Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Coações de grupos e fibrados de Fell

Paulo Ricardo Boff
Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis
Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Coações de grupos e fibrados de Fell

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Paulo Ricardo Boff
Florianópolis
Fevereiro de 2013

Coações de grupos e fibrados de Fell

por

Paulo Ricardo Boff[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Maicon Marques Alves (Presidente da Banca - UFSC)

Prof. Dr. Giuliano Boava (UFSC)

Prof. Dr. Henrique Bursztyn (IMPA)

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

À minha mãe

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe por todo o amor a mim confiado. Por toda a educação que me destes, por todas a palavras ensinadas, momentos vividos, alegrias compartilhadas; por todo o carinho trocado, por tudo o que fez e ainda faz por mim, por dedicar a vida à sua família! Tu és a pessoa mais importante da minha vida! Minha querida Mãe, este mestrado e este trabalho são inteiramente dedicados a ti!

Agradeço ao meu irmão Rafael por estar ao meu lado em todos os momentos, por crescer junto comigo, por me ensinar a viver, por me proteger, por me ensinar a atravessar a rua, por me mostrar, com pequenas atitudes, o que jamais conseguiria perceber sozinho; por me ensinar a não desistir, enfim, por ser meu irmão! Tu és meu exemplo de ser humano!

Agradeço ao professor Alcides por me orientar durante o mestrado, por toda a atenção, por toda a paciência, por responder todas as minhas perguntas e por ter conseguido me motivar a estudar matemática! Tu és um exemplo de profissional a ser seguido, muitíssimo obrigado por tudo!

Agradeço aos professores Eliezer e Pinho por me orientarem durante a graduação. Ao professor Eliezer por ter me ensinado os primeiros passos em álgebra, pela orientação na iniciação científica, por ser uma pessoa sempre aberta ao diálogo, pela amizade e pelo companherismo. Ao professor Pinho por ter me orientado no PET-matemática, por ter me ensinado a escrever matemática, por sua humildade, pela atenção e pelo carinho que teve e tem com seus orientandos. Vocês dois foram muito importantes neste percurso.

Agradeço aos professores Ruy e Giuliano pelos conhecimentos trocados durante os seminários, bem como pelas sugestões e correções deste trabalho. Certamente aprendi e compreendi muito com vocês!

Agradeço aos professores Alcides, Daniel, Ruy, Eliezer e Celso por terem me ensinado muita matemática nas disciplinas do curso de mestrado.

Agradeço aos meus professores do ensino médio Renato Hoffmann e Túlio Santos (Tulinho) por terem sido os principais responsáveis por eu ter escolhido o curso de matemática. Jamais esquecerei as palavras de Renato, seus pensamentos e sua motivação pela vida. Jamais esquecerei a genialidade de Tulinho. Sem dúvida, seres humanos fantásticos!

Agradeço aos meus outros professores do ensino médio Altair Martins, Adiles, Riggo, Carvalho, Maurivan, Beleza, Amadeus, Segundo José, Arnaldo, Cajo, Araújo, Paulo, Paulo Simões, Milton Simões e às professoras Verinha e Aninha. Vocês foram muito especiais em minha trajetória, muito obrigado por tudo!

Agradeço aos meus professores do ensino fundamental Décio e João e às professoras Marina, Nora e Cristina por terem sido os responsáveis pelos meus primeiros passos no mundo das palavras!

Agradeço a todos o meus colegas e amigos por terem me ajudado direta ou indiretamente durante este período de estudos.

Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Um fibrado de Fell sobre um grupo discreto G é uma família de espaços de Banach $\{B_t\}_{t\in G}$ munida com operações de multiplicação e involução compatíveis com a estrutura do grupo G. Neste trabalho, entre outros resultados, apresentaremos uma equivalência entre a categoria $\mathfrak{B}$ dos fibrados de Fell sobre G e a categoria das coações contínuas e injetivas do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras. No caso em que G é abeliano, mostraremos que $\mathfrak{B}$ é equivalente à categoria das ações fortemente contínuas do dual de Pontryagin $\widehat{G}$ em C^*-álgebras.

Palavras-chave: fibrado de Fell, grupo quântico compacto, coação, C^*-álgebra.

Abstract

A Fell bundle over a discrete group G is a family of Banach spaces $\{B_t\}_{t\in G}$ equipped with multiplication and involution compatible with the group structure of G. In this paper, among others results, we will present an equivalence between the category $\mathfrak{B}$ of Fell bundles over G and the category of continuous and injective coactions of the compact quantum group $C_r^*(G)$ in C^*-algebras. When the group G is abelian, we will show that $\mathfrak{B}$ is equivalent to the category of strongly continuous actions of the Pontryagin dual $\widehat{G}$ in C^*-algebras.

Keywords: Fell bundle, compact quantum group, coaction, C^*-algebra.

Sumário

Introdução

A combinação de palavras "Grupos Quânticos" foi introduzida por Drinfeld [4] and Jimbo [15] há quase trinta anos. Eles utilizaram o termo "quantização" como um sinônimo de "deformação", referindo-se a um trabalho da época que mostrava que a álgebra dos observáveis de um sistema mecânico quântico é uma deformação não-comutativa da correspondente forma clássica da álgebra das funções no espaço de fases simplético. Para melhor compreender e desenvolver este conceito num ambiente matemático, uma das motivações foi a generalização da dualidade de Pontryagin para grupos abelianos localmente compactos. Procurava-se uma categoria, com uma propriedade chamada autodual ou autoadjunta, contendo os grupos topológicos localmente compactos. Esses objetos generalizados dessa nova categoria seriam chamados de grupos quânticos.

A abordagem de grupos quânticos através da teoria de álgebra de operadores remonta à década de 1970. Após os trabalhos de Takesaki, Tannaka, Krein (ver, por exemplo, [30, 16]), o problema de encontrar uma categoria auto-adjunta contendo os grupos localmente compactos foi completamente resolvido de forma independente por Kac, Vainerman, Enock e Schwartz [5]. Mais tarde, entra em cena S. L. Woronowicz, com o grupo quântico SU(2) e o cálculo diferencial para grupos quânticos compactos. Entre muitos resultados que ele obteve, um deles foi uma definição de grupo quântico compacto que possui uma C^*-álgebra como objeto primordial, evidenciando a importância da teoria de C^*-álgebras [27, 28].

A teoria de C^*-álgebras também é importante no estudo das representações irredutíveis e das representações induzidas de grupos, uma vez que representações unitárias de grupos correspondem a representações da C^*-álgebra do grupo [17, 9]. Neste contexo, surge o conceito de fibrado de Fell, objeto que podem ser interpretado como uma generalização de C^*-álgebra, na tentativa de enriquecer uma $*$-álgebra de Banach apenas com estrutura extra necessária para que os teoremas da teoria de grupos tanto tivessem um teorema análogo, quanto fossem corolários de um teorema na estrutura enriquecida [10, 11].

Um fibrado de Fell sobre um grupo discreto G é uma família de espaços de Banach $\{B_t\}_{t\in G}$ munida com operações de multiplicação e involução compatíveis com a estrutura de G. Neste trabalho, apresentaremos uma equivalência entre a categoria $\mathfrak{B}$ dos fibrados de Fell sobre G e a categoria das coações contínuas e injetivas do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras. No caso em que G é abeliano, mostraremos que $\mathfrak{B}$ é equivalente à categoria das ações fortemente contínuas do dual de Pontryagin $\widehat{G}$ em C^*-álgebras. O trabalho teve como proposta inicial de estudo, ler e reescrever alguns resultados contidos em [24].

No primeiro capítulo, apresentaremos definições e resultados que podem ser vistos como ponto de partida para o estudo de coações e fibrados de Fell. Apresentaremos a noção de C^*-álgebra envolvente a partir de uma propriedade universal. Na sequência, construiremos a C^*-álgebra produto tensorial minimal e mostraremos alguns resultados da teoria básica de produto tensorial que serão fundamentais para o desenvolvimento de todo o trabalho. Em seguida, faremos uma breve passagem pela teoria de módulos de Hilbert. Os módulos de Hilbert serão os espaços nos quais representaremos $*$-álgebras. Eles nos permitirão, por exemplo, falar das C^*-álgebras associadas aos fibrados de Fell.

No segundo capítulo, apresentaremos o conceito de fibrados de Fell sobre grupos discretos e construiremos módulos de Hilbert sobre o espaço vetorial das secões destes fibrados. Em seguida, definiremos as álgebras cheia e reduzida associadas aos fibrados de Fell. A cheia como sendo a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra das seções do fibrado e a reduzida a partir da representação regular da $*$-álgebra das seções. Como um caso particular, teremos as C^*-álgebras cheia e reduzida de grupos, denotadas por $C^*(G)$ e $C_r^*(G)$, respectivamente. Quando o grupo G é abeliano, mostraremos que a C^*-álgebra $C(\widehat{G})$ das funções complexas contínuas do dual de Pontryagin de G é isomorfa às C^*-álgebras cheia e reduzida de G.

No terceiro capítulo, apresentaremos os conceitos de grupo quântico compacto e de coação de grupos em C^*-álgebras. Veremos que as C^*-álgebras $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ e $C(\widehat{G})$ possuem estrutura de grupo quântico e no caso em que o grupo é abeliano, mostraremos que estes grupos quânticos são isomorfos, obtendo uma correspondência entre as coações de $C^*(G)$, as coações de $C_r^*(G)$ e as de $\widehat{G}$.

Finalizaremos o trabalho estudando uma relação entre fibrados de Fell sobre um grupo discreto G e coações do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras. Mostraremos que é possível produzir coações de $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras a partir de fibrados de Fell e vice-versa. No caso em que as coações de $C_r^*(G)$ são contínuas, os fibrados a elas associados serão também graduações para a álgebra sobre a qual se está coagindo. Na sequência, quando as coações de $C_r^*(G)$ forem, além de contínuas, injetivas, mostraremos que as C^*-álgebras reduzidas dos fibrados a elas associados são isomorfas à álgebra em que se está coagindo. Estes isomorfismos serão a chave para unirmos as coações contínuas e injetivas do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ e os fibrados de Fell sobre G numa equivalência categórica.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, assumimos que o leitor tenha conhecimentos básicos em C^*-álgebras, topologia e medida e integração sobre grupos. Ver, por exemplo, [22, 29, 20, 13, 26].

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo compõe o ponto de partida para o estudo de coações e fibrados de Fell. Apresentaremos a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra, o produto tensorial de C^*-álgebras e o conceito de módulo de Hilbert.

1.1 A C^*-álgebra envolvente

Esta seção inicial é dedicada à construção da C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível. A importância de tal álgebra é evidenciada no Capítulo 2, no qual veremos que a $*$-álgebra das seções de um fibrado de Fell é necessariamente admissível. Isto nos possibitará definir a C^*-álgebra cheia de um fibrado de Fell e a C^*-álgebra cheia de um grupo.

Definição 1.1.1. Dizemos que uma $*$-álgebra A é **admissível** se para todo $a \in A$ existir $M \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo: se B é uma C^*-álgebra e $\pi : A \longrightarrow B$ é um $*$-homomorfismo, então $\|\pi(a)\| \leq M$. Além disso, para cada $a \in A$, denotamos a menor das cotas superiores do conjunto $\{\|\pi(a)\| \mid \pi : A \longrightarrow B$ é $*$-homomorfismo, B é C^*-álgebra $\}$ por $\sup\limits_{\pi} \|\pi(a)\|$.

Definição 1.1.2. Seja A uma $*$-álgebra admissível. Uma C^***-álgebra**

envolvente de A é um par $(C^*(A), \pi_A)$, em que $C^*(A)$ é uma C^*-álgebra e $\pi_A : A \longrightarrow C^*(A)$ é um $*$-homomorfismo tal que para toda C^*-álgebra B e todo $*$-homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$, existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\phi} : C^*(A) \longrightarrow B$ satisfazendo $\widetilde{\phi} \circ \pi_A = \phi$.

Definição 1.1.3. Seja A uma $*$-álgebra admissível com C^*-álgebras envolventes $(C^*(A), \pi_A)$ e $(C^*(A)', \pi'_A)$. Dizemos que os pares $(C^*(A), \pi_A)$ e $(C^*(A)', \pi'_A)$ são isomorfos, se existir um isomorfismo de C^*-álgebras $\psi : C^*(A) \longrightarrow C^*(A)'$ tal que $\psi \circ \pi_A = \pi'_A$.

Teorema 1.1.4. *Se A é uma $*$-álgebra admissível, então existe uma C^*-álgebra envolvente de A e ela é única a menos de isomorfismo.*

Prova. Primeiramente, notemos que o conjunto

$$\begin{aligned} N = \{a \in A \mid \|\pi(a)\| = 0, \qquad & \pi : A \longrightarrow B \quad * -\text{homomorfismo e} \\ & B \ \text{ uma } \ C^* - \text{álgebra}\} \end{aligned}$$

é um $*$-ideal de A. Com efeito, dados $a \in A$ e $x \in N$, para qualquer $*$-homomorfismo $\pi : A \longrightarrow B$ (em que B é uma C^*-álgebra), temos que $0 \leq \|\pi(ax)\| \leq \|\pi(a)\|\|\pi(x)\| = 0$ e, analogamente, $\|\pi(xa)\| = 0$. Além disso, $0 \leq \|\pi(x^*)\| = \|\pi(x)\| = 0$. Logo, ax, xa e $x^* \in N$. Agora, considere a $*$-álgebra quociente A/N com a estrutura canônica:

$$(a + N) + (a' + N) = a + a' + N, \quad \forall a, a' \in A,$$

$$(a + N)(a' + N) = aa' + N, \quad \forall a, a' \in A$$

e

$$(a + N)^* = a^* + N, \quad \forall a \in A.$$

Agora, dados $a, b \in A$, note que se $a + N = b + N$, então $a - b \in N$. Assim, para todo $*$-homomorfismo $\pi : A \longrightarrow B$, com B uma C^*-álgebra, temos que $\|\pi(a - b)\| = 0 \Rightarrow \pi(a) = \pi(b)$. Logo, $\sup\limits_{\pi} \|\pi(a)\| = \sup\limits_{\pi} \|\pi(b)\|$. Em outras palavras, esta bem definida a função

$$A/N \ni a + N \longmapsto \|a + N\| := \sup_{\pi} \|\pi(a)\| \in \mathbb{R}^+.$$

Afirmação 1. A função $A/N \ni a+N \longmapsto \|a+N\| := \sup_{\pi} \|\pi(a)\| \in \mathbb{R}^{+}$ é um C^*-norma (norma que satisfaz o C^*-axioma).

Demonstração. Dados $a, a' \in A$ e $z \in \mathbb{C}$, temos que

(i)

$$\begin{aligned} \|z(a+N)\| &= \|za+N\| = \sup_{\pi} \|\pi(za)\| = |z| \sup_{\pi} \|\pi(a)\| \\ &= |z|\|a+N\| \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|(a+N)+(a'+N)\| &= \|(a+a')+N\| = \sup_{\pi} \|\pi(a+a')\| \\ &\leq \sup_{\pi} \|\pi(a)\| + \sup_{\pi} \|\pi(a')\| \\ &= \|a+N\| + \|a'+N\|. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \|(a+N)(a'+N)\| &= \|aa'+N\| = \sup_{\pi} \|\pi(aa')\| \\ &\leq \sup_{\pi} \|\pi(a)\| \sup_{\pi} \|\pi(a')\| \\ &= \|a+N\|\|a'+N\|. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \|(a+N)^*(a+N)\| &= \|a^*a+N\| = \sup_{\pi} \|\pi(a^*a)\| \\ &= \sup_{\pi} \|\pi(a)\|^2 = \|a+N\|^2. \end{aligned}$$

(v)

$$\|(a+N)\| = 0 \Longrightarrow \sup_{\pi} \|\pi(a)\| = 0 \Longrightarrow a \in N.$$

Isto mostra a afirmação 1.

Denote por $C^*(A)$ a C^*-álgebra obtida a partir do completamento de A/N relativamente a C^*-norma da afirmação acima. Além disso, seja $\pi : A \longrightarrow A/N$ a projeção canônica, $\iota : A/N \longrightarrow C^*(A)$ a inclusão canônica e defina $\pi_A := \iota \circ \pi$.

Afirmação 2. $(C^*(A), \pi_A)$ é uma C^*-álgebra envolvente de A.

Demostração. Se B é um C^*-álgebra e $\phi : A \longrightarrow B$ é um $*$-homomorfismo, defina a função

$$\begin{aligned} \phi_0 : A/N &\longrightarrow B \\ a + N &\longmapsto \phi(a). \end{aligned}$$

Note que se $a + N = a' + N$, então $a - a' \in N$, daí $\|\phi(a - a')\| = 0$. Assim, $\phi(a) = \phi(a')$ e ϕ_0 está bem definida. Além do mais, para todo $a \in A$,

$$\|\phi_0(a + N)\| = \|\phi(a)\| \leq \sup_\tau \|\tau(a)\| = \|a + N\|,$$

donde ϕ_0 contínua. Como ϕ_0 é $*$-homomorfismo, segue que sua única extensão linear contínua $\widetilde{\phi} : C^*(A) \longrightarrow B$ também é $*$-homomorfismo. Observe, ainda, que $(\widetilde{\phi} \circ \iota \circ \pi)(a) = \phi_0(a+N) = \phi(a)$ para todo $a \in A$, ou seja, $\widetilde{\phi} \circ \pi_A = \widetilde{\phi} \circ \iota \circ \pi = \phi$. Além disso, se existir outro $*$-homomorfismo $\psi : C^*(A) \longrightarrow B$ tal que $\psi \circ \pi_A = \phi$, então

$$\phi_0(a + N) = \phi(a) = \psi(\pi_A(a)) = \psi((\iota \circ \pi)(a)) = \psi(a + N)$$

para todo $a \in A$. Logo, a única extensão de ϕ_0 à C^*-álgebra $C^*(A)$ é igual a ψ. Uma vez que a extensão de ϕ_0 é $\widetilde{\phi}$, segue que $\widetilde{\phi} = \psi$. Portanto, $\widetilde{\phi}$ é o único $*$-homomorfismo satisfazendo $\widetilde{\phi} \circ \pi_A = \phi$. Isto conclui a demonstração da afirmação 2.

Para provarmos a unicidade da C^*-álgebra envolvente $(C^*(A), \pi_A)$, suponha que $(C^*(A)', \pi'_A)$ seja uma outra C^*-álgebra envolvente de A. Por um lado, pela definição de C^*-álgebra envolvente, existem $*$-homomorfismos $\phi : C^*(A) \longrightarrow C^*(A)'$ e $\phi' : C^*(A)' \longrightarrow C^*(A)$ tais que $\phi \circ \pi_A = \pi'_A$ e $\phi' \circ \pi'_A = \pi_A$, i.e., comutam os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi'_A"'] & C^*(A) \arrow[d, "\phi"] \\ & C^*(A)' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi'_A"] \arrow[dr, "\pi_A"'] & C^*(A)' \arrow[d, "\phi'"] \\ & C^*(A). \end{tikzcd}$$

Disso, podemos concluir que

$$\phi' \circ \phi \circ \pi_A = \pi_A \quad e \quad \phi \circ \phi' \circ \pi'_A = \pi'_A.$$

Ou seja, os seguinte diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_A"'] & C^*(A) \arrow[d, "\phi' \circ \phi"] \\ & C^*(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi'_A"] \arrow[dr, "\pi'_A"'] & C^*(A)' \arrow[d, "\phi \circ \phi'"] \\ & C^*(A)'. \end{tikzcd}$$

Por outro lado, os $*$-homomorfismos identidades $\mathrm{Id}_{C^*(A)}$ e $\mathrm{Id}_{C^*(A)'}$ são os únicos tais que $\mathrm{Id}_{C^*(A)} \circ \pi_A = \pi_A$ e $\mathrm{Id}_{C^*(A)'} \circ \pi'_A = \pi'_A$, i.e, comutam os diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_A"'] & C^*(A) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C^*(A)}"] \\ & C^*(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi'_A"] \arrow[dr, "\pi'_A"'] & C^*(A)' \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C^*(A)'}"] \\ & C^*(A)'. \end{tikzcd}$$

Pela definição de C^*-álgebra envolvente, segue que $\phi' \circ \phi = \mathrm{Id}_{C^*(A)}$ e $\phi \circ \phi' = \mathrm{Id}_{C^*(A)'}$. Assim, $\phi : C^*(A) \longrightarrow C^*(A)'$ é um $*$-isomorfismos satisfazendo $\phi \circ \pi_A = \pi'_A$. Portanto $(C^*(A), \pi_A)$ e $(C^*(A)', \pi'_A)$ são isomorfas.

$\square$

Observação 1.1.5. Existem outras maneiras de se construir a C^*-álgebra envolvente universal. Em [3], por exemplo, a C^*-álgebra envolvente é construída a partir de $*$-álgebras de Banach, já em [1], a C^*-álgebra envolvente é construída a partir de $*$-álgebras normadas.

1.2 Produto tensorial de C^*-álgebras

Esta seção compõe, talvez, a parte mais técnica da dissertação, envolvendo diversos resultados da teoria inicial de álgebra de operadores. Construiremos C^*-álgebras, operadores e funcionais que serão fundamentais para a compreensão, mais adiante, dos conceitos de grupos quânticos e coações. Apresentaremos a C^*-álgebra produto tensorial minimal de C^*-álgebras a partir do produto tensorial algébrico entre espaços vetoriais. Na sequência, mostraremos que é possível construir operadores e funcionais positivos da C^*-álgebra produto tensorial a partir de operadores e funcionais positivos das C^*-álgebras das quais se obteve a C^*-álgebra produto tensorial. As principais referências utilizadas foram [22, 29, 2].

Definição 1.2.1. Sejam H e K espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. O produto tensorial algébrico entre H e K é um par $(H \odot K, \varphi)$, em que $H \odot K$ é um espaço vetorial e $\varphi : H \times K \longrightarrow H \odot K$ é uma função bilinear tal que para todo espaço vetorial X e toda função bilinear $f : H \times K \longrightarrow X$, existe uma única função linear $\widetilde{f} : H \odot K \longrightarrow X$ satisfazendo $f = \widetilde{f} \circ \varphi$.

Observação 1.2.2. Pode-se mostrar que o produto tensorial algébrico existe e é único a menos de isomorfismo (ver, por exemplo, [2, Apêndice A]). Nas mesmas condições da definição acima, porém assumindo φ uma função conjugado-bilinear, é possível mostrar que existe uma única função conjugado-linear $\widetilde{\varphi}$ que estende φ ao produto tensorial (ver [12]). Denotamos o produto tensorial algébrico $(H \odot K, \varphi)$ simplesmente por $H \odot K$ e os elementos $\varphi(x, y)$ por $x \otimes y$, em que $x \in H$ e $y \in K$.

Uma das razões pelas quais o produto tensorial será utilizado é porque podemos obter funções lineares a partir de funções bilineares. A noção de produto tensorial nos permite produzir novos objetos a partir de objetos conhecidos. Isto ficará claro na sequência desta seção, na qual veremos uma série de teoremas envolvendo existência de funcionais, operadores, homomorfismos, etc., os quais serão importantes para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Proposição 1.2.3. *Se τ e ρ são funcionais lineares (respectivamente, conjugado-lineares) de espaços vetoriais H e K sobre $\mathbb{C}$, respectivamente, então existe um único funcional linear (respect., conjugado-linear) $\tau \odot \rho$ de $H \odot K$ em $\mathbb{C}$ tal que*

$$(\tau \odot \rho)(x \otimes y) = \tau(x)\rho(y), \quad x \in H, y \in K.$$

Prova. Ver seção de produto tensorial em [12].

Proposição 1.2.4. *Sejam H e K espaços vetoriais e suponha que $\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j = 0$, com $x_i \in H$ e $y_i \in K$. Se $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ é linearmente independente, então $x_i = 0$ para $i = 1, ..., n$.*

Prova. Ver seção de produto tensorial em [12].

Proposição 1.2.5. *Se $T : H \longrightarrow H'$ e $S : K \longrightarrow K'$ são funções lineares entre espaços vetoriais, então existe uma única função linear $T \odot S : H \odot H' \longrightarrow K \odot K'$ tal que $(T \odot S)(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y)$.*

Prova. A função $H \times K \ni (x, y) \longmapsto T(x) \otimes S(y) \in H \odot K$ é bilinear. O resultado segue da definição de produto tensorial.

$\square$

Observação 1.2.6. Daqui para frente, todos os espaços de Hilbert (ou espaços com produto interno) serão considerados com o produto interno conjugado-linear na primeira entrada.

Observação 1.2.7. Sejam H e K espaços vetoriais com produto interno. Dado $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in H \odot K$, sempre podemos supor, sem perda de generalidade, que $\{x_i\}_{i=1}^n$ é ortonormal (em particular, linearmente independente) ou que $\{y_i\}_{i=1}^n$ é ortonormal. De fato, se $\{e_j\}_{j=1}^m$ é uma base para o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{y_i\}_{i=1}^n$, então $y_i = \sum_{j=1}^m z_{ij}e_j$, em que $z_{ij} \in \mathbb{C}$ para $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. Daí, podemos escrever $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \left(\sum_{j=1}^m z_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n z_{ij}x_i\right) \otimes e_j$.

Proposição 1.2.8. *Sejam H e K espaços de Hilbert. Então, existe um único produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $H \odot K$ satisfazendo*

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$$

para todo $x, x' \in H$ e $y, y' \in K$.

Prova. Seja X o espaço dos funcionais conjugado-lineares de $H \odot K$ sobre $\mathbb{C}$. Para cada $x \in H$ e $y \in K$, considere o funcionais conjugado-lineares $\rho_x : H \longrightarrow \mathbb{C}$, em que $\rho_x(x') = \langle x', x \rangle$ para todo $x' \in H$ e $\rho_y : K \longrightarrow \mathbb{C}$, em que $\rho_y(y') = \langle y', y \rangle$ para todo $y' \in K$. A função $\varphi : H \times K \ni (x, y) \longmapsto \rho_x \odot \rho_y$ é bilinear, daí existe um único funcional linear $M : H \odot K \longrightarrow X$ tal que $M(x \otimes y) = \rho_x \odot \rho_y$ para todo $x \in H$ e $y \in K$. Defina a função

$$\langle \cdot\, , \,\cdot \rangle_{H \odot K} : (H \odot K) \times (H \odot K) \longrightarrow \mathbb{C},$$

em que $\langle u, v \rangle_{H \odot K} = M(u)(v)$ para todo $u, v \in H \odot K$. Em particular, $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle_{H \odot K} = M(x \otimes y)(x' \otimes y')$ para todo $x, x' \in H$ e $y, y' \in K$. Esta função é sesquilinear, uma vez que M é linear e $M(u) \in X$ para todo $u \in H \odot K$. Além disso, dado $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in H \odot K$, com $x_i \in H$ e $y_i \in K$, $i = 1, ..., n$, seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal para o espaço gerado pelos vetores $\{y_i\}_{i=1}^n$. Assim, $z = \sum_{j=1}^m x'_j \otimes e_j$ para certos

$x'_j \in H$, $j = 1, ..., m$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle z, z\rangle_{H\odot K} &= \sum_{i,j=1}^{m} \langle x'_i \otimes y_i, x'_j \otimes e_j\rangle_{H\odot K} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \langle x'_i, x'_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{m}\langle x'_j, x'_j\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Disso, segue que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H\odot K}$ é uma forma sesquilinear positiva e que se $\langle z, z\rangle_{H\odot K} = 0$, então $x'_j = 0$ para todo j, donde $z = 0$. Portanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H\odot K}$ é um produto interno.

Para mostrar a unicidade deste produto interno, suponha que exista um outro produto interno $\langle\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle\rangle$ para o espaço vetorial $H \odot K$ que nos tensores elementares é dado por $\langle\langle x, x' \otimes y'\rangle\rangle = \langle x, y\rangle\langle x', y'\rangle$ para quaisquer $x \in H$ e $y \in K$. Então,

$$\langle\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle\rangle = \langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle_{H\odot K}$$

para quaisquer $x, x' \in H$ e $y, y' \in K$. Assim, por linearidade, $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle u, v\rangle_{H\odot K}$ para quaisquer $u, v \in H \odot K$. Logo $\langle\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle\rangle = \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_{H\odot K}$.

□

Observação 1.2.9. Sejam H e K espaços de Hilbert. Denotaremos por $H \otimes K$ o completamento do espaço de Hilbert de Hilbert $H \odot K$ segundo a norma advinda do produto interno da Proposição 1.2.8. Neste caso, vale notar que $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$ para todo $x \in H$ e $y \in K$.

Proposição 1.2.10. *Sejam H e K espaços de Hilbert e suponha que $T \in B(H)$ e $S \in B(K)$. Então existe um único operador $T \otimes S \in B(H \otimes K)$ tal que*

(i) $(T \otimes S)(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y), \quad x \in H, y \in K.$

Além disso,

(ii) $\|T \otimes S\| = \|T\|\|S\|$.

Prova. Pela Proposição 1.2.5, existem únicas funções lineares $\mathrm{Id}_H \odot S : H \odot K \longrightarrow H \odot K$ e $T\odot\ \mathrm{Id}_K : H \odot K \longrightarrow H \odot K$ tais que

$(\mathrm{Id}_H \odot S)(x \otimes y) = x \otimes S(y)$ e $(T \odot \mathrm{Id}_K)(x \otimes y) = T(x) \otimes y$ para todo $x \in H$ e $y \in K$. Vamos mostrar que estas funções são contínuas. De fato, tome $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ com $x_i \in H$ e $y_i \in K$, com $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ um conjunto ortonormal (ver Observação 1.2.7). Então,

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{Id}_H \odot S)(z)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes S(y_i) \right\|^2 \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes S(y_i), \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes S(y_i) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \langle S(y_i), S(y_j) \rangle \\
&\leq \|S\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \|y_i\| \|y_j\| \\
&= \|S\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2 = \|S\|^2 \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|\mathrm{Id}_H \odot S\| \leq \|S\|$. De maneita análoga, supondo $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ ortonormal, obtemos que $\|T \odot \mathrm{Id}_K\| \leq \|T\|$.

Considere $\mathrm{Id}_H \otimes S, T \otimes \mathrm{Id}_K : H \otimes K \longrightarrow H \otimes K$ as únicas extensões lineares contínuas de $\mathrm{Id}_H \odot S$ e $T \odot \mathrm{Id}_K$, respectivamente. Desse modo, o operador composição $(T \otimes \mathrm{Id}_K)(\mathrm{Id}_H \otimes S) \in B(H \otimes K)$, que iremos denotar por $T \otimes S$, é tal que

$$T \otimes S(x \otimes y) = ((T \otimes \mathrm{Id}_K)(\mathrm{Id}_H \otimes S))(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y),$$

para todo $x \in H$ e $y \in K$. Para mostrarmos a unicidade de $T \otimes S$, suponha um outro operador $V \in B(H \otimes K)$ tal que $V(x \otimes y) = T(x) \otimes S(y)$, para todo $x \in H$ e $y \in K$. Então, $V(x \otimes y) = ((T \otimes \mathrm{Id}_K)(\mathrm{Id}_H \otimes S))(x \otimes y) = (T \otimes S)(x \otimes y)$, para todo $x \in H$ e $y \in K$, ou seja, V coincide com $T \otimes S$ nos tensores elementares. Uma vez que os tensores elemetares geram $H \otimes K$, segue que $V = T \otimes S$. Isso conclui o item (i).

Observe, ainda, que $\|T \otimes S\| = \|(T \otimes \mathrm{Id}_K)(\mathrm{Id}d_H \otimes S)\| \leq \|T\| \|S\|$, por construção, além de que

$$\begin{aligned}\|(T\otimes S)\| &\geq \sup_{\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|\leq 1}\|T(x)\|\|S(y)\|\\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|\sup_{\|y\|\leq 1}\|S(y)\| = \|T\|\|S\|.\end{aligned}$$

Segue que $\|T\otimes S\| = \|T\|\|S\|$.

□

Proposição 1.2.11. *Se A e B são $*$-álgebras, existe uma única multiplicação e uma única involução em $A\odot B$ tal*

(i) $(a\otimes b)(a'\otimes b') = aa'\otimes bb'$ para todo $a, a'\in A$ e $b, b'\in B$.

(ii) $(a\otimes b)^* = a^*\otimes b^*$ para todo $a\in A$ e $b\in B$. Com estas operações, $A\odot B$ é uma $*$-álgebra.

Prova. (i) Seja X o espaço das funções lineares de $A\odot B$ em si mesmo. Para cada $a\in A$ e $b\in B$, considere as funções lineares $L_a : A\longrightarrow A$ e $L_b : B\longrightarrow B$, dadas por $L_a(a') = aa'$ e $L_b(b') = bb'$ para todo $a'\in A$ e $b'\in B$. Para todo $a\in A$ e $b\in B$, por conta da Proposição 1.2.5, $L_a\odot L_b\in X$, além de que a função $\varphi : A\times B\ni(a,b)\longmapsto L_a\otimes L_b\in X$ é bilinear. Pela definição de produto tensorial, existe uma única função linear $M : A\odot B\longrightarrow X$ tal que $M(a\otimes b) = L_a\odot L_b$. Defina, então

$$\begin{aligned}\cdot : (A\odot B)\times(A\odot B) &\longrightarrow A\odot B\\ (c,d) &\longmapsto cd = M(c)(d)\end{aligned}$$

É fácil de ver que esta função e bilinear associativa. Observe que $(a\otimes b)(a'\otimes b') = M(a\otimes b)(a'\otimes b') = L_{ab}(a'') = aa'\otimes bb'$ para todo $a, a'\in A$ e $b, b'\in B$.

(ii) Notemos que se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i = 0$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^*\otimes b_i^* = 0$. Com efeito, seja $\{e_j\}_{j=i}^{m}$ uma base para o espaço gerado pelos vetores $b_1, ..., b_n$. Podemos escrever $b_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} z_{ij}e_j$ para únicos ecalares $z_{ij}\in\mathbb{C}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} z_{ij} a_i \right) \otimes e_j = 0.$$

Pela Proposição 1.2.4, temos que $\sum_{i=1}^{n} z_{ij} a_i = 0$ para todo $j = 1, ..., m$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} \overline{z_{ij}} a_i^* = 0$ para todo $j = 1, ..., m$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^* \otimes b_i^* = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_{ij}} a_i^* \right) \otimes e_i^* = 0.$$

Dessa maneira, está bem definida a função

$$\begin{array}{rcl} * : A \odot B & \longrightarrow & A \odot B \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} a_i^* \otimes b_i^* \end{array}$$

É fácil ver que esta função é uma involução para $A \odot B$.

A unicidade da multiplicação e da involução construídas acima segue dos mesmos argumentos utilizados para mostrar a unicidade do operador $T \otimes S$ da proposição anterior. Por exemplo, se existir outra multiplicação $\bullet$ em $A \odot B$ tal que $(a \otimes b) \bullet (a'') = aa' \otimes bb'$ para quaiquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, então, por linearidade, $\bullet$ é igual a multiplicação que construímos nesta demostração. O mesmo vale para a involução.

$\square$

Observação 1.2.12. Dadas A e B $*$-álgebras, sempre que mencionarmos a $*$-álgebra $A \odot B$, estaremos nos referindo a $*$-álgebra da Proposição 1.2.11.

Proposição 1.2.13. *Sejam $\tau : A \longrightarrow C$ e $\rho : B \longrightarrow C$ $*$-homomorfismos de $*$-álgebras A e B em uma $*$-álgebra C tal que $\tau(a)\rho(b) = \rho(b)\tau(a)$, parat todo $a \in A$ e $b \in B$. Então existe um único $*$-homomorfismo $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow C$ tal que $(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau(a)\rho(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.*

Prova. A função $\varphi : A \times B \longrightarrow C$, $(a, b) \longmapsto \tau(a)\rho(b)$ é bilinear. Assim, existe uma única função linear $\tau \otimes \rho : A \odot B \longrightarrow C$ tal que

$(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau(a)\rho(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Além disso, para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, uma vez que $\tau(a')(b) = \rho(b)\tau(a')$, temos que

$$\begin{aligned}
(\tau \odot \rho)((a \otimes b)(a' \otimes b')) &= (\tau \odot \rho)(aa' \otimes bb') \\
&= \tau(aa')\rho(bb') = \tau(a)\tau(a')\rho(b)\rho(b') \\
&= (\tau \odot \rho)(a \otimes b)(\tau \odot \rho)(a' \otimes b').
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, como $\tau(a)\rho(b) = \rho(b)\tau(a)$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\tau \odot \rho)((a \otimes b)^*) &= (\tau \odot \rho)(a^* \otimes b^*) = \tau(a^*)\rho(b^*) \\
&= \tau(a)^*\rho(b)^* = (\tau \odot \rho)(a \otimes b)^*.
\end{aligned}$$

A demonstração da unicidade deste $*$-homomorfismo é análoga às demonstrações de unicidade das proposições anteriores.

□

Proposição 1.2.14. *Sejam A, A', B e B' $*$-álgebras, $\tau : A \longrightarrow A'$ e $\rho : B \longrightarrow B'$ $*$-homomorfismos. Então existe um único $*$-homomorfismo $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow A' \odot B'$ tal que $(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau(a) \otimes \rho(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.*

Prova. Segue da Proposição 1.2.5 e da estrutura de $*$-álgebra dada na Proposição 1.2.11.

□

O próximo resultado é o passo crucial para enriquecermos o produto tensorial com uma estrutura de C^*-álgebra.

Teorema 1.2.15. *Suponha que (H, τ) e (K, ρ) sejam representações de C^*-álgebras A e B, respectivamente. Então existe um único $*$-homomorfismo $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow B(H \otimes K)$ tal que*

$$(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau(a) \otimes \rho(b), \quad a \in A, b \in B.$$

Mais ainda, se τ e ρ são injetivas, então $\tau \odot \rho$ é injetiva.

Prova. Seja $\mathrm{id}_K \in B(K)$ o operador identidade. Para cada $a \in A$, pela Proposição 1.2.10, existe um único operador $\tau(a) \otimes \mathrm{id}_K \in B(H \otimes K)$ tal que $(\tau(a) \otimes \mathrm{id}_K)(x \otimes y) = \tau(a)x \otimes y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, $\|\tau(a) \otimes \mathrm{id}_K\| = \|\tau(a)\|\|\mathrm{id}_K\| = \|\tau(a)\|$. Analogamente, porém considerando o operador identidade $\mathrm{id}_H \in B(H)$, para cada $b \in B$, existe um único operador $\mathrm{id}_H \otimes \rho(b) \in B(H \otimes K)$ tal que $(\mathrm{id}_H \otimes \rho(b))(x \otimes y) = x \otimes \rho(b)y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Além de que $\|\mathrm{id}_H \otimes \rho(b)\| = \|\mathrm{id}_H\|\|\rho(b)\| = \|\rho(b)\|$. Sendo assim, estão bem definidas as seguintes funções

$$\tau' : A \longrightarrow B(H \otimes K), \quad a \longmapsto \tau(a) \otimes \mathrm{id}_K$$

e

$$\rho' : B \longrightarrow B(H \otimes K), \quad b \longmapsto \mathrm{id}_H \otimes \rho(b).$$

Vejamos que τ' e ρ' são $*$-homomorfismos. Para quaisquer $a, a' \in A$, $x \in H$, $y \in K$ e $z \in \mathbb{C}$, uma vez que τ é linear e a soma e multiplicação por escalar em $B(H)$ são as pontuais, segue que

$$\begin{aligned}
\tau'(za + a')(x \otimes y) &= \tau(za + a') \otimes \mathrm{Id}_k(x \otimes y) \\
&= \tau(za + a')(x) \otimes y \\
&= z\tau(a)(x) + \tau(a')(x) \otimes y \\
&= z\tau(a)(x) \otimes y + \tau(a')(x) \otimes y \\
&= z\tau(a) \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y) + \tau(a') \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y) \\
&= (z\tau(a) \otimes \mathrm{Id}_K + \tau(a') \otimes \mathrm{Id}_K)(x \otimes y) \\
&= (z\tau'(a) + \tau'(a'))(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Por argumentos de linearidade e continuidade, vale que $\tau'(za+a')(c) = (z\tau'(a) + \tau'(a'))(c)$ para todo $c \in H \otimes Y$. Logo τ' é linear.

Agora, dados $a, a' \in A$, $x \in H$ e $y \in K$, como τ homomorfismo, utilizando a estrutura canônica de multiplicação na álgebra $B(H)$, temos que

$$\tau'(aa')(x \otimes y) \quad = \quad \tau(aa') \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau(a)\tau(a') \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y) \\
&= (\tau(a)\tau(a'))(x) \otimes y \\
&= \tau(a) \otimes \mathrm{Id}_K(\tau(a')(x) \otimes y) \\
&= \tau'(a)(\tau(a')(x) \otimes y) = \tau'(a)(\tau'(a')(x \otimes y)) \\
&= \tau'(a)\tau'(a')(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

Por argumentos de linearidade e comtinuidade note que $\tau'(aa')(c) = \tau'(a)\tau'(a')(c)$ para todo $c \in H \otimes K$. Assim, τ' é homomorfismo.

Além disso, dados $a \in A$, $x \in H$ e $y \in K$, como τ é $*$-homomorfismo, utilizando a estrutura canônica de involução na $*$-álgebra $B(H)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\tau'(a^*)(x \otimes y) &= \tau(a^*) \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y) \\
&= \tau(a^*)(x) \otimes y = \tau(a)^*(x) \otimes y \\
&= \tau(a)^* \otimes \mathrm{Id}_K(x \otimes y) \\
&= (\tau(a) \otimes \mathrm{Id}_K)^*(x \otimes y) \\
&= \tau'(a)^*(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

Por argumentos de linearidade e continuidade é possível mostrar que $\tau'(a^*)(c) = \tau'(a)^*(c)$ para todo $c \in H \otimes K$. Portanto τ' é um $*$-homomorfismo. Prova-se similarmente que ρ' é um $*$-homomorfismo.

Por conseguinte, como $\tau'(A)$ comuta com $\rho'(B)$, a Proposição 1.2.13 nos diz que existe um único $*$-homomorfismo $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow B(H \otimes K)$ tal que $(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau'(a)\rho'(b) = \tau(a) \otimes \rho(b)$, $a \in A$ e $b \in B$.

Agora, suponha que (H, τ) e (K, ρ) são fieis, i.e., injetivas e seja $c = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in \ker(\tau \odot \rho)$, com $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ linearmente independente. Então $\{\rho(b_i)\}_{i=1}^{n}$ é linearmente independente, já que ρ é injetiva, e $0 = (\tau \odot \rho)(c) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_i) \otimes \rho(b_i)$.

Afirmação. $\tau(a_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

Demonstração. Seja $x \in H$ e escolha uma base ortonormal $\{e_j\}_{j=1}^{m}$ para o espaço gerado pelos vetores $\tau(a_1)(x), ..., \tau(a_n)(x) \in H$. Então, existem escalares $z_{ij} \in \mathbb{C}$ tais que $\tau(a_i)(x) = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} e_j$ para todo $i = 1, ..., n$. Se $y \in K$, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} (\tau(a_i) \otimes \tau(b_i))(x \otimes y) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_i)(x) \otimes \rho(b_i)(y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} z_{ij} e_j \right) \otimes \rho(b_i)(y) \\
&= \sum_{j=1}^{m} e_j \otimes \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \rho(b_i)(y).
\end{aligned}
$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n} z_{ij} \rho(b_i)(y) = 0$ para todo $y \in K$, e como $\{\rho(b_i)\}_{i=1}^{n}$ é linearmente independente, segue que $z_{ij} = 0$ para todo $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. Donde $\tau(a_i)(x) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Como $x \in H$ é arbitrário, concluímos a afirmação.

Por fim, desde que τ é injetiva, $a_1, ..., a_n = 0$, e portanto $c = 0$. Consequentemente, $\ker(\tau \odot \rho) = \{0\}$.

A unicidade mostra-se analogamente à demonstração da unicidade do operador $T \otimes S$ na Proposição 1.2.10.

$\square$

Observação 1.2.16. Com isso, podemos construir uma C^*-norma em $A \odot B$ da seguinte maneira. Sejam (H, τ) e (K, ρ) as representações universais de A e B, respectivamente. Pelo Teorema 1.2.15, existe um único $*$-homomorfismo injetivo $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow B(H \otimes K)$ tal que $(\tau \odot \rho)(a \otimes b) = \tau(a) \otimes \rho(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Assim, a função

$$
\| \cdot \|_{\min} : A \odot B \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad c \longmapsto \|(\tau \odot \rho)(c)\|, \tag{1.1}
$$

está bem definida e é uma C^*-norma. Essa C^*-norma é chamada de **C^*-norma minimal.**

Corolário 1.2.17. *Sejam A e B C^*-álgebras. A C^*-norma $\| \cdot \|_{\min}$ em $A \odot B$ construída acima satisfaz $\|a \otimes b\|_{\min} = \|a\| \|b\|$ para quaisquer*

$a \in A$ e $b \in B$.

Prova. Pela observação anterior e pela Proposição 1.2.10, temos que $\|a \otimes b\|_{\min} = \|(\tau \odot \rho)(a \otimes b)\| = \|\tau(a) \otimes \rho(b)\| = \|\tau(a)\|\|\rho(b)\|$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Como as representações universais são isométricas, segue que $\|a \otimes b\|_{\min} = \|\tau(a)\|\|\rho(b)\| = \|a\|\|b\|$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$.

□

Observação 1.2.18. Denotaremos por $A \otimes B$ o completamento de $A \odot B$ com relação à C^*-norma minimal construída acima. A C^*-álgebra $A \otimes B$ é chamada de **C^*-álgebra produto tensorial minimal**, ou C^*-álgebra produto tensorial espacial de A e B. Como utilizaremos somente a C^*-norma $\|\cdot\|_{\min}$ para o produto tensorial de C^*-álgebras, a denotaremos apenas por $\|\cdot\|$, subentendendo que se trata da C^*-norma minimal.

Proposição 1.2.19. *Sejam (H, τ) e (K, ρ) representações arbitrárias de C^*-álgebras A e B, respectivamente, e $\tau \odot \rho : A \odot B \longrightarrow B(H \otimes K)$ o único $*$-homomorfismo dado pelo Teorema 1.2.15. Se $c \in A \odot B$, então*

$$\|(\tau \odot \rho)(c)\| \leq \|c\|.$$

Prova. Ver [22, Teorema 6.4.4., página 197].

□

Teorema 1.2.20. *Sejam A, B, C e D C^*-álgebras, $T : A \longrightarrow C$ e $S : B \longrightarrow D$ $*$-homomorfismos. Então existe um único $*$-homomorfismo $T \otimes S : A \otimes B \longrightarrow C \otimes D$ satisfazendo $(T \otimes S)(a \otimes b) = T(a) \otimes S(b)$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. (Lembre que $A \otimes B$ denota a C^*-álgebra produto tensorial minimal.)*

Prova. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22, Teorema 6.5.1, página 210]. Ela é longa e bastante técnica, envolvendo diversos resultados.

Proposição 1.2.21. *Sejam A e B C^*-álgebras e $\theta : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\omega : B \longrightarrow \mathbb{C}$ funcionais positivos (portanto, limitados [22]). Então existe* *um único funcional positivo* $\theta\otimes\omega : A\otimes B \longrightarrow \mathbb{C}$, *tal que* $(\theta\otimes\omega)(a\otimes b) = \theta(a)\omega(b)$ *para todo* $a \in A$ *e* $b \in B$. *Além disso,* $\|\theta \otimes \omega\| \leq \|\theta\|\|\omega\|$.

Prova. Sejam (H_θ, π_θ) e (H_ω, π_ω) as representações GNS associadas aos funcionais θ e ω, respectivamente. Estas representações são construtivamente cíclicas e os vetores cíclicos associados $\xi_\theta \in H_\theta$ e $\xi_\omega \in H_\omega$, respectivamente, são tais que

$$\theta(a) = \langle \xi_\theta, \pi_\theta(a)\xi_\theta \rangle \quad e \quad \omega(b) = \langle \xi_\omega, \pi_\omega(b)\xi_\omega \rangle,$$

para todo $a \in A$ e $b \in B$ (ver [22, Teorema 5.1.1., página 141]). Pelo Teorema 1.2.15, existe um único $*$-homomorfismo $\pi_\theta \odot \pi_\omega : A \odot B \longrightarrow B(H_\theta \otimes H_\omega)$ tal que $(\pi_\theta \odot \pi_\omega)(a \otimes b) = \pi_\theta(a) \otimes \pi_\omega(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Pela Proposição 1.2.19, podemos estender $\pi_\theta \odot \pi_\omega$ a um (único) $*$-homomorfismo $\pi_\theta \otimes \pi_\omega : A \otimes B \longrightarrow B(H_\theta \otimes H_\omega)$. Com isso, está bem definida a função

$$\begin{array}{rcl} \theta \otimes \omega : A \otimes B & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ c & \longrightarrow & \langle \xi_\theta \otimes \xi_\omega, ((\pi_\theta \otimes \pi_\omega)(c))(\xi_\theta \otimes \xi_\omega) \rangle \end{array}$$

Está função é linear, uma vez que o produto interno está sendo considerado linear na segunda variável. Além disso, para todo $c \in A \otimes B$, $a \in A$ e $b \in B$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (\theta \otimes \omega)(c^*c) & = & \langle \xi_\theta \otimes \xi_\omega, ((\pi_\theta \otimes \pi_\omega)(c^*c))(\xi_\theta \otimes \xi_\omega) \rangle \\ & = & \langle (\pi_\theta \otimes \pi_\omega)(c)(\xi_\theta \otimes \xi_\omega), (\pi_\theta \otimes \pi_\omega)(c)(\xi_\theta \otimes \xi_\omega) \rangle \\ & \geq & 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (\theta \otimes \omega)(a \otimes b) & = & \langle \xi_\theta \otimes \xi_\omega, ((\pi_\theta \otimes \pi_\omega)(a \otimes b))(\xi_\theta \otimes \xi_\omega) \rangle \\ & = & \langle \xi_\theta \otimes \xi_\omega, \pi_\theta(a)\xi_\theta \otimes \pi_\omega(b)\xi_\omega \rangle \\ & = & \langle \xi_\theta, \pi_\theta(a)\xi_\theta \rangle \langle \xi_\omega, \pi_\omega(b)\xi_\omega \rangle = \theta(a)\omega(b). \end{array}$$

Assim, $\theta \otimes \omega$ funcinal posittivo (e, portanto, limitado [22]).

Sejam $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{v_\mu\}_{\mu\in M}$ unidades aproximadas para A e B, respectivamente. Então, escrevendo $(\lambda,\mu)\le(\lambda',\mu')$ em $\Lambda\times M$ se $\lambda\le\lambda'$ e $\mu\le\mu'$, temos que o par $(\Lambda\times M,\le)$ é um conjunto dirigido. Se definirmos $u'_{(\lambda,\mu)}=u_\lambda$ e $v'_{(\lambda,\mu)}=v_\mu$ para todo $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$, então é simples verificar que a net $\{u'_{(\lambda,\mu)}\otimes v'_{(\lambda,\mu)}\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ é uma unidade aproximada para $A\otimes B$. Por [22, Teorema 3.3.3., página 88], $\|\theta\otimes\omega\|=\lim_{(\lambda,\mu)}(\theta\otimes\omega)(u'_{(\lambda,\mu)}\otimes v'_{(\lambda,\mu)})$ e, com isso,

$$\begin{aligned}
\|\theta\otimes\omega\| &= \lim_{(\lambda,\mu)}(\theta\otimes\omega)(u'_{(\lambda,\mu)}\otimes v'_{(\lambda,\mu)})\\
&= \lim_{(\lambda,\mu)}\theta(u'_{(\lambda,\mu)})\omega(v'_{(\lambda,\mu)}) \le \lim_{(\lambda,\mu)}\left|\theta(u'_{(\lambda,\mu)})\omega(v'_{(\lambda,\mu)})\right|\\
&= \le \lim_{(\lambda,\mu)}\|\theta\|\|(u'_{(\lambda,\mu)})\|\|\omega\|\|(v'_{(\lambda,\mu)})\|\\
&\le \|\theta\|\|\omega\|.
\end{aligned}$$

A unicidade de $\theta\otimes\omega$ é provada similarmente à unicidade do operador $T\otimes S$ da Proposição 1.2.10.

$\square$

Proposição 1.2.22. *Sejam A,B C^*-álgebras, $\theta: A\longrightarrow\mathbb{C}$ um funcional positivo e $T: B\longrightarrow B$ um $*$-homomorfismo. Então existe uma única função linear conínua $\theta\otimes T: A\otimes B\longrightarrow B$ tal que $(\theta\otimes T)(a\otimes b)=\theta(a)T(b)$ para todo $a\in A$ e $b\in B$.*

Prova. Uma vez que a função $A\times B\ni(a,b)\longmapsto\theta(a)T(b)\in B$ é bilinear, existe uma única função linear $\theta\odot T: A\odot B\longrightarrow B$ tal que $(\theta\odot T)(a\otimes b)=\theta(a)T(b)$ para todo $a\in A$ e $b\in B$.

Afirmação. $\theta\odot T$ é contínua.

Demonstração. Seja $\mathrm{id}_A\otimes T: A\otimes B\longrightarrow A\otimes B$ o $*$-homomorfismo tal que $(\mathrm{id}_A\otimes T)(a\otimes b)=a\otimes T(b)$ para todo $a\in A$ e $b\in B$ (ver Teorema 1.2.20). Para qualquer ω funcional positivo de B, seja $\theta\otimes\omega: A\otimes B\longrightarrow\mathbb{C}$ o funcional positivo tal que $(\theta\otimes\omega)(a\otimes b)=\theta(a)\omega(b)$ para todo $a\in A$ e $b\in B$ (ver Proposição 1.2.21). Então, dado $c=\sum_i a_i\otimes b_i\in A\odot B$, temos que

$$\|(\theta\odot T)(c)\|_B = \sup_{\|\omega\|\le 1}|\omega((\theta\odot T)(c))|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|\omega\|\leq 1} \left|\omega\left((\theta \odot T)\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right)\right| \\
&= \sup_{\|\omega\|\leq 1} \left|\sum_i \theta(a_i)\omega(T(b_i))\right| \\
&= \sup_{\|\omega\|\leq 1} \left|(\theta \otimes \omega)(\mathrm{id}_A \otimes T)\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right| \\
&\leq \sup_{\|\omega\|\leq 1} \|\theta\|\|\omega\|\|id \otimes T\|\|c\| \\
&\leq \|\theta\|\|\mathrm{id}_A \otimes T\|\|c\|.
\end{aligned}
$$

Isso demonstra a afirmação. Assim, existe uma única extensão linear contínua $\theta\otimes T : A\otimes B \longrightarrow B$, e por construção $(\theta\otimes T)(a\otimes b) = \theta(a)T(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. A unicidade da função $\theta \otimes T$ é mostrada similarmente à unicidade do operador $T \otimes S$ da Proposição 1.2.10.

$\square$

Observação 1.2.23. Sejam A e B C^*-álgebras, $\theta \in A_+^*$, $\omega \in B_+^*$ e o $*$-homomorfismo id_B. As Proposições 1.2.21 e 1.2.22 nos dizem que, para quaiquer $a \in A$ e $b \in B$,

$$\omega((\theta \otimes \mathrm{id}_B)(a \otimes b)) = \omega(\theta(a)b) = \theta(a)\omega(b) = (\theta \otimes \omega)(a \otimes b).$$

Como as funções ω, $\theta \otimes \mathrm{id}_B$ e θ são lineares e contínuas, bem como $A \odot B$ é denso em $A \otimes B$, temos necessariamente que $\omega((\theta \otimes \mathrm{id}_B)(c)) = (\theta \otimes \omega)(c)$ para qualquer $c \in A \otimes B$. Por motivo simétrico, porém considerando id_A, claro que $\theta((\mathrm{id}_A \otimes \omega)(c)) = (\theta \otimes \omega)(c)$ para qualquer $c \in A \otimes B$.

Assim, dado c um elemento positivo de $A \otimes B$, segue que $\omega((\theta \otimes \mathrm{id}_B)(c)) \geq 0$ para todo $\omega \in B_+^*$. Por [22, Teorema 3.4.3], temos que $(\theta \otimes \mathrm{id}_B)(c) \geq 0$.

Proposição 1.2.24. *Sejam A e B C^*-álgebras. Para cada $\theta \in A_+^*$, considere a função contínua $\theta \otimes \mathrm{Id}_B : A \otimes B \longrightarrow B$, conforme a Proposição 1.2.22. Dado $c \in A\otimes B$, se $(\theta\otimes \mathrm{Id}_B)(c^*c) = 0$ para qualquer $\theta \in A_+^*$, então $c = 0$.*

Prova. Seja $c \in A \otimes B$ tal que $(\theta \otimes id)(c^*c) = 0$ para todo $\theta \in A_+^*$. Pela Observação 1.2.23, para qualquer $\omega \in B_+^*$, temos que $(\theta \otimes \omega)(c^*c) = \omega((\theta \otimes \mathrm{Id}_B)(c^*c)) = 0$.

Considere as C^*-álgebras como C^*-subálgebras $A \subseteq B(H)$ e $B \subseteq B(K)$ para certos espaços de Hilbert H e K (os da representação universal, por exemplo), e para cada par de vetores $\xi \in H$ e $\eta \in K$, defina os seguintes funcionais positivos,

$$\theta_\xi : A \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad a \longmapsto \langle \xi, a\xi \rangle$$

e

$$\omega_\eta : B \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad b \longmapsto \langle \eta, b\eta \rangle.$$

Note que para todo $a \in A$ e $b \in B$, tem-se

$$\begin{aligned} (\theta_\xi \otimes \omega_\eta)(a \otimes b) &= \theta_\xi(a)\omega_\eta(b) = \langle \xi, a\xi \rangle \langle \eta, b\eta \rangle \\ &= \langle \xi \otimes \eta, a\xi \otimes b\eta \rangle \\ &= \langle \xi \otimes \eta, (a \otimes b)(\xi \otimes \eta) \rangle. \end{aligned}$$

O operador $a \otimes b \in B(H \otimes K)$ é o operador do Teorema 1.2.15. Segue, por linearidade e continuidade, que para todo $d \in A \otimes B$

$$(\theta_\xi \otimes \omega_\eta)(d) = \langle \xi \otimes \eta, d(\xi \otimes \eta) \rangle.$$

Em particular, para $d = c^*c$, obtemos

$$0 = (\theta_\xi \otimes \omega_\eta)(c^*c) = \langle \xi \otimes \eta, c^*c(\xi \otimes \eta) \rangle = \langle c(\xi \otimes \eta), c(\xi \otimes \eta) \rangle.$$

Logo, $c(\xi \otimes \eta) = 0$. Por fim, uma vez que $\xi \in H$ e $\eta \in K$ são arbitrários e $H \odot K$ é denso em $H \otimes K$, segue que $c(\zeta) = 0$ para todo $\zeta \in H \otimes K$. Portanto $c = 0$.

$\square$

Observação 1.2.25. Para o próximo resultado, precisaremos de um resultado técnico que diz que para qualquer espaço compacto Hausdorff Γ e qualquer C^*-álgebra A, a função $\Psi : C(\Gamma) \odot A \longrightarrow C(\Gamma, A)$, que nos tensores elementares é definida por $\Psi(f \otimes a)|_x = (f \cdot a)x = f(x)a$ para todo $a \in A$ e $f \in C(\Gamma)$, se extende a um único $*$-isomorfismo $\widetilde{\Psi} : C(\Gamma) \otimes A \longrightarrow C(\Gamma, A)$ (ver [22, Teorema 6.4.17, página 208]).

Proposição 1.2.26. *Sejam X e Y espaços topológicos Hausdorff compactos. Considere as C^*-álgebras $C(X)$, $C(Y)$ e $C(X \times Y)$ das funções contínuas de X, Y e $X \times Y$ em $\mathbb{C}$, respectivamente. Então $C(X \times Y) \cong C(X) \otimes C(Y)$.*

Prova. Em vista da Observação 1.2.25, vamos considerar $A = C(Y)$, $\Gamma = X$ e mostrar que a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C(X, C(Y)) & \longrightarrow & C(X \times Y) \\ f & \longmapsto & \Phi(f), \end{array}$$

em que $\Phi(f)(x, y) = (f(x))(y)$, é um $*$-isomorfismo.

A função Φ está bem definida, já que $f(x) \in C(Y)$ para quaisquer $f \in C(X, C(Y))$ e $x \in X$. Da estrutura natural de $*$-álgebra de $C(X, C(Y))$, análoga à estrutura de $C(X)$, é fácil de ver que Φ é $*$-homomorfismo. Vejamos, por exemplo, que $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$, $f \in C(X, C(Y))$. De fato, dado $f \in C(X, C(Y))$ e $(x, y) \in X \times Y$,

$$\Phi(f^*)(x, y) = (f^*(x))(y) = (f(x))^*(y) = \overline{(f(x))(y)} = \Phi(f)^*(x, y).$$

Além disso, a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} : C(X \times Y)) & \longrightarrow & C(X, C(Y)) \\ F & \longmapsto & \Phi^{-1}(F), \end{array}$$

em que $(\Phi^{-1}(F)(x))(y) = F(x, y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, é o $*$-homomorfismo inverso de Φ. De fato, para todo $F \in C(X \times Y)$, $f \in C(X, C(Y))$, $x \in X$ e $y \in Y$, temos

$$(\Phi \circ \Phi^{-1})(F)|_{(x,y)} = \Phi(\Phi^{-1}(F))(x, y) = (\Phi^{-1}(F)(x))(y) = F(x, y)$$

e

$$(\Phi^{-1} \circ \Phi)(f)(x)|_y = (\Phi^{-1}(\Phi(f)))(x)|_y = \Phi(f)(x, y) = (f(x))(y).$$

É fácil ver que Φ^{-1} é $*$-homomorfismo, isto segue diretamente da estrutura natural de $*$-álgebra de $C(X, Y)$. Portanto, temos o $*$-isomorfismo composição

$$C(X) \otimes C(Y) \xrightarrow{\widetilde{\Psi}} C(X, C(Y)) \xrightarrow{\Phi} C(X \times Y),$$

em que, para todo $f \in C(X)$ e $g \in C(Y)$,

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \widetilde{\Psi})(f \otimes g)|_{(x,y)} &= \Phi(\widetilde{\Psi}(f \otimes g))|_{(x,y)} = (\widetilde{\Psi}(f \otimes g)(x))(y) \\ &= ((f \cdot g)(x))(y) = (f(x)g)(y) = f(x)g(y). \end{aligned}$$

□

1.3 Módulos de Hilbert

Os módulos de Hilbert são importantes para a teoria de C^*-álgebras. Neste trabalho, eles compõem os espaços sob os quais representaremos nossas $*$-álgebras. Nesta seção, mostraremos, entre outros resultados, que o espaço dos operadores adjuntáveis sobre um módulo de Hilbert é uma C^*-álgebra. As principais referências utilizadas foram [19, 21, 32, 1].

Definição 1.3.1. Seja A um C^*- algebra. Um **A-pré-módulo de Hilbert** é um espaço vetorial E, que também é um A-módulo à direita, munido com uma aplicação linear na segunda entrada

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

chamada de **A-produto interno** e que satisfaz, para todo $x, y \in E$ e $a \in A$, os seguintes axiomas:

(i) $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$;

(ii) $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$;

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$, ou seja, $\langle x, x\rangle \in A_+$;

(iv) $\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Observação 1.3.2. Segue, do axioma (ii) da Definição 1.3.1, que produto interno é conjugado-linear na primeira variável. E os itens (i) e (ii) implicam

$$\langle xa, y\rangle = a^*\langle x, y\rangle$$

para todo $x, y \in E$ e $a \in A$. Além disso, se $x = 0$, então segue do item (i) que $\langle x, x\rangle = \langle 0, 0\rangle = \langle 0, 0 \cdot 0_A\rangle = \langle 0, 0\rangle 0_A = 0$.

Observação 1.3.3. Existe, ainda, um compatibilidade entre a multiplicação por escalar e a operação de A-módulo em E dada por

$$(zx)a = x(za)$$

para quaiquer $z \in \mathbb{C}$, $x \in E$ e $a \in A$. Com efeito, para qualquer $y \in E$,

$$\langle y, (zx)a\rangle = \langle y, zx\rangle a = z\langle y, x\rangle a = z\langle y, xa\rangle = \langle y, z(xa)\rangle$$

e

$$\langle y, (zx)a\rangle = z\langle y, x\rangle a = \langle y, x\rangle(za) = \langle y, x(za)\rangle.$$

Pela linearidade do produto interno na segunda entrada, temos que

$$\langle y, (zx)a - z(xa)\rangle = \langle y, (zx)a - x(za)\rangle = 0.$$

Como $y \in E$ é arbitrário, obtemos $(zx)a = z(xa) = x(za)$.

Exemplo 1.3.4. *Todo espaço vetorial complexo com produto interno é um $\mathbb{C}$-pré-módulo de Hilbert.*

Exemplo 1.3.5. *Seja A uma C^*-álgebra. Então A é um A-pré-módulo de Hilbert com a operação de módulo como a multiplicação de A e A-produto interno definido por $\langle a, b\rangle = a^*b$, $a, b \in A$.*

Como no caso de espaços de Hilbert, gostaríamos de induzir uma norma num A-pré-módulo de Hilbert a partir do seu produto interno. Para fazer isso, relembraremos um resultado geral da teoria de elementos positivos em C^*-álgebras.

Observação 1.3.6. Seja A uma C^*-álgebra. É possível mostrar que um elemento autoadjunto $a \in A$ é positivo se, e somente se, $\sigma(a) \subset [0, \infty)$; e se $a, b \in A$ são elementos autoadjuntos com $a \leq b$, então $c^*ac \leq c^*bc$ para todo $c \in A$ (ver [22, Teoremas 2.1.8, 2.2.4 e 2.2.5]). Com isso, podemos mostrar que $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$ para todo $a, b \in A$. Com efeito, suponha que A não possui unidade e seja A_1 uma unitização de A. Desde que o espectro de $a \in A$ é por definição o espectro de $a \in A_1$, a menos possivelmente do $0 \in \mathbb{R}$, a positividade de a é determinada em A_1. Logo, como $\|a\|^2 \cdot 1 - a^*a \geq 0$ em A_1, segue que $b^*(\|a\|^2 \cdot 1 - a^*a)b \geq 0$ para todo $b \in A$. Portanto $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$.

Teorema 1.3.7. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)****Seja E um A-pré-módulo de Hilbert e $x, y \in E$. Então*

$$\langle x, y\rangle^* \langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\| \langle y, y\rangle.$$

Prova. Sejam $x, y \in E$ e $a \in A$. Pelos axiomas da Definição 1.3.1, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle xa - y, xa - y\rangle &= \langle xa, xa\rangle - \langle xa, y\rangle - \langle y, xa\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= a^*\langle x, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|\langle x, x\rangle\| a^*a - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da observação anterior. Assim, temos dois casos:

1. Se $\|\langle x, x\rangle\| = 0$, então

$$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.$$

2. Se $\|\langle x,x\rangle\| \neq 0$, escolhendo $a = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|}$, temos

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \|\langle x,x\rangle\| \frac{\langle x,y\rangle^*}{\|\langle x,x\rangle\|} \frac{\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} - \frac{\langle x,y\rangle^*}{\|\langle x,x\rangle\|} \langle x,y\rangle + \\ &- \quad \langle y,x\rangle \frac{\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} + \langle y,y\rangle \\ &\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle^* \frac{\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} \leq \langle y,y\rangle, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\langle x,y\rangle^* \langle x,y\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\| \langle y,y\rangle.$$

□

Corolário 1.3.8. *Se E um A-pré-módulo de Hilbert, então*

(i) $\|x\| := \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$, *$x \in E$, define uma norma em E e*

$$\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$$

para todo $x, y \in E$.

(ii) $\|xa\| \leq \|x\|\|a\|$ *para todo $x \in E$ e $a \in A$.*

Prova. Vejamos que $\|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$, $x \in E$, define uma norma em E. Sejam $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Segue que

1. $\|\alpha x\| = \|\langle \alpha x, \alpha x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = \|\overline{\alpha}\alpha\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|$.

2. Claro que $\|x\| \geq 0$ e o axioma (iv) da Definição 1.3.1 nos diz $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pelo Teorema 1.3.7, temos que

$$\begin{aligned} &\langle x,y\rangle^* \langle x,y\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\| \langle y,y\rangle \\ \Rightarrow \quad &\|\langle x,y\rangle\|^2 = \|\langle x,y\rangle^* \langle x,y\rangle\| \leq \|\langle x,x\rangle\| \|\langle y,y\rangle\| = \|x\|^2 \|y\|^2 \\ \Rightarrow \quad &\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Da desigualdade do item 3 acima, obtemos a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|\langle x+y, x+y\rangle\| \\ &\le \|\langle x,x\rangle\| + \|\langle x,y\rangle\| + \|\langle y,x\rangle\| + \|\langle y,y\rangle\| \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2, \end{aligned}$$

donde,

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Dos itens $1, 2$ e 3 acima, segue o item (i).

Além disso, dado $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \|xa\|^2 &= \|\langle xa, xa\rangle\| = \|a^*\langle x,x\rangle a\| \\ &\le \|a^*\|\|x\|^2\|a\| = \|x\|^2\|a\|^2, \end{aligned}$$

de modo que $\|xa\| \le \|x\|\|a\|$. Isso mostra o item (ii).

$\square$

Definição 1.3.9. Um A-pré-módulo de Hilbert E é dito um **A-módulo de Hilbert** quando E for completo relativamente à norma $E \ni x \longmapsto \|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+$.

Observação 1.3.10. Se E_0 é um A-pré-módulo de Hilbert que não é completo na norma, seja E o seu completamento como espaço vetorial normado. O Corolário 1.3.8 nos diz, em particular, que tanto o produto interno, quanto a operação de A-módulo são funções contínuas, de modo que podem ser estendidas a E. Portanto, o completamento de um A-pré-módulo Hilbert é um A-módulo de Hilbert, neste sentido.

Exemplo 1.3.11. *Todo espaço de Hilbert é naturalmente um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert.*

Exemplo 1.3.12. *Dada um C^*-álgebra A, então A é um A-módulo de Hilbert com produto interno definido por $\langle a,b\rangle = a^*b$, $a,b \in A$. Neste caso a norma de A como um A-módulo de Hilbert coincide com a norma de A como C^*-álgebra, uma vez que $\|\langle a,a\rangle\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$.*

Nas referências [19] e [21] podem ser encontrados diversos outros exemplos de módulos de Hilbert.

Proposição 1.3.13. *Sejam A uma C^*-álgebra, E um A-módulo de Hilbert e H um espaço de Hilbert. Então existe a seguinte estrutura de A-pré-módulo de Hilbert no espaço vetorial produto tensorial algébrico $E \odot H$:*

$$\cdot : E \odot H \times A \quad \longrightarrow \quad E \odot H,$$

que nos tensores elementares é dado por

$$(x \otimes \xi)a = xa \otimes \xi, \quad \xi \in H, a \in A.$$

E o A-produto interno é

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \odot H \times E \odot H \quad \longrightarrow \quad A,$$

que nos tensores elementares é dado por

$$\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta \rangle = \langle x, y \rangle \langle \xi, \eta \rangle, \tag{1.2}$$

para todo $\xi, \eta \in H$, e $a \in A$.

Prova. Desde que E é um A-módulo, é simples verificar que a operação $(x \otimes \xi)a = xa \otimes \xi$ define uma estrutura de A-módulo em $E \odot H$. Vamos provar que existe de fato um produto interno como o mencionado acima. Para cada $x \in E$ e $\xi \in H$, considere as seguintes funcões conjugado-lineares

$$\rho_x : E \longrightarrow A, \quad y \longmapsto \langle y, x \rangle$$

e

$$\theta_\xi : H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \eta \longmapsto \langle \eta, \xi \rangle.$$

Desde que a função $E \times H \ni (y, \eta) \longmapsto \rho_x(y)\theta_\xi(\eta) \in A$ é conjugado-bilinear, pela definição de produto tensorial, existe uma única função conjugado-linear $\rho_x \odot \theta_\xi : E \odot H \longrightarrow A$ tal que $(\rho_x \odot \theta_\xi)(y \odot \eta) =$

$\rho_x(y)\theta_\xi(\eta)$ para todo $y \in E$ e $\eta \in H$.

Assim, denotando por V o espaço (com a estrutura pontual) das funções conjugado-lineares de $E \odot H$ em A, está bem definida a função

$$\varphi : E \times H \ni (x, \xi) \longmapsto \rho_x \odot \theta_\xi \in V.$$

Além disso, φ é bilinear. De fato, dados $x, y, z \in E$, $\xi, \eta \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(\alpha x + y, \xi)|_{(z\otimes\eta)} & = & (\rho_{\alpha x+y} \odot \theta_\xi)(z \otimes \eta) \\
& = & \rho_{\alpha x+y}(z)\theta_\xi(\eta) = \langle z, \alpha x + y\rangle\langle \eta, \xi\rangle \\
& = & \alpha\langle z, x\rangle\langle \eta, \xi\rangle + \langle z, y\rangle\langle \eta, \xi\rangle \\
& = & \alpha\rho_x(z)\theta_\xi(\eta) + \rho_y(z)\theta_\xi(\eta) \\
& = & \alpha(\rho_x \odot \theta_\xi)(z \otimes \eta) + (\rho_y \odot \theta_\xi)(z \otimes \eta) \\
& = & \alpha\varphi(x, \xi)|_{(z\otimes\eta)} + \varphi(y, \xi)|_{(z\otimes\eta)} \\
& = & (\alpha\varphi(x, \xi) + \varphi(y, \xi))|_{(z\otimes\eta)}.
\end{array}$$

Analogamente, mostra-se a linearidade da segunda entrada. Daí, pela definição de produto tensorial, existe uma única função linear $M : E \odot H \longrightarrow V$ tal que $M(x \otimes \xi) = \rho_x \odot \theta_\xi$ para todo $x \in E$ e $\xi \in H$. Definimos, então, a função

$$\begin{array}{rcl}
\langle \cdot, \cdot \rangle : E \odot H \times E \odot H & \longrightarrow & A \\
(u, v) & \longmapsto & M(v)(u),
\end{array}$$

que nos tensores elementares satisfaz

$$\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta\rangle := M(y \otimes \eta)(x \otimes \xi) = \langle x, y\rangle\langle \xi, \eta\rangle$$

para todo $x, y \in E$ e $\xi, \eta \in H$. Resta mostrarmos que esta função define um A-produto interno. Como M é linear, segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é linear na segunda entrada. E dados $x, y \in E$, $\xi, \eta \in H$ e $a \in A$ temos

(i)

$$\begin{aligned}\langle x\otimes\xi,(y\otimes\eta)a\rangle &= \langle x\otimes\xi, ya\otimes\eta\rangle = \langle x, ya\rangle\langle\eta,\xi\rangle\\ &= \langle x,y\rangle\langle\eta,\xi\rangle a = \langle x\otimes\xi, y\otimes\eta\rangle a.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\langle x\otimes\xi, y\otimes\eta\rangle^* &= \langle x,y\rangle^*\langle\xi,\eta\rangle^*\\ &= \langle y,x\rangle\langle\eta,\xi\rangle\\ &= \langle y\otimes\eta, x\otimes\xi\rangle.\end{aligned}$$

Por linearidade, os itens (i) e (ii) se estendem para $E\odot H$.

(iii) Dado $c=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes\xi_i \in E\odot H$, considerando $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ uma base ortonormal para o subespaço gerado pelos vetores $\xi_1,...,\xi_n$, podemos escrever $\xi_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}e_k$ para únicos escalares $\alpha_{ik}\in\mathbb{C}$ e $i=1,...,n$. Assim, temos que

$$c=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes\xi_i = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes\alpha_{ik}e_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}x_i\otimes e_k\right),$$

de modo que

$$\langle c,c\rangle = \left\langle\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes\xi_i, \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes\xi_i\right\rangle = \sum_{k=1}^{m}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}x_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}x_i\right\rangle.$$

Como E é um A-módulo de Hilbert, então $\langle c,c\rangle\geq 0$. Se $\langle c,c\rangle = 0$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}x_i = 0$ para todo $k=1,...,m$. Logo $c=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes\xi_i = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}x_i\otimes e_k\right) = 0$.

Dos itens $(i),(ii)$ e (iii) acima, segue que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um A-produto interno para $E\odot H$.

$\square$

Notação 1.3.14. *Denotaremos por $E \otimes H$ o A-módulo de Hilbert obtido do completamento de $E \odot H$ relativamente à norma advinda do A-produto interno da proposição anterior.*

Definição 1.3.15. Sejam E e F A-pré-módulos de Hilbert (respectivamente, A-módulos de Hilbert). Uma função $f : E \longrightarrow F$ é dita um **homomorfismo de A-pré-módulos de Hilbert** (respectivamente, de A-módulos de Hilbert) se:

(i) Preserva a estrutura de A-módulo, ou seja, f é linear e $f(xa) = f(x)a$ para todo $x \in E$ e $a \in A$;

(ii) Presenva o A-produto interno, isto é, $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$, para todo $x, y \in E$.

Se, além disso, f for sobrejetiva, dizemos que f é um **isomorfismo de A-pré-módulos de Hilbert** (respectivamente, de A-módulos de Hilbert).

Observação 1.3.16. Note que qualquer homomorfismo $f : E \longrightarrow F$ de A-módulos é uma função contínua e injetiva. De fato, como $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ para todo $x, y \in E$, segue que

$$\|x\|^2 = \|\langle x, x\rangle\| = \|\langle f(x), f(x)\rangle\| = \|f(x)\|^2$$

para todo $x \in E$, de modo que f é contínua e injetiva.

Proposição 1.3.17. *Sejam A uma C^*-álgebra, E_0 e F_0 A-pré-módulos de Hilbert. Se $f : E_0 \longrightarrow F_0$ for um isomorfismo de A-pré-módulos de Hilbert, então f se estende a um único isomorfismo de A-módulos de Hilbert $\tilde{f} : E \longrightarrow F$, em que E e F são A-módulos de Hilbert obtidos dos completamentos de E_0 e F_0, respectivamente.*

Prova. Pela observação acima, como f é homomorfismo de A-pré-módulos, f é isométrica (em particular, contínua). Como f também é linear, segue que f é uniformemente contínua. Então, basta considerar a única extensão (linear bijetiva) $\widetilde{f} : E \longrightarrow F$ considerando E_0 e F_0 como espaços métricos. Pela continuidade das operações de módulo e A-produto interno em E_0 e F_0, é simples verificar que f é um isomorfismo de A-módulos de Hilbert.

$\square$

A partir de agora, estaremos interessados em definir a C^*-álgebra dos operadores em um A-módulo de Hilbert.

Definição 1.3.18. Sejam E_1 e E_2 A-módulos de Hilbert. Um função $T : E_1 \longrightarrow E_2$ é dita ser **adjuntável** se existe existe uma função $T^* : E_2 \longrightarrow E_1$ satisfazendo

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle, \qquad x \in E_1, y \in E_2.$$

Quando T^* existir o denominaremos de **adjunto** de T.

Proposição 1.3.19. *Sejam E_1, E_2 e E_3 A-módulos de Hilbert, $T : E_1 \longrightarrow E_2$, $S : E_1 \longrightarrow E_2$ e $R : E_2 \longrightarrow E_3$ funções adjuntáveis e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então:*

(i) T^* é único;

(ii) T^* é adjuntável e $(T^*)^* = T$;

(iii) $T + \alpha S$ é adjuntável e $(T + \alpha S)^* = T^* + \overline{\alpha} S^*$;

(iv) RT é adjuntável e $(RT)^* = T^* R^*$;

(v) T e T^* são lineares e preservam a estrutura de A-módulo;

(vi) T e T^* são contínuos.

Prova.

(i)

Suponha que $V : E_2 \longrightarrow E_1$ seja uma outra função tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, V(y)\rangle$, para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, V(y)\rangle \quad &\Longrightarrow \quad \langle x, T^*(y) - V(y)\rangle = 0, \;\; \forall x \in E_1 \\
&\Longrightarrow \quad T^*(y) - V(y) = 0, \;\; \forall y \in E_2 \\
&\Longrightarrow \quad T^* = V.
\end{aligned}$$

(ii) Para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$, temos que

$$\langle y, T(x)\rangle = \langle T(x), y\rangle^* = \langle x, T^*(y)\rangle^* = \langle T^*(y), x\rangle.$$

Logo $(T^*)^* = T$.

(iii) Para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$, temos que

$$\begin{aligned} \langle (T+\alpha S)(x), y\rangle &= \langle T(x), y\rangle + \overline{\alpha}\langle S(x), y\rangle \\ &= \langle x, T^*(y)\rangle + \overline{\alpha}\langle x, S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, T^*(y) + \overline{\alpha}S^*(y)\rangle. \end{aligned}$$

Portanto $(T+\alpha S)^* = T^* + \overline{\alpha}S^*$.

(iv) Para todo $y \in E_3$ e $x \in E_1$, temos que

$$\langle x, (T^*(R^*(y))\rangle = \langle T(x), R^*(y)\rangle = \langle R(T(x)), y\rangle,$$

donde $(RT)^* = T^*R^*$.

(v) Para todo $x, y \in E_1$, $z \in E_2$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x + y), z\rangle &= \langle \alpha x + y, T^*(z)\rangle = \overline{\alpha}\langle x, T^*(z)\rangle + \langle y, T^*(z)\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T(x), z\rangle + \langle T(y), z\rangle = \langle \overline{\alpha}T(x) + T(y) z\rangle \end{aligned}$$

Como z é arbitrário, $T(\alpha x+y) = \alpha T(x)+T(y)$. Analogamente, mostra-se que T^* é linear.

Para todo $x \in E_1$, $y \in E_2$ e $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(xa), y\rangle &= \langle xa, T^*(y)\rangle = a^*\langle x, T^*(y)\rangle \\ &= a^*\langle T(x), y\rangle = \langle T(x)a, y\rangle. \end{aligned}$$

Como y é arbitrário, então T preserva A-módulo. Similarmente mostra-se que T^* preserva A-módulo.

(vi) Considere uma sequência $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq E_1$ tal que $x_i \xrightarrow{i} x \in E_1$ e $T(x_i) \xrightarrow{i} y \in E_2$. Para todo $z \in E_2$, temos que

$$\langle y, z\rangle = \lim_i \langle T(x_i), z\rangle = \lim_i \langle x_i, T^*(z)\rangle = \langle x, T^*(z)\rangle = \langle T(x), z\rangle.$$

Novamente, como z é arbitrário, $y = T(x)$. Pelo Teorema do gráfico fechado (ver [29, Teorema 1.5.14, p. 19]), T é contínuo. Similarmente, mostra-se que T^* é contínuo.

□

Notação 1.3.20. *Sejam E e F A-módulos de Hilbert. O conjunto das funções adjuntáveis $T : E \longrightarrow F$ será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$ e quando $E = F$ escreveremos $\mathcal{L}(E)$.*

Observação 1.3.21. Seja E um A-módulo de Hilbert. Em particular, E é um espaço de Banach, de modo que podemos considerar a $*$-álgebra $B(E)$ dos operadores limitados sobre E segundo a norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|, \qquad T \in B(E).$$

A Proposição 1.3.19 nos permite afirmar que $\mathcal{L}(E)$ é um subespaço vetorial de $B(E)$, e portanto um subespaço normado com a norma herdada de $B(E)$. Ainda mais, se $T \in \mathcal{L}(E)$, vimos que $T^* \in \mathcal{L}(E)$ é único e $(T^*)^* = T$. Na verdade, $\mathcal{L}(E)$ é uma subálgebra de $B(E)$, relativamente a operação de composição de operadores, e a aplicação $T \longrightarrow T^*$ é uma involução em $\mathcal{L}(E)$.

Nosso próximo passo é mostrar que $\mathcal{L}(E)$ é um C^*-álgebra.

Teorema 1.3.22. *Se E é um A-módulo de Hilbert, então $\mathcal{L}(E)$ é uma C^*-álgebra com relação à norma de operadores.*

Prova. Seja $T \in \mathcal{L}(E)$. Como $B(E)$ é álgebra de Banach, temos que $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ para todo $S, T \in B(E)$, em particular $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$. Por um lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1.3.7), dado $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\|T(x)\|^2 = \|\langle T(x), T(x)\rangle\| = \|\langle x, T^*T(x)\rangle\| \leq \|x\|\|T^*T(x)\| \leq \|T^*T(x)\|,$$

donde $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Assim, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$ implica que $\|T\| \leq \|T^*\|$.

Por outro lado, como $(T^*)^* = T$, temos $\|T^*\| \leq \|(T^*)^*\| = \|T\|$.

Logo $\|T^*\| = \|T\|$ e, da desigualdade

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2,$$

segue que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Isso nos mostra que $\mathcal{L}(E)$ é uma $*$-álgebra e a norma é uma C^*-norma. Nos resta mostrar que $\mathcal{L}(E)$ é um subespaço fechado de $B(E)$. Isto segue, basicamente da involução ser contínua. De fato, dada um sequência $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E)$ que converge para $T \in B(E)$. Em particular, $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy, de modo que $\{T_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy. Assim, existe $S = \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} T_i^* \in B(E)$. Segue, para todo $x, y \in E$, que

$$\langle T(x), y\rangle = \lim_{i\longrightarrow\infty}\langle T_i(x), y\rangle = \lim_{i\longrightarrow\infty}\langle x, T_i^*(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle,$$

ou seja, T é adjuntável e, portanto, $\mathcal{L}(E)$ é fechado.

$\square$

Corolário 1.3.23. *Sejam E e F A-módulos de Hilbert. Se $\phi : E \longrightarrow F$ é um isomorfismo de A-módulos de Hilbert, então $\psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(F)$, definido por $\psi(T) = \phi T \phi^{-1}$, $T \in \mathcal{L}(E)$, é um isomorfismo de C^*-álgebras.*

Prova. Dado $T \in \mathcal{L}(E)$, como ϕ^{-1} e ϕ preservam produto interno, para todo $x, y \in F$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi(T)(x), y\rangle &= \langle (\phi T \phi^{-1})(x), y\rangle = \langle T\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)\rangle \\
&= \langle \phi^{-1}(x), (T^*\phi^{-1})(y)\rangle = \langle x, (\phi T^* \phi^{-1})(y)\rangle \\
&= \langle x, (\psi(T^*)(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $\psi(T) \in \mathcal{L}(F)$ e $\psi(T^*) = \psi(T)^*$.

Além disso, dados $T, S \in \mathcal{L}(E)$, como $\phi^{-1}\phi = id : E \longrightarrow E$, temos que

$$\psi(TS) = \phi TS\phi^{-1} = \phi T\phi^{-1}\phi S\phi = \psi(T)\psi(S).$$

Se $\psi(T) = 0$, então para cada $x \in F$, $\phi((T\phi^{-1})(x)) = 0 \Longrightarrow T(\phi^{-1}(x))$. Logo $T(y) = 0$ para todo $y \in E$, donde ψ é injetiva.

Se $S \in \mathcal{L}(F)$, tome $T = \phi^{-1}S\phi \in \mathcal{L}(E)$. Então $\psi(T) = S$, de modo que ψ é sobrejetiva.

$\square$

Proposição 1.3.24. *Sejam E um A-módulo de Hilbert e H um espaço de Hilbert, então existe um único $*$-homomorfismo injetivo $\iota : \mathcal{L}(E) \otimes B(H) \longrightarrow \mathcal{L}(E \otimes H)$ que nos geradores é dado por $\iota(T \otimes S)|(x \otimes \xi) = T(x) \otimes S(\xi)$, $T \in \mathcal{L}(E)$, $S \in \mathcal{L}(H)$, $x \in E$ e $\xi \in H$.*

Prova. Pode ser encontrada em [19, p. 36]. A demonstração deste fato é razoavelmente longa e necessecita de resultados auxiliares.

Proposição 1.3.25. *Sejam E um A-módulo de Hilbert e $\cdot : A \times E \longrightarrow E$ uma função associativa definida por $(a, x) \longmapsto ax$, tal que $\langle ax, y\rangle = \langle x, a^*y\rangle$ e $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ para todo $x, y \in E$ e $a \in A$. Então*

$$\langle x, a^*ax\rangle \leq \|a\|^2\langle x, x\rangle,$$

para todo $a \in A$ e $x \in E$.

Prova. Para cada $a \in A$, está bem definida a função

$$T_a : E \ni x \longmapsto ax \in E.$$

Notemos que $T_a \in \mathcal{L}(E)$. Com efeito, dados $x, y \in E$, temos que

$$\langle T_a(x), y\rangle = \langle ax, y\rangle = \langle x, a^*y\rangle = \langle x, T_{a^*}(y)\rangle,$$

isto é, T é adjuntável e $T_a^* = T_{a^*}$.

Numa C^*-álgebra com unidade, os elementos positivos são sempre menores ou iguais a sua norma multiplicada pela a unidade da álgebra (ver [22]). Logo,

$$S := \|T_a\|^2 1 - T_{a^*}T_a \geq 0.$$

Como $S \geq 0$, podemos tomar $S^{\frac{1}{2}}$, donde

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle S^{\frac{1}{2}}(x), S^{\frac{1}{2}}(x)\rangle &= \langle x, S(x)\rangle = \langle x, (\|T_a\|^2 1 - T_{a^*}T_a)(x)\rangle \\
&= \langle x, \|T_a\|^2 x - a^*(ax)\rangle \\
&= \langle x, \|T_a\|^2 x\rangle - \langle x, a^*ax\rangle \\
&\Longrightarrow \langle x, a^*ax\rangle \leq \langle x, \|T_a\|^2 x\rangle = \|T_a\|^2\langle x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Por hipótese $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ para todo $x \in E$ e $a \in A$, daí $\|T_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Portanto,

$$\langle x, a^*ax\rangle \leq \|a\|^2\langle x, x\rangle, \qquad x \in E, a \in A.$$

$\square$

Capítulo 2

Fibrados de Fell sobre grupos

Os fibrados de Fell sobre grupos podem ser vistos como uma generalização de C^*-álgebras. Neste capítulo, apresentaremos o conceito de fibrados de Fell sobre grupos discretos e construiremos módulos de Hilbert sobre o espaço vetorial das secões destes fibrados. Definiremos as álgebras cheia e reduzida dos fibrados de Fell: a primeira, como sendo a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra das seções de suporte finito; a segunda, a partir da representação regular da $*$-álgebra das seções. Como um caso particular, teremos as C^*-álgebras cheia $C^*(G)$ e reduzida $C_r^*(G)$ de grupos. Quando o grupo G é abeliano, mostraremos que existem isormofismos entre $C^*(G)$, $C_r^*(G)$ e a C^*-álgebra $C(\widehat{G})$ das funções complexas contínuas do dual de Pontryagin de G. Este resultado será particularmente interessante, porque estes isomorfismos serão traduzidos como isomorfismos de grupos quânticos no capítulo 3. As principais referências utilizadas foram [10, 11, 8, 1].

2.1 As C^*-álgebras seccionais

Nesta seção, entre outras coisas, definiremos fibrados de Fell e apresentaremos suas C^*-álgebras cheia e reduzida associadas.

Definição 2.1.1. Um **fibrado de Fell** sobre um grupo discreto G é uma família de espaços de Banach $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ munida com operações

$$\begin{array}{rcl} \cdot : B_s \times B_t & \longrightarrow & B_{st} \\ (b_s, b_t) & \longmapsto & b_s \cdot b_t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} * : B_t & \longrightarrow & B_{t^{-1}} \\ b_t & \longmapsto & {b_t}^*, \end{array}$$

chamadas de multiplicação e involução, respectivamente, satisfazendo:

(i) a multiplicação é uma função bilinear e associativa;

(ii) a involução é uma função conjugado-linear, isométrica e involutiva;

(iii) $\|b_t \cdot c_s\| \leqslant \|b_t\|\|c_s\|$, para todo $b_t \in B_t, c_s \in B_s$ e $t, s \in G$;

(iv) $(b_t \cdot c_s)^* = c_s^* \cdot b_t^*$, para todo $b_t \in B_t, c_s \in B_s$ e $t, s \in G$;

(v) $\|b_t^* \cdot b_t\| = \|b_t\|^2$, para todo $b_t \in B_t$, $t \in G$;

(vi) Para todo $b_t \in B_t$, $t \in G$, existe $a \in B_e$ tal que $b_t^* \cdot b_t = a^* \cdot a$.

Observação 2.1.2. Dado um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$, para cada $t \in G$, o espaço B_t é chamado de **fibra relativa a** t ou de **fibra com entrada** t. Além disso, observe que os itens $(i), (ii), (iii)$ e (iv) da definição acima dizem que B_e é uma $*$-álgebra normada. O item (v) diz que B_e possui uma C^*-norma. Assim, da hipótese de B_e ser um espaço de Banach concluímos que B_e é uma C^*-álgebra.

Exemplo 2.1.3. *A família $\{B_t = \mathbb{C}\}_{t\in G}$ munida com a multiplicação e involução da C^*-álgebra dos números complexos é naturalmente um* *fibrado de Fell, chamado de fibrado trivial. É a partir deste fibrado que construiremos a C^*-álgebra de um grupo (ver 2.2.1).*

Exemplo 2.1.4. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Considere a família de espaços de Banach $\mathcal{B} \times G = \{C_{(s,t)}\}_{(s,t)\in G\times G}$, em que $C_{(s,t)} = B_s$ para todo $s, t \in G$. Assim, a multiplicação e a involução de $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ induzem uma estrutura de fibrado de Fell em $\mathcal{B} \times G$, com a multiplicação definida por*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : C_{(s,t)} \times C_{(u,v)} & \longrightarrow & C_{(su,tv)} = B_{su} \\ (c_{(s,t)}, c_{(u,v)}) & \longmapsto & c_{(s,t)} \cdot c_{(u,v)} \end{array}$$

para quaisquer $s, t, u, v \in G$. A involução é definida por

$$\begin{array}{rcl} \cdot : C_{(s,t)} & \longrightarrow & C_{(s^{-1},t^{-1})} = B_{s^{-1}} \\ c_{(s,t)} & \longmapsto & {c_{(s,t)}}^* \end{array}$$

para quaisquer $s, t \in G$. Este fibrado é chamado de ***fibrado produto cartesiano de $\mathcal{B}$ por*** *G e ele nos ser útil na hora de contruirmos uma coação da C^*-biálgebra reduzida de um grupo sobre a C^*-álgebra reduzida de um fibrado de Fell.*

Definição 2.1.5. Sejam Γ um grupo e A uma C^*-álgebra. Uma **ação fortemente contínua** de Γ em A é um homomorfismo de grupos $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbf{Aut}(A)$ tal que para cada $a \in A$ a função $t \longmapsto \alpha_t(a)$ é continua. Quando o grupo G é discreto, chamamos α simplesmente de ação de G em A.

Exemplo 2.1.6. *Seja A uma C^*-álgebra, G um grupo discreto e $\alpha : G \longrightarrow \mathbf{Aut}(A)$ uma ação de G em A. Considere os espaços de Banach $A_t = \{(a,t) \in A \times G\}$, $t \in G$, com soma e multiplicação por escalar definidos por $(a,t)+(b,t) = (a+b,t)$ e $z(a,t) = (za,t)$, e norma definida por $\|(a,t)\| = \|a\|$. Agora, definimos a multiplicação e a involução em $\{A_t\}_{t\in G}$ por*

$$(a, s)(b, t) = (a\alpha_s(b), st)$$

e
$$(a,t)^* = (\alpha_{t^{-1}}(a^*), t^{-1}),$$
$a, b \in A$ e $s, t \in G$. Os axiomas de fibrado de Fell seguem do fato de α ser ação fortemente contínua. Por exemplo, desde que $\alpha_{t^{-1}} : A \longrightarrow A$ é um isomorfismo, em particular uma isometria, temos que $\|(a,t)^*\| = \|(\alpha_{t^{-1}}(a^*), t^{-1})\| = \|\alpha_{t^{-1}}(a^*)\| = \|a^*\| = \|a\| = \|(a,t)\|$. Além disso,

$$\begin{aligned}
((a,s)(b,t))^* &= (a\alpha_s(b), st)^* \\
&= (\alpha_{t^{-1}s^{-1}}((a\alpha_s(b))^*), t^{-1}s^{-1}) \\
&= (\alpha_{t^{-1}s^{-1}}(\alpha_s(b)^* a^*), t^{-1}s^{-1}) \\
&= (\alpha_{t^{-1}}\alpha_{s^{-1}}\alpha_s(b^*)\alpha_{t^{-1}}\alpha_{s^{-1}}(a^*), t^{-1}s^{-1}) \\
&= (\alpha_{t^{-1}}(b^*)\alpha_{t^{-1}}\alpha_{s^{-1}}(a^*), t^{-1}s^{-1}) \\
&= (\alpha_{t^{-1}}(b^*), t^{-1})(\alpha_{s^{-1}}(a^*), s^{-1}) \\
&= (b,t)^*(a,s)^*,
\end{aligned}$$

provando o axioma (iv) da definição de Fibrado de Fell. Os outros axiomas são similarmente verificados.

*O fibrado $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ construído acima é chamado **fibrado de Fell produto semidireto** e denotado por $A \times_\alpha G$.*

Proposição 2.1.7. *Sejam A uma C^*-álgebra e G um grupo. Suponha $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ uma família de subespaços fechados de A satisfazendo:*

(i) $A_s \cdot A_t \subseteq A_{st}$ para quaiquer $s, t \in G$;

(ii) $A_t^* = A_{t^{-1}}$ para todo $t \in G$.

Então, com a multiplicação e a involução induzidas de A, $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ é um fibrado de Fell sobre G.

Prova. Os itens (i) e (ii) da hipótese nos dizem que as funções

$$\begin{aligned}
\cdot : A_s \times A_t &\longrightarrow A_{st} \\
(a_s, a_t) &\longmapsto a_s \cdot a_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : A_t &\longrightarrow A_{t^{-1}} \\ a_t &\longmapsto {a_t}^*, \end{aligned}$$

estão bem definidas. Estas funções satisfazem os itens $(i)-(iv)$ da Definição 2.1.1 como consequência de A ser $*$-álgebra de Banach. Os itens $(v)-(vi)$ seguem do fato de A ser uma C^*-álgebra.

$\square$

Exemplo 2.1.8. *Seja $\mathbb{D}$ o disco unitário $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Considere a C^*-álgebra comutativa das funções complexas contínuas $C(\mathbb{D})$ e G o grupo de dois elementos $\{0, 1\}$. Defina os seguintes subespaços vetoriais fechados B_0 e B_1 de $C(\mathbb{D})$:*

$$B_0 = \{f \in C(\mathbb{D}) : f(-z) = f(z), \ \ \forall z \in \mathbb{D}\},$$

$$B_1 = \{f \in C(\mathbb{D}) : f(-z) = -f(z), \ \ \forall z \in \mathbb{D}\}.$$

Como a multiplicação pontual de funções pares é uma função par, segue que $B_0 \cdot B_0 \subseteq B_0$. Como a multiplicação pontual de funções ímpares é uma função par, segue que $B_1 \cdot B_1 \subseteq B_0$. Como a multiplicação pontual de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar, temos que $B_0 \cdot B_1 \subseteq B_1$ e $B_1 \cdot B_0 \subseteq B_1$. Além disso, $f^*(z) = \overline{f(z)}$ para todo $f \in C(\mathbb{D})$ e $z \in \mathbb{D}$, acontece que $B_0^* \subseteq B_0$ e $B_1^* \subseteq B_1$. Isto é suficiente para dizer que $\{B_0, B_1\}$ é um fibrado de Fell sobre $G = \{0, 1\}$, com as operações induzidas de $C(\mathbb{D})$ (ver Proposição 2.1.7).

Exemplo 2.1.9. *Seja $A = M_2(\mathbb{C})$ a C^*-álgebra das matrizes 2×2 com entradas complexas. Considere os subespaços de Banach (relativamente à norma usual de matriz) A_{-1}, A_0 e A_1 gerados pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Definindo $A_n = \{0\}$ para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, é simples verificar que $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$ e que $A_n^* = A_n$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Pela proposição anterior 2.1.7, temos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um fibrado de Fell com as multiplicação e a involução induzidas de $M_2(\mathbb{C})$. Similarmente, este exemplo pode ser generalizado para a C^*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ complexas. Neste caso,* *o fibrado* $\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *poderia ser definido por* $A_k = 0$ *se* $|k| \geq n-1$ *e* $A_k = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0, \text{ se } j - i \neq k\}$ *se* $k < n-1$.

Definição 2.1.10. Sejam A uma C^*-álgebra e G um grupo discreto. Uma família linearmente independente $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ de subespaços fechados de A é dita ser uma graduação para A se acontecer:

(i) $A_s \cdot A_t \subseteq A_{st}$ para quaisquer $s, t \in G$;

(ii) $A_t^* = A_{t^{-1}}$ para todo $t \in G$;

(iii) $\overline{\bigoplus_{t\in G} A_t} = A$.

Exemplo 2.1.11. *Seja* A *um* C^**-álgebra graduada com graduação* $\{A_t\}_{t\in G}$*. Então, pela Proposição 2.1.7,* $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ *é um fibrado de Fell sobre* G*.*

Exemplo 2.1.12. *O fibrado* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *do Exemplo 2.1.9 é uma graduação para a* C^**-álgebra* $M_2(\mathbb{C})$*. Neste caso é imediato verificar que* $\overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n} = \overline{A_{-1} \oplus A_0 \oplus A_1} = M_2(\mathbb{C})$.

A partir de agora, construiremos as C^*-álgebras de um fibrado de Fell. Para isso, seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell e considere o espaço vetorial

$$C_c(\mathcal{B}) = \left\{ \xi : G \longrightarrow \bigcup_{t\in G} B_t : \xi(t) \in B_t, \forall t \in G \text{ e } \operatorname{supp}(\xi) \text{ finito} \right\}$$

com soma e multiplicação por escalar definidos pontualmente, isto é,

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)(t) &= \xi(t) + \eta(t) \\ (z\xi)(t) &= z\xi(t), \end{aligned}$$

para todos $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, $z \in \mathbb{C}$ e $t \in G$. Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.13. *Sej* $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ *um fibrado de Fell. O espaço* *vetorial $C_c(\mathcal{B})$ munido com as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rcl} * : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) & \longrightarrow & C_c(\mathcal{B}) \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & \xi * \eta, \end{array}$$

em que $\xi * \eta(s) = \sum_{t \in G} \xi(t)\eta(t^{-1}s)$ *para todo* $s \in G$.

$$\begin{array}{rcl} ^* : C_c(\mathcal{B}) & \longrightarrow & C_c(\mathcal{B}) \\ \xi & \longmapsto & \xi^*, \end{array}$$

em que $\xi^*(t) = \xi(t^{-1})^*$ *para todo* $t \in G$*, é uma* $*$*-álgebra. As operações são chamadas respectivamente de* ***multiplicação, ou convolução, e involução****.*

Prova. É claro que estas operações estão bem definidas como funções. Vamos verificar a bilinearidade da convolução. Sejam $\xi, \eta, \zeta \in C_c(\mathcal{B})$, $s \in G$ e $z \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} (\xi * (\eta + z\zeta))(s) &= \sum_{t \in G} \xi(t)(\eta + z\zeta)(t^{-1}s) \\ &= \sum_{t \in G} \xi(t)\eta(t^{-1}s) + z \sum_{t \in G} \xi(t)\zeta(t^{-1}s) \\ &= (\xi * \eta)(s) + z(\xi * \zeta)(s) = (\xi * \eta + z(\xi * \zeta))(s). \end{aligned}$$

A linearidade do lado esquerdo mostra-se analogamente. A associatividade

$$\begin{aligned} (\xi * (\eta * \zeta))(s) &= \sum_{t \in G} \xi(t)(\eta * \zeta)(t^{-1}s) \\ &= \sum_{t \in G} \xi(t) \left(\sum_{r \in G} \eta(r)\zeta((tr)^{-1}s) \right) \\ &=^3 \sum_{t \in G} \xi(t) \left(\sum_{r \in G} \eta(t^{-1}r)\zeta(r^{-1}s) \right) \\ &=^4 \sum_{r \in G} \sum_{t \in G} \xi(t)\eta(t^{-1}r)\zeta(r^{-1}s) \end{aligned}$$

$$= \sum_{r \in G} (\xi * \eta)(r)\zeta(r^{-1}s) = ((\xi * \eta) * \zeta)(s).$$

Nas igualdades 3 e 4 acima, utilizamos respectivamente a substituição $r \leftrightarrow t^{-1}r$ e o axioma de bilinearidade da multiplicação do fibrado.

Vejamos também que $(\xi * \eta)^* = \eta^* * \xi^*$. De fato, dados $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$ e $s \in G$, temos

$$\begin{aligned}
(\xi * \eta)^*(s) &= (\xi * \eta)(s^{-1})^* = \left(\sum_{t \in G} \xi(t)\eta(t^{-1}s^{-1})\right)^* \\
&= \sum_{t \in G} \eta(t^{-1}s^{-1})^* \xi(t)^* = \sum_{t \in G} \eta^*(st)\xi^*(t^{-1}) \\
&=^5 \left(\sum_{t \in G} \eta^*(t)\xi^*(t^{-1}s)\right) = (\eta^* * \xi^*)(s).
\end{aligned}$$

Na igualdade 5 acima, utilizamos a substituição $t \leftrightarrow s^{-1}t$. As demais propriedades da involução são facilmente verificadas.

□

Observação 2.1.14. A $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$ construída acima possui uma norma, a saber,

$$C_c(\mathcal{B}) \ni \xi \longmapsto \sum_{t \in G} \|\xi(t)\| \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Os axiomas de norma são facilmente verificados. No caso em que $\mathcal{B}$ for o fibrado trivial (ver 2.1.3), denotaremos a $*$-álgebra de $C_c(\mathcal{B})$ por $C_c(G)$.

Agora, apresentaremos um conjunto de funções que geram a $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$.

Proposição 2.1.15. *Para cada $t \in G$, considere a função de espaços* *vetorias*

$$j_t : B_t \longrightarrow C_c(\mathcal{B})$$

$$j_t(b_t)|_s = \begin{cases} b_t & se \quad t = s \\ 0 & se \quad t \neq s. \end{cases}$$

O conjunto $\{j_t(b_t) : t \in G, b_t \in B_t\}$ *gera* $C_c(\mathcal{B})$*. Além disso, para todo* $s, t \in G$*, vale que*

(i) $\|j_t(b_t)\| = \|b_t\|$;

(ii) $j_s(c_s) * j_t(b_t) = j_{st}(c_s b_t)$;

(iii) $j_t(b_t)^* = j_{t^{-1}}(b_t^*)$.

Prova. Como cada elemento $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ pode ser escrito como $\xi = \sum_{t \in G} j_t(\xi(t))$, o conjunto de funções $\{j_t(b_t) : t \in G, b_t \in B_t\}$ gera $C_c(\mathcal{B})$. O item (i) segue das seguinte igualdades (veja a definição da norma em $C_c(\mathcal{B})$ em 2.1)

$$\|j_t(b_t)\| = \sum_{s \in G} \|j_t(b_t)(s)\| = \|j_t(b_t)(t)\| = \|b_t\|.$$

Os itens (ii) e (iii) seguem, respectivamente, de

$$j_s(c_s) * j_t(b_t)|_r = \delta_{st,r} c_s b_t = j_{st}(c_s b_t)|_r$$

e

$$j_t(b_t)^*|_r = j_t(b_t)|_{r^{-1}}^* = \delta_{r^{-1},t} b_t^* = \delta_{r,t^{-1}} b_t^* = j_{t^{-1}}(b_t^*)|_r$$

para todo $r, t, s \in G$, $b_t \in B_t, c_s \in B_s$.

$\square$

Observação 2.1.16. Ao longo do texto, identificaremos a imagem $j_t(b_t) \in C_c(\mathcal{B})$ com o próprio b_t, na intenção de simplificar a notação. Ficará claro pelo contexto se estaremos nos referindo a b_t como um elemento pertencente a fibra B_t ou como um elemto de $C_c(\mathcal{B})$. Se, por exemplo, definirmos um operador $T : C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow A$ (A uma $*$-álgebra) e escrevermos $T(b_t)$, então estaremos obviamente considerando b_t como um elemento de $C_c(\mathcal{B})$. Raros serão os casos nos quais precisaremos explicitar a função j_t, nos permitindo, portanto, este "abuso de notação".

Agora demonstraremos uma proposição que nos permitirá definir o que será a C^*-álgebra cheia de um fibrado de Fell.

Proposição 2.1.17. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\pi : C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow A$ um $*$-homomorfismo. Então $\|\pi(\xi)\| \leq \sum_{t\in G} \|\xi(t)\|$ para todo $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Consequentemente, $C_c(\mathcal{B})$ é admissível e $\sup_{\pi} \|\pi(\xi)\| \leq \sum_{t\in G} \|\xi(t)\|$.*

Prova. Observe que, pelo fato de $\{j_t(b_t)\}_{t\in G}$ gerar $C_c(\mathcal{B})$, é suficiente mostrar que $\|\pi(j_t(b_t))\| \leq \|b_t\|$ para qualquer $j_t(b_t) \in C_c(\mathcal{B})$. Vejamos que $\pi \circ j_e : B_e \longrightarrow A$ é um $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras. Com efeito, dados $a, a' \in B_e$, pela Proposição 2.1.15 e como π é $*$-homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}(\pi \circ j_e)(aa') &= \pi(j_e(aa')) = \pi(j_e(a)j_e(a')) \\ &= \pi(j_e(a))\pi(j_e(a')) = (\pi \circ j_e)(a)(\pi \circ j_e)(a')\end{aligned}$$

e

$$(\pi \circ j_e)(a^*) = \pi(j_e(a^*)) = \pi(j_e(a)^*) = \pi(j_e(a))^* = (\pi \circ j_e)(a)^*.$$

Portanto $\pi \circ j_e$ é uma função contrativa. Logo, para todo $t \in G$ e $b_t \in B_t$, temos que

$$\begin{aligned}\|\pi(j_t(b_t))\|^2 &= \|\pi(j_t(b_t))^*\pi(j_t(b_t))\| = \|\pi(j_t(b_t)^* j_t(b_t))\| \\ &= \|\pi(j_{t^{-1}}(b_t^*)j_t(b_t))\| = \|\pi(j_e(b_t^* b_t))\| \leq \|b_t^* b_t\| = \|b_t\|^2,\end{aligned}$$

donde $\|\pi(j_t(b_t))\| \leq \|b_t\|$.

□

Definição 2.1.18. A **C^*-álgebra seccional cheia** de um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$, denotada por $C^*(\mathcal{B})$, é, por definição, a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$.

A partir de agora até o final desta seção, estaremos interessados na construção de outra C^*-álgebra associada a um fibrado, que dependerá de uma representação da $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$. Mas antes, precisamos introduzir uma estrutura de módulo de Hilbert no espaço vetorial $C_c(\mathcal{B})$ e nas fibras de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$. A construção de tal representação nos permitirá incluir a $*$-álgebra $C_c(\mathcal{B})$ na C^*-álgebra cheia $C^*(\mathcal{B})$.

Proposição 2.1.19. *O espaço vetorial $C_c(\mathcal{B})$ é um B_e-pré-módulo de Hilbert com as seguintes operações:*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : C_c(\mathcal{B}) \times B_e & \longrightarrow & C_c(\mathcal{B}) \\ (\xi, a) & \longmapsto & (\xi \cdot a) \end{array}$$

em que $(\xi \cdot a)(t) = \xi(t)a$ para todo $t \in G$ e

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(\mathcal{B}) & \longrightarrow & B_e \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{t \in G} \xi(t)^* \eta(t). \end{array}$$

Prova. É fácil verificar que estas operações definem uma estrutura de B_e-pré-módulo de Hilbert. Isto segue diretamente da estrutura de $*$-álgebra de $C_c(\mathcal{B})$.

□

Notação 2.1.20. *Denotaremos por $l_2(\mathcal{B})$ o B_e-módulo de Hilbert obtido do completamento de $C_c(\mathcal{B})$ relativamente à norma advinda do B_e-produto interno da proposição anterior.*

Observação 2.1.21. Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ um fibrado de Fell. Então cada fibra B_t possui uma estrutura natural de B_e-módulo de Hilbert, em que a operação de B_e-módulo à direita coincide com a multiplicação à direita no fibrado e o produto interno é definido por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : B_t \times B_t \ni (b_t, c_t) \longmapsto b_t^* c_t \in B_e.$$

A boa definição desta estrutura segue diretamente dos axiomas de fibrado de Fell.

O próximo resultado será importante em seguida para a construção de um operador contínuo que nos levará ao encontro da definição de C^*-álgebra seccional reduzida de um fibrado de Fell.

Proposição 2.1.22. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Então, para todo $b_s \in B_s$, $b_t \in B_t$ e $s, t \in G$ vale a relação*

$$b_s^* b_t^* b_t b_s \leq \|b_t\|^2 b_s^* b_s.$$

Prova. Para cada $s \in G$, B_s é um B_e-módulo de Hilbert com produto interno dado por $\langle b_s, c_s\rangle = b_s^* c_s$ (ver Observação 2.1.21), além de que a multiplicação do fibrado $\cdot : B_e \times B_s \longrightarrow B_e$ é bilinear associativa e satisfaz, para todo $b_s, c_s \in B_s$ e $a \in B_e$,

$$\langle ab_s, c_s\rangle = (ab_s)^* c_s = b_s^*(a^* c_s) = \langle b_s, a^* c_s\rangle$$

e

$$\begin{aligned}\|ab_s\|^2 &= \|\langle ab_s, ab_s\rangle\| = \|(ab_s)^* ab_s\| \leq \|b_s\|\|a^* a\|\|b_s\| \\ &= \|a\|^2\|b_s\|^2 \Longrightarrow \|ab_s\| \leq \|a\|\|b_s\|.\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.3.25, segue que $\langle b_s, a^* ab_s\rangle \leq \|a\|^2\langle b_s, b_s\rangle$ para todo $b_s \in B_s$, $s \in G$ e $a \in B_e$. Logo,

$$b_s^* a^* ab_s \leq \|a\|^2 b_s^* b_s, \quad b_s \in B_s, s \in G, a \in B_e.$$

Por fim, pelo axioma (vi) da definição de fibrado de Fell, para cada $b_t \in B_t$ e $t \in G$, existe $a \in B_e$ tal que $b_t^* b_t = a^* a$. Portanto, do axioma (v) da definição de fibrado de Fell, concluímos que

$$\begin{aligned}b_s^* b_t^* b_t b_s &= b_s^* a^* ab_s \leq \|a^* a\| b_s^* b_s = \|b_t^* b_t\| b_s^* b_s \\ &= \|b_t\|^2 b_s^* b_s\end{aligned}$$

para todo $b_t \in B_t$, $b_s \in B_s$ e $t, s \in G$.

□

Teorema 2.1.23. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Para todo*

$t \in G$ e $b_t \in B_t$, a função

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}(b_t) : C_c(\mathcal{B}) &\longrightarrow C_c(\mathcal{B}) \\ \xi &\longmapsto b_t * \xi, \end{aligned}$$

em que $\Lambda_{00}(b_t)\xi|_s = (b_t * \xi)(s) = b_t\xi(t^{-1}s)$ para todo $s \in G$, é linear e contínua, com $\|\Lambda_{00}(b_t)\| \leq \|b_t\|$. Além disso, para quaisquer $t, s \in G$, $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, $b_t, c_t \in B_t$, $d_s \in B_s$ e $z \in \mathbb{C}$, são verdadeiras as seguintes igualdades:

(i) $\Lambda_{00}(b_t + zc_t) = \Lambda_{00}(b_t) + z\Lambda_{00}(c_t)$;

(ii) $\Lambda_{00}(b_t * d_s) = \Lambda_{00}(b_t)\Lambda_{00}(d_s)$;

(iii) $\Lambda_{00}(b_t)^* = \Lambda_{00}(b_t^*)$.

Prova. A linearidade de $\Lambda_{00}(b_t)$ é óbvia. Dado $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, note que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{00}(b_t)\xi\|^2 &= \|\langle \Lambda_{00}(b_t)\xi, \Lambda_{00}(b_t)\xi \rangle\| \\ &= \left\| \sum_{s \in G} (b_t\xi(t^{-1}s))^*(b_t\xi(t^{-1}s)) \right\| \\ &= \left\| \sum_{s \in G} \xi(t^{-1}s)^* b_t^* b_t \xi(t^{-1}s) \right\| \\ &\leq^1 \left\| \sum_{s \in G} \|b_t\|^2 \xi(t^{-1}s)^* \xi(t^{-1}s) \right\| \\ &= \|b_t\|^2 \left\| \sum_{s \in G} \xi(t^{-1}s)^* \xi(t^{-1}s) \right\| \\ &= \|b_t\|^2 \left\| \sum_{s \in G} \xi(s)^* \xi(s) \right\| \\ &= \|b_t\|^2 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Na desigualdade 1 acima, utilizamos o resultado da Proposição 2.1.22. Portanto $\|\Lambda_{00}(b_t)\| \leq \|b_t\|$, donde $\Lambda_{00}(b_t)$ é contínua.

Ademais, dados $t, s \in G$, $b_t \in B_t$, $d_s \in B_s$ e $\xi, \eta \in C_c(\mathcal{B})$, as igualdades dos itens (i), (ii) e (iii) seguem, respectivamente, dos seguintes fatos:

1. Do fato de $C_c(\mathcal{B})$ ser uma $*$-álgebra.

2.
$$\begin{aligned}\Lambda_{00}(b_t)(\Lambda_{00}(d_s)\xi) &= b_t * (\Lambda_{00}(d_s)\xi)\\ &= b_t * d_s * \xi\\ &= \Lambda_{00}(b_t * d_s)\xi.\end{aligned}$$

3. Observando que para todo $r \in G$ vale $\Lambda_{00}(b_t^*)\eta|_r = b_t^*\eta(tr)$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{00}(b_t)\xi, \eta\rangle &= \sum_{r\in G} \xi(t^{-1}r)^* b_t^* \eta(r)\\ &= \sum_{r\in G} \xi(r)^* b_t^* \eta(tr)\\ &= \sum_{r\in G} \xi(r)^* \Lambda_{00}(b_t^*)\eta|_r\\ &= \langle \xi, \Lambda_{00}(b_t^*)\eta\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.1.24. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Para cada $t \in G$ e $b_t \in B_t$ seja $\Lambda_0(b_t) : l_2(\mathcal{B}) \longrightarrow l_2(\mathcal{B})$ a única extensão linear contínua de $\Lambda_{00}(b_t)$. Então, $\|\Lambda_0(b_t)\| \leq \|b_t\|$ e*

(i) $\Lambda_0(b_t + zc_t) = \Lambda_0(b_t) + z\Lambda_0(c_t)$;

(ii) $\Lambda_0(b_t * d_s) = \Lambda_0(b_t)\Lambda_0(d_s)$;

(iii) $\Lambda_0(b_t)^* = \Lambda_0(b_t^*)$,

para quaisquer $t, s \in G$, $\xi \in C_c(\mathcal{B})$, $b_t, c_t \in B_t$, $d_s \in B_s$ e $z \in \mathbb{C}$.

Prova. Segue do Teorema 2.1.23 e por argumentos de linearidade e continuidade.

$\square$

Lema 2.1.25. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell sobre G. Se $\{u_i\}_{i\in I}$ é uma unidade aproximada para B_e, então*

$$\lim_i u_i b_t = \lim_i u_i b_t = b_t \ \textit{ para quaiquer } \ t \in G \ \textit{ e } \ b_t \in B_t.$$

Prova. Visto que $b_t^* b_t \in B_e$, então $\lim_i u_i b_t^* b_t = \lim_i b_t^* b_t u_i = b_t^* b_t$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|b_t u_i - b_t\|^2 &= \|(b_t u_i - b_t)^*(b_t u_i - b_t)\| \\
&= \|u_i b_t^* b_t u_i - u_i b_t^* b_t - b_t^* b_t u_i + b_t^* b_t\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $i \longrightarrow \infty$. Logo, $\lim_i b_t u_i = b_t$. Mostra-se similarmente que $\lim_i u_i b_t = b_t$, utilizando-se a mesma demosntração com $(u_i b_t - b_t)^*$ no lugar de $b_t u_i - b_t$.

$\square$

Corolário 2.1.26. *A função*

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 : C_c(\mathcal{B}) &\longrightarrow \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B})) \\
\xi &\longmapsto \sum_{t\in G} \Lambda_0(\xi(t))
\end{aligned}$$

é um $*$-homomorfismo injetivo de $*$-álgebras, com $\|\Lambda_0(\xi)\| \leq \sum_{t\in G} \|\xi(t)\|$. Este $*$-homomorfismo é chamado de ***representação regular de*** $C_c(\mathcal{B})$**.**

Prova. Pelo Corolário 2.1.24, Λ_0 é um $*$-homomorfismo. Para mostrarmos a injetividade, suponha que $\Lambda_0(\xi) = 0$ para algum $\xi \in C_c(\mathcal{B})$. Então, dada uma unidade aproximada $\{u_i\}_{i\in I} \subseteq B_e$, para quaisquer $i \in I$ e $s \in G$, temos que

$$0 = \Lambda_0(\xi)(j_e(u_i))|_s = \sum_{t\in G} \xi(t) j_e(u_i)(t^{-1}s) = \xi(s) u_i.$$

Pelo lema 2.1.25, segue que $0 = \lim_i \xi(s)u_i = \xi(s)$ para todo $s \in G$ e, portanto, $\xi = 0$. Consequentemente Λ_0 é injetivo.

$\square$

Definição 2.1.27. A C^***-álgebra seccional reduzida** de um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$, denotada por $C_r^*(\mathcal{B})$, é, por definição, $\overline{\Lambda_0(C_c(\mathcal{B}))} \subseteq \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}))$.

Observação 2.1.28. Dado um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$, existe um único $*$-homomorfismo $\Lambda : C^*(\mathcal{B}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{B})$, pela propriedade universal da C^*-álgebra envolvente, tal que comuta o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} C_c(\mathcal{B}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Lambda_0"'] & C^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "\Lambda"] \\ & C_r^*(\mathcal{B}). \end{tikzcd}$$

Isto é, $\Lambda_0 = \Lambda \circ \pi$. Além disso, uma vez que $\Lambda_0(C_c(\mathcal{B}))$ é denso em $C_r^*(\mathcal{B})$ e está contido em $\Lambda(C^*(\mathcal{B}))$, conluímos que $\Lambda(C^*(\mathcal{B})) = C_r^*(\mathcal{B})$, ou seja, Λ é sobrejetiva.

Em geral, Λ não é injetiva. Quando for, o fibrado $\mathcal{B}$ é dito **amenable**. Na referência [6] introduziu-se a noção de fibrado amenable e uma condição suficiente para a amenabilidade de fibrados de Fell.

Proposição 2.1.29. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Para qualquer $t \in G$, a restrição $\Lambda|_{j_t(B_t)}$ é isométrica.*

Prova. Sejam $t \in G$ e $b_t \in B_t$. Por construção $\|\Lambda(j_t(b_t))\| \leq \|j_t(b_t)\| = \|b_t\|$. Vamos mostrar que $\|b_t\| \leq \|\Lambda(j_t(b_t))\|$. Para isso, seja $\{u_i\}_{i\in I} \subseteq B_e$ uma unidade aproximada. Por definição, $\|\Lambda(j_t(b_t))\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\Lambda(j_t(b_t))(\xi)\|$, $\xi \in l_2(\mathcal{B})$, logo

$$\begin{aligned} \|\Lambda(j_t(b_t))\| &= \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\Lambda(j_t(b_t))(\xi)\| \geq \|\Lambda(j_t(b_t))(j_e(u_i))\| \\ &= \|j_t(b_t) * j_e(u_i)\| = \|j_t(b_tu_i)\| = \|b_tu_i\| \end{aligned}$$

para todo $i \in I$. Tomando o limite em i, pelo Lema 2.1.25, segue que

$$\|\Lambda(j_t(b_t))\| \geq \lim_i \|b_t u_i\| = \|\lim_i b_t u_i\| = \|b_t\|.$$

Portanto $\|\Lambda(j_t(b_t))\| = \|b_t\|$. Como $t \in G$ e $b_t \in B_t$ são arbitrários, obtemos que $\Lambda|_{j_t(b_t)}$ é isométrica.

□

Corolário 2.1.30. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ um fibrado de Fell. Então $C_c(\mathcal{B})$ é um sub-$*$-álgebra de $C^*(\mathcal{B})$.*

Prova. Como a representação $\Lambda : C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow C^*_r(\mathcal{B})$ é injetiva, segue que $C^*(\mathcal{B})$ é um certo completamento de $C_c(\mathcal{B})$ devido ao Teorema 1.1.4. Portanto, existe uma inclusão canônica de $C_c(\mathcal{B})$ em $C^*(\mathcal{B})$, isto é, $C_c(\mathcal{B})$ é um sub-$*$-álgebra de $C^*(\mathcal{B})$.

□

2.2 As C^*-álgebras do grupo

Neste seção, apresentaremos as C^*-álgebras cheia $C^*(G)$ e reduzida $C^*_r(G)$ de um grupo G. Quando G é abeliano, mostraremos que estas álgebras são isomorfas à C^*-álgebra das funções complexas contínuas do dual de Pontryagin $\widehat{G}$.

Definição 2.2.1. Seja G um grupo discreto. As **C^*-álgebras cheia e reduzida** de G, denotadas por $C^*(G)$ e $C^*_r(G)$, respectivamente, são, por definição, as C^*-álgebras seccionais cheia e reduzida do fibrado fibrado de Fell trivial $\{B_t = \mathbb{C}\}_{t \in G}$.

Observação 2.2.2. No caso do fibrado trivial $\mathcal{B} = \{B_t = \mathbb{C}\}_{t \in G}$, é fácil ver que o conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$ da funções $\delta_t : G \ni s \longmapsto \delta_{t,s} \in \mathbb{C}$ é uma base para a $*$-álgebra $C_c(G)$. Com efeito, qualquer $\xi \in C_c(G)$ pode ser escrita unicamente como $\xi = \sum_{t \in G} \xi(t)\delta_t$. A convolução e a involução nos elementos da base satisfazem

$$\delta_t * \delta_s = \delta_{ts} \quad e \quad \delta_t^* = \delta_{t^{-1}}$$

para todo $s, t \in G$, e δ_e é a unidade de $C_c(G)$. Neste caso, o $*$-homomorfismo injetivo

$$\Lambda_0 : C_c(G) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G)),$$

do Corolário 2.1.26, atua nos elementos da base da seguinte maneira

$$\Lambda_0(\delta_t)\eta|_s = (\delta_t * \eta)|_s = \eta(t^{-1}s), \quad t, s \in G.$$

Esta é chamada a **representação regular de** $C_c(G)$. Denotaremos o único $*$-homomorfismo $\Lambda : C^*(G) \longrightarrow C_r^*(G)$ que estende Λ_0 por λ e denotaremos $\lambda(\delta_t) := \lambda_t$, $t \in G$. Assim, podemos ver que

$$\lambda_{ts} = \lambda(\delta_{ts}) = \lambda(\delta_t * \delta_s) = \lambda(\delta_t)\lambda(\delta_s) = \lambda_t\lambda_s,$$

$$\lambda_{t^{-1}} = \lambda(\delta_{t^{-1}}) = \lambda(\delta_t^*) = \lambda(\delta_t)^* = \lambda_t^*,$$

e

$$\lambda_t^*\lambda_t = 1 = \lambda_t\lambda_t^*$$

para todo $t, s \in G$. Por fim, $\lambda_e = 1$ é o operador identidade em $C_r^*(G)$.

Se G é um grupo discreto e abeliano, considere o grupo abeliano dos caracteres de G

$$\widehat{G} = \left\{\chi : G \longrightarrow \mathbb{S}^1 : \chi(st) = \chi(s)\chi(t), \forall s, t \in G\right\}.$$

Este grupo tem uma topologia natural que é a seguinte: $\chi_i \xrightarrow{i} \chi$ em $\widehat{G}$ se, e somente se, $\chi_i(t) \xrightarrow{i} \chi(t)$ para todo $t \in G$. No que segue, mostraremos que $\widehat{G}$ é compacto e que existe um $*$-isomorfismo $\phi : C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$, tal que $\phi(\delta_t)\chi = \chi(t)$ para todo $t \in G$ e $\chi \in \widehat{G}$.

As próximas duas proposições nos permitirão mostrar que $C^*(G) \cong C(\widehat{G})$ quando G é abeliano.

Proposição 2.2.3. *Sejam G um grupo discreto abeliano e $\widehat{C_c(G)}$ o conjunto dos $*$-homomorfismos unitais $\varphi : C_c(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ munido com a topologia pontual, isto é, $\varphi_i \xrightarrow{i} \varphi$ em $\widehat{C_c(G)}$ se, e somente se,*

$\varphi_i(\xi) \xrightarrow{i} \varphi(\xi)$ para todo $\xi \in C_c(G)$. Então, a função

$$\begin{aligned} \psi : \widehat{C_c(G)} &\longrightarrow \widehat{G} \\ \varphi &\longmapsto \psi_\varphi, \end{aligned}$$

em que $\psi_\varphi(t) = \varphi(\delta_t)$, para todo $t \in G$, define um homeomorfismo.

Prova. Note que ψ está bem definida como função, uma vez que para todo $\varphi \in \widehat{C_c(G)}$ e $s, t \in G$ temos

$$\psi_\varphi(st) = \varphi(\delta_{st}) = \varphi(\delta_s * \delta_t) = \varphi(\delta_s)\varphi(\delta_t) = \psi_\varphi(s)\psi_\varphi(t)$$

e

$$|\psi_\varphi(t)|^2 = |\varphi(\delta_t)|^2 = \varphi(\delta_t)\overline{\varphi(\delta_t)} = \varphi(\delta_t * \delta_{t^{-1}}) = \varphi(\delta_e) = 1.$$

Além disso, note que a função inversa de ψ é dada por $\psi^{-1} : \widehat{G} \ni \chi \longmapsto \psi^{-1}(\chi) \in \widehat{C_c(G)}$, em que $\psi^{-1}(\chi)(\xi) = \sum_{t \in G} \xi(t)\chi(t)$, $\xi \in C_c(G)$. De fato, para todo $\chi \in \widehat{G}$ e $s, t \in G$, temos que

$$\psi^{-1}(\chi)(\delta_{st}) = \chi(st) = \chi(s)\chi(t) = \psi^{-1}(\delta_s)\psi^{-1}(\delta_t),$$

$$\psi^{-1}(\chi)(\delta_t^*) = \psi^{-1}(\chi)\delta_{t^{-1}}) = \chi(t^{-1}) = \overline{\chi(t)} = \overline{\psi^{-1}(\chi)(\delta_t)},$$

$$(\psi \circ \psi^{-1})(\chi)(t) = \psi(\psi^{-1}(\chi))(t) = \psi^{-1}(\chi)(\delta_t) = \chi(t)$$

e

$$(\psi^{-1} \circ \psi)(\varphi)(\delta_t) = \psi^{-1}(\psi_\varphi)(\delta_t) = \psi_\varphi(t) = \varphi(\delta_t).$$

Agora vamos mostrar que ψ e ψ^{-1} são contínuas. Suponha $\{\chi_i\}_{i \in I} \subseteq \widehat{G}$ uma net tal que $\chi_i \xrightarrow{i} \chi$ em $\widehat{G}$. Assim, $\chi_i(t) \xrightarrow{i} \chi(t)$ para todo $t \in G$. Claramente, para todo $\xi \in C_c(G)$, temos

$$\psi^{-1}(\chi_i)|_\xi = \sum_{t \in G} \xi(t)\chi_i(t) \xrightarrow{i} \sum_{t \in G} \xi(t)\chi(t) = \psi^{-1}(\chi)|_\xi,$$

isto é, ψ^{-1} é contínua. E se $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq \widehat{C_c(G)}$ for uma net tal que $\varphi_i \xrightarrow{i} \varphi \in \widehat{C_c(G)}$, então $\varphi_i(\delta_t) \xrightarrow{i} \varphi(\delta_t)$ para todo $t \in G$. Logo,

$$\psi_{\varphi i}(t) = \varphi_i(t) \xrightarrow{i} \varphi(t) = \psi_\varphi(t) \;\; \forall t \in G,$$

ou seja, ψ é contínua.

□

Proposição 2.2.4. *Sejam G um grupo discreto abeliano e $\widehat{C^*(G)}$ o conjunto dos $*$-homomorfismos unitais $\varphi : C^*(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ munido com a topologia pontual, isto é, $\varphi_i \xrightarrow{i} \varphi$ em $\widehat{C^*(G)}$ se, e somente se, $\varphi_i(x) \xrightarrow{i} \varphi(x)$ para todo $x \in C^*(G)$. Então, a função*

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{C_c(G)} \;\; &\longrightarrow \;\; \widehat{C^*(G)} \\ \varphi \;\; &\longmapsto \;\; \rho_\varphi = \widetilde{\varphi}, \end{aligned}$$

em que $\widetilde{\varphi} : C^*(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ é o único $*$-homomorfismo dado pela propriedade universal da C^*-álgebra envolvente e que estende φ, define um homeomorfismo.

Prova. Pelo Corolário 2.1.30, podemos identificar $C_c(G)$ como uma sub-$*$-álgebra de $C^*(G)$ (via inclusão canônica). Consequentemente, está bem definida a função

$$\rho^{-1} : \widehat{C^*(G)} \ni \varphi \longmapsto \varphi|_{C_c(G)} \in \widehat{C_c(G)}.$$

Além disso ρ^{-1} é a inversa de ρ. De fato, como para cada $\varphi \in \widehat{C_c(G)}$, $\widetilde{\varphi}$ é sua única extensão em $\widehat{C^*(G)}$, segue que

$$(\rho \circ \rho^{-1})(\psi) = \rho_{\psi|_{C_c(G)}} = \widetilde{\psi}|_{C_c(G)} = \qquad \forall \psi \in \widehat{C^*(G)}$$

e

$$(\rho^{-1} \circ \rho)(\varphi) = \rho^{-1}(\rho_\varphi) = \rho^{-1}(\tilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi}|_{C_c(G)} = \varphi \;\;\; \forall \varphi \in \widehat{C_c(G)}.$$

Agora vamos verificar que ρ^{-1} é contínua. Se $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq \widehat{C^*(G)}$ for uma net tal que $\varphi_i \xrightarrow{i} \varphi \in \widehat{C^*(G)}$, então $\varphi_i(x) \xrightarrow{i} \varphi(x)$ para todo

$x \in C^*(G)$. Em particular, temos que

$$\rho^{-1}(\varphi_i)(\delta_t) = \varphi_i(\delta_t) \xrightarrow{i} \varphi(\delta_t) = \rho^{-1}(\varphi)(\delta_t) \quad \forall t \in G.$$

Por um resultado básico de álgebra de operadores, que diz que o espectro de toda álgebra de Banach comutativa A com unidade, no sentido do conjunto de homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$ (munido com a topologia fraca-$*$), é necessariamente compacto (ver [22, Teorema 1.3.5., página 15]), segue que $\widehat{C^*(G)}$ é compacto.

Por um resultado conhecido de topologia, que diz que qualquer função bijetiva contínua de um espaço topológico compacto em outro espaço topológico Hausdorff é, necessariamente, um homeomorfismo (ver [20, Proposição 5, p. 180]), segue que $\widehat{C_c(G)}$ e $\widehat{C^*(G)}$ são espaços topológicos compactos e homeomorfos.

□

Observação 2.2.5. Seja G um grupo discreto abeliano. Das Proposições 2.2.3 e 2.2.4, segue que a função $\sigma = \rho \circ \psi^{-1} : \widehat{G} \longrightarrow \widehat{C^*(G)}$ é um homeomorfismo e, portanto, $\widehat{G}$ também é compacto. Note também que, para todo $t \in G$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma(\chi)|_{\delta_t} &= (\rho \circ \psi^{-1})(\chi)|_{\delta_t} = \rho(\psi^{-1}(\chi))|_{\delta_t} \\ &= \widetilde{\psi^{-1}(\chi)}|_{\delta_t} = \psi^{-1}(\chi)|_{\delta_t} = \chi(t). \end{aligned}$$

Uma última observação é a de que a função $\theta : C(\widehat{C^*(G)}) \longrightarrow C(\widehat{G})$, definida por $\theta(x) = x \circ \sigma$ para todo $x \in C(\widehat{C^*(G)})$, é um isomorfismo de C^*-álgebras. Isto segue diretamente do fato de σ ser um homeomorfismo.

Teorema 2.2.6. *Seja G um grupo discreto e abeliano. Então existe um $*$-isomorfismo $\phi : C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$, chamado de **transformada de Fourier**, tal que $\phi(\delta_t)|_\chi = \chi(t)$ para todo $t \in G$ e $\chi \in \widehat{G}$.*

Prova. Como G é discreto e abeliano, a C^*-álgebra $C^*(G)$ tem unidade (a saber, δ_e) e é comutativa. De fato, se G é abeliano e discreto, para quaisquer $s, t \in G$, uma vez que $\delta_t * \delta_s = \delta_{ts}$ (Observação 2.2.2), obtemos que $\delta_t * \delta_s = \delta_s * \delta_t$. Como $\{\delta_t\}_{t \in G}$ é uma base para $C^*(G)$, por linearidade e continuidade, conluímos que $C^*(G)$ é comutativa. Em particular, temos que $\delta_e * \delta_t = \delta_t * \delta_e = \delta_e$. Ou seja, δ_e é a unidade de $C^*(G)$.

Pelo teorema de Gelfand (ver [22, Teorema 2.1.10., página 41]), a função

$$\widehat{\ }\colon C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{C^*(G)}), \quad a \longmapsto \widehat{a}$$

em que $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ para todo $\varphi \in \widehat{C^*(G)}$, é um $*$-isomorfismo. Assim, pela Observação 2.2.5, temos que $\phi := \theta \circ \widehat{\ }\colon C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ é um $*$-isomorfismo. Além disso, para todo $t \in G$ e $\chi \in \widehat{G}$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi(\delta_t)|_\chi &= (\theta \circ \widehat{\ })(\delta_t)|_\chi = \theta(\widehat{\delta_t})|_\chi \\
&= (\widehat{\delta_t} \circ \sigma)|_\chi = \widehat{\delta_t}(\sigma(\chi)) \\
&= \sigma(\chi)|_{\delta_t} = \chi(t).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.7. *Seja $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos números inteiros . Considere o grupo topológico $\widehat{\mathbb{Z}}$ com a topologia pontual e o grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$. A função $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ definida por $\psi(z)(n) = z^n$, $z \in \mathbb{S}^1$ e $n \in \mathbb{Z}$, é um isomorfismo de grupos topológicos. Uma vez que $(zw)^n = z^n w^n$ e $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$ para todo $z, w \in \mathbb{S}^1$ e $n \in \mathbb{Z}$, ψ está bem definida e é um homomorfismo de grupos. Se, $\psi(z) = \psi(w)$ para $z, w \in \mathbb{S}^1$, então $z = \psi(z)(1) = \psi(w)(1) = w$, donde ψ é injetiva. Se $\eta \in \widehat{\mathbb{Z}}$, então $\eta(1) \in \mathbb{S}^1$ é tal que $\psi(\eta(1))(n) = \eta(1)^n = \eta(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, ψ é sobrejetiva. Além disso, se $\{z_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{S}^1$ é uma net convergindo para $z \in \mathbb{S}^1$, então $z_j^n \xrightarrow{j} z^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $\psi(z_j) \xrightarrow{j} \psi(z)$ e, portanto, ψ é contínua. Assim, pelo fato de $\mathbb{S}^1$ ser compacto e Hausdorff, segue que ψ é homeomorfismo.*

Com isso, naturalmente temos um $*$-isomorfismo $\omega : C(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1)$, dado por $\omega(f)(z) = f(\psi(z))$, $f \in C(\widehat{\mathbb{Z}})$ e $z \in \mathbb{S}^1$.

Pelo Teorema 2.2.6, temos o $*$-isomorfismo

$$\omega \circ \phi : C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1),$$

que nos geradores é dado por

$$(\omega \circ \phi)(\delta_n)(z) = \phi(\delta_n)(\psi(z)) = \widehat{\delta_n}(\psi(z)) = \psi(z)(n) = z^n.$$

Quando nos referirmos a este isomorfismo, subentenderemos o isomorfismo ω*, denotando-o apenas por* $\widehat{\ }: C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1)$.

A partir de agora veremos a noção de C^*-álgebra reduzida do grupo e mostraremos que grupos abelianos são amenable.

Definição 2.2.8. Quando $\lambda : C^*(G) \longrightarrow C_r^*(G)$ for injetiva, dizemos que **o grupo G é amenable**.

Vamos mostrar que todo grupo discreto abeliano é amenable, porém mencionaremos alguns resultados de análise harmônica que nos serão úteis.

Observação 2.2.9. Seja G um grupo discreto abeliano e μ uma medida de Haar para $\widehat{G}$ tal que $\mu(\widehat{G}) = 1$. É possível mostrar que:

(i) A função

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\widehat{G}} \overline{\xi} \eta d\mu$$

define um produto interno para o espaço $C(\widehat{G})$.

Denotamos por $L_2(\widehat{G})$ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de $C(\widehat{G})$ relativamente à norma advinda do produto interno acima (denotada por $\| \cdot \|_2$).

(ii) Dados $s, t \in G$,

1. Se $s^{-1}t = e$, então

$$\int_{\widehat{G}} x(s^{-1}t) d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} 1 d\mu(x) = \mu(\widehat{G}) = 1.$$

2. Se $s^{-1}t \neq e$, então existe $y \in \widehat{G}$ tal que $y(s^{-1}t) \neq 1$, donde

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}} x(s^{-1}t)d\mu(x) &= \int_{\widehat{G}} (yx)(s^{-1}t)d\mu(x) \\
&= y(s^{-1}t)\int_{\widehat{G}} x(s^{-1}t)d\mu(x) \\
&\Longrightarrow \int_{\widehat{G}} x(s^{-1}t)d\mu(x) = 0.
\end{aligned}$$

Estes resultados são bem conhecidos (ver, por exemplo, [26, 13]).

Teorema 2.2.10. *Se G é um grupo discreto e abeliano, então G é amenable.*

Prova. Considere $C_c(G) \subseteq l_2(G)$ e defina a função $\mathcal{F}_0 : C_c(G) \longrightarrow L_2(\widehat{G})$ por

$$\mathcal{F}_0(\xi)|_x = \sum_{s \in G} x(s)\xi(s), \quad \xi \in C_c(G), x \in \widehat{G}.$$

Uma vez que esta soma é sempre finita, a função está bem definida e é claramente linear. Pela Observação 2.2.9, para todo $s, t \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_0(\delta_s), \mathcal{F}_0(\delta_t)\rangle_{L_2(\widehat{G})} &= \int_{\widehat{G}} \overline{\mathcal{F}_0(\delta_s)|_x}\mathcal{F}_0(\delta_t)|_x d\mu(x) \\
&= \int_{\widehat{G}} x(s)x(t)d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} x(s^{-1}t)d\mu(x) \\
&= \delta_{s,t} = \langle \delta_s, \delta_t\rangle_{l_2(G)}.
\end{aligned}$$

Como o conjunto dos $\{\delta_s\}_{s \in G}$ gera $C_c(G)$, segue que $\mathcal{F}_0$ é isométrica. Além disso, $\mathcal{F}_,$ tem imagem densa em $L_2(\widehat{G})$. Para mostrarmos isto, sejam $\xi \in L_2(\widehat{G})$ e $\varepsilon > 0$. Como $C(\widehat{G})$ é denso em $L_2(\widehat{G})$ relativamente à norma $\|\cdot\|_2$, existe $\eta \in C(\widehat{G})$ tal que

$$\|\xi - \eta\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em seguida, como $\phi(C_c(G))$ possui imagem densa em $C(\widehat{G})$ via o isomorfismo $\phi : C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ do Teorema 2.2.6, existe $\gamma \in C_c(G)$ tal

que
$$\|\phi(\gamma) - \eta\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Agora, uma vez que $\mathcal{F}_0(C_c(G)) = \phi(C_c(G))$, temos que $\mathcal{F}_0(\gamma) = \phi(\gamma)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_0(\gamma) - \xi\|_2 &= \|\mathcal{F}_0(\gamma) - \eta + \eta - \xi\|_2 \leq \|\mathcal{F}_0(\gamma) - \eta\|_2 + \|\eta - \xi\|_2 \\
&= \|\phi(\gamma) - \eta\|_2 + \|\eta - \xi\|_2 \\
&\leq \|\phi(\gamma) - \eta\|_\infty + \|\eta - \xi\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{F}_0$ se estende a um operador unitário $\mathcal{F} : l_2(G) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} L_2(\widehat{G})$. Com isso, também temos o $*$-isomorfismo

$$\begin{aligned}
Ad_{\mathcal{F}} : B(l_2(G)) &\longrightarrow B(L_2(\widehat{G})) \\
T &\longmapsto \mathcal{F} \circ T \circ \mathcal{F}^*.
\end{aligned}$$

Agora, considere a função $M : C(\widehat{G}) \longrightarrow B(L_2(\widehat{G}))$, $M_f(\zeta) = f \cdot \zeta$. Observe que M está bem definida pois, para quaiquer $f \in C(\widehat{G})$ e $\zeta \in L_2(\widehat{G})$, temos que

$$\begin{aligned}
\|M_f(\zeta)\|^2 &= \left| \int_{\widehat{G}} \overline{f\zeta}(\chi) \cdot f\zeta(\chi) d\mu(\chi) \right| \\
&\leq \int_{\widehat{G}} \|\overline{f\zeta}(\chi) \cdot f\zeta(\chi)\| d\mu(\chi) \\
&= \int_{\widehat{G}} \|\overline{f}(\chi) f(\chi)\| \|\overline{\zeta}(\chi)\zeta(\chi)\| d\mu(\chi) \\
&\leq \|f\|_\infty^2 \|\zeta\|_2^2 \cdot \mu(\widehat{G}) = \|f\|_\infty^2 \|\zeta\|_2^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|M_f(\zeta)\| \leq \|f\|_\infty \|\zeta\|_2$. Além disso, M é um $*$-homomorfismo pois, dados $f, g \in C(\widehat{G})$, $\xi, \eta \in L_2(\widehat{G})$, temos que

$$M_{fg}(\xi) = (f \cdot g) \cdot \xi = f \cdot (g \cdot \xi) = M_f(M_g(\xi)) = (M_f \circ M_g)(\xi)$$

e
$$\langle M_f(\xi), \eta \rangle = \int_{\widehat{G}} \overline{f \cdot \xi} \cdot \eta d\mu = \int_{\widehat{G}} \overline{\xi} \cdot \overline{f} \eta d\mu = \langle \xi, M_{f^*}(\eta) \rangle.$$

Isto é, $M_{fg} = M_f \circ M_g$ e $M_{f^*} = {M_f}^*$ para quaisquer $f, g \in C(\widehat{G})$. Note também que este homomorfismo é injetivo pois, se $M_f = 0$ para $f \in C(\widehat{G})$, então $0 = M_f(\widehat{\delta_e})|_x = f(x)x(e) = f(x)$ para todo $x \in \widehat{G}$. Observe, assim, que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
C^*(G) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\phi"'] & C_r^*(G) \arrow[d, "Ad_{\mathcal{F}}"] \\
C(\widehat{G}) \arrow[r, "M"] & B(L_2(\widehat{G}))
\end{tikzcd}$$

Para provar isso, considere a função $\widehat{\delta_u} \in C(\widehat{G})$ definida por $\widehat{\delta_u}(x) = x(u)$ para quaiquer $u \in G$ e $x \in \widehat{G}$. Assim, para quaisquer $\delta_s, \delta_t \in C^*(G)$ e $x \in \widehat{G}$, temos que

$$\begin{aligned}
M_{\phi(\delta_s)}(\widehat{\delta_t})|_x &= \phi(\delta_s)(x)\widehat{\delta_t}(x) = x(s)x(t) = x(st) \\
&= \widehat{\delta_{st}}(x) = \mathcal{F}(\delta_{st})|_x = \mathcal{F}(\lambda(\delta_s)(\delta_t))|_x \\
&= \mathcal{F}(\lambda(\delta_s)(\mathcal{F}^*(\widehat{\delta_t})))|_x = (\mathcal{F} \circ \lambda(\delta_s) \circ \mathcal{F}^*)(\widehat{\delta_t})|_x \\
&= (Ad_{\mathcal{F}} \circ \lambda(\delta_s))(\widehat{\delta_t})|_x.
\end{aligned}$$

Daí, por argumentos de linearidade e continuidade, segue que $M \circ \phi = Ad_{\mathcal{F}} \circ \lambda$. Logo, se $\lambda(\xi) = 0$ para algum $\xi \in C^*(G)$, então $\xi = 0$.

Portanto λ é injetiva e, consequentemente, G é amenable.

□

Exemplo 2.2.11. *Seja $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo e abeliano dos números inteiros. Então, pelo Teorema 2.2.10, $\mathbb{Z}$ é amenable, de modo que a função $\lambda : C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{L}(l_2(\mathbb{Z}))$, que nos geradores é dada por*

$$\lambda(\delta_n)(\xi)|_m = \xi(-n+m), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \;\; \xi \in l_2(\mathbb{Z}),$$

é um $*$-isomorfismo de C^*-álgebras. Pelo Exemplo 2.2.7, denotando por $\widehat{\widehat{\ }} : C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow C(\widehat{\mathbb{Z}})$ o $*$-isomorfismo inverso de $\widehat{\ }$, temos que

$$\lambda \circ \widehat{\widehat{\ }} : C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Z})$$

é um $*$-isomorfismo e $(\lambda \circ \widehat{\ \ })(\widehat{\delta_n})(\xi)|_m = \xi(-n+m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ *e* $\xi \in l_2(\mathbb{Z})$.

Capítulo 3

Coações de grupos

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de grupo quântico compacto e de coação de grupos em C^*-álgebras. Veremos que as C^*-álgebras $C^*(G)$, $C^*_r(G)$ e $C(\widehat{G})$ possuem estrutura de grupo quântico e no caso em que o grupo é abeliano, mostraremos que estes grupos quânticos são isomorfos, obtendo uma correspondência entre as coações de $C^*(G)$, as coações de $C^*_r(G)$ e as ações fortemente contínuas $\widehat{G}$. As principais referências utilizadas foram [31, 8, 18].

3.1 Grupos quânticos compactos

Nesta seção, veremos a definição e alguns exemplos de grupos quânticos compactos.

Definição 3.1.1. Um **grupo quântico compacto** é um par (A, Δ), em que A é uma C^*-algebra com unidade e $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ é um $*$-homomorfismo unital satisfazendo

(i) $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

(ii) $\overline{\text{span}}\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A = \overline{\text{span}}\Delta(A)(A \otimes 1)$.

O $*$-homomorfismo Δ é chamado de comultiplicação.

Observação 3.1.2. Os $*$-homomorfismos $\Delta \otimes id, id \otimes \Delta : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \otimes A$ são os únicos $*$-homomorfismos tais que $(\Delta \otimes id)(a \otimes a') = \Delta(a) \otimes a'$ e $(id \otimes \Delta)(a \otimes a') = a \otimes \Delta(a')$ para todo $a, a' \in A$. Estamos denotando por $1 \otimes A$, $A \otimes 1$ como os subespaços da álgebra $A \otimes A \cong M(A \otimes A)$ (álgebra dos multiplicadores de $A \otimes A$) dos operadores da forma $1 \otimes a, a \otimes 1 : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$, em que $(b \otimes c)(1 \otimes a) = b \otimes ca$ e $(b \otimes c)(a \otimes 1) = ba \otimes c$ para todo $a, b, c \in A$.

É comum nos referirmos a um grupo quântico compacto simplesmente por A, subentendendo a comultilplicação Δ no contexto em que se estiver trabalhando. Quando trabalharmos com grupos quânticos A e B ao mesmo tempo, especificaremos suas comultiplicações por Δ_A e Δ_B, respectivamente. Daqui para frente, nossos objetos de maior interesse serão os grupos quânticos compactos, então quando mencionarmos apenas grupo quântico, estaremos nos referindo a grupo quântico compacto.

Definição 3.1.3. Um **$*$-homomorfismo entre grupos quânticos compactos** (A, Δ_A) e (B, Δ_B) é um $*$-homomorfismo unital $\phi : A \longrightarrow B$ que satisfaz $\Delta_B \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_A$. Se, adicionalmente, ϕ é uma função bijetiva, dizemos que ϕ é um **isomorfismo de grupos quânticos.**

Observação 3.1.4. Estamos considerando o $*$-homomorfismo $\phi \otimes \phi : A \otimes A \longrightarrow B \otimes B$ como o único tal que $(\phi \otimes \phi)(a \otimes a') = \phi(a) \otimes \phi(a')$ para todo $a, a' \in A$ (ver Proposição 1.2.20).

Antes de apresentarmos os exemplos, vejamos um resultado técnico que nos será útil para mostrarmos que a C^*-álgebra $C(\Gamma)$ da funções complexas sobre um grupo compacto Γ admite uma estrutura de grupo quântico compacto.

Proposição 3.1.5. *Seja Γ um grupo compacto, $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ um homeomorfismo e $A_0 \subseteq C(\Gamma)$ um subconjunto denso. Então $A_0 \circ \varphi = \{a \circ \varphi : a \in A_0\} \subseteq C(\Gamma)$ é denso.*

Prova. Seja $f \in C(\Gamma)$. Existe $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A_0$ tal que $p_n \xrightarrow{n} f\varphi^{-1}$.

Então

$$
\begin{aligned}
\|p_n\varphi - f\| &= \sup_{x\in\Gamma} |p_n(\varphi(x)) - f(x)| \\
&= \sup_{\varphi^{-1}(x)\in\Gamma} \left|p_n(\varphi(\varphi^{-1}(x))) - f(\varphi^{-1}(x))\right| \\
&= \left\|p_n - f\varphi^{-1}\right\| \xrightarrow{n} 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 3.1.6. *Seja* Γ *um grupo topológico compacto. Pela Proposição 1.2.26, podemos utilizar a identificação* $C(\Gamma) \otimes C(\Gamma) \cong C(\Gamma \times \Gamma)$*, que nos tensores elementares é dada por* $(f \otimes g)(s,t) = f(s)g(t)$ *para todo* $f, g \in C(\Gamma)$ *e* $s, t \in \Gamma$*, para definir uma comultiplicação em* $C(\Gamma)$ *da seguinte maneira:* $\Delta : C(\Gamma) \longrightarrow C(\Gamma) \otimes C(\Gamma)$*, em que para todo* $s, t \in \Gamma$ *e* $f \in C(\Gamma)$

$$\Delta(f)(s,t) = f(st).$$

Segue, da estrutura canônica de $*$*-álgebra de* $C(\Gamma)$*, que* Δ *é* $*$*-homomorfismo unital. Novamente pelas identificações* $C(\Gamma \times (\Gamma \times \Gamma)) \cong C(\Gamma) \otimes C(\Gamma) \otimes C(\Gamma) \cong C((\Gamma \times \Gamma) \times \Gamma)$ *dadas pela Proposição 1.2.26, para todo* $f, g \in C(\Gamma)$ *e* $x, y, z \in G$*, temos que*

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)(f \otimes g)|_{(x,y,z)} &= (f \otimes \Delta(g))|_{(x,y,z)} = f(x)\Delta(f)(y,z) \\
&= f(x)g(yz) = (f \otimes g)(x, yz)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)(f \otimes g)|_{(x,y,z)} &= (\Delta(f) \otimes g)|_{(x,y,z)} = \Delta(f)(x,y)g(z) \\
&= f(xy)g(f) = (f \otimes g)(xy, z)
\end{aligned}
$$

Daí, como $id \otimes \Delta$ *e* $\Delta \otimes id$ *são* $*$*-homomorfismos entre* C^**-álgebras, vale que*

$$(id \otimes \Delta)\Delta(f)|_{(x,y,z)} = \Delta(f)(x, yz)$$

e

$$(\Delta \otimes id)\Delta(f)|_{(x,y,z)} = \Delta(f)(xy, z),$$

para todo $f \in C(\Gamma)$ e $x, y, z \in \Gamma$. Logo,

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(f)|_{(x,y,z)} &= \Delta(f)(x, yz) = f(x(yz)) = f((xy)z) \\ &= \Delta(f)(xy, z) = (\Delta \otimes id)\Delta(f)|_{(x,y,z)},\end{aligned}$$

para todo $f \in C(\Gamma)$ e $x, y, z \in \Gamma$.

Ainda mais, tomando $A_0 = \{f \otimes g : f, g \in C(\Gamma)\} \subseteq C(\Gamma) \otimes C(\Gamma)$ e o homeomorfismo $\varphi : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$, $(x, y) \longmapsto (xy, y)$, pela Proposição 3.1.5, temos que $A_0 \circ \varphi = \{(f \otimes g)\varphi : f, g \in C(\Gamma)\}$ é denso em $C(\Gamma) \otimes C(\Gamma)$. Mas

$$\begin{aligned}(f \otimes g) \circ \varphi|_{(x,y)} &= (f \otimes g)(xy, y) = f(xy)g(y) \\ &= \Delta(f)(x, y)(1 \otimes g)(x, y) = (\Delta(f)(1 \otimes g))(x, y)\end{aligned}$$

para todo $f, g \in C(\Gamma)$ e $x, y \in \Gamma$. Assim, $\Delta(C(\Gamma))(1 \otimes C(\Gamma)) = A_0 \circ \varphi$ é denso em $C(\Gamma) \otimes C(\Gamma)$. Para ver que $\Delta(C(\Gamma))(C(\Gamma) \otimes 1)$ é denso em $C(\Gamma) \otimes C(\Gamma)$, basta tomar o homeomorfismo $\Gamma \times \Gamma \ni (x, y) \longmapsto (xy, x) \in \Gamma \times \Gamma$ e o mesmo A_0 anterior.

Portanto, $(C(\Gamma), \Delta)$ é um grupo quântico compacto.

Exemplo 3.1.7. *Seja G um grupo discreto, considere a $*$-álgebra $C_c(G)$ (ver Observação 2.1.14) e defina a função $\Delta_0 : C_c(G) \longrightarrow C^*(G) \otimes C^*(G)$, que nos geradores é dada por*

$$\Delta_0(\delta_t) = \delta_t \otimes \delta_t.$$

Como para todo $s, t \in G$,

$$\delta_s * \delta_t \otimes \delta_s * \delta_t = (\delta_s \otimes \delta_s)(\delta_t \otimes \delta_t)$$

e

$$\delta_t^* \otimes \delta_t^* = (\delta_t \otimes \delta_t)^*,$$

segue que Δ_0 é $*$-homomorfismo. Pela propriedade universal da C^*-

álgebra envolvente, existe um único $*$-homomorfismo

$$\Delta : C^*(G) \longrightarrow C^*(G) \otimes C^*(G)$$

que estende Δ_0. Note que Δ é unital pois $\delta_e \otimes \delta_e$ é a unidade de $C^*(G) \otimes C^*(G)$. Além disso, para todo $\delta_t \in C^*(G)$, tem-se que

$$(id \otimes \Delta)\Delta(\delta_t) = \delta_t \otimes (\delta_t \otimes \delta_t) = (\delta_t \otimes \delta_t) \otimes \delta_t = (\Delta \otimes id)\Delta(\delta_t),$$

ou seja, $(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta$.

Note também que dado $\delta_s \otimes \delta_t \in C^*(G) \otimes C^*(G)$, com $s, t \in G$, podemos escrever $\delta_s \otimes \delta_t = (\delta_s \otimes \delta_s)(1 \otimes \delta_{s^{-1}t}) = \Delta(\delta_s)(1 \otimes \delta_{s^{-1}t})$. Isto nos diz que

$$C^*(G) \otimes C^*(G) \subseteq \overline{\text{span}}\Delta(C^*(G))(1 \otimes C^*(G)).$$

E claramente

$$C^*(G) \otimes C^*(G) \supseteq \overline{\text{span}}\Delta(C^*(G))(1 \otimes C^*(G)).$$

Por questões simétricas, prova-se que

$$C^*(G) \otimes C^*(G) = \overline{\text{span}}\Delta(C^*(G))(C^*(G) \otimes 1).$$

Portanto $(C^*(G), \Delta)$ é um grupo quântico compacto.

Exemplo 3.1.8. *Dado um grupo discreto G, existe um único operador $W \in \mathcal{L}(l_2(G \times G))$ satisfazendo*

$$W(F)(s,t) = F(s, s^{-1}t) \quad e \quad W^*(F)(s,t) = F(s, st) \tag{3.1}$$

para todo $F \in l_2(G \times G)$ e $s, t \in G$.

Este operador pode ser visto como um caso particular, quando o fibrado de Fell é o trivial, do operador W do (cuja existência provaremos no) Corolário 4.1.6. Utilizando as identificações $\mathcal{L}(l_2(G) \otimes l_2(G)) \cong \mathcal{L}(l_2(G \times G))$ (ver Observação 4.1.4) e a inclusão canônica $\mathcal{L}(l_2(G)) \otimes \mathcal{L}(l_2(G)) \hookrightarrow \mathcal{L}(l_2(G) \otimes l_2(G))$ (ver Proposição 1.3.24) , podemos definir *a seguinte função* $\Delta : C_r^*(G) \longrightarrow C_r^*(G) \otimes C_r^*(G)$, *por*

$$\Delta(x) = W(x \otimes 1)W^*, \quad x \in C_r^*(G).$$

Afirmação: *A função* Δ *satisfaz a igualdade* $\Delta(\lambda_t) = \lambda_t \otimes \lambda_t$, $t \in G$.

Demonstração. *Para todo* $\xi, \eta \in C_c(G)$, *utilizando a identificação dada pela Proposição 4.1.3, para todo* $r, s \in G$, *temos que*

$$\begin{aligned}(\lambda_t \otimes \lambda_t)(\xi \otimes \eta)|_{(r,s)} &= \lambda_t(\xi) \otimes \lambda_t(\eta))|_{(r,s)} \\ &= \lambda_t(\xi)|_r \lambda_t(\eta)|_s = \xi(t^{-1}r)\eta(t^{-1}s) \\ &= (\xi \otimes \eta)|_{(t^{-1}r, t^{-1}s)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\lambda_t \otimes 1)(\xi \otimes \eta)|_{(r,s)} &= (\lambda_t(\xi) \otimes \eta)|_{(r,s)} \\ &= \lambda_t(\xi)|_r \eta(s) = \xi(t^{-1}r)\eta(s) \\ &= (\xi \otimes \eta)|_{(t^{-1}r, s)}.\end{aligned}$$

Assim, para todo $F \in C_c(G \times G)$ *e* $r, s \in G$, *também vale que*

$$(\lambda_t \otimes \lambda_t)(F)|_{(r,s)} = (F)(t^{-1}r, t^{-1}s)$$

e

$$(\lambda_t \otimes 1)(F)|_{(r,s)} = b_t(F)(t^{-1}r, s).$$

Daí, dados $F \in C_c(G \times G)$, $\lambda_t \in C_r^*(G)$ *e* $r, s, t \in G$, *segue, da definição de* W *e* W^*, *que*

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda_t)(F)(r,s) &= (W(\lambda_t \otimes 1)W^*)(F)|_{(r,s)} \\ &= W((\lambda_t \otimes 1)W^*(F))|_{(r,s)} \\ &= (\lambda_t \otimes 1)W^*(F)|_{(r, r^{-1}s)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= W^*(F)|_{(t^{-1}r, r^{-1}s)} \\
&= F(t^{-1}r, t^{-1}s) \\
&= (\lambda_t \otimes \lambda_t)(F)|_{(r,s)},
\end{aligned}
$$

donde, $\Delta(\lambda_t) = \lambda_t \otimes \lambda_t$ para todo $\lambda_t \in C_r^*(G)$ e $t \in G$. Isso demonstra a afirmação.

Segue, da afirmação, que

$$(id \otimes \Delta_t)\Delta(\lambda_t) = \lambda_t \otimes (\lambda_t \otimes \lambda_t) = (\lambda_t \otimes \lambda_t) \otimes \lambda_t = (\Delta \otimes id)\Delta(\lambda_t),$$

para $\lambda_t \in C_r^*(G)$ e $t \in G$.

Além disso, para todo $\lambda_t, \lambda_s \in C_r^*(G)$, com $s, t \in G$,

$$\Delta(\lambda_t)(1 \otimes \lambda_{t^{-1}s}) = (\lambda_t \otimes \lambda_t)(1 \otimes \lambda_{t^{-1}s}) = \lambda_t \otimes \lambda_s.$$

Assim,

$$C_r^*(G) \otimes C_r^*(G) \subseteq \overline{pan}\Delta(C_r^*(G))(1 \otimes C_r^*(G)).$$

Como, claramente

$$C_r^*(G) \otimes C_r^*(G) \supseteq \overline{\mathrm{span}}\Delta(C_r^*(G))(1 \otimes C_r^*(G)),$$

segue que

$$C_r^*(G) \otimes C_r^*(G) = \overline{\mathrm{span}}\Delta(C_r^*(G))(1 \otimes C_r^*(G)).$$

Por razões de simetria $C_r^*(G) \otimes C_r^*(G) = \overline{\mathrm{span}}\Delta(C_r^*(G))(C_r^*(G) \otimes 1)$.

Portanto, $(C_r^*(G), \Delta)$ é um grupo quântico compacto.

Proposição 3.1.9. *Seja G um grupo discreto abeliano. Então, os $*$-isomorfismos $\phi : C^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ e $\lambda : C^*(G) \longrightarrow C_r^*(G)$, que nos geradores são dados por $\phi(\delta_t)\chi = \widehat{\delta_t}$ e $\lambda(\delta_t) = \lambda_t$ (ver Teoremas 2.2.6 e 2.2.10), são isomorfismos de grupos quânticos. Consequentemente, $\phi\lambda^{-1} : C_r^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ é isomorfismo de grupos quânticos.*

Prova. As estruturas de grupos quânticos de $C(\widehat{G})$, $C^*(G)$ e $C_r^*(G)$ são as dos Exemplos 3.1.6, 3.1.7 e 3.1.8, respectivamente. Para todo

$t \in G$ e $\chi, \eta \in \widehat{G}$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta_{C(\widehat{G})} \circ \phi)(\delta_t)|_{(\chi,\eta)} &= \Delta_{C(\widehat{G})}(\widehat{\delta_t})|_{(\chi,\eta)} = \widehat{\delta_t}(\chi\eta) \\
&= (\chi\eta)(t) = \chi(t)\eta(t) \\
&= \widehat{\delta_t}(\chi)\widehat{\delta_t}(\eta) = \phi(\delta_t)(\chi)\phi(\delta_t)(\eta) \\
&= (\phi(\widehat{\delta_t}) \otimes \phi\widehat{\delta_t})(\chi, \eta) = (\phi \otimes \phi)(\delta_t \otimes \delta_t)|_{(\chi,\eta)} \\
&= ((\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{C^*(G)})(\delta_t)|_{(\chi,\eta)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left(C^*(G), \Delta_{C^*(G)}\right) \cong \left(C(\widehat{G}), \Delta_{C(\widehat{G})}\right)$. E para todo $\delta_t \in C^*(G)$, $t \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
(\Delta_{C_r^*(G)} \circ \lambda)(\delta_t) &= \lambda_t \otimes \lambda_t = (\lambda \otimes \lambda)(\delta_t \otimes \delta_t) \\
&= ((\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta_{C^*(G)})(\delta_t),
\end{aligned}$$

donde $\left(C^*(G), \Delta_{C^*(G)}\right) \cong \left(C_r^*(G), \Delta_{C_r^*(G)}\right)$.

$\square$

Exemplo 3.1.10. *Pelo Exemplo 2.2.7, sabemos que a função*

$$\widehat{\ } : C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1),$$

que nos geradores é dada por $\widehat{\delta_n}(z) = z^n$, para $z \in \mathbb{S}^1$ e $n \in \mathbb{Z}$, é um ismorfismo de C^*-álgebras. Pela proposição anterior, segue que $C^*(\mathbb{Z})$ e $C(\mathbb{S}^1)$ são grupos quânticos isomorfos. Similarmente, como a função $\lambda : C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Z})$ do Exemplo 2.2.11 é um $*$-isomorfismo, segue que $C^*(\mathbb{Z})$ e $\mathbb{C}_r^*(\mathbb{Z})$ são grupos quânticos isomorfos.

3.2 Coações de grupos quânticos compactos

O estudo de coações é muito importante para a teoria de grupos quânticos. Nesta seção, definiremos coações e veremos, entre outros resultados, que coações de $C^*(G)$ correspondem a ações fortemente contínuas do grupo de caracteres $\widehat{G}$, no caso do grupo G ser abeliano.

Definição 3.2.1. Sejam A uma C^*-álgebra e (B, Δ) um grupo quântico compacto. Um **coação à direita** de B em A é um $*$-homomorfismo não-degenerado $\delta : A \longrightarrow A \otimes B$ que fatisfaz $(\delta \otimes id)\delta = (id \otimes \Delta)\delta$. Além disso, é dita uma **coação contínua** se $\overline{\text{span}}\delta(A)(1 \otimes B) = A \otimes B$.

Observação 3.2.2. Pode-se definir coação à esquerda por simetria, mas neste trabalho estaremos interessandos somente nas coações à direita, de modo que nos referiremos a esta somente por coação, subentendendo que é à direita.

Antes dos exemplos, veremos um resultado básico que nos será útil para mostrarmos que coações do grupo quântico $C^*(G)$ correpondem a ações do dual de Pontryagin $\widehat{G}$.

Proposição 3.2.3. *Sejam (A, Δ_A), (B, Δ_B) grupos quânticos compactos, C uma C^*-álgebra e $\phi : A \longrightarrow B$ um isomorfismo de grupos quânticos. Se $\delta_A : C \longrightarrow C \otimes A$ é uma coação de A em C, então $\delta_B := (id \otimes \phi) \circ \delta_A : C \longrightarrow C \otimes B$ é uma coação de B em C. Além disso, se δ_A for coação contínua então δ_B é contínua.*

Prova. Segue diretamente das definições de grupos quântico compacto, coação e isomorfismo de grupos quanticos compactos.

□

Exemplo 3.2.4. *Seja (A, Δ_A) um grupo quântico compacto. A comultiplicação Δ_A é naturalmente uma coação de A em A.*

Exemplo 3.2.5. *Seja A uma C^*-álgebra e B um grupo quântico compacto. A função $\delta : A \longrightarrow A \otimes B$, $a \longmapsto a \otimes 1$ define uma coação contínua de B em A. Com efeito, dados $a, a' \in A$ e $b \in B$, temos que*

(i) $\delta(aa') = (aa' \otimes 1) = (a \otimes 1)(a' \otimes 1) = \delta(a)\delta(a')$.

(ii) $\delta(a^*) = (a^* \otimes 1) = (a \otimes 1)^* = \delta(a)^*$.

(iii) $\delta(a)(1 \otimes b) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b$.

(iv) $(\delta \otimes id)\delta(a) = (a \otimes 1) \otimes 1 = a \otimes (1 \otimes 1) = (id \otimes \Delta_A)\delta(a)$.

Esta coação é chamada de coação trivial.

Exemplo 3.2.6. *Seja $M_2(\mathbb{C})$ a C^*-álgebra das matrizes 2×2 com entradas complexas. Observe que podemos escrever qualquer matriz $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, como a soma $a = a_{-1} + a_0 + a_1$, em que*

$$a_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \ a_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, considere o grupo quântico $C^*(\mathbb{Z})$ e defina a função

$$\begin{aligned} \delta : M_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \\ a &\longmapsto \sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \delta_n \end{aligned}$$

Vejamos que δ é um $*$-homomorfismo. Dadas $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, note que

$$\delta(a)\delta(b) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{22}b_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 + \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_0$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1} \\
&+ \quad \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} + a_{21}b_{12} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 \\
&= \quad \delta\left(\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} + a_{21}b_{12} \end{pmatrix}\right) \\
&= \quad \delta(ab).
\end{aligned}
$$

E

$$
\begin{aligned}
\delta(a^*) &= \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1} + \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 \\ 0 & a_{22}^* \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & a_{21}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_1 + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \delta_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \delta_{-1}\right)^* \\
&= \delta(a)^*.
\end{aligned}
$$

Portanto δ é um $*$-homomorfismo e como $\delta\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \delta_0$, segue que δ é unital. Além disso, dado $a \in M_2(\mathbb{C})$, pela associatividade do produto tensorial, vale que

$$
(\delta \otimes id)\delta(a) \quad = \quad \sum_{n=-1}^{1} (a_n \otimes \delta_n) \otimes \delta_n = (id \otimes \Delta_{C^*(\mathbb{Z})})\delta(a).
$$

Logo, δ é uma coação de $C^*(\mathbb{Z})$ em $M_2(\mathbb{C})$.

Observe, ainda, que pela Proposição 3.2.3, já que $\lambda : C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Z})$ é um isomorfismo de grupos quânticos, temos uma coação de $C_r^*(\mathbb{Z})$ em $M_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\begin{aligned} \delta : M_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C_r^*(\mathbb{Z}) \\ a &\longmapsto \sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \lambda_n. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \delta : M_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \\ a &\longmapsto \sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \widehat{\delta_n} \end{aligned}$$

é uma coação de $C(\mathbb{S}^1)$ em $M_2(\mathbb{C})$, já que $C^*(\mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{S}^1)$.

Estas coações são contínuas pelo Exemplo 3.2.8 (ver o caso particular $G = \mathbb{Z}$ e $X = \{1, 2\}$ no final do exemplo) e pela Proposição 3.2.3.

Similarmente, pode-se construir uma coação de $C^*(\mathbb{Z})$ sobre a C^*-álgebras $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ complexas.

Exemplo 3.2.7. *Seja G um grupo discreto e considere a C^*-álgebra*

$$A = K(l_2(G)) = \overline{\text{span}}\{|\xi\rangle\langle\eta| : \xi, \eta \in l_2(G)\}$$

dos operadores compactos sobre $l_2(G)$, em que $|\xi\rangle\langle\eta| \in K(l_2(G))$ é definido por $|\xi\rangle\langle\eta|(\zeta) = \xi\langle\eta, \zeta\rangle$. Considere a operador unitário $W \in \mathcal{L}(l_2(G \times G))$ definido por $W(\zeta)|_{(s,t)} = \zeta(s, s^{-1}t)$ para todo $\zeta \in l_2(G)$ e $s, t \in G$ (Equação 3.1). Assim como no Exemplo 3.1.8, o operador W produz um $*$-homomofismo injetivo $\delta : \mathcal{L}(l_2(G)) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G \times G))$ pela fórmula $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$.

Afirmação: *A restrição $\delta|_A : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ é uma coção contínua e injetiva de $C_r^*(G)$ em A, considerando $A \otimes C_r^*(G)$ como uma C^*-subalgebra de $\mathcal{L}(l_2(G \times G))$ via a inclusão canônica $A \otimes C_r^*(G) \hookrightarrow$*

$\mathcal{L}(l_2(G \times G))$ *(Observação 4.1.4 e Proposição 1.3.24).*

Demostração: *Note que*

$$A = \overline{\text{span}}\{M_f \circ \lambda_s : f \in C_0(G), s \in G\},$$

em que $M : C_0(G) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ *é a representação multiplicação:* $M_f(\xi) := f \cdot \xi$ *e* $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ *é a representação regular à esquerda de* G*:* $\lambda_s(\xi)|_t = \xi(s^{-1}t)$*. Para ver isso, seja* $B := \overline{\text{span}}\{M_f \circ \lambda_s : f \in C_0(G), s \in G\}$*. Observe que*

$$M_{\delta_s}(\xi)|_t = \delta_{s,t}\xi(t) = (\delta_s\langle\delta_s, \xi\rangle)(t) = |\delta_s\rangle\langle\delta_s|(\xi)|_t$$

para todo $\xi \in C_0(G)$ *e* $s, t \in G$*. Logo, por argumentos de linearidade e continuidade, temos que* $M_f = |f\rangle\langle f|$ *para todo* $f \in C_0(G)$*, ou seja,* $M_f \in A$*. Assim, desde que* A *é um ideal fechado de* $\mathcal{L}(l_2(G))$ *(ver [29, p. 10]), segue que* $B \subseteq A$*. Para ver que* $A \subseteq B$*, basta notar que para todo* $\xi \in l_2(G)$ *e* $s, r, t \in G$*, tem-se que* $|\delta_s\rangle\langle\delta_t|(\xi)|_r = \delta_{s,r}\xi(t) = \delta_{s,r}\xi(ts^{-1}r) = (M_{\delta_s} \circ \lambda_{st^{-1}})(\xi)|_r$*.*

Agora, por argumentos semelhantes aos utilizados no Exemplo 3.1.8 (para mostrar que $\Delta(\lambda_t) = \lambda_t \otimes \lambda_t$*), é simples mostrar que*

$$\delta(M_f) = M_f \otimes 1 \quad e \quad \delta(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s, \tag{3.2}$$

de modo que

$$\delta_t(M_f\lambda_s) = M_f\lambda_s \otimes \lambda_s. \tag{3.3}$$

Disso, segue que $\delta(A) \subseteq A \otimes C_r^*(G)$*. É fácil ver, das fórmulas acima, que* δ *é coação contínua. De fato, se* $M_f\lambda_s \otimes \lambda_t \in A \otimes C_r^*(G)$*, então*

$$\delta(M_f\lambda_s)(1 \otimes \lambda_{s^{-1}t}) = (M_f\lambda_s \otimes \lambda_s)(1 \otimes \lambda_{s^{-1}t}) = M_f\lambda_s \otimes \lambda_t,$$

ou seja, $A \otimes C_r^*(G) \subseteq \overline{\text{span}}\delta(A)(1 \otimes C_r^*(G))$*. Obviamente* $A \otimes C_r^*(G) \supseteq \overline{\text{span}}\delta(A)(1 \otimes C_r^*(G))$*.*

Note que a comultiplicação Δ *de* $C_r^*(G)$ *é dada por* $\Delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$*. Então, a Equação 3.2, nos diz que* δ *coage trivialmente em* $C_0(G) \cong M(C_0(G))$ *e pela comultiplicação* Δ *em* $C_r^*(G)$*.*

Exemplo 3.2.8. *Seja G um grupo discreto e $X \subseteq G$ um subconjunto qualquer. Considere o $*$-ideal $C_0(X) \subseteq C_0(G)$ formado pelas funções que se anulam fora de X e denote por $l_2(X) \subseteq l_2(G)$ o subespaço fechado das funções de $l_2(G)$ que se anulam fora de X. Considere também, a C^*-subalgebra $B := K(l_2(X)) = \{|\xi\rangle\langle\eta| : \xi, \eta \in l_2(X)\}$ de $A = K(l_2(G))$ (ver exemplo anterior). Observe que B coincide com a C^*-subalgebra $pAp \subseteq A$ em que p é a projeção de A sobre B. Isto segue pois, se $|\delta_t\rangle\langle\delta_s| \in A$, então*

$$
\begin{aligned}
(p \circ |\delta_t\rangle\langle\delta_s| \circ p)(\delta_r) &= p(|\delta_t\rangle\langle\delta_s|p(\delta_r)) \\
&= p(\delta_t\langle\delta_s, p(\delta_r)\rangle) \\
&= p(\delta_t)\langle p(\delta_s), p(\delta_r)\rangle \\
&= |p(\delta_t)\rangle\langle p(\delta_s)|\delta_r
\end{aligned}
$$

para todo $r, s, t, \in G$. Logo $pAp \subseteq B$. Quando $s, t \in X$, a equação acima nos diz que $p \circ |\delta_t\rangle\langle\delta_s| \circ p = |\delta_t\rangle\langle\delta_s|$, donde $B \subseteq pAp$. Uma consequência disto é que $BAB \subseteq B$. De fato, $BAB = (pAp)A(pAp) \subseteq pApApAp = pAppAppAp \subseteq B^3 \subseteq B$.

Vamos mostrar que a coação $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$ de $C_r^*(G)$ em A do Exemplo 3.2.7 se restringe a uma coação (injetiva e contínua) de $C_r^*(G)$ em B. Para isso, mostraremos que

$$B = \overline{\operatorname{span}}\{M_{f \cdot \alpha_t(g)}\lambda_t : f, g \in C_0(X), t \in G\},$$

em que $M : C_0(G) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ é a representação multiplicação: $M_f(\xi) := f \cdot \xi$ e $\alpha : G \longrightarrow \mathbf{Aut}(C_0(G))$ é a ação definida por $\alpha_s(f)|_t := f(s^{-1}t)$. Seja $C := \overline{\operatorname{span}}\{M_{f \cdot \alpha_t(g)}\lambda_t : f, g \in C_0(X), t \in G\}$. Dados $f, g \in C_0(X)$ e $t \in G$, note que $M_{f \cdot \alpha_t(g)}\lambda_t = M_f \lambda_t M_g$. Com efeito, por um lado, temos que

$$
\begin{aligned}
(M_{f \cdot \alpha_t(g)}\lambda_t)(\delta_s)|_r &= ((f \cdot \alpha_t(g)) \cdot \lambda_t(\delta_s))|_r \\
&= f(r)g(t^{-1}r)\delta_s(t^{-1}r).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} M_f\lambda_t M_g(\delta_s)|_r &= M_f(\lambda_t(g\cdot\delta_s))|_r \\ &= f(r)\lambda_t(g\cdot\delta_s)|_r \\ &= f(r)g(t^{-1}r)\delta_s(t^{-1}r). \end{aligned}$$

Agora, desde que $M_{\delta_s} = |\delta_s\rangle\langle\delta_s|$ *para todo* $s \in X$, *então* $M(C_0(X)) \subseteq B$. *Daí, como* $BAB \subseteq B$, *segue que* $M_f\lambda_t M_g \subseteq B$ *para todo* $f, g \in C_0(X)$ *e* $t \in G$. *Consequentemente,* $C \subseteq B$. *Além disso, a igualdade* $|\delta_s\rangle\langle\delta_t| = M_{\delta_s}\lambda_{st^{-1}}M_{\delta_t}$ *(para todo* $s, t \in X$*) nos mostra que* $B \subseteq C$. *Portanto* $C = B$.

Feito isso, as igualdades

$$\delta(M_f) = M_f \otimes 1 \quad e \quad \delta(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s, \tag{3.4}$$

como no exemplo anterior, nos dizem que $\delta(B) \subseteq B \otimes C_r^*(G)$ *e que* δ *se restringe a uma coação* δ_X *de* $C_r^*(G)$ *em* B. *O mesmo argumento utilizado no Exemplo 3.2.7 para mostrar que* δ *é contínua, também mostra que* δ_X *é contínua. Consequentemente,* $\delta_X : B \longrightarrow B \otimes C_r^*(G)$ *é uma coação contínua e injetiva.*

Como um caso particular, seja $G = \mathbb{Z}$ *e* $X = \{1, 2\}$. *Então, visto que* $dim(l_2(X)) = 2$, *temos o isomorfismo canônico* $B = K(l_2(X)) \cong M_2(\mathbb{C})$. *Utilizando esta identificação, observe que* $\lambda_{-1}|_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_0|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $\lambda_1|_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *relativamente à base ordenada* $\{\delta_2, \delta_1\}$ *de* $l_2(X)$. *Dado* $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in B$, *sejam* $f, g \in C_0(X)$ *tais que* $f(1) = 0$, $f(2) = a_{11}$, $g(1) = a_{22}$ *e* $g(2) = 0$. *Então, é fácil verificar que as matrizes (relativamente à sabe* $\{\delta_2, \delta_1\}$*) correspondentes a* M_f *e a* M_g *em* $K(l_2(X))$ *são* $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, *respectivamente. Assim, podemos escrever* $a = a_{21}\lambda_{-1}|_B + (M_f + M_g)\lambda_0|B + a_{12}\lambda_1|B$. *Pela Equação 3.4, segue que a coação* $\delta_X : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C_r^*(\mathbb{Z})$

é tal que

$$\begin{aligned}
\delta_X(a) &= \delta_X(a_{21}\lambda_{-1}|_B + (M_f + M_g)\lambda_0|_B + \lambda_1|_B) \\
&= a_{21}\lambda_{-1}|_B \otimes \lambda_{-1} + (M_f + M_g)\lambda_0|_B \otimes \lambda_0 + a_{12}\lambda_1|_B \otimes \lambda_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \lambda_{-1} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \lambda_0 + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \lambda_1.
\end{aligned}$$

Ou seja, a coação δ_X coincide com a coação do Exemplo 3.2.6.

Este caso pode ser generalizado para $X = \{1, 2, ..., n\} \subseteq \mathbb{Z}$. Escolhendo a base canônica $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, podemos ver operadores sobre $l_2(\mathbb{Z})$ como matrizes infinitas. Em outras palavras, $B = K(l_2(X)) \cong M_n(\mathbb{C})$ e uma matriz $a \in B$ é vista como uma matriz infinita em $K(l_2(\mathbb{Z}))$ cujas entradas correspondentes aos vetores δ_k com $k \in \mathbb{Z} \setminus X$ são nulas.

Na sequência, mostraremos que coações de $C^*(G)$ correspondem a ações fortemente contínuas do espaço dos caracteres $\widehat{G}$, no caso em que G é abeliano. Para demonstrar isso, começamos com o seguinte

Teorema 3.2.9. *Sejam Γ um grupo topológico compacto, A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C(\Gamma)$ uma coação contínua do grupo quântico compacto $(C(\Gamma), \Delta)$ (ver Exemplo 3.1.6) sobre A. Então, para cada $t \in \Gamma$, a função $\alpha_t := (id \otimes e_{vt}) \circ \delta : A \longrightarrow A$ é um $*$-homomorfismo, em que $e_{vt} : C(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ é o $*$-homomorfismo avaliação em t. Além disso,*

(i) $\alpha_{st} = \alpha_s \circ \alpha_t \quad$ para todo $s, t \in \Gamma \quad$ e $\quad \alpha_e = id$;

(ii) Para cada $a \in A$, a função $t \longmapsto \alpha_t(a)$ é contínua.

Consequentemente, α é uma ação fortemente contínua de Γ em A.

Prova. Seja $t \in \Gamma$. Como α_t é a composição de $*$-homomorfismos, α_t é um $*$-homomorfismo. Note que os $*$-homomorfismos $id \otimes e_{vt} : A \otimes C(\Gamma) \longrightarrow A$ e $\delta \otimes id, id \otimes \Delta : A \otimes C(\Gamma) \longrightarrow A \otimes C(\Gamma) \otimes C(\Gamma) \cong C(\Gamma \times \Gamma, A)$

são tais que, para todo $a \in A$, $f \in C(\Gamma)$ e $s, t \in \Gamma$:

1. $$(id \otimes e_{vt})(a \otimes f) = af(t) = (a \otimes f)(t);$$

2. $$\begin{aligned} (\delta \otimes id)(a \otimes f)|_{(s,t)} &= (\delta(a) \otimes f)|_{(s,t)} \\ &= \delta(a)(s)f(t) = \delta(af(t))(s) \\ &= \delta((a \otimes f)(t))(s); \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)(a \otimes f)|_{(s,t)} &= (a \otimes \Delta(f))|_{(s,t)} \\ &= af(st) = (a \otimes f)(st). \end{aligned}$$

Como $id \otimes e_{vt}$, $\delta \otimes id$ e $id \otimes \Delta)$ são $*$-homomorfismos de C^*-álgebras, para todo $a \in A$ e $s, t \in \Gamma$, obtemos

1. $(id \otimes e_{vt})(\delta(a)) = \delta(a)(t);$

2. $(\delta \otimes id)(\delta(a))|_{(s,t)} = \delta(\delta(a)(t))(s);$

3. $(id \otimes \Delta)(\delta(a))|_{(s,t)} = \delta(a)(st).$

Agora, utilizando a hipótese $(\delta \otimes id)\delta = (id \otimes \Delta)\delta$, para todo $a \in A$ e $s, t \in \Gamma$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_s \circ \alpha_t(a) &= \alpha_s(\alpha_t(a)) = \alpha_s(\delta(a)(t)) = \delta(\delta(a)t)(s) \\ &= (\delta \otimes id)(\delta(a))|_{(s,t)} = (id \otimes \Delta)(\delta(a))|_{(s,t)} \\ &= \delta(a)(st) = \alpha_{st}(a). \end{aligned}$$

Observe, ainda, que $e_{ve}(C(\Gamma)) = \mathbb{C}$. Com efeito, claro que $e_{ve}(C(\Gamma)) \subseteq \mathbb{C}$ e se $z \in \mathbb{C}$, então $f \in C(\Gamma)$, a função constante igual a z, é tal que $e_{ve}(f) = f(e) = z$. Agora, como δ é coação contínua e $id \otimes e_{ve}$ é

$*$-homomorfismo, segue que

$$\begin{aligned} A &= (id \otimes e_{ve})(A \otimes C(\Gamma)) = (id \otimes e_{ve})(\overline{\text{span}}\delta(A)(1 \otimes C(\Gamma))) \\ &\subseteq \overline{\text{span}}(id \otimes e_{ve})(\delta(A)(1 \otimes C(\Gamma))) \\ &= \overline{\text{span}}((id \otimes e_{ve})\delta(A))((id \otimes e_{ve})(1 \otimes C(\Gamma))) \\ &= \overline{\text{span}}((id \otimes e_{ve})\delta(A))(1 \otimes \mathbb{C}) = \overline{\text{span}}(id \otimes e_{ve})\delta(A) \\ &= (id \otimes e_{ve})(\delta(A)) = \text{Im}\alpha_e. \end{aligned}$$

Segue que α_e é sobrejetiva. Assim, para qualquer $a \in A$, existe b tal que $\alpha_e(b) = a$, de modo que $\alpha_e(a) = \alpha_e((\alpha_e(b))) = \alpha_e(b) = a$. Ou seja, $\alpha_e = id_A$.

Por fim, sejam $a \in A$ e $\{t_i\}_i \subseteq \Gamma$ uma net tal que $t_i \overset{i}{\longrightarrow} t \in \Gamma$. Como $\delta(a) \in A \otimes C(\Gamma) \cong C(\Gamma, A)$, temos que $\alpha_{t_i}(a) = \delta(a)(t_i) \overset{i}{\longrightarrow} \delta(a)(t) = \alpha_t(a)$, donde a função $s \longmapsto \alpha_s(a)$ é contínua.

□

Corolário 3.2.10. *Sejam G um grupo discreto abeliano, A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C(\widehat{G})$ uma coação contínua. Então a função $\alpha_\delta : \widehat{G} \longrightarrow \mathbf{Aut}(A)$, definida por $\alpha_{\delta_\chi} := (id \otimes e_{v_\chi}) \circ \delta$, é uma ação fortemente contínua de $\widehat{G}$ em A.*

Prova. Segue do Teorema 3.2.9.

□

Veremos que existe uma recíproca deste corolário, mas para isso precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.2.11. *Seja Γ um espaço topológico Hausdorff compacto, A um C^*-álgebra e $B \subseteq C(\Gamma, A)$ uma C^*-subálgebra tal que para todo $a \in A$ e $x \in \Gamma$, existe $f \in B$ tal que $f(x) = a$. Então $B \cdot C(\Gamma) = \{f \cdot g : f \in B, g \in C(\Gamma)\}$ é denso em $C(\Gamma, A)$.*

Prova. Pela Observação 1.2.25, sabemos que existe uma identificação $\psi : C(\Gamma) \otimes A \cong C(\Gamma, A)$, que nos tensores elementares é dada por $\psi(f \otimes a) = f \cdot a$. Como, por construção, $C(\Gamma) \odot A$ é denso em $C(\Gamma) \otimes A$, se mostrarmos que $C(\Gamma) \odot A \subseteq \overline{\text{span}} B \cdot C(\Gamma)$, então $C(\Gamma) \otimes A \subseteq \overline{\text{span}} B \cdot C(\Gamma)$ e o lema estará demonstrado.

Agora, fixemos $a \in A$ e $\varphi \in C(\Gamma)$. Por hipótese, para todo $x \in \Gamma$, existe $f_x \in B$ tal que $f_x(x) = a$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem abertos U_x, $x \in \Gamma$, tais que

$$\|f_x(y) - a\| < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|},$$

para todo $y \in U_x$ e $x \in \Gamma$. Como $\{U_x\}_{x\in\Gamma}$ é uma cobertura para Γ, existem $x_1, ..., x_n \in \Gamma$ tais que $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Escolhendo $\{g_i\}_{i=1}^n$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$, temos que o suporte de cada g_i está contido em U_{x_i} e que $\displaystyle\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, donde

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)g_i(x) - a\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)g_i(x) - a\sum_{i=1}^n g_i(x)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n g_i(x)\,\|f_{x_i}(x) - a\| < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|}.
\end{aligned}$$

Seja $F = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \cdot g_i \in B \cdot C(\Gamma)$. Utilizando a identificação $\varphi \otimes a = \varphi \cdot a$, segue que $\varphi \cdot F \in B \cdot C(\Gamma)$ e

$$\|\varphi \cdot F - \varphi \otimes a\| = \|\varphi \cdot F - \varphi \cdot a\| \leq \|\varphi\|\|F - a\| \leq \varepsilon.$$

Como $a \in A$ e $\varphi \in C(\Gamma)$ são arbitrários, concluímos, por argumentos de linearidade, que $A \odot C(\Gamma) \subseteq \overline{\text{span}} B \cdot C(\Gamma)$.

$\square$

Teorema 3.2.12. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\alpha : \widehat{G} \longrightarrow \mathbf{Aut}(A)$ uma ação fortemente contínua. Então a função $\delta_\alpha : A \longrightarrow A \otimes C(\widehat{G}) \cong C(\widehat{G}, A)$ definida por $\delta_\alpha(a)(\chi) = \alpha_\chi(a)$, $\chi \in \widehat{G}$, é um coação contínua e injetiva.*

Prova. Primeiramente, note que o fato de α ser fortemente contínua implica que $\delta_\alpha(a) \in C(\widehat{G}, A)$ para todo $a \in A$, de modo que a função δ_α está bem definida. Como $\alpha_\chi \in \mathbf{Aut}(A)$ para todo $\chi \in \widehat{G}$, evidentemente δ_α é $*$-homomorfismo. Além disso, uma vez que para todo $a \in A$ e $\chi, \eta \in \widehat{G}$,

$$(\delta_\alpha \otimes id)(\delta_\alpha(a))|_{(\chi,\eta)} = \delta_\alpha(\delta_\alpha(a)(\eta))(\chi)$$

e

$$(id \otimes \Delta)(\delta_\alpha(a))|_{(\chi,\eta)} = \delta_\alpha(a)(\chi\eta),$$

segue que, para todo $a \in A$ e $\chi, \eta \in \widehat{G}$,

$$\begin{aligned}(\delta_\alpha \otimes id)(\delta_\alpha(a))|_{(\chi,\eta)} &= \delta_\alpha(\delta_\alpha(a)(\eta))(\chi) = \alpha_\chi(\delta_\alpha(a)(\eta)) \\ &= \alpha_\chi(\alpha_\eta(a)) = (\alpha_{\chi\eta})(a) = \delta_\alpha(a)(\chi\eta) \\ &= (id \otimes \Delta)(\delta_\alpha(a))|_{(\chi,\eta)}.\end{aligned}$$

Logo, $(\delta_\alpha \otimes id)\delta_\alpha = (id \otimes \Delta)\delta_\alpha$.

Para mostrarmos que δ_α é contínua, considere a identificação natural $C(\widehat{G}) \cong 1 \otimes C(\widehat{G}) \subseteq M(A \otimes C(\widehat{G}))$ dada por $f \longmapsto 1 \otimes f$. Para todo $a \in A$ e $\chi \in \widehat{G}$, sabemos que $\delta_\alpha(\alpha_{\chi^{-1}}(a)) \in \delta_\alpha(A)$ é tal que $\delta_\alpha(\alpha_{\chi^{-1}}(a))|_\chi = \alpha_\chi(\alpha_{\chi^{-1}})(a) = a$, além de que $\delta_\alpha(A)$ é uma C^*-subálgebra de $C(\widehat{G}, A)$. Assim, pelo Lema **3.2.11**, podemos concluir que $\overline{\text{span}}\delta_\alpha(A) \cdot C(\widehat{G}) = A \otimes C(\widehat{G})$. Portanto, $\overline{\text{span}}\delta_\alpha(A)(1 \otimes C(\widehat{G})) = A \otimes C(\widehat{G})$ e consequentemente δ_α é contínua.

Por fim, se $\delta_\alpha(a) = 0$, então $0 = \delta_\alpha(a)|_1 = \alpha_1(a) = a$, e δ_α é injetiva.

□

Exemplo 3.2.13. *Seja $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos inteiros. Pela Observação 3.1.10, sabemos que a função $\widehat{\ }: C^*(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1)$, tal que $\widehat{\delta_n}(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{S}^1$), define um isomorfismo de grupos quânticos. Pelo Exemplo 3.2.6, a função $\delta : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}^1)$, em que $\delta(a) = \sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \widehat{\delta_n}$, $a \in M_2(\mathbb{C})$, é uma coação (contínua) de $C(\mathbb{S}^1)$ em $M_2(\mathbb{C})$. Logo, pelo Corolário 3.2.10, a função $\alpha_\delta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbf{Aut}\,(M_2(\mathbb{C}))$, em que $\alpha_{\delta_z}(a) = (id \otimes e_{v_z})\delta(a)$, $a \in M_2(\mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{S}^1$, é uma ação fortemente contínua de $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$ em $M_2(\mathbb{C})$. Observe que para todo $z \in \mathbb{S}^1$ e $a \in M_2(\mathbb{C})$, tem-se*

$$\alpha_{\delta z}(a) = (id \otimes e_{v_z}) \left(\sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \widehat{\delta_n} \right) = \sum_{n=-1}^{1} a_n \widehat{\delta_n}(z)$$

$$= \sum_{n=-1}^{1} a_n z^n.$$

Agora, pelo Teorema 3.2.12, a função $\delta_{\alpha_\delta} : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \cong C\left(\mathbb{S}^1, M_2(\mathbb{C})\right)$*, dada por* $\delta_{\alpha_\delta}(a)|_z = \alpha_{\delta_z}(a)$*,* $a \in M_2(\mathbb{C})$ *e* $z \in \mathbb{S}^1$*, é uma coação contínua de* $C^*(\mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{S}^1)$ *em* $M_2(\mathbb{C})$*. Utilizando a identificação* $M_2(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \cong C\left(\mathbb{S}^1, M_2(\mathbb{C})\right)$*, segue que, para todo* $z \in \mathbb{S}^1$ *e* $a \in M_2(\mathbb{C})$*,*

$$\delta_{\alpha_\delta}(a)|_z = \alpha_{\delta_z}(a) = \sum_{n=-1}^{1} a_n z^n = \delta(a)|_z$$

Este exemplo é interessante. Tomamos uma coação δ, e a coação obtida da acão associada a coação δ voltou a ser a coação δ. Esta ideia será formalizada categoricamente no próximo capítulo, explicitando a equivalência entre as categorias aonde vivem estas ações e coações.

Capítulo 4

Coações de grupos e fibrados de Fell

Neste último capítulo, veremos uma equivalência entre a categoria dos fibrados de Fell sobre um grupos G e a categoria das coações de $C_r^*(G)$. Na primeira seção contruiremos coações de $C_r^*(G)$ a partir de fibrados de Fell. Na segunda seção, faremos o contrário, construiremos fibrados a partir de coações de $C_r^*(G)$ e veremos que dada uma coação $\delta : C_r^*(G) \longrightarrow A$, pode-se recuperar a C^*-álgebra A a partir de δ. Na terceira seção, formalizaremos tal equivalência categórica. As principais referências utilizadas foram [24, 8].

4.1 Coações associadas a fibrados de Fell

Nesta seção, construiremos coações do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ sobre as C^*-álgebras $C^*(\mathcal{B})$ e $C_r^*(\mathcal{B})$ de um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$.

Com este intento, dado um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$, note que a função

$$\delta_{\mathcal{B}}^0 : C_c(\mathcal{B}) \longrightarrow C^*(\mathcal{B}) \otimes C_r^*(G),$$

que nos elementos da base é dada por $\delta_{\mathcal{B}}^0(b_t) = b_t \otimes \lambda_t$, é um $*$-

homomorfismo. Assim, temos a seguinte

Proposição 4.1.1. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. O único $*$-homomorfismo $\delta_{\mathcal{B}} : C^*(\mathcal{B}) \longrightarrow C^*(\mathcal{B}) \otimes C^*_r(G)$, que estende $\delta^0_{\mathcal{B}}$, é uma coação contínua.*

Prova. Primeiramente, para $t \in G$ e $b_t \in B_t$, tem-se que

$$\begin{aligned}(\delta_{\mathcal{B}} \otimes id)\delta_{\mathcal{B}}(b_t) &= (\delta_{\mathcal{B}} \otimes id)(b_t \otimes \lambda_t) \\ &= (b_t \otimes \lambda_t) \otimes \lambda_t \\ &= b_t \otimes (\lambda_t \otimes \lambda_t) \\ &= (id \otimes \Delta^r_G)(b_t \otimes \lambda_t) = (id \otimes \Delta^r_G)\delta_{\mathcal{B}}(b_t).\end{aligned}$$

Logo, $(\delta_{\mathcal{B}} \otimes id)\delta_{\mathcal{B}}(\xi) = (id \otimes \Delta^r_G)\delta_{\mathcal{B}}(\xi)$ para todo $\xi \in C^*(\mathcal{B})$.

Além disso, dados $b_t \otimes \lambda_t \in C^*(\mathcal{B}) \otimes C^*_r(G)$, $t \in G$, também temos que

$$\delta_{\mathcal{B}}(b_t)(1 \otimes \lambda_e) = (b_t \otimes \lambda_t)(1 \otimes \lambda_e) = b_t \otimes \lambda_t.$$

Isto é, $C^*(\mathcal{B}) \otimes C^*_r(G) \subseteq \overline{\text{span}}\delta_{\mathcal{B}}(C^*(\mathcal{B}))(1 \otimes C^*_r(G))$. Como claramente $C^*(\mathcal{B}) \otimes C^*_r(G) \supseteq \overline{\text{span}}\delta_{\mathcal{B}}(C^*(\mathcal{B}))(1 \otimes C^*_r(G))$, conluímos que $\delta_{\mathcal{B}}$ é um $*$-homomorfismo não-degenerado.

Segue que $\delta_{\mathcal{B}}$ é uma coação contínua.

$\square$

Sejam $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell e $\mathcal{B}\times G = \{C_{(s,t)}\}_{(s,t)\in G\times G}$ o fibrado produto cartesiano (Exemplo 2.1.4). Agora, voltaremos nossas atenções para a construção de uma coação de $C^*_r(G)$ em $C^*_r(\mathcal{B})$. Para isso, nos próximos dois resultados, veremos que existe um isomorfismo entre os B_e-módulo de Hilbert $l_2(\mathcal{B} \times G)$ e $l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G)$.

Proposição 4.1.2. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. A função*

$$\begin{aligned}\psi_{00} : C_c(\mathcal{B}) \times C_c(G) &\longrightarrow C_c(\mathcal{B} \times G) \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \sum_{s,t} \xi(s)\eta(t)\end{aligned}$$

é bilinear.

Prova. Segue diretamente dos axiomas de fibrado de Fell.

$\square$

Proposição 4.1.3. *Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Então, a única função linear*

$$\psi_0 : C_c(\mathcal{B}) \odot C_c(G) \longrightarrow C_c(\mathcal{B} \times G)$$

que estende ψ_{00} (da proposição anterior) ao produto tensorial, isto é, tal que $\psi_0(\xi \otimes \eta) = \psi_{00}(\xi, \eta)$ para todo $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ e $\eta \in C_c(G)$, é um isomorfismo de B_e-pré-módulos de Hilbert. Consequentemente, pela Proposição 1.3.17, existe um único isomorfismo de B_e-módulos de Hilbert $\psi : l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G) \longrightarrow l_2(\mathcal{B} \times G)$ que estende ψ_0.

Prova. Vejamos, primeiro, que ψ_0 preserva produto interno. Com efeito, dados $\xi \otimes \eta$, $\xi' \otimes \eta' \in C_c(\mathcal{B}) \odot C_c(G)$, temos

$$\begin{aligned}
&= \langle \psi_0(\xi \otimes \eta), \psi_0(\xi' \otimes \eta') \rangle \\
&= \left\langle \sum_{s,t} \xi(s)\eta(t), \sum_{u,v} \xi'(u)\eta'(v) \right\rangle \\
&= \sum_{s,t} (\xi(s)\eta(t))^* \xi'(s)\eta'(t) \\
&= \sum_{s} \xi(s)^* \xi'(s) \sum_{t} \eta(t)^* \eta'(t) \\
&= \langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle = \langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle.
\end{aligned}$$

Logo ψ_0 preserva B_e-produto interno. Isto também mostra que ψ_0 é cotínua e injetiva.

Para mostrar a sobrejetividade, dada $\xi \in C_c(\mathcal{B} \times G)$, escolha $\eta = \sum_{s,t} \xi(s,t) \otimes \delta_t \in C_c(\mathcal{B}) \odot C_c(G)$. Lembre que $\xi(s,t) \in C_{(s,t)} = B_s$ para todo $s, t \in G$, de modo que podemos identificar $\xi(s,t)$ com a função $j_s(\xi(s,t))$ (ver a Proposição 2.1.15).Logo $\psi_0(\eta) = \xi$.

Claramente ψ_0 preserva a estrutura de B_e-módulo.

Por fim, como $C_c(\mathcal{B}) \odot C_c(G)$ é, por construção, um B_e-módulo denso em $l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G)$, bem como $C_c(\mathcal{B} \times G)$ é um B_e-módulo denso em $l_2(\mathcal{B} \times G)$, a Proposição 1.3.17 nos diz que existe um único isomorfismo de B_e-módulos de Hilbert $\psi : l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G) \longrightarrow l_2(\mathcal{B} \times G)$ que estende ψ_0.

$\square$

Observação 4.1.4. Dado $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in G}$ uma fibrado de Fell, pelo Corolário 1.3.23, temos que $\mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G)) \cong \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B} \times G))$.

Seja $\mathcal{B} \times G$ o fibrado de Fell produto cartesiano e considere o B_e-pré-módulo de Hilbert $C_c(\mathcal{B} \times G)$.

Teorema 4.1.5. *A função*

$$\begin{array}{rcl} W_0 : C_c(\mathcal{B} \times G) & \longrightarrow & C_c(\mathcal{B} \times G) \\ F & \longmapsto & W_0(F) \end{array}$$

em que $W_0(F)(s,t) = F(s, s^{-1}t)$, para todo $s, t \in G$, é linear, contínua, adjuntável e $W_0 W_0^* = W_0^* W_0 = 1$.

Prova. Observe que W_0 está bem definida como função, pois dada $F \in C_c(\mathcal{B} \times G)$, sabemos que $F(s,r) \in C_{(s,r)} = B_s$ para todo $s, r \in G$. Assim, $W_0(F)(s,t) = F(s, s^{-1}t) \in B_s$ para todo $s, t \in G$. Ou seja, $W_0(F) \in C_c(\mathcal{B} \times G)$. A linearidade de W_0 segue da estrutura pontual de espaço vetorial. A continuidade segue de que

$$\begin{aligned} \|W_0(F)\|^2 &= \|\langle W_0(F), W_0(F) \rangle\| \\ &= \left\| \sum_{s,t} W_0(F)(s,t)^* W_0(F)(s,t) \right\| \\ &= \left\| \sum_{s,t} F(s, s^{-1}t)^* F(s, s^{-1}t) \right\| \\ &= \left\| \sum_{s,t} F(s,t)^* F(s,t) \right\| \\ &= \|\langle F, F \rangle\| = \|F\|^2, \end{aligned}$$

para todo $F \in C_c(\mathcal{B} \times G)$. Por motivos análogos, a função linear

$$\begin{array}{rcl} W_0^* : C_c(\mathcal{B} \times G) & \longrightarrow & C_c(\mathcal{B} \times G) \\ F & \longmapsto & W_0^*(F) \end{array}$$

definida por $W_0^*(F)(s,t) = F(s,st)$, para todo e $s,t \in G$ é contínua. Além disso, para todo $F, F' \in C_c(\mathcal{B} \times G)$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \langle W_0(F), F' \rangle & = & \sum_{s,t} W_0(F)(s,t)^* F'(s,t) \\ & = & \sum_{s,t} F(s, s^{-1}t)^* F'(s,t) \\ & = & \sum_{s,t} F(s,t)^* F'(s,st) \\ & = & \sum_{s,t} F(s,t)^* W_0^*(F')(s,t) \\ & = & \langle F, W_0^*(F') \rangle \,. \end{array}$$

Isto mostra que W_0 é adjuntável.

Por fim, para todo $F \in C_c(\mathcal{B} \times G)$ e $s,t \in G$, como

$$(W_0^* W_0)(F)(s,t) = W_0^*(F)(s, s^{-1}t) = F(s,t)$$

e

$$(W_0 W_0^*)(F)(s,t) = W_0^*(F)(s, st) = F(s,t),$$

concluímos que $W_0^* W_0 = W_0 W_0^* = 1$.

$\square$

Corolário 4.1.6. *A função linear e contínua*

$$W : l_2(\mathcal{B} \times G) \longrightarrow l_2(\mathcal{B} \times G),$$

que estende W_0, é adjuntável e unitária, em que W^* é a única extensão *linear e contínua de W_0^* a $l_2(\mathcal{B}\times G)$. Consequentemente $W \in \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}\times G))$.*

Prova. Segue do Teorema 4.1.5 e por argumentos de linearidade e continuidade.

$\square$

Observação 4.1.7. Seja $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ um fibrado de Fell. Por definição, $C_r^*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}))$ e $C_r^*(G) \subseteq \mathcal{L}(l_2(G))$. Assim, pelas Proposições 1.3.24 e 1.3.23, temos que $C_r^*(\mathcal{B})\otimes C_r^*(G) \subseteq \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B}) \otimes l_2(G)) \cong \mathcal{L}(l_2(\mathcal{B} \times G))$. Em consequência disto, enunciamos o seguinte

Teorema 4.1.8. *Se $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ é um fibrado de Fell, então*

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B}}^r : C_r^*(\mathcal{B}) &\longrightarrow C_r^*(\mathcal{B}) \otimes C_r^*(G) \\ x &\longmapsto W(x\otimes 1)W^* \end{aligned}$$

é uma coação contínua e injetiva satisfazendo $\delta_{\mathcal{B}}^r(\Lambda(b_t)) = \Lambda(b_t) \otimes \lambda_t$, para todo $b_t \in C^*(\mathcal{B})$, $t \in G$.

Prova. Dados $x, y \in C_r^*(\mathcal{B})$, temos que

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B}}^r(xy) = W(xy\otimes 1)W^* &= W(x\otimes 1)(y\otimes 1)W^* \\ &= W(x\otimes 1)W^*W(y\otimes 1)W^* \\ &= \delta_{\mathcal{B}}^r(x)\delta_{\mathcal{B}}^r(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B}}^r(x^*) &= W(x^*\otimes 1)W^* = W(x\otimes 1)^*W^* \\ &= (W(x\otimes 1)W^*)^* = \delta_{\mathcal{B}}^r(x)^*. \end{aligned}$$

Assim, $\delta_{\mathcal{B}}^r$ é um $*$-homomorfismo.

Para todo $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ e $\eta \in C_c(G)$, utilizando a identificação dada pela Proposição 4.1.3, temos que para todo $r, s \in G$,

$$\begin{aligned}(\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t)(\xi \otimes \eta)|_{(r,s)} &= (\Lambda(b_t)(\xi) \otimes \lambda_t(\eta))|_{(r,s)} \\ &= \Lambda_{(b_t)}(\xi)|_r \lambda_t(\eta)|_s = b_t \xi(t^{-1}r)\eta(t^{-1}s) \\ &= b_t(\xi \otimes \eta)|_{(t^{-1}r, t^{-1}s)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\Lambda(b_t) \otimes 1)(\xi \otimes \eta)|_{(r,s)} &= (\Lambda(b_t)(\xi) \otimes \eta)|_{(r,s)} \\ &= \Lambda_{(b_t)}(\xi)|_r \eta(s) = b_t \xi(t^{-1}r)\eta(s) \\ &= b_t(\xi \otimes \eta)|_{(t^{-1}r, s)}\end{aligned}$$

Assim, para todo $F \in C_c(\mathcal{B} \times G)$ e $r, s \in G$, também vale que

$$(\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t)(F)|_{(r,s)} = b_t(F)(t^{-1}r, t^{-1}s)$$

e

$$(\Lambda(b_t) \otimes 1)(F)|_{(r,s)} = b_t(F)(t^{-1}r, s).$$

Daí, dados $F \in C_c(\mathcal{B} \times G)$, $b_t \in C^*(\mathcal{B})$ e $r, s, t \in G$ segue, da definição de W, que

$$\begin{aligned}\delta^r_{\mathcal{B}}(\Lambda(b_t))(F)(r,s) &= (W(\Lambda(b_t) \otimes 1)W^*)(F)|_{(r,s)} \\ &= W((\Lambda(b_t) \otimes 1)W^*(F))|_{(r,s)} \\ &= (\Lambda(b_t) \otimes 1)W^*(F)|_{(r, r^{-1}s)} \\ &= b_t W^*(F)|_{(t^{-1}r, r^{-1}s)} \\ &= b_t F(t^{-1}r, t^{-1}s) \\ &= (\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t)(F)|_{(r,s)},\end{aligned}$$

donde, $\delta^r_{\mathcal{B}}(\Lambda(b_t)) = \Lambda(b_t) \otimes \lambda_t$ para todo $b_t \in C^*(\mathcal{B})$ e $t \in G$.

A partir disso, podemos concluir dois fatos:

1. Para todo $\Lambda(b_t) \in C_r^*(\mathcal{B})$ e $\lambda_s \in C_r^*(G)$, com $s, t \in G$,

$$\delta_{\mathcal{B}}^r(\Lambda(b_t))(1 \otimes \lambda_{t^{-1}s}) = (\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t)(1 \otimes \lambda_{t^{-1}s}) = \Lambda(b_t) \otimes \lambda_s.$$

Assim,

$$C_r^*(\mathcal{B}) \otimes C_r^*(G) \subseteq \overline{\text{span}}\delta_{\mathcal{B}}^r(C_r^*(\mathcal{B}))(1 \otimes C_r^*(G)).$$

Como, claramente

$$C_r^*(\mathcal{B}) \otimes C_r^*(G) \supseteq \overline{\text{span}}\delta_{\mathcal{B}}^r(C_r^*(\mathcal{B}))(1 \otimes C_r^*(G)),$$

segue que

$$C_r^*(\mathcal{B}) \otimes C_r^*(G) = \overline{\text{span}}\delta_{\mathcal{B}}^r(C_r^*(\mathcal{B}))(1 \otimes C_r^*(G)).$$

2. Para cada $b_t \in C_r^*(\mathcal{B}), t \in G$

$$\begin{aligned}
(\delta_{\mathcal{B}}^r \otimes id)\delta_{\mathcal{B}}^r(\Lambda(b_t)) &= (\delta_{\mathcal{B}}^r \otimes id)(\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t) = (\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t) \otimes \lambda_t \\
&= \Lambda(b_t) \otimes (\lambda_t \otimes \lambda_t) = \Lambda(b_t) \otimes \Delta_{C_r^*(G)}(\lambda_t) \\
&= (id \otimes \Delta_{C_r^*(G)}))(\Lambda(b_t) \otimes \lambda_t) \\
&= (id \otimes \Delta_{C_r^*(G)})\delta_{\mathcal{B}}^r(\Lambda(b_t)).
\end{aligned}$$

Dos itens 1 e 2 acima, segue que $\delta_{\mathcal{B}}^r$ é uma coação contínua.

Por fim, se $\delta_{\mathcal{B}}^r(x) = 0$ para algum $x \in C_r^*(\mathcal{B})$, então $W(x \otimes 1)W^* = 0$. Como W é unitário, temos que $x \otimes 1 = 0$, i.e., $x = 0$. Portanto, $\delta_{\mathcal{B}}^r$ é injetiva.

$\square$

4.2 Fibrados de Fell associados a coações

Nesta seção, produziremos fibrados de Fell a partir de coações de $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras. Quando a coação for contínua e injetiva, a C^*-álgebra reduzida do fibrado a ela associado será isomorfa a álgebra na qual se está coagindo. Se considerarmos, por exemplo, a coação

$\delta : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C_r^*(\mathbb{Z})$ definida por

$$\delta(a) = \sum_{n=-1}^{1} a_n \otimes \lambda_n,$$

conforme o Exemplo 3.2.6, então é fácil ver que o subespaço

$$A_0 = \{a \in M_2(\mathbb{C}) : \delta(a) = a \otimes \delta_0\}$$

coincide com o subespaço gerado pelas matrizes da forma $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. De fato, claro que qualquer matriz diagonal percente a A_0 e se $a \in A_0$, então $\delta(a) = a \otimes \lambda_0$ implica que $a_{-1} \otimes \lambda_{-1} + a_1 \otimes \lambda_1 = 0$. Logo $a_{-1} = a_1 = 0$, pois $\{\lambda_{-1}, \lambda_1\}$ é linearmente independente (ver Proposição 1.2.4). Portanto, $a \in M_2(\mathbb{C})$ é uma matriz diagonal. Similarmente, mostra-se que os susbespaços $A_{-1} = \{a \in M_2(\mathbb{C}) : \delta(a) = a \otimes \lambda_{-1}\}$ e $A_1 = \{a \in M_2(\mathbb{C}) : \delta(a) = a \otimes \lambda_1\}$ coincidem com os subespaços gerados pelas matrizes da forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Assim, com as operações de multiplicação e involução induzidas por $M_2(\mathbb{C})$, concluímos que ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, em que $A_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, é o fibrado de Fell do Exemplo 2.1.9. Com um corolário desta seção, teremos, neste caso, um isomorfismo entre $C_r^*({}_\delta\mathcal{A})$ e $M_2(\mathbb{C})$.

Vejamos, em primeiro lugar, que coações implicam fibrados.

Proposição 4.2.1. *Se A é uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ uma coação, então a família ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$, em que $A_t = \{a \in A : \delta(a) = a \otimes \lambda_t\}$ para todo $t \in G$, é um fibrado de Fell sobre G com a multiplicação e a involução induzidas de A.*

Prova. É fácil ver que A_t é espaço vetorial normado para cada $t \in G$. Vejamos que A_t é fechado. Com efeito, sejam $t \in G$ e $\{a_t^i\}_{i \in I} \subseteq A_t$ uma net tal que $\lim_i a_t^i = a_t \in A$. Então

$$\|a_t^i \otimes \lambda_t - a_t \otimes \lambda_t\| = \|(a_t^i - a_t) \otimes \lambda_t\| \leq \|a_t^i - a_t\| \xrightarrow{i} 0.$$

Consequentemente,

$$\delta(a_t) = \delta(\lim_i a_t^i) = \lim_i \delta(a_t^i) = \lim_i a_t^i \otimes \lambda_t = a_t \otimes \lambda_t,$$

ou seja, $a_t \in A_t$ e portanto, A_t é fechado. Note que isso também mostra que A_t é um espaço de Banach.

Além disso, como δ é $*$-homomorfismo e para quaisquer $s, t \in G$, $\lambda_s \lambda_t = \lambda_{st}$ e $\lambda_t^* = \lambda_{t^{-1}}$, temos que

$$\delta(a_s a_t) = \delta(a_s)\delta(a_t) = (a_s \otimes \lambda_s)(a_t \otimes \lambda_t) = a_s a_t \otimes \lambda_{st}$$

e

$$\delta(a_t^*) = \delta(a_t)^* = (a_t \otimes \lambda_t)^* = a_t^* \otimes \lambda_{t^{-1}},$$

para quasiquer $a_s \in A_s$, $a_t \in A_t$ e $s, t \in G$. Com isso, $a_s a_t \in A_{st}$ e $a_t^* \in A_{t^{-1}}$, isto é, $A_s A_t \subseteq A_{st}$ e $A_t^* \subseteq A_{t^{-1}}$. Daí, substituindo t por t^{-1}, obtemos que $A_{t^{-1}} \subseteq A_t^*$. Assim, com vistas à Proposição2.1.7, ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$ é um fibrado de Fell.

□

Observação 4.2.2. O fibrado de Fell ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$ do teorema anterior se revelará uma graduação para A se adicionarmos a hipótese de δ ser uma coação contínua. No entanto, para demonstrar este fato, precisaremos construir certas projeções $E_t : A \longrightarrow A_t$ que, por seu turno, dependem de um funcional linear contínuo chamado, muitas vezes, de **estado de Haar**, a saber,

$$\begin{aligned} \varphi : C_r^*(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \langle \delta_e, \xi \delta_e \rangle, \qquad \delta_e \in l_2(G). \end{aligned}$$

A linearidade deste funcional segue do fato de que a linearidade do produto interno no $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert $l_2(G)$ é na segunda variável, enquanto a continuidade de φ segue da continuidade do produto interno. Este funcional é claramente positivo. A partir daí, para cada

$t \in G$, consideramos o seguinte funcional, evidentemente positivo,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_t : C_r^*(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \varphi(\lambda_{t^{-1}}(\xi)). \end{array}$$

Observe que $\varphi_t(\lambda_s) = \varphi(\lambda_{t^{-1}}\lambda_s) = \langle \delta_e, \lambda_{t^{-1}s}\delta_e \rangle = \delta_{t,s}$ para todo $t, s \in G$. Além disso, a Proposição 1.2.22 e o Teorema 1.2.20 nos dizem que existem únicas funções lineares e contínuas $id \otimes \varphi_t : A \otimes C_r^*(G) \longrightarrow A$, $id \otimes (id \otimes \varphi_t) : A \otimes C_r^*(G) \otimes C_r^*(G) \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ e $\delta \otimes id : A \otimes C_r^*(G) \longrightarrow A \otimes C_r^*(G) \otimes C_r^*(G)$, que agem canonicamente nos tensores elementares. Com isso, podemos expressar dois novos fatos na seguinte proposição.

Proposição 4.2.3. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ uma coação. Então, para todo $t \in G$ e $a \in A$, tem-se:*

(i) $(id \otimes (id \otimes \varphi_t) \circ \Delta_G^r)(\delta(a)) = (id \otimes \varphi_t)(\delta(a)) \otimes \lambda_t$;

(i) $((id \otimes id \otimes \varphi_t)(\delta \otimes id))(\delta(a)) = \delta((id \otimes \varphi_t)(\delta(a)))$.

Prova. Seja $t \in G$. Observe que é suficiente verificar estas igualdades para os elementos da forma $a \otimes \lambda_s \in A \otimes C_r^*(G)$ pois, por argumentos de linearidade e continuidade, o resultado se estende a todos os elementos $\delta(a) \in A \otimes C_r^*(G)$, $a \in A$. Assim,

(i) Pela Observação 4.2.2, sabemos que $\varphi_t(\lambda_s) = \delta_{t,s}$ para todo $t, s \in G$. Então,

$$\begin{array}{rcl} (id \otimes (id \otimes \varphi_t) \circ \Delta_{C_r^*(G)})(a \otimes \lambda_s)) & = & a \otimes (id \otimes \varphi_t)\Delta_G^r(\lambda_s) \\ & = & a \otimes (id \otimes \varphi_t(\lambda_s \otimes \lambda_s) \\ & = & a \otimes \lambda_s \varphi_t(\lambda_s) = a\varphi_t(\lambda_s) \otimes \lambda_t \\ & = & (id \otimes \varphi_t)(a \otimes \lambda_s) \otimes \lambda_t. \end{array}$$

(ii) Pela Proposição 1.2.22 e pelo Teorema 1.2.20, obtemos

$$\begin{aligned} ((id \otimes id \otimes \varphi_t)(\delta \otimes id))(a \otimes \lambda_s) &= (id \otimes id \otimes \varphi_t)(\delta(a) \otimes \lambda_s) \\ &= \delta(a)\varphi_t(\lambda_s) = \delta(a\varphi_t(\lambda_s)) \\ &= \delta((id \otimes \varphi_t)(a \otimes \lambda_s)). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é o passo crucial para mostrarmos que coações contínuas implicam graduções.

Proposição 4.2.4. *Se $\xi \in C_r^*(G)$ e $\varphi_t(\xi) = 0$ para todo $t \in G$, então $\xi = 0$.*

Prova. Primeiramente, a função

$$\begin{aligned} \Phi : C_r^*(G) &\longrightarrow l_2(G) \\ \xi &\longmapsto \xi(\delta_e) \end{aligned}$$

é claramente linear e contínua, com $\|\Phi(\xi)\| \leq \|\xi\|$ para todo $\xi \in C_r^*(G)$. Ainda, como para todo $t, s \in G$, vale $\lambda_t(\delta_s) = \delta_t * \delta_s = \delta_{ts}$, temos que $\lambda_t(\delta_e) * \delta_s = \delta_t * \delta_s = \lambda_t(\delta_s)$. Somado a isso a bilinearidade e continuidade da convolução $*$, segue que $\xi(\delta_e) * \eta = \xi(\delta_e * \eta)$ para todo $\xi \in C_r^*(G)$ e $\eta \in C_c(G)$. Assim, se $\xi(\delta_e) = 0$, então $\xi(\delta_e)*\delta_t = \xi(\delta_t) = 0$ para todo $t \in G$, donde $\xi = 0$. Ou seja, Φ é injetiva. Logo, dada $\xi \in C_r^*(G)$ satisfazendo $\varphi_t(\xi) = 0$ para todo $t \in G$, obtemos

$$0 = \varphi_t(\xi) = \varphi(\lambda_{t^{-1}}\xi) = \langle \delta_e, \lambda_{t^{-1}}\xi\delta_e \rangle = \xi(\delta_e)(t) = \Phi(\xi)(t),$$

e portanto $\xi = 0$.

□

Teorema 4.2.5. *Se A é uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ é uma coação contínua, então a família ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$ é uma graduação para A.*

Prova. Pela Proposição 4.2.1, sabemos que ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$ é um fibrado de Fell, de modo que nos é suficiente mostrar que $\{A_t\}_{t \in G}$ é linearmente independente e que $A_0 = \bigoplus_{t\in G} A_t$ é denso em A. Para cada $t \in G$, considere a função linear e contínua (ver a Observação 4.2.2)

$$E_t : A \ni a \longmapsto (id \otimes \varphi_t)\delta(a) \in A. \tag{4.1}$$

Vejamos que $E_t(a) \in A_t$ para todo $t \in G$. Com efeito, da Proposição 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta(E_t) &= \delta((id \otimes \varphi_t)\delta(a)) \\
&= (id \otimes id \otimes \varphi_t)(\delta \otimes id)(\delta(a)) \\
&= (id \otimes id \otimes \varphi_t)(id \otimes \Delta_G^r)(\delta(a)) \\
&= (id \otimes (id \otimes \varphi_t)\Delta_G^r)(\delta(a)) \\
&= (id \otimes \varphi_t)(\delta(a)) \otimes \lambda(\delta_t) \\
&= E_t(a) \otimes \lambda_t,
\end{aligned}$$

donde $E_t(a) \in A_t$. Além disso, caso $a \in A_s$, temos

$$\begin{aligned}
E_t(a) &= (id \otimes \varphi_t)\delta(a) = (id \otimes \varphi_t)(a \otimes \lambda_s) = a\varphi_t(\lambda_s) \\
&= a\delta_{t,s}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $E_t^2 = E_t$ para todo $t \in G$, e, se $0 = \sum_{t\in G} a_t \in A_0$, então $0 = \sum_{t\in G} E_s(a_t) = a_s$ para todo $s \in G$. Segue que $\{A_t\}_{t\in G}$ é linearmente independente.

Agora, seja $\theta \in A_+^*$ satisfazendo $\theta(a) = 0$ para todo $a \in A_0$.

Afirmação. $\theta = 0$.

Demonstração. Se $\theta(a) = 0$ para todo $a \in A_0$, então $\theta(E_t(a)) = 0$ para todo $t \in G$ e $a \in A$. Daí, utilizando a Proposição 1.2.23, podemos escrever

$$0 = \theta(E_t(a)) = \theta((id \otimes \varphi_t)\delta(a)) = \varphi_t((\theta \otimes id)\delta(a)), \quad \forall t \in G, a \in A.$$

Em seguida, pela Proposição 4.2.4, conluímos que $(\theta \otimes id)\delta(a) = 0$

para todo $a \in A$, ou seja, $(\theta \otimes id)\delta(A) = \{0\}$. Isso mostra também que $(\theta \otimes id)(\delta(A)(1 \otimes C_r^*(G))) = \{0\}$. Finalmente, como δ é coação contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \{0\} &= \overline{\text{span}}(\theta \otimes id)(\delta(A)(1 \otimes C_r^*(G))) \\ &\supseteq (\theta \otimes id)(\overline{\text{span}}\delta(A)(1 \otimes C_r^*(G))) \\ &= (\theta \otimes id)(A \otimes C_r^*(G)) = \theta(A)C_r^*(G). \end{aligned}$$

Portanto $\theta = 0$. Por um teorema conhecido de Hahn-Banach (ver [29, Exercicio 1.5.3, item (ii), p. 19]), segue que A_0 é denso em A.

□

Corolário 4.2.6. *Seja $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ uma coação contínua e ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ o fibrado de Fell associado (ver a Proposição 4.2.1). Então, o $*$-homomorfismo*

$$\sigma^A : C^*({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow A,$$

que nos elementos da base é dado por $\sigma^A(a_t) = a_t$, $a_t \in A_t$, $t \in G$, é sobrejetivo.

Prova. De fato, se δ é uma coação contínua, o Teorema 4.2.5 implica que $A = \overline{\bigoplus_{t\in G} A_t}$. Assim, dado $a \in A$, podemos escrever $a = \lim_i \sum_{t_i\in G} a_{ti}$, em que, para cada índice i pertencente a algum conjunto dirigido I, a soma $\sum_{t_i\in G} a_{ti}$ é finita. Daí, tomando $b = \lim_i \sum_{t_i\in G} a_{ti} \in C^*({}_\delta\mathcal{A})$ (lembre da identificação 2.1.15), concluímos, por linearidade e continuidade, que $\sigma^A(b) = a$.

□

Observação 4.2.7. Sejam A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ uma coação contínua e injetiva. A partir de agora, voltaremos as atenções para dois resultados importantes, úteis para a construção de um $*$-isomorfismo $\sigma_r^A : C_r^*({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow A$, que dependerá do $*$-homomorfismo σ^A do Corolário 4.2.6 e que, mais tarde, se revelará um dos isomorfismos naturais necessários para provarmos a equivalência entre a categoria das coações contínuas e injetivas de $C_r^*(G)$ e a categoria dos fibrados de Fell sobre G. Justamente quando δ for uma coação contínua e injetiva, σ_r^A será um $*$-isomorfismo.

Com este intento, será particularmente importante a projeção $E_e = (id \otimes \varphi) \circ \delta$ de A sobre A_e, conforme a Equação 4.1 para $t = e$. Denotá-la-emos por E_e^A.

Proposição 4.2.8. *Se A é uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ é uma coação injetiva, então a aplicação linear e contínua $E_e^A = (id \otimes \varphi) \circ \delta$ é fiel, isto é, $E_e^A(a^*a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$, $a \in A$.*

Prova. Se $0 = a \in A$ então $E_e^A(a^*a) = 0$. Suponha que $E_e^A(a^*a) = 0$, $0 \neq a \in A$. Então $A \ni (id \otimes \varphi)\delta(a^*a) = 0$.

Por conseguinte, dado um funcional positivo $\theta \in A_+^*$, a Observação 1.2.23 nos permite dizer que

$$\theta((id \otimes \varphi)\delta(a^*a)) = (\theta \otimes \varphi)(\delta(a^*a)) = \varphi((\theta \otimes id)\delta(a^*a)) = 0$$

e

$$(\theta \otimes id)\delta(a^*a) \geq 0.$$

Como para todo $0 \leq y = x^*x \in C_r^*(G)$, tem-se

$$\varphi(y) = \varphi(x^*x) = \langle \delta_e, x^*x\delta_e \rangle = \langle x\delta_e, x\delta_e \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0,$$

tomando $y = (\theta \otimes id)\delta(a^*a)$, segue que $\varphi((\theta \otimes id)(\delta(a^*a))) = 0$, donde $(\theta \otimes id)(\delta(a^*a))$. Assim, devido à arbitrariedade de θ, a Proposição 1.2.24 nos diz que $\delta(a)^*\delta(a) = 0$. Como δ é injetiva, $a = 0$. Portanto E_e^A é fiel.

$\square$

Lema 4.2.9. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ uma coação injetiva. Considere $\sigma^A : C^*({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow A$ o $*$-homomorfismo do Corolário 4.2.6 e $\Lambda : C^*({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow C_r^*({}_\delta\mathcal{A})$ o $*$-homomorfismo sobrejetivo da construção da C^*-álgebra reduzida (ver Observação 2.1.28). Então,* $\ker(\Lambda) = \ker(\sigma^A)$.

Prova. Com vistas na Proposição 4.2.1, sabemos que a família ${}_\delta\mathcal{A} =$

$\{A_t\}_{t\in G}$ é um fibrado de Fell sobre G. Pelo Teorema 4.1.8, existe uma coação contínua e injetiva $\delta^r_{_\delta\mathcal{A}} : C^*_r({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow C^*_r({}_\delta\mathcal{A}) \otimes C^*_r(G)$. Além disso, pela Proposição 4.2.8, sabemos que $E_e^{C^*_r({}_\delta\mathcal{A})} = (id\otimes\varphi)\circ\delta^r_{_\delta\mathcal{A}}$ e $E_e^A = (id\otimes\varphi)\circ\delta$ são fiéis. Daí, por um lado, para cada $x \in C^*({}_\delta\mathcal{A})$,

$$\Lambda(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Lambda(x)^*\Lambda(x) = 0 \Leftrightarrow E_e^{C^*_r({}_\delta\mathcal{A})}(\Lambda(x^*x)) = 0 \tag{4.3}$$

e

$$\sigma^A(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma^A(x)^*\sigma^A(x) = 0 \Leftrightarrow E_e^A(\sigma^A(x^*x)) = 0. \tag{4.4}$$

Por outro lado, para qualquer $a_t \in A_t$, $t\in G$,

$$\begin{aligned}
& E_e^{C^*_r({}_\delta\mathcal{A})}(\Lambda(a_t)) = (id\otimes\varphi)\circ\delta^r_{_\delta\mathcal{A}}(\Lambda(a_t)) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & (id\otimes\varphi)(\Lambda(a_t)\otimes\lambda_t) = \Lambda(a_t)\varphi(\lambda_t) = 0\\
\Leftrightarrow^2\quad & a_t\varphi(\lambda_t) = 0\\
\Leftrightarrow^3\quad & \sigma(a_t)\varphi(\lambda_t) = (id\otimes\varphi)(\sigma^A(a_t)\otimes\lambda_t) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & (id\otimes\varphi)\delta(\sigma^A(a_t)) = E_e^A(\sigma^A(a_t)) = 0.
\end{aligned}$$

Na segunda e na terceira duplas-implicações acima utilizamos, respectivamente, os fatos de $\Lambda|_{A_t}$ e $\sigma^A|_{A_t}$ serem injetivas. Assim, por argumentos de linearidade e continuidade, segue que $E_e^{C^*_r({}_\delta\mathcal{A})}(\Lambda(x^*x)) = 0 \Leftrightarrow E_e^A(\sigma^A(x^*x)) = 0$, para todo $x\in C^*({}_\delta\mathcal{A})$. Portanto, das Equações 4.3 e 4.4, concluímos que $\Lambda(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma^A(x) = 0$, $x \in C^*({}_\delta\mathcal{A})$.

□

Teorema 4.2.10. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A\otimes C^*_r(G)$ uma coação contínua e injetiva e ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ o fibrado de Fell associado dado pela Proposição 4.2.1. Considere $\sigma^A : C^*({}_\delta\mathcal{A}) \longrightarrow A$ o $*$-homomorfismo do Corolário 4.2.6. Então*

$$\begin{aligned}
\sigma_r^A : C^*_r({}_\delta\mathcal{A}) &\longrightarrow A\\
\Lambda(x) &\mapsto \sigma^A(x)
\end{aligned}$$

é um isomorfismo de C^*-álgebras.

Prova. *A boa definição como função e a injetividade de σ_r^A seguem imediatamente do Lema 4.2.9. Como σ^A é $*$-homomorfismo sobrejetor, então σ_r^A é $*$-homomorfismo sobrejetor, e portanto um $*$-isomorfismo.* $\square$

Exemplo 4.2.11. *Considerando a coação $\delta : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \otimes C_r^*(\mathbb{Z})$ e o fibrado ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_{-1}, A_0, A_1\}$ a ela associado, conforme o exemplo discutido no início desta seção, pelo teorema acima temos que $C_r^*({}_\delta\mathcal{A}) \cong M_2(\mathbb{C})$.*

Exemplo 4.2.12. *Seja G um grupo discreto, $A = K(l_2(G))$ a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre $l_2(G)$ e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$ a coação contínua e injetiva definida por $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$, conforme o Exemplo 3.2.7.*

Por construção, o fibrado ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G}$ é dado por $A_t = \{a \in A : \delta(a) = a \otimes \lambda_t\}$. Então, pela Equação 3.3, sabemos que $M(C_0(G))\lambda_t \subseteq A_t$ para todo $t \in G$, em que $M : C_0(G) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ é o $*$-homomorfismo multiplicação e $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ a representação regular à esquerda de G. Para ver que $A_t \subseteq M(C_0(G))\lambda_t$, relembre que $A_t = E_t(A)$, em que $E_t = (id \otimes \varphi_t) \circ \delta$, $\varphi_t = \varphi(\lambda_{t^{-1}})$ e φ é o estado de Haar de $C_r^*(G)$ (ver Observação 4.2.2). Como $\varphi_t(\lambda_s) = \delta_{t,s}$, temos que

$$\begin{aligned} E_t(M_f\lambda_s) &= (id \otimes \varphi_t)\delta(M_f\lambda_s) \\ &= (id \otimes \varphi_t)(M_f\lambda_s \otimes \lambda_s) \\ &= M_f\lambda_s\delta_{t,s} = M_f\lambda_t\delta_{t,s} \end{aligned}$$

para todo $f \in C_0(G)$ e $s, t \in G$. Disso, segue que $A_t \subseteq M(C_0(G))\lambda_t$. Consequentemente,

$$A_t = M(C_0(G))\lambda_t, \quad t \in G.$$

Desde que δ é coação contínua e injetiva, pelo Teorema 4.2.10, concluímos que

$$C_r^*({}_\delta\mathcal{A}) \cong K(l_2(G)). \tag{4.5}$$

Considere, agora, o fibrado de Fell produto semidireto de $C_0(G) \times_\alpha$

G pela translação à esquerda $\alpha : G \longrightarrow \mathbf{Aut}(C_0(G))$ definida por $\alpha_s(f)|_t := f(s^{-1}t)$ (ver a definição de fibrado produto semidireto no Exemplo 2.1.6). Podemos ainda mostrar que o fibrado ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ mencionado acima é isomorfo à $C_0(G)\times_\alpha G$, no sentido de que a família de funções contínuas $\{\pi_t\}_{t\in G}$, definidas por

$$\pi_t : (C_0(G) \times_\alpha G)_t \ni (f,t) \longmapsto M_f\lambda_t \in A_t,$$

são bijeções que preservam a estrutura de fibrado de Fell, ou seja, para todo $s,t \in G$ e $f,g \in C_0(G)$, valem as relações

(i) $\pi_s((f,s))\pi_t((g,t)) = \pi_{st}((f,s)(g,t))$;

(ii) $\pi_{s^{-1}}((f,s)^*) = \pi_s((f,s))^*$.

Note, primeiro, que para todo $f \in c_0(G)$ e $s,t,r \in G$, tem-se

$$\begin{aligned}(\lambda_s M_f)(\delta_t)|_r &= M_f(\delta_t)|_{s^{-1}r}\\ &= f(s^{-1}r)\delta_t(s^{-1}r)\\ &= (M_{\alpha_s(f)}\lambda_s)(\delta_t)|_r,\end{aligned}$$

de modo que $\lambda_s M_f = M_{\alpha_s(f)}\lambda_s$. Assim, também temos que $(M_f\lambda_s)^* = M_{\alpha_{s^{-1}}(f^*)}\lambda_{s^{-1}}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\pi_s((f,s))\pi_t((g,t)) &= (M_f\lambda_s)(M_g\lambda_t)\\ &= M_f M_{\alpha_s(g)}\lambda_s\lambda_t\\ &= \pi_{st}(f\alpha_s(g), st)\\ &= \pi_{st}((f,s)(g,t))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_{s^{-1}}((f,s)^*) &= \pi_{s^{-1}}(\alpha_{s^{-1}}(f^*), s^{-1})\\ &= M_{\alpha_{s^{-1}}(f^*)}\lambda_{s^{-1}}\\ &= (M_f\lambda_s)^*\\ &= \pi_s((f,s))^*.\end{aligned}$$

Para cada $t \in G$, a injetividade de π_t segue da injetividade de M e λ; a sobrejetividade π_t segue do fato de $A_t = M(C_0(G))\lambda_t$.

Portanto, pela Equação 4.5, obtemos o isomorfismo

$$C_r^*(C_0(G) \times_\alpha G) \cong K(l_2(G)).$$

Observação 4.2.13. Seja α uma ação fortemente contínua de um grupo G sobre uma C^*-álgebra A. O exemplo acima discutido é interessante por se aproximar da teoria de produtos cruzados, uma vez que é possível definir o produto cruzado cheio $A \rtimes_\alpha G$ como sendo C^*-álgebra $C^*(A \times_\alpha G)$, bem como o produto cruzado reduzido $A \rtimes_{\alpha,r} G$ como sendo a C^*-álgebra $C_r^*(A \times_\alpha G)$.

Mostramos que $C_0(G) \rtimes_{\alpha,r} G \cong K(l_2(G))$. É possível mostrar também que $C_0(G) \rtimes_\alpha G$ é isomorfo a $K(l_2(G))$ (em outras palavras, que o fibrado $C_0(G) \times_\alpha G$ é amenable), mas isso não é trivial: precisa-se mostrar que $C_0(G) \rtimes_\alpha G$ é simples. Além disso, o isomorfismo $C_0(G) \rtimes_\alpha G \cong K(l_2(G))$ é válido para grupos localmente compactos; este resultado é chamado de Teorema de Stone-Von Neumann (ver [32, Teorema 4.24])

Exemplo 4.2.14. *Sejam G um grupo discreto e $X \subseteq G$ um subconjunto qualquer. Considere $B = K(l_2(X))$ a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre $l_2(X)$ e $\delta_X : B \longrightarrow B \otimes C_r^*(G)$ a coação contínua e injetiva definida por $\delta_X(x) = W(x \otimes 1)W^*$, conforme o Exemplo 3.2.8. Pelos mesmos argumentos utilizados no Exemplo 4.2.12 para mostrar que o fibrado ${}_\delta\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}$ é tal que $A_t = M(C_0(G))\lambda_t$ para todo $t \in G$, mostra-se que o fibrado ${}_{\delta_X}\mathcal{A} = \{A_t^X\}_{t\in G}$ associado a coação δ_X é dado por*

$$A_t^X = M(\mathcal{I}_t)\lambda_t, \qquad t \in G,$$

em que $\mathcal{I}_t = C_0(X) \cdot \alpha_t(C_0(X))$, $M : C_0(G) \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(G))$ é a representação multiplicação e $\alpha : G \longrightarrow \mathbf{Aut}(C_0(G))$ é a ação definida por $\alpha_s(f)|_t = f(s^{-1}t)$. Pelo Teorema 4.2.10, temos que $C_r^*({}_{\delta_X}\mathcal{A}) \cong B = K(l_2(X))$.

Observação 4.2.15. No exemplo acima, não é difícil mostrar que $\mathcal{I}_t$ é um ideal fechado de $C_0(X)$. Pode-se mostrar que o fibrado de Fell

${}_{\delta_X}\mathcal{A}$ é isomorfo ao fibrado de Fell produto semidireto $C_0(X) \times_{\alpha_X} G$, em que α_X denota a ação parcial que é a "restrição" da ação (global) α ao ideal $C_0(X) \subseteq C_0(G)$.

Uma ação parcial de G em uma C^*-álgebra D consiste numa família de ideais $D_t \subseteq D$ e uma família de $*$-isomorfismos $\gamma_t : D_{t^{-1}} \longrightarrow D_t$ tais que

(i) $D_e = D$ e $\gamma_e = id_D$;

(ii) $\gamma_s(D_s^{-1} \cap D_t) = D_s \cap D_{st}$ para todo $s, t \in G$; e

(iii) $(\gamma_s \circ \gamma_t)(a) = \gamma_{st}(a)$ para todo $s, t \in G$ e $a \in D_t^{-1} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}$.

Este é um caso particular de ação parcial torcida definida por Exel em [7]. Dada uma ação parcial (torcida) γ de G em D, também pode-se construir um fibrado de Fell produto semidireto $D \times_\gamma G$ de maneira similar ao para ação (ver [7, Definição 2.8] para detalhes).

4.3 Equivalência entre categorias

Até este momento, ficou evidente a interrelação entre coações de $C_r^*(G)$ e fibrados de Fell sobre G e, caso G seja abeliano, a ações de $\widehat{G}$. Neste seção, formalizaremos estas correspondências apresentando uma equivalência entre a categoria das coações contínuas e injetivas do grupo quântico compacto $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras, cujos morfismos são isomorfismos de C^*-álgebras que comutam certos diagramas, e a categoria dos fibrados de Fell sobre grupos, cujos morfismos são famílias de funções lineares contínuas entre as fibras e que preservam a estrutura do fibrado. No caso em que o grupo é abeliano, veremos que a categorias das coações de $C_r^*(G)$ em C^*-álgebras é equivalente à categoria das ações fortemente contínuas do dual de Pontryagin $\widehat{G}$ em C^*-álgebras.

Definição 4.3.1. Uma ***categoria*** $\mathcal{C}$ consiste nos seguintes elementos:

(i) Uma classe de objetos de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

(ii) Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, uma classe de morfismos $f : A \to B$, denotada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(iii) Para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, um morfismo identidade $id_A \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$.

(iv) Uma operação de composição que associa a cada par de morfismos $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ um morfismo $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(iv.1) Quaisquer três morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ são tais que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(iv.2) Para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, o morfismo identidade $id_A : A \to A$ é tal que para todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tem-se $f \circ id_A = f$ e para todo morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tem-se $id_A \circ g = g$.

Exemplo 4.3.2. *Seja G um grupo discreto. Considere a classe* $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *dos pares (A, δ), em que A é uma C^*-álgebra e $\delta : A \longrightarrow A \otimes C^*(G)$ é uma coação contínua e injetiva. Para cada par (A, δ), $(B, \gamma) \in$* $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *considere a classe* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (B, \gamma))$ *dos $*$-homomorfismos $f : A \longrightarrow B$ tais que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes C^*(G) \arrow[d, "f \otimes id"] \\
B \arrow[r, "\gamma"] & B \otimes C^*_r(G).
\end{tikzcd}$$

*Então $\mathfrak{C}$ é um categoria, chamada **categoria das coações contínuas e injetivas** de $C^*_r(G)$. Dado $(A, \delta) \in$* $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$*, o $*$-homomorfismo $id_A : A \longrightarrow A$ é o morfismo identidade em* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (A, \delta))$*. Dados $f \in$* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (B, \gamma))$ *e $g \in$* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((B, \gamma), (C, \theta))$ *é fácil ver que a composição de $*$-homomorfismos $g \circ f : A \longrightarrow C$ é tal que $g \circ f \in$* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (C, \theta))$*. As outras propriedades também são facilmente verificadas. No caso de o grupo G ser abeliano, a Proposição 3.1.9 nos diz que os grupos quânticos $C^*_r(G)$ e $C(\widehat{G})$ são isomorfos. Por conta disso, definimos a **categoria das coações contínuas e injetivas** de $C(\widehat{G}$ com a mesma estrutura da categoria $\mathfrak{C}$, trocando-se $C^*_r(G)$ por $C(\widehat{G})$.*

Exemplo 4.3.3. *Seja G um grupo discreto. Considere a classe $\mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$ dos fibrados de Fell sobre G. Para cada par de fibrados $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t\in G}, \mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$, considere a classe $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dos morfismos $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, em que $\pi = \{\pi_t\}_{t\in G}$ e $\pi_t : A_t \longrightarrow B_t$ é uma função linear contínua satisfazendo:*

(i) $\pi_{st}(a_s a_t) = \pi_s(a_s)\pi_t(a_t)$ para todo $a_s \in A_s$, $a_t \in A_t$ e $s, t \in G$;

(ii) $\pi_t(a_t)^* = \pi_{t^{-1}}(a_t^*)$ para todo $t \in A_t$ e $t \in G$.

*Então $\mathfrak{B}$ é uma categoria, chamada **categoria dos fibrados de Fell** sobre G. Dado $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$, o morfismo identidade em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ é dado por $id_{\mathcal{B}} = \{id_{B_t}\}_{t\in G}$, em que $id_{B_t} : B_t \longrightarrow B_t$ é a identidade, para cada $t \in G$. Dados $\pi = \{\pi_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\pi' = \{\pi'_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, claramente $\pi' \circ \pi = \{\pi'_t \circ \pi_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. As outras propriedades são facilmente verificadas.*

Exemplo 4.3.4. *Seja G um grupo discreto abeliano. Considere a classe $\mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$ dos pares (A, α) em que A é uma C^*-álgebra e $\alpha : \widehat{G} \longrightarrow$ $\mathbf{Aut}(A)$ é uma ação fortemente contínua. Para cada par de objetos $(A, \alpha), (B, \beta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$, considere a classe $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha), (B, \beta))$ dos $*$-homomorfismos $f : A \longrightarrow B$ que comutam, para todo $\chi \in \widehat{G}$, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_\chi"'] & B \arrow[d, "\beta_\chi"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

*Então, $\mathfrak{D}$ é uma categoria, chamada de **categoria das ações fortemente contínuas** de $\widehat{G}$. Dado $(A, \alpha) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$, o homomorfismo identidade em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha), (A, \alpha))$ é simplesmente o homomorfismo identidade $id : A \longrightarrow A$ e a composição de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha), (B, \beta))$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((B, \beta), (C, \theta))$ é o homomorfismo composição $g \circ f : A \longrightarrow C$.*

Definição 4.3.5. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um ***funtor covariante*** F entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma aplicação $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que a cada objeto $A \in$

$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ associa um objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ associa um morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$, satisfazendo:

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

(ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, para quaisquer morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ com $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exemplo 4.3.6. *Sejam G um grupo discreto abeliano, $\mathfrak{C}$ a categoria das coações injetivas de $C_r^*(G)$ e $\mathfrak{F}$ a categoria das coações contínuas e injetivas de $C(\widehat{G})$ (ver Exemplo 4.3.2). Pela Proposição 3.1.9, $\phi\lambda^{-1} : C_r^*(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ é um isomorfismo de grupos quânticos, de modo que coações contínuas e injetivas de $C_r^*(G)$ correpondem bijetivamente a coações contínuas e injetivas de $C(\widehat{G})$ (Proposição 3.2.3). Para cada coação $\delta : A \longrightarrow A \otimes C_r^*(G)$, seja $\widetilde{\delta} : A \longrightarrow A \otimes C(\widehat{G})$ a coação correspondente. Assim, podemos definir*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \ni (A, \delta) &\longmapsto (A, \widetilde{\delta}) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (B, \gamma)) \ni f &\longmapsto f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \widetilde{\delta}), (B, \widetilde{\gamma})) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathfrak{C} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{F}) \ni (A, \widetilde{\delta}) &\longmapsto (A, \delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \widetilde{\delta}), (B, \widetilde{\gamma})) \ni f &\longmapsto f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (B, \gamma)), \end{aligned}$$

são funtores covariantes. Isto segue do fato de $C_r^*(G)$ ser isomorfo a $C(\widehat{G})$.

Exemplo 4.3.7. *Sejam $\mathfrak{C}$ a categoria das coações contínuas e injetivas do grupo quântico $C_r^*(G)$ e $\mathfrak{B}$ a categoria dos fibrados de Fell sobre G,* *conforme os Exemplos 4.3.2 e 4.3.3. Defina*

$$\begin{array}{rcl} F:\mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \ni (A,\delta) & \longmapsto & {}_\delta\mathcal{A} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A,\delta),(B,\gamma)) \ni f & \longmapsto & F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}({}_\delta\mathcal{A}, {}_\gamma\mathcal{B}), \end{array}$$

em que, para todo $(A,\delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, ${}_\delta\mathcal{A}$ *é o fibrado dado pela Proposição 4.2.1, e* $F(f) = \{f|_{A_t}\}_{t\in G}$ *para todo* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *e* $A,B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$. *Também defina*

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}:\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{B}) \ni \mathcal{A} & \longmapsto & (C^*_r(\mathcal{A}), \delta^r_{\mathcal{A}}) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \ni \pi & \longmapsto & F^{-1}(\pi) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((C^*_r(\mathcal{A}), \delta^r_{\mathcal{A}}), (C^*_r(\mathcal{B}), \delta^r_{\mathcal{B}})), \end{array}$$

em que, para todo $\mathcal{A} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$, $\delta^r_{\mathcal{A}}$ *é a coação contínua e injetiva dada pelo Teorema 4.1.8, e* $F^{-1}(\pi) : C^*_r(\mathcal{A}) \longrightarrow C^*_r(\mathcal{B})$ *é definido nos elementos da base por* $F^{-1}(\pi)(\Lambda(a_t)) = \Lambda(\pi_t(a_t))$.

Vamos mostrar que F *e* F^{-1} *são funtores covariantes.*

Sejam $(A,\delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *e* $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A,\delta),(A,\delta))$. *Por definição* $id_{F((A,\delta))} = \{id_{A_t}\}_{t\in G}$, *mas* $id_{A_t} = id_A|_{A_t}$ *para todo* $t \in G$, *então*

$$F(id_A) = \{id_A|_{A_t}\}_{t\in G} = \{id_{A_t}\} = id_{F(A)}.$$

Além disso, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A,\delta),(B,\gamma))$ *e* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((B,\gamma),(C,\theta))$ *então, por definição,* $F(g)\circ F(f) = \{g|_{B_t} \circ f|_{A_t}\}_{t\in G}$. *Mas* $f(A_t) \subseteq B_t$ *para todo* $t \in G$, *pois*

$$a_t \in A_t \Rightarrow \gamma(f(a_t)) = (f\otimes id)\delta(a_t) = (f\otimes id)(a_t\otimes\lambda_t) = f(a_t)\otimes\lambda_t.$$

Logo, $(g\circ f)|_{A_t} = g(f|_{A_t}) = g|_{B_t}\circ f|_{A_t}$ *para todo* $t \in G$. *Segue que*

$$F(g\circ f) = \{(g\circ f)|_{A_t}\}_{t\in G} = \{g|_{B_t}\circ f|_{A_t}\}_{t\in g} = F(f)\circ F(f).$$

Portanto, F *é um funtor covariante.*

Seja $\mathcal{A} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$ *e* $id_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$. *Por definição,* $id_{F^{-1}(\mathcal{A})} =$

$id_{C^*_r(\mathcal{A})}$. *Mas* $F^{-1}(id_{\mathcal{A}}) : C^*_r(\mathcal{A}) \longrightarrow C^*_r(\mathcal{A})$ *é tal que*

$$F^{-1}(id_{\mathcal{A}})(\Lambda(a_t)) = \Lambda(id_{A_t}(a_t)) = \Lambda(a_t),$$

para todo $a_t \in A_t$, $t \in G$. *Ou seja,* $F^{-1}(id_{\mathcal{A}}) = id_{F^{-1}(\mathcal{A})}$.

Agora, dados $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *e* $\pi' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, *como* $(\pi' \circ \pi)_t = \pi'_t \circ \pi_t$ *para todo* $t \in G$, *segue que*

$$\begin{aligned} F^{-1}(\pi' \circ \pi)(\Lambda(a_t)) &= \Lambda((\pi' \circ \pi)_t(a_t)) = \Lambda((\pi'_t \circ \pi_t)(a_t)) \\ &= \Lambda(\pi'_t(\pi_t(a_t))) = F^{-1}(\pi')(\Lambda(\pi_t(a_t))) \\ &= F^{-1}(\pi')(F^{-1}(\pi)(\Lambda(a_t))) \\ &= (F^{-1}(\pi') \circ F^{-1}(\pi))(\Lambda(a_t)) \end{aligned}$$

para todo $a_t \in A_t$ *e* $t \in G$. *Portanto* F^{-1} *é um funtor covariante.*

Exemplo 4.3.8. *Sejam* $\mathfrak{F}$ *a categoria das coações contínuas e injetivas de* $C(\widehat{G})$ *e* $\mathfrak{D}$ *a categoria das ações fortemente contínuas de* $\widehat{G}$. *Pelo Corolário 3.2.10 e pelo Teorema 3.2.12, sabemos que coações contínuas e injetivas de* $C(\widehat{G})$ *correspondem bijetivamente a ações fortemente contínuas de* $\widehat{G}$. *Defina, então*

$$\begin{aligned} J : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{F}) \ni (A, \delta) &\longmapsto (A, \alpha_\delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{D}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \delta), (B, \gamma)) \ni f &\longmapsto f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha_\delta), (B, \alpha_\gamma)), \end{aligned}$$

em que $\alpha_\delta : \widehat{G} \longrightarrow \mathbf{Aut}(A)$ *é a ação fortemente contínua dada por* $\alpha_{\delta_\chi} = (id \otimes e_{v\chi})\delta$, $\chi \in \widehat{G}$ *(ver Corolário 3.2.10). Defina também,*

$$\begin{aligned} J^{-1} : \mathfrak{D} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ \mathrm{Obj}(\mathfrak{D}) \ni (A, \alpha) &\longmapsto (A, \delta_\alpha) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha), (B, \beta)) \ni f &\longmapsto f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \delta_\alpha), (B, \delta_\beta)), \end{aligned}$$

em que $\delta_\alpha : A \longrightarrow A \otimes C(\widehat{G}) \cong C(\widehat{G}, A)$ *é a coação contínua e injetiva dada por* $\delta_\alpha(a)|_\chi = \alpha_\chi(a)$, $\chi \in \widehat{G}$ *e* $a \in A$ *(ver Teorema 3.2.12).*

Vejamos que J *e* J^{-1} *são funtores covariantes.*

Dados $(A,\delta),(B,\gamma) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F})$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A,\delta),(B,\gamma))$, sabemos que $(f \otimes id)\delta = \gamma \circ f$. Então, para todo $\chi \in \widehat{G}$ e $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\delta_\chi}(a)) &= f((id \otimes e_{v_\chi})(\delta(a))) = f(\delta(a)(\chi)) \\ &= (f \otimes id)(\delta(a))|_\chi = \gamma(f(a)) = (id \otimes e_{v_\chi})(\gamma(f(a))) \\ &= \alpha_{\gamma_\chi}(f(a)). \end{aligned}$$

Isto mostra que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A,\alpha_\delta),(B,\alpha_\gamma))$. Além disso, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A,\delta),(B,\gamma))$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((B,\gamma),(C,\theta))$, então por definição $J(id_{(A,\delta)}) = J(id_A) = id_A = id_{(A,\alpha_\delta)} = id_{J(A,\delta)}$ e $J(g \circ f) = g \circ f = J(g) \circ J(f)$. Portanto J é um funtor covariante.

Similarmente, mostra-se que J^{-1} é um funtor covariante, apenas observamos que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A,\alpha),(B,\beta))$, $\chi \in \widehat{G}$ e $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} (f \otimes id)(\delta_\alpha(a))|_\chi &= f(\delta_\alpha(a)(\chi)) = f(\alpha_\chi(a)) \\ &= \beta_\chi(f(a)) = \delta_\beta(f(a))|_\chi, \end{aligned}$$

ou seja, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A,\delta_\alpha),(B,\delta_\beta))$.

Definição 4.3.9. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores covariantes. Uma ***transformação natural*** entre F e G é uma aplicação η, denota por $\eta : F \to G$, que associa a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ um morfismo $\eta_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$, tal que para todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tem-se $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B). \end{tikzcd}$$

Se, para todo A, η_A for isomorfismo em $\mathcal{D}$ então η é chamado **isomorfismo natural**.

Exemplo 4.3.10. *Sejam $\mathfrak{D}$ a categoria das ações fortemente contínuas de $\widehat{G}$ e $\mathfrak{F}$ a categoria das coações contínuas e injetivas de $C(\widehat{G})$ conforme os Exemplos 4.3.4 e 4.3.2, respectivamente. Considere os funtores covariantes $J : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{D}$ e $J^{-1} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{F}$ do Exemplo 4.3.8. Para cada objeto $(A, \delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F})$, observe que o $*$-isomorfismo $id_A : A \longrightarrow A$ pertence a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \delta_{\alpha_\delta}), (A, \delta))$, pois para todo $\chi \in \widehat{G}$ e $a \in A$, temos que*

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha_\delta}(id_A(a))|_\chi &= \alpha_{\delta_\chi}(a) = (id \otimes e_{v_\chi})\delta(a) \\ &= \delta(a)(\chi) = (id_A \otimes id)(\delta(a))|_\chi. \end{aligned}$$

Além disso, para todo $(A, \delta), (B, \gamma) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F})$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}((A, \delta), (B, \gamma))$ e $a \in A$, temos que $id_B((J^{-1} \circ J)(f))(a) = f(a) = (id_{\mathfrak{F}}(f) \circ id_A)(a)$. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} (A, \delta_{\alpha_\delta}) \arrow[r, "(J^{-1} \circ J)(f)"] \arrow[d, "id_A"'] & (B, \gamma_{\alpha_\gamma}) \arrow[d, "id_B"] \\ (A, \delta) \arrow[r, "id_{\mathfrak{F}}(f)"] & (B, \gamma). \end{tikzcd}$$

Logo, $\eta : J^{-1} \circ J \longrightarrow id_{\mathfrak{F}}$, dado por $\eta((A, \delta)) = id_A$ é um isomorfismo natural.

Analogamente, mostra-se que $\varepsilon : id_{\mathfrak{D}} \longrightarrow J \circ J^{-1}$, em que $\varepsilon((A, \alpha)) = id_A$ é um isomorfismo natural. É suficiente observamos que $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}((A, \alpha_{\delta_\delta}), (A, \alpha))$, pois para todo $a \in A$ e $\chi \in \widehat{G}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta_{\alpha\chi}}(id_A(a)) &= (id \otimes e_{v_\chi})\delta_\alpha(a) = (\delta_\alpha(a))(\chi) \\ &= \alpha_\chi(a) = id_A(\alpha_\chi(a)). \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.11. *Sejam $\mathfrak{C}$ a categoria das coações contínuas e injetivas de $C_r^*(G)$ e $\mathfrak{B}$ a categoria dos fibrados de Fell sobre G, conforme os Exemplos 4.3.2 e 4.3.3. Considere ainda os funtores $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ e $F^{-1} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ do Exemplo 4.3.7.*

Note que para todo $\mathcal{A} = \{A_t\}_{t \in G} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$, $F^{-1}(\mathcal{A}) = (C_r^*(\mathcal{A}), \delta_{\mathcal{A}}^r)$, *de modo que*

$$F(F^{-1}(\mathcal{A})) = F((C_r^*(\mathcal{A}), \delta_{\mathcal{A}}^r)) = {}_{\delta_{\mathcal{A}}^r}\mathcal{A} = \{A'_t\}_{t\in G},$$

em que $A'_t = \{a \in C_r^*(\mathcal{A}) : \delta_{\mathcal{A}}^r(a) = a \otimes \lambda_t\}$. *E como* $\delta_{\mathcal{A}}^r(\Lambda(a_t)) = \Lambda(a_t) \otimes \lambda_t$ *para todo* $a_t \in A_t$, $t \in G$, *está bem definida a família de funções* $\pi_{\mathcal{A}} = \{\pi_t^{\mathcal{A}}\}_{t\in G}$, *em que*

$$\pi_t^{\mathcal{A}} : A_t \ni a_t \longmapsto \Lambda(a_t) \in A'_t.$$

Além disso, temos que:

1. *Pela Observação 2.1.29, sabemos que* $\|\Lambda(a_t)\| = \|a_t\|$ *para todo* $a_t \in A_t$. *Ou seja,* $\Lambda|_{A_t}$ *é isométrica, portanto injetiva. Daí* $\pi_t^{\mathcal{A}}$ *é isométrica, e consequentemente injetiva, para todo* $t \in G$. *E dado* $a'_t \in A'_t \subseteq C_r^*(\mathcal{A})$, *existe* $a_s \in C^*(\mathcal{A})$ *tal que* $\Lambda(a_s) = a'_t$. *Mas então* $\Lambda(a_s) \otimes \lambda_s = \delta_{\mathcal{A}}^r(\Lambda(a_s)) = \delta_{\mathcal{A}}^r(a'_t) = a'_t \otimes \lambda_t$, *donde* $\lambda_t = \lambda_s$, *o que implica* $s = t$. *Assim,* $\pi_t^{\mathcal{A}}$ *é sobrejetiva para todo* $t \in G$.

2. *Como* $\Lambda : C^*(\mathcal{A}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{A})$ *é* $*$*-homomorfismo, segue que* $\pi_{ts}^{\mathcal{A}}(a_t a_s) = \pi_t^{\mathcal{A}}(a_t)\pi_s^{\mathcal{A}}(a_s)$ *e* $\pi_{t^{-1}}^{\mathcal{A}}(a_t^*) = \pi_t^{\mathcal{A}}(a_t)^*$ *para todo* $a_s \in A_s, a_t \in A_t$ *e* $s, t \in G$.

Dos itens 1 *e* 2 *acima, segue que* $\pi_{\mathcal{A}}$ *é um isomorfismo entre os fibrados* $\mathcal{A}$ *e* ${}_{\delta_{\mathcal{A}}^r}\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B} \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$ *e* $f = \{f_t\}_{t\in G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. *Escolhendo* $\eta_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{A}}^{-1} = \{\pi_t^{\mathcal{A}-1}\}_{t\in G}$ *e* $\eta_{\mathcal{B}} = \pi_{\mathcal{B}}^{-1} = \{\pi_t^{\mathcal{B}-1}\}_{t\in G}$, *vejamos que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
{}_{\delta_{\mathcal{A}}^r}\mathcal{A} \arrow[r, "(F\circ F^{-1})(f)"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{A}}"'] & {}_{\delta_{\mathcal{B}}^r}\mathcal{B} \arrow[d, "\eta_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "I_{\mathfrak{B}}(f)"] & \mathcal{B}.
\end{tikzcd}$$

Mas como $F(F^{-1}(f)) = \{F^{-1}(f)|_{A'_t}\}_{t\in G}$, *para todo* $\Lambda(a_t) = a'_t \in A'_t$ *e*

$t \in G$, temos que

$$\begin{aligned}(\pi_t^{\mathcal{B}-1} \circ F^{-1}(f)|_{A'_t})(a'_t) &= \pi_t^{\mathcal{B}-1}(F^{-1}(f)(a'_t)) = \pi_t^{\mathcal{B}-1}(F^{-1}(f)(\Lambda(a_t))) \\ &= \pi_t^{\mathcal{B}-1}(\Lambda(f_t(a_t))) = f_t(a_t) = f_t(\pi_t^{\mathcal{A}-1}(\Lambda(a_t))) \\ &= (f_t \circ \pi_t^{\mathcal{A}-1})(a'_t).\end{aligned}$$

Ou seja, $\eta_{\mathcal{B}} \circ (F \circ F^{-1})(f) = f \circ \eta_{\mathcal{A}}$, donde $\eta : F \circ F^{-1} \longrightarrow I_{\mathfrak{B}}$ é um isomorfismo natural.

Note, agora, que para todo $(A, \delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ tem-se $(F^{-1} \circ F)(A, \delta) = F^{-1}({}_{\delta}\mathcal{A}) = (C_r^*({}_{\delta}\mathcal{A}), \delta^r_{{}_{\delta}\mathcal{A}})$. Pelo Teorema 4.2.10, a função

$$\begin{aligned}\sigma_r^A : C_r^*({}_{\delta}\mathcal{A}) &\longrightarrow A \\ \sigma_r^A(\Lambda(x)) &\longmapsto \sigma^A(x)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de C^*-álgebras, em que $\sigma^A : C^*({}_{\delta}\mathcal{A}) \longrightarrow A$ é o $*$-homomorfismo do Corolário 4.2.6. Mas por construção, dado $a_t \in A_t$ e $t \in G$, tem-se que $\sigma^A(a_t) \in A_t$, ou seja, $\delta(\sigma^A(a_t)) = \sigma^A(a_t) \otimes \lambda_t$. Então

$$\begin{aligned}((\sigma_r^A \otimes id) \circ \delta^r_{{}_{\delta}\mathcal{A}})(\Lambda(a_t)) &= (\sigma_r^A \otimes id)(\Lambda(a_t) \otimes \lambda_t) \\ &= \sigma_r^A(\Lambda(a_t)) \otimes \lambda_t = \sigma^A(a_t) \otimes \lambda_t \\ &= \delta(\sigma^A(a_t)) = (\delta \circ \sigma_r^A)(\Lambda(a_t)).\end{aligned}$$

Disso, decorre que $\sigma_r^A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((C_r^*({}_{\delta}\mathcal{A}), \delta^r_{{}_{\delta}\mathcal{A}}), (A, \delta))$, de modo que σ_r^A é um isomorfismo entre $(C_r^*({}_{\delta}\mathcal{A}), \delta^r_{{}_{\delta}\mathcal{A}})$ e (A, δ).

Por fim, mostremos que $\varepsilon : I_{\mathfrak{C}} \longrightarrow F^{-1} \circ F$, em que $\varepsilon_{(A,\delta)} = \sigma_r^A$ para todo $(A, \delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, é um isomorfismo natural. Com efeito, dados $(A, \delta), (B, \gamma) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((A, \delta), (B, \gamma))$, temos que

$$\begin{aligned}&(\varepsilon_{(B,\gamma)} \circ (F^{-1} \circ F)(f))(\Lambda(a_t)) \\ =\ & \varepsilon_{(B,\gamma)}(F^{-1}(F(f))(\Lambda(a_t))) = \varepsilon_{(B,\gamma)}(\Lambda(F(f)_t(a_t))) \\ =\ & \varepsilon_{(B,\gamma)}(\Lambda(f|_{A_t}(a_t))) = \varepsilon_{(B,\gamma)}(\Lambda(f(a_t))) = \sigma_r^B(\Lambda(f(a_t))) \\ =\ & \sigma^B(f(a_t)) =^7 f(a_t) = f(\sigma^A(a_t)) = f(\sigma_r^A(\Lambda(a_t))) \\ =\ & (f \circ \sigma_r^A)(\Lambda(a_t)),\end{aligned}$$

para todo $a_t \in A_t$ e $t \in G$. Na igualdade 7 acima, utilizamos o fato de $f(a_t) \in B_t$, pois $\gamma(f(a_t)) = (f \otimes id)(\delta(a_t)) = (\gamma \otimes id)(a_t \otimes \lambda_t) = f(a_t) \otimes \lambda_t$. Assim, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(C_r^*({}_{\delta}\mathcal{A}), \delta^r_{{}_{\delta}\mathcal{A}}) \arrow[r, "(F^{-1}\circ F)(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_{(A,\delta)}"'] & (C_r^*({}_{\gamma}\mathcal{B}), \gamma^r_{{}_{\gamma}\mathcal{B}}) \arrow[d, "\varepsilon_{(B,\gamma)}"] \\
(A,\delta) \arrow[r, "I_{\mathfrak{C}}(f)"] & (B,\gamma).
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\varepsilon : I_{\mathfrak{C}} \longrightarrow F^{-1} \circ F$ é um isomorfismo natural.

Exemplo 4.3.12. *Seja G um grupo abeliano. Sejam $\mathfrak{C}$ a categoria das coações contínuas e injetivas de $C_r^*(G)$ e $\mathfrak{F}$ a categoria as coações contínuas e injetivas de $C(\widehat{G})$. Considere, ainda, os funtores covariantes $\Phi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{F}$ e $\Phi^{-1} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}$ do Exemplo 4.3.6. Então $\eta : \Phi^{-1} \circ \Phi \longrightarrow id_{\mathfrak{C}}$ dedinido por $\eta((A,\delta)) = id_A$, para todo $(A,\delta) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, e $\varepsilon : id_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \Phi \circ \Phi^{-1}$ definido por $\varepsilon((A,\widetilde{\delta})) = id_A$, para todo $(A,\widetilde{\delta}) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{F})$ são isomorfismos naturais. Isto segue diretamente do fato de $C_r^*(G) \cong C(\widehat{G})$.*

Definição 4.3.13. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ **e** $\mathcal{D}$ são **equivalentes** se existem funtores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e dois isomorfismos naturais $\eta : F \circ G \to I_{\mathcal{D}}$ e $\varepsilon : I_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, em que $F \circ G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ e $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ são as composições de F e G, e $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e $I_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ denotam funtores identidades em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente, levando cada objeto e cada morfismo em si mesmo.

Teorema 4.3.14. *Seja G um grupo discreto. A categoria $\mathfrak{C}$ das coações contínuas e injetivas do grupo quântico $C_r^*(G)$ é equivalente à categoria $\mathfrak{B}$ dos fibrados de Fell sobre G.*

Prova. Pelos Exemplos 4.3.7 e 4.3.11, existem funtores covariantes $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ e $F^{-1} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$, e isomorfismos naturais $\eta : F^{-1} \circ F \longrightarrow I_{\mathfrak{B}}$ e $\varepsilon : I_{\mathfrak{C}} \longrightarrow F \circ F^{-1}$. Segue, pela definição 4.3.13, que $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}$ são categorias equivalentes.

$\square$

Teorema 4.3.15. *Seja G um grupo discreto abeliano. A categoria $\mathfrak{C}$ das coações contínuas e injetivas do grupo quântico $C_r^*(G)$ é equivalente à categoria $\mathfrak{D}$ das ações fortemente contínuas de $\widehat{G}$.*

Prova. Do Exemplo 4.3.12, temos que $\mathfrak{C}$ é equivalente a categoria $\mathfrak{F}$ das coações contínuas e injetivas de $C(\widehat{G})$ e pelo Exemplo 4.3.10, sabemos que $\mathfrak{F}$ é equivalente à $\mathfrak{D}$. Portanto, por transitividade, $\mathfrak{C}$ é equivalente a $\mathfrak{D}$.

$\square$

Corolário 4.3.16. *Seja G um grupo discreto abeliano. A categoria $\mathfrak{B}$ dos fibrados de Fell sobre G é equivalente à categoria $\mathfrak{D}$ das ações fortemente contínuas de $\widehat{G}$.*

Prova. Segue dos Teoremas 4.3.14 e 4.3.15.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Boava, G., *Caracterizações da C^*-álgebra Gerada por uma Compressão Aplicadas a Cristais e Quasicristais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, Florianópolis, 2007.

[2] Boff, P., *Elementos de álgebras de Hopf*, Trabalho de conclusão de curso, UFSC, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2009.

[3] Buss, A., *A C^*-álgebra de um Grupo*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, Florianópolis, 2003.

[4] Drinfeld, V., *Quantum Groups.* In Proceedings of ICM-86 at Berkeley, vol. 1, 798, AMS, 1987.

[5] Enock M. e Schwartz, J.M., *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[6] Exel, R., *Amenability for Fell Bundles*, J. Reine Angew. Math., (492):4173, 1997.

[7] Exel, R., *Twisted partial actions: a classification of regular C^*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) 74 (1997), no. 2, 417443. MR 1425329.

[8] Exel, R. e Ng., Chi-Keung, *Aproximation property of C^*-algebraic Bundles*, arXiv: math/990607v1 [math.OA] 11 Jun 1999.

[9] Fell, J.M.G., *Induced representations and Banach *-algebraic bundles* , Springer Verlag, 1977.

[10] Fell, J.M.G. e Doran, R. S., *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles*, Volume 1, Academic Press, 1988.

[11] Fell, J.M.G. e Doran, R. S., *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles*, Volume 2, Academic Press, 1988.

[12] Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I.,*Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

[13] Hewitt, E. e Ross, K. A., *Abstract Harmonic Analysis I, second Edition, Springer-Verlag, 1979.*

[14] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, W.H.Freeman and Company, New York, 1989.

[15] Jimbo, M., *Lett. Math. Phys. 10* (1985) 63.

[16] Joyal, A. e Street, R., *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, Lecture Notes in Math. 1448, Springer-Verlag, 1991.

[17] Kaniuth, E. e Keith, F. T., *Induced Representations of Locally Compact Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 2013.

[18] Klimyk, A. e Schmüdgen, K., *Quantum Groups and Their Representations*, Springer Verlag, 1997.

[19] Lance, E. C., *Hilbert C^*-modules: A toolkit operator algebraists*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 210, Cambridge University Press, 1995.

[20] Lima, E. L., *Elementos de topologia geral, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.*

[21] Manuilov, V. M. e Troitsky, E. V., *Hilbert C^*-Modules*, American Mathematical Society, 2005.

[22] Murphy, G. J., *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[23] Ng., Chi-Keung, *Discrete coactions on C^*-algebras*, J. Australian Mathematical Society, (Series A) 60, 1996.

[24] Quigg, J. C., *Discrete C^*-coactions and C^*-algebraic Bundles.*, J. Australian Mathematical Society, (Series A) 60, 1996.

[25] Raeburn, I. e Williams, D. P., *Morita Equivalence and Continuous-Trace C^*-algebras* , American Mathematical Society, 1998.

[26] Rudin, W., *Fourier Analysis on Groups* , John Wiley Sons , 1962.

[27] S. L., Woronowicz,*Commun Math Phys. 1987*;111:613665.

[28] S. L., Woronowicz, *Compact quantum groups*, Institute of Mathematics of Polish Academy of Science, June 10, 2000.

[29] Sunder, V. S., *Functional Analysis: spectral Theory*, Birkhäuser advanced texts, 1998.

[30] Takesaki M., Lecture Notes in Mathematics. 247 , Berlin: Springer; 1972. pp. 665785.

[31] Timmermann, T., *An Invitation to Quantum Groups and Duality: From Hopf Algebras to Multiplicative Unitaries and Beyond*, European Mathematical Society, 2008.

[32] Williams, D. P., *Crossed products of C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.