todas as vaidades do mundo material.
- O leão: num primeiro plano, visão da expressão do que é lealdade, do invencível a todos os seus ataques e tentações.

**Figura 22: Representação do mundo em perspectiva**



Fonte: (DEVLIN, 2002, p. 206 – imagem modificada).

- A janela<sup>47</sup>: representa o mundo em perspectiva, configura-se em luz e em ponto para olhar. Matematicamente construída, com retas paralelas e com retas perpendiculares, equilibra o

---

<sup>47</sup> Esta é uma formulação de Alberti, o qual diz que o quadro age como uma janela para o mundo, uma janela que se abre para o infinito, um infinito próximo e fictício pondo o olhar em perspectiva. Este modo de ver e representar criou a perspectiva (PANOFSKY, 1981).

espaço formado. A prática de Dürer tem seus pressupostos ancorados nas leis matemáticas, sendo que as mesmas nos permitem fazer comparações com o mundo real.

Segundo Devlin (2002), a obra de Dürer é iconograficamente muito rica. “San Jerónimo no seu estudo” tem o alcance de uma celebração do Renascimento. Embora represente um santo do século IV, a gravura transporta-nos para os finais do século XV, contendo alusões a mestres do Renascimento como Leonardo da Vinci, Michelangelo e Pacioli. De fato, a época de Dürer foi impregnada pelo estudo da perspectiva.

A busca desta comunicação imaginária (o que conseguíamos ver) com o que agora é real (o que conseguimos ver) permite-nos produzir sentido ao que está sendo ensinado e representado uma instância de produção de enunciados permeados de vozes anteriores que ajudam a esclarecer e compreender o assunto promovido neste espaço, descartando a desagradável sensação de não estarmos encontrando eco no pensamento e na aprendizagem dos nossos alunos.

Contudo a compreensão desta prática está relacionada ao modo como problematizamos, como pensamos que se aprende, então não significa necessariamente irmos à história buscar um ponto de partida, mas os fundamentos que nos fazem compreender determinados parâmetros os quais elegem experiências, conceitos, técnicas e

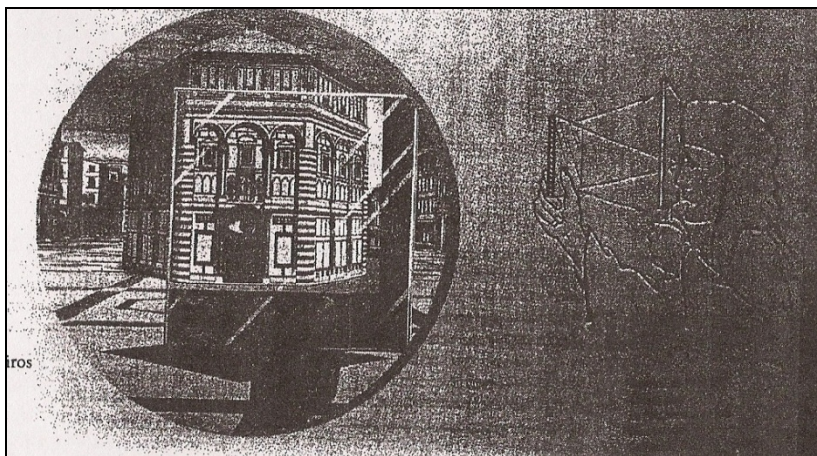
personagens. Estamos tentando mostrar uma proposta para uma nova narrativa de como podemos considerar a história como uma estratégia para questionar nossos hábitos no ensino de matemática atualmente.

Neste caso, não podemos deixar de acompanhar Flores (2007a) ao apresentar a pergunta que provocou a invenção da técnica da perspectiva: como representar de maneira real o mundo e as coisas do mundo? Pois a história contada de maneira breve tem seu início na prática de Filippo Brunelleschi, que se narra da seguinte maneira: Brunelleschi, em torno de 1413, realizou uma experiência a partir de duas pinturas executadas sobre pequenos quadros – em um esboçou a praça e o palácio da Seigneurie e, no outro, uma vista exterior do *baptistère San Giovanni de Florence*. Seu objetivo era mostrar que cada um dos quadros pintados coincidia com a imagem real.

O que fez Brunelleschi para demonstrar seu dispositivo prático? A experiência foi engenhosa, mas funcional, vejamos: o espectador deveria colocar diante de um espelho o quadro representando o *baptistère de Florence*, por exemplo, e, através de um pequeno orifício feito no quadro, olhar o reflexo da imagem pintada. Mas, para que o quadro pintado e o modelo transparecessem o mesmo, o espectador deveria se colocar em frente ao modelo, exatamente onde o pintor se pôs para executar o processo. A visão direta do modelo seria ocultada, mas o espectador, vendo com um só olho através do orifício, poderia verificar

as regras da perspectiva central que permite construir uma imagem comparável com o objeto imóvel (Figura 23). Este relato foi redigido por Manetti<sup>48</sup>, em torno de 1475 (COMAR, 1992, p. 31-33).

**Figura 23: Representação da experiência de Brunelleschi – 1413**



Fonte: (COMAR, 1992, p. 32).

Mas o primeiro a fornecer uma descrição formal de um sistema de perspectiva foi Leon Battista Alberti, no ano de 1435, quando expôs a “Construção Legítima” em seu *De Pictura*. Pode-se afirmar que, a partir desta construção dita geometricamente exata, houve mudanças no modo de ver e no modo de representar, ocorrido após a expressão plástica ter passado a adotar uma visão do espaço que permite mensurá-lo, construí-lo de maneira científica e representá-lo geometricamente. Tais ocorrências inspiram outros artistas a aprimorarem o estudo da

---

<sup>48</sup> Antonio Manetti (1423 – 1497): italiano matemático e arquiteto, de Florença. Também foi o biógrafo do arquiteto Filippo Brunelleschi.

perspectiva, como Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci, entre outros, e assim proporcionaram maiores avanços na área.

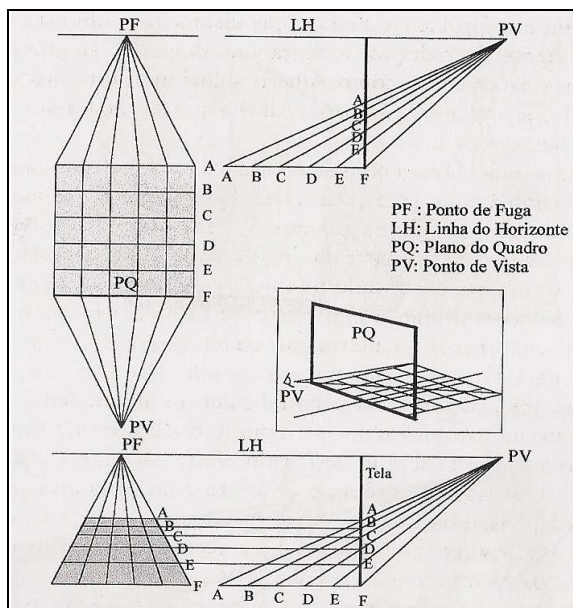
Para Alberti, o quadro é definido como uma “janela aberta” através da qual olhamos a mundo e os objetos do mundo (Figura 24). Para fazer coincidir a imagem da realidade com sua reprodução sobre um plano, o desenhador deve usar somente um olho e conservar a mesma posição. Conforme descrito por Flores (2007a):

O método de Alberti consiste em, inicialmente, traçar um quadrilátero do tamanho que se queira. Divide-se a linha de base deste quadrilátero em tantas partes quantas se pode obter; sendo cada parte correspondente a uma parte da divisão da altura do homem<sup>49</sup> em três partes. Um ponto é colocado no interior deste retângulo conforme a altura do homem; este será o ponto de fuga principal. Em seguida, traçam-se perpendiculares ao quadro, que convergem a este ponto. Para obter as transversais ao quadro, realiza-se um esquema auxiliar: traça-se uma reta perpendicular à linha de terra, coloca-se um ponto na mesma altura que o ponto de fuga e cuja distância em relação a esta reta será a mesma do olho ao quadro. Deste ponto, traçam-se as retas que vêm ao encontro com os pontos correspondentes à divisão da linha de base. A interseção obtida de cada uma dessas retas e a reta perpendicular fornecerá o ponto de onde partem as retas paralelas ao quadro (FLORES, 2007a, p. 52).

---

<sup>49</sup> Alberti considera o tamanho dos homens para a obtenção da unidade de medida da composição.

**Figura 24: Representação do método de Alberti**



Fonte: (FLORES, 2007a, p. 53).

A construção proposta por Alberti sofreu interpretações e modificações por seus sucessores, existindo, portanto, uma variedade de métodos utilizados na Renascença, entre eles o portilhão de Dürer<sup>50</sup>.

Então, Dürer, também preocupado com o desenho em perspectiva, emprega conhecimentos em relação à teoria da perspectiva, oriundos de leituras de tratados italianos, sua fonte de inspiração nos estudos, pois tinha o objetivo de valorizar a ciência como força orientadora da vida e da arte. Seus conhecimentos impressionam, como

<sup>50</sup> Explicações detalhadas sobre este método podem ser encontradas em Bessot e Le Goff (1993, p. 199-223) ou descritas também em nosso capítulo IV, com a denominação de “a portinhola”, p. 82.

a espiral de Arquimedes, por exemplo, construída com a ajuda de círculos e de regras sobre as quais se deslocam os pontos materiais, como vemos em Suárez (2006):

Descrição recomendada por Dürer

Depois de sugerir uma primeira espiral simples (Livro I, construção 6), Dürer oferece ao leitor uma outra, ajustada para a seguinte descrição:

O início no centro, você pode fazer onde você queira, mas considerando que o espaço entre as espirais é sempre o mesmo, exceto na primeira. Faço esta espiral da seguinte maneira: Coloquei um ponto e desenhei um círculo tão grande quanto eu quero fazer o desenvolvimento da espiral, e dividi essa linha circular com 12 pontos em 12 partes iguais. Em seguida traço a partir do centro "a" uma linha reta para a parte superior da circunferência, cujo extremo será "b". Neste mesmo ponto eu começo a numerar até o 12 e começo no lado esquerdo - 1, 2, 3, etc. - Os pontos que dividem a circunferência para dar a volta e chegar de novo no 12. A linha reta "ab" dividida com 23 pontos em 24 partes iguais e começo a numerar em "a" - 1, 2, 3, etc. -. Em seguida tomo uma régua reta e marco nela os pontos mencionados na linha "ab", designando-os pelos seus números. Coloco com o seu extremo "a" no centro "a" e com o extremo em "b" no ponto 1 da circunferência, e, onde indicado o ponto 1 da régua, coloco outro 1. Assim vai girar para todos os pontos da circunferência deixando a régua sempre fixa no centro "a", deste modo os pontos da régua indicam todos os pontos do espiral com os números onde de deve por (colocar). Se você fixar nos números, você não poderá errar. Mas, se a linha faz duas voltas, e na circunferência existem 12 pontos e na régua que está girando 23, tenha cuidado para que os números de régua mantenham uma ordem, de modo que o número 1 corresponderá a 13, o 2 ao 14, o 3 ao 15, o 4 ao 16, o 5 ao 17, o 6 ao 18, o 7 ao 19, o 8 ao 20, o 9 ao 21, o 10 ao 22, o 11 ao 23". (DM, I, p. 138)



### Parafraseando a construção

Construir uma circunferência de centro A e raio arbitrário.

Desenhar um dos raios da circunferência AB.

Dividir o raio em 24 partes iguais.

23 circunferências novas são desenhadas (traçadas) com centro A e raio ajustado para as divisões listados no segmento AB.

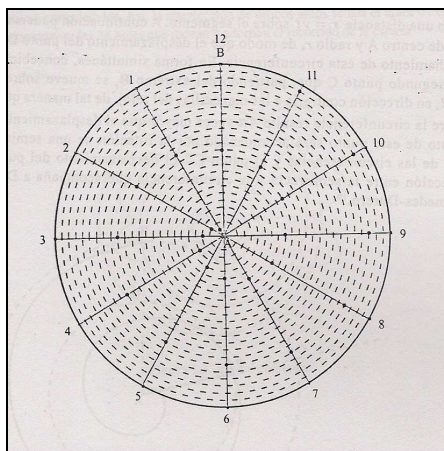
Dividir a circunferência inicial em 12 arcos iguais, a partir de B.

Desenhar (traçar) os 12 raios correspondentes.

Em seguida, marcar os pontos da *telaraña* ajustados ao seguinte procedimento: movendo a partir do centro para a periferia e movendo-se na direcção contrária ao sentido horário, a partir do raio AB, se seleccionam as sucessivas intersecções entre as circunferências e os raios desenhados.

A espiral é a curva sobre a qual se marcam os pontos seleccionados para se adequar à regra de construção.

**Figura 25: Espiral de Arquimedes-Dürer (forma discreta)**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p. 27).

### Construção contínua

O procedimento descrito por Dürer nos permite seleccionar 24 pontos que se ajustam na regra de

construção de uma espiral de Arquimedes<sup>51</sup>. Esta quantidade é suficiente para que o leitor forme uma imagem conjunta da curva gerada. Se aumentarmos os números de divisões, conservando a relação 1:2 (entre as divisões da circunferência e do raio) de modo que a espiral complete duas voltas, você começa uma série variada de pontos, uma série que melhora a nossa percepção global da espiral. No entanto, ainda estamos muito longe da curva que buscamos<sup>52</sup>. Agora, se você quiser um traço contínuo da curva devemos conceber a possibilidade de dividir a circunferência e o raio em um número ilimitado (tão grande quanto você quiser) de fragmentos.

Em seguida, propomos um modelo de construção contínua para a espiral de Arquimedes-Dürer. A base da construção é uma circunferência e alguns dos seus raios AB (de comprimento R). Imaginamos um ponto D, que pode mover-se(deslocar-se) livremente a partir do centro do círculo ao longo do segmento AB, suponhamos também que esse ponto se desloca a uma velocidade constante<sup>53</sup>. Transcorrido certo tempo "t", esse ponto terá se deslocado (movido) uma distância  $r = v.t$  sobre o segmento. Em seguida, podemos desenhar uma circunferência com centro A e raio "r" de modo que o deslocamento do ponto D é acompanhado pela ampliação desta circunferência. De uma maneira simultânea, concebemos o deslocamento de um segundo ponto C que, partindo do extemo B, se move sobre a circunferência de raio R, em direção contrária ao sentido horário, de tal maneira que a distância percorrida sobre a circunferência resulte  $4\pi$  vezes

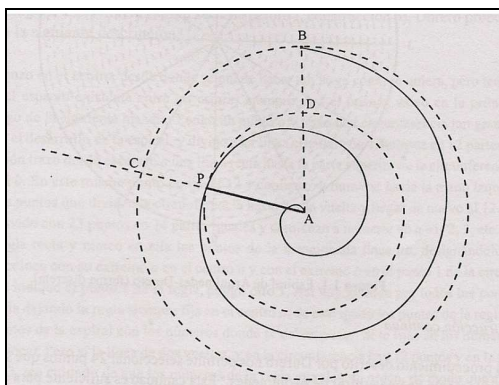
<sup>51</sup> Na época de Dürer não existia ainda uma publicação em alemão da obra de Arquimedes. É possível que Dürer tivesse conhecimento desta através de sua amizade com J. Werner (1468-1528), que tinha em suas mãos a tradução em latim realizada por Jacob Von Cremona. Indicação de bibliografia: veja em Hofmann, von J. E., 1971, p. 91, n. 16.

<sup>52</sup> A curva que buscamos é aquela que reúne todos os pontos vizinhos que estejam em conformidade com a regra de construção proposta por Dürer.

<sup>53</sup> A constância da velocidade não é uma condição necessária para a construção da espiral.

maior que o deslocamento do ponto D. O movimento deste ponto será acompanhado por uma rotação de um raio (uma semireta) que contém a origem de circunferências e o ponto C<sup>54</sup>. O deslocamento do ponto P, resultado da intersecção entre o raio e a circunferência que acompanha D, gera a espiral de Arquimedes-Dürer (SUÁREZ, 2006, p. 26-28 – Tradução nossa).

**Figura 26: Espiral de Arquimedes-Dürer (forma contínua)**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p. 28).

Em seguida, Dürer assinala uma série de aplicações possíveis na arquitetura, na pintura, na gravura etc. A fim de explorar esta nova narrativa na Educação Matemática, que se configura em outras problemáticas, na geometrização do espaço, no exercício de um pensamento mais racional e objetivo, na sistematização dos conhecimentos que quando envolvidos a um contexto, fazem parte de

---

<sup>54</sup> O ângulo  $\theta$  varrido pelo raio pode ser expressado como segue:  $\theta = (4\pi)/R$ , se o ponto C percorre uma distância igual a  $2\pi$  e se seguindo o mesmo procedimento, obtêm-se uma espiral de uma volta.

uma demanda atual, Walkerdine (1995) ressalta a importância dessa utilização, sendo que:

[...] precisamos compreender o pensamento não como uma grande metanarrativa, não como algo aplicado por nossas mentes através do tempo e do espaço, mas como algo específico, como algo que produz as pessoas, de formas diferentes, em diferentes lugares e épocas. Nessa visão, não existe nenhum conceito abstrato a respeito da existência de um “pensador”, mas a forma como nós somos pensados e a forma como nós pensamos se tornam parte da própria questão. [...]. [...]

[...] Se é assim, precisamos compreender a forma pelas quais as práticas funcionam e pelas quais os significados são produzidos no interior dessas práticas. Essa abordagem exige um exame da forma pela qual o sujeito e o social são criados de forma cognoscente criando um mundo conhecido (WALKERDINE, 1995, p. 221).

Segundo Peiffer (1998), todo esse aparato foi possível devido à paixão que Dürer tinha pela arte e pela matemática, tornando-se um observador e estudioso incansável para quem a arte era, sobretudo, meio de conhecimento do mundo. E arte também era um mundo a ser conhecido.

Concebida a arte como uma representação fiel da realidade e em algumas de suas obras buscava traços psicológicos do ser humano, e conseguia retratá-los em seus quadros, como, por exemplo, o de San Jerónimo, já citado, onde registra fielmente os traços físicos do personagem e também a atitude de preocupação com a tarefa que lhe foi atribuída – a tradução da bíblia. Afirmamos que a representação aqui

descrita é um modo fecundo e apropriado de produzir significados e saberes atribuído no sentido, na importância, no propósito e na prática de quem está falando ou analisando uma obra ou um fato. No entanto, nos vale notar que, Dürer é tido como um artista matemático, devido a sua forma própria de criar e de expor seu método para se fazer compreender e estimular a aprendizagem.

É importante ressaltarmos que as interações nos espaços de aprendizagem carregam significados e que promovem novos meios de narrativas matemáticas. Quando tivermos ação, contexto, credibilidade e destaque dentro dos nossos mais variados processos matemáticos abordados, perceberemos que estaremos narrando aos outros nossas próprias histórias, de maneiras diversas, de criações diversas, de percepções diversas, de motivações diversas, de potencialidades diversas em suas narrativas diferentes e em contextos, estudos educacionais e espaços relacionados ao que a matemática e a educação se fazem presentes.

### 5.3 O OLHAR EM PERSPECTIVA PARA O INFINITO

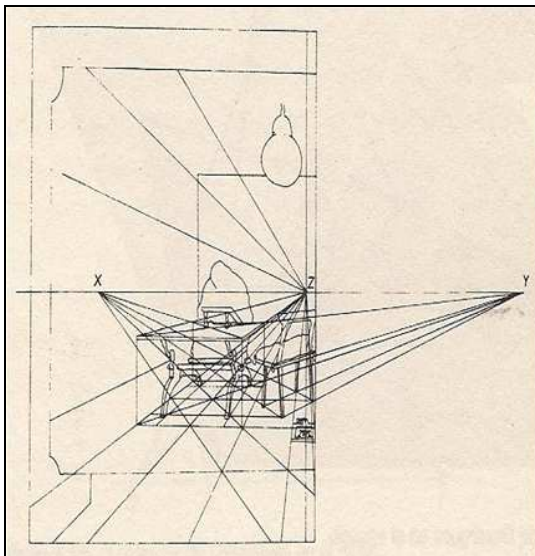
Voltemos a olhar a gravura de San Jerónimo.

Quais saberes matemáticos teriam organizado o espaço desta obra de arte?

Vamos tocar aqui no infinito, ou seja, o infinito desenhado em perspectiva.

Para desenvolver esse princípio de perspectiva, Dürer percebeu a necessidade de criar uma impressão correta de profundidade na obra. Para tanto, estabeleceu três pontos no infinito. Como? Na cena a ser pintada, traçou linhas paralelas do quadro que, se prolongadas, se cruzariam, determinando os pontos X, Y e Z, que deveriam estar localizados sobre a mesma linha, chamada de “linha no infinito”, podendo ser observado na Figura 27.

**Figura 27: San Jerónimo – Albrecht Dürer (1514) - Perspectiva de três pontos no infinito (X, Y e Z) sobre a mesma linha**



Fonte: (DEVLIN, 2002, p. 206).

Segundo Devlin (2002), mais tarde os matemáticos da geometria projetiva também observaram a necessidade de introduzir pontos no infinito, também chamado de “ponto ideal”. Supõe-se, então, que cada linha de um plano tem um ponto ideal; que duas linhas paralelas se

cruzam em seu ponto comum no infinito; que estes pontos estão sobre uma única linha reta, a linha no infinito; e que tal linha não contém outros pontos, a não ser os pontos no infinito. Logo, existe apenas um ponto ideal para cada linha paralela, não havendo a ideia de que uma linha se estenderia ao infinito em ambas as direções. Explica-se da seguinte maneira: “na geometria euclidiana uma linha reta que prolonga para (sem cruzamento) dois pontos no infinito em duas direções, mas que não é o caso da geometria projetiva: para cada linha, existe apenas um ponto no infinito, e pertence à linha” (DEVLIN, 2002, p. 207).

Continuando, Devlin (2002) nos esclarece que os pontos ideais e a linha ideal foram concebidos para evitar problemas de paralelismo, sendo que esta não é uma noção da geometria projetiva, uma vez que as projeções podem atrapalhar o paralelismo, pois “devido à sua propensão euclidiana, a mente humana não pode ver linhas paralelas se cruzarem, de modo que não é possível visualizar todo o processo de adição destes pontos ideais e da linha de ideal. O desenvolvimento da geometria projetiva deve ser axiomático” (DEVLIN, 2002, p. 207).

Os processos a serem executados neste caso (San Jerónimo, uma xilogravura), ou em outras pinturas, não eram simples. Mas Dürer, empenhado em seus estudos, acreditava que podia ser desenvolvido por pessoas sem o domínio da técnica da perspectiva, bastando seguir algumas regras e possuir o mínimo de habilidade para a arte. O que fez

Dürer, então, para auxiliar os artesãos? Propôs o modelo de três máquinas que ajudassem no benefício de nível de abstração da técnica, conforme discutimos no capítulo IV. Estes instrumentos foram tidos como máquinas para desenhar, ou perspectógrafos. Eles mostraram os princípios fundamentais da perspectiva da época que eram:

- Imobilização do olho do desenhador;
- Intersecção do raio visual com o plano do quadro;
- Raio visual concretizado por um fio.

O resultado desta produção emocional, realista, abstrata e contemporânea está entre o limite da realidade que o homem sincronizou com as experiências constantes e compostas que fluem de sua visibilidade e conceituação de um mundo, onde se coloca como espectador e reinscreve seu espetáculo. E o espaço do criador e da criação fica na premissa de sua própria oferta de falsa sensação de poder.

Consideramos que estas elaborações, construções, realizações de atividades e outras práticas das atividades humanas possibilitam a recuperação de erros e acertos em nossos resultados de pesquisas, argumentando a necessidade de conhecimento histórico, que admitem complementações e manifestações nos discursos científicos, bem como sua recorrência na história e no tratamento da manifestação cultural, imprescindíveis à Educação e à Educação Matemática.



Segundo Suárez (2006), uma maneira de exemplificar o dito é tomarmos o auxílio de inspiração de uma das máquinas de desenho de Dürer (a máquina da portinhola – descrita no capítulo IV). Com adaptações, a mesma tornou-se mais precisa matematicamente, melhorando a determinação dos ângulos de refração, assim como a medição e o cálculo, servindo para os fundamentos da óptica geométrica de Kepler (1571-1630) – o nascimento de uma nova era na física, a qual obteve um melhor diâmetro dos vidros que foram usados, o que significou definir com precisão geométrica uma forma de fundição mais apurada.

Em suma, as máquinas fundam um modelo visual, ou melhor, uma prática para olhar. Conforme vimos em Jay (1988), estamos falando de uma era essencialmente ocularcêntrica, “da visão como sentido mestre da era moderna”, iniciada com o Renascimento e as revoluções científicas: a invenção da imprensa, a fotografia, o telescópio, o microscópio, o cinema, enfim construíram um campo perceptual da visão.

A exposição anterior foi realizada para ficarmos interessados dos acontecimentos, mas agora, voltando ao nosso foco de pesquisa, temos que, no Renascimento, a beleza substituiu, em parte, o culto do sagrado

onde a perspectiva cartesiana<sup>55</sup> nos proporcionava a beleza da semelhança e o culto do estático. E este novo conceito de espaço tornou-se geometricamente isotrópico, retilíneo, abstrato e uniforme.

Esta prática de olhar perspectivado é empregada por todo o tratado de Dürer. Seu método não é dogmático, ele deixa a cada um a liberdade da escolha. Ele não escreve um manual. Ele constrói, com exatidão, uma geometria da descoberta, ele matematiza o desenho. Diante do dito estaremos expondo dois exemplos, sendo o primeiro de como ensinar a desenhar um cubo, notando que ele mesmo propõe o esquema de Euclides. E o segundo exemplo contempla a construção de um eneágono. Vejamos as descrições, conforme Suárez (2006):

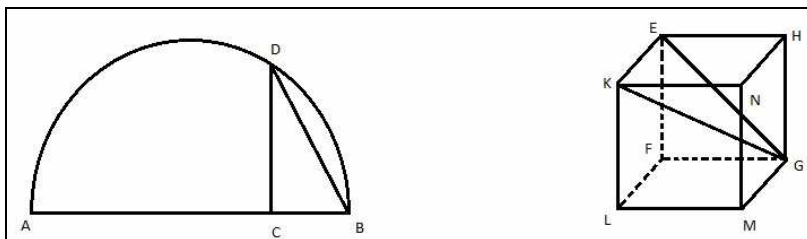
1. Inicialmente ele constrói uma circunferência de diâmetro AB.
2. A seguir, divide o diâmetro, de tal forma que, ao marcarmos um ponto C, este divida o segmento sendo o segmento AC duas vezes maior que o segmento CB.

---

<sup>55</sup> Conforme Jay (1988), o perspectivismo cartesiano, em conjunto com um mundo científico, foi visto como já não lendo o mundo como um texto divino, bem pelo contrário, viu-o situado numa ordem espaço-temporal matemática cheia de objetos naturais que só podiam ser vistos desapaixonadamente pelo olhar neutro do investigador. O “mundo como representação” cartesiana funda a cultura ocidental do conhecimento, da moral e da estética.

3. Traça-se a perpendicular ao diâmetro, passando pelo ponto C. A interseção entre a perpendicular e a circunferência é o ponto D.
4. Unem-se os pontos B e D formando o segmento DB.
5. Constrói-se um quadrado cujo lado tem a mesma medida do segmento DB. Este quadrado foi denominado EFGH.
6. A partir dos vértices deste quadrado, traçam-se perpendiculares ao plano que se estendem até os pontos K, L, M, N.
7. A seguir traça-se, em um novo plano, o quadrado KLMN. Finalmente, traçam-se as diagonais EG e KG. KG é o diâmetro da esfera que contém o cubo e EG é o diâmetro da circunferência que circunscreve o quadrado EFGH, conforme a Figura 28.

**Figura 28: Representação de Dürer do cubo (conforme Euclides)**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p. 198-199).

Com esse método pode-se concluir: o diâmetro da esfera que circunscribe o cubo ao quadrado ( $d$ ) é igual a três vezes o lado do quadrado ( $L$ ) ao quadrado  $d^2 = 3L_c^2$ .

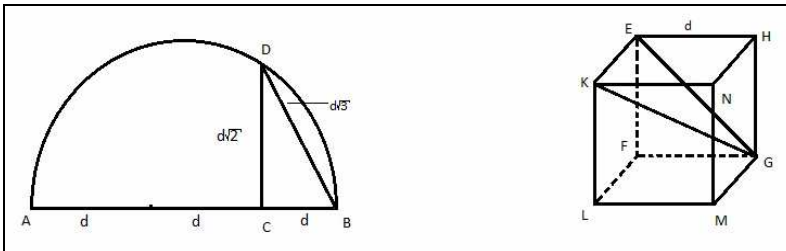
Como demonstrar: tomamos o quadrado EFGH (observe na figura 27) cujo lado é igual ao segmento DB. Depois da construção do cubo, podemos observar KG, que é o diâmetro da esfera que contém o cubo e EG é o diâmetro da circunferência que circunscribe o quadrado EFGH. Então:  $d^2 = 3L_c^2$ . O diâmetro da esfera inscrita ( $d_{inscrito}$ ) deve ser igual ao lado do cubo ( $L_c$ ).

$$d_{inscrito} = L_c$$

$$\text{Então: } d_{inscrito} = \frac{d_{circunscrito}}{\sqrt{3}} \approx 0,577 d_{circunscrito}$$

Ou seja, algebricamente podemos operar da seguinte forma, onde obteremos o mesmo resultado (Figura 29):

**Figura 29: Representação de Dürer do cubo (com cálculo algébrico)**



Fonte: (desenho SUÁREZ, 2006, p. 198-199 – imagem modificada)

$$AC = 2CB$$

$$AB = 3d$$

$$DC = \sqrt{d \cdot 2d}$$

$$DB = \sqrt{2d^2 + d^2}$$

$$EG^2 = 3 \cdot d^2$$

$$DC = d\sqrt{2}$$

$$DB = 3\sqrt{d}$$

$$(d\sqrt{2})^2 = 3d^2$$

O diâmetro da esfera inscrita deve ser igual ao lado do cubo, veremos:

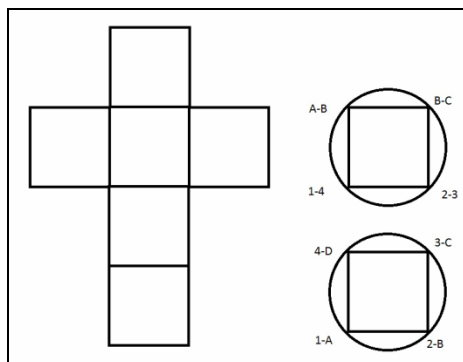
$$\emptyset e_c^2 = 3 \cdot L_c^2$$

$$\emptyset e_c = \sqrt{3} \cdot \emptyset e_i$$

$$\emptyset e_i = \frac{\emptyset e_c}{\sqrt{3}}$$

Dürer propôs um esquema para a representação plana e a vista de frente de um cubo. Utilizando este esquema, segundo Suárez (2006), temos a possibilidade de montar um cubo.

**Figura 30: Planificação do cubo proposta por Dürer**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p.199).

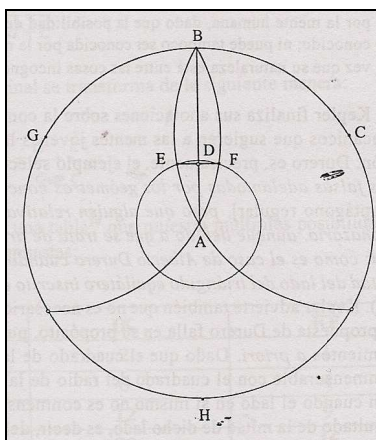
Suárez (2006 – tradução nossa) descreve neste processo de formação e organização do espaço a construção do eneágono<sup>56</sup> conforme sugestões realizadas por Dürer, sendo:

- 1) Desenhar um triângulo equilátero  $GCH$  inscrito em uma circunferência;
- 2) Fazer centro nos vértices  $G$ ,  $C$  e traçar circunferências de raio idêntico ao da circunferência inicial;
- 3) Unir, por meio de um segmento, o centro da circunferência inicial ao ponto  $B$  – intersecção das circunferências secundárias;
- 4) Dividir este segmento em três partes e traçar uma reta perpendicular à divisão mais próxima do centro que nos permita estabelecer os pontos de corte  $E$  e  $F$  com as circunferências que encerram o segmento mencionado;
- 5) Assumir o segmento  $EF$  como base para construir um eneágono inscrito em uma circunferência de raio igual ao comprimento medido a partir do centro e um ponto qualquer de intersecção.

---

<sup>56</sup> Pelas verificações de Panofsky, a proposta de Dürer para construir o eneágono não está contida em qualquer fonte escrita. Indicação de bibliografia: veja em Panofsky, 1982, p. 267.

**Figura 31: Construção do Eneágono proposto por Dürer**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p.177).

Os seguintes cálculos permitem uma aproximação do método proposto por Dürer. Imagine um sistema de coordenadas com origem no ponto A. O centro de ponto C de arco BEA possui coordenadas  $(R\cos(30^\circ), R\sin(30^\circ))$ , no entanto o de centro G e de arco BFA está localizado em  $(-R\cos(30^\circ), R\sin(30^\circ))$ . Logo, as equações das circunferências com centro C e G e raio R são:

$$(x - R \cos(30^\circ))^2 + (y - R \sin(30^\circ))^2 = R^2$$

$$(x + R \cos(30^\circ))^2 + (y - R \sin(30^\circ))^2 = R^2$$

A coordenada horizontal que localiza o ponto E, aquele que ordena a circunferência com centro em C equivale a

$$\frac{R}{3}$$

$$x_E = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{35}}{6} \right) R$$

No entanto a coordenada horizontal de F é:

$$x_F = \left( \frac{\sqrt{35}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R$$

Logo, o domínio  $\delta$  do segmento que constituirá a base para o eneágono é:

$$\delta = x_F - x_E = \left( \frac{\sqrt{35}}{3} - \sqrt{3} \right) R \approx 0,239976R$$

Assim sendo, podemos estimar a metade do ângulo central do eneágono:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{-R}{\delta}} = 0,359963681$$

Sendo:

$$\alpha = 39,594068^\circ$$

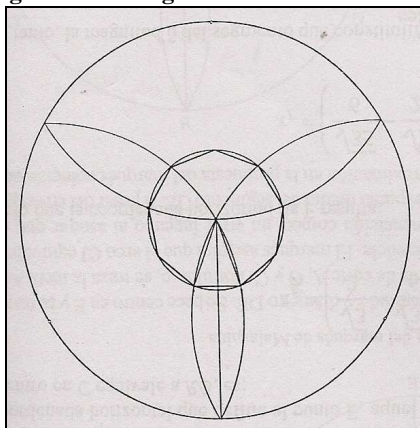
Se no eneágono tivermos um ângulo central equivalente a  $40^\circ$ , a aproximação de Dürer é realmente satisfatória. Observe:

$$\alpha = \frac{1}{2}(120^\circ - 39,594068^\circ) = 40,202966^\circ$$



A seguinte figura nos mostra a construção aproximada de um eneágono a partir dos três segmentos transversais ‘bexigas de peixe’ e das três bissecções restantes dos ângulos.

**Figura 32: Eneágono modificado de Dürer**



Fonte: (SUÁREZ, 2006, p.179).

Isto nos leva à reflexão de que estas práticas de olhar criam um conjunto de saberes, ou de discursos, que são a base da historicidade e das visualidades, constituindo-se como campo de estudo e de metodologia para o ensino e a aprendizagem da matemática. Autores, como Machado (1994), também nos determinam o quanto a história da matemática na formação de professores é importante, servindo como elemento que:

Explicita a situação da Matemática como objeto de cultura, como ferramenta de trabalho, que revele com clareza o quanto à matemática está inserida no processo histórico-cultural, onde é produzida, e que ela ajuda a produzir. Uma visão que logre a superação do mito da Matemática hermética, ciência dos “eleitos”, cuja função

primordial, como a de outros mitos, é a justificação de privilégios de diferentes ordens através do elogio da técnica, ou de uma dimensão dela (MACHADO, 1994, p. 17).

Ao evidenciarmos e identificarmos um campo de pesquisa, como o exposto em nossa tese, com a proposta de articularmos questões visuais para uma nova narrativa na Educação Matemática com deslocamento da historicidade e da visualidade, com a intenção de alimentarmos verdades em torno dos saberes matemáticos, compreendemos o que Machado (1994), nos passa em sua interação. As evidências e as possibilidades de inserção no contexto, só ocorrerão se existir uma identificação com o campo de pesquisa, a qual conduza o processo ao feito das análises e leve a experiência a um corpo de conhecimentos que orienta o sujeito a encontrar conexões com “[...] o futuro que está aberto e o passado que está vigente” (LARROSA, 1996, p. 137).

#### 5.4 A GEOMETRIZAÇÃO DO ESPAÇO

A perspectiva central teve seu emprego conforme discutimos anteriormente, sendo marcada pelas características gerais da racionalidade, da dignidade, do rigor científico, do ideal humanista e da reutilização das artes greco-romana. Tendo sempre em vista no desenho ou na pintura as diversas distâncias e proporções que têm entre si e os objetos vistos à distância, segundo os princípios da matemática e da geometria.

Retomando a pintura de Adão e Eva (capítulo IV – 1504), Dürer estudou intensamente a geometria e tinha um completo domínio da perspectiva e da profundidade. Nossa análise trouxe procedimentos da prática subjetiva, onde as pessoas configuram o visual de objetos e processos advindos de seus diferentes contextos e escolarizações formativas, permitindo articular diversas perspectivas sobre a visualização em uma determinada atividade matemática.

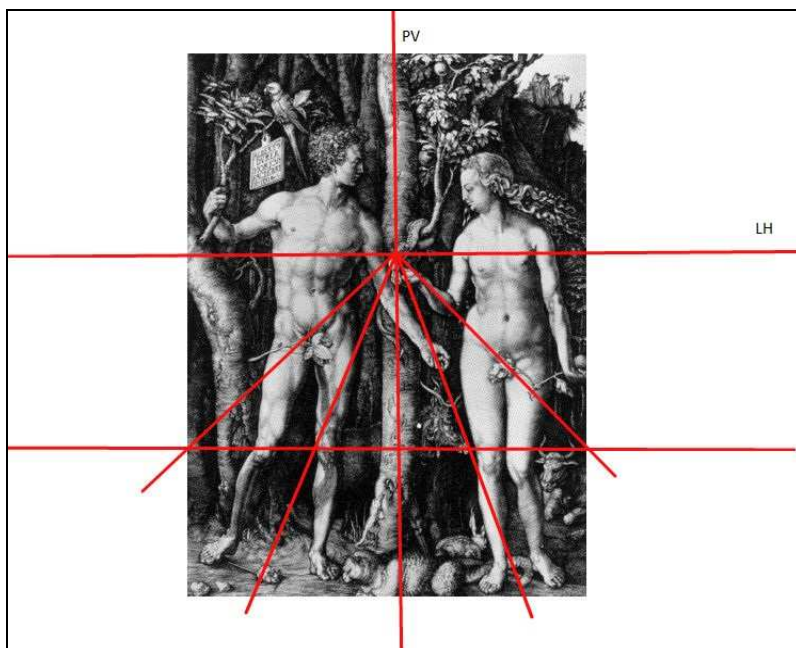
Neste enfoque estamos interessados em relacionar uma forma de percepção de espaço geometrizado – nossa observação – com a modalidade de expressão ostensiva da matemática. O que observamos de imediato ao trabalharmos com a obra de arte (Adão e Eva – 1504) é que algumas estruturas básicas do pensamento se construíram e se consolidaram, como a linha de horizonte, o ponto de fuga e o ponto de vista do observador, pautando-se assim de uma ordem técnica, que em determinado momento se tornaram produções aparentes da figura, mantendo nosso olhar objetivado, perspectivado, racionalizado, controlado e mediado pela razão que se interpõe na atividade de visualização.

Quando falamos nesta obra, deixamos claro que é o nosso olhar observador, analisador, organizador que interpõe e reflete como ser figurante. Logo, não necessariamente precisam estar posicionados na obra alguns dos comentários realizados, ou pode acontecer o contrário, a

imagem pode estar lá e nós não a inserirmos em nossos raciocínios matemáticos.

Em relação à pintura, não podemos deixar de citar que sua imagem tem a existência simultânea de dois sentimentos de poderes contrários o de quietude e o de temor da transgressão, não obstante do desejo e da possibilidade de realizá-lo. Já expressos nas formas e nos gestos de Adão e Eva, sendo que estes são enfatizados e sintetizados pela serpente colocada no centro da cena. Isto é, o pintor coloca o ponto de fuga (PF) na cabeça da serpente.

Vamos trabalhar com a Figura 33. Neste momento esta é a nossa obra de arte:

**Figura 33: Adão e Eva - Albrecht Dürer (1504)**

Fonte: (THE BOOK OF ART. 1967, p. 118 – imagem modificada)

O efeito de perspectiva no quadro é obtido com a diminuição do tamanho das figuras em segundo e terceiro planos e com os modelos de figura humana serem muito próximos ao ser humano real. Tem-se nesta pintura a percepção da execução de uma aritmética corporal implícita nas estruturas anatômicas, o que permitiu a utilização de cálculos para concretizar as imagens representativas da natureza e, como um passo de mágica, Dürer inverte a situação: volta ao passado, mas anuncia tempos novos que constituem a essência da realidade.

A análise da pintura por meio da técnica da perspectiva nos revela o enquadramento do nosso modo de ver. Ao observarmos a obra,

temos uma direção certa do nosso olhar, a cabeça da serpente. Isto acontece devido ao encontro das linhas que convergem para o chamado ponto de fuga (PF) central da imagem, situado na linha do horizonte (LH).

A árvore, onde a cobra se encontra enrolada em um de seus galhos, nos mostra a simetria executada na pintura, isto é, nos dá a conformidade de medida entre as partes dispostas em cada lado da linha divisória. Esta linha vertical identifica o ponto de vista do observador (PV).

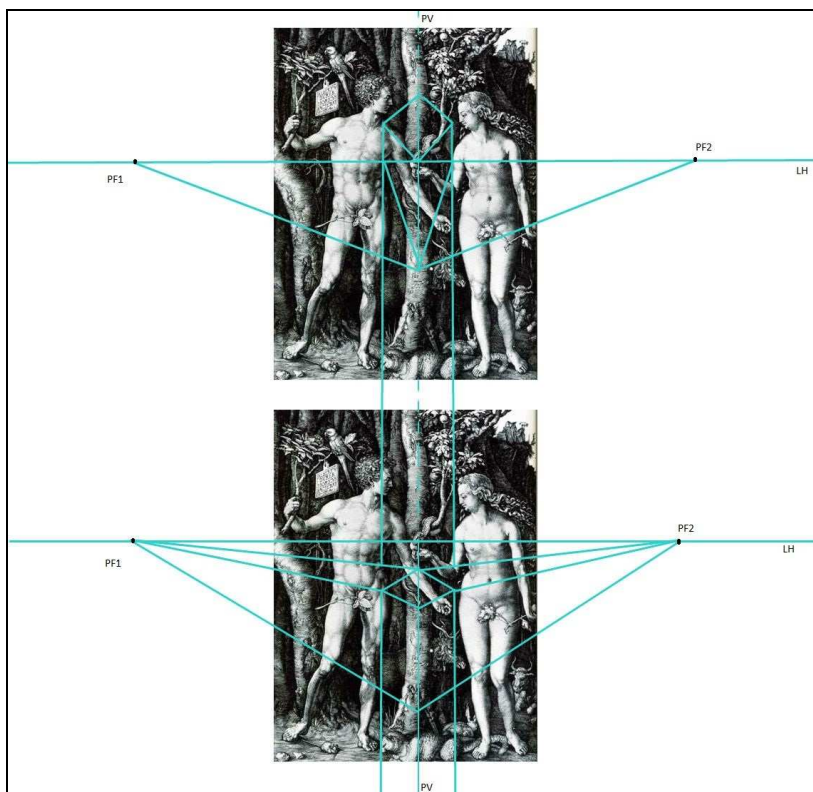
Nesta ilustração podemos, também com os ensinamentos de Dürer (e os procedimentos auxiliares com lápis e régua), representar no plano as conotações representativas do desenho, neste caso o de pensar em uma perspectiva linear com dois pontos de fuga (PF) para a referida obra, mantendo a mesma linha de horizonte (LH) anterior.

No plano principal que compõe a cena, assim como nos demais planos constata-se uma idéia de harmonia, de ordem e de equilíbrio no que é relativo a vida e natureza, sendo que esta representação está associada a uma prática de olhar organizado, compreendido dentro de um espaço e de uma cultura específica: o jardim do Éden.

Disso tudo decorre que a análise das pinturas (das imagens Figura 34) não se dá pela compreensão daquilo que é inerente a ela (elas), mas dos discursos que tornaram possível a construção ou o desenho da

imagem. No caso específico que tratamos, os discursos são: olho fixo, ponto em perspectiva, proporcionalidade, simetria, harmonia, equilíbrio.

**Figura 34: Conotações representativas Adão e Eva - Albrecht Dürer (1504)**



Fonte: (THE BOOK OF ART. 1967, p. 118 – imagem modificada)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Manter-se e incentivar o equilíbrio dinâmico e dialético vivo e atuante, que se vela no próprio ato de desvelar, é o grande desafio ao novo conhecimento, à nova racionalidade a que o presente e o futuro terá que dar respostas à altura das novas exigências (ALARCÃO, 2003, p. 57).

O ensino... A aprendizagem... Os deslocamentos propostos... É chegado o momento de organizarmos todos os nossos processos e iniciativas.

Assim, nosso processo de estudo do modo de pensar, de olhar e de representar se apoiou em deslocar o conhecimento sobre a história e a visualização da técnica da perspectiva envolvendo alguns de seus tratados, instrumentos de pesquisas e manuais próximos àqueles conhecidos por nós e presentes nas gravuras e pinturas de Dürer, entendendo que para trabalhar com a visualidade temos que compreender, na historicidade como se constrói um discurso visual.

Com este caminho trilhado, sentimos a importância de problematizar para entender a relação com o saber enquanto produção histórica. Daí, a opção de pensar nesta forma de olhar para a qual fomos e somos educados, surgindo então nossa proposta de uma nova narrativa na Educação Matemática, com o intuito de realizar deslocamentos da história para a historicidade e da visualização para a visualidade, proporcionando uma compreensão do visual como construção cultural e histórica.



O foco central, mencionado em todos os capítulos deste trabalho, é discutido com base em conceitos de história a partir da reflexão de estudos culturais e cultura visual, propondo que as fontes visuais possam ser o lugar para o entendimento e a construção de novas relações com os saberes e as práticas em matemática. Temos aqui, portanto, uma discussão contemporânea.

Hoje algumas propostas de referências a processos metodológicos apontam para a mudança e evolução no processo de ensino-aprendizagem, nos permitindo chegar à conclusão de que toda e qualquer prática escolar possui a sua historicidade, modificando a nossa forma de ver a realidade. Se temos o preposto indicado, significa que podemos redesenhar as atividades pedagógicas, com o objetivo de atender as necessidades de uma utilização e uma refuncionalização dos processos visuais, numa abordagem que permita a interlocução entre as várias formas de representação matemática.

Para tanto, abrimos mais esta possibilidade, a da historicidade e a da visualidade para serem instrumentos que enfatizem as competências referentes ao domínio do conhecimento através de novas narrativas na Educação Matemática. Nossa proposta de narrativa não está atrelada a uma história encadeada por ação e reação, causa e efeito, pois em cada uma delas deve-se procurar refletir sua problematização e suas práticas.

A (re)elaboração referente a organização que domine pelo conhecimento as práticas do olhar no âmbito da história, necessita de abordagens pedagógicas que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem, emergindo um novo modo de representar o espaço e os objetos no espaço. Porém não por isto se espera, claro, que a história traga a resposta para todos os problemas do ensino.

Nada está pronto!

Com o processo de desenvolvimento da tese, nos apropriamos de novos hábitos, novas ações, novas habilidades, novo modo de olhar e de considerar a história. Inserimo-nos, portanto, na possibilidade de juntos articular a história no ensino da matemática, não como uma investigação histórica e sim como um processo de deslocamento para a historicidade.

Ao discutirmos algumas finalidades da visualização na Educação Matemática, no que tange a prática pedagógica, verificamos que grande parte das pesquisas realizadas é de cunho cognitivo, ou seja, priorizam o desenvolvimento do pensamento geométrico estando diretamente relacionadas com o ensino e a aprendizagem.

Podemos assim dizer que poucas são as pesquisas que possuem as características de uma abordagem histórica de natureza factual. Pois conforme Mendes (2009, p. III):

[...] a Matemática é vista como uma ciência à parte, sem história e sem inter-relações com outros aspectos da cultura humana. Isto não somente dificulta a apreciação do

desenvolvimento da própria Matemática, como também seu importante papel desempenhado em outros campos do saber, impossibilitando que o seu caráter aberto seja apreciado com plenitude.

Portanto, continuamos afirmando que podemos mediar os conhecimentos matemáticos, revelando novos modos de pensar, de agir, de aprender com suporte na historicidade. Entendemos, pois, a historicidade como uma fonte de diálogo que estabelece novas relações, respostas múltiplas e possibilidades para as respostas que procuramos no presente, mostrando as relações de poder nas diversas práticas sociais envolvidas na constituição, apropriação, ressignificação e transmissão do tema ou problema em estudo.

No caso desta tese, buscamos o deslocamento da história para a historicidade e da visualização para a visualidade no estudo da técnica da perspectiva, apoiado em algumas atividades (obras) de Dürer, tendo a intenção de adentrar nos conceitos de historicidade, cultura visual e visualidade para então tecer novas narrativas para a Educação Matemática.

Desta forma nos foi possível provocar a delimitação de uma definição para visualidade e também exemplificá-la dentro do nosso trabalho de pesquisador. Vejamos: entendemos a visualidade como um conjunto de formações discursivas acerca do visual, sendo que estas formações discursivas ocorrem a partir das práticas visuais. Como exemplo, citamos o caso da perspectiva, no qual se construiu a ideia de

que para se ver em perspectiva era necessário fixar o olho num plano quadriculado. Isto foi se constituindo em uma prática visual, a ponto de se tornar um regime de verdade para olhar e representar à época renascentista – como dito em nosso Capítulo I.

Vale lembrar que este novo processo de narrativa que aqui propomos não deixa de possuir em seu caráter formativo, reflexivo e potencializador de produção de sentidos à experiência. Para tanto, estamos sempre sendo desafiados a compreender a matemática como um fator de desempenho na formação de capacidades intelectuais, firmando então que temos condições de romper com ideias enraizadas na estrutura educacional.

Também podemos compreender, a partir das reflexões oferecidas pela pesquisa, que se faz possível aprender, ensinar, produzir conhecimentos, construir conceitos e entender que o processo em nenhum tempo estará completo. Deste modo, as narrativas e as práticas reflexivas e colaborativas podem constituir-se em estratégias fundamentais para a formação de qualquer profissional.

Destes deslocamentos de historicidade e visualidade de cunho teórico, desta pesquisa, fica a sugestão para a retomada em futuras pesquisas metodológicas, como, por exemplo, com a questão de “como as máquinas de Dürer poderiam ser potencializadas na formação de

professores, instaurando novas metodologias e novas relações com o conhecimento matemático?”.

Outros questionamentos e problematizações poderão surgir após a organização de um ensino realizado através de narrativas, passíveis de serem abordadas nas demais áreas da Educação, que podem provocar nos alunos a:

[...] consciência crítica e a crítica social como um diálogo preliminar, que conduz à compreensão, e, então, à ação. [...] uma consciência crítica que conduz a ações assentadas para resistir processos de superioridade, hegemonias e dominação nas nossas vidas diárias. [...] Necessariamente, a educação da cultura visual incentiva consumidores passivos a tornarem-se produtores ativos da cultura (DIAS, 2008, p. 39).

Enriquecemos esta construção teórica com algumas sugestões oferecidas por Flores (2010, p. 291-292), que ainda podem contribuir para se compreender a importância de analisar os deslocamentos e essa nova proposta de narrativa que nos propomos:

1. Relacionar pintura, visualização e matemática, considerando o entendimento de cultura e de história. Isso pode se constituir como um aspecto interessante para inventar atividades tanto em sala de aula quanto em formação de professores.
2. Exercitar o olhar matemático em pinturas contemporâneas. Isso proporciona tanto a visualização de conceitos matemáticos, como um ambiente de significação, de recriação, onde a matemática serve como uma sugestão para olhar e pensar a arte.
3. Compreender as diversas formas de olhar, de praticar a vista, considerando a cultura visual

de diversas épocas e grupos sociais. Isto pode conduzir a uma nova compreensão teórica acerca da percepção visual, da representação da imagem e da elaboração e representação de conceitos matemáticos.

4. Analisar como aparatos técnicos modificaram a visão, tais como a técnica da perspectiva, as máquinas para ver, as máquinas fotográficas, os microscópios, a internet, entre outros. Isso permite ver não só a elaboração conceitual técnica, mas também compreender formas convencionais de ver e de representar.
5. Ler imagens criticamente, percebendo aí formas de dominação, de passividade, rotina, vigilância, relacionando saberes matemáticos na constituição dos sujeitos. Isso pode ajudar a perceber formas de subjetivação, de racionalização, de controle, de estética que induzem formas específicas de olhar.
6. Analisar formas de representação do espaço da cidade, da escola, das fortificações militares. Isso permite ver não só os modos diferentes de ver, com suas técnicas de olhar, mas também concepções de espaço e de geometria.

Analisar o emprego de figuras geométricas na prática do professor, no livro de matemática para o ensino de geometria. Isso possibilita ver a prática e a manutenção de uma forma específica de ver, que tem seu início na invenção da técnica da perspectiva (FLORES, 2010, p. 291-292). Em síntese, possuímos o objetivo de mediar, neste momento, um estudo teórico a partir da reflexão de investigações e pesquisas na história e na cultura visual, criando vínculos na historicidade, visualidade e a técnica da perspectiva de Dürer.

No desenrolar do processo de pesquisa, ocorreram (des)construções e (re)significações no contexto pedagógico, emergindo assim novas iniciativas, estudos que contribuam para alargar nosso campo de pesquisa, acolhendo a cultura visual e a prática do olhar em geometria (ou matemática) como possibilidades de discutir compreensões importantes acerca de historicidades e de visualidades dentro da Educação Matemática, entendendo a matemática tanto como suporte, quanto como efeito para produzir olhares e imagens.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, M. A. M. **Ideia relacionadora “CTS”**: uma aposta no enfraquecimento das relações de poder na educação matemática. Florianópolis, UFSC – Dissertação de Mestrado, 1994.
- ABREU E LIMA F. de A. **Estudo dos conceitos de ordem e relação, estética pitagórica e fórmula nas tratadísticas de Leon Battista Alberti e Andrea Palladio**. Trabalho Final de Graduação, UFPE/CAC/DAU. Recife, 2004.
- ALARCÃO, I. **Escola reflexiva e professor reflexivo**. São Paulo: Cortez, 2003.
- ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. de. **Iniciação à demonstração: apreendendo conceitos geométricos**. 23ª reunião da ANPED, 2000 – Internet. Acesso em 25/11/2010.
- ALMOULOUD, S. A.. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (org.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. São Paulo, Papirus, p. 125-126, 2003.
- ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. **Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENENs**. Educação Matemática em Revista, Recife, v. 11, n. 17, p. 61-7, 2004.
- ANDRADE, J. B. de; MANRIQUE, A. L. **Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2007.
- A Pictural Encyclopedia of Painting, Drawing, and Sculpture: **The Book of Art**. German and Spanish Art to 1900. Edited by Dr Hors Vey and Dr Xavier de Salas, 1967, v. 4.



ARAÚJO, J. A. A. **O ensino de Geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos anais dos ENEM's**. Dissertação de Mestrado em Educação. Itatiba: Universidade São Francisco, 2004.

ARCAVI, A. **The role of visual representations in the learning of mathematics**. XXI Conference on the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mexico, p. 26-41, 1999.

BACHELARD, G. **La formation de l'esprit scientifique**. Paris: Vrin, 1938.

BARONI, R. L.S. e BIANCHI, M. I. **A História da Matemática como recurso didático**. In: PACHECO, E. R. e VALENTE, W. R. (orgs). Coleção 20 História da Matemática para professores. Guarapuava: UNICENTRO, 2007, p. 25 – 36.

BAXANDALL, M. **Painting and experience in Fifteenth-Century Italy**: a primer in the social history of pictorial style. 2. ed. Oxford. /New York: Oxford University Press, 1988

BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.

BECKER, F. **Modelos Pedagógicos & Modelos epistemológicos**. In: SILVA, L. H. e AZEVEDO, J.C. (orgs.). Paixão de Aprender II. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

BECKER, F. **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BECKER, M. **Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2009.

BENTO, H. A.; LAUDARES, J. B. **O ensino e aprendizagem de geometria plana com atividades por meio do software geogebra**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

BERGER, J. **Modos de Ver.** Tradução de Lúcia Olinto. Rio de Janeiro: Rocco, 1999.

BERTONI, N. **Formação do professor: concepção, tendências verificadas e pontos de reflexão.** Temas e Debates, Blumenau, v. 8, n.7, p.8-14, 1995

BESSOT, D. et LE GOFF, J.P. **Mais où est donc passée la troisième dimension?** In: Histoires de Problèmes, Histoires des Mathématiques. Edition Marketing, Paris, 1993.

BISHOP, A. J. **Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship.** Research in Education, 9, p. 43-49, 1973.

\_\_\_\_\_. **Space and Geometry.** In R. Lesh & M. Landau (Eds.) Acquisition of mathematics concepts and process. New York: Academic Press, 1983.

\_\_\_\_\_. **Review of research on visualization in mathematics education.** Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BIZA, I., NARDI, E., & ZACHARIADES, T. Persistent images and teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point. In FIGUERAS, O.; SEPÚLVEDA, A. (eds.), **Proceedings of PME32.** Morelia, Michoacán, México, 2008; v. 2, p. 177-184.

\_\_\_\_\_. Teacher views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. **Proceedings of CERME 6,** Lyon, France, 2010.

BORBA, M. C. e VILLAREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation.** USA: Springer, pp.78-100, 2005.

BOSQUETTI, M. C. B. **SARESP 2000 e a questão da visualização em geometria espacial.** Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, 2002.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRIGHENTI, M. J. L. Representação gráfica: importante recurso na formação de conceitos trigonométricos. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2001.

BRITO, A. J.; MIORIM, M.A. A história na formação de professores de matemática: reflexões sobre uma experiência. **Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática**, 1999.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997.

BRYSON, N. The gaze in the expanded Field. In. FOSTER, H. **Vision and Visuality**, 87-113. Seattle, WA: Bay View Press,, 1988.

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino da geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores**. Dissertação de Mestrado – Programa de Educação Científica e Tecnológica: PPGECT – UFSC, 2006.

BURKE, P. **O que é história cultural?** Tradução, Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

CARVALHO, M. L. de O. **Percepção estereognóstica, imagens mentais e o desenho de figuras tridimensionais**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

CAVALCA, A. de P. V. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. São Paulo: 1998.

CIFUENTES, J.C. **Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

CIFUENTES, J. C. O conhecimento qualitativo numa epistemologia da educação científica e matemática. In: Seminário Internacional de

Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Brasília. **Anais**. Brasília – DF, 2009.

CHAACHOUA, A. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas**: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Universidade Joseph Fourier (Grenoble 1), França, 1997.

CHUHURRA, O. L. **Estética de los elementos plásticos**. Barcelona: Labor, 1971.

CLANDININ, J.; CONNELLY, M. **Narrative inquiry: experience and story in qualitative research**. São Francisco: Jossey-Bass, 2000.

COMAR, P. **La perspective en jeu. Les dessous de l'image**. Decouvertes Gallimard Sciences: Paris, 1992.

COSTA, C. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. In, Atas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Fundão, 2000. Disponível em [www.spce.org.pt/sem/CC.pdf](http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf) (acesso em Jan/2011)

COUY L.; FROTA, M. C. R. **Representação e visualização no estudo de funções**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2007.

COUY, L. **Pensamento Visual no estudo da variação de funções**. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-MG, 2008.

CUNNINGHAM, S. **The visualization environment for mathematics education**. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 67-76). Washington: MAA, 1991.

DAVIS, P. J. ; HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DAVIS, P. J. ; HERSH, R. **O Sonho de Descartes** – O mundo de Acordo com a Matemática. 2ª ed. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1998.

D'AMBROSIO, B. **Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio**. Pro-posições, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar.1993.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática – Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p.97-115.

DEVLIN, K. **El lenguaje de las matemáticas**. Tradução de Pedro Crespo. Ediciones Robinbook, s.l., Barcelona, 2002.

DIAS, B. **Pré-acoitamentos: os locais da arte/educação e da cultura visual**. In: MARTINS, Raimundo (Org). **Visualidade e Educação**. Goiânia: FUNAPE, p. 37-53, 2008.

DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O. **Children learning mathematics. A teachers guide to recent research**. London: Schools Council Publications, 1993.

DIKOVITSKAYA, M. **Visual culture. The study of the visual after the cultural turn**. Cambridge, Massachusetts/London, England: The MIT Press, 2005.

DINIZ-PEREIRA, J. E. **Formação de professores: pesquisas, representações e poder**. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

DREYFUS, T. **On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education, Plenary address to PME XV**. Proceedings Fifteen PME conference, Assisi, v. 1, p. 33-48, 1991.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning. In HITT, F.; SANTOS, M. (eds.). **Proceeding of the 21<sup>st</sup> Annual Meeting of the**

**North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, p. 3-26, 1999.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. 2. ed. Cali, Colombia: Universidad Del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DÜRER, A. **Underweysund der messung**. Nurembergue, 1525. Alberto Durero, De la Medida.. Edição de Jeanne Peiffer. Tradução do texto original alemão por Jesús Espino Nuno. Ediciones Akal, S. A.: Madrid, Espanha, 2000.

EISENBERG, T. **Functions and associated learning difficulties**. In: *Advanced Mathematical Thinking*. TALL, F(ed.), Kluwer Academic, 1991.

ENCICLOPÉDIA MULTIMÍDIA da Arte Universal. Vol. 6. Edit. Caras.

ERRA, X. Visita dinamizada a la exposición de **Dürer A Morandi** – Grabados de la Fundación William Cuendet & Atelier de Saint-Prex. Proyecto elaborado por: Xavier Erra. Coordinación: Departamento Educativo, Fundación “la Caixa”. Disponível em: [http://www.ciudaddesaberes.es/not/visita\\_morandi.pdf](http://www.ciudaddesaberes.es/not/visita_morandi.pdf). Acesso em 15/08/2012.

FÁBREGA, E. P. **Espaço representativo: um estudo das habilidades de alunos da 4ª série**. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, 2001.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. A matemática e o ensino fundamental. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2001.

FERREIRA, A. C., LOPES, C.E., FIORENTINI, D., JARAMILLO, D., MELO, G.A., CARVALHO, V., SANTOS-WAGNER, V. **Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que**

**ensinam matemática.** In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 1., Serra Negra. *Anais*. São Paulo: SBEM, 2000, p.264-271.

FIORENTINI, D. **O papel da pesquisa e da reflexão no desenvolvimento profissional do professor de Matemática.** In: ENEM, 6., São Leopoldo, 1998. *Anais*. São Leopoldo: Unisinos-Sbem, 1998.

FIORENTINI *et al.* **Formação de professores que ensinam matemática:** um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. In: Educação em Revista – Dossiê: Educação Matemática. Belo Horizonte, UFMG, n. 36, 2002.

FLEMMING . D. M.; LUZ, E. F. **O uso de sólidos geométricos no ensino de cálculo nas engenharias.** Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 1998.

FLACON, A; TATON, R. **La perspective.** 6 ed. Paris: PUF, 1994.

FLORES-BOLDA, C. R. **Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração.** Dissertação de Mestrado, Centro de Ciências da Educação, UFSC, 1997.

FLORES. C. R. **Olhar, saber e representar: ensaios sobre a representação em perspectiva.** Tese (Doutorado em Educação) – UFSC: Santa Catarina, 2003.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2004.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007a.

FLORES, C. R. **Teoria e representação geométrica na obra de Albrecht Dürer: um ensino de matemática para pintores e artesãos.** Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 11, p. 179-188, set. 2007b.

FLORES, C. R. **Saber, tecnologia e representação na arte Militar do século XVII: a propósito da obra de Luís Serrão Pimentel.** Educação matemática pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 279-293, 2008.

FLORES, C. R. **Cultura visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares.** Revista Zetetiké – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático, 2010.

\_\_\_\_\_. **Visuality and mathematical visualization : seeking new frontiers.** Proceedings of 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education. COEX, Seoul, Korea, jul. 2012.

FLORES, C. R., WAGNER, D. R., e BURATTO. I. C. F. **Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo. V. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FONTANA, L. L. **Possibilidades para “ver o invisível” nas representações tridimensionais nos livros didáticos de matemática.** Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Educação com concentração em Educação Matemática da Universidade Federal do Paraná – UFPR, 2010.

FOSSA, J. A. **A História da Matemática Como Fonte de Atividades Matemáticas.** In: Anais do I Seminário Nacional História da Matemática, Recife: UFRPE, 1995.

FOSSA, J. A. (Ed. Geral). **Série de textos de história da matemática para professores.** Rio Claro : SBHMat, 2001.

FOSTER, H. (ed.). **Vision and Visuality.** Seattle: Bay Press, 1988.

FRANCASTEL, P. **Pintura e sociedade.** Tradução de Elcio Fernandes. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

FROTA, M. C. R. **Estratégias gráficas na aprendizagem de cálculo.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2004.

GÁLVEZ, C. **A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária.** In: PARRA, Cecília.



Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 236-258, 1996.

GARCIA, L. M. I. **Os processos de visualização e de representação matemáticos dos signos no contexto didático pedagógico.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista – UNESP (Rio Claro), 2007.

GERDES, P. **Cultura e o despertar do pensamento geométrico.** Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GOLDENBERG, E. P. **The difference between graphing software and educational graphing software.** In W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (p. 77-86). Washington: MAA, 1991.

GOUVEIA, C. A. A.; MISKULIN, R. G. S. **A análise semiótica no contexto da educação matemática: atividades exploratório-investigativas em cálculo diferencial e integral.** Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

GRACIAS, T. A. S.; BORBA, M. C. **O estudo de funções com a calculadora gráfica.** Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 1998.

GUEDES, E. M.; LOBÃO, D. C. **O desenvolvimento da habilidade da visualização através da utilização de programas computacionais.** Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 1998.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3 – dimensional geometry:** in search of a framework, em L. Puig e Gutierrez (eds.), Proceedings of 20th PME conference (Vol. 3, p. 19-26), Valencia: Universitat de València, Departamento de Didàctica de la Matemática, 1996.

GÚZMAN, M. **El Rincón de La Pizarra: El Papel de La Visualización.** Pirámide, Madrid. Cap. 0, 1996.

GUZMÁN, M. de. **Tendências inovadoras em educación matemática.** 2000. Disponível em:

<http://www.prof2000.pt/users/amma/af29/trabalhos/s7/Textos/TIEMat.pdf>. 2000. Acesso em: 25 nov. 2011.

HERNÁNDEZ, F. **Catadores da Cultura Visual**: proposta para uma nova narrativa educacional. Porto Alegre: Mediação, 2009.

HOUAISS, A. VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IKEGAMI, J. K. **Visualização espacial: uma perspectiva curricular**. Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 1998.

JAMESON, F. **Pós-modernismo. A lógica cultural do capitalismo tardio**. 2ª edição. São Paulo: Ática, 1997.

JANKVIST, U. T. **A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education**. Educational Studies in Mathematics. Published online on January 21st 2009a. p. 235-261.

\_\_\_\_\_. **On empirical research in the field of using history in mathematics education**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12 (1), 2009b. p. 67–101.

JAVARONI, S. L. **Análise qualitativa, modelos matemáticos e o ensino de equações diferenciais ordinárias**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

JAY, M. **Scopic regimes of modernity**. In: FOSTER, H. (ed). Vision and visuality. Seattle: Bay Press, 1988.

KALEFF, A. M. **Considerações sobre a prática do professor e a natureza do conhecimento geométrico frente às atuais tecnologias educacionais**. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2001.

KILPATRICK, J. **Investigación em educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad**. In: KILPATRICK, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (Eds.). Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica, p.1-18, 1994.

KLING, M. **Mathematics in Western Culture**. Oxford: Oxford University Press. New York, p. 523-525, 1953.

KNAUSS, P. O desafio de fazer História com imagens: arte e cultura visual. *ArtCultura*, Uberlândia, v. 8, n. 12, p. 97-115, jan.-jun. 2006.

KODAMA, Y. **O Estudo da Perspectiva Cavaleira: uma Experiência no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2006. Disponível em: <[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/yumi\\_kodama.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/yumi_kodama.pdf)>. Acesso em: 27 set. 2010.

LAGE, M. A.; FROTA, M. C. R. **Desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático a partir do estudo de funções e transformações**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

LAPONTE, G. **Do Nietzsche trágico ao Foucault ético: sobre estética da existência e uma ética para a docência**. Educação e Realidade, v. 28, n. 2, p. 69-82, jul./dez. 2003.

LARROSA, J. **Literatura, experiência e formação**. In: COSTA, M. V. (org.). Caminhos investigativos: novos olhares na pesquisa em Educação. Porto Alegre: Meditação, 1996.

LARROSA, J. **Pedagogia profana: danças, piruetas e mascaradas**. 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 1999.

LE GOFF, J. **História e memória**. Tradução Bernardo Leitão, et al. Campinas. S.P. Editora da UNICAMP, 1990.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização: possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEIVAS, J. C. P.; SOARES, M. T. C. **Intuição no ensino de geometria na licenciatura em matemática**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

LIMA, L. M. T. **Interpretação de gráficos da mídia impressa: problemas de representação e visualização.** Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2001.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade.** São Paulo: Ed. Cortez, 1994.

MACIEL, A. C.; ALMOULOU, S. A. **Semelhanças de figuras: uma proposta de ensino.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2004.

MARTINS, R. Das belas artes à cultura visual. *In:* MARTINS, Raimundo (Org). **Visualidade e educação.** Goiânia: FUNAPE, 2008, pp. 25- 35.

MENDES, I. A. **Uso da história no ensino da Matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, Série Educação nº 1, 2001.

MENDES, I. A. **A investigação histórica como um agente da cognição matemática na sala de aula.** *In:* MENDES, I. A. *et al.* A história como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006.

\_\_\_\_\_. **Investigação histórica no ensino da matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

\_\_\_\_\_. **A. Investigação histórica nas aulas de Matemática por meio da prática de projetos.** *In:* Anais do VIII EPAEM – Encontro Paraense de Educação Matemática. Belém/Pará – Brasil, set/2011. Disponível em [www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais.pdf](http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais.pdf) (acesso em 15/01/2012).

MENEGUZZI, T.; FLORES, C. R. **Visualização espacial e os perspectógrafos de Dürer.** Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2007.

MENEGUZZI, T. **Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática: história, geometria e visualização.** Dissertação de

Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2009.

MIGUEL, A. **História, filosofia e sociologia na Educação Matemática na formação do professor: um programa de pesquisa.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 1, p.137-152, jan./abr. 2005.

MIGUEL, A. ; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIRANDA, S. S. **O papel da geometria descritiva nos problemas de geometria espacial: um estudo das secções de um cubo.** Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, 2006.

MITCHELL, W. J. T. **Picture theory: essays on verbal and visual representation.** Chicago/London: The University of Chicago Press, 1994.

MOORE-RUSSO, D. ; VIGLIETTI, J. **Teachers' visualizing, communicating and reasoning about basic three-dimensional concepts.** Brosnan, P., Erchick, D. B., & Flevaris, L. (Eds.). Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH: The Ohio State University, p.1104-1111, 2010.

MONTENEGRO, G. **Inteligência Visual e 3-D: Compreendendo Conceitos Básicos da Geometria espacial.** Editora Edgard Blücher. São Paulo, 2005.

MORACO, M. A. S. do C. T.; PIROLA, N. A. **Visualização e representação geométrica e sua contribuição na formação do pensamento geométrico em alunos do ensino médio.** Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2007.

MORETT, G. T.; KALEFF, A. M. M. R. **Uma análise dos conteúdos de geometria de uma das coleções de livros didáticos no ensino médio mais solicitadas pelas escolas públicas brasileiras ao fundo nacional de desenvolvimento da educação.** Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

MURARI, C.; BUSKE, N. **Dobraduras para visualização do cubo em caleidoscópios**. In: III Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas (RS). Anais. Canoas (RS); ULBRA-Universidade Luterana do Brasil, p. 1-9, 2005.

NACARATO, A. M. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: Currículo em ação de um grupo de professoras ao apreender ensinando geometria**. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2001.

NACARATO, A. M. **O ensino de Geometria nas séries iniciais**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa. Belo Horizonte: SBEM e SBEM/MG, 2007. v. 1. p. 1-18.

NATIONAL COUNCIL TEACHERS OF MATHEMATICS. Princípios e normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM, 2008. Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

NARDI, E. e IANNONE, P. Mathematicians on concept image construction: Single ‘landscape’ vs ‘your own tailor-made brain version’. In: PATEMAN, N.; DOUGHERTY, B. J.; ZILLOX, J. (eds.). **Proceedings of the 27th PME International Conference**, v. 3, p. 365-372, 2003.

NASSER, L. O Desenvolvimento do raciocínio em Geometria. **Boletim GEPEM** (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática). Rio de Janeiro, n. 27, p. 93-99, 1990.

NEMIROVSKY, R. e NOBLE, T. **On mathematical visualization and the place where we live**. Educational Studies in Mathematics, v.33, pp.99-131, 1997.

NOVAES, R. C. N. de; NASSER, L. Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no ensino médio. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2007.

PANOFSKY, E. **Renascimento e Renascimentos na arte ocidental**. Trad.: Fernando de Neves. Lisboa: Editorial Presença, 1981.

PARRAMÓN, J. M. **A perspectiva na arte.** Tradução de Mercês Peixoto. Lisboa: Editora Presença, 1993.

PARZYSZ, B. **"Knowing" vs "Seeing": Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures.** Educational Studies in Mathematics, New York, v. 19, n. 1, p.79-92, 1988. Disponível em: <<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/IPMG5.pdf>>. Acesso em: 11 mar. 2010.

PARZYSZ, B. **Representation of space and students' conceptions at high school level.** Educational Studies of Mathematics, n. 22. 1991.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula.** Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP, 2000.

\_\_\_\_\_. **Representação e interpretação de objetos tridimensionais no plano do ensino fundamental.** Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2001.

\_\_\_\_\_. **Que Geometria acontece na sala de aula?** In: MIZUKAMI, Maria da Graça N., REALI, Aline Maria M. R. Processos formativos da docência: conteúdos e práticas. São Carlos: EDUFSCar, p. 16-44, 2005.

PASSOS, M. M.; NARDI, R.; ARRUDA, S. de M. **Os sentidos sobre o professor e sua formação em 15 anos de Zetetiké: 1993-2007.** Zetetiké – Cepem – FE – Unicamp – v. 18 n. 34 – jul/dez – 2010.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências.** Revista Zetetiké. Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1, 1993.

\_\_\_\_\_. **Representação bidimensional de objetos tridimensionais: um estudo de caso.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2004.

PEIFFER, J. L. **Historie de La perspective au XX<sup>eme</sup> siècle: une déconstruction.** Gazette dès mathematiens, n. 78, out. p. 63-76, 1998.

- PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o seu abandono.** Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Dissertação de Mestrado, 2001.
- PEREIRA, A. C. C.; FREITAS, A. L. **O uso de vídeos infantis no ensino da matemática: considerações iniciais sobre uma prática educativa.** Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.
- PEREZ, G. **A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo.** A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995.
- PÉREZ GÓMEZ, A. I. **A Cultura escolar na sociedade neoliberal.** Porto Alegre: ARTMED, 2001.
- PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos: dificuldades perspectivas.** Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas. Dissertação de Mestrado, 2000.
- PORRAS, M. **Revista Novidades Educativas**, nº 88. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico. Buenos Aires. P.24, 1998.
- PRESMEG, N. **Visualization in high school mathematics.** For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46, 1986.
- PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning an Teaching Mathematics. In: GUTIERREZ, A.; BOERO, P. (eds). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**, p. 205-235. The Netherlands, Sense Publishers, 2006.
- RIBEIRO, F. D. **A formação do professor-educador matemático em cursos de Licenciatura em Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação) - PUC-PR, Curitiba, 1999.
- RODRIGUES, A. E. M.; FALCON, F. J. C. **Tempos modernos:** ensaios de história cultural. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2000.
- RODRIGUES JÚNIOR, J. F. **Design espacial-perceptivo:** uma nova compreensão para representações visuais interativas. Tese de



Doutorado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC/USP (São Carlos), 2007.

ROMMEVAUX, M-P. **Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle**. Educação Matemática Pesquisa, Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, n. 1. 1999.

ROSALVES, M. Y. **Relações entre os pólos do visto e do sabido no cabri 3D: uma experiência com alunos do ensino médio**. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, 2006.

ROSSI, G. R.; BISOGNIN, E. Explorando arte e geometria num ambiente computacional. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2010.

SALOMÃO, L. A. D. Investigando resultados da geometria inversa através do cabri. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2001.

SANTOS, M. C. O cabri-géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2001.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. O processo de escrita de alunos de 5º ano, potencializando a produção de conceitos geométricos. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2010.

SEABRA, R. D. **Uma ferramenta em realidade virtual para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

SIQUEIRA, R. A. N. **Tendências da educação matemática na formação de professores** - Ponta Grossa: [s.n.], 2007.

SIQUEIRA, J. E. de M.; BELLEMAIN, F. Um estudo das dificuldades na articulação entre formas algébricas e forma geométrica da equação quadrática. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2010.

SMOLE, K. S.; CÂNDIDO, P. Geometria, literatura e arte: conexões no ensino-aprendizagem de matemática. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2010.

SUÁREZ, C. A. C. et al. **La Geometria de Alberto Durero**: estudio y modelación de sus construcciones. Bogotá: Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2006.

TALL, D. **Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus**. In: W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 121-126). Washington: MAA, 1991.

TATON, R. **Le Problème historique des rappts entre perspective et géométrie**. In: *Destin de l'Art, desseins de la Science. Actes du Colloque A.D.E. R.H.E.M. Université de Caen*, p.129-39. 1986.

TEIXEIRA, M. L. C. **Matemática e os caminhos das artes**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2010.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 2007.

THUILLIER, P. **De Arquimedes a Einstein**: a face oculta da invenção científica. Tradução de Maria Inês Duque Estrada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1994.

VALENTE, W. R. **História da matemática escolar no Brasil**. In: Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática. Natal – RN. Ed. Da SBHMat, Rio Claro. p. 207-219, 2001.

VAN GARDEREN, D. **Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students With Varying Abilities**. vol. 39, n. 6, p. 496-506. nov/dez 2006. Disponível em: <http://dx.sagepub.com/cgi/content/abstract/39/6/496>. Acesso em 13/06/2011.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais: materiais para professores**. Instituto de Inovação Educacional-Lisboa, 1998.

VIANA, O. A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.** Tese (Doutorado em Educação – Área temática: Educação Matemática), Universidade Estadual de Campinas, Campinas: SP, 2005.

\_\_\_\_\_. As representações pictóricas de alunos do ensino médio na resolução de problemas de geometria: uma análise qualitativa. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, 2007.

WAGNER, D. R. **Arte, técnica do olhar e educação matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica.** Dissertação de Mestrado – Programa de Educação Científica e Tecnológica: PPGECT – UFSC, 2012.

WALKERDINE, V. **O raciocínio em tempos pós-modernos.** Educação e Realidade: 20(2): p. 207-226. Jul./dez, 1995.

ZAGO, H. da S. **Ensino, geometria e arte: um olhar para as obras de Rodrigo de Haro.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2010.

ZIMMERMANN, W. **Visual Thinking in Calculus.** In: W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 121-126). Washington: MAA, 1991.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. **What is Mathematical Visualization?** Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp 1-7). Washington: MAA, 1991.