Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Operadores Essencialmente Normais e a Teoria de Brown-Douglas-Fillmore

Fernando de Lacerda Mortari
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Março de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Operadores Essencialmente Normais e a Teoria de Brown-Douglas-Fillmore

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Fernando de Lacerda Mortari

Florianópolis
Março de 2005

Operadores Essencialmente Normais e a Teoria de Brown-Douglas-Fillmore

por

Fernando de Lacerda Mortari

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Igor Mozolevsky
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva (UFSC)

Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo (IME-USP)

Florianópolis, Março de 2005.

Aos meus pais

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais, pela educação que me deram e por todo o apoio e dedicação; obrigado por terem acreditado em mim e na minha escolha. Obrigado a minha família pelo suporte e carinho.

Ao professor Eliezer Batista, o meu sincero obrigado, por ter me aberto os olhos para uma de minhas vocações, com a matemática, e por ter sempre incentivado a curiosidade e criatividade em seus alunos; não fosse por ele e pelo Programa Avançado de Matemática da UFSC (PAM), minha vida acadêmica definitivamente teria tomado um rumo bastante diferente.

Ao professor Ruy Exel, por ter me ensinado a trilhar com rigor os caminhos da matemática, e por ter sido um excepcional orientador e colega, meus agradecimentos. É para mim uma honra ter tido a oportunidade de trabalhar com o professor Ruy.

Agradeço aos amigos, em particular Erwin Dassen e Gilles Castro, por todo o apoio. Juntos compartilhamos inúmeros momentos e superamos dificuldades, envolvidos ou não em assuntos matemáticos; devo em grande parte a minha atual condição na matemática a estes momentos, que jamais serão esquecidos.

Ao meu amor, Alda Dayana Mattos, uma pessoa maravilhosa, que acompanhou de perto o desenvolvimento dos meus trabalhos no mestrado e sempre me deu muito apoio em todas as horas, meu profundo agradecimento. Os meus dias são mais felizes por tua causa. Obrigado por tudo.

Agradeço ao CNPq, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Um operador limitado T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito *essencialmente normal* quando $T^*T - TT^*$ é um operador compacto. Dois operadores são ditos *unitariamente equivalentes módulo os compactos* quando um é unitariamente equivalente a uma perturbação compacta do outro.

O objetivo deste trabalho é provar um teorema, que dá condições necessárias e suficientes para que dois operadores essencialmente normais sejam unitariamente equivalentes módulo os compactos. Para alcançarmos este objetivo, desenvolveremos a teoria de Brown-Douglas-Fillmore, que fornece um funtor covariante da categoria dos espaços métricos compactos na categoria dos grupos abelianos, chamado de funtor Ext, e uma transformação natural que, a cada espaço métrico compacto X, associa um homomorfismo de grupos $\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$, onde $\pi^1(X)$ é o primeiro grupo de cohomotopia de X. O teorema de classificação dos operadores essencialmente normais será conseqüência do fato que γ_X é um isomorfismo de grupos quando X é um subconjunto compacto do plano complexo $\mathbb{C}$.

Abstract

A bounded operator T on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is said *essentially normal* when $T^*T - TT^*$ is a compact operator. Two operators are said *unitarily equivalent modulo the compact operators* when one is unitarily equivalent to a compact perturbation of the other.

The goal of this work is to prove a theorem, that gives necessary and sufficient conditions for any two given essentially normal operators to be unitarily equivalent modulo the compact operators. In order to reach this objective, we will develop the Brown-Douglas-Fillmore theory, that gives us a covariant functor on the category of compact metric spaces to the category of abelian groups, called the Ext functor, and a natural transformation that, to each compact metric space X, gives a group homomorphism $\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$, where $\pi^1(X)$ denotes the first cohomotopy group of X. The classification theorem for essentially normal operators will follow from the fact that γ_X is a group isomorphism when X is a compact subset of the complex plane $\mathbb{C}$.

Sumário

Introdução

Gostaríamos inicialmente de fixar as notações mais básicas que serão utilizadas no decorrer do trabalho:

- $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N}^*)$; todos os espaços de Hilbert considerados serão de dimensão infinita separáveis, a menos que se diga o contrário explicitamente;

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotará a C*-álgebra dos operadores lineares limitados no espaço $\mathcal{H}$;

- $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ denotará o ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores compactos em $\mathcal{H}$;

- $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ denotará a álgebra de Calkin $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$;

- Para *todo* espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}$, $\pi : \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{H}})$ denotará a aplicação quociente; ou seja, π sempre deve ser interpretado de acordo com o espaço de Hilbert que está sendo trabalhado no momento;

- Dada uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ e um elemento $a \in \mathfrak{A}$, denotaremos o espectro de a por $\sigma(a)$;

- Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, o *espectro essencial de* T é o espectro do elemento $\pi(T) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$; denotaremos o espectro essencial de T por $\sigma_e(T)$;

- O símbolo X será usado para denotar um espaço métrico compacto qualquer, a menos que dito em contrário.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma série de ferramentas que permitiram-nos responder, na década de 1970, a uma questão oriunda da teoria de operadores; para introduzir o problema adequadamente, um pouco de terminologia:

Dados operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dizemos que T_1 é *unitariamente equivalente* a T_2 quando existir um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T_1 = \mathrm{Ad}U(T_2)$, ou seja,

$$T_1 = UT_2U^*.$$

Diremos também que T_1 é unitariamente equivalente a T_2 *módulo os compactos* quando T_2 é unitariamente equivalente a uma perturbação compacta de T_1, ou seja, quando existirem um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tais que

$$T_1 + K = UT_2U^*.$$

Utilizando propriedades elementares dos operadores compactos, é possível verificar facilmente que "equivalência unitária módulo os compactos" é uma relação de equivalência. De agora em diante, denotaremos esta relação de equivalência em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\sim_{\mathcal{K}}$. Uma primeira pergunta que pode ser feita é a seguinte:

Dados operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, como decidir se $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$?

Na verdade, gostaríamos de algo mais forte: *Dados operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, quais são, caso existam, condições necessárias e suficientes para que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$?*

Resultados de Weyl e von Neumann responderam a questão para operadores auto-adjuntos: em 1909, Weyl, motivado pelo estudo da estabilidade de um operador diferencial sob alterações de condições de fronteira, provou que uma perturbação compacta de um operador auto-adjunto preserva o espectro do operador, a menos possivelmente dos autovalores isolados de multiplicidade finita. Este resultado, ajustado para a questão em estudo e usando terminologia atual, diz que se $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são auto-adjuntos e $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$, então $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ (note que isto é elementar do ponto de vista da teoria de operadores atual). A recíproca deste resultado, nem um pouco elementar, foi provada em 1935 por von Neumann; vemos assim que, no caso de operadores auto-adjuntos, o espectro essencial é um invariante completo para se caracterizar equivalência unitária módulo os compactos.

Ainda no caso auto-adjunto, observe que podemos reinterpretar o problema em termos da álgebra de Calkin (algo que é sugerido pelo fato de termos espectros essenciais desempenhando papéis nesta história): se $\mathfrak{t} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é um elemento auto-adjunto, então existe um operador auto-adjunto $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t} = \pi(T)$; de fato, tome qualquer $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t} = \pi(S)$. Então, é trivial verificar que $\mathfrak{t} = \pi(\mathrm{Re(S)})$, onde

$$\mathrm{Re(S)} = \frac{S + S^*}{2},$$

e portanto $T = \mathrm{Re(S)}$ é como desejado.

Suponha que $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são auto-adjuntos com $\sigma(\mathfrak{t}_1) = \sigma(\mathfrak{t}_2)$, e tome $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores auto-adjuntos tais que $\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1)$, $\mathfrak{t}_2 = \pi(T_2)$; assim, em particular

$$\sigma_e(T_1) = \sigma(\pi(T_1)) = \sigma(\mathfrak{t}_1) = \sigma(\mathfrak{t}_2) = \sigma(\pi(T_2)) = \sigma_e(T_2),$$

e portanto $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$, pelo resultado de von Neumann. Logo, existem um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tais que $T_1 + K = UT_2U^*$. Se denotarmos $\mathfrak{u} = \pi(U)$, teremos que $\mathfrak{u}$ é elemento unitário de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ e, ainda,

$$\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1) = \pi(T_1 + K) = \pi(UT_2U^*) = \pi(U)\pi(T_2)\pi(U)^* = \mathfrak{u}\mathfrak{t}_2\mathfrak{u}^*.$$

A equação acima nos diz que $\mathfrak{t}_1$ *é unitariamente equivalente a* $\mathfrak{t}_2$, ou seja, existe um elemento unitário $\mathfrak{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{u}\mathfrak{t}_2\mathfrak{u}^*$.

Resumindo, se $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são auto-adjuntos com $\sigma(\mathfrak{t}_1) = \sigma(\mathfrak{t}_2)$, então $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são unitariamente equivalentes; a recíproca é obviamente verdadeira, e daí vemos que o espectro é um invariante completo para classificar elementos auto-adjuntos da álgebra de Calkin, via equivalência unitária.

Observe que o uso feito acima do resultado de Weyl e von Neumann sugere uma outra noção de equivalência unitária na álgebra de Calkin: diremos que elementos $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são *fortemente unitariamente equivalentes* quando existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = \pi(U)\mathfrak{t}_2\pi(U)^*$. Esta noção de equivalência é a priori mais forte que a noção de equivalência usual pois, dado um elemento unitário $\mathfrak{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, *não* é verdade em geral que existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{u} = \pi(U)$; agora, o que provamos acima mostra também que dois elementos auto-adjuntos $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são tais que $\sigma(\mathfrak{t}_1) = \sigma(\mathfrak{t}_2)$ se, e somente se, $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são fortemente unitariamente equivalentes. Em outras palavras, vemos que, pelo menos se nos restringirmos aos elementos auto-adjuntos da álgebra de Calkin, temos que estas duas noções de equivalência coincidem.

Retornando ao problema no contexto dos operadores: se um resultado é válido para operadores auto-adjuntos, um dos primeiros questionamentos relevantes sobre o resultado é se ele pode ser estendido para operadores normais. Sem dúvida, a implicação de Weyl é válida se considerarmos operadores normais no lugar de operadores auto-adjuntos. A possível extensão da recíproca de von Neumann, porém, resistiu até 1971, quando um resultado obtido independentemente por Berg e Sikonia foi suficiente para responder o problema afirmativamente; nós apresentaremos a prova deste resultado no apêndice B (Teorema B.2.6), mas o enunciaremos aqui por clareza:

Teorema (Weyl-von Neumann-Berg). *Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores normais. Então, $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$.*

Poderíamos agora, assim como no caso auto-adjunto, tentar reinterpretar o problema no caso normal em termos da álgebra de Calkin. Uma primeira tentativa seria aplicar o teorema acima de modo similar ao que fizemos no caso auto-adjunto, mas um problema técnico aparece: vimos que todo elemento auto-adjunto de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ pode ser levantado para um operador auto-adjunto, e este ingrediente foi crucial para estabelecer o fato de que, no caso auto-adjunto, o espectro é um invariante completo para se caracterizar a equivalência unitária; agora, dado um elemento normal $\mathfrak{n} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, *não* é verdade em geral que existe um operador normal $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{n} = \pi(N)$. Veremos um exemplo disto na seção 1.1.

Com isto, realmente cai por terra a tentativa de generalização do resultado utilizando diretamente o teorema acima. Porém, temos uma indicação de que investigar os operadores que determinam elementos normais na álgebra de Calkin pode ser algo de considerável relevância para o problema da generalização. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é *essencialmente normal* quando $\pi(T)$ é um elemento normal de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

É claro que os possíveis invariantes para o caso normal podem ser diferentes do que encontramos para o caso auto-adjunto; investigando um exemplo em particular (exemplo 1.1.4), veremos que na verdade o espectro *não* é um invariante completo para caracterizar a equivalência unitária na álgebra de Calkin, no caso normal. Voltando ao contexto de operadores, em particular isto mostra que o teorema de Weyl-von Neumann-Berg *não* vale se substituirmos operadores normais por operadores *essencialmente* normais; é necessário algo mais e, conforme sugerido no exemplo 1.1.4, a teoria de índices de Fredholm é o ingrediente adicional necessário para resolver a questão (as definições, notações e resultados desta teoria que utilizaremos podem ser encontradas na seção A.3). O teorema que classifica os operadores essencialmente normais a menos de equivalência unitária módulo os compactos, respondendo a questão feita no início da introdução para estes operadores, é o seguinte:

Teorema (Brown-Douglas-Fillmore). *Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores essencialmente normais. Então, $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ e*

$$\operatorname{ind}(T_1 - \lambda I) = \operatorname{ind}(T_2 - \lambda I) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_e(T_1).$$

Aqui, ind denota o índice de Fredholm, como visto na seção A.3. Publicado em 1973 por Brown, Douglas e Fillmore em [6], este resultado trouxe consigo um arsenal de novas ferramentas que revolucionou o estudo da teoria de C*-álgebras naquela época. De maneira surpreendente, a prova envolve não apenas teoria de operadores, mas utiliza de maneira sofisticada conceitos topológicos e de álgebra homológica. A chamada teoria de Brown-Douglas-Fillmore (comumente abreviada BDF) foi o marco inicial para o desenvolvimento de um grande número de ferramentas para o estudo de C*-álgebras.

O objetivo deste trabalho, portanto, é desenvolver as fundações da teoria de Brown-Douglas-Fillmore, e demonstrar o teorema de classificação,via equivalência unitária módulo os compactos, dos operadores essencialmente normais. O que segue é uma breve exposição do conteúdo de cada capítulo do texto:

O capítulo 1 é dividido em duas seções: a primeira seção destina-se a uma prévia da teoria de Brown-Douglas-Fillmore que trataremos mais adiante; discutiremos brevemente as definições e conceitos envolvidos, e daremos a idéia da conexão entre teoria de operadores e álgebra homológica, através do conceito de *extensões de C^*-álgebras*, originando um funtor, que chamaremos de Ext. Ainda na primeira seção, faremos um primeiro exemplo, classificando, via equivalência unitária módulo os compactos, os operadores essencialmente normais que possuem espectro essencial contido em $\mathbb{R}$. Na seqüência, a segunda seção é reservada para um segundo exemplo importante, consistindo na classificação dos operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é $\mathbb{S}^1$. Estes resultados nos darão a classificação, via equivalência unitária, dos elementos unitários da álgebra de Calkin.

O capítulo 2, dividido em quatro seções, é dedicado ao estudo formal de extensões de $\mathcal{K}$ por $C(X)$: a primeira seção contém definições e observações que estabelecem a linguagem de extensões que estaremos usando daquele ponto em diante. A segunda seção é dedicada aos invariantes de Busby de extensões; em particular, provaremos que os conceitos mencionados acima de equivalência unitária e equivalência unitária forte na álgebra de Calkin coincidem nos elementos normais. Voltaremos também a falar do conjunto $\mathrm{Ext}(X)$, introduzido informalmente no capítulo 1. Na terceira seção, faremos um estudo de dois conceitos de *soma* de extensões, denominados "soma-chapéu" e "soma disjunta", e veremos que a soma-chapéu de extensões induz uma operação binária associativa e comutativa em $\mathrm{Ext}(X)$, que chamaremos de "soma". Na quarta seção, introduziremos as *extensões triviais*, e veremos que elas determinam o elemento neutro para a operação de soma obtida em $\mathrm{Ext}(X)$; isto dá a $\mathrm{Ext}(X)$ uma estrutura de semigrupo abeliano.

O capítulo 3, em suas duas seções, estabelece Ext como um funtor covariante da categoria dos espaços métricos compactos na categoria dos grupos abelianos; em outras palavras, para todo espaço métrico compacto X, $\mathrm{Ext}(X)$ é um grupo abeliano, e dados espaços métricos compactos X, Y e $f : X \longrightarrow Y$ contínua, podemos obter um homomorfismo de grupos $\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(Y)$ de maneira funtorial. Como exemplo, calcularemos $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$, algo que será de grande importância no capítulo 5.

O capítulo 4, o mais técnico do trabalho, em três seções, destina-se ao estudo de algumas propriedades do funtor Ext. Na primeira seção introduziremos o conceito de *cisão* de um elemento de $\mathrm{Ext}(X)$ por uma projeção da álgebra de Calkin; vários resultados úteis serão obtidos a partir deste conceito. A segunda seção tem duas preocupações: uma delas é estabelecer uma seqüência exata

$$\mathrm{Ext}(A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}(X) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Ext}(X/A)$$

para X espaço métrico compacto e A subconjunto fechado de X; a outra é obter uma seqüência rudimentar de Mayer-Vietoris

$$\mathrm{Ext}(B \cap C) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(X)$$

para $B, C \subseteq X$ fechados com $X = B \cup C$. Na terceira e última seção, discutiremos como Ext se comporta com limites projetivos; mais especificamente, dado (X_k, p_k) um sistema projetivo de espaços métricos compactos (não vazios), podemos de maneira padrão obter um sistema projetivo de grupos $(\mathrm{Ext}(X_k), p_{k_*})$, e um homomorfismo

$$\psi : \mathrm{Ext}\big(\varprojlim X_k\big) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Ext}(X_k).$$

O resultado principal desta seção é demonstrar que o homomorfismo ψ é sempre sobrejetor.

O capítulo 5, dividido em três seções, finaliza o estudo da teoria de Brown-Douglas-Fillmore neste trabalho. Dado um espaço métrico compacto X, definiremos uma aplicação

$$\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z}),$$

onde aqui $\pi^1(X)$ denota o primeiro grupo de cohomotopia de X. Na primeira seção, provaremos que γ_X é um homomorfismo de grupos, e que a correspondência $X \xmapsto{\gamma} \gamma_X$ define uma transformação natural entre os funtores Ext e $\mathrm{Hom}(\pi^1(-), \mathbb{Z})$. Na segunda seção, analisaremos em detalhes o caso $X \subseteq \mathbb{C}$ e provaremos que, neste caso, γ_X é um isomorfismo de grupos. A terceira e última seção é curta e, destina-se a aplicação da teoria BDF para solucionar três problemas da teoria de operadores. Um deles é o Teorema de Brown-Douglas-Fillmore enunciado acima. A prova deste resultado, como veremos, é uma conseqüência relativamente elementar do fato de γ_X ser isomorfismo para $X \subseteq \mathbb{C}$. O segundo resultado dá condições necessárias e suficientes para um operador ser perturbação compacta de um operador normal; o terceiro diz que o conjunto dos operadores da forma $N + K$, com $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, é fechado na norma, resultado este que, aparentemente, até hoje não possui uma prova elementar via teoria de operadores.

Ainda neste trabalho estão incluídos cinco apêndices:

O apêndice A é simplesmente um apanhado de definições e resultados das teorias de medidas espectrais, integrais espectrais e teorema espectral, operadores compactos, de Fredholm, de shift e de Toeplitz, que são utilizados inúmeras vezes durante o texto, estando aqui incluídos a título de referência; a maioria das provas serão omitidas neste apêndice.

O apêndice B é dedicado ao estudo do espectro essencial de operadores normais, e ao teorema de Weyl-von Neumann-Berg enunciado acima. Provaremos uma série de resultados auxiliares, que nos permitirão fazer a demonstração deste resultado.

O apêndice C trata de resultados sobre seqüências de operadores. Introduziremos o conceito de *joint spectrum* (espectro conjunto) de uma família de elementos de uma C*-álgebra que comutam entre si; entre outros, provaremos um teorema sobre diagonalização parcial simultânea módulo os compactos para uma família de operadores satisfazendo hipóteses apropriadas, que é de vital importância em diversos pontos do texto principal.

O apêndice D destina-se a uma discussão sobre aplicações positivas e completamente positivas, com dois resultados principais. O primeiro deles é o teorema de Stinespring, que diz essencialmente que toda aplicação completamente positiva é o "canto" de alguma *-representação; o segundo diz que, para X um espaço métrico compacto, toda aplicação unital positiva de $C(X)$ em um quociente $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ de uma C*-álgebra $\mathfrak{B}$ por um ideal bilateral fechado $\mathfrak{J}$ pode ser levantada para uma aplicação unital positiva de $C(X)$ em $\mathfrak{B}$. Utilizaremos estes resultados na prova de que $\mathrm{Ext}(X)$ é sempre um grupo abeliano.

O apêndice E traz resultados auxiliares de topologia, em particular sobre espaços topológicos totalmente desconexos. Introduziremos, sem demonstrações, os conceitos e resultados básicos da teoria de espaços topológicos totalmente desconexos, por referência. Em seguida, demonstraremos resultados técnicos envolvendo estes espaços que nos serão úteis no decorrer do texto principal.

Para a leitura deste trabalho, recomenda-se que o leitor tenha algum conhecimento das teorias de operadores limitados em espaços de Hilbert, C*-álgebras, operadores compactos, operadores de Fredholm e índice de Fredholm, operadores de Toeplitz; são desejáveis conhecimentos de topologia geral, espaços métricos, teoria da homotopia, teoria da medida e teoria espectral de operadores, bem como noções gerais dos conceitos fundamentais da teoria de categorias (categoria, funtor, transformação natural).

A estrutura deste trabalho é baseada em parte no material publicado por Brown, Douglas e Fillmore em [6] e [7]; com o passar dos anos, demonstrações mais simples ou mais esclarecedoras de certos resultados foram obtidas, e sempre que possível optamos por trabalhar com estas novas demonstrações. As referências relevantes serão mencionadas em tempo.

Convencionaremos que, a menos que dito em contrário, todas as C*-álgebras que tomarmos serão C*-álgebras com unidade, e todos os *-homomorfismos de C*-álgebras serão unitais. Também, todos os espaços topológicos (e em particular os espaços métricos) considerados serão não vazios.

Finalmente, faremos aqui uma lista de outras notações utilizadas no texto, que não são introduzidas em nenhum outro momento:

- Um operador $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonal com respeito à base canônica de $\mathcal{H}$ será denotado por $D = \mathrm{diag}_k(\lambda_k)$, onde λ_k refere-se ao k-ésimo coeficiente da diagonal;

- A unidade de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ qualquer será denotada por 1, ou por $1_{\mathfrak{A}}$ quando a distinção se fizer necessária; no caso particular de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, a unidade é o operador identidade, que denotaremos por I;

- Dados conjuntos A, B e $f : A \longrightarrow B$ uma função, denotaremos a imagem de f por $\mathrm{ran}(f)$;

- Para $X \in \mathbb{C}$ compacto denotaremos por $\zeta : X \longrightarrow \mathbb{C}$ a função "identidade" $\zeta(x) = x \ \forall x \in X$;

- Para X espaço métrico compacto e $Y \subseteq X$, denotaremos por $1_Y : X \longrightarrow \mathbb{C}$ a função característica do conjunto Y;

- Dados espaços métricos compactos X, Y e $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua, denotaremos por $f^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$ o *-homomorfismo dual a f, dado por $f^*(g) = g \circ f \ \forall g \in C(Y)$;

- O símbolo $B_1(\mathcal{H})$ denota a bola unitária no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$;

- Para toda C*-álgebra $\mathfrak{A}$, denotaremos por $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ o *-isomorfismo identidade $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}(a) = a \ \forall a \in \mathfrak{A}$;

- Dada uma projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por vezes denotaremos $I - P$ por $P^{\perp}$ e $\mathrm{ran}(P)$ por $P\mathcal{H}$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Este capítulo contém as primeiras idéias do estudo da Teoria de Brown-Douglas-Fillmore; em particular, começaremos o estudo das extensões dos compactos por $C(X)$, que serão o principal objeto de estudo do capítulo 2.

Novamente lembramos que é essencial o conhecimento das teorias de operadores compactos e de Fredholm para o que segue, visto que muitas vezes utilizaremos propriedades destes operadores sem mencioná-las explicitamente. A caracterização do espectro essencial de um operador normal (teorema B.1.4) será eventualmente utilizada, em particular no teorema 1.2.5. Os operadores de shift (seção A.4 do apêndice) são boas fontes de exemplos e contra-exemplos, e serão mencionados diversas vezes ao longo do texto.

1.1 Uma Prévia da Teoria de Brown-Douglas-Fillmore

Conforme visto na introdução, o problema que queremos solucionar neste trabalho é o de classificação, via equivalência unitária módulo os compactos, de uma classe especial de operadores. Lá fizemos uma abordagem histórica do problema, mas aqui faremos a exposição em uma ordem mais direta, concentrando-se no objetivo. Relembrando:

Definição 1.1.1. Dois operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são ditos *unitariamente equivalentes módulo os compactos* quando T_2 é unitariamente equivalente a uma perturbação compacta de T_1, ou seja, quando existirem um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tais que

$$T_1 + K = UT_2U^*.$$

A relação de "equivalência unitária módulo os compactos" é uma relação de equivalência (devido a propriedades dos operadores compactos), e utilizaremos o símbolo

$\sim_{\mathcal{K}}$ para indicá-la.

Tudo o que é visto "módulo os compactos" deve de alguma forma tentar ser reinterpretado em termos da álgebra de Calkin, para sintetizar o problema e possivelmente entender melhor suas implicações. De certo modo, classificar operadores via "equivalência unitária módulo os compactos" sugere que temos em mãos precisamente o problema de classificação de elementos da álgebra de Calkin, via equivalência unitária (lembrando que elementos a_1, a_2 de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ com unidade são ditos *unitariamente equivalentes* quando existe um elemento unitário $u \in \mathfrak{A}$ tal que $a_1 = ua_2u^*$). Isto não é em geral verdade, mas será verdade se restringirmos um pouco os elementos que gostaríamos de classificar. Como visto na introdução, podemos considerar um outro tipo de equivalência unitária na álgebra de Calkin, que denominaremos de equivalência unitária *forte*, onde elementos $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são ditos *fortemente unitariamente equivalentes* quando existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = \pi(U)\mathfrak{t}_2\pi(U)^*$. Fica claro então que o problema de classificação de operadores via equivalência unitária módulo os compactos é equivalente a classificar elementos da álgebra de Calkin, via equivalência unitária forte.

A questão então seria se podemos voltar nossa atenção a uma classe restrita de elementos da álgebra de Calkin, de modo que as duas noções de equivalência coincidam e possamos portanto esquecer a equivalência unitária forte e, nesta classe restrita, relacionar adequadamente o problema de classificação de operadores (via equivalência unitária módulo os compactos) e o problema de classificação de elementos da álgebra de Calkin (via equivalência unitária). Já vimos na introdução que estas noções de equivalência coincidem nos elementos *auto-adjuntos* da álgebra de Calkin; veremos, futuramente (corolário 2.2.13), que estas duas noções de equivalência ainda coincidem, se restringirmos nosso estudo aos elementos *normais* da álgebra de Calkin.

Estudaremos portanto, no decorrer do trabalho, o problema de classificar, via equivalência unitária, elementos *normais* da álgebra de Calkin. Já que restringimos nossa atenção a uma classe restrita de elementos da álgebra de Calkin, se quisermos reinterpretar o problema no contexto inicial de classificação de operadores via equivalência unitária módulo os compactos, devemos também restringir a atenção a uma classe restrita de operadores. Obviamente, queremos nos restringir a classe de operadores que determinam elementos normais da álgebra de Calkin. Poderíamos nos perguntar se esta é precisamente a classe dos operadores normais; este não é o caso pois, conforme mencionamos na introdução, dado um elemento normal $\mathfrak{n} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, *não* é verdade em geral que existe um operador normal $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{n} = \pi(N)$. Vejamos um exemplo clássico:

Exemplo 1.1.2. *Um operador de shift unilateral $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver seção A.4) não* *é normal, mas ainda assim* $\mathfrak{s} = \pi(S)$ *é um elemento normal (na verdade unitário) de* $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$*. Suponha por absurdo que exista um operador normal* $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathfrak{s} = \pi(N)$*. Então, existe um operador compacto* $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *tal que* $N = S + K$*. Ora, mas* S *é um operador de Fredholm com índice de Fredholm -1; portanto,* N *também será Fredholm com índice -1, visto que* N *é perturbação compacta de* S*. Por outro lado, é sabido que todo operador de Fredholm normal possui índice de Fredholm zero, de onde temos um absurdo.*

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.1.3. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito *essencialmente normal* quando $\pi(T)$ é um elemento normal da álgebra de Calkin, ou, equivalentemente, $TT^* - T^*T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

A classe de operadores que gostaríamos de estudar, portanto, é a dos operadores essencialmente normais. É trivial verificar que uma perturbação compacta de um operador normal constitui um operador essencialmente normal, e com isto conseguimos produzir uma enormidade de exemplos de operadores essencialmente normais; mas o importante é saber que nem todos os operadores essencialmente normais são perturbações compactas de operadores normais, como visto com o exemplo do shift unilateral acima.

Queremos condições necessárias e suficientes para que dois operadores essencialmente normais $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sejam tais que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$. Sem dúvida a igualdade do espectro essencial é uma condição necessária, mas é preciso algo mais; o espectro essencial *não* é um invariante completo para classificar operadores essencialmente normais. Vejamos um exemplo que ilustra este fato (utilizando a interpretação na álgebra de Calkin, para praticar):

Exemplo 1.1.4. *Sejam* $S, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *shifts unilateral e bilateral, respectivamente (ver seção A.4). É fato que* S *e* B *são operadores de Fredholm,* $\operatorname{ind}(S) = -1$, $\operatorname{ind}(B) = 0$, *e que* $\mathfrak{s} = \pi(S), \mathfrak{b} = \pi(B)$ *são elementos normais de* $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ *com* $\sigma(\mathfrak{s}) = \sigma(\mathfrak{b}) = \mathbb{S}^1$*. Suponha por absurdo que exista um unitário* $\mathfrak{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ *tal que* $\mathfrak{b}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\mathfrak{s}$*. Escrevendo* $\mathfrak{u} = \pi(T)$*, temos que existe um operador compacto* $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *tal que* $BT = TS + K$*. Agora,* T *é operador de Fredholm (visto que* $\pi(T)$ *é inversível), logo das propriedades de operadores de Fredholm e do índice de Fredholm,*

$$0 + \operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(BT) = \operatorname{ind}(TS + K) = \operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(T) - 1,$$

o que implicaria em $0 = -1$*, absurdo.*

Conforme visto na introdução, este problema de classificação de operadores essencialmente normais foi resolvido em 1973 por Brown, Douglas e Fillmore:

Teorema (Brown-Douglas-Fillmore). *Sejam $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ operadores essencialmente normais Então, $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ e*

$$\operatorname{ind}(T_1 - \lambda I) = \operatorname{ind}(T_2 - \lambda I)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_e(T_1).$$

O que veremos a seguir é uma idéia geral de como este resultado foi obtido, através de uma reinterpretação em termos de um outro problema de classificação aparentemente em nada relacionado ao nosso problema. O passo inicial é a introdução do conceito de *extensão de C*-álgebras*.

Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ duas C*-álgebras, normalmente dizemos que uma *extensão de* $\mathfrak{A}$ *por* $\mathfrak{B}$ é uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

de C*-álgebras e *-homomorfismos. Para evitar confusões, denominaremos uma tal extensão de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{B}$ por extensão *generalizada* de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{B}$; queremos reservar o termo *extensão* para um outro objeto que definiremos mais à frente. A razão de empregarmos "normalmente" na definição anterior é que não há uniformidade na literatura para esta definição e, por vezes, o que acabamos de definir é considerado por alguns autores como uma *extensão generalizada de* $\mathfrak{B}$ *por* $\mathfrak{A}$.

Para os efeitos deste trabalho, estaremos interessados em uma classe particular de extensões generalizadas de C*-álgebras: dado um espaço métrico compacto X, dizemos que uma *extensão dos compactos por* $C(X)$ é uma extensão da forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} C(X) \longrightarrow 0$$

onde $\mathfrak{E}$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contém o operador identidade I e o ideal dos compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, e a seta "$\hookrightarrow$" indica a inclusão. Por enquanto, codificaremos uma tal extensão em uma tripla $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$. Veremos agora que o estudo destas extensões está intimamente relacionado com o estudo de operadores essencialmente normais.

Para a discussão que segue, dado um espaço métrico compacto X arbitrário, um ponto importante é verificar se *existem* extensões dos compactos por $C(X)$; demonstraremos este fato com a proposição 2.1.6. É seguro assumir, por enquanto, que as extensões consideradas existem.

Seja $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ extensão. A primeira conexão do conceito de extensão dos compactos por $C(X)$ e os operadores essencialmente normais reside no fato de que todo operador $T \in \mathfrak{E}$ é essencialmente normal. Isto é imediato, pois como $C(X)$ é uma C*-álgebra comutativa, temos

$$\varphi(TT^* - T^*T) = \varphi(T)\varphi(T)^* - \varphi(T)^*\varphi(T) = \varphi(T)\varphi(T)^* - \varphi(T)\varphi(T)^* = 0,$$

de onde tiramos que $TT^* - T^*T \in \ker(\varphi) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, o que prova que T é essencialmente normal.

Temos falado de espaços métricos compactos, mas até o momento pode não estar claro que papel eles desempenham nesta teoria. Lembremos que o espectro de qualquer elemento de uma C*-álgebra é um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{C}$; logo, podemos vê-lo como um subespaço métrico compacto não vazio de $\mathbb{C}$. A segunda conexão do conceito de extensão dos compactos por $C(X)$ e os operadores essencialmente normais é dada a seguir:

Proposição 1.1.5. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normal, e $X = \sigma_e(T)$. Então, existe $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ extensão dos compactos por $C(X)$ tal que $\mathfrak{E} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$.*

Demonstração. O elemento $\mathfrak{t} = \pi(T) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é normal e $\sigma(\mathfrak{t}) = X$, logo podemos falar do cálculo funcional contínuo de $\mathfrak{t}$, dado por um *-isomorfismo

$$\begin{aligned} \eta : C(X) &\longrightarrow C^*(1, \mathfrak{t}) \\ f &\longmapsto f(\mathfrak{t}). \end{aligned}$$

Defina $\mathfrak{E} := C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$; então, como $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é *-homomorfismo, temos que $\operatorname{ran}(\pi|_{\mathfrak{E}}) = C^*(1, \pi(T)) = C^*(1, \mathfrak{t})$. Assim, podemos fazer a composição $\varphi := \eta^{-1} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}$, que é claramente um *-homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Segue-se que a tripla $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é extensão dos compactos por $C(X)$ como desejado.

■

Vemos portanto da proposição acima que todo operador essencialmente normal determina, de maneira simples, uma extensão dos compactos por $C(X)$, onde X é o espectro essencial do operador. Nos referiremos a extensão como na prova da proposição acima por *extensão determinada por T*. Façamos uma definição para efeito de organização.

Definição 1.1.6. Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normal, e $X = \sigma_e(T)$. Então, a *extensão determinada por T* é a extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ dos compactos por $C(X)$, onde $\mathfrak{E} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ e $\varphi = \eta^{-1} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}$, onde $\eta : C(X) \longrightarrow C^*(1, \pi(T))$ é o cálculo funcional contínuo de $\pi(T)$.

Poderíamos nos perguntar se qualquer extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ dos compactos por $C(X)$ com $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto é determinada por um operador essencialmente normal, como na definição acima. Isto é de fato verdade, como mostra a proposição seguinte:

Proposição 1.1.7. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto e $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ extensão dos compactos por $C(X)$. Então, existe um operador essencialmente normal $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é a extensão determinada por T.*

Demonstração. Visto que φ é sobrejetor, podemos tomar $T \in \mathfrak{E}$ tal que $\varphi(T) = \zeta$ (relembrando, $\zeta : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função "identidade" $\zeta(x) = x \ \forall x \in X$). É fato que $\sigma(\zeta) = X$; considerando o *-isomorfismo induzido por φ no quociente,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \mathfrak{E}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) &\longrightarrow C(X) \\ \pi(S) &\longmapsto \varphi(S), \end{aligned}$$

vemos em particular que

$$\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T)) = \sigma(\widetilde{\varphi}(\pi(T))) = \sigma(\varphi(T)) = \sigma(\zeta) = X.$$

Afirmamos que $\mathfrak{E} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$. De fato, para não carregar a notação escreva $\mathfrak{A} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$. Naturalmente, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{E}$; precisamos provar a outra inclusão. Para tanto, observe que $\varphi|_{\mathfrak{A}}$ ainda é sobrejetora, pois é claro que $\{1, \zeta\} \subseteq \operatorname{ran}(\varphi|_{\mathfrak{A}})$, e como 1 e ζ geram $C(X)$, temos $C(X) \subseteq \operatorname{ran}(\varphi|_{\mathfrak{A}})$.

Dado $S \in \mathfrak{E}$ arbitrário, existe portanto $S' \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(S) = \varphi(S')$, ou seja, $K := S - S' \in \ker(\varphi) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Daí, $S = S' + K \in \mathfrak{E}$, provando que $\mathfrak{E} = \mathfrak{A} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ como queríamos.

Precisamos agora provar que $\varphi = \eta^{-1} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}$, onde $\eta : C(X) \longrightarrow C^*(1, \pi(T))$ é o cálculo funcional contínuo de $\pi(T)$; basta para isto provar que $\eta \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$ nos geradores da C*-álgebra $\mathfrak{E}$: é claro que $\eta \circ \varphi$ e $\pi|_{\mathfrak{E}}$ coincidem nos operadores compactos; também,

$$\eta \circ \varphi(I) = \eta(1) = 1(\pi(T)) = \pi(1(T)) = \pi(I) = \pi|_{\mathfrak{E}}(I),$$

$$\eta \circ \varphi(T) = \eta(\zeta) = \zeta(\pi(T)) = \pi(\zeta(T)) = \pi(T) = \pi|_{\mathfrak{E}}(T),$$

o que verifica o desejado. Segue-se que $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é a extensão determinada por T, como queríamos.

∎

Observe que, na proposição anterior, não há unicidade na escolha do T que determina a extensão; A nossa escolha feita de modo que $\varphi(T) = \zeta$ mostra que na verdade qualquer perturbação compacta de T teria funcionado igualmente para os nossos propósitos.

Existe portanto uma correspondência (embora não 1-1) entre operadores essencialmente normais e extensões dos compactos por $C(X)$ com $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Em particular, o que observamos no parágrafo anterior sobre a escolha de T módulo os compactos nos diz que podemos considerar uma correspondência 1-1 entre *elementos normais* da álgebra de Calkin e extensões dos compactos por $C(X)$ com $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. No momento, porém, estamos mais interessados no contexto de operadores essencialmente normais.

A idéia agora é tentar tirar vantagem da correspondência acima e, de alguma forma, interpretar o problema de classificação de operadores essencialmente normais em termos de um problema envolvendo a linguagem de extensões; ou seja, precisamos de um conceito adequado de *equivalência de extensões*, para que o problema de classificação, via equivalência unitária módulo os compactos, dos operadores essencialmente normais, seja equivalente ao problema de classificação, via esta possível equivalência, das extensões dos compactos por $C(X)$ com $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. De fato, existe um tal conceito de equivalência entre extensões, que definiremos a seguir (não entraremos muito em detalhes sobre as tecnicalidades desta definição, por enquanto; isto será feito no capítulo 2).

Definição 1.1.8. Dado X espaço métrico compacto, dizemos que extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ dos compactos por $C(X)$ são *equivalentes* quando existir um operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário tal que $\mathfrak{E}_2 = U\mathfrak{E}_1U^*$ e $\varphi_1(T) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T), \forall T \in \mathfrak{E}_1$.

A relação definida acima é claramente uma relação de equivalência. O teorema a seguir dará a equivalência entre os dois problemas de classificação.

Teorema 1.1.9. *Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normais. Então, $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, as extensões determinadas por T_1 e por T_2 são equivalentes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$. Tome $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tais que $T_2 = \mathrm{Ad}U(T_1) + K$. Sejam $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ as extensões determinadas por T_1 e T_2, respectivamente.

Afirmamos que $\mathfrak{E}_2 = U\mathfrak{E}_1U^*$: de fato, $\mathrm{Ad}U$ é um *-automorfismo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\mathrm{Ad}U(I) = I$, $\mathrm{Ad}U(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Além disso,

$$\mathrm{Ad}U(T_1 - U^*KU) = \mathrm{Ad}U(T_1) + \mathrm{Ad}U(U^*KU) = \mathrm{Ad}U(T_1) + K = T_2.$$

Como $\mathfrak{E}_1 = C^*(I, T_1, \mathcal{K}(\mathcal{H})) = C^*(I, T_1 - U^*KU, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, vemos do observado acima que

$$U\mathfrak{E}_1U^* = \mathrm{Ad}U(\mathfrak{E}_2) = \mathrm{Ad}U(C^*(I, T_1 - U^*KU, \mathcal{K}(\mathcal{H}))) = C^*(I, T_2, \mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathfrak{E}_2.$$

Vamos agora provar que $\varphi_1(T) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T), \forall T \in \mathfrak{E}_1$: basta para isso provar que φ_1 coincide com $\varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$ nos geradores de $\mathfrak{E}_1$, pois ambos são *-homomorfismos. Ora, claramente estas duas funções coincidem em $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, e $\varphi_1(I) = 1 = \varphi_2(I) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(I)$. Além disso,

$$\varphi_1(T_1) = \zeta = \varphi_2(T_2) = \varphi_2(\mathrm{Ad}U(T_1) + K) = \varphi_2(\mathrm{Ad}U(T_1)),$$

verificando o afirmado. Segue-se que as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ são equivalentes.

($\Leftarrow$) Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o operador unitário que implementa a equivalência entre as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$. Então,

$$\varphi_2(T_2) = \zeta = \varphi_1(T_1) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T_1),$$

de onde vem que $T_2 - \mathrm{Ad}U(T_1) \in \ker(\varphi_2) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, provando assim que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$.

■

Portanto, para resolver o problema de classificação dos operadores essencialmente normais, é suficiente solucionar o problema de classificação de extensões dos compactos por $C(X)$ para os subconjuntos compactos X de $\mathbb{C}$; ou seja, se para um dado $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto sabemos classificar as extensões dos compactos por $C(X)$, então saberemos classificar os operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é X.

Agora, abordar o problema do ponto de vista de extensões é bastante vantajoso, por uma série de razões; vejamos a seguir uma delas:

Sabemos que se dois espaços métricos compactos X, Y são homeomorfos, então as C*-álgebras $C(X), C(Y)$ são *-isomorfas. Digamos que $\eta : C(Y) \longrightarrow C(X)$ é um tal *-isomorfismo. Então, dadas duas extensões $(Y, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(Y, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ dos compactos por $C(Y)$, é fácil ver que estas extensões são equivalentes se, e somente se, as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \eta \circ \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \eta \circ \varphi_2)$ dos compactos por $C(X)$ são equivalentes. Assim, em particular, se $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}$ são homeomorfos e tivermos classificado os operadores essencialmente normais com espectro essencial X_1, então teremos também classificado os operadores essencialmente normais com espectro essencial X_2, utilizando a teoria de extensões.

Antes de continuarmos, gostaríamos de fazer agora a classificação dos operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$. Este caso é bastante simples, e nos será muito útil no futuro. Na demonstração, utilizaremos o teorema de Weyl-von Neumann-Berg mencionado na proposição; sua prova é encontrada no apêndice B (Teorema B.2.6).

Proposição 1.1.10. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Então, todos os operadores essencialmente normais com espectro essencial X são equivalentes.*

Demonstração. Primeiramente, considere um operador essencialmente normal $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com $\sigma_e(T) = X$ qualquer. O elemento $\pi(T) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é normal e $\sigma(\pi(T)) = X \subseteq \mathbb{R}$, logo $\pi(T)$ é auto-adjunto, ou seja, $\pi(T) = \pi(T)^*$. Portanto, $T - T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Ora, mas $T - T^* = 2i\mathrm{Im(T)}$, e portanto $\mathrm{Im(T)} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, de onde temos $T = \mathrm{Re(T)} + i\mathrm{Im(T)} = \mathrm{Re(T)} + K$, para $K = i\mathrm{Im(T)}$ compacto.

Agora, tome arbitrariamente operadores essencialmente normais T_1, T_2 tais que $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2) = X$. Conforme observado acima, existem operadores compactos K_1, K_2 tais que $T_1 = \mathrm{Re(T_1)} + K_1$, $T_2 = \mathrm{Re(T_2)} + K_2$. Em particular, temos que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{Re(T_1)}$, $T_2 \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{Re(T_2)}$. Ora, mas também

$$\sigma_e(\mathrm{Re(T_1)}) = \sigma_e(T_1) = X = \sigma_e(T_2) = \sigma_e(\mathrm{Re(T_2)}),$$

e portanto como $\mathrm{Re(T_1)}$ e $\mathrm{Re(T_2)}$ são auto-adjuntos concluímos do teorema de Weyl-von Neumann-Berg que $\mathrm{Re(T_1)} \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{Re(T_2)}$. De imediato temos

$$T_1 \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{Re(T_1)} \sim_{\mathcal{K}} \mathrm{Re(T_2)} \sim_{\mathcal{K}} T_2,$$

o que completa a demonstração.

■

Conforme observamos após o teorema 1.1.9, temos como corolário da proposição anterior a classificação dos operadores essencialmente normais cujo espectro essencial $X \subseteq \mathbb{C}$ é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Nós o enunciaremos aqui por completeza.

Corolário 1.1.11. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Então, todos os operadores essencialmente normais com espectro essencial X são equivalentes.*

Interpretando estes resultados no contexto de extensões vemos que, se $X \subseteq \mathbb{C}$ é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}$, então existe apenas uma extensão dos compactos por $C(X)$, a menos de equivalência.

A outra grande vantagem da formulação do problema original no contexto de extensões é que podemos introduzir os conceitos e técnicas da álgebra homológica para o estudo do problema. Vejamos brevemente como isto será feito nos capítulos seguintes:

Dado X um espaço métrico compacto, denotaremos por $\mathrm{Ext}(X)$ o conjunto das classes de equivalência de extensões dos compactos por $C(X)$; mais precisamente, na seção 2.2, definiremos o *invariante de Busby* de uma extensão dos compactos por $C(X)$, e na seção 2.3 definiremos $\mathrm{Ext}(X)$ como o conjunto das classes de equivalência dos *invariantes de Busby* de extensões dos compactos por $C(X)$ (deixaremos as sutilezas oriundas da teoria de conjuntos nesta definição para a seção 2.3). O primeiro grande objetivo será demonstrar que $\mathrm{Ext}(X)$ possui uma estrutura de grupo abeliano; para isto, precisamos de um estudo detalhado das extensões dos compactos por $C(X)$ e de seus invariantes de Busby, algo que será feito no capítulo 2. Na seção 2.3 nós definiremos o conceito de *soma-chapéu* de extensões, e veremos como esta operação pode ser levada ao quociente $\mathrm{Ext}(X)$. Um ponto importante na verificação de que $\mathrm{Ext}(X)$ é grupo é identificar o elemento neutro da operação considerada. Veremos que o elemento neutro é dado pelo correspondente dos invariantes de Busby da classe das extensões *triviais*, ou seja, das extensões que cindem (à direita). Para relembrar, dada uma seqüência exata de C*-álgebras,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

dizemos que esta seqüência *cinde (à direita)* quando existe um *-homomorfismo $\eta : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{E}$ tal que $\varphi \circ \eta : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é a função identidade. Observe que φ é uma inversa à esquerda para um tal η, e portanto este η é necessariamente injetor.

Um problema que temos em mãos, evidentemente, é o de verificar que extensões triviais sempre existem, para qualquer espaço métrico compacto X. Isto será feito na seção 2.4, juntamente com um estudo aprofundado das extensões triviais.

Uma vez que tenhamos em mãos o fato de que $\mathrm{Ext}(X)$ é grupo para todo espaço métrico compacto X, começaremos a colher alguns resultados. Dados dois espaços métricos compactos X, Y e uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$, obteremos um homomorfismo de grupos $\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(Y)$, de modo que Ext, o objeto matemático que faz corresponder a cada espaço métrico compacto X um grupo abeliano, e a cada função contínua $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços métricos compactos um homomorfismo de grupos $\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(Y)$, é um *funtor*; mais especificamente, conforme mencionado brevemente na introdução, provaremos que Ext é um funtor covariante da categoria dos espaços métricos compactos na categoria dos grupos abelianos.

O que virá na seqüência será uma incursão na parte mais técnica da teoria do funtor Ext. Precisaremos construir uma maquinaria bastante pesada para conseguirmos atingir o objetivo final do problema de classificação de operadores essencialmente normais. Em algum momento (capítulo 5), a teoria de índices de Fredholm entrará em cena, de uma maneira bastante interessante, em termos de um homomorfismo de grupos

$$\gamma_X : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z}),$$

onde X é espaço métrico compacto e, como mencionado na introdução, $\pi^1(X)$ denota o primeiro grupo de cohomotopia de X. Nesta parte, o objetivo principal será provar que γ_X é sempre um isomorfismo de grupos quando $X \subseteq \mathbb{C}$; no final, será exatamente este o resultado que utilizaremos para provar o teorema de Brown-Douglas-Fillmore de classificação de operadores essencialmente normais.

1.2 Classificação dos Elementos Unitários da Álgebra de Calkin

Na seção anterior, vimos a classificação dos operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Nesta seção, estaremos interessados nos operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Sem dúvida isto já nos será útil a título de exemplo, mas vejamos mais uma motivação deste estudo em termos de classificação de elementos unitários da álgebra de Calkin:

É sabido da teoria de C*-álgebras que os elementos unitários de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$, com unidade, são precisamente os elementos normais cujo espectro é um subconjunto de $\mathbb{S}^1$. Se $\mathfrak{t} = \pi(T)$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin com espectro contido *propriamente* em $\mathbb{S}^1$, então o espectro essencial do operador T é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}$; portanto, em virtude do corolário 1.1.11 já temos a classificação, via equivalência unitária (forte), deste tipo de elemento unitário da álgebra de Calkin. Para conseguirmos classificar *todos* os elementos unitários da álgebra de Calkin via equivalência unitária forte, falta portanto considerarmos aqueles elementos unitários cujo espectro é precisamente o círculo $\mathbb{S}^1$ inteiro, ou seja, precisamos ainda classificar os operadores essencialmente normais com espectro essencial $\mathbb{S}^1$.

Algo interessante que veremos com o estudo deste exemplo é que o índice de Fredholm fará mais uma aparição, reforçando a esperança de que ele, juntamente com o espectro essencial, forneça a classificação geral dos operadores essencialmente normais.

Para a compreensão deste capítulo, é necessário o conhecimento dos conceitos e resultados do apêndice C sobre seqüências de operadores. As tecnicalidades das demonstrações lá contidas não serão necessárias para a compreensão desta seção, portanto o leitor que quiser simplesmente acompanhar o exemplo pode assumir os resultados utilizados daquele apêndice sem maiores problemas.

Demonstraremos antes mais três propriedades sobre a equivalência unitária módulo os compactos. As duas primeiras (proposição 1.2.1 e lema 1.2.4) são triviais, a terceira nem tanto (teorema 1.2.5).

Vejamos a primeira delas.

Proposição 1.2.1. *Sejam $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores de Fredholm tais que $T \sim_{\mathcal{K}} S$. Então,* $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

Demonstração. Suponha que $UTU^* = S + K$, para um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Então,

$$\text{ind}(S) = \text{ind}(S + K) = \text{ind}(UTU^*) = \text{ind}(U) + \text{ind}(T) - \text{ind}(U) = \text{ind}(T).$$

■

Observação 1.2.2. Gostaríamos de observar que, a partir desta seção, trabalharemos muito simultaneamente com álgebras de operadores lineares limitados em diversos espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis. A priori os espaços de Hilbert em questão são distintos, mas é sabido da teoria clássica de análise funcional que todos os espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis são isometricamente isomorfos; ou seja, todos são essencialmente o espaço $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N}^*)$, apenas interpretado de maneiras diferentes. Mais formalmente, se $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis, então existe um operador unitário $V : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, o que implementa portanto um isomorfismo isométrico entre estes espaços. Desta forma, sempre que estudarmos um conceito que involve "um" espaço de Hilbert de dimensão infinita separável (isto é, sem se preocupar com a caracterização em particular do espaço, apenas com sua estrutura), e em algum momento no estudo deste conceito precisemos considerar diversos tais espaços de Hilbert, podemos sem perda de generalidade assumir que todos são o mesmo espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$.

Por vezes, porém, é vantajoso separarmos as coisas e fazer distinção entre os espaços de Hilbert considerados. Tendo isto em mente, precisamos a rigor de definições formais dos conceitos apresentados até agora, levando em consideração o fato de que podemos estar trabalhando em espaços de Hilbert "distintos". Isto pode ser feito facilmente, ao substituirmos o conceito de equivalência unitária módulo os compactos apresentada anteriormente por uma versão ligeiramente modificada (sem nenhuma perda de generalidade, pelo observado acima), e reinterpretando todos os resultados obtidos em termos desta outra interpretação da equivalência:

Definição 1.2.3. Operadores $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ são ditos *unitariamente equivalentes módulo os compactos* quando T_2 é unitariamente equivalente a uma perturbação compacta de T_1, ou seja, quando existirem um operador unitário $U : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ tais que

$$T_1 + K = UT_2U^*.$$

Tendo observado isto, vejamos agora as duas novas propriedades da equivalência unitária módulo os compactos.

Lema 1.2.4. *Suponha que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, onde $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ são também espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis, e considere operadores $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ tais que $T \sim_{\mathcal{K}} S$. Se $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, então $T \oplus R \sim_{\mathcal{K}} S \oplus R$.*

Demonstração. Tome um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ tais que $S = U(T + K)U^*$. Então, os operadores $\widetilde{U}, \widetilde{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definidos por $\widetilde{U} = U \oplus I_{\mathcal{H}_2}$, $\widetilde{K} = K \oplus 0_{\mathcal{H}_2}$ são tais que $\widetilde{U}$ é unitário, $\widetilde{K}$ é compacto, e

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}(T \oplus R + \widetilde{K})\widetilde{U}^* &= (U \oplus I_{\mathcal{H}_2})((T + K) \oplus R)(U^* \oplus I_{\mathcal{H}_2}) = \\
&= (U(T + K)U^*) \oplus (I_{\mathcal{H}_2} R I_{\mathcal{H}_2}) = \\
&= S \oplus R,
\end{aligned}$$

provando que $T \oplus R \sim_{\mathcal{K}} S \oplus R$, como queríamos.

■

Antes de vermos o próximo resultado, lembremos da teoria de operadores em espaços de Hilbert que, dados operadores $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, temos que o operador $T_1 \oplus T_2$ é unitariamente equivalente ao operador $T_2 \oplus T_1$; isto é obtido através do operador unitário U entre os espaços $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$ dado por

$$\begin{aligned}
U : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1 \\
(\xi_1, \xi_2) &\longmapsto (\xi_2, \xi_1).
\end{aligned}$$

Portanto, em particular, $T_1 \oplus T_2 \sim_{\mathcal{K}} T_2 \oplus T_1$. Usaremos este resultado diversas vezes no decorrer do texto, começando com o teorema a seguir.

Teorema 1.2.5. *Sejam operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ essencialmente normal e $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ normal tais que $\sigma_e(N) \subseteq \sigma_e(T)$. Então, $N \oplus T \sim_{\mathcal{K}} T \oplus N \sim_{\mathcal{K}} T$.*

Demonstração. Já sabemos que $N \oplus T \sim_{\mathcal{K}} T \oplus N$ pela observação acima; basta, portanto, verificarmos a outra equivalência.

Tome $\Lambda \subseteq \sigma_e(T)$ enumerável e denso. Considere uma seqüência $\{\lambda^{(r)}\}_r \subseteq \Lambda$ onde cada $x \in \Lambda$ aparece infinitas vezes na seqüência $\{\lambda^{(r)}\}_r$; em particular, note que esta seqüência satisfaz $\sigma_e(T) = \overline{\{\lambda^{(r)}\}_r}$. Utilizando o corolário C.2.5 para o operador T e a seqüência $\{\lambda^{(r)}\}_r$, temos que

$$T = D \oplus R + L,$$

onde $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ é compacto e D é um operador diagonal com seqüência de autovalores $\{\lambda^{(r)}\}_r$.

Afirmamos que $\sigma_e(D) = \sigma_e(T)$: de fato, por um lado temos

$$\sigma_e(D) \subseteq \sigma_e(D) \cup \sigma_e(R) = \sigma_e(D \oplus R) = \sigma_e(T).$$

Por outro lado, cada $\lambda^{(r)}$ é um autovalor de multiplicidade infinita de D, e portanto pertence a $\sigma_e(D)$, visto que D é normal (ver teorema B.1.4); assim, $\{\lambda^{(r)}\}_r \subseteq \sigma_e(D)$, de onde segue que $\sigma_e(T) = \overline{\{\lambda^{(r)}\}_r} \subseteq \sigma_e(D)$, verificando o afirmado.

A hipótese $\sigma_e(N) \subseteq \sigma_e(T)$ nos garante agora que

$$\sigma_e(D \oplus N) = \sigma_e(D) \cup \sigma_e(N) = \sigma_e(T) \cup \sigma_e(N) = \sigma_e(T) = \sigma_e(D),$$

e como N e $D \oplus N$ são operadores normais, temos pelo teorema de Weyl-von Neumann-Berg que $D \oplus N \sim_{\mathcal{K}} D$. Logo, pelo lema 1.2.4, $D \oplus N \oplus R \sim_{\mathcal{K}} D \oplus R$. Utilizando novamente a observação que antecede este teorema obtemos finalmente

$$T \sim_{\mathcal{K}} D \oplus R \sim_{\mathcal{K}} D \oplus R \oplus N \sim_{\mathcal{K}} T \oplus N,$$

concluindo a demonstração.

■

Para provarmos o nosso resultado de classificação de operadores essencialmente normais com espectro essencial $\mathbb{S}^1$, precisamos de um teorema de estrutura para isometrias conhecido como o *teorema da decomposição de Wold-von Neumann*. Nós o enunciaremos aqui por referência; a prova do mesmo pode ser encontrada por exemplo em [17], teorema 3.5.17.

Teorema 1.2.6 (Wold-von Neumann). *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma isometria. Então, ou T é unitário, ou T é um shift de alguma multiplicidade, ou T é soma direta de um unitário com um shift de alguma multiplicidade.*

Por *shift de alguma multiplicidade*, entenda-se um operador que é soma direta de cópias de um shift unilateral, onde a multiplicidade (um valor $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) determina o número de fatores da soma direta; por exemplo, um shift de multiplicidade 7 é uma soma direta de sete cópias de um shift unilateral, enquanto que um shift de multiplicidade *infinita* é uma soma direta de uma quantidade infinita (enumerável) de cópias de um shift unilateral.

É conseqüência elementar das teorias pertinentes (espectro essencial e índice de Fredholm) que um shift de multiplicidade n possui espectro essencial $\mathbb{S}^1$ e, caso $n < \infty$, então ele é um operador de Fredholm com índice de Fredholm $-n$, e é também essencialmente normal, visto que a soma direta finita de operadores essencialmente normais é essencialmente normal.

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, denotaremos por $\mathcal{S}_n$ o operador que é soma direta de n cópias do operador de shift unilateral fixado $\mathcal{S}$, e por $\mathcal{R}_n$ o adjunto de $\mathcal{S}_n$. Claramente, qualquer shift de multiplicidade n é unitariamente equivalente a $\mathcal{S}_n$, e o adjunto de qualquer shift de multiplicidade n é unitariamente equivalente a $\mathcal{R}_n$.

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o resultado principal da seção.

Teorema 1.2.7. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normal tal que $\pi(T)$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin. Então,*

- *se* $\operatorname{ind}(T) = 0$*, então T é perturbação compacta de um operador unitário;*
- *se* $\operatorname{ind}(T) = -n < 0$*, então $T \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{S}_n$;*
- *se* $\operatorname{ind}(T) = n > 0$*, então $T \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{R}_n$;*

Demonstração. Como $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$, podemos supor sem perda de generalidade que $\operatorname{ind}(T) \leq 0$.

Como $\pi(T)$ é unitário, temos $T^*T - I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Denotando $|T| = (T^*T)^{1/2}$, podemos escrever $T^*T - I = (|T| - I)(|T| + I)$. Agora, $|T| + I$ é inversível; de fato, isto é conseqüência direta do teorema do mapeamento espectral, pois como $|T|$ é um operador positivo, logo $\sigma(|T|) \subseteq [0, +\infty)$ e portanto

$$\sigma(|T| + I) = \{\lambda + 1 : \lambda \in \sigma(|T|)\} \subseteq [1, +\infty),$$

provando desta forma que $0 \notin \sigma(|T| + I)$, ou seja, $|T| + I$ é inversível.

Concluímos desta forma que $|T| - I = (T^*T - I)(|T| + I)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Denote $K' = |T| - I$, para simplificar a notação. Considere agora $T = W|T|$ a decomposição polar do operador T. Então,

$$T = W|T| = W(I + K') = W + WK' = W + K,$$

onde $K = WK' \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Tiramos da equação acima que W é operador de Fredholm, pois é perturbação compacta de T, e ainda $\operatorname{ind}(W) = \operatorname{ind}(T) \leq 0$. Logo,

$$\dim \ker W \leq \dim \ker W^* = \dim(\operatorname{ran}(W))^{\perp}.$$

Tome portanto $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma isometria parcial cujo espaço inicial é $\ker(W)$ é cujo espaço final está contido em $(\operatorname{ran}(W))^{\perp}$. Note em particular que L é compacto, pois é de posto finito.

Denote $V = W + L$; observe que V é uma isometria, pois W é isometria em $(\ker(W))^{\perp}$ e zero em $\ker(W)$, e L é isometria em $\ker(W)$ e zero em $(\ker(W))^{\perp}$. Denote também $\widetilde{K} = K - L$, observando que $\widetilde{K}$ é claramente compacto. Além disso,

$$T = W + K = W + L - L + K = V + \widetilde{K}.$$

Portanto, em particular V é um operador de Fredholm com $\operatorname{ind}(V) = \operatorname{ind}(T)$. Analisemos separadamente os casos $\operatorname{ind}(T) = 0$ e $\operatorname{ind}(T) < 0$:

No caso $\operatorname{ind}(T) = 0$, temos $\operatorname{ind}(V) = 0$ e assim, pelo teorema da decomposição de Wold-von Neumann, V é unitário, visto que as isometrias com um somando de shift possuem índice não trivial. Temos de imediato que T é perturbação compacta do unitário V, demonstrando o que queríamos para este caso.

No caso $\operatorname{ind}(T) = -n < 0$, temos $\operatorname{ind}(V) = -n < 0$ e assim, pelo teorema da decomposição de Wold-von Neumann, existem duas possibilidades: na primeira delas, V é um shift de alguma multiplicidade; esta multiplicidade é na verdade $n = -\operatorname{ind}(V)$. Portanto, $T \sim_{\mathcal{K}} V$, com V um shift de multiplicidade n, de onde $T \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{S}_n$ pela observação que antecede o teorema, como desejado. Na segunda possibilidade, $V = U \oplus S$, onde U é um operador unitário e S é um shift alguma multiplicidade $(-\operatorname{ind}(S))$; mas $\operatorname{ind}(U) = 0$, logo

$$\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(U) + \operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(U \oplus S) = \operatorname{ind}(V),$$

ou seja, S tem multiplicidade $-\operatorname{ind}(S) = -\operatorname{ind}(V) = n$.

Observe agora que U é um operador unitário, logo é normal, e $\sigma_e(U) \subseteq \mathbb{S}^1 = \sigma_e(S)$;

portanto, pelo teorema 1.2.5, $V = U \oplus S \sim_{\mathcal{K}} S$, de onde segue que

$$T = V + \widetilde{K} \sim_{\mathcal{K}} V \sim_{\mathcal{K}} S,$$

ou seja, $T \sim_{\mathcal{K}} S$ onde S é shift de multiplicidade $n = -\mathrm{ind}(T)$, e portanto $T \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{S}_n$, concluindo assim a demonstração.

■

Podemos agora classificar os operadores essencialmente normais cujo espectro essencial é precisamente $\mathbb{S}^1$. Como esperado, o índice de Fredholm definirá a classificação, em virtude do teorema anterior.

Corolário 1.2.8. *Sejam $T, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores essencialmente normais tais que $\sigma_e(T) = \sigma_e(V) = \mathbb{S}^1$. Então, $T \sim_{\mathcal{K}} V$ se, e somente se,* $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(V)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Conseqüência imediata da proposição 1.2.1.

($\Leftarrow$) Escreva $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(V) = -n$. Se $n > 0$, então do teorema 1.2.7,

$$T \sim_{\mathcal{K}} \mathcal{S}_n \sim_{\mathcal{K}} V,$$

e portanto $T \sim_{\mathcal{K}} V$. O caso $n > 0$ é análogo. Se $n = 0$, então existem operadores unitários $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tais que $T \sim_{\mathcal{K}} U_1$, $V \sim_{\mathcal{K}} U_2$. Ora, mas assim

$$\sigma_e(U_1) = \sigma_e(T) = \sigma_e(V) = \sigma_e(U_2),$$

e como U_1, U_2 são unitários, e portanto normais, segue-se do teorema de Weyl-von Neumann-Berg que $U_1 \sim_{\mathcal{K}} U_2$. Logo,

$$T \sim_{\mathcal{K}} U_1 \sim_{\mathcal{K}} U_2 \sim_{\mathcal{K}} V,$$

provando o corolário.

■

Uma conseqüência interessante do corolário acima é a seguinte: sabemos que, para cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$, existe um operador essencialmente normal com espectro essencial $\mathbb{S}^1$ e índice de Fredholm n (basta tomar $\mathcal{S}_{-n}$ caso $n < 0$, $\mathcal{R}_n$ caso $n > 0$, e um shift bilateral caso $n = 0$). Portanto, vemos que existe uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{Z}$ e o conjunto de classes de equivalência de operadores essencialmente normais com espectro essencial $\mathbb{S}^1$, bijeção esta implementada pelo índice de Fredholm. Em particular, utilizando a linguagem de extensões introduzida na seção anterior, produzimos uma bijeção entre $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$ e $\mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Extensões e Invariantes de Busby

Neste capítulo faremos um estudo detalhado das extensões dos compactos por $C(X)$, e dos invariantes de Busby destas extensões. Definiremos o conjunto $\mathrm{Ext}(X)$, e daremos a ele uma estrutura de semigrupo abeliano.

2.1 Extensões de $\mathcal{K}$ por $C(X)$

Começaremos esta seção definindo novamente os conceitos de extensões generalizadas de C*-álgebras e de extensões dos compactos por $C(X)$, mencionados na seção 1.1.

Definição 2.1.1. Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ duas C*-álgebras. Uma *extensão generalizada de* $\mathfrak{A}$ *por* $\mathfrak{B}$ é uma seqüência exata curta de C*-álgebras e *-homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \longrightarrow 0.$$

Definição 2.1.2. Seja X um espaço métrico compacto. Uma *extensão de* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *por* $C(X)$ é uma extensão da forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} C(X) \longrightarrow 0,$$

onde $\mathfrak{E}$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contém o operador identidade I e o ideal dos compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, φ é unital, e a seta "$\hookrightarrow$" indica a inclusão.

Observação 2.1.3. Na definição anterior nós fizemos uso explícito do espaço de Hilbert fixado $\mathcal{H}$, mas naturalmente estaremos interessados em extensões de $\mathcal{K}(\widetilde{\mathcal{H}})$ por $C(X)$ onde $\widetilde{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert qualquer de dimensão infinita separável; por mais que todos estes espaços sejam isometricamente isomorfos (ver observação 1.2.2), existem momentos em que é útil e didático fazermos distinção entre eles. Utilizaremos o símbolo $\mathcal{K}$ para indicar o ideal dos operadores compactos em algum dado espaço de

Hilbert, sempre que não for necessário explicitar o espaço de Hilbert em questão; nestes casos evitaremos o uso do símbolo $\mathcal{K}(\widetilde{\mathcal{H}})$, e utilizaremos simplesmente a terminologia "extensão dos *compactos* por $C(X)$".

No contexto das extensões generalizadas de C*-álgebras, é possível definir diversas noções de *equivalência* de extensões generalizadas; nós estaremos interessados em apenas uma delas, dada pela definição a seguir.

Definição 2.1.4. Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ C*-álgebras. Dadas duas extensões generalizadas de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{B}$, digamos,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi'} \mathfrak{E}' \xrightarrow{\varphi'} \mathfrak{B} \longrightarrow 0,$$

dizemos que elas são *equivalentes* quando existir um *-isomorfismo $\eta : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{E}'$ tal que o diagrama a seguir comute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"] & \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r, "\psi'"] & \mathfrak{E}' \arrow[r, "\varphi'"] & \mathfrak{B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A relação definida acima é obviamente uma relação de equivalência.

Neste trabalho não estudaremos as extensões *generalizadas* dos compactos por $C(X)$. Estamos interessados apenas nas extensões dos compactos por $C(X)$ como definidas em 2.1.2, pois estas extensões estão intimamente relacionadas com o nosso problema de teoria de operadores, como visto no capítulo anterior.

Façamos, porém, uma breve discussão para mostrar que, ao contrário do que possa parecer, se avaliarmos o problema das extensões *generalizadas* dos compactos por $C(X)$ puramente do ponto de vista da álgebra homológica, *não* há uma perda de generalidade considerável envolvida no estudo da classe restrita de extensões dos compactos por $C(X)$, de acordo com a definição 2.1.2, no lugar da definição usual de extensão generalizada. Esta discussão tem caráter ilustrativo e não é necessária para o estudo principal; o conhecimento dos resultados básicos da teoria de representações de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (ver seção A.2) é indicado para uma melhor compreensão do que segue.

Consideremos uma extensão generalizada arbitrária usual protótipo de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ por $C(X)$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} C(X) \longrightarrow 0.$$

O espaço X é métrico, logo $C(X)$ é separável; como $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é separável e a seqüência é exata, temos que $\mathfrak{E}$ é separável. Podemos encontrar uma *-representação fiel de $\mathfrak{E}$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, digamos, $\eta : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, e assim construir um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"'] & C(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\eta\circ\psi"] & \mathrm{ran}(\eta) \arrow[r, "\varphi\circ\eta^{-1}"] & C(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

É claro que a linha de baixo do diagrama é exata, sendo portanto uma outra extensão dos compactos por $C(X)$ equivalente à primeira. Estudando as extensões módulo a relação de equivalência, concluímos daí que, sem perda de generalidade, podemos considerar inicialmente $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Se supusermos portanto $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, temos que ψ define uma *-representação de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ em $\mathcal{H}$. Lembremos rapidamente os conceitos básicos de teoria de *-representações de C*-álgebras que serão utilizados: Se $\Psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma *-representação de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$, definimos o *espaço nulo* e o *espaço essencial* da representação Ψ como os subespaços de Hilbert de $\mathcal{H}$ dados respectivamente por

$$\mathcal{H}^0(\Psi) = \{\xi \in \mathcal{H} : T(\xi) = 0 \ \forall T \in \mathrm{ran}(\Psi)\},$$

$$\mathcal{H}_{ess}(\Psi) = \overline{\mathrm{span}}\ \{T(\xi) : T \in \mathrm{ran}(\Psi), \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Estes espaços são naturalmente $\mathrm{ran}(\Psi)$-invariantes e $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0(\Psi) \oplus \mathcal{H}_{ess}(\Psi)$. Logo, de acordo com esta decomposição de $\mathcal{H}$ podemos escrever $\Psi = 0 \oplus \Psi'$, a soma direta das representações $0 : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}^0(\Psi))$ e $\Psi' : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{ess}(\Psi))$, induzidas por Ψ. Representações que possuem espaço nulo diferente de zero são chamadas representações *degeneradas*; as que possuem espaço nulo zero são denominadas representações *não-degeneradas*. Agora, a subrepresentação nula de Ψ sobre o seu espaço nulo não carrega informação alguma sobre a representação Ψ, e a subrepresentação Ψ' mencionada acima é não-degenerada; é razoável, portanto, sempre que tivermos uma representação degenerada Ψ, desconsiderarmos seu somando direto nulo e olharmos para Ψ como uma representação não-degenerada sobre o espaço essencial $\mathcal{H}_{ess}(\Psi)$ apenas. Não há perda essencial de generalidade neste processo, e ganhamos em simplicidade e clareza.

Voltando ao nosso problema, não haverá portanto perda essencial de generalidade em considerarmos apenas as ψ que são representações *não-degeneradas* do ideal dos compactos. Neste caso, temos então da teoria de representações do ideal dos compactos (ver seção A.2) que existe uma decomposição $\mathcal{H} = \oplus_{k\in\Lambda}\mathcal{H}_k$, e operadores unitários $U_k : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_k$, tais que $\psi = \oplus_k \mathrm{Ad}U_k$ com relação à decomposição de $\mathcal{H}$ dada.

Afirmamos que os espaços $\mathcal{H}_k$ são $\mathfrak{E}$-invariantes para todo $k \in \Lambda$. Tome portanto arbitrariamente $T \in \mathfrak{E}$, $m \in \Lambda$ e $\xi \in \mathcal{H}_m$. Precisamos provar que $T\xi \in \mathcal{H}_m$.

Considere $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a projeção ortogonal sobre o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por $U_m^*\xi$; P é um operador compacto, pois tem posto 1. Note que $\mathrm{ran}(\psi)$ é um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{E}$, visto que $\mathrm{ran}(\psi) = \ker(\varphi)$. Portanto, dado um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, existe um operador compacto $K' \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que

$$T\psi(K) = \psi(K').$$

Assim, em particular existe um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $T\psi(P) = \psi(K)$. Desta forma, podemos escrever (omitindo as inclusões de $\mathcal{H}_m$ em $\mathcal{H}$)

$$\begin{aligned} T\xi = TU_mU_m^*\xi = TU_mPU_m^*\xi = T(\oplus_k U_kPU_k^*)\xi = \\ = T\psi(P)\xi = \psi(K)\xi = (\oplus_k U_kKU_k^*)\xi = \\ = U_mKU_m^*\xi \in \mathcal{H}_m, \end{aligned}$$

e o afirmado segue. Temos com isto que cada $T \in \mathfrak{E}$ pode ser escrito como uma soma direta de operadores relativa à decomposição $\mathcal{H} = \oplus_{k\in\Lambda}\mathcal{H}_k$, ou seja,

$$T = \oplus_{k\in\Lambda}T_k.$$

Tome arbitrariamente um $m \in \Lambda$ e $T \in \mathfrak{E}$, e defina $T' = U_m^*T_mU_m$. Vamos provar agora que na definição de T' poderíamos ter tomado qualquer outro índice de Λ, isto é, T' independe do $m \in \Lambda$ escolhido. Para tanto, note que, como observado acima, dado um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ existe um operador $K' \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $T\psi(K) = \psi(K')$, o que implica em

$$\begin{aligned} \oplus_k U_kK'U_k^* = \psi(K') = T\psi(K) = \\ = (\oplus_k T_k)(\oplus_k U_kKU_k^*) = \\ = \oplus_k T_kU_kKU_k^*, \end{aligned}$$

e portanto $T_kU_kKU_k^* = U_kK'U_k^*$, ou seja,

$$U_k^*T_kU_kK = K' \quad \forall k \in \Lambda.$$

Assim, dado $\xi \in \mathcal{H}$ arbitrário, basta tomarmos $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ como sendo a projeção ortogonal sobre o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por ξ, para que tenhamos, para todo $k \in \Lambda$,

$$U_k^*T_kU_k\xi = U_k^*T_kU_kK\xi = K'\xi = U_m^*T_mU_mK\xi = U_m^*T_mU_m\xi = T'\xi,$$

provando com isto que $U_k^* T_k U_k = T'$ $\forall k \in \Lambda$, como desejado. Deste modo, temos que $T_k = U_k T' U_k^*$ $\forall k \in \Lambda$, o que nos permite escrever, para todo $T \in \mathfrak{E}$,

$$T = \oplus_k U_k T' U_k^*.$$

O operador T' está unicamente determinado por T. Podemos então definir uma aplicação $\eta : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\eta(T) = T'$. É imediato da definição de T' que η é um *-homomorfismo injetor. Denote $\mathfrak{E}' = \mathrm{ran}(\eta)$, que é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *-isomorfa a $\mathfrak{E}$, via η.

Observe que, para $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$,

$$\eta \circ \psi(K) = \eta(\oplus U_k K U_k^*) = K,$$

ou seja, $\eta \circ \psi = \iota$, onde $\iota : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{E}'$ é a inclusão. Defina agora $\varphi' : \mathfrak{E}' \longrightarrow C(X)$ por $\varphi' = \varphi \circ \eta^{-1}$, ou seja, $\varphi'(T') = \varphi(T)$. É imediato ver que φ' é um *-homomorfismo sobrejetor; as definições de ι e φ' implicam também em

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathrm{ran}(\iota) = \eta(\mathrm{ran}(\psi)) = \eta(\ker(\varphi)) = \ker(\varphi'),$$

de onde obtemos uma extensão

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathfrak{E}' \xrightarrow{\varphi'} C(X) \longrightarrow 0,$$

que por construção é tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"'] & C(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathfrak{E}' \arrow[r, "\varphi'"] & C(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, a extensão obtida é equivalente a que tínhamos originalmente; portanto, na nossa convenção de que as representações ψ são não degeneradas podemos tomar, sem perda de generalidade, ψ como sendo a inclusão.

Estamos agora praticamente nos moldes da definição 2.1.2. O único detalhe que ainda não cuidamos foi o fato de $\mathfrak{E}$ conter o operador identidade. Isto pode em geral não ser verdade; porém, em todo caso, existe uma projeção $P \in \mathfrak{E}$ tal que $\varphi(P) = 1$ (ver por exemplo [8]). Denotando $\mathcal{H}' = \mathrm{ran}(P)$ (note que $\mathcal{H}'$ tem dimensão infinita, pois caso contrário P seria compacto e estaria portanto no núcleo de φ) e tomando $\mathcal{H} = (\mathcal{H}')^{\perp} \oplus \mathcal{H}'$, os operadores $T \in \mathfrak{E}$ podem ser escritos nesta decomposição como

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix};$$

em particular,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}'} \end{pmatrix}.$$

Assim, para um $T \in \mathfrak{E}$ arbitrário,

$$\varphi(T) = \varphi(T) \cdot 1 = \varphi(T)\varphi(P) = \varphi(TP),$$

de onde segue que

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix} = T - TP \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Vemos desta forma que apenas o elemento T_{22} carrega para $C(X)$ alguma informação sobre $\mathfrak{E}$, via φ, visto que o resto constitui um operador compacto, estando portanto no núcleo de φ. Podemos então, sem perda essencial de generalidade, considerar, para todos os efeitos, apenas a coordenada T_{22} dos operadores de $\mathfrak{E}$ e, neste caso, o operador P age como a identidade desejada. O requerimento de que φ seja unital é puramente técnico e comum quando se trabalha com C*-álgebras com unidade, e este será sempre o caso para as extensões determinadas por operadores essencialmente normais. Vemos assim que o estudo da teoria de extensões generalizadas dos compactos por $C(X)$, na classe restrita da definição 2.1.2, adequada para as nossas necessidades em teoria de operadores, não envolve uma grande perda de generalidade do ponto de vista da álgebra homológica.

A partir de agora, deixaremos de lado o contexto geral de extensões generalizadas de C*-álgebras e trabalharemos apenas com as extensões dos compactos por $C(X)$, de acordo com a definição 2.1.2.

Conforme mencionado e utilizado na seção 1.1, dado um espaço métrico compacto X e uma extensão

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} C(X) \longrightarrow 0,$$

podemos codificar toda a informação sobre esta extensão em uma tripla $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ (o espaço de Hilbert em questão estará subentendido por $\mathfrak{E}$); para efeitos de organização, façamos uma definição.

Definição 2.1.5. Dado X um espaço métrico compacto, uma *extensão dos compactos por* $C(X)$ é uma tripla $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$, onde X indica o espaço métrico em questão, $\mathfrak{E}$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, contendo o ideal dos compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ e o operador identidade I, e $\varphi : \mathfrak{E} \longrightarrow C(X)$ é um *-homomorfismo unital sobrejetor.

Um problema de óbvia relevância, ao se introduzir um novo objeto matemático, é decidir sobre a existência do objeto. Isto é o que faremos agora, para as extensões dos compactos por $C(X)$, com X um espaço métrico compacto.

Proposição 2.1.6. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, existe uma extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$.*

Demonstração. Seja $\Lambda \subseteq X$ enumerável e denso. Tome uma seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$ formada por todos os elementos de Λ, onde cada ponto isolado de X (que com certeza está em Λ) aparece infinitas vezes nesta seqüência; tal seqüência existe, pois Λ é enumerável. Então, esta seqüência tem naturalmente a propriedade que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o conjunto $\{x_k\}_{k\geq n}$ é denso em X. Defina

$$\begin{aligned} \psi : C(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \operatorname{diag}_k(f(x_k)) \end{aligned}$$

A compacidade de X, implicando na limitação de todas as funções de $C(X)$, garante que ψ está bem definida. É trivial verificar que ψ é um *-homomorfismo unital; além disso, ψ é injetor pois Λ é denso em X: de fato, se $\psi(f) = 0$, temos $f(x_k) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, e a densidade de Λ implica portanto em $f = 0$.

Assim, a imagem de ψ, $\operatorname{ran}(\psi)$, é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Temos então que $\mathfrak{E} := \operatorname{ran}(\psi) + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é também uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pois observe que $\operatorname{ran}(\psi) + \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \pi^{-1}(\pi(\operatorname{ran}(\psi)))$, onde π é a projeção na álgebra de Calkin, como fixado na introdução. Na verdade, $\mathfrak{E} = C^*(\operatorname{ran}(\psi), \mathcal{K}(\mathcal{H}))$.

Observe que $\operatorname{ran}(\psi) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{0\}$: de fato, se $f \in C(X)$ é tal que $\psi(f) = \operatorname{diag}_k(f(x_k))$ é um operador compacto, então $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrário tome $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $|f(x_k)| < \varepsilon$ para todo $k \geq n$. Agora, o conjunto $\{x_k\}_{k\geq n}$ é denso em X, logo $|f(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in X$. Como ε foi tomado arbitrariamente segue-se que $f = 0$, e assim $\psi(f) = 0$.

Portanto, todo elemento $T \in \mathfrak{E}$ escreve-se de maneira única como $T = T_\psi + T_\mathcal{K}$, com $T_\psi \in \operatorname{ran}(\psi)$ e $T_\mathcal{K} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Devido a este fato, estará bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{E} &\longrightarrow C(X) \\ T &\longmapsto \psi^{-1}(T_\psi). \end{aligned}$$

Facilmente verifica-se que φ é um *-homomorfismo; para dar a idéia, provaremos que

φ separa produtos: dados $T, S \in \mathfrak{E}$, $T = T_\psi + T_\mathcal{K}$, $S = S_\psi + S_\mathcal{K}$,

$$TS = (T_\psi + T_\mathcal{K})(S_\psi + S_\mathcal{K}) = T_\psi S_\psi + T_\psi S_\mathcal{K} + T_\mathcal{K} S_\psi + T_\mathcal{K} S_\mathcal{K} = T_\psi S_\psi + K,$$

onde $K = (T_\psi S_\mathcal{K} + T_\mathcal{K} S_\psi + T_\mathcal{K} S_\mathcal{K}) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. De imediato temos

$$\varphi(TS) = \varphi(T_\psi S_\psi + K) = \psi^{-1}(T_\psi S_\psi) = \psi^{-1}(T_\psi)\psi^{-1}(S_\psi) = \varphi(T)\varphi(S).$$

Os outros axiomas de *-homomorfismo são verificados analogamente.

Dado $f \in C(X)$ arbitrário, é claro que o operador $\psi(f)$ é um elemento de $\mathfrak{E}$ tal que $\varphi(T) = f$. Assim, vemos que φ é sobrejetor. Finalmente, se $T = T_\psi + T_\mathcal{K}$ é um elemento de $\mathfrak{E}$, temos

$$\varphi(T) = 0 \iff \psi^{-1}(T_\psi) = 0 \iff T_\psi = 0 \iff T = T_\mathcal{K} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

de onde concluímos que $\ker(\varphi) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Produzimos desta forma uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathfrak{E} \xrightarrow{\varphi} C(X) \longrightarrow 0$$

provando com isto que existe uma extensão dos compactos por $C(X)$, como desejado.

■

Definimos no início desta seção o conceito de equivalência de extensões em que estamos interessados. Traduzindo para o universo reduzido de extensões que estamos considerando, temos a definição de equivalência de extensões dos compactos por $C(X)$, como segue: dado X um espaço métrico compacto, e duas extensões dos compactos por $C(X)$, $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$, dizemos que elas são *equivalentes* quando existir um *-isomorfismo $\eta : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ tal que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \eta$.

O leitor pode perceber que havíamos definido a equivalência de extensões dos compactos por $C(X)$ de outra forma, na seção 1.1 (definição 1.1.8); lá, nós dissemos que as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ eram equivalentes quando havia um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (lá havíamos assumindo as extensões sobre o mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$) tal que $\mathfrak{E}_2 = U\mathfrak{E}_1 U^*$ e $\varphi_1(T) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T), \forall T \in \mathfrak{E}_1$. Em geral, reinterpretando esta equivalência se tivéssemos $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, a definição adequada envolveria um unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$.

Aquela noção de equivalência, reinterpretada no caso de estarmos trabalhando com espaços de Hilbert distintos, e a que acabamos de definir acima envolvendo um *-isomorfismo η, são na verdade a mesma. Vejamos porque isto é verdade: obviamente, se extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ são equivalentes de acordo com a definição 1.1.8, então $\mathrm{Ad}U : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ é um *-isomorfismo tal que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$. Por outro lado, se extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ são equivalentes de acordo com a definição dada acima, considere $\eta : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ um *-isomorfismo tal que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \eta$, e suponha $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Temos de imediato que $\eta(\ker(\varphi_1)) \subseteq \ker(\varphi_2)$; usando que $\varphi_1 \circ \eta^{-1} = \varphi_2$ temos do mesmo modo que $\eta^{-1}(\ker(\varphi_2)) \subseteq \ker(\varphi_1)$, ou equivalentemente, $\ker(\varphi_2) \subseteq \eta(\ker(\varphi_1))$. Segue-se daí que $\eta(\ker(\varphi_1)) = \ker(\varphi_2)$, ou seja, $\eta(\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$. Portanto, $\eta|_{\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)} : \mathcal{K}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ é um *-isomorfismo.

Agora, é sabido da teoria de operadores compactos que todo *-isomorfismo entre ideais dos compactos é implementado por um operador unitário; logo, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\eta(K) = UKU^* \ \forall K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$.

Afirmamos que $\eta = \mathrm{Ad}U$ em todo $\mathfrak{E}_1$; de fato, tome arbitrariamente $T \in \mathfrak{E}_1$, e $\xi \in \mathcal{H}_2$. Denotando por $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ a projeção ortogonal sobre o subespaço de $\mathcal{H}_1$ gerado por $U^*\xi$, temos que P é de posto 1 e portanto compacto, de onde temos $\eta(P) = UPU^*$ e assim, como TP é um operador compacto,

$$
\begin{aligned}
\eta(T)\xi &= \eta(T)UU^*\xi = \eta(T)UPU^*\xi = \eta(T)\eta(P)\xi = \\
&= \eta(TP)\xi = UTPU^*\xi = UTU^*UPU^*\xi = \\
&= UTU^*UU^*\xi = UTU^*\xi,
\end{aligned}
$$

e daí segue $\eta(T) = \mathrm{Ad}U(T)$, como havíamos afirmado. Isto prova que as duas noções de equivalência coincidem; a título de referência, colocaremos a seguir a definição de equivalência mais prática para os nossos propósitos, mas é útil saber a motivação para a definição no seu contexto mais geral, como visto acima.

Definição 2.1.7. Sejam X um espaço métrico compacto, e $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ extensões dos compactos por $C(X)$. Suponha $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$; então, dizemos que estas extensões são *equivalentes* se existir um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\mathrm{Ad}U : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ é um *-isomorfismo e $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$.

2.2 Invariantes de Busby

Esta seção é dedicada a um conceito que nos será de vital importância no estudo aprofundado da teoria de Brown-Douglas-Fillmore. Tome $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ uma extensão dos compactos por $C(X)$, com $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Lembrando-se de que $\varphi : \mathfrak{E} \longrightarrow C(X)$ é um *-homomorfismo unital sobrejetor cujo núcleo é $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, φ induz um *-isomorfismo unital

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}:\mathfrak{E}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) &\longrightarrow C(X) \\ \pi(T) &\longmapsto \varphi(T); \end{aligned}$$

visto que $\mathfrak{E}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, podemos definir $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ por $\tau = (\widetilde{\varphi})^{-1}$, que será portanto um *-homomorfismo unital injetor. A definição seguinte faz uso dos objetos e notação que acabamos de utilizar.

Definição 2.2.1. O *-homomorfismo unital injetor $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ como acima é o chamado *invariante de Busby* da extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$.

Pelo que foi visto acima, toda extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ possui um invariante de Busby $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ associado. Podemos nos perguntar se, por outro lado, para cada *-homomorfismo unital injetor $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ existe uma extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ tal que τ é o invariante de Busby desta extensão. Verificaremos que não só ela existe, como é também única; deste modo, teremos uma correspondência 1-1 entre extensões dos compactos por $C(X)$ e *-homomorfismos unitais injetores $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Para chegarmos a esta conclusão, precisamos primeiro de um lema.

Lema 2.2.2. *Seja $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ uma extensão dos compactos por $C(X)$, e seja $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ o invariante de Busby desta extensão. Então, τ é o único *-homomorfismo unital injetor que satisfaz $\tau \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathfrak{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & C(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}(\mathcal{H}) \arrow[r, hook] & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Naturalmente, para $T \in \mathfrak{E}$ tomado arbitrariamente,

$$\widetilde{\varphi} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}(T) = \widetilde{\varphi}(\pi(T)) = \varphi(T),$$

de onde temos $\widetilde{\varphi} \circ \pi|_{\mathfrak{E}} = \varphi$, e portanto de imediato $\pi|_{\mathfrak{E}} = \tau \circ \varphi$. Suponha agora que $\tau' : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ seja um outro *-homomorfismo unital injetor tal que $\tau' \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$. Então, dado um $f \in C(X)$ arbitrário, devido à sobrejetividade de φ existe $T \in \mathfrak{E}$ tal que $f = \varphi(T)$; podemos portanto escrever

$$\tau'(f) = \tau'(\varphi(T)) = \pi|_{\mathfrak{E}}(T) = \tau(\varphi(T)) = \tau(f),$$

de onde $\tau' = \tau$.

Fica assim provado que τ, o invariante de Busby da extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$, é o único *-homomorfismo unital injetor que satisfaz $\tau \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$, como queríamos.

$\blacksquare$

Teorema 2.2.3. *Seja $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor; então, existe uma única extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ dos compactos por $C(X)$ tal que τ é o invariante de Busby desta extensão.*

Demonstração. Defina $\mathfrak{E} := \pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau)) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como $\mathrm{ran}(\tau)$ é sub-C*-álgebra de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ e π é *-homomorfismo, temos que $\mathfrak{E}$ é sub-C*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Note que $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{E}$, pois $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \pi^{-1}(0)$, e também $I \in \mathfrak{E}$ pois $I = \pi^{-1}(\tau(1))$.

Defina $\varphi : \mathfrak{E} \longrightarrow C(X)$ por $\varphi = \tau^{-1} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}$; esta composição está bem definida porque $\pi(\mathfrak{E}) = \pi(\pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau))) = \mathrm{ran}(\tau)$, e τ é um *-isomorfismo unital entre $C(X)$ e $\mathrm{ran}(\tau)$, de onde podemos mencionar o *-isomorfismo unital $\tau^{-1} : \mathrm{ran}(\tau) \longrightarrow C(X)$. Por definição, φ é um *-homomorfismo unital sobrejetor, e $\ker(\varphi) = \ker(\pi|_{\mathfrak{E}}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Isto nos dá portanto uma extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ dos compactos por $C(X)$.

Observe agora que a definição de φ implica imediatamente em $\tau \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$. Logo, pelo lema 2.2.2, τ é o invariante de Busby desta extensão.

Verifiquemos a unicidade da extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$: suponha que $(X, \mathfrak{E}', \varphi')$ é uma extensão tal que τ é o invariante de Busby desta extensão; portanto, do lema 2.2.2, $\tau \circ \varphi' = \pi|_{\mathfrak{E}'}$. Assim, temos

$$\pi(\mathfrak{E}') = \pi|_{\mathfrak{E}'}(\mathfrak{E}') = \tau \circ \varphi'(\mathfrak{E}') = \tau(C(X)) = \mathrm{ran}(\tau),$$

o que implica em $\mathfrak{E}' \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau)) = \mathfrak{E}$. Queremos provar a outra inclusão, $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}'$; tome para isso $T \in \mathfrak{E}$ arbitrariamente, e denote $f = \varphi(T)$. A sobrejetividade de φ' implica em haver um $T' \in \mathfrak{E}'$ tal que $\varphi'(T') = f = \varphi(T)$. Daí,

$$\pi(T') = \pi|_{\mathfrak{E}'}(T') = \tau \circ \varphi'(T') = \tau \circ \varphi(T) = \pi|_{\mathfrak{E}}(T) = \pi(T),$$

de onde $T - T' = K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$; em particular, $K \in \mathfrak{E}'$, pois $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{E}'$. Logo, $T = T' + K \in \mathfrak{E}'$, provando a outra inclusão desejada. Concluímos desta forma que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$.

Falta-nos apenas verificar que $\varphi' = \varphi$. Isto segue da injetividade de τ, pois se $T \in \mathfrak{E}$ é arbitrário,

$$\tau \circ \varphi'(T) = \pi|_{\mathfrak{E}}(T) = \tau \circ \varphi(T),$$

de onde $\tau(\varphi'(T) - \varphi(T)) = 0$, e portanto $\varphi'(T) - \varphi(T) = 0$, ou seja, $\varphi'(T) = \varphi(T)$.

$\blacksquare$

Estabelecemos assim uma correspondência 1-1 entre extensões dos compactos por $C(X)$ e *-homomorfismos unitais injetores, através dos invariantes de Busby. A partir de agora, utilizaremos eventualmente a terminologia *invariante de Busby* para nos referirmos a algum *-homomorfismo unital injetor de $C(X)$ em $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

Observação 2.2.4. Quando $X \subseteq \mathbb{C}$ é compacto, podemos caracterizar de outra forma o invariante de Busby de uma dada extensão dos compactos por $C(X)$, como segue: seja $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ uma extensão dos compactos por $C(X)$; de acordo com a definição 1.1.6 e a proposição 1.1.7, considere $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador essencialmente normal tal que $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é a extensão determinada por T. Então, $\mathfrak{E} = C^*(I, T, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ e $\varphi = \eta^{-1} \circ \pi|_{\mathfrak{E}}$, onde $\eta : C(X) \longrightarrow C^*(1, \pi(T))$ é o cálculo funcional contínuo de $\pi(T)$. Considere o contra-domínio de η como sendo $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Assim, $\eta \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$; como η é obviamente um *-homomorfismo unital injetor, temos do lema 2.2.2 que η é o invariante de Busby da extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$. Em outras palavras, o invariante de Busby de uma extensão é o cálculo funcional contínuo da classe, na álgebra de Calkin, de um operador que determine a extensão.

Da mesma forma que reinterpretamos o problema de classificar operadores essencialmente normais utilizando linguagem de extensões dos compactos por $C(X)$, na seção 1.1, aproveitando a correspondência que há entre estes conceitos, aqui podemos proceder da mesma forma; ou seja, se conseguirmos uma definição adequada de equivalência entre invariantes de Busby, podemos reformular o problema de classificar extensões dos compactos por $C(X)$ para um problema envolvendo a classificação de invariantes de Busby.

Na prática, queremos que dois invariantes de Busby sejam equivalentes se, e somente se, suas extensões associadas são equivalentes. Poderíamos fazer uma prévia investigação para verificar quando isto acontece, antes de fazermos a definição; aqui, porém, faremos uma abordagem mais formal, definindo primeiro e provando o desejado em seguida. Por uma questão didática, definiremos equivalência de invariantes de Busby sobre o mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e observaremos na seqüência a versão da definição caso tenha-se espaços de Hilbert distintos.

Definição 2.2.5. Sejam $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ invariantes de Busby. Dizemos que τ_1 e τ_2 são *equivalentes* quando existir um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que o *-isomorfismo $\mu := \mathrm{Ad}\pi(U) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ satisfaz $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[d, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\tau_2"] & \\ \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

Denotaremos esta equivalência por $\tau_1 \sim \tau_2$.

Observação 2.2.6. Caso tenhamos invariantes sobre espaços de Hilbert distintos, a definição precisa ser ligeiramente modificada: sejam $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ invariantes de Busby. Então, dizemos que τ_1 e τ_2 são *equivalentes* quando existir um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que o *-isomorfismo induzido μ,

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(UTU^*) \end{aligned}$$

(que está bem definido) satisfaz $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$. Como o leitor pode observar, a única diferença essencial aqui é na definição do *-isomorfismo μ; isto se faz necessário pois, como o operador U tem por domínio e contra-domínio espaços de Hilbert distintos, não faz sentido em falarmos $\pi(U)$, e portanto não podemos definir μ como sendo $\mathrm{Ad}\pi(U)$. A coerência entre as duas definições naturalmente deve existir, ou seja, as duas definições devem coincidir no caso de espaços de Hilbert iguais; isto segue claramente do fato de π ser *-homomorfismo.

O motivo de termos escolhido a definição 2.2.5 naqueles termos é atentar para o fato de que $\pi(U)$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin, e o problema de equivalência dos invariantes pode ser portanto visualmente relacionado com o problema de equivalência unitária (forte) de elementos na álgebra de Calkin. Investigaremos isto mais a fundo em instantes; apenas gostaríamos de referir o início da seção 1.1 para o leitor, onde introduzimos os conceitos de equivalência unitária e equivalência unitária forte de elementos na álgebra de Calkin, apontando a relação desta noção última com o problema de classificar operadores essencialmente normais via equivalência unitária módulo os compactos.

Vejamos agora que a relação de equivalência introduzida para invariantes de Busby é adequada para efetuarmos a reformulação do nosso problema original em termos desta nova linguagem. No que segue podemos sem perda de generalidade assumir que todas as extensões e invariantes são sobre o mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, pela observação 1.2.2.

Teorema 2.2.7. *Sejam* $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ *extensões dos compactos por* $C(X)$, *e sejam* $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ *e* $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ *os respectivos invariantes de Busby destas extensões. Então, as extensões* $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ *são equivalentes se, e somente se, os invariantes de Busby* τ_1, τ_2 *são equivalentes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ são equivalentes; seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário implementando a equivalência entre as extensões, ou seja, $\mathrm{Ad}U : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ é um *-isomorfismo e $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$. Então, $\mu := \mathrm{Ad}\pi(U) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é um *-isomorfismo; vamos provar que $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$:

De fato, tome $f \in C(X)$ arbitrário. Como τ_1 é o invariante de Busby da extensão $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, temos $\mathfrak{E}_1 = \pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau_1))$; logo, existe $T \in \mathfrak{E}_1$ tal que $\pi(T) = \tau_1(f)$. Lembremos agora que $\tau_1 = (\widetilde{\varphi_1})^{-1}$ e $\tau_2 = (\widetilde{\varphi_2})^{-1}$, o que implica portanto em

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi_2} \circ \mu \circ \tau_1(f) &= \widetilde{\varphi_2} \circ \mu(\pi(T)) = \widetilde{\varphi_2}(\pi(U)\pi(T)\pi(U)^*) = \widetilde{\varphi_2}(\pi(UTU^*)) = \\ &= \varphi_2(UTU^*) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T) = \varphi_1(T) = \widetilde{\varphi_1}(\pi(T)) = f,\end{aligned}$$

e daí segue-se que $\mu \circ \tau_1 = (\widetilde{\varphi_2})^{-1} = \tau_2$, como queríamos, de onde os invariantes de Busby τ_1 e τ_2 são equivalentes.

($\Leftarrow$) Suponha que os invariantes de Busby τ_1 e τ_2 são equivalentes. Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário tal que $\mu := \mathrm{Ad}\pi(U) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é um *-isomorfismo e $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$. Afirmamos que este operador U implementa a equivalência entre as extensões. Precisamos verificar que $\mathrm{Ad}U : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ é um *-isomorfismo e $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$.

Afirmamos que $\mathfrak{E}_2 = \mathrm{Ad}U(\mathfrak{E}_1)$. De fato, dado $T \in \mathfrak{E}_1$ arbitrário, como $\mathfrak{E}_1 = \pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau_1))$, existe $f \in C(X)$ tal que $\pi(T) = \tau_1(f)$. Agora,

$$\pi(UTU^*) = \mathrm{Ad}\pi(U)(\pi(T)) = \mu(\pi(T)) = \mu(\tau_1(f)) = \tau_2(f),$$

logo

$$UTU^* \in \pi^{-1}(\pi(UTU^*)) = \pi^{-1}(\tau_2(f)) \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{ran}(\tau_2)) = \mathfrak{E}_2,$$

o que prova $\mathrm{Ad}U(\mathfrak{E}_1) \subseteq \mathfrak{E}_2$. A outra inclusão é análoga, usando $\mu^{-1} \circ \tau_2 = \tau_1$. Segue-se daí o afirmado, e portanto $\mathrm{Ad}U : \mathfrak{E}_1 \longrightarrow \mathfrak{E}_2$ tem contra-domínio bem definido e é um *-isomorfismo.

Falta apenas verificar $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U$; seja $T \in \mathfrak{E}_1$ arbitrário. Devido à injetividade de τ_1, para verificarmos $\varphi_1(T) = \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T)$ basta provarmos que $\tau_1 \circ \varphi_1(T) =$

$\tau_1 \circ \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T)$. Isto segue de $\tau_1 = \mu^{-1} \circ \tau_2$, pois

$$\begin{aligned}\tau_1 \circ \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T) &= \mu^{-1} \circ \tau_2 \circ \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T) = \mu^{-1} \circ (\widetilde{\varphi_2})^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mathrm{Ad}U(T) = \\ &= \mu^{-1} \circ (\widetilde{\varphi_2})^{-1} \circ \widetilde{\varphi_2}(\pi(UTU^*)) = \mu^{-1}(\pi(UTU^*)) = \\ &= \pi(T) = \tau_1 \circ \varphi_1(T).\end{aligned}$$

Ficou assim provado que as extensões $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$, $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ são equivalentes, como queríamos.

■

Observação 2.2.8. Já havíamos visto, na seção 1.1, que o problema de classificar operadores essencialmente normais via equivalência unitária módulo os compactos é equivalente ao problema de classificar extensões dos compactos por $C(X)$; o teorema anterior mostra portanto que estes problemas são equivalentes ao problema de classificação dos invariantes de Busby; mais precisamente, da observação 2.2.4 vemos que dois operadores essencialmente normais T_1, T_2 com o mesmo espectro essencial são tais que $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, os invariantes de Busby dados pelos cálculos funcionais contínuos de $\pi(T_1)$ e $\pi(T_2)$ são equivalentes.

Já estamos finalmente em condições de retomar um problema introduzido na introdução. Relembrando: elementos $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são *unitariamente equivalentes* quando existe um elemento unitário $\mathfrak{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{u}\mathfrak{t}_2\mathfrak{u}^*$. É fato que nem todo elemento unitário da álgebra de Calkin é da forma $\pi(U)$, para algum operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dizemos que elementos $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são *fortemente unitariamente equivalentes* quando existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = \pi(U)\mathfrak{t}_2\pi(U)^*$. Assim, vemos claramente que a equivalência unitária forte implica na equivalência unitária, mas o contrário não é em geral válido; o que havíamos dito é que, no caso de nos restringirmos apenas aos elementos *normais* da álgebra de Calkin, então os dois conceitos de equivalência coincidem. Provar este fato (corolário 2.2.13) será o nosso próximo objetivo, mas precisamos antes de uma definição e alguns resultados auxiliares.

Definição 2.2.9. Dois invariantes de Busby $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são ditos *fracamente equivalentes* se existe um elemento unitário $\mathfrak{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que o *-isomorfismo $\mu := \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ satisfaz $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$. Denotaremos esta equivalência fraca por $\tau_1 \sim_w \tau_2$.

A única diferença entre a definição 2.2.5 e esta que acabamos de fazer é que, na equivalência fraca, o elemento unitário que implementa o *-isomorfismo μ não precisa ser necessariamente da forma $\pi(U)$ para algum operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

A definição modificada para admitir espaços de Hilbert distintos é como segue: dois invariantes de Busby $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ são ditos *fracamente equivalentes* quando existir algum operador (não necessariamente unitário) $V : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ induzindo um *-isomorfismo μ,

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(VTV^*) \end{aligned}$$

satisfazendo $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$.

Naturalmente, invariantes equivalentes são fracamente equivalentes. A surpresa virá com o teorema 2.2.11, provando que estas duas noções de equivalência entre invariantes de Busby coincidem. Precisamos antes de um lema técnico.

Lema 2.2.10. *Sejam $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ um invariante de Busby, e $n \in \mathbb{Z}$. Então, existe um elemento unitário $\mathfrak{s} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ com $\operatorname{ind}(\mathfrak{s}) = n$ tal que $\mathfrak{s}$ comuta com todos os elementos de $\operatorname{ran}(\tau)$, ou seja, $\mathfrak{s} \in (\operatorname{ran}(\tau))'$, o comutante de $\operatorname{ran}(\tau)$.*

Demonstração. Considere $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq C(X)$ denso e enumerável, e para cada $k \in \mathbb{N}^*$ fixe $T_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\tau(f_k) = \pi(T_k)$. Como $C(X)$ é comutativa, $\operatorname{ran}(\tau)$ é comutativa, logo todos os $\pi(T_k)$ comutam entre si. Portanto, podemos falar do joint spectrum da família $\{\pi(T_k)\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, que será denotado por $\operatorname{Jspec}_k(\pi(T_k))$. Fixe arbitrariamente $\lambda = (\lambda_k)_k \in \operatorname{Jspec}_k(\pi(T_k))$, e para cada $r \in \mathbb{N}^*$ escreva $\lambda^{(r)} = \lambda$. Então, pelo teorema C.2.3, existe $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que

$$T_k = (D_k \oplus R_k) + L_k \ \forall k \geq 1,$$

decomposição em soma direta esta relativa a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\operatorname{span}}\{\xi_r\}_r$, L_k é compacto, e $D_k = \operatorname{diag}_r(\lambda_k^{(r)})$ com relação à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$. Ora, mas neste caso, $\lambda_k^{(r)} = \lambda_k \ \forall r, \forall k$, logo $D_k = \lambda_k I_{\mathcal{H}_1} \ \forall k$.

Tome $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ uma potência de um shift unilateral ou de o adjunto de um shift unilateral, de modo que $\operatorname{ind}(V) = n$, e defina $S = V \oplus I_{\mathcal{H}_1^\perp}$ relativo à decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$. Denote $\mathfrak{s} = \pi(S) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

Afirmamos que $\mathfrak{s}$ é um elemento unitário de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Para ver isto, note que por construção $V^*V = I + K$ para algum compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, e assim

$$\mathfrak{s}^*\mathfrak{s} = \pi(S^*S) = \pi(V^*V \oplus I) = \pi(I \oplus I + K \oplus 0) = \pi(I_{\mathcal{H}}) = 1;$$

da mesma forma prova-se que $\mathfrak{s}\mathfrak{s}^* = 1$. Além disso, $\mathfrak{s}$ tem índice de Fredholm n, pois

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{s}) = \operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(V \oplus I) = \operatorname{ind}(V) + \operatorname{ind}(I) = \operatorname{ind}(V) = n.$$

Observe agora que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
ST_k - T_kS &= (V \oplus I)(\lambda_k I \oplus R_k + L_k) - (\lambda_k I \oplus R_k + L_k)(V \oplus I) = \\
&= (\lambda_k V \oplus R_k) - (\lambda_k V \oplus R_k) + (V \oplus I)L_k - L_k(V \oplus I) = \\
&= SL_k - L_kS \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

de onde $\pi(ST_k) = \pi(T_kS)$. Daí,

$$\mathfrak{s}\tau(f_k) = \pi(S)\pi(T_k) = \pi(ST_k) = \pi(T_kS) = \pi(T_k)\pi(S) = \tau(f_k)\mathfrak{s}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*;$$

como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ é denso em $C(X)$, temos automaticamente que $\mathfrak{s}\tau(f) = \tau(f)\mathfrak{s}$ para todo $f \in C(X)$, o que conclui a demonstração.

■

Para o próximo teorema, como sempre, suporemos sem perda de generalidade os invariantes sobre o mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. A demonstração será relativamente simples, visto que concentramos todas as dificuldades técnicas no lema anterior.

Teorema 2.2.11. *Sejam $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ dois invariantes de Busby fracamente equivalentes. Então, τ_1 e τ_2 são equivalentes.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{v} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ um elemento unitário de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ que implementa a equivalência fraca entre τ_1 e τ_2, via $\mu := \mathrm{Ad}\mathfrak{v} : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, isto é, $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$.

Denote $n = -\mathrm{ind}(\mathfrak{v})$. Então, pelo lema 2.2.10, existe um elemento unitário $\mathfrak{s} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{ind}(\mathfrak{s}) = n$ e $\mathfrak{s} \in (\mathrm{ran}(\tau_1))'$. Portanto $\mathfrak{v}\mathfrak{s}$ é um elemento unitário de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, e ainda $\mathrm{ind}(\mathfrak{v}\mathfrak{s}) = \mathrm{ind}(\mathfrak{v}) + \mathrm{ind}(\mathfrak{s}) = -n + n = 0$. Assim, segue-se do teorema 1.2.7 que existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{v}\mathfrak{s} = \pi(U)$ (para ver isto, escreva $\mathfrak{v}\mathfrak{s} = \pi(T)$; então, T é essencialmente normal com índice de Fredholm zero, e portanto é perturbação compacta de um unitário U).

Defina $\widetilde{\mu} := \mathrm{Ad}(\mathfrak{v}\mathfrak{s}) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$; como $\mathfrak{v}\mathfrak{s}$ é unitário, $\widetilde{\mu}$ é um *-isomorfismo. Além disso, $\widetilde{\mu} \circ \tau_1 = \tau_2$ pois, dado $f \in C(X)$ arbitrário, e usando que $\mathfrak{s} \in (\mathrm{ran}(\tau_1))'$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu} \circ \tau_1(f) &= (\mathfrak{v}\mathfrak{s})\tau_1(f)(\mathfrak{v}\mathfrak{s})^* = (\mathfrak{v}\mathfrak{s})\tau_1(f)(\mathfrak{s}^*\mathfrak{v}) = \\
&= \mathfrak{v}\tau_1(f)\mathfrak{s}\mathfrak{s}^*\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\tau_1(f)\mathfrak{v} = \\
&= \mu \circ \tau_1(f) = \tau_2(f).
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\mathfrak{v}\mathfrak{s} = \pi(U)$, concluímos que $\widetilde{\mu}$ implementa uma equivalência entre os invariantes τ_1 e τ_2, ou seja, estes invariantes são equivalentes, como queríamos demonstrar.

■

Corolário 2.2.12. *Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normais. Suponha que exista um operador $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(V)$ é unitário e $VT_1V^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Então, existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $UT_1U^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Como $\pi(V)$ é unitário e $VT_1V^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, temos de imediato que $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$. Denote $X = \sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$. Sejam $(X, \mathfrak{E}_1, \varphi_1)$ e $(X, \mathfrak{E}_2, \varphi_2)$ as extensões dos compactos por $C(X)$ determinadas por T_1 e T_2, respectivamente, de acordo com a definição 1.1.6. Ainda, denote por $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ os respectivos invariantes de Busby destas extensões. Sabemos, da observação 2.2.4, que τ_1 é o cálculo funcional contínuo de $\pi(T_1)$ e, da mesma forma, τ_2 é o cálculo funcional contínuo de $\pi(T_2)$. Portanto, em particular, $\tau_1(\zeta) = \pi(T_1)$, $\tau_2(\zeta) = \pi(T_2)$.

Defina $\mu := \mathrm{Ad}\pi(V) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, que é um *-isomorfismo pois, por hipótese, $\pi(V)$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin. Note que $\mu \circ \tau_1(1) = \tau_2(1)$, e que

$$\mu \circ \tau_1(\zeta) = \mu(\pi(T_1)) = \pi(V)\pi(T_1)\pi(V)^* = \pi(VT_1V^*) = \pi(T_2) = \tau_2(\zeta);$$

como $C(X) = C^*(1, \zeta)$ (pois $X \in \mathbb{C}$), concluímos que $\mu \circ \tau_1 = \tau_2$, e assim os invariantes τ_1 e τ_2 são fracamente equivalentes; logo, pelo teorema 2.2.11, os invariantes τ_1 e τ_2 são equivalentes, e portanto existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que o *-isomorfismo $\widetilde{\mu} := \mathrm{Ad}\pi(U) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ satisfaz $\widetilde{\mu} \circ \tau_1 = \tau_2$. Em particular,

$$\pi(UT_1U^*) = \widetilde{\mu}(\pi(T_1)) = \widetilde{\mu} \circ \tau_1(\zeta) = \tau_2(\zeta) = \pi(T_2),$$

de onde segue que $UT_1U^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, demonstrando o corolário.

■

Finalmente, o resultado prometido de que a equivalência unitária forte coincide com a equivalência unitária usual na álgebra de Calkin, se nos restringirmos aos elementos normais.

Corolário 2.2.13. *Sejam $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ normais. Então, $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são unitariamente equivalentes se, e somente se, são fortemente unitariamente equivalentes.*

Demonstração. É óbvio que a equivalência unitária forte sempre implica na equivalência unitária usual; basta verificarmos a recíproca, portanto.

Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tais que $\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1)$ e $\mathfrak{t}_2 = \pi(T_2)$, e suponha que $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são unitariamente equivalentes. Então, existe um elemento unitário $\mathfrak{v} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{v}\mathfrak{t}_1\mathfrak{v}^* = \mathfrak{t}_2$. Se $\mathfrak{v} = \pi(V)$, então temos como conseqüência $VT_1V^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$; logo, pelo corolário 2.2.12, existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $UT_1U^* - T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, o que implica em $\pi(U)\mathfrak{t}_1\pi(U)^* = \mathfrak{t}_2$, ou seja, $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são fortemente unitariamente equivalentes.

■

2.3 O Conjunto $\mathrm{Ext}(X)$, e Somas de Extensões

Como vimos na seção anterior, os problemas de classificação dos invariantes de Busby e de classificação dos operadores essencialmente normais são o mesmo problema. O que faremos a partir desta seção, até o final do capítulo 5, é estudar o problema de classificação dos invariantes de Busby. Sabemos que há uma correspondência 1-1 que preserva equivalências entre extensões dos compactos por $C(X)$, e invariantes de Busby com domínio $C(X)$. Por esta razão, historicamente os próprios invariantes de Busby são chamados de extensões dos compactos por $C(X)$, e nós adotaremos aqui esta terminologia; portanto, de agora em diante, o termo "extensão" para nós também significa "invariante de Busby". Esta convenção não causará problemas, pois nas raras ocasiões em que utilizarmos as extensões no contexto de seqüências exatas, deixaremos isto claro com a nossa notação usual de uma tripla $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$.

Considerando a relação de equivalência entre extensões dos compactos por $C(X)$ (invariantes de Busby) introduzida com a definição 2.2.5, podemos de algum modo tentar considerar um "conjunto quociente" de classes de equivalência de extensões dos compactos por $C(X)$. A priori há uma obstrução técnica em fazermos tal consideração, porque a classe das extensões dos compactos por $C(X)$ certamente não é um conjunto (pois a classe dos espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis não é um conjunto), e portanto não podemos simplesmente tomar o quociente pela relação de equivalência, no contexto de conjuntos. Porém, dada qualquer extensão $\widetilde{\tau} : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$, é óbvio que $\widetilde{\tau}$ é equivalente a uma extensão $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ sobre o nosso espaço de Hilbert fixado $\mathcal{H}$, equivalência esta implementada por um unitário $U : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$, que existe pela observação 1.2.2; mais precisamente, $\tau := \mathrm{Ad}\pi(U) \circ \widetilde{\tau}$.

Agora, a classe das extensões dos compactos por $C(X)$ sobre um mesmo espaço de Hilbert fixado $\mathcal{H}$ constitui um conjunto (na verdade, um subconjunto do conjunto $\mathcal{F}(C(X), \mathcal{Q}(\mathcal{H}))$ das funções de $C(X)$ em $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$).

Definição 2.3.1. Para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ fixado, $\text{ext}(X)$ é o conjunto de todas as extensões $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

Definição 2.3.2. O conjunto $\text{Ext}(X)$ é o conjunto quociente de $\text{ext}(X)$ pela relação de equivalência dada em 2.2.5. A classe de uma extensão $\tau \in \text{ext}(X)$ em $\text{Ext}(X)$ será denotada comumente por $[\tau]$.

Portanto, $\text{Ext}(X)$ definido deste modo é um conjunto legítimo e bem determinado; além disto, em virtude do que acabamos de ver acima, podemos associar a uma extensão qualquer $\widetilde{\tau} : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ uma classe em $\text{Ext}(X)$, a saber a classe das extensões $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ que são equivalentes a $\widetilde{\tau}$. Denotaremos esta classe simplesmente por $[\widetilde{\tau}]$, abandonando de uma vez por todas as tecnicalidades conjuntistas envolvidas com a classe de todas as extensões dos compactos por $C(X)$.

O primeiro objetivo principal, a longo prazo, será demonstrar que $\text{Ext}(X)$ é um grupo abeliano para todo espaço métrico compacto X. Isto será feito na seção 3.1; para atingirmos este objetivo, precisamos primeiro introduzir em $\text{Ext}(X)$ uma operação binária que é associativa e comutativa. Isto é o que será feito na presente seção. Identificaremos o elemento neutro desta operação na seção 2.4, e finalmente provaremos a existência de inversos no grupo para esta operação na seção 3.1.

Começaremos estabelecendo, com os próximos parágrafos, o conceito da *soma-chapéu* de *-homomorfismos $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{H}})$. Para tanto, sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Defina aplicações Υ_1, Υ_2,

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(T \oplus 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(0 \oplus T). \end{aligned}$$

Note que Υ_1, Υ_2 estão bem definidas e são *-homomorfismos injetores. Provemos isto para Υ_1, o argumento para Υ_2 é análogo: defina

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ T &\longmapsto T \oplus 0, \end{aligned}$$

que é obviamente um *-homomorfismo injetor, e seja $\widetilde{\Upsilon}_1 : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ dado por $\widetilde{\Upsilon}_1 = \pi \circ \iota_1$. Logo, por definição $\widetilde{\Upsilon}_1$ é um *-homomorfismo com $\ker(\widetilde{\Upsilon}_1) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, e portanto $\widetilde{\Upsilon}_1$ induz um *-homomorfismo injetor no quociente $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)/\ker(\widetilde{\Upsilon}_1) = \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, e é imediato ver que este *-homomorfismo induzido é precisamente o que chamamos de Υ_1; fica assim provado que Υ_1 está bem definido e é um *-homomorfismo injetor.

Defina agora

$$\begin{array}{rcl} \hat{+} : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ (\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2) & \longmapsto & \Upsilon_1(\mathfrak{t}_1) + \Upsilon_2(\mathfrak{t}_2). \end{array}$$

Observe que, se $\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1)$ e $\mathfrak{t}_2 = \pi(T_2)$, então $\hat{+}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2) = \pi(T_1 \oplus T_2)$. Considerando $\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ como uma C*-álgebra com as operações usuais (e a norma do máximo), vemos de imediato que $\hat{+}$ é um *-homomorfismo, sendo portanto em particular uma função contínua. Denotaremos usualmente $\hat{+}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ por $\mathfrak{t}_1 \hat{+} \mathfrak{t}_2$.

Por um momento, vamos carregar um pouco a notação para sermos precisos. Denotaremos a operação $\hat{+}$ definida acima por $\hat{+}_{1,2}$, para enfatizar os índices dos espaços de Hilbert envolvidos. Se considerarmos um terceiro espaço de Hilbert $\mathcal{H}_3$, podemos definir exatamente como acima aplicações

$$\hat{+}_{(1,2),3} : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \times \mathcal{Q}(\mathcal{H}_3) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3),$$

$$\hat{+}_{1,(2,3)} : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3).$$

Afirmamos que, para $\mathfrak{t}_1 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, $\mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ e $\mathfrak{t}_3 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}_3)$ tomados arbitrariamente,

$$(\mathfrak{t}_1 \hat{+}_{1,2} \mathfrak{t}_2) \hat{+}_{(1,2),3} \mathfrak{t}_3 = \mathfrak{t}_1 \hat{+}_{1,(2,3)} (\mathfrak{t}_2 \hat{+}_{2,3} \mathfrak{t}_3),$$

ou seja,

$$\hat{+}_{(1,2),3}(\hat{+}_{1,2}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \mathfrak{t}_3) = \hat{+}_{1,(2,3)}(\mathfrak{t}_1, \hat{+}_{2,3}(\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3));$$

a razão para isto é simples: escrevendo $\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1)$, $\mathfrak{t}_2 = \pi(T_2)$, $\mathfrak{t}_3 = \pi(T_3)$, temos

$$\begin{aligned} \hat{+}_{(1,2),3}(\hat{+}_{1,2}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \mathfrak{t}_3) &= \hat{+}_{(1,2),3}(\hat{+}_{1,2}(\pi(T_1), \pi(T_2)), \pi(T_3)) = \\ &= \hat{+}_{(1,2),3}(\pi(T_1 \oplus T_2), \pi(T_3)) = \\ &= \pi(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = \\ &= \hat{+}_{1,(2,3)}(\pi(T_1), \pi(T_2 \oplus T_3)) = \\ &= \hat{+}_{1,(2,3)}(\mathfrak{t}_1, \hat{+}_{2,3}(\mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3)). \end{aligned}$$

A conclusão que tiramos disto é que, se concordarmos em abandonar os índices destes *-homomorfismos, imaginando-os todos como apenas uma operação $\hat{+}$, então esta operação é associativa. Nos termos acima, podemos então denotar

$$\mathfrak{t}_1 \hat{+} \mathfrak{t}_2 \hat{+} \mathfrak{t}_3 := (\mathfrak{t}_1 \hat{+} \mathfrak{t}_2) \hat{+} \mathfrak{t}_3 = \mathfrak{t}_1 \hat{+} (\mathfrak{t}_2 \hat{+} \mathfrak{t}_3),$$

e o mesmo procedimento pode ser adotado recursivamente para definir a operação em qualquer quantidade finita de termos.

Observação 2.3.3. Para esta observação, utilizaremos a teoria de operadores de Fredholm exposta na seção A.3: dados elementos inversíveis $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, note que

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{t}_1 \hat{+} \mathfrak{t}_2) = \operatorname{ind}(\mathfrak{t}_1) + \operatorname{ind}(\mathfrak{t}_2);$$

de fato, denotando $\mathfrak{t}_1 = \pi(T_1)$, $\mathfrak{t}_2 = \pi(T_2)$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\mathfrak{t}_1 \hat{+} \mathfrak{t}_2) = \operatorname{ind}(\pi(T_1 \oplus T_2)) = \operatorname{ind}(T_1 \oplus T_2) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2) = \\ = \operatorname{ind}(\pi(T_1)) + \operatorname{ind}(\pi(T_2)) = \operatorname{ind}(\mathfrak{t}_1) + \operatorname{ind}(\mathfrak{t}_2), \end{aligned}$$

verificando o desejado.

A próxima definição é uma extensão desta operação para certos *-homomorfismos.

Definição 2.3.4. Dados *-homomorfismos $\psi_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\psi_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ definimos a sua *soma-chapéu*, $\psi_1 \hat{+} \psi_2$, como o *-homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_1 \hat{+} \psi_2 : C(X) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ f &\longmapsto \psi_1(f) \hat{+} \psi_2(f). \end{aligned}$$

É fácil ver que $\psi_1 \hat{+} \psi_2$ definido como acima é de fato um *-homomorfismo, pois ele é composição de *-homomorfismos,

$$\begin{array}{rcccc} \psi_1 \hat{+} \psi_2 : C(X) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \\ f & \longmapsto & (\psi_1(f), \psi_2(f)) & \longmapsto & \psi_1(f) \hat{+} \psi_2(f). \end{array}$$

Além disto, temos como conseqüência da discussão acima que a soma-chapéu de *-homomorfismos pode ser vista como uma operação associativa. Vejamos agora como a soma-chapéu se comporta em relação às extensões, começando com um lema.

Lema 2.3.5. *Sejam $\psi_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\psi_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ *-homomorfismos, e suponha que ψ_1 ou ψ_2 é injetor. Então, a soma-chapéu $\psi_1 \hat{+} \psi_2$ é também injetora.*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que ψ_1 é injetor, a prova do outro caso é análoga. Seja $f \in C(X)$ tal que $(\psi_1 \hat{+} \psi_2)(f) = 0$. Denote $\psi_1(f) = \pi(T_1)$,

$\psi_2(f) = \pi(T_2)$. Então,

$$0 = (\psi_1 \hat{+} \psi_2)(f) = \psi_1(f) \hat{+} \psi_2(f) = \pi(T_1 \oplus T_2),$$

de onde $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, e portanto $T_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, $T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$; logo, particular $\psi_1(f) = \pi(T_1) = 0$, e a injetividade de ψ_1 implica portanto em $f = 0$, estabelecendo deste modo a injetividade de $\psi_1 \hat{+} \psi_2$, como queríamos.

■

Proposição 2.3.6. *Sejam $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ uma extensão e $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ um *-homomorfismo unital. Então, as somas-chapéu $\tau \hat{+} \psi$ e $\psi \hat{+} \tau$ são extensões.*

Demonstração. Já sabemos que $\tau \hat{+} \psi$ é um *-homomorfismo injetor, pelo lema 2.3.5. Precisamos portanto mostrar apenas que $\tau \hat{+} \psi$ é unital.

Ora, mas $\tau(1) = 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)} = \pi(I_{\mathcal{H}_1})$, e da mesma forma $\psi(1) = 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)} = \pi(I_{\mathcal{H}_2})$. Portanto,

$$(\tau \hat{+} \psi)(1) = \tau(1) \hat{+} \psi(1) = \pi(I_{\mathcal{H}_1} \oplus I_{\mathcal{H}_2}) = \pi(I_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}) = 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)},$$

de onde temos que $\tau \hat{+} \psi$ é unital e portanto uma extensão, como queríamos provar. A prova de que $\psi \hat{+} \tau$ é uma extensão é análoga.

■

Corolário 2.3.7. *Sejam $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ extensões. Então, a soma-chapéu $\tau_1 \hat{+} \tau_2$ é também uma extensão.*

Demonstração. Óbvio da proposição 2.3.6.

■

Devido à associatividade da soma-chapéu, podemos operá-la de forma natural em qualquer quantidade finita de *-homomorfismos, como segue: dados $n \in \mathbb{N}^*$ e *-homomorfismos $\psi_i : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então definimos $\psi_1 \hat{+} \cdots \hat{+} \psi_n : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n)$ como sendo o *-homomorfismo dado por

$$(\psi_1 \hat{+} \cdots \hat{+} \psi_n)(f) = \psi_1(f) \hat{+} \cdots \hat{+} \psi_n(f) \quad \forall f \in C(X).$$

Nós iremos agora mostrar que a soma-chapéu induz uma operação legítima de soma em $\mathrm{Ext}(X)$, utilizando o próximo resultado.

Proposição 2.3.8. *Sejam* $\tau_1, \tau_1', \tau_2, \tau_2' \in \mathrm{ext}(X)$ *tais que* $\tau_1 \sim \tau_1'$, $\tau_2 \sim \tau_2'$. *Então,* $(\tau_1 \hat{+} \tau_2) \sim (\tau_1' \hat{+} \tau_2')$.

Demonstração. Considere $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário implementando a equivalência $\tau_1 \sim \tau_1'$, ou seja, $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau_1 = \tau_1'$; considere também $U' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário implementando a equivalência $\tau_2 \sim \tau_2'$, ou seja, $\mathrm{Ad}\pi(U') \circ \tau_2 = \tau_2'$. Então, o operador $\widetilde{U} := U \oplus U' \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ é claramente unitário, e ainda, para $f \in C(X)$ arbitrário, se denotarmos $\tau_1(f) = \pi(T_1)$, $\tau_2(f) = \pi(T_2)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\pi(\widetilde{U}) \circ (\tau_1 \hat{+} \tau_2)(f) &= \mathrm{Ad}\pi(\widetilde{U})(\tau_1(f) \hat{+} \tau_2(f)) = \mathrm{Ad}\pi(\widetilde{U})(\pi(T_1 \oplus T_2)) = \\
&= \pi(U \oplus U')\pi(T_1 \oplus T_2)\pi(U \oplus U')^* = \pi((UT_1U^*) \oplus (U'T_2U'^*)) = \\
&= \pi(UT_1U^*) \hat{+} \pi(U'T_2U'^*) = \mathrm{Ad}\pi(U)(\pi(T_1)) \hat{+} \mathrm{Ad}\pi(U')(\pi(T_2)) = \\
&= (\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau_1)(f) \hat{+} (\mathrm{Ad}\pi(U') \circ \tau_2)(f) = \\
&= \tau_1'(f) \hat{+} \tau_2'(f) = (\tau_1' \hat{+} \tau_2')(f),
\end{aligned}$$

de onde segue que $(\tau_1 \hat{+} \tau_2) \sim (\tau_1' \hat{+} \tau_2')$, como desejado.

∎

Observação 2.3.9. Um resultado útil e de demonstração similar ao da proposição 2.3.8 é o seguinte: dadas extensões $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ tais que $\tau_1 \sim \tau_2$, e um *-homomorfismo unital $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_3)$, então temos $\tau_1 \hat{+} \psi \sim \tau_2 \hat{+} \psi$ e $\psi \hat{+} \tau_1 \sim \psi \hat{+} \tau_2$. De fato, se $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é um unitário implementando a equivalência entre τ_1 e τ_2, então o unitário $U \oplus I_{\mathcal{H}_3} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ implementa a equivalência entre $\tau_1 \hat{+} \psi$ e $\tau_2 \hat{+} \psi$; da mesma forma prova-se que $\psi \hat{+} \tau_1 \sim \psi \hat{+} \tau_2$.

O conteúdo da proposição 2.3.8 nos diz precisamente que, se $[\tau_1] = [\tau_1']$ e $[\tau_2] = [\tau_2']$, então $[\tau_1 \hat{+} \tau_2] = [\tau_1' \hat{+} \tau_2']$. Em outras palavras, a seguinte operação em $\mathrm{Ext}(X)$ estará bem definida:

$$\begin{aligned}
+ : \mathrm{Ext}(X) \times \mathrm{Ext}(X) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(X) \\
([\tau_1], [\tau_2]) &\longmapsto [\tau_1 \hat{+} \tau_2].
\end{aligned}$$

Definição 2.3.10. A operação "+" é a chamada operação de *soma* em $\mathrm{Ext}(X)$.

Para simplificar a notação, denotaremos $+([\tau_1], [\tau_2])$ simplesmente por $[\tau_1] + [\tau_2]$, como de costume. É conseqüência trivial do que foi exposto acima sobre a soma-chapéu que esta operação de soma em $\mathrm{Ext}(X)$ é associativa: dados $[\tau_1], [\tau_2], [\tau_3] \in \mathrm{Ext}(X)$, temos

$$([\tau_1]+[\tau_2])+[\tau_3]=[\tau_1\hat{+}\tau_2]+[\tau_3]=[(\tau_1\hat{+}\tau_2)\hat{+}\tau_3]=[\tau_1\hat{+}(\tau_2\hat{+}\tau_3)]=$$
$$=[\tau_1]+[\tau_2\hat{+}\tau_3]=[\tau_1]+([\tau_2]+[\tau_3]).$$

Queremos verificar agora que a soma em $\mathrm{Ext}(X)$ é também comutativa. Para tanto, basta provarmos que, para $\tau_1,\tau_2\in\mathrm{ext}(X)$ arbitrários, $(\tau_1\hat{+}\tau_2)\sim(\tau_2\hat{+}\tau_1)$: considere o unitário $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ dado por

$$\begin{aligned} U:\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\\ (\xi,\eta) &\longmapsto (\eta,\xi). \end{aligned}$$

Logo, para $f\in C(X)$ arbitrário, se denotarmos $\tau_1(f)=\pi(T_1)$, $\tau_2(f)=\pi(T_2)$, temos

$$\mathrm{Ad}\pi(U)\circ(\tau_1\hat{+}\tau_2)(f)=\mathrm{Ad}\pi(U)(\pi(T_1\oplus T_2))=\pi(U(T_1\oplus T_2)U^*)=$$
$$=\pi(T_2\oplus T_1)=\tau_2(f)\hat{+}\tau_1(f)=(\tau_2\hat{+}\tau_1)(f),$$

provando com isto que $(\tau_1\hat{+}\tau_2)\sim(\tau_2\hat{+}\tau_1)$, e portanto a soma em $\mathrm{Ext}(X)$ é comutativa.

Observação 2.3.11. Observe que o argumento que acabamos de utilizar para provar que $(\tau_1\hat{+}\tau_2)\sim(\tau_2\hat{+}\tau_1)$ pode ser estendido para provar que, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, quaisquer $\tau_1,\ldots,\tau_n\in\mathrm{ext}(X)$ e qualquer permutação $\sigma\in S_n$ temos

$$(\tau_1\hat{+}\cdots\hat{+}\tau_n)\sim(\tau_{\sigma(1)}\hat{+}\cdots\hat{+}\tau_{\sigma(n)});$$

isto também pode ser visto como conseqüência da comutatividade da soma em $\mathrm{Ext}(X)$. Nós utilizaremos este fato muitas vezes nos próximos capítulos, e em particular no caso em que temos extensões sobre espaços de Hilbert distintos; é imediato ver que o resultado também é válido neste caso.

Naturalmente, a soma-chapéu de extensões pode ser interpretada em termos das extensões $(X,\mathfrak{E},\varphi)$: dadas extensões $(X,\mathfrak{E}_1,\varphi_1)$ e $(X,\mathfrak{E}_2,\varphi_2)$, com $\mathfrak{E}_1\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $\mathfrak{E}_2\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, denotando os invariantes de Busby respectivos por τ_1 e τ_2, podemos definir a soma-chapéu de $(X,\mathfrak{E}_1,\varphi_1)$ e $(X,\mathfrak{E}_2,\varphi_2)$ como sendo a extensão associada ao invariante $\tau_1\hat{+}\tau_2$. Nós não precisaremos usar esta interpretação em nenhum momento; analisando a relação entre extensões e invariantes de Busby, é fácil verificar que a soma chapéu das extensões $(X,\mathfrak{E}_1,\varphi_1)$ e $(X,\mathfrak{E}_2,\varphi_2)$ é a extensão $(X,\mathfrak{E},\varphi)$ dada por

$$\mathfrak{E}=\{(T_1\oplus T_2)+K:T_1\in\mathfrak{E}_1,T_2\in\mathfrak{E}_2,\varphi_1(T_1)=\varphi_2(T_2),K\in\mathcal{K}(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)\},$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{E} &\longrightarrow C(X) \\ (T_1 \oplus T_2) + K &\longmapsto \varphi(T_1) = \varphi(T_2). \end{aligned}$$

Além da soma-chapéu de extensões, existe um outro tipo de operação com extensões que nos será de grande valia, que chamaremos de *soma disjunta*. O primeiro fato importante sobre a soma disjunta é que ela age sobre extensões sobre espaços métricos compactos possivelmente distintos:

Sejam X_1, X_2 espaços métricos compactos. Denote por $X_1 \vee X_2$ a reunião disjunta dos espaços métricos X_1 e X_2. É fácil verificar que $X_1 \vee X_2$ com a topologia da reunião disjunta (a topologia final das inclusões $\iota_1 : X_1 \longrightarrow X_1 \vee X_2$ e $\iota_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \vee X_2$) é também um espaço compacto metrizável; se d_1 e d_2 são métricas sobre X_1 e X_2, respectivamente, ambas limitadas por 1, então uma métrica que gera a topologia da reunião disjunta em $X_1 \vee X_2$ é dada por $d : (X_1 \vee X_2) \times (X_1 \vee X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $d(x, y) = d_i(x, y)$ caso $x, y \in X_i$, $i = 1, 2$, e $d(x, y) = 1$ caso contrário.

Definição 2.3.12. Dadas extensões $\tau_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\tau_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$, definimos a sua *soma disjunta* como a extensão $\tau_1 \vee \tau_2 : C(X_1 \vee X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ dado por

$$(\tau_1 \vee \tau_2)(f) = \tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(f|_{X_2}), \ \forall f \in C(X_1 \vee X_2).$$

Precisamos justificar que $\tau_1 \vee \tau_2$ é realmente uma extensão; se considerarmos os *-homomorfismos $\varrho_1 : C(X_1 \vee X_2) \longrightarrow C(X_1)$ e $\varrho_2 : C(X_1 \vee X_2) \longrightarrow C(X_2)$ dados respectivamente por $\varrho_1(f) = f|_{X_1}, \varrho_2(f) = f|_{X_2}$ $\forall f \in C(X_1 \vee X_2)$, então podemos escrever $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 \circ \varrho_1) \hat{+} (\tau_2 \circ \varrho_2)$, de onde podemos concluir de imediato que $\tau_1 \vee \tau_2$ é um *-homomorfismo unital. Verifiquemos a injetividade: suponha que $f \in C(X_1 \vee X_2)$ é tal que $(\tau_1 \vee \tau_2)(f) = 0$, e denote $\tau_1(f|_{X_1}) = \pi(T_1)$, $\tau_2(f|_{X_2}) = \pi(T_2)$. Ora, mas

$$0 = (\tau_1 \vee \tau_2)(f) = \tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(f|_{X_2}) = \pi(T_1 \oplus T_2)$$

implica em $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, logo $T_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ e $T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$, e portanto $\tau_1(f|_{X_1}) = 0$, $\tau_2(f|_{X_2}) = 0$. A injetividade destas extensões nos dá $f|_{X_1} = 0$, $f|_{X_2} = 0$, de onde segue que $f = 0$, estabelecendo a injetividade de $\tau_1 \vee \tau_2$, como desejado.

É conseqüência direta da associatividade da soma-chapéu de extensões que a soma disjunta de extensões é também associativa, e pode portanto ser estendida da maneira usual para operar um número qualquer finito de extensões: se $n \in \mathbb{N}^*$ e temos espaços métricos compactos X_i e extensões $\tau_i : C(X_i) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então definimos $\tau_1 \vee \cdots \vee \tau_n : C(X_1 \vee \cdots \vee X_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n)$ como sendo a extensão dada por

$$(\tau_1 \vee \cdots \vee \tau_n)(f) = \tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \cdots \hat{+} \tau_n(f|_{X_n}) \quad \forall f \in C(X_1 \vee \cdots \vee X_n).$$

O próximo passo é ver como a soma disjunta de extensões se comporta com relação à equivalência de extensões. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 2.3.13. *Sejam* $\tau_1, \tau_1' \in \operatorname{ext}(X_1)$ *e* $\tau_2, \tau_2' \in \operatorname{ext}(X_2)$ *tais que* $\tau_1 \sim \tau_1'$, $\tau_2 \sim \tau_2'$. *Então,* $(\tau_1 \vee \tau_2) \sim (\tau_1' \vee \tau_2')$.

Demonstração. A prova é análoga à da proposição 2.3.8: sejam $U, U' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores unitários tais que $\operatorname{Ad}\pi(U) \circ \tau_1 = \tau_1'$ e $\operatorname{Ad}\pi(U') \circ \tau_2 = \tau_2'$; considere o operador unitário $\widetilde{U} := U \oplus U' \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, e tome $f \in C(X_1 \vee X_2)$ arbitrário. Então, denotando $\tau_1(f|_{X_1}) = \pi(T_1)$, $\tau_2(f|_{X_2}) = \pi(T_2)$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}\pi(\widetilde{U}) \circ (\tau_1 \vee \tau_2)(f) &= \operatorname{Ad}\pi(\widetilde{U})(\tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(f|_{X_2})) = \\
&= \pi(U \oplus U')(\pi(T_1 \oplus T_2))\pi(U^* \oplus U'^*) = \pi((UT_1U^*) \oplus (U'T_2U'^*)) = \\
&= (\operatorname{Ad}\pi(U) \circ \tau_1(f|_{X_1})) \hat{+} (\operatorname{Ad}\pi(U') \circ \tau_2(f|_{X_2})) = \\
&= \tau_1'(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2'(f|_{X_2}) = (\tau_1' \vee \tau_2')(f),
\end{aligned}$$

provando com isto que $(\tau_1 \vee \tau_2) \sim (\tau_1' \vee \tau_2')$, como queríamos.

■

Como conseqüência da proposição anterior, está bem definida uma função

$$\begin{aligned}
\lambda : \operatorname{Ext}(X_1) \times \operatorname{Ext}(X_2) &\longrightarrow \operatorname{Ext}(X_1 \vee X_2) \\
([\tau_1], [\tau_2]) &\longmapsto [\tau_1 \vee \tau_2].
\end{aligned}$$

Denotaremos $\lambda([\tau_1], [\tau_2])$ por $[\tau_1] \vee [\tau_2]$. Esta função é também denominada de *soma disjunta*. Quando tivermos provado que $\operatorname{Ext}(X)$ é grupo abeliano para X espaço métrico compacto qualquer (seção 3.1), veremos em particular com o teorema 3.1.5 que esta função de soma disjunta é na verdade um isomorfismo de grupos entre o grupo produto direto $\operatorname{Ext}(X_1) \times \operatorname{Ext}(X_2)$ e o grupo $\operatorname{Ext}(X_1 \vee X_2)$.

2.4 Extensões Triviais

Já sabemos que $\operatorname{Ext}(X)$ é um conjunto com uma operação binária, chamada de *soma*, que é associativa e comutativa; nesta seção, nós identificaremos um elemento em

Ext(X) que age como elemento neutro para esta soma, provando com isto que Ext(X) possui estrutura de semigrupo abeliano. Como sugerido pelo nome da seção, o elemento neutro da soma está relacionado com as chamadas *extensões triviais*. Comecemos portanto definindo o conceito de extensão trivial, primeiro no contexto de seqüências exatas, e depois identificando o conceito correspondente em termos de invariantes de Busby.

Definição 2.4.1. Uma extensão $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é dita ser *trivial* quando ela cinde à direita, ou seja, quando existe um *-homomorfismo unital injetor $\psi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{E}$ tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{C(X)}$.

Vejamos o que isto quer dizer no contexto dos invariantes de Busby: se $(X, \mathfrak{E}, \varphi)$ é uma extensão trivial, tome $\psi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{E}$ um *-homomorfismo unital injetor tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{C(X)}$. Considere $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ o invariante de Busby desta extensão. Sabemos pelo lema 2.2.2 que τ é o único *-homomorfismo unital injetor satisfazendo $\tau \circ \varphi = \pi|_{\mathfrak{E}}$; logo, compondo as duas igualdades temos

$$\pi \circ \psi = \pi|_{\mathfrak{E}} \circ \psi = \tau \circ \varphi \circ \psi = \tau \circ \mathrm{id}_{C(X)} = \tau,$$

ou seja, τ se levanta para um *-homomorfismo unital injetor $\psi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{E}$. Isto nos dá a seguinte definição:

Definição 2.4.2. Uma extensão $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é dita ser *trivial* quando existe um *-homomorfismo unital injetor $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\tau = \pi \circ \psi$.

Observação 2.4.3. Gostaríamos de observar que, para verificarmos que uma dada extensão $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é trivial, basta provarmos que existe um *-homomorfismo injetor $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *não necessariamente unital*, tal que $\tau = \pi \circ \psi$; provemos isto: se ψ é um tal *-homomorfismo injetor, então $P = \psi(1)$ é uma projeção em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Fixe arbitrariamente $x_0 \in X$, e defina

$$\begin{aligned} \psi' : C(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \psi(f) + f(x_0)(I - P). \end{aligned}$$

Usando o fato que $\psi(f)(I - P) = \psi(f) - \psi(f)P = \psi(f) - \psi(f) = 0 \ \forall f \in C(X)$, é fácil verificar que ψ' é um *-homomorfismo unital, e ele é injetor pois se $\psi'(f) = 0$, então $\psi(f) = f(x_0)(P - I)$, o que implica em

$$\psi(f) = \psi(1 \cdot f) = \psi(1)\psi(f) = f(x_0)P(P - I) = 0,$$

e portanto $f = 0$, pela injetividade de ψ. Ademais, $\pi \circ \psi' = \tau$, porque

$$\begin{aligned}\pi \circ \psi'(f) &= \pi(\psi(f) + f(x_0)(I - P)) = \tau(f) + f(x_0)(1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} - \pi(P)) = \\ &= \tau(f) + f(x_0)(1 - \pi(\psi(1))) = \tau(f) + f(x_0)(1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} - \tau(1)) = \tau(f),\end{aligned}$$

o que prova que τ é trivial.

Antes de falarmos mais qualquer coisa sobre extensões triviais, vamos provar sua existência.

Proposição 2.4.4. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, existe uma extensão trivial dos compactos por $C(X)$.*

Demonstração. O trabalho foi feito essencialmente na proposição 2.1.6; relembrando: seja $\Lambda \subseteq X$ enumerável e denso. Tome uma seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$ formada por todos os elementos de Λ, onde cada ponto isolado de X (que com certeza está em Λ) aparece infinitas vezes nesta seqüência; tal seqüência existe, pois Λ é enumerável. Então, esta seqüência tem naturalmente a propriedade que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o conjunto $\{x_k\}_{k\geq n}$ é denso em X. Defina

$$\begin{aligned}\psi : C(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \operatorname{diag}_k(f(x_k));\end{aligned}$$

foi provado na proposição 2.1.6 que ψ é um *-homomorfismo unital injetor, cuja imagem não contém nenhum operador compacto. Assim, se definirmos $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ como $\tau := \pi \circ \psi$, τ será um *-homomorfismo unital injetor, e portanto uma extensão; observe que τ é trivial por construção. Ficou assim provada a existência de extensões triviais, como queríamos.

■

Observação 2.4.5. Uma propriedade importante das extensões triviais é que a soma-chapéu de quaisquer duas extensões triviais é ainda uma extensão trivial; de fato, se $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ são extensões triviais, tome *-homomorfismos unitais injetores $\psi_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $\psi_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ tais que $\tau_1 = \pi \circ \psi_1$, $\tau_2 = \pi \circ \psi_2$. Então, é claro que $\psi_1 \oplus \psi_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ é um *-homomorfismo unital injetor e ainda, para todo $f \in C(X)$,

$$(\tau_1 \hat{+} \tau_2)(f) = \pi(\psi_1(f)) \hat{+} \pi(\psi_2(f)) = \pi(\psi_1(f) \oplus \psi_2(f)) = \pi \circ (\psi_1 \oplus \psi_2)(f),$$

provando desta forma que $\tau_1 \hat{+} \tau_2$ é uma extensão trivial, como desejado.

Observação 2.4.6. Suponha que $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ é uma extensão trivial, e $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ é um *-homomorfismo unital; então, $\tau\hat{+}(\pi \circ \varphi)$ e $(\pi \circ \varphi)\hat{+}\tau$ são extensões triviais, usando argumento análogo ao da observação anterior, e a proposição 2.3.6.

Vejamos com o próximo resultado que a propriedade de uma extensão "ser trivial" é preservada por equivalência de extensões.

Proposição 2.4.7. *Sejam $\tau, \tau' \in \mathrm{ext}(X)$ tais que $\tau \sim \tau'$, e suponha que τ é trivial. Então, τ' é trivial.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário tal que $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau = \tau'$. A extensão τ é trivial, logo existe um *-homomorfismo unital injetor $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\tau = \pi \circ \psi$. Dado $f \in C(X)$ arbitrário, temos então que

$$\tau'(f) = \mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau(f) = \mathrm{Ad}\pi(U)\pi(\psi(f)) = \pi(U\psi(f)U^*) = \pi \circ \mathrm{Ad}U \circ \psi(f),$$

de onde $\tau' = \pi \circ (\mathrm{Ad}U \circ \psi)$; como $\mathrm{Ad}U \circ \psi$ é claramente um *-homomorfismo unital injetor, segue-se que τ' é uma extensão trivial, como queríamos provar.

■

O próximo objetivo é provar, com o teorema 2.4.12, que quaisquer duas extensões triviais dos compactos por $C(X)$ são equivalentes; em [9], teorema IX.2.1, uma prova indireta é dada, envolvendo um resultado bastante técnico sobre equivalências entre diversas noções de equivalência de representações de $C(X)$; optamos aqui por uma versão modificada e mais completa da prova apresentada originalmente em [6] (teorema 5.3), que é mais construtiva e ilustrativa para os nossos propósitos. Veremos primeiro mais alguns resultados auxiliares que serão necessários na prova do teorema 2.4.12.

Lema 2.4.8. *Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff. Se existe uma família enumerável $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq C(X)$ de idempotentes tal que $C(X) = C^*(\{e_k\}_k)$, então existe $h \in C(X)$ uma função real tal que $C(X) = C^*(1, h)$.*

Demonstração. Observe que o caso em que X é um conjunto unitário é trivial, logo faremos apenas o caso em que X possui mais de um elemento. Dado $x \in X$ arbitrário, note que $2e_k(x) - 1 = \pm 1$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Logo,

$$\left\| \frac{2e_k - 1}{3^k} \right\| = \frac{1}{3^k},$$

de onde a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e_k - 1}{3^k}$ converge absolutamente, e portanto uniformemente. Assim, $h := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e_k - 1}{3^k}$ é uma função bem definida e contínua, que é obviamente real.

Afirmamos que h separa pontos de X. De fato, dados $x_1, x_2 \in X$ distintos; a família $\{e_k\}_k$ gera $C(X)$, logo ela separa pontos. Portanto, existe um menor número natural n tal que $e_n(x_1) \neq e_n(x_2)$; agora, é óbvio que $|e_k(x_1) - e_k(x_2)| \leq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$, de onde podemos ver que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e_k(x_1) - e_k(x_2)}{3^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|e_k(x_1) - e_k(x_2)|}{3^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |h(x_2) - h(x_1)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e_k(x_2) - 1 - 2e_k(x_1) + 1}{3^k} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2(e_k(x_2) - e_k(x_1))}{3^k} \right| = \\ &= \left| 2\frac{(e_n(x_2) - e_n(x_1))}{3^n} - 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e_k(x_2) - e_k(x_1)}{3^k} \right| \geq \\ &\geq 2\left| \frac{(e_n(x_2) - e_n(x_1))}{3^n} \right| - 2\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e_k(x_2) - e_k(x_1)}{3^k} \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{3^n} - 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3^n} - 2\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}, \end{aligned}$$

o que prova que $h(x_1) \neq h(x_2)$, e assim h separa pontos de X, como afirmado.

Pelo observado acima sobre a função h, temos que a sub-C*-álgebra $C^*(1, h) \subseteq C(X)$ satisfaz as hipóteses do teorema de Stone-Weierstrass, de onde segue-se que $C^*(1, h) = C(X)$, concluindo a demonstração.

∎

O resultado acima pode ser prontamente generalizado para C*-álgebras comutativas com unidade, como segue.

Corolário 2.4.9. *Seja $\mathfrak{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade gerada por uma família enumerável de projeções. Então, existe um elemento $a \in \mathfrak{A}$ auto-adjunto tal que $\mathfrak{A} = C^*(1, a)$.*

Demonstração. $\mathfrak{A}$ é *-isomorfa a $C(\widehat{\mathfrak{A}})$, via a transformada de Gelfand $\Gamma : \mathfrak{A} \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{A}})$; logo, da hipótese e pelo lema A.1.1, $C(\widehat{\mathfrak{A}})$ é gerada por uma família enumerável de idempotentes. Portanto, do lema 2.4.8, existe $h \in C(\widehat{\mathfrak{A}})$ auto-adjunto tal que $C(\widehat{\mathfrak{A}}) = C^*(1, h)$. Então, $a := \Gamma^{-1}(h)$ é auto adjunto e, novamente pelo lema A.1.1, temos $\mathfrak{A} = C^*(1, a)$.

∎

Observação 2.4.10. Antes de continuarmos, gostaríamos de escrever algumas palavras sobre o cálculo funcional contínuo de um operador diagonal. Dado um operador diagonal $D = \mathrm{diag}_k(x_k)$, podemos definir uma função

$$\begin{aligned} \eta : C(\sigma(D)) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \mathrm{diag}_k(f(x_k)). \end{aligned}$$

É trivial verificar que η é um *-homomorfismo unital, e ele é injetor pois se $f, g \in C(\sigma(D))$ são tais que $\eta(f) = \eta(g)$, então $f(x_k) = g(x_k)$ para todo k; como o conjunto $\{x_k\}_k$ é denso em $\sigma(D)$, segue-se que $f = g$. É claro que $\eta(1) = I$, $\eta(\zeta) = D$. Sabemos que existe apenas um *-homomorfismo satisfazendo a todas estas propriedades, a saber o cálculo funcional contínuo de D (para uma prova deste fato ver por exemplo [21], proposição 3.3.10). Em outras palavras, o cálculo funcional contínuo de um operador diagonal D é dado pela definição de η acima.

Exibimos na proposição 2.4.4 uma extensão trivial, construída de modo específico a partir de uma seqüência densa em X especial; o próximo lema é a chave para a demonstração do teorema 2.4.12, mostrando que, na verdade, todas as extensões triviais são daquela forma.

Lema 2.4.11. *Sejam X um espaço métrico compacto, e $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ uma extensão trivial. Então, existem uma seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$ densa em X tal que todos os elementos isolados de X figuram nela infinitas vezes, e uma base ortonormal $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$, de modo que τ é dada por*

$$\begin{aligned} \tau : C(X) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \pi(\mathrm{diag}_k(f(x_k))), \end{aligned}$$

onde $\mathrm{diag}_k(f(x_k))$ *é escrito com relação à base* $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Demonstração. Seja $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *-homomorfismo unital injetor tal que $\tau = \pi \circ \psi$. Observe que ψ é uma *-representação de $C(X)$, logo podemos associar a ela uma medida espectral $\mathscr{E}$ definida nos subconjuntos Borelianos de X, como descrito na seção A.1, ou seja,

$$\psi(f) = \int_X f \, d\mathscr{E} \quad \forall f \in C(X).$$

Tome $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ base enumerável de abertos para X, e seja $\mathfrak{A} = C^*(I, \{\mathscr{E}(U_n)\}_n)$; então, é sabido da seção A.1 que $\mathfrak{A}$ é uma C*-álgebra comutativa com unidade, pois todos os $\mathscr{E}(U_n)$ comutam entre si; também, da proposição A.1.2 vemos que $\mathrm{ran}(\psi) \subseteq \mathfrak{A}$;

como $\mathfrak{A}$ é gerada por uma família enumerável de projeções, temos do corolário 2.4.9 que existe um operador auto-adjunto T tal que $\mathfrak{A} = C^*(I, T)$.

Sejam $\Lambda = \sigma(T)$ e $\eta : C(\Lambda) \longrightarrow \mathfrak{A}$ o *-isomorfismo dado pelo cálculo funcional contínuo de T. Como $\operatorname{ran}(\psi) \subseteq \mathfrak{A}$, podemos fazer a composição $\eta^{-1} \circ \psi : C(X) \longrightarrow C(\Lambda)$, que é um *-homomorfismo unital injetor, e portanto dual a uma sobrejeção contínua $p : \Lambda \longrightarrow X$, isto é,

$$\eta^{-1} \circ \psi(f) = p^*(f) = f \circ p \quad \forall f \in C(X).$$

Note que, entre outras coisas, a existência da sobrejeção contínua p mostra que o espaço métrico compacto X é o quociente de um subconjunto de $\mathbb{R}$, neste caso, Λ; em particular, vemos que, para todo $f \in C(X)$, $\psi(f) = \eta(f \circ p) = (f \circ p)(T)$. O operador T é auto adjunto, e portanto também normal. Assim, pelo corolário B.2.4, podemos escrever $T = D + K$ com D diagonal, K compacto e $\sigma(D) = \sigma(T) = \Lambda$.

Para cada $f \in C(X)$ note que

$$\pi \circ \psi(f) = \pi((f \circ p)(T)) = f \circ p(\pi(T)) = f \circ p(\pi(D)) = \pi((f \circ p)(D)),$$

de onde vemos que existe um operador compacto K_f tal que $\psi(f) = (f \circ p)(D) + K_f$. Escrevendo $D = \operatorname{diag}_k(\lambda_k)$ temos que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ é denso em Λ, pois $\Lambda = \sigma(D) = \overline{\{\lambda_k\}_k}$. Denote $x_k = p(\lambda_k)$ para todo k; a sobrejetividade e continuidade de p nos garantem, portanto, que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ é denso em X.

Seja $\varrho : C(\Lambda) \longrightarrow C^*(I, D)$ o cálculo funcional contínuo de D, que sabemos pela observação 2.4.10 ser dado por $\varrho(g) = \operatorname{diag}_k(g(\lambda_k))$ $\forall g \in C(\Lambda)$. Em particular, para todo $f \in C(X)$ temos

$$(f \circ p)(D) = \varrho(f \circ p) = \operatorname{diag}_k((f \circ p)(\lambda_k)) = \operatorname{diag}_k(f(x_k)),$$

e daí temos de imediato que

$$\tau(f) = \pi \circ \psi(f) = \pi((f \circ p)(D) + K_f) + \pi((f \circ p)(D)) = \pi(\operatorname{diag}_k(f(x_k))).$$

Note que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ é tal que todos os elementos isolados de X figuram nela infinitas vezes: de fato, se um dado elemento isolado x de X aparecesse nela apenas um número finito de vezes, teríamos que a função característica $1_{\{x\}} : X \longrightarrow \mathbb{C}$, que é contínua pois x é isolado, seria tal que $\operatorname{diag}_k(1_{\{x\}}(x_k))$ é compacto, e logo $\tau(1_{\{x\}}) = 0$, o que contradiz o fato de τ ser injetora. O lema fica assim provado.

■

Finalmente, faremos a prova de que quaisquer duas extensões triviais são equivalentes; precisamos apenas juntar as peças apresentadas até agora.

Teorema 2.4.12. *Sejam X um espaço métrico compacto, e $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ duas extensões triviais. Então, $\tau_1 \sim \tau_2$.*

Demonstração. Sejam $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ e $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ seqüências densas em X como no lema 2.4.11, de modo que $\tau_1(f) = \pi(\mathrm{diag}_k(f(x_k)))$, $\tau_2(f) = \pi(\mathrm{diag}_k(f(y_k)))$, para todo $f \in C(X)$, com relação à bases ortonormais $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Pelo lema B.2.5, tome $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ uma permutação tal que $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_{\alpha(k)}) = 0$, onde d é a métrica em X.

Considere o operador $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ determinado por $U\xi_k = \omega_{\alpha(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, que é claramente unitário. Podemos então definir um *-isomorfismo unital η por

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(UTU^*). \end{aligned}$$

Note que, para todo $f \in C(X)$ e $k \in \mathbb{N}^*$,

$$U \circ \mathrm{diag}_k(f(x_k))\xi_k = U(f(x_k)\xi_k) = f(x_k)\omega_{\alpha(k)},$$

$$\mathrm{diag}_k(f(y_k)) \circ U\xi_k = \mathrm{diag}_k(f(y_k))\omega_{\alpha(k)} = f(y_{\alpha(k)})\omega_{\alpha(k)}.$$

Para cada $f \in C(X)$, defina $T_f : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ por

$$T_f = U \circ \mathrm{diag}_k(f(x_k)) - \mathrm{diag}_k(f(y_k)) \circ U.$$

Afirmamos que T_f é um operador compacto: de fato, tome $\varepsilon > 0$ arbitrário; como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tome $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $k \geq k_0$ implica em $d(x_k, y_{\alpha(k)}) < \delta$. Como conseqüência temos que $k \geq k_0$ implica em $|f(x_k) - f(y_{\alpha(k)})| < \varepsilon$. Defina agora $F_0 : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ por

$$F_0(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (f(x_k) - f(y_{\alpha(k)}))\omega_{\alpha(k)}.$$

Obviamente, F_0 tem posto finito; ainda, para um vetor $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k$ de $\mathcal{H}_1$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
\|(T_f - F_0)\xi\|^2 &= \|(T_f - F_0)\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k\|^2 = \\
&= \left\|\textstyle\sum_{k>k_0} \lambda_k (f(x_k) - f(y_{\alpha(k)}))\omega_{\alpha(k)}\right\|^2 = \\
&= \textstyle\sum_{k>k_0} |\lambda_k|^2 \cdot |f(x_k) - f(y_{\alpha(k)})|^2 < \\
&< \textstyle\sum_{k>k_0} |\lambda_k|^2 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \textstyle\sum_{k>k_0} |\lambda_k|^2 \leq \\
&\leq \varepsilon^2 \|\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k\|^2 = \varepsilon^2 \|\xi\|^2,
\end{aligned}$$

e daí segue que $\|T_f - F_0\| \leq \varepsilon$, de onde T_f é um operador compacto, como afirmado. Logo, o operador $T_f U^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ é compacto. Então,

$$\begin{aligned}
0 = \pi(T_f U^*) &= \pi((U \circ \operatorname{diag}_k(f(x_k)) - \operatorname{diag}_k(f(y_k)) \circ U)U^*) = \\
&= \pi(U \circ \operatorname{diag}_k(f(x_k))U^* - \operatorname{diag}_k(f(y_k))) = \\
&= \eta \circ \tau_1(f) - \tau_2(f),
\end{aligned}$$

o que implica em $\eta \circ \tau_1(f) = \tau_2(f)$. Como f havia sido tomado arbitrariamente, temos $\eta \circ \tau_1 = \tau_2$, ou seja, $\tau_1 \sim \tau_2$, e o teorema está demonstrado.

■

Portanto, as extensões triviais dos compactos por $C(X)$ definem uma única classe em $\mathrm{Ext}(X)$ e, pelo que vimos na proposição 2.4.7, todas as extensões desta classe são triviais. O próximo objetivo será demonstrar, com o teorema 2.4.14, que a classe em $\mathrm{Ext}(X)$ das extensões triviais age como um elemento neutro para a soma em $\mathrm{Ext}(X)$ definida na seção 2.3.

Observação 2.4.13. Queremos introduzir agora um tipo especial de *-isomorfismo que nos será bastante útil no teorema 2.4.14, bem como no resto do texto: considere $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção, seja $P\mathcal{H} = \operatorname{ran}(P)$, e $\mathfrak{p} = \pi(P)$. Denote por $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a inclusão; então, $\iota^*\iota = I_{P\mathcal{H}}$ e $\iota\iota^* = P$. Defina

$$\begin{aligned}
\alpha_P : \mathfrak{p}\mathcal{Q}(\mathcal{H})\mathfrak{p} &\longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) \\
\mathfrak{p}\pi(T)\mathfrak{p} &\longmapsto \pi(\iota^* T \iota)
\end{aligned}$$

(é claro que $\mathfrak{p}\mathcal{Q}(\mathcal{H})\mathfrak{p}$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$). Note que α_P está bem definida e é injetora, pois

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}\pi(T)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\pi(S)\mathfrak{p} &\iff \pi(PTP) = \pi(PSP) \iff \pi(P(T-S)P) = 0 \iff \\ &\iff \iota\iota^*(T-S)\iota\iota^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \iota^*(T-S)\iota \in \mathcal{K}(P\mathcal{H}) \iff \\ &\iff \pi(\iota^*(T-S)\iota) = 0 \iff \pi(\iota^* T\iota) = \pi(\iota^* S\iota).\end{aligned}$$

Também, α_P é sobrejetora, pois dado $\pi(T) \in \mathcal{B}(P\mathcal{H})$ arbitrário, temos que $\iota T\iota^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é tal que $\alpha_P(\mathfrak{p}\pi(\iota T\iota^*)\mathfrak{p}) = \pi(\iota^*(\iota T\iota^*)\iota) = \pi(T)$. É fácil verificar que α_P é um *-homomorfismo, mostraremos apenas que α_P separa produtos:

$$\begin{aligned}\alpha_P(\mathfrak{p}\pi(T)\mathfrak{p})\alpha_P(\mathfrak{p}\pi(S)\mathfrak{p}) &= \pi(\iota^* T\iota\iota^* S\iota) = \pi(\iota^* TPS\iota) = \pi(\iota^* TPPS\iota) = \\ &= \alpha_P(\mathfrak{p}\pi(TPPS)\mathfrak{p}) = \alpha_P(\mathfrak{p}\pi(T)\pi(P)\pi(P)\pi(S)\mathfrak{p}) = \\ &= \alpha_P(\mathfrak{p}\pi(T)\mathfrak{p}\mathfrak{p}\pi(S)\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

Provamos com isto que α_P é um *-isomorfismo. Note ainda que $\alpha_P(\mathfrak{p}\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = \alpha_P(\mathfrak{p}) = \alpha_P(\pi(\iota\iota^*)) = \pi(\iota^*\iota\iota^*\iota) = \pi(I_{P\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}$.

Considere agora o *-homomorfismo

$$\begin{aligned}\Upsilon_P : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(T\oplus 0_{P^\perp\mathcal{H}}).\end{aligned}$$

Afirmamos que, para todo $\mathfrak{t} \in \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$, temos $\Upsilon_P(\mathfrak{t}) = \alpha_P^{-1}(\mathfrak{t})$. De fato, tome $\mathfrak{t} = \pi(T) \in \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$ arbitrário e observe que, relativo à decomposição $\mathcal{H} = P\mathcal{H}\oplus P^\perp\mathcal{H}$, temos $P = I_{P\mathcal{H}}\oplus 0$; também, $\iota^*(T\oplus 0_{P^\perp\mathcal{H}})\iota = T$, e portanto

$$\iota T\iota^* = \iota\iota^*(T\oplus 0)\iota\iota^* = P(T\oplus 0)P = (I\oplus 0)(T\oplus 0)(I\oplus 0) = T\oplus 0.$$

Vemos assim que $\Upsilon_P(\mathfrak{t}) = \Upsilon_P(\pi(T)) = \pi(T\oplus 0) = \pi(\iota T\iota^*) = \alpha_P^{-1}(\pi(T)) = \alpha_P^{-1}(\mathfrak{t})$, e o afirmado segue.

Teorema 2.4.14. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, a classe em* $\mathrm{Ext}(X)$ *das extensões triviais é um elemento neutro para a operação de soma em* $\mathrm{Ext}(X)$.

Demonstração. Seja $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ representando uma classe $a \in \mathrm{Ext}(X)$ arbitrária, isto é, $a = [\tau]$. Tome uma seqüência $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ densa em $C(X)$; tome também uma seqüência $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}^*}$ densa em X, onde os elementos isolados de X figuram infinitas vezes nesta seqüência. Denote $\tau(f_k) = \pi(T_k)\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, e $f_k(x_r) = \lambda_k^{(r)}\ \forall k, r \in \mathbb{N}^*$; defina, para todo $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^{(r)} = (\lambda_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Como τ é um *-isomorfismo entre $C(X)$ e $\mathrm{ran}(\tau)$, e $\tau(f_k) = \pi(T_k)\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, temos que

$$\mathrm{Jspec}_k(f_k) = \mathrm{Jspec}_k(\tau(f_k)) = \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k)).$$

Observe que $\lambda^{(r)} \in \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k))\ \forall r \in \mathbb{N}^*$, pois

$$\lambda^{(r)} = (f_k(x_r))_k = (\hat{x_r}(f_k))_k \in \mathrm{Jspec}_k(f_k) = \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k)).$$

Assim, pelo teorema C.2.3, existe $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que

$$T_k = (D_k \oplus R_k) + L_k\ \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

decomposição em soma direta esta relativa a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_r\}_r$, L_k é compacto, e $D_k = \mathrm{diag}_r(\lambda_k^{(r)})$ com relação à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$. Observe que $D_k = \mathrm{diag}_r(\lambda_k^{(r)}) = \mathrm{diag}_r(f_k(x_r))$.

Tome $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a projeção ortogonal sobre o subespaço $\mathcal{H}_1$, e denote $\mathfrak{p} = \pi(P)$; seja $\iota : \mathcal{H}_1^{\perp} \longrightarrow \mathcal{H}$ a inclusão. Então, $\iota\iota^* = I - P$, e $\iota^*\iota = I_{\mathcal{H}_1^{\perp}}$; considere $\alpha := \alpha_{(I-P)}$, onde

$$\alpha_{(I-P)} : (1-\mathfrak{p})\mathcal{Q}(\mathcal{H})(1-\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1^{\perp})$$

é um *-isomorfismo como na observação 2.4.13. Podemos então definir

$$\begin{array}{rcl} \eta : C(X) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1^{\perp}) \\ f & \longmapsto & \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(f)(1-\mathfrak{p})). \end{array}$$

Afirmamos que η é um *-homomorfismo: de fato, é trivial verificar que η preserva as estruturas de soma, produto por escalar e involução; para provarmos que η preserva produtos, note que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathfrak{p}\tau(f_k) = \pi(P(D_k \oplus R_k)) = \pi((D_k \oplus R_k)P) = \tau(f_k)\mathfrak{p},$$

logo a continuidade de τ e a densidade de $\{f_k\}_k$ garantem que $\mathfrak{p}\tau(f) = \tau(f)\mathfrak{p}\ \forall f \in C(X)$, ou seja, $\mathfrak{p}$ comuta com $\mathrm{ran}(\tau)$. Portanto, $(1-\mathfrak{p})$ comuta com $\mathrm{ran}(\tau)$; daí, dados $f, g \in C(X)$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned} \eta(f)\eta(g) &= \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(f)(1-\mathfrak{p}))\alpha((1-\mathfrak{p})\tau(g)(1-\mathfrak{p})) = \\ &= \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(f)(1-\mathfrak{p})(1-\mathfrak{p})\tau(g)(1-\mathfrak{p})) = \\ &= \alpha((1-\mathfrak{p})^2\tau(f)\tau(g)(1-\mathfrak{p})^2) = \\ &= \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(fg)(1-\mathfrak{p})) = \\ &= \eta(fg), \end{aligned}$$

provando com isto que η é um *-homomorfismo, como desejado. Observe ainda que η é unital, pois

$$\eta(1) = \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(1)(1-\mathfrak{p})) = \alpha(1-\mathfrak{p}) = 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1^\perp)}.$$

Defina agora

$$\begin{array}{rcl} \tau' : C(X) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1) \\ f & \longmapsto & \pi(\operatorname{diag}_r(f(x_r))), \end{array}$$

onde o operador diagonal da definição de τ' refere-se à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$. Sabemos da prova da proposição 2.4.4 que τ' é uma extensão trivial. Note também que, em particular,

$$\tau'(f_k) = \pi(\operatorname{diag}_r(f_k(x_r))) = \pi(D_k)\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Para $k \in \mathbb{N}^*$, se escrevermos o operador L_k matricialmente com relação à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ como

$$L_k = \begin{pmatrix} L_k^{(11)} & L_k^{(12)} \\ L_k^{(21)} & L_k^{(22)} \end{pmatrix},$$

podemos observar que os $L_k^{(ij)}$ são todos compactos, visto que L_k é compacto. Também, $\iota^* T_k \iota = R_k + L_k^{(22)}$, de onde $R_k = \iota^* T_k \iota - L_k^{(22)}$, e portanto

$$\begin{aligned} T_k &= (D_k \oplus R_k) + L_k = D_k \oplus (\iota^* T_k \iota - L_k^{(22)}) + L_k = \\ &= D_k \oplus \iota^* T_k \iota + 0 \oplus (-L_k^{(22)}) + L_k = \\ &= D_k \oplus \iota^* T_k \iota + \widetilde{L_k}, \end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{L_k} = \begin{pmatrix} L_k^{(11)} & L_k^{(12)} \\ L_k^{(21)} & 0 \end{pmatrix},$$

que é um operador compacto, pois suas componentes são operadores compactos. Então,

$$\begin{aligned} \tau(f_k) &= \pi(T_k) = \pi(D_k \oplus \iota^* T_k \iota + \widetilde{L_k}) = \pi(D_k \oplus \iota^* T_k \iota) = \pi(D_k) \hat{+} \pi(\iota^* T_k \iota) = \\ &= \tau'(f_k) \hat{+} \alpha((1-\mathfrak{p})\pi(T_k)(1-\mathfrak{p})) = \tau'(f_k) \hat{+} \alpha((1-\mathfrak{p})\tau(f_k)(1-\mathfrak{p})) = \\ &= \tau'(f_k) \hat{+} \eta(f_k) = (\tau' \hat{+} \eta)(f_k). \end{aligned}$$

Note que $\tau' \hat{+} \eta$ é uma extensão, pela proposição 2.3.6; logo, temos que as extensões τ

e $\tau'\hat{+}\eta$ coincidem em um subconjunto denso de $C(X)$, e por continuidade segue que $\tau = \tau'\hat{+}\eta$. Agora, sabemos da observação 2.4.5 que $\tau'\hat{+}\tau'$ é uma extensão trivial, e então $\tau' \sim \tau'\hat{+}\tau'$, pelo teorema 2.4.12. Segue-se portanto da observação 2.3.9 que $\tau'\hat{+}\eta \sim \tau'\hat{+}\tau'\hat{+}\eta$, de onde temos

$$\tau = \tau'\hat{+}\eta \sim \tau'\hat{+}\tau'\eta = \tau'\hat{+}\tau,$$

e então $a = [\tau] = [\tau'\hat{+}\tau] = [\tau'] + [\tau] = [\tau'] + a$; como $a \in \mathrm{Ext}(X)$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $[\tau']$, a classe das extensões triviais dos compactos por $C(X)$, é o elemento neutro para a operação de soma em $\mathrm{Ext}(X)$, e o teorema está provado.

■

Concluímos portanto que $\mathrm{Ext}(X)$ com a operação de soma dada é um semigrupo abeliano. A classe em $\mathrm{Ext}(X)$ das extensões triviais será denotada simplesmente por 0, indicando que ela é o elemento neutro da soma.

Capítulo 3

O Funtor Ext

Antes de entrarmos propriamente no assunto principal deste capítulo, gostaríamos de escrever umas poucas palavras sobre os conceitos de *categoria* e *funtor*, que utilizaremos mais à frente; para uma exposição clássica da teoria de categorias, ver [15]. Os termos não definidos da teoria, *objeto* e *morfismo*, podem ser no nosso caso interpretados respectivamente em termos de conjuntos e funções, ambos satisfazendo algumas propriedades, já que estaremos interessados apenas em categorias desta forma.

Uma *categoria* consiste em

- Uma classe de *objetos* $\mathscr{C}$;
- Para quaisquer dois objetos A, B de $\mathscr{C}$, um conjunto de *morfismos de A em B*, denotado por $M(A, B)$; elementos de $M(A, B)$ são denotados por $f : A \longrightarrow B$;
- Para cada três objetos A, B, C e morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, um morfismo $g \circ f : A \longrightarrow C$,

de modo que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

- Para quaisquer objetos A, B, C, D e morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$,
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$
- Para cada objeto A existe um morfismo $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ tal que para quaisquer objetos B, C e morfismo $f : B \longrightarrow C$,
$$f \circ \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_C \circ f = f;$$

Dadas duas categorias $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, um *funtor covariante* de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$ consiste em um par de aplicações $F = (F_o, F_m)$, tais que

- F_o associa a cada objeto A de $\mathscr{C}$, um objeto $F_o(A)$ de $\mathscr{D}$;
- F_m associa a cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ entre objetos de $\mathscr{C}$, um morfismo $F_m(f) : F_o(A) \longrightarrow F_(B)$,

de modo que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

- Para cada objeto A de $\mathscr{C}$,
$$F_m(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_o(A)};$$
- Para quaisquer objetos A, B, C de $\mathscr{C}$ e morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$,
$$F_m(g \circ f) = F_m(g) \circ F_m(f).$$

É padrão abandonar os índices o e m e denotar as aplicações simplesmente por F. Neste capítulo nós introduziremos o funtor Ext, que é um funtor covariante da categoria dos *espaços métricos compactos* na categoria dos *grupos abelianos*. Para a compreensão deste capítulo, é imprescindível familiaridade com os resultados discutidos no apêndice D, sobre aplicações positivas, em particular o teorema de Stinespring (teorema D.1.11) e o teorema D.2.14 sobre o levantamento de aplicações positivas de $C(X)$ em quocientes de C*-álgebras. Para o exemplo do cálculo de $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$, é necessário o conhecimento do material sobre operadores de Toeplitz exposto na seção A.5.

3.1 $\mathrm{Ext}(X)$ é Grupo Abeliano

Faremos agora a prova de que $\mathrm{Ext}(X)$ é um grupo abeliano. Precisaremos em algum momento do fato de que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é tal que T^*T é um operador compacto, então T é um operador compacto. Isto é verdade, pois qualquer polinômio em T^*T é obviamente um operador compacto, e portanto $f(T^*T)$ é compacto para todo $f \in C(X)$, visto que $f(T^*T)$ será o limite, na norma, de polinômios em T^*T; em particular, $|T| = (T^*T)^{1/2}$ é compacto, de onde temos que T é compacto (ver seção A.2).

Teorema 3.1.1. *Seja X um espaço métrico compacto. Então,* $\mathrm{Ext}(X)$ *é um grupo abeliano.*

Demonstração. Tome $a \in \mathrm{Ext}(X)$ arbitrário, e seja $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ tal que $a = [\tau]$. Observe que τ é uma aplicação unital e positiva, pois é um *-homomorfismo unital. Visto que $\mathcal{Q}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$, podemos ver que do teorema D.2.14 existe uma aplicação unital positiva $\widetilde{\tau} : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\tau = \pi \circ \widetilde{\tau}$.

Sabemos da proposição D.1.10 que $\widetilde{\tau}$ é completamente positiva. Então, como $C(X)$ é separável, pelo teorema de Stinespring (teorema D.1.11) existe um espaço de Hilbert separável $\widetilde{\mathcal{H}}$ com $\mathcal{H} \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$, e $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ uma *-representação tais que $\widetilde{\tau} = \iota^* \circ \varphi \circ \iota$, onde $\iota : \mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ é a inclusão. Portanto, para cada $f \in C(X)$ podemos escrever, relativo à decomposição $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$,

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}(f) & \varphi_{12}(f) \\ \varphi_{21}(f) & \varphi_{22}(f) \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que $\varphi_{12}(f)$ e $\varphi_{21}(f)$ são operadores compactos. De fato: como $\varphi(\overline{f}) = \varphi(f)^*$, observe que

$$\varphi(\overline{f}) = \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}(\overline{f}) & \varphi_{21}(f)^* \\ \varphi_{12}(f)^* & \varphi_{22}(f)^* \end{pmatrix},$$

e assim

$$\varphi(f)\varphi(\overline{f}) = \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}(f)\widetilde{\tau}(\overline{f}) + \varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^* & \widetilde{\tau}(f)\varphi_{21}(f)^* + \varphi_{12}(f)\varphi_{22}(f)^* \\ \varphi_{21}(f)\widetilde{\tau}(\overline{f}) + \varphi_{22}(f)\varphi_{12}(f)^* & \varphi_{21}(f)\varphi_{21}(f)^* + \varphi_{22}(f)\varphi_{22}(f)^* \end{pmatrix}.$$

Daí temos que

$$\widetilde{\tau}(f\overline{f}) = (\varphi(f\overline{f}))_{11} = (\varphi(f)\varphi(\overline{f}))_{11} = \widetilde{\tau}(f)\widetilde{\tau}(\overline{f}) + \varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tau(f\overline{f}) &= \pi(\widetilde{\tau}(f\overline{f})) = \pi(\widetilde{\tau}(f)\widetilde{\tau}(\overline{f}) + \varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*) = \pi(\widetilde{\tau}(f)\widetilde{\tau}(\overline{f})) + \pi(\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*) = \\ &= \pi(\widetilde{\tau}(f))\pi(\widetilde{\tau}(\overline{f})) + \pi(\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*) = \tau(f)\tau(\overline{f}) + \pi(\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*) = \\ &= \tau(f\overline{f}) + \pi(\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*), \end{aligned}$$

de onde segue-se que $\pi(\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*) = 0$. Logo, o operador $\varphi_{12}(f)\varphi_{12}(f)^*$ é compacto, e portanto $\varphi_{12}(f)$ é um operador compacto, pela observação que precede este teorema. Usando $\overline{f}$ no lugar de f provamos que $\varphi_{12}(\overline{f}) = \varphi_{21}(f)^*$ é compacto, de onde $\varphi_{21}(f)$ é um operador compacto, provando o afirmado. Defina agora

$$\begin{aligned} \psi' : C(X) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}^\perp) \\ f &\longmapsto \pi(\varphi_{22}(f)). \end{aligned}$$

Afirmamos que ψ' é um *-homomorfismo unital. De fato, é óbvio que ψ' é unital e linear; ela preserva a involução pois, para todo $f \in C(X)$

$$\psi'(f)^* = (\pi(\varphi_{22}(f)))^* = \pi(\varphi_{22}(f)^*) = \pi(\varphi_{22}(\overline{f})) = \psi'(\overline{f}).$$

Também, para quaisquer $f, g \in C(X)$, $\varphi_{21}(f)$ e $\varphi_{12}(g)$ são compactos, logo $\varphi_{21}(f)\varphi_{12}(g)$ é compacto; então, $\pi(\varphi_{21}(f)\varphi_{12}(g)) = 0$, e portanto

$$\begin{aligned}\psi'(fg) &= \pi(\varphi_{22}(fg)) = \pi((\varphi(fg))_{22}) = \pi((\varphi(f)\varphi(g))_{22}) = \\ &= \pi(\varphi_{22}(f)\varphi_{22}(g) + \varphi_{21}(f)\varphi_{12}(g)) = \\ &= \pi(\varphi_{22}(f))\pi(\varphi_{22}(g)) + \pi(\varphi_{21}(f)\varphi_{12}(g)) = \\ &= \psi'(f)\psi'(g),\end{aligned}$$

provando desta forma que ψ' é um *-homomorfismo, como afirmado.

Para $f \in C(X)$ qualquer, como $\varphi_{12}(f)$ e $\varphi_{21}(f)$ são operadores compactos, vemos que o *-homomorfismo $\pi \circ \varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{H}})$ é tal que

$$\begin{aligned}\pi(\varphi(f)) &= \pi\left(\begin{pmatrix} \widetilde{\tau}(f) & \varphi_{12}(f) \\ \varphi_{21}(f) & \varphi_{22}(f) \end{pmatrix}\right) = \pi\left(\begin{pmatrix} \widetilde{\tau}(f) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(f) \end{pmatrix}\right) = \\ &= \pi(\widetilde{\tau}(f) \oplus \varphi_{22}(f)) = \pi(\widetilde{\tau}(f)) \hat{+} \pi(\varphi_{22}(f)) = \\ &= \tau(f) \hat{+} \psi'(f) = (\tau \hat{+} \psi')(f),\end{aligned}$$

ou em outras palavras, $\pi \circ \varphi = \tau \hat{+} \psi'$. Considere $\gamma \in \mathrm{ext}(X)$ uma extensão trivial, e defina $\psi := \psi' \hat{+} \gamma$. Então, ψ é uma extensão pela proposição 2.3.6; se escrevermos $\gamma = \pi \circ \gamma'$ com $\gamma' : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor, então $\varphi_{22} \oplus \gamma'$ é um *-homomorfismo unital injetor, e ainda

$$\psi = \psi' \hat{+} \gamma = (\pi \circ \varphi_{22}) \hat{+} (\pi \circ \gamma') = \pi(\varphi_{22} \oplus \gamma'),$$

provando com isto que ψ é uma extensão trivial. Ademais,

$$\tau \hat{+} \psi = \tau \hat{+} (\psi' \hat{+} \gamma) = (\tau \hat{+} \psi') \hat{+} \gamma = (\pi \circ \varphi) \hat{+} \pi(\gamma') = \pi(\varphi \oplus \gamma'),$$

de onde $\tau \hat{+} \psi$ é uma extensão trivial. Segue-se daí que

$$a + [\psi] = [\tau] + [\psi] = [\tau \hat{+} \psi] = 0,$$

ou seja, $[\psi]$ é o inverso de a em $\mathrm{Ext}(X)$. Como a havia sido tomado arbitrariamente, vemos que todo elemento de $\mathrm{Ext}(X)$ possui um inverso com relação à operação de soma, provando desta forma que $\mathrm{Ext}(X)$ com a soma é um grupo abeliano, como queríamos.

■

Provas alternativas de que $\mathrm{Ext}(X)$ é grupo abeliano podem ser encontradas em [7] e [1], além é claro da prova original encontrada em [6], que é muito mais difícil e indireta, envolvendo em particular todo o material do capítulo 4, feitas as devidas modificações, visto que na época a teoria de Brown-Douglas-Fillmore foi desenvolvida sem o conhecimento de que $\mathrm{Ext}(X)$ era grupo (e de fato foi *utilizada* para provar este fato).

Calcular o grupo $\mathrm{Ext}(X)$ para um dado espaço métrico compacto X é em geral uma tarefa complicada; O primeiro exemplo que faremos agora pode não ser muito empolgante, mas ele nos será útil futuramente.

Exemplo 3.1.2. *Considere X como sendo um espaço métrico com apenas um elemento, que chamaremos de x. Seja $\tau \in \mathrm{Ext}(X)$ qualquer e observe que, dado $f \in C(X)$ arbitrário, temos $f = f(x)1$ e*

$$\tau(f) = \tau(f(x)1) = f(x)\tau(1) = f(x)\pi(I) = \pi(f(x)I),$$

de onde vemos que τ é trivial, visto que $\tau = \pi \circ \psi$, onde $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dada por $\psi(f) = f(x)I$. Em outras palavras, todas as extensões dos compactos por $C(X)$ são triviais, logo o quociente $\mathrm{Ext}(X)$ possui um único elemento. Segue-se daí que $\mathrm{Ext}(X) = 0$, o grupo nulo.

O trabalho realizado no capítulo 1 nos permitirá, com um pouco mais de esforço, calcular o grupo $\mathrm{Ext}(X)$ quando X é um espaço métrico compacto homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}$, e quando $X = \mathbb{S}^1$; veremos que eles são, respectivamente, 0 e $\mathbb{Z}$. O primeiro destes será feito na seção 3.2, após termos estabelecido o funtor Ext.

Como primeira conseqüência do fato de $\mathrm{Ext}(X)$ ser um grupo abeliano, gostaríamos de retomar a discussão sobre a soma disjunta de extensões, iniciada no final da seção 2.3. Precisaremos de um resultado técnico que diz que toda projeção $\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é da forma $\mathfrak{p} = \pi(P)$, para alguma projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; demonstraremos isto com a proposição 3.1.4 mas, para tanto, introduziremos mais um conceito.

Definição 3.1.3. uma sub-C*-álgebra $\mathfrak{B}$ de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ é dita *hereditária* quando para quaisquer $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ satisfazendo $0 \leq a \leq b$, temos $a \in \mathfrak{B}$.

É um fato, que não provaremos aqui, que qualquer ideal $\mathfrak{J}$ de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ é hereditário; para uma prova deste fato ver por exemplo [9], teorema I.5.3. Em particular, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é hereditário em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Precisaremos disto na prova da proposição 3.1.4.

Proposição 3.1.4. *Seja $\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ uma projeção. Então, existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção tal que $\mathfrak{p} = \pi(P)$.*

Demonstração. Naturalmente $0 \leq \mathfrak{p} \leq 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} = \pi(I)$, logo pelo corolário D.2.2 existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(T) = \mathfrak{p}$ e $0 \leq T \leq I$. Como $\pi(T) = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 = \pi(T)^2 = \pi(T^2)$, vemos que $T - T^2$ é um operador compacto. Ainda, do fato de $0 \leq T \leq I$, concluímos que $\|T\| \leq 1$ e portanto $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

Considere $f \in C(\sigma(T))$, $f(x) = x - x^2$. Obviamente $\operatorname{ran}(f) \subseteq [0,1]$, de onde temos

$$\sigma(T - T^2) = \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \operatorname{ran}(f) \subseteq [0,1].$$

Ademais, $T - T^2$ é compacto, logo $\sigma(T) \subseteq 0 \cup \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, onde $\{\theta_n\}_n$ é uma seqüência em $[0,1]$ convergindo para zero. Assim, podemos escrever

$$\sigma(T) \subseteq f^{-1}(\sigma(T - T^2)) \subseteq \{0,1\} \cup \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}^*},$$

onde $\{\lambda_n\}_n$ e $\{\mu_n\}_n$ são duas seqüências em $[0,1]$, com $f(\lambda_n) = f(\mu_n) = \theta_n$ para todo n, a primeira convergindo para zero e a segunda convergindo para 1.

Denote por B a reunião disjunta

$$B = \{0\} \cup \{1\} \cup \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup \cdots \cup \{\mu_1\} \cup \{\mu_2\} \cdots$$

e seja $\mathscr{E}$ a medida espectral associada ao operador T, pelo teorema espectral (T é normal, pois é positivo). Então, considerando a extensão padrão da medida espectral para todos os Borelianos de $\mathbb{C}$, temos $\mathscr{E}(B) = \mathscr{E}(B \cap \sigma(T)) = \mathscr{E}(\sigma(T))$, e então

$$I = \mathscr{E}(\sigma(T)) = \mathscr{E}(B) = G_0 + G_1 + \sum_{j=1}^{\infty} E_j + \sum_{i=1}^{\infty} F_i,$$

onde as projeções envolvidas são dadas por $G_0 = \mathscr{E}(\{0\})$, $G_1 = \mathscr{E}(\{1\})$, $E_j = \mathscr{E}(\{\lambda_j\})$, $F_i = \mathscr{E}(\{\mu_i\})$.

Afirmamos que E_j e F_i têm posto finito para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$. De fato, observe que

$$T = 0G_0 + 1G_1 + \sum_j \lambda_j E_j + \sum_i \mu_i F_i,$$

e da ortogonalidade destas projeções obtemos

$$T - T^2 = \sum_j (\lambda_j - \lambda_j^2) E_j + \sum_i (\mu_i - \mu_i^2) F_i.$$

Agora, $\lambda_j - \lambda_j^2 > 0$ e $\mu_j - \mu_j^2 > 0$, logo da positividade das projeções E_j e F_i podemos ver que $0 \leq (\lambda_j - \lambda_j^2)E_j \leq T - T^2$, $0 \leq (\mu_i - \mu_i^2)F_i \leq T - T^2$. Usando que $T - T^2$ é compacto e o $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é hereditário em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, segue-se que $(\lambda_j - \lambda_j^2)E_j$ e $(\mu_i - \mu_i^2)F_i$ são compactos, de onde E_j e F_i são compactos, e portanto necessariamente são de posto finito, pois projeções possuem imagem fechada; fica assim provado o afirmado.

Como $\lambda_j \longrightarrow 0$ e $(\mu_i - 1) \longrightarrow 0$, podemos ver que as séries $\sum_j \lambda_j E_j$ e $\sum_i (\mu_i - 1) F_i$ convergem em norma, sendo portanto operadores compactos. Agora, defina $P = G_1 + \sum_i F_i$; o operador P é uma projeção, pois é soma de projeções ortogonais duas a duas. Além disto,

$$T - P = G_1 + \sum_j \lambda_j E_j + \sum_i \mu_i F_i - P = \sum_j \lambda_j E_j + \sum_i (\mu_i - 1) F_i \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

de onde temos que $\pi(T - P) = 0$, ou seja, $\pi(P) = \pi(T) = \mathfrak{p}$, o que completa a demonstração da proposição.

∎

Teorema 3.1.5. *Sejam X_1, X_2 espaços métricos compactos. Então, a função*

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2) \\ ([\tau_1], [\tau_2]) & \longmapsto & [\tau_1 \vee \tau_2] \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Começaremos provando que λ é um homomorfismo de grupos. Tome arbitrariamente $a, b \in \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2)$, $a = ([\tau_1], [\tau_2])$, $b = ([\tau_1'], [\tau_2'])$, considerando extensões $\tau_1, \tau_1' \in \mathrm{ext}(X_1)$, $\tau_2, \tau_2' \in \mathrm{ext}(X_2)$. Precisamos provar que

$$[(\tau_1 \hat{+} \tau_1') \vee (\tau_2 \hat{+} \tau_2')] = \lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b) = [(\tau_1 \vee \tau_2) \hat{+} (\tau_1' \vee \tau_2')].$$

Denotando $\mathcal{H}^4 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^4)$ o operador unitário dado por

$$\begin{array}{rcl} U : \mathcal{H}^4 & \longrightarrow & \mathcal{H}^4 \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) & \longmapsto & (\xi_1, \xi_3, \xi_2, \xi_4). \end{array}$$

Observe que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^4)$ é dado na decomposição $\mathcal{H}^4 = \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ por $T = T_1\oplus T_2\oplus T_3\oplus T_4$, então $\mathrm{Ad}U(T) = T_1\oplus T_3\oplus T_2\oplus T_4$.

Seja $\mu : \mathcal{Q}(\mathcal{H}^4) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}^4)$ o *-isomorfismo unital dado por $\mu = \mathrm{Ad}\pi(U)$. Afirmamos que $\mu((\tau_1\vee\tau_2)\hat{+}(\tau_1'\vee\tau_2')) = (\tau_1\hat{+}\tau_1')\vee(\tau_2\hat{+}\tau_2')$. De fato, dado $f \in C(X_1\vee X_2)$ arbitrário, denote $\tau_1(f|_{X_1}) = \pi(T_1)$, $\tau_2(f|_{X_2}) = \pi(T_2)$, $\tau_1'(f|_{X_1}) = \pi(T_1')$, $\tau_2'(f|_{X_2}) = \pi(T_2')$. Então,

$$\begin{aligned}((\tau_1\hat{+}\tau_1')\vee(\tau_2\hat{+}\tau_2'))(f) &= (\tau_1\hat{+}\tau_1')(f|_{X_1})\hat{+}(\tau_2\hat{+}\tau_2')(f|_{X_2}) = \pi(T_1\oplus T_1')\hat{+}\pi(T_2\oplus T_2') = \\ &= \pi(T_1\oplus T_1'\oplus T_2\oplus T_2') = \pi(U(T_1\oplus T_2\oplus T_1'\oplus T_2')U^*) = \mu(\pi(T_1\oplus T_2\oplus T_1'\oplus T_2')) = \\ &= \mu(\tau_1(f|_{X_1})\hat{+}\tau_2(f|_{X_2})\hat{+}\tau_1'(f|_{X_1})\hat{+}\tau_2'(f|_{X_2})) = \mu((\tau_1\vee\tau_2)(f)\hat{+}(\tau_1'\vee\tau_2')(f)) = \\ &= \mu((\tau_1\vee\tau_2)\hat{+}(\tau_1'\vee\tau_2'))(f),\end{aligned}$$

de onde $((\tau_1\hat{+}\tau_1')\vee(\tau_2\hat{+}\tau_2')) \sim ((\tau_1\vee\tau_2)\hat{+}(\tau_1'\vee\tau_2'))$, ou seja,

$$[(\tau_1\hat{+}\tau_1')\vee(\tau_2\hat{+}\tau_2')] = [(\tau_1\vee\tau_2)\hat{+}(\tau_1'\vee\tau_2')];$$

concluímos deste modo que $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$, de onde λ é homomorfismo de grupos, como desejado.

Para mostrarmos que λ é um isomorfismo, construiremos explicitamente sua inversa. Tome $\tau \in \mathrm{ext}(X_1\vee X_2)$ representante de uma classe arbitrária $a \in \mathrm{Ext}(X_1\vee X_2)$; o conjunto X_1 é disjunto de X_2 em $X_1\vee X_2$, logo a função característica $1_{X_1} : X_1\vee X_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua. Denote $\mathfrak{p} = \tau(1_{X_1})$, observando que $\mathfrak{p}$ é uma projeção de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Pela proposição 3.1.4, podemos tomar uma projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{p} = \pi(P)$. Defina $\varepsilon_1 : C(X_1) \longrightarrow C(X_1\vee X_2)$, onde $\varepsilon_1(f)|_{X_1} = f$, $\varepsilon_1(f)|_{X_2} = 0$ para todo $f \in C(X_1)$, e da mesma forma defina $\varepsilon_2 : C(X_2) \longrightarrow C(X_1\vee X_2)$, onde $\varepsilon_2(g)|_{X_1} = 0$, $\varepsilon_2(g)|_{X_2} = g$ para todo $g \in C(X_2)$. Claramente, ε_1 e ε_2 são *-homomorfismos injetores. Dado $f \in C(X_1)$, note que

$$\varepsilon_1(f) = 1_{X_1}\varepsilon_1(f)1_{X_1},$$

e portanto $\tau(\varepsilon_1(f)) = \mathfrak{p}\tau(\varepsilon_1(f))\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}\mathcal{Q}(\mathcal{H})\mathfrak{p}$. Da mesma forma, dado $g \in C(X_2)$, temos $\tau(\varepsilon_2(g)) = (1-\mathfrak{p})\tau(\varepsilon_2(g))(1-\mathfrak{p}) \in (1-\mathfrak{p})\mathcal{Q}(\mathcal{H})(1-\mathfrak{p})$. Pela observação 2.4.13, podemos definir *-homomorfismos

$$\tau_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H}),$$

$$\tau_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H})$$

por $\tau_1 = \alpha_P \circ \tau \circ \varepsilon_1$, $\tau_2 = \alpha_{(I-P)} \circ \tau \circ \varepsilon_2$. Estes *-homomorfismos são injetores pois são composição de injetores, e são unitais visto que

$$\tau_1(1) = \alpha_P \circ \tau \circ \varepsilon_1(1) = \alpha_P \circ \tau(1_{X_1}) = \alpha_P(\mathfrak{p}) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})},$$

a prova para τ_2 sendo análoga. Em outras palavras, τ_1 e τ_2 são extensões.

Queremos provar agora que, se tivéssemos escolhido uma outra projeção $\widetilde{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(\widetilde{P}) = \mathfrak{p}$, a mesma construção teria produzido extensões τ_1' e τ_2' tais que $\tau_1 \sim \tau_1'$, $\tau_2 \sim \tau_2'$. Vejamos como provar isto: tome uma outra projeção $\widetilde{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(\widetilde{P}) = \mathfrak{p}$, e construa como acima extensões

$$\tau_1' : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H}),$$

$$\tau_2' : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}^{\perp}\mathcal{H})$$

dadas por $\tau_1' = \alpha_{\widetilde{P}} \circ \tau \circ \varepsilon_1$, $\tau_2' = \alpha_{(I-\widetilde{P})} \circ \tau \circ \varepsilon_2$; para provarmos que $\tau_1 \sim \tau_1'$, $\tau_2 \sim \tau_2'$, é suficiente verificarmos que $\tau_1 \sim_w \tau_1'$ e $\tau_2 \sim_w \tau_2'$, , pelo teorema 2.2.11.

Denote por $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $\nu : \widetilde{P}\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões, e defina $U : P\mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{P}\mathcal{H}$ por $U = \nu^*\iota$. Afirmamos que $\pi(U^*U) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}$, $\pi(UU^*) = 1_{\mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})}$. De fato, observe que $P(\widetilde{P} - I)P \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, pois $\pi(P(\widetilde{P} - I)P) = \mathfrak{p}(\mathfrak{p} - 1)\mathfrak{p} = 0$. Portanto, temos que $\iota^*P(\widetilde{P} - I)P\iota \in \mathcal{K}(P\mathcal{H})$; observando-se que

$$\iota^*P(\widetilde{P} - I)P\iota = \iota^*\iota\iota^*(\widetilde{P} - I)\iota\iota^*\iota = I_{P\mathcal{H}}\iota^*(\widetilde{P} - I)\iota I_{P\mathcal{H}} = \iota^*(\widetilde{P} - I)\iota,$$

provamos que $\iota^*(\widetilde{P} - I)\iota \in \mathcal{K}(P\mathcal{H})$. De modo completamente análogo prova-se que $\nu^*(P - I)\nu \in \mathcal{K}(\widetilde{P}\mathcal{H})$. Agora

$$U^*U = \iota^*\nu\nu^*\iota = \iota^*\widetilde{P}\iota = \iota^*I\iota + \iota^*(\widetilde{P} - I)\iota = I_{P\mathcal{H}} + \iota^*(\widetilde{P} - I)\iota,$$

$$UU^* = \nu^*\iota\iota^*\nu = \nu^*P\nu = \nu^*I\nu + \nu^*(P - I)\nu = I_{\widetilde{P}\mathcal{H}} + \nu^*(P - I)\nu,$$

de onde temos de imediato que $\pi(U * U) = \pi(I_{P\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}$ e $\pi(UU^*) = \pi(I_{\widetilde{P}\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})}$, provando o afirmado.

Defina agora

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(UTU^*). \end{aligned}$$

Afirmamos que μ é um *-isomorfismo unital. De fato, é imediato verificar que μ é linear e preserva a involução. Quanto ao produto, tome arbitrariamente $\pi(T_1), \pi(T_2) \in$

$\mathcal{Q}(P\mathcal{H})$; sabemos que $I_{P\mathcal{H}} - U^*U \in \mathcal{K}(P\mathcal{H})$, logo $UT_1(I_{P\mathcal{H}} - U^*U)T_2U^* \in \mathcal{K}(\widetilde{P}\mathcal{H})$. Então,

$$0 = UT_1(I_{P\mathcal{H}} - U^*U)T_2U^* = \pi(UT_1T_2U^* - UT_1U^*UT_2U^*),$$

de onde $\pi(UT_1T_2U^*) = \pi(UT_1U^*UT_2U^*)$, e portanto

$$\begin{aligned}\mu(\pi(T_1)\pi(T_2)) = \mu(\pi(T_1T_2))\pi(UT_1T_2U^*) = \pi(UT_1U^*UT_2U^*) = \\ = \pi(UT_1U^*)\pi(UT_2U^*) = \mu(\pi(T_1))\mu(\pi(T_2)).\end{aligned}$$

Provamos portanto que μ é um *-homomorfismo. Naturalmente μ é unital, pois $\mu(1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}) = \pi(UI_{P\mathcal{H}}U^*) = \pi(UU^*) = 1_{\mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})}$, e μ é inversível pois a aplicação

$$\begin{aligned}\varsigma : \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(U^*TU)\end{aligned}$$

é claramente uma inversa para μ. Fica assim provado que μ é um *-isomorfismo unital, como queríamos.

Vamos provar agora que $\mu \circ \tau_1 = \tau_1'$: tome arbitrariamente $f \in C(X_1)$, e denote $\tau_1(f) = \pi(T)$; assim, $\alpha_P \circ \tau \circ \varepsilon_1(f) = \tau_1(f) = \pi(T)$, e então $\tau \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_P^{-1}(\pi(T)) = \pi(\iota T\iota^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\tau_1'(f) = \alpha_{\widetilde{P}} \circ \tau \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_{\widetilde{P}}(\pi(\iota T\iota^*)) = \pi(\nu^*\iota T\iota^*\nu) = \\ = \pi(UTU^*) = \mu(\pi(T)) = \mu \circ \tau_1(f),\end{aligned}$$

de onde $\mu \circ \tau_1 = \tau_1'$, como afirmado. Segue-se que $\tau_1 \sim_w \tau_1'$. De maneira análoga prova-se que $\tau_2 \sim_w \tau_2'$.

Assim, vemos que as classes $[\tau_1] \in \mathrm{Ext}(X_1)$ e $[\tau_2] \in \mathrm{Ext}(X_2)$ dependem tão somente da extensão τ, não importando a escolha da projeção P tal que $\pi(P) = \mathfrak{p}$. Temos deste modo bem definida uma aplicação $\mathrm{ext}(X_1 \vee X_2) \ni \tau \longmapsto ([\tau_1], [\tau_2]) \in \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2)$. O próximo passo agora é mostrar que esta aplicação é levada para o quociente $\mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$. Suponha então que $\tau, \tau' \in \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$ são tais que $\tau \sim \tau'$; considere um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de modo que $\mathrm{Ad}\pi(U)$ é tal que $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau = \tau'$. Denote $\mathfrak{p} = \tau(1_{X_1})$, $\mathfrak{p}' = \tau'(1_{X_1})$. Se $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma projeção com $\mathfrak{p} = \pi(P)$, então $P' = UPU^*$ é uma projeção, visto que $P'^2 = UPU^*UPU^* = UP^2U^* = UPU^* = P'$, e $P'^* = (UPU^*)^* = UP^*U^* = UPU^* = P'$; além disso,

$$\mathfrak{p}' = \tau'(1_{X_1}) = \mathrm{Ad}\pi(U)(\tau(1_{X_1})) = \mathrm{Ad}\pi(U)(\mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}\pi(U)(\pi(P)) = \pi(UPU^*) = \pi(P').$$

Podemos então definir extensões $\tau_1' : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(P'\mathcal{H})$, $\tau_2' : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(P'^{\perp}\mathcal{H})$ por $\tau_1' = \alpha_{P'} \circ \tau' \circ \varepsilon_1$, $\tau_2' = \alpha_{(I-P')} \circ \tau' \circ \varepsilon_2$, como visto anteriormente.

Sejam $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\nu : P'\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões, e defina $V : P\mathcal{H} \longrightarrow P'\mathcal{H}$ por $V = \nu^* U \iota$. Observe que $\pi(VV^*) = 1_{\mathcal{Q}(P'\mathcal{H})}$, visto que

$$\begin{aligned}\pi(VV^*) &= \pi(\nu^* U \iota \iota^* U^* \nu) = \pi(\nu^* U P U^* \nu) = \alpha_{P'}(\mathfrak{p}' \pi(UPU^*) \mathfrak{p}') = \\ &= \alpha_{P'}(\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'\mathfrak{p}') = \alpha_{P'}(\mathfrak{p}') = 1_{\mathcal{Q}(P'\mathcal{H})},\end{aligned}$$

e da mesma forma $\pi(V^*V) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}$. Deste modo, a aplicação

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu} : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(P'\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(VTV^*)\end{aligned}$$

é um *-isomorfismo unital (pela mesma argumentação utilizada há pouco na prova de que μ era um *-isomorfismo unital).

Afirmamos que $\widetilde{\mu} \circ \tau_1 = \tau_1'$; de fato, tome $f \in C(X_1)$ arbitrário, e denote $\tau_1(f) = \pi(T)$. Então, $\tau \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_P^{-1} \circ \tau_1 = \alpha_P^{-1}(\pi(T)) = \pi(\iota T \iota^*)$; logo,

$$\begin{aligned}\tau_1'(f) &= \alpha_{P'} \circ \tau' \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_{P'} \circ \mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_{P'} \circ \mathrm{Ad}\pi(U)(\pi(\iota T \iota^*)) = \\ &= \alpha_{P'}(\pi(U \iota T \iota^* U^*)) = \pi(\nu^* U \iota T \iota^* U^* \nu) = \pi(VTV^*) = \widetilde{\mu}(\pi(T)) = \widetilde{\mu} \circ \tau_1(f),\end{aligned}$$

de onde $\widetilde{\mu} \circ \tau_1 = \tau_1'$ como desejado. Segue-se que $\tau_1 \sim_w \tau_1'$, e portanto $\tau_1 \sim \tau_1'$, pelo teorema 2.2.11. De modo análogo prova-se que $\tau_2 \sim \tau_2'$; concluímos daí que está bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned}\eta : \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2) \\ [\tau] &\longmapsto ([\tau_1], [\tau_2]),\end{aligned}$$

onde τ_1 e τ_2 são definidas a partir de τ como acima.

Vamos provar que $\eta = \lambda^{-1}$. Para tanto, tome $\tau \in \mathrm{ext}(X_1 \vee X_2)$ uma extensão representando uma classe arbitrária $a \in \mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$. Seja $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ projeção tal que $\pi(P) = \mathfrak{p} = \tau(1_{X_1})$, e considere os *-homomorfismos

$$\begin{aligned}\Upsilon_P : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(T \oplus 0_{P^{\perp}\mathcal{H}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{P^\perp} : \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(0_{P\mathcal{H}}\oplus T). \end{aligned}$$

Em virtude do que foi discutido na observação 2.4.13 sabemos que $\Upsilon_P(\mathfrak{t}) = \alpha_P^{-1}(\mathfrak{t})$ para todo $\mathfrak{t} \in \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$, e que também $\Upsilon_{P^\perp}(\mathfrak{t}) = \alpha_{P^\perp}^{-1}(\mathfrak{t})$ para todo $\mathfrak{t} \in \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H})$.

Dado $f \in C(X_1 \vee X_2)$ arbitrário, é óbvio que $f = \varepsilon_1(f|_{X_1}) + \varepsilon_2(f|_{X_2})$. Portanto, se nos lembrarmos de como a soma chapéu de elementos em álgebras de Calkin foi definida, no nosso caso

$$\begin{aligned} \hat{+} : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) \times \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H}\oplus P^\perp\mathcal{H}) = \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}') &\longmapsto \Upsilon_P(\mathfrak{t}) + \Upsilon_{P^\perp}(\mathfrak{t}'), \end{aligned}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} \tau_1 \vee \tau_2(f) &= \tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(f|_{X_2}) = \Upsilon_P(\tau_1(f|_{X_1})) + \Upsilon_{P^\perp}(\tau_2(f|_{X_2})) = \\ &= \alpha_P^{-1}(\tau_1(f|_{X_1})) + \alpha_{P^\perp}^{-1}(\tau_2(f|_{X_2})) = \tau \circ \varepsilon_1(f_{X_1}) + \tau \circ \varepsilon_2(f_{X_2}) = \\ &= \tau(\varepsilon_1(f|_{X_1}) + \varepsilon_2(f|_{X_2})) = \tau(f); \end{aligned}$$

provamos com isto que

$$a = [\tau] = [\tau_1 \vee \tau_2] = \lambda([\tau_1], [\tau_2]) = \lambda \circ \eta([\tau]) = \lambda \circ \eta(a),$$

de onde temos $\lambda \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)}$.

Por outro lado, seja $([\tau_1], [\tau_2]) \in \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2)$ arbitrário. Denote $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$; então, $\mathfrak{p} = \tau(1_{X_1})$ é tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= (\tau_1 \vee \tau_2)(1_{X_1}) = \tau_1(1_{X_1}|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(1_{X_1}|_{X_2}) = \tau_1(1) \hat{+} \tau_2(0) = \\ &= 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} \hat{+} 0 = \pi(I) \hat{+} \pi(0) = \pi(I_{\mathcal{H}} \oplus 0), \end{aligned}$$

de onde vemos que $P = I \oplus 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ é uma projeção tal que $\pi(P) = \mathfrak{p}$, e logo podemos usá-la para definir $\eta([\tau])$. Seja portanto $\eta([\tau]) = ([\tau_1'], [\tau_2'])$, onde $\tau_1' = \alpha_P \circ \tau \circ \varepsilon_1$, $\tau_2' = \alpha_{P^\perp} \circ \tau \circ \varepsilon_2$. Vamos provar que $\tau_1' = \tau_1$, $\tau_2' = \tau_2$. De fato, tomando $f \in C(X_1)$ arbitrário, e denotando $\tau_1(f) = \pi(T)$, temos

$$\begin{aligned} \tau \circ \varepsilon_1(f) &= (\tau_1 \vee \tau_2)(\varepsilon_1(f)) = \tau_1(\varepsilon_1(f)|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(\varepsilon_1(f)|_{X_2}) = \\ &= \tau_1(f) \hat{+} 0 = \pi(T) \hat{+} \pi(0) = \pi(T \oplus 0), \end{aligned}$$

e assim

$$\tau_1'(f) = \alpha_P \circ \tau \circ \varepsilon_1(f) = \alpha_P(\pi(T \oplus 0)) = \pi(T) = \tau_1(f),$$

de onde $\tau_1' = \tau_1$; prova-se de maneira análoga que $\tau_2' = \tau_2$. Então,

$$\eta \circ \lambda([\tau_1], [\tau_2]) = \eta([\tau_1 \vee \tau_2]) = \eta([\tau]) = ([\tau_1'], [\tau_1']) = ([\tau_1], [\tau_2]),$$

ou seja, $\eta \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2)}$. Assim, λ é inversível e portanto um isomorfismo de grupos, o que conclui a demonstração do teorema.

■

3.2 Funtorialidade de Ext

Nesta seção, X e Y denotam espaços métricos compactos, e $f : X \longrightarrow Y$ denota uma função contínua.

Já sabemos que $\mathrm{Ext}(X)$ e $\mathrm{Ext}(Y)$ são grupos abelianos. Nesta seção, veremos como construir, a partir de uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$, um homomorfismo de grupos $\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(Y)$, e discutiremos suas propriedades. Na seqüência, definiremos finalmente o funtor Ext.

Lembremo-nos do *-homomorfismo dual a f mencionado na introdução,

$$\begin{aligned} f^* : C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ g &\longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Assumiremos os fatos de que f^* é injetor se, e somente se, f é sobrejetora, e que f^* é sobrejetor se, e somente se, f é injetora. Em particular, f^* é um *-isomorfismo se, e somente se, f é um homeomorfismo.

Dada $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ uma extensão, vemos que $\tau \circ f^* : C(Y) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é um *-homomorfismo unital, mas não necessariamente injetor, pois f pode não ser sobrejetora. Agora, se considerarmos uma extensão trivial $\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$, então $(\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y$ é uma extensão, pela proposição 2.3.6; ainda, se $\tau_Y' \in \mathrm{ext}(Y)$ é outra extensão trivial, então $\tau_Y \sim \tau_Y'$, e portanto $(\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y \sim (\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y'$, devido à observação 2.3.9. Assim, vemos que a classe $[(\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y] \in \mathrm{Ext}(Y)$ independe da escolha da extensão trivial τ_Y. Fica portanto bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \varrho_f : \mathrm{ext}(X) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(Y) \\ \tau &\longmapsto [(\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y]. \end{aligned}$$

Observação 3.2.1. Conforme mencionado acima, se f é sobrejetora, então f^* é injetora, e portanto em particular vemos que $\tau \circ f^*$ é uma extensão; assim, neste caso podemos escrever

$$\varrho_f(\tau) = [(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y] = [\tau \circ f^*] + [\tau_Y] = [\tau \circ f^*] + 0 = [\tau \circ f^*].$$

Nós provaremos futuramente que esta aplicação ϱ_f passa ao quociente $\mathrm{Ext}(X)$, e a aplicação resultante é o que chamaremos de $\mathrm{Ext}(f)$, mas antes, gostaríamos de explorar algumas propriedades de ϱ_f. Comecemos com uma série de proposições simples, para organizar as idéias.

Proposição 3.2.2. *Seja $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ uma extensão trivial. Então, $\varrho_f(\tau) = 0 \in \mathrm{Ext}(Y)$, ou seja, $(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$ é uma extensão trivial, para toda extensão trivial $\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$.*

Demonstração. Isto segue da observação 2.4.6. De fato, escrevendo $\tau = \pi \circ \psi$, $\tau_Y = \pi \circ \varphi$ para *-homomorfismos unitais injetores $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi : C(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, é imediato ver que $(\psi \circ f^*) \oplus \varphi : C(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ é um *-homomorfismo unital injetor e ainda

$$(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y = (\pi \circ \psi \circ f^*)\hat{+}(\pi \circ \varphi) = \pi((\psi \circ f^*) \oplus \varphi),$$

provando com isto que $(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$ é trivial, e portanto $\varrho_f(\tau) = 0 \in \mathrm{Ext}(Y)$, como queríamos.

■

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ a função identidade; então, para quaisquer extensão $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ temos $\varrho_{\mathrm{id}_X}(\tau) = [\tau]$; em outras palavras, $(\tau \circ {\mathrm{id}_X}^*)\hat{+}\tau_X \sim \tau$ para qualquer $\tau_X \in \mathrm{ext}(X)$ trivial.*

Demonstração. Obviamente $\tau \circ {\mathrm{id}_X}^* = \tau$, e portanto

$$\varrho_{\mathrm{id}_X}(\tau) = [(\tau \circ {\mathrm{id}_X}^*)\hat{+}\tau_X] = [\tau \hat{+} \tau_X] = [\tau] + [\tau_X] = [\tau] + 0 = [\tau],$$

de onde em particular $(\tau \circ {\mathrm{id}_X}^*)\hat{+}\tau_X \sim \tau$, como desejado.

■

Proposição 3.2.4. *Sejam X, Y, Z espaços métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funções contínuas, e $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ extensão. Se $\tau' = (\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$ com $\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$ trivial, então $\varrho_g(\tau') = \varrho_{g \circ f}(\tau)$.*

Demonstração. Se $\tau_Z \in \text{ext}(Z)$ é uma extensão trivial, então $(\tau_Y \circ g^*)\hat{+}\tau_Z$ é trivial pela proposição 3.2.2; logo, $(\tau_Y \circ g^*)\hat{+}\tau_Z \sim \tau_Z$, e portanto

$$(((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y) \circ g^*)\hat{+}\tau_Z = (\tau \circ f^* \circ g^*)\hat{+}((\tau_Y \circ g^*)\hat{+}\tau_Z) \sim (\tau \circ (g \circ f)^*)\hat{+}\tau_Z,$$

de onde segue o resultado.

■

Observe que em particular a proposição 3.2.4 nos diz que, para quaisquer extensões $\tau \in \text{ext}(X)$, $\tau_Y \in \text{ext}(Y)$ e $\tau_Z \in \text{ext}(Z)$ com τ_Y e τ_Z triviais, temos

$$(((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y) \circ g^*)\hat{+}\tau_Z \sim (\tau \circ (g \circ f)^*)\hat{+}\tau_Z.$$

Proposição 3.2.5. *Sejam $\tau, \tau' \in \text{ext}(X)$ e extensões. Então, $\varrho_f(\tau) + \varrho_f(\tau') = \varrho_f(\tau\hat{+}\tau')$; em particular, $((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y)\hat{+}((\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau'_Y) \sim ((\tau\hat{+}\tau') \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$ para quaisquer $\tau_Y, \tau'_Y \in \text{ext}(Y)$ triviais.*

Demonstração. Por argumento similar ao utilizado no comentário que antecede a observação 2.3.11, podemos ver que

$$\begin{aligned}((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y)\hat{+}((\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau'_Y) = (\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y\hat{+}(\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau'_Y \sim \\ \sim (\tau \circ f^*)\hat{+}(\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau_Y\hat{+}\tau'_Y = ((\tau\hat{+}\tau') \circ f^*)\hat{+}\tau_Y\hat{+}\tau'_Y,\end{aligned}$$

e como $\tau_Y\hat{+}\tau'_Y \sim \tau_Y$, temos

$$((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y)\hat{+}((\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau'_Y) \sim ((\tau\hat{+}\tau') \circ f^*)\hat{+}\tau_Y,$$

e o resultado segue.

■

Proposição 3.2.6. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função constante, então para todo $\tau \in \text{ext}(X)$, temos que $\varrho_f(\tau) = 0$; em outras palavras, $(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$ é trivial, para toda extensão trivial $\tau_Y \in \text{ext}(Y)$.*

Demonstração. Seja $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y \ \forall x \in X$. Então, considerando o espaço métrico $Y' = \{y_0\}$, podemos escrever $f = h \circ g$, onde $g : X \longrightarrow Y'$ e $h : Y' \longrightarrow Y$ são as funções óbvias, que são contínuas.

Seja $\tau' \in \text{ext}(Y')$ uma extensão representando a classe $\varrho_g(\tau) \in \text{Ext}(Y')$. Sabemos do exemplo 3.1.2 que $\text{Ext}(Y') = 0$, logo $\varrho_g(\tau) = 0$, e portanto τ' é trivial. Segue-se então da proposição 3.2.2 que $\varrho_h(\tau') = 0 \in \mathrm{Ext}(Y)$. Logo, da proposição 3.2.4 temos que $\varrho_f(\tau) = \varrho_{h\circ g}(\tau) = \varrho_h(\tau') = 0$, de onde em particular $(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$ é trivial.

■

Provemos agora que ϱ_f passa ao quociente.

Proposição 3.2.7. *Sejam $\tau, \tau' \in \mathrm{ext}(X)$ tais que $\tau \sim \tau'$. Então, $\varrho_f(\tau) = \varrho_f(\tau')$.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário tal que $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau = \tau'$. Então, obviamente $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau \circ f^* = \tau' \circ f^*$. Observe que $U \oplus I \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ é unitário e que, dada uma extensão trivial $\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$, temos

$$\mathrm{Ad}\pi(U \oplus I) \circ ((\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y) = (\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y = (\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau_Y,$$

de onde segue de imediato que $(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y \sim (\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau_Y$, e daí

$$\varrho_f(\tau) = [(\tau \circ f^*)\hat{+}\tau_Y] = [(\tau' \circ f^*)\hat{+}\tau_Y] = \varrho_f(\tau'),$$

como queríamos demonstrar.

■

Fica portanto bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(Y) \\ [\tau] &\longmapsto \varrho_f(\tau). \end{aligned}$$

Observe que $\mathrm{Ext}(f)$ é um homomorfismo de grupos, pois dados $[\tau], [\tau'] \in \mathrm{Ext}(X)$ quaisquer, temos da proposição 3.2.5 que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(f)([\tau] + [\tau']) = \mathrm{Ext}(f)([\tau\hat{+}\tau']) = \varrho_f(\tau\hat{+}\tau') = \varrho_f(\tau) + \varrho_f(\tau') = \\ = \mathrm{Ext}(f)([\tau]) + \mathrm{Ext}(f)([\tau']). \end{aligned}$$

Observação 3.2.8. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função constante, a proposição 3.2.6 garante então que $\mathrm{Ext}(f) : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(Y)$ é o homomorfismo nulo, visto que, para um $[\tau] \in \mathrm{Ext}(X)$ arbitrário, tem-se que $\mathrm{Ext}(f)([\tau]) = \varrho_f(\tau) = 0$.

Finalmente, considere $\mathscr{M}$ a categoria dos espaços métricos compactos, e **Grp** a categoria dos grupos abelianos; lembremos que em $\mathscr{M}$ os objetos são os espaços métricos compactos, e os morfismos são funções contínuas entre estes espaços. Em **Grp**, os objetos são os grupos abelianos, e os morfismos são homomorfismos de grupos entre estes grupos.

Seja Ext : $\mathscr{M} \longrightarrow$ **Grp** o par de aplicações que faz a correspondência $X \longmapsto \text{Ext}(X)$ entre os objetos destas categorias, e a correspondência $f \longmapsto \text{Ext}(f)$ nos morfismos. Chegamos ao resultado principal da seção. O trabalho para a demonstração já está todo feito com as proposições anteriores.

Teorema 3.2.9. Ext : $\mathscr{M} \longrightarrow$ **Grp** *é um funtor covariante.*

Demonstração. Dado X espaço métrico compacto, temos que $\text{Ext}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{Ext}(X)}$, pela proposição 3.2.3, pois dado $a = [\tau] \in \text{Ext}(X)$ arbitrário, temos

$$\text{Ext}(\text{id}_X)(a) = \text{Ext}(\text{id}_X)([\tau]) = \varrho_{\text{id}_X}(\tau) = [\tau] = a = \text{id}_{\text{Ext}(X)}(a).$$

Também, dados X, Y, Z espaços métricos compactos, e $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funções contínuas, temos da proposição 3.2.4 que $\text{Ext}(g \circ f) = \text{Ext}(g) \circ \text{Ext}(f)$, pois dado $a = [\tau] \in \text{Ext}(X)$ arbitrário e $\tau' = (\tau \circ f^*) \hat{+} \tau_Y$ com $\tau_Y \in \text{ext}(Y)$ trivial, temos que

$$\text{Ext}(f)(a) = \text{Ext}(f)([\tau]) = \varrho_f(\tau) = [\tau'],$$

e portanto

$$\begin{aligned}\text{Ext}(g \circ f)(a) = \text{Ext}(g \circ f)([\tau]) = \varrho_{g \circ f}(\tau) = \varrho_g(\tau') = \text{Ext}(g)([\tau']) = \\ = \text{Ext}(g) \circ \text{Ext}(f)(a),\end{aligned}$$

provando o desejado.

■

Por uma questão de simplicidade, de agora em diante denotaremos o homomorfismo $\text{Ext}(f) : \text{Ext}(X) \longrightarrow \text{Ext}(Y)$ por f_*. Uma propriedade simples porém importante de funtores é que eles levam isomorfismos em isomorfismos; nós provaremos aqui o que isto quer dizer, no nosso caso.

Proposição 3.2.10. *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *um homeomorfismo. Então,* $f_* : \text{Ext}(X) \longrightarrow \text{Ext}(Y)$ *é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. seja $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ a função inversa de f, que é contínua pois f é homeomorfismo. Como $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$, a funtorialidade de Ext nos dá

$$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\text{Ext}(X)},$$

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(Y)},$$

de onde f_* é inversível, e portanto um isomorfismo, como queríamos provar.

■

Em outras palavras, se X e Y são espaços métricos compactos homeomorfos, então os grupos $\mathrm{Ext}(X)$ e $\mathrm{Ext}(Y)$ são isomorfos. Estamos agora em condições de calcular o grupo $\mathrm{Ext}(X)$ para mais uma classe particular de espaços métricos compactos.

Exemplo 3.2.11. *Suponha que X é um espaço métrico compacto homeomorfo a um subconjunto Λ de $\mathbb{R}$. Sabemos da proposição 1.1.10 que todos os operadores essencialmente normais com espectro essencial Λ são unitariamente equivalentes módulo os compactos. Portanto, da correspondência entre operadores essencialmente normais e extensões e do teorema 1.1.9, temos em particular que todas as extensões dos compactos por $C(\Lambda)$ são equivalentes. Logo, há apenas uma classe em $\mathrm{Ext}(\Lambda)$, e portanto $\mathrm{Ext}(\Lambda) = 0$, o grupo nulo. Segue-se então da proposição 3.2.10 que $\mathrm{Ext}(X) = 0$.*

Até agora vimos apenas exemplos triviais de grupos $\mathrm{Ext}(X)$, mas gostaríamos de observar que $\mathrm{Ext}(X)$ *não* é um objeto trivial. Por exemplo, o que foi visto no final da seção 1.2, se reinterpretado no contexto de extensões, mostra que há uma bijeção entre $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$ e $\mathbb{Z}$. Nós provaremos agora que estes grupos são na verdade isomorfos, o que nos dará mais um importante exemplo da teoria.

Teorema 3.2.12. $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$ *é isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Demonstração. A função $\zeta \in C(\mathbb{S}^1)$ é inversível, logo para todo $\tau \in \mathrm{ext}(\mathbb{S}^1)$ temos que $\tau(\zeta)$ é um elemento inversível de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, e portanto podemos associar a $\tau(\zeta)$ o número inteiro $\mathrm{ind}(\tau(\zeta))$. Ainda, se $\tau, \tau' \in \mathrm{ext}(\mathbb{S}^1)$ são tais que $\tau \sim \tau'$, então tomando $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário tal que $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau = \tau'$, e denotando $\tau(\zeta) = \pi(T)$, vemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(\tau'(\zeta)) &= \mathrm{ind}(\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau(\zeta)) = \mathrm{ind}(\pi(UTU^*)) = \\ &= \mathrm{ind}(U) + \mathrm{ind}(T) - \mathrm{ind}(U) = \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(\tau(\zeta)).\end{aligned}$$

Fica portanto bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : \mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\tau] &\longmapsto \mathrm{ind}(\tau(\zeta)).\end{aligned}$$

Observe que φ é um homomorfismo de grupos pela observação 2.3.3, pois dados

$[\tau], [\tau'] \in \mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$,

$$\varphi([\tau] + [\tau']) = \varphi([\tau \hat{+} \tau']) = \mathrm{ind}((\tau \hat{+} \tau')(\zeta)) = \mathrm{ind}((\tau(\zeta)) \hat{+} (\tau'(\zeta))) =$$
$$= \mathrm{ind}(\tau(\zeta)) + \mathrm{ind}(\tau'(\zeta)) = \varphi([\tau]) + \varphi([\tau']).$$

Afirmamos que φ é injetor. De fato, suponha que $\varphi([\tau]) = 0$. Denotando $\tau(\zeta) = \pi(T)$, temos que $\pi(T)$ é um elemento unitário de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, e $\mathrm{ind}(\pi(T)) = \mathrm{ind}(\tau(\zeta)) = \varphi([\tau]) = 0$. Logo, pelo teorema 1.2.7, existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(T) = \pi(U)$. Observe que $\sigma(U) = \mathbb{S}^1$, visto que

$$\mathbb{S}^1 = \mathrm{ran}(\zeta) = \sigma(\zeta) = \sigma(\tau(\zeta)) = \sigma(\pi(T)) = \sigma(\pi(U)) = \sigma_e(U) \subseteq \sigma(U) \subseteq \mathbb{S}^1.$$

Usando o cálculo funcional contínuo de U, podemos definir então $\psi : C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\psi(f) = f(U)\ \forall f \in C(\mathbb{S}^1)$, que é um *-homomorfismo unital injetor. Note que $\pi(\psi(1)) = \pi(1) = 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} = \tau(1)$, e que

$$\pi \circ \psi(\zeta) = \pi(\zeta(U)) = \pi(U) = \pi(T) = \tau(\zeta);$$

como $C(\mathbb{S}^1) = C^*(1, \zeta)$, vemos de imediato que $\tau(f) = \pi \circ \psi(f)$ para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$, ou seja, $\tau = \pi \circ \psi$. Segue-se daí que τ é trivial, e portanto $[\tau] = 0$, estabelecendo a injetividade de φ, como queríamos.

Vamos provar agora que φ é sobrejetor: seja $\rho : C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}^2)$ a extensão de Toeplitz definida na seção A.5, ou seja, $\rho(f) = \pi(T_f)$, onde T_f é o operador de Toeplitz com símbolo f. Esta extensão é tal que

$$\varphi([\rho]) = \mathrm{ind}(\rho(\zeta)) = \mathrm{ind}(T_\zeta) = -\mathrm{wn}(\zeta) = -1,$$

e como -1 gera o grupo $\mathbb{Z}$, temos de imediato que φ é sobrejetor.

Ficou assim provado que φ é um isomorfismo de grupos, e o teorema está demonstrado.

■

Gostaríamos de concluir esta seção retomando momentaneamente a discussão sobre extensões triviais, provando o teorema 3.2.14 que dá uma condição suficiente para uma extensão ser trivial. Poderíamos ter feito a demonstração deste teorema anteriormente, mas optamos por fazê-la agora, visto que o final da demonstração fica simplificado com a interpretação de Ext como um funtor. Precisamos de um lema.

Lema 3.2.13. *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ C^*-álgebras, com $\mathfrak{A}$ separável, e $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ um *-homomorfismo injetor. Suponha que* $\operatorname{ran}(\varphi) \subseteq \mathfrak{C}$*, onde $\mathfrak{C}$ é uma sub-C^*-álgebra de $\mathfrak{B}$ gerada por uma família de projeções. Então, existe $\mathfrak{C}'$ uma sub-C^*-álgebra de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{C}'$ é gerada por uma família enumerável de projeções, e* $\operatorname{ran}(\varphi) \subseteq \mathfrak{C}'$.

Demonstração. Seja $\{p_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{B}$ uma família de projeções tal que $\mathfrak{C} = C^*(\{p_i\}_i)$; note que $\operatorname{ran}(\varphi)$ é separável, logo podemos tomar um subconjunto enumerável e denso $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \operatorname{ran}(\varphi)$.

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathfrak{C}$, logo há uma sub-família enumerável $\{c_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}^*} \subseteq \{p_i\}_{i \in I}$ envolvida em uma aproximação de a_n como elemento de $\mathfrak{C}$, visto que $a_n \in \mathfrak{C}$ implica em a_n ser o limite de uma seqüência de combinações lineares finitas de produtos finitos de elementos de $\{p_i\}_i \cup \{p_i^*\}_i = \{p_i\}_i$.

Tomando então $V = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \{c_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}^*}$, vemos que V é enumerável, e se definirmos $\mathfrak{C}' := C^*(V)$, temos $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$. Ademais, naturalmente temos $a_n \in \mathfrak{C}'$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, de onde $\operatorname{ran}(\tau) = \overline{\{a_n\}_n} \subseteq \mathfrak{C}'$, e o resultado segue.

■

Teorema 3.2.14. *Se $\tau \in \operatorname{ext}(X)$ é uma extensão tal que* $\operatorname{ran}(\tau) \subseteq \mathfrak{C}$*, onde $\mathfrak{C}$ é uma sub-C^*-álgebra comutativa de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ gerada por projeções, então τ é trivial.*

Demonstração. Pelo lema 3.2.13, podemos escrever $\operatorname{ran}(\tau) \subseteq \mathfrak{C}'$, onde $\mathfrak{C}'$ é uma sub-C*-álgebra comutativa de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ gerada por uma família *enumerável* de projeções, que tem unidade pois $1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} = \tau(1) \in \operatorname{ran}(\tau)$.

Logo, pelo corolário 2.4.9, existe $a \in \mathfrak{C}'$ auto-adjunto tal que $\mathfrak{C}' = C^*(1, a)$; então, existe um *-isomorfismo unital $\psi : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathfrak{C}'$, dado pelo cálculo funcional contínuo de a. Então, a composição $\psi^{-1} \circ \tau : C(X) \longrightarrow C(\sigma(a))$ é injetora, e portanto dual a uma sobrejeção contínua $g : \sigma(a) \longrightarrow X$, ou seja, $\psi^{-1} \circ \tau = g^*$; assim, em particular $\tau = \psi \circ g^*$. Portanto, da observação 3.2.1, e notando que podemos ver $\psi \in \operatorname{ext}(\sigma(a))$, temos

$$g_*([\psi]) = [\psi \circ g^*] = [\tau].$$

Agora, a é auto-adjunto, logo $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$; logo, do exemplo 3.2.11, temos $\operatorname{Ext}(\sigma(a)) = 0$, e portanto $[\psi] = 0$. Como g_* é um homomorfismo, segue-se daí que

$$[\tau] = g_*([\psi]) = g_*(0) = 0,$$

o que prova que τ é trivial, como queríamos.

■

Como conseqüência deste fato, podemos calcular o grupo $\mathrm{Ext}(X)$ para mais uma classe de espaços métricos compactos: os espaços métricos compactos *totalmente desconexos* (ver seção E.2). Este será um importante exemplo que usaremos adiante.

Corolário 3.2.15. *Seja X um espaço métrico compacto totalmente desconexo. Então,* $\mathrm{Ext}(X) = 0$*, o grupo nulo.*

Demonstração. Seja $\tau \in \mathrm{ext}(X)$ extensão arbitrária. Em virtude da proposição E.2.2, o fato de X ser totalmente desconexo implica em $C(X)$ ser gerado por uma família de idempotentes; logo, de imediato temos que $\mathrm{ran}(\tau)$ é gerada por uma família de projeções, e $\mathrm{ran}(\tau)$ é obviamente comutativa, de onde τ é uma extensão trivial, pela proposição 3.2.14. Como τ foi tomada arbitrariamente, fica assim provado que $\mathrm{Ext}(X) = 0$, como queríamos.

■

Capítulo 4

Propriedades de Ext

O objetivo deste capítulo é desenvolver resultados técnicos sobre o funtor Ext, que são necessários para a teoria que será vista no capítulo 5. O apêndice E contém resultados e conceitos de topologia que utilizaremos no decorrer deste capítulo.

4.1 Cisão de elementos de $\mathrm{Ext}(X)$

Começaremos esta seção motivados pelo teorema 3.1.5: sejam X_1, X_2 espaços métricos compactos, e denote $\widetilde{X} = X_1 \vee X_2$, que é também um espaço métrico compacto. Analisando o isomorfismo $\lambda : \mathrm{Ext}(X_1) \times \mathrm{Ext}(X_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}(\widetilde{X})$ dado naquele teorema vemos que, dado qualquer elemento $a \in \mathrm{Ext}(\widetilde{X})$, existem elementos $a_1 \in \mathrm{Ext}(X_1)$ e $a_2 \in \mathrm{Ext}(X_2)$ tais que $a = a_1 \vee a_2$ (relembrando a notação, $a_1 \vee a_2$ denota $\lambda(a_1, a_2)$). Nós dizemos então que o elemento $a \in \mathrm{Ext}(\widetilde{X})$ *cinde* em $a_1 \in \mathrm{Ext}(X_1)$ e $a_2 \in \mathrm{Ext}(X_2)$. Em outras palavras portanto, segue-se do teorema 3.1.5 que todo elemento de $\mathrm{Ext}(X_1 \vee X_2)$ cinde em elementos de $\mathrm{Ext}(X_1)$ e $\mathrm{Ext}(X_2)$.

O objetivo desta seção é estender, de um certo modo, esta idéia de cisão de elementos do grupo $\mathrm{Ext}(\widetilde{X})$, para grupos $\mathrm{Ext}(X)$ com espaços métricos compactos X arbitrários. O primeiro fato que precisamos considerar é que, em geral, não é possível escrever um dado espaço métrico compacto como a reunião disjunta de dois outros espaços métricos compactos (não vazios). Analisemos o exemplo acima mais um pouco: denotando por $i_1 : X_1 \longrightarrow \widetilde{X}$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow \widetilde{X}$ as inclusões, observe que

$$a = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2.$$

De fato, se $a_1 = [\tau_1]$, $a_2 = [\tau_2]$, sabemos que $a = a_1 \vee a_2 = [\tau_1 \vee \tau_2]$; dado $f \in C(\widetilde{X})$

arbitrário, temos

$$(\tau_1 \vee \tau_2)(f) = \tau_1(f|_{X_1}) \hat{+} \tau_2(f|_{X_2}) = \tau_1(f \circ i_1) \hat{+} \tau_2(f \circ i_2) = ((\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*))(f),$$

provando que $\tau_1 \vee \tau_2 = (\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*)$; portanto, se $\tau_{\widetilde{X}} \in \text{ext}(\widetilde{X})$ é uma extensão trivial,

$$\begin{aligned} a = [\tau_1 \vee \tau_2] = [(\tau_1 \vee \tau_2) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}} \hat{+} \tau_{\widetilde{X}}] = [(\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}} \hat{+} \tau_{\widetilde{X}}] = \\ = [(\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}} \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}}] = [(\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}}] + [(\tau_2 \circ i_2^*) \hat{+} \tau_{\widetilde{X}}] = \\ = (i_1)_*[\tau_1] + (i_2)_*[\tau_2] = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2. \end{aligned}$$

Nós caracterizamos portanto a cisão do elemento $a \in \text{Ext}(\widetilde{X})$ de outra forma: existem elementos $a_1 \in \text{Ext}(X_1)$ e $a_2 \in \text{Ext}(X_2)$ tais que $a = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2$. Esta será a versão de cisão que motivará a construção da observação 4.1.2.

Observação 4.1.1. Gostaríamos de fixar mais uma notação: dado $S \subseteq X$ um subconjunto fechado, denotaremos por $\mathcal{I}(S)$ o subconjunto de $C(X)$ dado por

$$\mathcal{I}(S) = \{f \in C(X) : f|_S = 0\}.$$

É fato que $\mathcal{I}(S)$ é um ideal bilateral fechado de $C(X)$ para todo $S \subseteq X$ fechado; mais ainda, qualquer ideal bilateral fechado de $C(X)$ é da forma $\mathcal{I}(S)$, para algum subconjunto fechado $S \subseteq X$, e este subconjunto fechado S está unicamente determinado pelo ideal. (Ver por exemplo [21], exercício 3.2.3(5)).

A partir de agora, para toda C*-álgebra $\mathfrak{A}$ e $b \in \mathfrak{A}$, denotaremos por $\text{Ad}b : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ a função dada por $\text{Ad}b(a) = bab^*$, $\forall a \in \mathfrak{A}$. Note que nem sempre $\text{Ad}b$ é um *-homomorfismo. Quando b é unitário, temos $b^* = b^{-1}$, e a função $\text{Ad}b$ é portanto o *-homomorfismo usual, dado por $\text{Ad}b(a) = bab^{-1}$, $\forall a \in \mathfrak{A}$.

Observação 4.1.2. Faremos agora uma construção bastante útil: seja $\tau \in \text{ext}(X)$ uma extensão, e suponha que exista $\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ uma projeção tal que $\mathfrak{p}$ comuta com $\text{ran}(\tau)$. Pela proposição 3.1.4, escolha $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção tal que $\mathfrak{p} = \pi(P)$. Podemos então definir uma aplicação $\widetilde{\tau}_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$ por $\widetilde{\tau}_1 = \alpha_P \circ \text{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau$ (ver a observação 2.4.13 para a definição de α_P), que é um *-homomorfismo pois $\mathfrak{p}$ comuta com $\text{ran}(\tau)$, e é claramente unital. Temos então uma aplicação τ_1' induzida por $\widetilde{\tau}_1$ no quociente de $C(X)$ pelo núcleo de $\widetilde{\tau}_1$,

$$\begin{aligned} \tau_1' : C(X)/\ker(\widetilde{\tau}_1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) \\ [f] &\longmapsto \widetilde{\tau}_1(f), \end{aligned}$$

que é um *-homomorfismo unital injetor. O núcleo de $\widetilde{\tau}_1$ é um ideal bilateral fechado de $C(X)$; logo, pela observação 4.1.1, existe um subconjunto fechado $X_1 \subseteq X$ tal que $\ker(\widetilde{\tau}_1) = \mathcal{I}(X_1)$.

Afirmamos que $C(X)/\ker(\widetilde{\tau}_1)$ é *-isomorfo a $C(X_1)$. De fato, considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : C(X) & \longrightarrow & C(X_1) \\ f & \longmapsto & f|_{X_1}; \end{array}$$

é imediato verificar que φ é um *-homomorfismo unital, e além disso φ é sobrejetora, pelo teorema de extensão de Tietze (pode ser encontrado em diversos livros de topologia, por exemplo [23], teorema 15.8, ou [21], teorema A.4.24). Obviamente temos $\ker(\varphi) = \ker(\widetilde{\tau}_1)$; segue-se daí que a aplicação induzida por φ no quociente,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : C(X)/\ker(\widetilde{\tau}_1) & \longrightarrow & C(X_1) \\ [f] & \longmapsto & \varphi(f), \end{array}$$

é um *-isomorfismo, provando o afirmado.

Se definirmos $\tau_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$ por $\tau_1 = \tau_1' \circ \varphi_1^{-1}$, vemos que τ_1 é um *-homomorfismo unital injetor, e portanto uma extensão dos compactos por $C(X_1)$. Vejamos melhor quem é esta extensão: dado $f \in C(X_1)$ arbitrário, considere $\widetilde{f} \in C(X)$ uma extensão contínua qualquer de f, pelo teorema de extensão de Tietze. É fácil ver que $\varphi_1^{-1}(f) = [\widetilde{f}]$. Então,

$$\tau_1(f) = \tau_1' \circ \varphi_1^{-1}(f) = \tau_1'([\widetilde{f}]) = \widetilde{\tau}_1(\widetilde{f}) = \alpha_P \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(\widetilde{f}).$$

Se definirmos $\widetilde{\tau}_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H})$ como o *-homomorfismo unital dado por $\widetilde{\tau}_2 = \alpha_{P^\perp} \circ \mathrm{Ad}(1-\mathfrak{p}) \circ \tau$, e tomando um subconjunto fechado $X_2 \subseteq X$ tal que $\ker(\widetilde{\tau}_2) = \mathcal{I}(X_2)$, podemos analogamente definir uma extensão $\tau_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(P^\perp\mathcal{H})$ por $\tau_2(f) = \alpha_{P^\perp} \circ \mathrm{Ad}(1-\mathfrak{p}) \circ \tau(\widetilde{f})$, para todo $f \in C(X_2)$, onde $\widetilde{f} \in C(X)$ é uma extensão contínua qualquer de f.

Sejam $i_1 : X_1 \longrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ as inclusões. Queremos provar agora que $\tau = (\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*)$. Tome arbitrariamente $f \in C(X)$, e denote $\tau(f) = \pi(T)$. Do fato que $\mathfrak{p}$ comuta com $\mathrm{ran}(\tau)$ temos que $\pi(TP) = \tau(f)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\tau(f) = \pi(PT)$, e portanto $PT = TP + K$, para algum operador compacto K. Então, $\widetilde{K} = K(P - P^\perp)$ é um operador compacto, e

$$\begin{aligned}PTP + P^{\perp}TP^{\perp} = (TP + K)P + (TP^{\perp} - K)P^{\perp} = TP + TP^{\perp} + K(P - P^{\perp}) = \\ = T(P + P^{\perp}) + \widetilde{K} = T + \widetilde{K},\end{aligned}$$

de onde temos $\pi(PTP + P^{\perp}TP^{\perp}) = \pi(T) = \tau(f)$.

Sejam $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $\nu : P^{\perp}\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões. Observando que $(\iota^*T\iota)\oplus(\nu^*T\nu) = PTP + P^{\perp}TP^{\perp}$, e que f é uma extensão contínua de $f|_{X_1}$ e $f|_{X_2}$, temos então

$$\begin{aligned}((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}(\tau_2 \circ i_2^*))(f) = (\tau_1 \circ i_1^*)(f)\hat{+}(\tau_2 \circ i_2^*)(f) = \tau_1(f \circ i_1)\hat{+}\tau_2(f \circ i_2) = \\ = \tau_1(f|_{X_1})\hat{+}\tau_2(f_{X_2}) = (\alpha_P \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(f))\hat{+}(\alpha_{P^{\perp}} \circ \mathrm{Ad}(1-\mathfrak{p}) \circ \tau(f)) = \\ = (\alpha_P(\mathfrak{p}\pi(T)\mathfrak{p}))\hat{+}(\alpha_{P^{\perp}}((1-\mathfrak{p})\pi(T)(1-\mathfrak{p}))) = \pi(\iota^*T\iota)\hat{+}\pi(\nu^*T\nu) = \\ = \pi((\iota^*T\iota)\oplus(\nu^*T\nu)) = \pi(PTP + P^{\perp}TP^{\perp}) = \pi(T) = \tau(f),\end{aligned}$$

provando deste modo que $\tau = (\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}(\tau_2 \circ i_2^*)$, como desejado. Segue-se daí que, se tomarmos $a_1 = [\tau_1] \in \mathrm{ext}(X_1)$, $a_2 = [\tau_2] \in \mathrm{ext}(X_2)$, temos

$$[\tau] = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2.$$

Observação 4.1.3. Observe que a construção da cisão na observação 4.1.2 foi baseada na escolha da projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{p} = \pi(P)$. Queremos provar que, na verdade, a cisão independe desta escolha: afirmamos que, se tomarmos no lugar de P uma outra projeção $\widetilde{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(\widetilde{P}) = \mathfrak{p}$ e fizermos a mesma construção da observação 4.1.2, obteremos os mesmos subconjuntos fechados X_1 e X_2 de X, e extensões $\rho_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})$, $\rho_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}^{\perp}\mathcal{H})$ tais que $\tau_1 \sim \rho_1$, $\tau_2 \sim \rho_2$:

De fato, seja $\widetilde{\rho}_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})$ o *-homomorfismo dado por $\widetilde{\rho}_1 = \alpha_{\widetilde{P}} \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau$. Observe que, como α_P e $\alpha_{\widetilde{P}}$ são *-isomorfismos, para $f \in C(X)$ temos que

$$\begin{aligned}f \in \ker(\widetilde{\rho}_1) \iff \alpha_{\widetilde{P}} \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(f) = 0 \iff \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(f) = 0 \iff \\ \iff \alpha_P \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(f) = 0 \iff \widetilde{\tau}_1(f) = 0 \iff f \in \ker(\widetilde{\tau}_1),\end{aligned}$$

de onde $\ker(\widetilde{\rho}_1) = \ker(\widetilde{\tau}_1) = \mathcal{I}(X_1)$, e portanto X_1 independe da escolha da projeção P. Da mesma forma prova-se que X_2 independe da escolha da projeção P. Quanto às extensões, temos que as extensões $\rho_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})$, $\rho_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}^{\perp}\mathcal{H})$ são dadas por

$$\rho_1(f) = \widetilde{\rho}_1(\widetilde{f}) = \alpha_{\widetilde{P}} \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(\widetilde{f}) \quad \forall f \in C(X_1),$$

$$\rho_2(g) = \widetilde{\rho}_2(\widetilde{g}) = \alpha_{\widetilde{P}^{\perp}} \circ \mathrm{Ad}(1-\mathfrak{p}) \circ \tau(\widetilde{g}) \quad \forall g \in C(X_2),$$

onde $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in C(X)$ são extensões contínuas quaisquer de f e g, respectivamente. A prova de que $\tau_1 \sim \rho_1$ e $\tau_2 \sim \rho_2$ é completamente análoga a uma prova utilizada no teorema 3.1.4: denotando por $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $\nu : \widetilde{P}\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões, e definindo $U : P\mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{P}\mathcal{H}$ como sendo $U = \nu^*\iota$, temos que $\pi(U^*U) = 1_{\mathcal{Q}(P\mathcal{H})}$ e $\pi(UU^*) = 1_{\mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H})}$; isto implica na aplicação

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{Q}(P\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\widetilde{P}\mathcal{H}) \\ \pi(T) &\longmapsto \pi(UTU^*) \end{aligned}$$

ser um *-isomorfismo unital. Tomando arbitrariamente $f \in C(X_1)$, e denotando $\tau_1(f) = \pi(T)$, temos $\alpha_P \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(\widetilde{f}) = \tau_1(f) = \pi(T)$, e então $\mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(\widetilde{f}) = \alpha_P^{-1}(\pi(T)) = \pi(\iota T \iota^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \rho_1(f) = \alpha_{\widetilde{P}} \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(\widetilde{f}) &= \alpha_{\widetilde{P}}(\pi(\iota T \iota^*)) = \pi(\nu^*\iota T \iota^* \nu) = \\ &= \pi(UTU^*) = \mu(\pi(T)) = \mu \circ \tau_1(f), \end{aligned}$$

de onde $\mu \circ \tau_1 = \rho_1$, e daí $\tau_1 \sim_w \rho_1$, o que implica em $\tau_1 \sim \rho_1$. De maneira análoga prova-se que $\tau_2 \sim \rho_2$, o que verifica a afirmação; daí segue-se de imediato que a cisão $[\tau] = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2$ independe da escolha da projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathfrak{p} = \pi(T)$.

Observação 4.1.4. Implícito no conteúdo da observação 4.1.2 está mais uma caracterização de cisão de um elemento $a \in \mathrm{Ext}(X)$; em um contexto geral, sejam X_1, X_2 subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto X, e $i_1 : X_1 \longrightarrow X$, $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ as inclusões. Considere $p : X_1 \vee X_2 \longrightarrow X$ a função de identificação canônica, que é contínua, e tome $a_1 \in \mathrm{Ext}(X_1)$ e $a_2 \in \mathrm{Ext}(X_2)$ arbitrários. Então,

$$p_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2.$$

De fato, se $a_1 = [\tau_1]$, $a_2 = [\tau_2]$, dado $f \in C(X)$ arbitrário temos

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee \tau_2) \circ p^*(f) = (\tau_1 \vee \tau_2)(f \circ p) &= \tau_1((f \circ p)|_{X_1}) \hat{+} \tau_2((f \circ p)|_{X_2}) = \\ &= \tau_1(f \circ i_1) \hat{+} \tau_2(f \circ i_2) = ((\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*))(f), \end{aligned}$$

de onde $(\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*) = (\tau_1 \vee \tau_2) \circ p^*$, e daí segue que $p_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2$, como desejado.

Temos portanto a seguinte definição.

Definição 4.1.5. Sejam X espaço métrico compacto e X_1, X_2 subconjuntos fechados de X. Dizemos que um elemento $a \in \operatorname{Ext}(X)$ *cinde* em $a_1 \in \operatorname{Ext}(X_1)$ e $a_2 \in \operatorname{Ext}(X_2)$ quando

$$a = p_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2,$$

onde $i_1 : X_1 \longrightarrow X$, $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ são as inclusões, e $p : X_1 \vee X_2 \longrightarrow X$ é a função de identificação canônica.

Observe que no caso em que $X = X_1 \vee X_2$, como no teorema 3.1.5, temos $p = \mathrm{id}_X$, e portanto $a = p_*(a_1 \vee a_2) = \mathrm{id}_{\operatorname{Ext}(X)}(a_1 \vee a_2) = a_1 \vee a_2$, o que nos dá a versão particular de cisão apresentada no início desta seção, e que motivou esta discussão.

Observação 4.1.6. Complementando a observação 4.1.4: dados $X_1, X_2 \subseteq X$ fechados, podemos definir uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \beta : \operatorname{Ext}(X_1) \times \operatorname{Ext}(X_2) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}(X) \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & p_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2, \end{array}$$

que é claramente um homomorfismo de grupos.

No caso em que $X = X_1 \vee X_2$, a aplicação β é precisamente o isomorfismo λ do teorema 3.1.5. É natural tentar encontrar outras condições suficientes para que β seja ainda um isomorfismo. Daremos mais um exemplo disto com o teorema 4.1.8, mas precisamos antes do lema 4.1.7, conhecido na literatura como o *first splitting lemma.*

Gostaríamos apenas de lembrar que, dada uma extensão trivial $\tau \in \operatorname{ext}(X)$, se escrevermos $\tau = \pi \circ \psi$ para $\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor, então ψ é uma *-representação de $C(X)$; logo, podemos associar a ψ uma medida espectral $\mathscr{E}$ agindo nos subconjuntos Borelianos de X, tal que, para todo $f \in C(X)$,

$$\psi(f) = \int_X f \; d\mathscr{E}.$$

Portanto, dada uma extensão trivial $\tau \in \operatorname{ext}(X)$, existe uma medida espectral $\mathscr{E}$ agindo nos subconjuntos Borelianos de X tal que, para todo $f \in C(X)$,

$$\tau(f) = \pi \circ \psi(f) = \pi\bigg(\int_X f \; d\mathscr{E}\bigg).$$

Lema 4.1.7. *Sejam X, Y espaços métricos compactos, $p : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora, e $\tau \in \operatorname{ext}(X)$ uma extensão tal que $\tau \circ p^* \in \operatorname{ext}(Y)$ é uma extensão trivial. Escreva $\tau \circ p^* = \pi \circ \psi$ para $\psi : C(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor, e seja $\mathscr{E}$ a medida espectral associada a ψ como acima. Suponha que*

$C \subseteq Y$ é fechado e tal que ∂C é disjunto do conjunto dos pontos em Y com pré-imagem múltipla em X por p. Então, a projeção $\mathfrak{p} = \pi(\mathscr{E}(C))$ comuta com $\operatorname{ran}(\tau)$.

Demonstração. Seja $f \in C(X)$ arbitrário. Queremos provar que $\mathfrak{p}\tau(f) = \tau(f)\mathfrak{p}$.

Denote $A = p^{-1}(\partial C)$, $U = p^{-1}(\operatorname{int}(C))$, $V = p^{-1}(Y \backslash C)$. Pela continuidade de p vemos que A é fechado (e portanto compacto), e U, V são abertos.

Em virtude da hipótese sobre ∂C, observe que $p|_A$ é injetora; logo, se restringirmos seu contra-domínio, temos que $p|_A : A \longrightarrow \partial C$ é bijetora; além disto, $p|_A$ é claramente contínua. Como A é compacto e ∂C é Hausdorff, segue-se que $p|_A$ é portanto um homeomorfismo.

Afirmamos que existe $g \in C(Y)$ tal que $(g \circ p)|_A = f|A$. De fato, defina $\widetilde{g} : \partial C \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\widetilde{g} = f|_A \circ (p|_A)^{-1}$; então, $\widetilde{g}$ é contínua. Como ∂C é fechado em Y, pelo teorema de extensão de Tietze existe $g \in C(Y)$ uma extensão de $\widetilde{g}$. Visto que $\operatorname{ran}(p|_A \subseteq \partial C)$, temos naturalmente

$$(g \circ p)|_A = \widetilde{g} \circ (p|_A) = f|_A \circ (p|_A)^{-1} \circ (p|_A) = f_A,$$

verificando o afirmado.

Considere $\widetilde{\psi} : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a extensão da *-representação ψ para as funções Borel-mensuráveis e limitadas de Y, como mencionado na seção A.1. Observe que $\widetilde{\psi}(g) = \psi(g)$, logo $\tau(g \circ p) = (\tau \circ p^*)(g) = \pi \circ \psi(g) = \pi \circ \widetilde{\psi}(g)$; Note ainda que $\mathscr{E}(C) = \widetilde{\psi}(1_C)$, e portanto

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}\tau(g \circ p) &= \pi(\widetilde{\psi}(1_C))\pi(\widetilde{\psi}(g)) = \pi(\widetilde{\psi}(1_C)\widetilde{\psi}(g)) = \pi(\widetilde{\psi}(1_C \cdot g)) = \\ &= \pi(\widetilde{\psi}(g \cdot 1_C)) = \pi(\widetilde{\psi}(g)\widetilde{\psi}(1_C)) = \pi(\widetilde{\psi}(g))\pi(\widetilde{\psi}(1_C)) = \tau(g \circ p)\mathfrak{p}, \end{aligned}$$

provando deste modo que $\mathfrak{p}$ comuta com $\tau(g \circ p)$.

Agora, $f = (f - g \circ p) + g \circ p$; logo, se provarmos que $\tau((f - g \circ p))$ comuta com $\mathfrak{p}$, teremos provado automaticamente que $\tau(f)$ comuta com $\mathfrak{p}$. Observe que $(f - g \circ p)|_A = 0$. Portanto, para provarmos o lema basta verificarmos que $\tau(h)$ comuta com $\mathfrak{p}$, para uma função $h \in C(X)$ tal que $h|_A = 0$; mais ainda, em virtude da proposição E.1.2, podemos supor sem perda de generalidade que h se anula em uma vizinhança aberta A' de A. Seja portanto $h \in C(X)$ tal que h se anula em uma vizinhança aberta A' de A. Defina funções $h_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $h_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in X \backslash U \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \in X \backslash V. \end{cases}$$

É imediato verificar que $h = h_1 + h_2$. Afirmamos que h_1 e h_2 são funções contínuas. De fato, para isto basta verificarmos que $\operatorname{supp}(h_1) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(h_2) \subseteq V$.

Como h_1 se anula fora de U, temos que $\operatorname{supp}(h_1) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$. Note que $Y = \operatorname{int}(C) \,\dot{\cup}\, \partial C \,\dot{\cup}\, (Y \backslash C)$, logo $X = U \,\dot{\cup}\, A \,\dot{\cup}\, V$, de onde $(X \backslash U) = (V \cup A)$, e portanto $X \backslash (U \backslash A') = (X \backslash U) \cup A' = (V \cup A) \cup A' = V \cup A'$, que é um conjunto aberto; segue-se daí que $U \backslash A'$ é um subconjunto fechado de X.

Se $x \in U \cap A'$, então $f(x) = 0$; logo, se $x \in U$ é tal que $f(x) \neq 0$, temos necessariamente $x \in U \backslash A'$; concluímos daí que

$$F = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{U \backslash A'} = U \backslash A' \subseteq U.$$

De maneira análoga prova-se que $\operatorname{supp}(h_2) \subseteq V$. Segue-se que $h_1, h_2 \in C(X)$, como afirmado.

Denote $K_1 = p(\operatorname{supp}(h_1))$, que é um subconjunto compacto de Y. Pelo que vimos acima, temos $K_1 \subseteq p(U) = \operatorname{int}(C)$. Em virtude da proposição E.1.3, podemos então tomar $g_1 \in C(Y)$ tal que $g_1|_{K_1} = 1$ e $\operatorname{supp}(g_1) \subseteq \operatorname{int}(C)$; logo, a função g_1 é tal que $1_C g_1 = g_1 = g_1 1_C$, de onde temos de imediato

$$\mathfrak{p}\tau(g_1 \circ p) = \tau(g_1 \circ p) = \tau(g_1 \circ p)\mathfrak{p}.$$

Também, a função g_1 é tal que $h_1 = h_1 \cdot (g_1 \circ p) = (g_1 \circ p) \cdot h_1$. Assim,

$$\mathfrak{p}\tau(h_1) = \mathfrak{p}\tau((g_1 \circ p) \cdot h_1) = \mathfrak{p}\tau(g_1 \circ p)\tau(h_1) = \tau(g_1 \circ p)\tau(h_1) = \tau((g_1 \circ p) \cdot h_1) = \tau(h_1),$$

$$\tau(h_1)\mathfrak{p} = \tau(h_1 \cdot (g_1 \circ p))\mathfrak{p} = \tau(h_1)\tau(g_1 \circ p)\mathfrak{p} = \tau(h_1)\tau(g_1 \circ p) = \tau(h_1 \cdot (g_1 \circ p)) = \tau(h_1),$$

de onde temos que $\mathfrak{p}\tau(h_1) = \tau(h_1)\mathfrak{p}$. Da mesma maneira prova-se que $\mathfrak{p}\tau(h_2) = \tau(h_2)\mathfrak{p}$. Como $h = h_1 + h_2$, segue-se daí que $\mathfrak{p}$ comuta com $\tau(h)$, e isto conclui a demonstração.

■

Teorema 4.1.8. *Se $A, B \subseteq X$ são fechados tais que $X = A \cup B$ e $A \cap B = \{x_0\}$, para algum $x_0 \in X$, então $\beta : \operatorname{Ext}(A) \times \operatorname{Ext}(B) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Começaremos com a sobrejetividade. Seja $[\tau] \in \operatorname{Ext}(X)$ arbitrário. Pela proposição E.1.4, considere uma função contínua $p : X \longrightarrow [-1, 1]$ tal que $p(x_0) = 0$, $p < 0$ em $A \backslash \{x_0\}$, e $p > 0$ em $B \backslash \{x_0\}$.

Defina $Y = \operatorname{ran}(p)$, que é um espaço métrico compacto, e $C = Y \cap [0,1]$, que é um subconjunto fechado de Y. Restrinja o contra-domínio de p para a sua imagem, $p : X \longrightarrow Y$.

Queremos provar que a extensão τ, a função p, e o conjunto C satisfazem as hipóteses do lema 4.1.7. É fácil ver que $\partial C = \{0\}$ ou $\partial C = \emptyset$ e, em ambos os casos, ∂C é disjunto do conjunto dos pontos em Y com pré-imagem múltipla em X por p.

Em virtude do que foi visto no exemplo 3.2.11 temos que $\operatorname{Ext}(Y) = 0$, visto que $Y \subseteq \mathbb{R}$. Logo, temos $[\tau \circ p^*] = p_*([\tau]) = 0$, e portanto $\tau \circ p^*$ é uma extensão trivial. Segue-se que todas as hipóteses do lema estão satisfeitas; logo, escrevendo $\tau \circ p^* = \pi \circ \psi$ para $\psi : C(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor, e sendo $\mathscr{E}$ a medida espectral associada a ψ, concluímos que a projeção $\mathfrak{p} = \pi(\mathscr{E}(C))$ comuta com $\operatorname{ran}(\tau)$. Tome portanto subconjuntos fechados $X_1, X_2 \subseteq X$ e $a_1 \in \operatorname{Ext}(X_1)$, $a_2 \in \operatorname{Ext}(X_2)$ tais que

$$[\tau] = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2,$$

onde $i_1 : X_1 \longrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ são as inclusões, como na observação 4.1.2.

Queremos provar que $X_1 \subseteq B$, $X_2 \subseteq A$. Denote $P = \mathscr{E}(C)$; então, $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma projeção tal que $\pi(P) = \mathfrak{p}$. Voltando ao conteúdo da observação 4.1.2, e considerando a observação 4.1.3, note que X_1 era determinado por $\ker(\widetilde{\tau}_1) = \mathcal{I}(X_1)$, onde $\widetilde{\tau}_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(P\mathcal{H})$ é o *-homomorfismo dado por $\widetilde{\tau}_1 = \alpha_P \circ \operatorname{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau$.

Considere $g : Y \longrightarrow [-1,1]$ dada por

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [-1,0] \cap Y \\ 0 & \text{se } y \in C = [0,1] \cap Y, \end{cases}$$

que é claramente uma função contínua. Defina $f \in C(X)$ por $f := g \circ p$, e note que f é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B \\ p(x) & \text{se } x \in A \backslash \{x_0\}. \end{cases}$$

Observe que, em particular, $f < 0$ em $A \backslash \{x_0\}$.

Considere agora $\widetilde{\psi} : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a extensão da *-representação ψ para as funções Borel-mensuráveis e limitadas de Y. Note que $1_C \cdot g = 0$, por construção; logo,

$$\mathfrak{p}\tau(f) = \pi(\mathscr{E}(C))\tau(g \circ p) = \pi(\widetilde{\psi}(1_C))\pi(\widetilde{\psi}(g)) = \pi(\widetilde{\psi}(1_C)\widetilde{\psi}(g)) = \pi(\widetilde{\psi}(1_C \cdot g)) = 0,$$

de onde

$$\widetilde{\tau}_1(f) = \alpha_P \circ \operatorname{Ad}\mathfrak{p} \circ \tau(f) = \alpha_P(\mathfrak{p}\tau(f)\mathfrak{p}) = \alpha_P(0) = 0,$$

e portanto $f \in \ker(\widetilde{\tau}_1) = \mathcal{I}(X_1)$. Vemos daí que $f|_{X_1} = 0$. Agora, por construção a função f não se anula em nenhum ponto de $A\backslash\{x_0\}$, e também $f|_B = 0$; isto implica de imediato em $X_1 \subseteq B$. De maneira similar prova-se que $X_2 \subseteq A$.

Considerando os diagramas comutativos de inclusões,

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "i_1'"'] \arrow[dr, "i_1"] & \\ B \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[d, "i_2'"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\ A \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

defina $a = (i_2')_* a_2 \in \mathrm{Ext}(A)$, $b = (i_1')_* a_1 \in \mathrm{Ext}(B)$. Então,

$$\begin{aligned}[\tau] = (i_1)_* a_1 + (i_2)_* a_2 = (j \circ i_1')_* a_1 + (i \circ i_2')_* a_2 = j_*(i_1')_* a_1 + i_*(i_2')_* a_2 = \\ = j_* b + i_* a = i_* a + j_* b = \beta(a, b),\end{aligned}$$

o que estabelece a sobrejetividade de β.

Vejamos agora a injetividade: defina funções $r : X \longrightarrow A$ e $s : X \longrightarrow B$ por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ x_0 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x \in A \\ x & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

É claro que r e s são funções contínuas (retrações, inclusive). Defina portanto uma aplicação

$$\begin{aligned} \mu : \mathrm{Ext}(X) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(A) \times \mathrm{Ext}(B) \\ a &\longmapsto (r_*(a), s_*(a)). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\mu \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(A)\times\mathrm{Ext}(B)}$. De fato, tome $(a, b) \in \mathrm{Ext}(A) \times \mathrm{Ext}(B)$ arbitrário. Observe que $r \circ j : B \longrightarrow A$ é a função constante igual a x_0. Logo, pela observação 3.2.8, $(r \circ j)_* : \mathrm{Ext}(B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A)$ é o homomorfismo nulo. Ademais, $r \circ i = \mathrm{id}_A$, e assim $(r \circ i)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(A)}$. Denotando $c = \beta(a, b) = i_* a + j_* b$, temos portanto

$$r_*(c) = r_*(i_* a + j_* b) = r_* i_* a + r_* j_* b = (r \circ i)_* a + (r \circ j)_* b = a + 0 = a;$$

de maneira análoga prova-se que $s_*(c) = b$, e daí segue-se que $\mu \circ \beta(a, b) = \mu(c) = (r_*(c), s_*(c)) = (a, b)$, provando que $\mu \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(A)\times\mathrm{Ext}(B)}$, como desejado.

Em outras palavras, foi provado que μ é uma inversa à esquerda para β, o que implica em β ser injetora. Concluímos assim que β é bijetora e portanto um isomorfismo, e o teorema está provado.

■

4.2 Ext e Seqüências Exatas

Nesta seção nós obteremos dois importantes resultados envolvendo o funtor Ext e seqüências exatas, dados pelos teoremas 4.2.6 e 4.2.7. O teorema 4.2.7 em particular será útil na prova da injetividade da aplicação γ_X, que será introduzida no capítulo 5.

O primeiro objetivo da seção é provar o teorema 4.2.4, que é o resultado mais extenso deste trabalho. Precisamos de alguns resultados auxiliares envolvendo projeções de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Proposição 4.2.1. *Seja $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma seqüência de projeções convergindo para zero fortemente (isto é, na strong operator topology). Então, para todo $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ temos $\|P_nK\| \longrightarrow 0$, $\|KP_n\| \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Consideraremos inicialmente o caso em que $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tem posto 1. Neste caso, existem $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ tais que $K(\omega) = \langle \omega, \xi \rangle \eta \ \forall \omega \in \mathcal{H}$, e $\|K\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|$. Então, para um $\omega \in \mathcal{H}$ arbitrário,

$$\|P_nK(\omega)\| = \|P_n(\langle \omega, \xi \rangle \eta)\| = \|\langle \omega, \xi \rangle P_n(\eta)\| = |\langle \omega, \xi \rangle| \cdot \|P_n(\eta)\| \leq \|\xi\| \cdot \|P_n(\eta)\| \cdot \|\omega\|,$$

o que implica em $\|P_nK\| \leq \|\xi\| \cdot \|P_n(\eta)\|$. Agora $\|\xi\|\|P_n(\eta)\| \longrightarrow 0$, visto que P_n converge para zero fortemente; segue-se daí que $\|P_nK\| \longrightarrow 0$.

Como todo operador de posto finito é uma soma de operadores de posto 1, tiramos de imediato que $\|P_nK\| \longrightarrow 0$ para todo operador $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ de posto finito.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ considere a função

$$\begin{aligned} f_n : \mathcal{K}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \\ K &\longmapsto P_nK. \end{aligned}$$

Obviamente, esta função é contínua; também, dados $n \in \mathbb{N}^*$ e $K, K' \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ quaisquer,

$$\|f_n(K) - f_n(K')\| = \|P_n(K - K')\| \leq \|P_n\| \cdot \|K - K'\| \leq \|K - K'\|,$$

o que implica em a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq C(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ ser equicontínua. Agora, o conjunto $D \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ dos operadores de posto finito é denso em $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, e nós provamos acima precisamente que $f_n \longrightarrow 0$ pontualmente em D. Portanto, segue-se da proposição E.1.6 que $f_n \longrightarrow 0$ pontualmente para qualquer operador compacto, ou seja, $\|P_nK\| \longrightarrow 0\ \forall K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Além disso, como $\|KP_n\| = \|(P_nK)^*\| = \|P_nK\|$, ficou também provado que $\|KP_n\| \longrightarrow 0\ \forall K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, e isto completa a demonstração.

■

Para o próximo resultado, dada uma projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\widetilde{\mathcal{H}}$ um subespaço de $\mathcal{H}$ contendo $P\mathcal{H}$, lembremos que P é dita ser de *codimensão finita em* $\widetilde{\mathcal{H}}$ quando o subespaço de $\widetilde{\mathcal{H}}$ ortogonal a $\operatorname{ran}(P)$ tem dimensão finita. A próxima proposição utiliza em particular conceitos e fatos das seções A.1 e A.2.

Proposição 4.2.2. *Sejam $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ um operador normal, e $\varepsilon > 0$. Então, existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção de codimensão finita em $\mathcal{H}$ tal que, relativo à $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus P^\perp\mathcal{H}$, K é dado por $K = K_1 \oplus K_2$, com $\|K_1\| < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ a decomposição espectral de K. Considere $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq n_0$ implica em $|\lambda_n| < \varepsilon/2$, e defina $P := \sum_{n \geq n_0} P_n$. Então, P é uma projeção que comuta com K, de onde temos $K = K_1 \oplus K_2$, decomposição esta relativa à $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus P^\perp\mathcal{H}$; ademais, como $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I_{\mathcal{H}}$ e cada P_n tem posto finito, é óbvio que P é uma projeção de codimensão finita em $\mathcal{H}$.

Afirmamos que $\|K_1\| < \varepsilon$. De fato, tome $\xi \in P\mathcal{H}$ arbitrário e note que

$$\|\xi\|^2 = \|P\xi\|^2 = \left\|\left(\textstyle\sum_{n \geq n_0} P_n\right)\xi\right\|^2 = \textstyle\sum_{n \geq n_0} \|P_n\xi\|^2,$$

de onde

$$\|K_1\xi\|^2 = \left\|\textstyle\sum_{n \geq n_0} \lambda_n P_n \xi\right\|^2 = \textstyle\sum_{n \geq n_0} |\lambda_n|^2 \|P_n\xi\|^2 < \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \textstyle\sum_{n \geq n_0} \|P_n\xi\|^2 = \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \|\xi\|^2,$$

e portanto $\|K_1\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, como desejado.

■

Corolário 4.2.3. *Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é da forma $T = \lambda I + K$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ normal, então dado $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção de codimensão finita em $\mathcal{H}$ tal que, relativo à $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus P^\perp\mathcal{H}$, T é dado por $T = (\lambda I_{P\mathcal{H}} + K') \oplus T'$, onde $K' \in \mathcal{K}(P\mathcal{H})$ e $\|K'\| < \varepsilon$.*

Demonstração. Aplique a proposição 4.2.2 para o compacto K, obtendo $K = K_1 \oplus K_2$ e $\|K_1\| < \varepsilon$. Então, denotando $K' = K_1$ e $T' = \lambda I_{P^\perp\mathcal{H}} + K_2$ temos

$$\begin{aligned} T = \lambda I + K = (\lambda I_{P\mathcal{H}}) \oplus (\lambda I_{P^\perp\mathcal{H}}) + K_1 \oplus K_2 = (\lambda I_{P\mathcal{H}} + K_1) \oplus (\lambda I_{P^\perp\mathcal{H}} + K_2) = \\ = (\lambda I_{P\mathcal{H}} + K') \oplus T', \end{aligned}$$

provando o corolário.

■

No próximo teorema, usaremos notações e resultados discutidos no apêndice E, em particular as noções de conjuntos *clopen* e espaços quocientes da forma X/A, para $A \subseteq X$ fechado.

Teorema 4.2.4. *Seja X um espaço métrico compacto, $A \subseteq X$ fechado tal que o espaço X/A é totalmente desconexo, e seja $i : A \longrightarrow X$ a inclusão. Então, a aplicação $i_* : \mathrm{Ext}(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Em virtude do corolário E.2.5 e da observação E.2.6, escreva

$$X = A \,\dot\cup\, \left(\dot\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} X_n\right),$$

onde os conjuntos X_n são clopen, $\mathrm{diam}(X_n) \longrightarrow 0$, e $\mathrm{dist}(X_n, A) \longrightarrow 0$ (o caso finito é similar, porém mais simples). Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, fixe $a_n \in A$ tal que $\mathrm{dist}(a_n, X_n) = \mathrm{dist}(\partial A, X_n)$. Observe que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \partial A$, $x \in X_n$ vale

$$d(a_n, a) \leq 2d(x, a) + \mathrm{diam}(X_n);$$

de fato, tome um $x_n \in X$ tal que $d(a_n, x_n) = \mathrm{dist}(a_n, X_n)$. Obviamente $d(a_n, x_n) \leq d(x, a)$, e $d(x_n, x) \leq \mathrm{diam}(X_n)$. Logo,

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x) + d(x, a) \leq 2d(x, a) + \mathrm{diam}(X_n),$$

como observado.

Defina uma aplicação $r : X \longrightarrow A$ por $r(x) = x$ caso $x \in A$, e $r(x) = a_n$ caso $x \in X_n$. Afirmamos que r é contínua. De fato, a continuidade de r em um ponto $x \notin \partial A$ é evidente. Verificaremos então apenas que r é contínua em todo ponto $a \in \partial A$: sejam $a \in \partial A$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Tome $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq n_0$ implica em $\mathrm{diam}(X_n) < \varepsilon/2$. O conjunto $X' = X_1 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, X_{n_0-1}$ é fechado, logo $\mathrm{dist}(a, X') > 0$. Tome portanto um $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $X' \cap B(a, \delta) = \emptyset$; sem perda de generalidade, podemos supor $\delta < \varepsilon/4$.

Considere agora $x \in X$ tal que $d(x, a) < \delta$. Então, ou $x \in A$, ou $x \in X_m$ para algum $m \geq n_0$; se $x \in A$ temos

$$d(r(x), r(a)) = d(x, a) < \delta < \varepsilon/4 < \varepsilon,$$

e se $x \in X_m$ para algum $m \geq n_0$, o observado acima nos dá

$$d(r(x), r(a)) = d(a_m, a) \leq 2d(x, a) + \operatorname{diam}(X_m) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

provando deste modo que r é contínua no ponto a. Segue-se daí que r é uma função contínua, como afirmado.

É claro que a função r satisfaz $r \circ i = \mathrm{id}_A$, logo temos $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(A)}$, ou seja, r_* é uma inversa à esquerda para i_*. Nós iremos provar adiante que r_* é também uma inversa à direita para i_*, o que implicará em i_* ser inversível e portanto um isomorfismo; isto, porém, dará algum trabalho.

Fixe arbitrariamente uma extensão $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Afirmamos que existe uma família $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de projeções mutuamente ortogonais satisfazendo $\mathfrak{e}_n = \pi(E_n) = \tau(1_{X_n})$ tais que, se denotarmos $E_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ e $E_0 = E_\infty^\perp$ as projeções, temos que

1. $\tau' : C(A) \longrightarrow \mathcal{Q}(E_0\mathcal{H})$ dada por $\tau' = \alpha_{E_0} \circ \mathrm{Ad}\pi(E_0) \circ \tau \circ r^*$ é uma extensão

2. Denotando $I_n = I_{\mathcal{H}_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\tau(g \circ r) = \tau'(g) \hat{+} \pi(\textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} g(a_n) I_n) \quad \forall g \in C(A).$$

A prova desta afirmação é a parte mais longa do resultado; nós iremos assumi-la por enquanto, e demonstrar o resto do teorema usando esta afirmação.

Primeiramente, note que, como espaço vetorial, $C(X) = \mathcal{I}(A) \oplus r^* C(A)$ (a notação $\mathcal{I}(A)$ foi introduzida com a observação 4.1.1). Isto é verdade pois, dado $f \in C(X)$, $f = (f - f \circ i \circ r) + f \circ i \circ r$ é tal que $(f - f \circ i \circ r) \in \mathcal{I}(A)$, $f \circ i \circ r \in r^* C(A)$; além disso, se $f \in r^* C(A) \cap \mathcal{I}(A)$, então $f = g \circ r$ para algum $g \in C(A)$, e $f|_A = 0$. Ora, mas dado $a \in A$ arbitrário, $g(a) = g(r(a)) = f(a) = 0$, de onde $g = 0$ e portanto $f = 0$, provando que a soma é de fato direta.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ denote por $\varepsilon_n : C(X_n) \longrightarrow C(X)$ a função que estende as funções de $C(X_n)$ como zero fora de X_n, ou seja, $\varepsilon_n(f)|_{X_n} = f$, $\varepsilon_n(f)|_{X \setminus X_n} = 0$ para toda $f \in C(X_n)$. É claro que ε_n é um *-homomorfismo injetor, para todo n. Denote por $\iota_n : E_n\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões, e $\alpha_n = \alpha_{E_n}$. Como $\mathfrak{e}_n = \pi(E_n) = \tau(1_{X_n})$, vemos que naturalmente $\mathfrak{e}_n$ comuta com $\mathrm{ran}(\tau \circ \varepsilon_n)$, de onde ficam bem definidas extensões

$$\tau_n : C(X_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(E_n\mathcal{H})$$

por $\tau_n = \alpha_n \circ \tau \circ \varepsilon_n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (os detalhes da prova de que as τ_n são extensões são análogos aos apresentados na prova de que τ_1 é extensão no teorema 3.1.5).

Para $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, note que por si só o conjunto X_n é um espaço métrico compacto com a topologia induzida de X, logo temos pelo corolário 3.2.15 que $\mathrm{Ext}(X_n) = 0$, e daí segue-se que a extensão τ_n é triviais. Assim, existe $\psi_n : C(X_n) \longrightarrow \mathcal{B}(E_n\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor tal que $\tau_n = \pi \circ \psi_n$.

Para cada n denote por $p_n : \mathcal{I}(A) \longrightarrow C(X_n)$ a função dada por $p_n(f) = f|_{X_n}$, para todo $f \in \mathcal{I}(A)$, que é claramente um *-homomorfismo; defina também aplicações $\varphi'_n : \mathcal{I}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(E_n\mathcal{H})$ por $\varphi'_n = \psi_n \circ p_n$. É claro que as φ'_n são *-homomorfismos e portanto *-representações de $\mathcal{I}(A)$. Considere então

$$\varphi_1 : \mathcal{I}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty}(E_n\mathcal{H})) = \mathcal{B}(E_\infty\mathcal{H})$$

a *-representação soma direta $\varphi_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\varphi'_n$ (ver por exemplo [21], exercício 3.4.3) tal que, para cada $f \in \mathcal{I}(A)$,

$$\varphi_1(f) = (\textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty}\varphi'_n)(f) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\varphi'_n(f)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\psi_n(f|_{X_n}).$$

Sejam $\iota_n : E_n\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ as inclusões. Então, $\iota_n^*\iota_n = I_{E_n\mathcal{H}}$, $\iota_n\iota_n^* = E_n$. Relativo à decomposição $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus E_\infty\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} \oplus (\bigoplus_{m=1}^{\infty} E_m\mathcal{H})$, a projeção E_n se escreve como

$$E_n = 0 \oplus \widetilde{E}_n = 0 \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \overbrace{I_{E_n\mathcal{H}}}^{\text{n-ésima}} \oplus 0 \oplus \cdots);$$

em particular, observe que $\varphi_1(1_{X_n}) = \widetilde{E}_n$.

Antes de prosseguirmos, provemos que, para todo $f \in \mathcal{I}(A)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{X_n}$ converge em norma para f: de fato, dado $\varepsilon > 0$, em virtude da continuidade uniforme de f e do fato que $f|_A = 0$, existe $V \subseteq X$ aberto contendo A tal que $|f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in V$. Agora, como $\mathrm{dist}(X_n, A) \longrightarrow 0$ e também $\mathrm{diam}(X_n) \longrightarrow 0$, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}^*$ a partir do qual todos os X_n estão contidos em V, o que implica em $|f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in X_n, \forall n \geq n_0$. Assim, para quaisquer $l, m \in \mathbb{N}^*$ com $n_0 < l < m$ teremos

$$\left|\textstyle\sum_{n=l+1}^{m} f(x) 1_{X_n}(x)\right| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin X_{l+1} \cup \cdots \cup X_m \\ |f(x)| < \varepsilon & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

de onde $\left\|\sum_{n=l+1}^{m} f \cdot 1_{X_n}\right\| \leq \varepsilon$, o que prova que a seqüência das somas parciais é de Cauchy na norma, e portanto converge. Claramente, o limite será f.

Seja $0_0 : \mathcal{I}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(E_0\mathcal{H})$ a *-representação nula. Queremos provar agora que $\pi(0_0 \oplus \varphi_1) : \mathcal{I}(A) \longrightarrow \mathcal{Q}(E_0\mathcal{H} \oplus E_\infty\mathcal{H}) = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é tal que $\pi(0_0 \oplus \varphi_1) = \tau|_{\mathcal{I}(A)}$. De fato:

considere inicialmente $f \in \mathcal{I}(A)$ tal que $f = f \cdot 1_{X_k}$, para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Então,

$$
\begin{aligned}
(0_0 \oplus \varphi_1)(f) = 0 \oplus (\textstyle\bigoplus_n \psi_n((f \cdot 1_{X_k})|_{X_n})) = 0 \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \overbrace{\psi_k(f|_{X_k})}^{\text{k-ésima}} \oplus 0 \oplus \cdots) = \\
= \iota_k \psi_k(f|_{X_k}) \iota_k^*,
\end{aligned}
$$

e portanto, como $\alpha_k^{-1} \circ \pi \circ \psi_k = \alpha_k^{-1} \circ \tau_k = \alpha_k^{-1} \circ \alpha_k \circ \tau \circ \varepsilon_k = \tau \circ \varepsilon_k$, temos

$$\pi(0_0 \oplus \varphi_1)(f) = \pi(\iota_k \psi_k(f|_{X_k}) \iota_k^*) = \alpha_k^{-1}(\pi(\psi_k(f|_{X_k}))) = \tau \circ \varepsilon_k(f|_{X_k}) = \tau(f \cdot 1_{X_k}) = \tau(f).$$

No caso geral, se $f \in \mathcal{I}(A)$ é arbitrária, sabemos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{X_n}$, esta série convergindo na normal. Obviamente, para cada n a função $f \cdot 1_{X_n}$ pertence a $\mathcal{I}(A)$ e satisfaz $(f \cdot 1_{X_n}) \cdot 1_{X_n} = f \cdot 1_{X_n}$. Logo, do caso anterior, e usando a linearidade e continuidade de τ e $\pi(0_0 \oplus \varphi_1)$ temos

$$
\begin{aligned}
\pi(0_0 \oplus \varphi_1)(f) = \pi(0_0 \oplus \varphi_1)(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{X_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(0_0 \oplus \varphi_1)(f \cdot 1_{X_n}) = \\
= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tau(f \cdot 1_{X_n}) = \tau(\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{X_n}) = \tau(f),
\end{aligned}
$$

de onde fica estabelecido que $\pi(0_0 \oplus \varphi_1) = \tau|_{\mathcal{I}(A)}$, como afirmado.

Observe que, se $f \in r^*C(A)$, então existe uma única $g \in C(A)$ tal que $f = r^*(g) = g \circ r$, devido à sobrejetividade de r. Está bem definida portanto a aplicação

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 : r^*C(A) &\longrightarrow \mathcal{B}(E_\infty \mathcal{H}) \\
g \circ r &\longmapsto \textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} g(a_n) I_n.
\end{aligned}
$$

Defina também

$$
\begin{aligned}
\varphi : C(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(E_\infty \mathcal{H}) \\
f &\longmapsto \varphi_1(f - f \circ i \circ r) + \varphi_2(f \circ i \circ r).
\end{aligned}
$$

Note que a função φ é claramente linear e preserva a involução; nós queremos provar que φ preserva produtos mas, para tanto, verificaremos antes que, para quaisquer $f \in \mathcal{I}(A)$ e $g \in r^*C(A)$ temos $\varphi_1(f \cdot g) = \varphi_1(f)\varphi_2(g) = \varphi_2(g)\varphi_1(f)$ (o fato de $\mathcal{I}(A)$ ser ideal implica em $f \cdot g \in \mathcal{I}(A)$).

Tome arbitrariamente $f \in \mathcal{I}(A)$, $g \in r^*C(A)$. Devido à linearidade e continuidade das funções em questão, e ao fato de que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{X_n}$ em norma, podemos supor sem perda de generalidade que $f = f \cdot 1_{X_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Escreva $g = h \circ r$ para algum $h \in C(A)$; então, lembrando que $r(x) = a_n$ para todo $x \in X_n$,

$$f \cdot g = g \cdot f = (h \circ r) \cdot f \cdot 1_{X_n} = h(a_n) f \cdot 1_{X_n} = h(a_n) f,$$

e portanto $\varphi_1(f \cdot g) = h(a_n)\varphi_1(f)$. Por outro lado, lembrando que $\widetilde{E}_n = \varphi_1(1_{X_n})$ vemos de imediato que $\widetilde{E}_n \varphi_1(f) = \varphi_1(f) = \varphi_1(f)\widetilde{E}_n$, logo

$$\begin{aligned}\varphi_1(f)\varphi_2(g) = \varphi_1(f)\widetilde{E}_n\varphi_2(h \circ r) = \varphi_1(f)\widetilde{E}_n(\textstyle\bigoplus_{m=1}^{\infty} h(a_m) I_m) = \varphi_1(f) h(a_n)\widetilde{E}_n = \\ = h(a_n)\varphi_1(f)\widetilde{E}_n = h(a_n)\varphi_1(f) = \varphi_1(h(a_n)f) = \varphi_1(f \cdot g),\end{aligned}$$

provando assim que $\varphi_1(f \cdot g) = \varphi_1(f)\varphi_2(g)$. Analogamente prova-se que $\varphi_1(f \cdot g) = \varphi_2(g)\varphi_1(f)$, e isto conclui a afirmação. Podemos agora provar que a aplicação φ preserva produtos:

Sejam $f, g \in C(X)$ arbitrários, e escreva $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$ segundo a decomposição $C(X) = \mathcal{I}(A) \oplus r^* C(A)$. Observe que $f_1 \cdot g_1, f_1 \cdot g_2, f_2 \cdot g_1 \in \mathcal{I}(A)$, e que $f_2 \cdot g_2 \in r^* C(A)$, o que implica em $\varphi(f_1 \cdot g_1) = \varphi_1(f_1 \cdot g_1)$, $\varphi(f_1 \cdot g_2) = \varphi_1(f_1 \cdot g_2)$, $\varphi(f_2 \cdot g_1) = \varphi_1(f_2 \cdot g_1)$, $\varphi(f_2 \cdot g_2) = \varphi_2(f_2 \cdot g_2)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\varphi(f \cdot g) = \varphi((f_1 + f_2)(g_1 + g_2)) = \varphi(f_1 \cdot g_1) + \varphi(f_1 \cdot g_2) + \varphi(f_2 \cdot g_1) + \varphi(f_2 \cdot g_2) = \\ = \varphi_1(f_1 \cdot g_1) + \varphi_1(f_1 \cdot g_2) + \varphi_1(f_2 \cdot g_1) + \varphi_2(f_2 \cdot g_2) = \\ = \varphi_1(f_1)\varphi_1(g_1) + \varphi_1(f_1)\varphi_2(g_2) + \varphi_2(f_2)\varphi_1(g_1) + \varphi_2(f_2)\varphi_2(g_2) = \\ = (\varphi_1(f_1) + \varphi_2(f_2))(\varphi_1(g_1) + \varphi_2(g_2)) = \varphi(f)\varphi(g),\end{aligned}$$

provando deste modo que φ preserva produtos, como desejado. Segue-se daí que φ é um *-homomorfismo.

Finalmente, estamos em condições de provar que $i_* \circ r_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(X)}$: note que o item 2 da afirmação ainda não demonstrada diz precisamente que

$$\tau \circ r^*(g) = \tau'(g) \hat{+} (\pi \circ \varphi_2(g \circ r)) = (\tau' \hat{+} (\pi \circ \varphi_2 \circ r^*))(g) \quad \forall g \in C(A);$$

tomando $\tau_A \in \mathrm{ext}(A)$ uma extensão trivial arbitrária, sabemos que a extensão $(\pi \circ \varphi_2 \circ r^*) \hat{+} \tau_A$ é trivial, pela observação 2.4.6, e então $(\pi \circ \varphi_2 \circ r^*) \hat{+} \tau_A \sim \tau_A$. Também, $\tau \circ r^*$ é uma extensão, devido à sobrejetividade de r. Assim,

$$\begin{aligned}r_*[\tau] = [\tau \circ r^*] = [\tau \circ r^*] + 0 = [\tau' \hat{+} (\pi \circ \varphi_2 \circ r^*)] + [\tau_A] = [\tau' \hat{+} (\pi \circ \varphi_2 \circ r^*) \hat{+} \tau_A] = \\ = [\tau' \hat{+} \tau_A] = [\tau'] + [\tau_A] = [\tau'] + 0 = [\tau'].\end{aligned}$$

Também, para $f \in C(X)$ arbitrário temos

$$\begin{aligned}((\tau' \circ i^*)\hat{+}(\pi \circ \varphi))(f) &= \tau'(f \circ i)\hat{+}(\pi \circ \varphi)(f) = \\ &= \tau'(f \circ i)\hat{+}(\pi \circ \varphi_1(f - f \circ i \circ r) + \pi \circ \varphi_2(f \circ i \circ r)) = \\ &= 0\hat{+}(\pi \circ \varphi_1)(f - f \circ i \circ r) + \tau'(f \circ i)\hat{+}(\pi \circ \varphi_2)(f \circ i \circ r) = \\ &= \pi(0 \oplus \varphi_1)(f - f \circ i \circ r) + \tau \circ r^*(f \circ i) = \\ &= \tau(f - f \circ i \circ r) + \tau(f \circ i \circ r) = \tau(f),\end{aligned}$$

provando que $(\tau' \circ i^*)\hat{+}(\pi \circ \varphi) = \tau$; como para toda extensão trivial $\tau_X \in \mathrm{ext}(X)$ temos que $(\pi \circ \varphi)\hat{+}\tau_X$ é trivial, vemos que

$$i_*[\tau'] = [(\tau' \circ i^*)\hat{+}(\pi \circ \varphi)\hat{+}\tau_X] = [\tau\hat{+}\tau_X] = [\tau],$$

de onde temos de imediato $i_* \circ r_*[\tau] = i_*[\tau'] = [\tau]$, provando deste modo que $i_* \circ r_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(X)}$, como queríamos. Fica estabelecido desta forma que i_* é bijetor, e portanto um isomorfismo de grupos.

Falta-nos portanto apenas provar a afirmação do início, sobre a existência das projeções E_n satisfazendo as condições 1 e 2. Reformularemos a afirmação, para ajustá-la à ordem em que demonstraremos os fatos. Denote por $C_{\mathbb{R}}(A)$ o subconjunto de $C(A)$ das funções reais (isto é, dos elementos auto-adjuntos de $C(A)$). Fixe $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq C_{\mathbb{R}}(A)$ um subconjunto denso. Afirmamos que existe uma família $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de projeções mutuamente ortogonais satisfazendo $\mathfrak{e}_n = \pi(E_n) = \tau(1_{X_n})$ tais que, se denotarmos por $E_\infty = \sum_{n=1}^\infty E_n$ e $E_0 = E_\infty^\perp$ as projeções, e por $\tau' : C(A) \longrightarrow \mathcal{Q}(E_0\mathcal{H})$ a aplicação dada por $\tau' = \alpha_{E_0} \circ \mathrm{Ad}\pi(E_0) \circ \tau \circ r^*$, então

$$\tau \circ r^*(g_m) = \tau'(g_m)\hat{+}\pi(\textstyle\bigoplus_{n=1}^\infty g_m(a_n)I_n) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \tag{4.1}$$

e ainda τ' é uma extensão. Provemos isto:

Observe que $\tau \circ r^*(g_m)$ é auto-adjunto, logo podemos fixar para cada m um operador auto-adjunto H_m tal que $\pi(H_m) = \tau \circ r^*(g_m)$. O próximo passo é construir recursivamente uma família $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de projeções mutuamente ortogonais tais que $\pi(F_n) = \tau(1_{X_n})$, para todo n. Para tanto, pela proposição 3.1.4 seja $F_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma projeção qualquer tal que $\pi(F_1) = \tau(1_{X_1})$, e tome $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auto-adjunto tal que $\pi(T) = \tau(1_{X_2})$. Claramente o operador $F_1^\perp T F_1^\perp$ é tal que $\pi(F_1^\perp T F_1^\perp) = \tau(1_{X_2})$, logo $\mathfrak{p} := \alpha_{F_1^\perp}(\pi(F_1^\perp T F_1^\perp))$ é uma projeção em $\mathcal{Q}(F_1^\perp\mathcal{H})$. Então, novamente pela proposição 3.1.4, existe $F_2' \in \mathcal{B}(F_1^\perp\mathcal{H})$ uma projeção tal que $\pi(F_2') = \mathfrak{p}$. Ora, mas assim a projeção $F_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por $F_2 = 0_{F_1\mathcal{H}} \oplus F_2'$ é ortogonal a F_1 por construção e, em virtude da observação 2.4.13, temos

$$\pi(F_2) = \pi(0_{F_1\mathcal{H}} \oplus F_2') = \alpha_{F_1^\perp}^{-1}(\pi(F_2')) = \alpha_{F_1^\perp}^{-1} \circ \alpha_{F_1^\perp}(\pi(F_1^\perp T F_1^\perp)) = \tau(1_{X_2}).$$

Prosseguindo recursivamente deste modo, obtemos a família $\{F_m\}_m$ de projeções como desejado.

Note que, para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\pi(H_m F_n - g_m(a_n)F_n) = \tau((g_m \circ r)1_{X_n} - g_m(a_n)1_{X_n}) = 0,$$

de onde $H_m F_n - g_m(a_n)F_n$ é compacto, e portanto também o operador $F_n H_m F_n - g_m(a_n)F_n$ é compacto. Ademais, denotando $[H_m, F_n] = H_m F_n - F_n H_m$, temos

$$\pi([H_m, F_n]) = \pi(H_m F_n - F_n H_m) = \tau((g_m \circ r)1_{X_n} - 1_{X_n}(g_m \circ r)) = 0,$$

seguindo-se daí então que também o operador $[H_m, F_n]$ é compacto.

Para simplificar a notação no que segue, por um momento fixaremos m, n e denotaremos $H = H_m$, $F = F_n$, $\lambda = g_m(a_n)$. Escrevendo o operador H em sua decomposição matricial relativa à $\mathcal{H} = F\mathcal{H} \oplus F^\perp\mathcal{H}$ como

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

podemos ver que

$$[H, F] = \begin{pmatrix} 0 & -H_{12} \\ H_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o operador $[H, F]$ é compacto, segue-se que H_{12} e H_{21} são operadores compactos. Agora, $FHF - \lambda F$ é compacto, logo $H_{11} - \lambda I_{F\mathcal{H}}$ é compacto, e portanto será também compacto o operador $H' = H - \lambda F - F^\perp H F^\perp$, ou seja, o operador

$$H' = \begin{pmatrix} H_{11} - \lambda I_{F\mathcal{H}} & H_{12} \\ H_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixe agora uma seqüência $\{F^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de subprojeções de F convergindo fortemente para zero, tal que $F^{(k)}$ tem codimensão k em $F\mathcal{H}$ para todo k (tal seqüência pode ser construída recursivamente, tomando uma base ortonormal $\{\xi_l\}_{l\in\mathbb{N}^*}$ de $F\mathcal{H}$ e definindo $F^{(k)}$ como a projeção ortogonal sobre $\overline{\operatorname{span}}\{\xi_l : l > k\}$); observando que

$F^{(k)}F^{\perp} = F^{\perp}F^{(k)} = 0$ e que $F^{(k)}F = FF^{(k)} = F^{(k)}$, temos

$$\begin{aligned}[H', F^{(k)}] &= F^{(k)}(H - \lambda F - F^{\perp}HF^{\perp}) - (H - \lambda F - F^{\perp}HF^{\perp})F^{(k)} = \\ &= F^{(k)}H - HF^{(k)} - \lambda F^{(k)} + \lambda F^{(k)} - F^{(k)}F^{\perp}HF^{\perp} + F^{\perp}HF^{\perp}F^{(k)} = \\ &= F^{(k)}H - HF^{\perp} = [H, F^{(k)}].\end{aligned}$$

Afirmamos que $\left\|[H, F^{(k)}]\right\| \longrightarrow 0$; de fato, em virtude da proposição 4.2.1, temos que $\left\|H'F^{(k)}\right\| \longrightarrow 0$, $\left\|F^{(k)}H'\right\| \longrightarrow 0$, e daí

$$\left\|[H, F^{(k)}]\right\| = \left\|[H', F^{(k)}]\right\| = \left\|H'F^{(k)} - F^{(k)}H'\right\| \leq \left\|H'F^{(k)}\right\| + \left\|F^{(k)}H'\right\| \longrightarrow 0,$$

provando o afirmado.

Retomando o problema original: fixe $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, e considere uma seqüência $\{F_n^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de subprojeções de F_n convergindo fortemente para zero, tal que $F_n^{(k)}$ tem codimensão k em $F_n\mathcal{H}$ para todo k . Para cada $m \leq n$, o que foi provado acima mostra que existe um $k_m \in \mathbb{N}^*$ tal que, para todo $k \geq k_m$, temos $\left\|[H_m, F_n^{(k)}]\right\| \leq 2^{-n}$. Denote $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Então, a subprojeção $F_n' = F_n^{(k_0)}$ de F_n é tal que $\|[H_m, F_n']\| \leq 2^{-n}$ para todo $m \leq n$.

Organizando melhor as idéias, acabamos de provar que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe uma subprojeção $F_n' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de F_n, de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$, tal que

$$\|[H_m, F_n']\| \leq 2^{-n} \quad \forall m \leq n.$$

É óbvio que as projeções F_n' são todas mutuamente ortogonais, pois as F_n o são, e como F_n' é de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$, vemos que o operador $F_n - F_n'$ é de posto finito, e portanto compacto. Segue-se que $\pi(F_n') = \pi(F_n) = \tau(1_{X_n})$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Em particular, prova-se que $[H_m, F_n']$ é compacto para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$, da mesma forma que provamos que $[H_m, F_n]$ é compacto para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Seja $F_0' = I_{\mathcal{H}} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n'$, e considere a matriz de H_m relativa à decomposição $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n'\mathcal{H}$. Observe que, para $n > k \geq 0$ arbitrários temos que $F_k'F_n' = 0$, e portanto

$$F_k'[H_m, F_n']F_n' = F_k'H_mF_n' - F_k'F_n'H_mF_n' = F_k'H_mF_n',$$

de onde as entradas desta matriz que estão acima da diagonal são compactas. Afirmamos que o operador R, formado zerando-se todas as entradas diagonais e abaixo da diagonal da matriz de H_m é um operador compacto. De fato, observe que a matriz de R possui apenas um número finito de entradas não nulas em suas $m-1$ primeiras colunas, e que todas estas entradas são compactas. Logo, basta provarmos que é compacto o operador R' formado zerando-se as $m-1$ primeiras colunas de R; nós faremos isto provando que R' é o limite, na norma, de operadores compactos.

Para $p > m$, denote por T_p o operador formado zerando-se todas as entradas de H_m, exceto pelas entradas acima da diagonal, da coluna m (inclusive) até a coluna p (inclusive). Obviamente o operador T_p é compacto, pois sua matriz possui apenas um número finito de entradas não nulas, todas elas compactas. Considere a seqüência $\{T_p\}_{p>m}$. Observe que o operador $T_p - T_{p-1}$ possui apenas a p-ésima coluna não nula; assim,

$$\begin{aligned}\|T_p - T_{p-1}\| &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{p-1}\|(T_p - T_{p-1})_{kp}\| = \sum_{k=1}^{p-1}\|(H_m)_{kp}\| = \sum_{k=1}^{p-1}\left\|F'_k H_m F'_p\right\| = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{p-1}\left\|F'_k[H_m, F'_p]F'_p\right\| \leq \sum_{k=1}^{p-1}\|F'_k\| \cdot \left\|[H_m, F'_p]\right\| \cdot \left\|F'_p\right\| = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{p-1}\left\|[H_m, F'_p]\right\| \leq \sum_{k=1}^{p-1}2^{-p} = (p-1)2^{-p},\end{aligned}$$

onde aqui naturalmente $(T_p - T_{p-1})_{kp}$ denota a entrada (k, p) da matriz de $T_p - T_{p-1}$ e assim por diante, e também usamos o fato de que $\|F'_n\| = 1$ para todo n (ver por exemplo [21], exercício 4.4.14(5)). Como conseqüência, temos que $\lim_{p\to\infty}\|T_p - T_{p-1}\| = 0$, de onde a seqüência $\{T_p\}_{p>m}$ é de Cauchy, e portanto converge. É óbvio que o limite desta seqüência é o operador R'; segue-se que R' é compacto, e portanto R é compacto, como queríamos provar.

Em outras palavras, a parte de H_m acima da diagonal é compacta; agora, como H_m é um operador auto-adjunto, temos que também a parte abaixo da diagonal é compacta. Logo, podemos escrever

$$H_m = (\textstyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_m^{(n)}) + K'_m, \tag{4.2}$$

onde $H_m^{(n)} \in \mathcal{B}(F'_n\mathcal{H})$ é a n-ésima entrada da diagonal de H_m (ou seja, a entrada determinada por $F'_n H_m F'_n$), e K'_m é o operador compacto formado a partir de H_m, zerando-se a sua diagonal.

Observe que o operador $F'_n H_m F'_n - g_m(a_n)F'_n$ é compacto para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$, pela mesma razão que o operador $F_n H_m F_n - g_m(a_n)F_n$ é compacto, como provado anteriormente. Portanto, podemos escrever, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$H_m^{(n)} = g_m(a_n)I'_n + \widetilde{K}_m^{(n)}, \tag{4.3}$$

onde $\widetilde{K}_m^{(n)}$ é compacto e $I'_n = I_{F'_n\mathcal{H}}$. Assim, pelo corolário 4.2.3, para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$ existe $P_n^{(m)} \in \mathcal{B}(F'_n\mathcal{H})$ uma projeção de codimensão finita em $F'_n\mathcal{H}$ tal que, relativo à

$F'_n\mathcal{H} = P_n^{(m)}(F'_n\mathcal{H}) \oplus (P_n^{(m)})^\perp(F'_n\mathcal{H})$, o operador $H_m^{(n)}$ se escreve como

$$H_m^{(n)} = (g_m(a_n)I_n^{(m)} + \hat{K}_m^{(n)}) \oplus \widetilde{H}_m^{(n)},$$

onde $I_n^{(m)} = I_{P_n^{(m)}(F'_n\mathcal{H})}$, $\hat{K}_m^{(n)} \in \mathcal{K}(P_n^{(m)}(F'_n\mathcal{H}))$ e $||\hat{K}_m^{(n)}|| < 1/n$.

Denotando $K_m^{(n)} = \hat{K}_m^{(n)} \oplus 0_{(P_n^{(m)})^\perp(F'_n\mathcal{H})}$, vemos que $K_m^{(n)} \in \mathcal{K}(F'_n\mathcal{H})$, $||K_m^{(n)}|| < 1/n$, e

$$H_m^{(n)} = (g_m(a_n)I_n^{(m)}) \oplus \widetilde{H}_m^{(n)} + K_m^{(n)}. \tag{4.4}$$

Denote por $F_n^{(m)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a projeção determinada por $P_n^{(m)}$, ou seja, $F_n^{(m)} = P_n^{(m)} \oplus 0$ relativo à $\mathcal{H} = F'_n\mathcal{H} \oplus F_n'^\perp\mathcal{H}$. Observe que $F_n^{(m)}$ é uma subprojeção de F'_n que é de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$, visto que $F_n^{(m)}$ é de codimensão finita em $F'_n\mathcal{H}$ e F'_n é de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ seja $F''_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a projeção ortogonal sobre a intersecção das imagens de $F_n^{(1)}, \ldots, F_n^{(n)}$. Naturalmente, F''_n é subprojeção de F'_n, pois todas as $F_n^{(k)}$ o são. Como cada F_n^k é de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$, e a codimensão da intersecção de espaços é menor ou igual à soma das codimensões dos mesmos espaços, temos que F''_n também será de codimensão finita em $F_n\mathcal{H}$.

Momentaneamente, fixe um $m \geq 1$ arbitrário. Para cada n com $1 \leq n < m$ (observe que este passo é ignorado caso $m = 1$), usando que F''_n é subprojeção de F'_n e a equação 4.3, podemos escrever

$$H_m^{(n)} = (g_m(a_n)I''_n \oplus g_m(a_n)I_n''^\perp) + \widetilde{K}_m^{(n)},$$

onde $I''_n = I_{F''_n\mathcal{H}}$, e $I_n''^\perp$ é o operador identidade no subespaço de $F'_n\mathcal{H}$ ortogonal a $F''_n\mathcal{H}$. Obviamente, $I_n''^\perp$ age em um subespaço de $\mathcal{H}$ que é ortogonal a $F''_k\mathcal{H}$, para todo $k \neq n$, visto que $F'_k \perp F'_n$ e F''_k é subprojeção de F'_k.

Para $n \geq m$, observe que F''_n é subprojeção de $F_n^{(m)}$ por definição. Usando que $P_n^{(m)}(F'_n\mathcal{H}) = F_n^{(m)}\mathcal{H}$ e a equação 4.4, podemos então escrever

$$H_m^{(n)} = (g_m(a_n)I''_n \oplus \hat{H}_m^{(n)}) + K_m^{(n)},$$

onde $\hat{H}_m^{(n)} = g_m(a_n)J_n \oplus \widetilde{H}_m^{(n)}$, e aqui J_n denota o operador identidade no subespaço de $F_n^{(m)}\mathcal{H}$ ortogonal a $F''_n\mathcal{H}$. Note que $\hat{H}_m^{(n)}$ age em um subespaço de $\mathcal{H}$ ortogonal a $F''_k\mathcal{H}$, para todo $k \neq n$, pela mesma razão que no caso anterior $I_n''^\perp$ foi visto ter a mesma propriedade.

Defina operadores $H''_m, K''_m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por

$$H''_m = H_m^{(0)} \oplus (\textstyle\bigoplus_{n=1}^{m-1}(g_m(a_n)I''_n \oplus g_m(a_n)I_n''^\perp)) \oplus (\textstyle\bigoplus_{n=m}^{\infty}(g_m(a_n)I''_n \oplus \hat{H}_m^{(n)})),$$

$$K'_m = 0_{F'_0\mathcal{H}} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{m-1} \widetilde{K}_m^{(n)}) \oplus (\bigoplus_{n=m}^{\infty} K_m^{(n)}).$$

Observe que $\bigoplus_{n=m}^{\infty} K_m^{(n)}$ é um operador compacto, visto que $\lim_{n\to\infty} ||K_m^{(n)}|| = 0$; como $\bigoplus_{n=1}^{m-1} \widetilde{K}_m^{(n)}$ é compacto, concluímos que o operador K''_m é compacto. Note também que $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_m^{(n)} = H''_m + K''_m$, pois

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_m^{(n)} = H_m^{(0)} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{m-1} H_m^{(n)}) \oplus (\bigoplus_{n=m}^{\infty} H_m^{(n)}) = \\
&= H_m^{(0)} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{m-1} [(g_m(a_n) I''_n \oplus g_m(a_n) I''^{\perp}_n) + \widetilde{K}_m^{(n)}]) \oplus (\bigoplus_{n=m}^{\infty} [(g_m(a_n) I''_n \oplus \hat{H}_m^{(n)}) + K_m^{(n)}]) = \\
&= H''_m + K''_m.
\end{aligned}$$

Se reordenarmos os fatores de H''_m segundo a decomposição do espaço $\mathcal{H}$ dada por $\mathcal{H} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} F''_n \mathcal{H})^{\perp} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} F''_n \mathcal{H})$, podemos escrever

$$H''_m = H'_m \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I''_n),$$

onde $H'_m \in \mathcal{B}((\bigoplus_{n=1}^{\infty} F''_n \mathcal{H})^{\perp})$ é dado por

$$H'_m = H_m^{(0)} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{m-1} g_m(a_n) I''^{\perp}_n) \oplus (\bigoplus_{n=m}^{\infty} \hat{H}_m^{(n)})$$

relativamente à decomposição de $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} F''_n \mathcal{H})^{\perp}$ implícita na notação.

Assim, em virtude da equação 4.2, denotando $K_m = K''_m + K'_m$, que é um operador compacto, temos, para todo $m \in \mathbb{N}^*$,

$$H_m = (H''_m + K''_m) + K'_m = H'_m \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I''_n) + K_m. \tag{4.5}$$

Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ seja $E_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma subprojeção de F''_n de codimensão 1 em $F''_n \mathcal{H}$. É claro então que as projeções E_n são mutuamente ortogonais, e E_n é de codimensão finita em $F_n \mathcal{H}$ para todo n, de onde $F_n - E_n$ é compacto e portanto $\pi(E_n) = \pi(F_n) = \tau(1_{X_n})$. Denote $E_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_0 = E_\infty^{\perp}$, $\mathfrak{e}_0 = \pi(E_0)$, observando que $E_\infty \mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \mathcal{H}$.

Dado um $m \in \mathbb{N}^*$ qualquer, escrevemos

$$g_m(a_n) I''_n = g_m(a_n) I_n^{\perp} \oplus g_m(a_n) I_n,$$

onde $I_n = I_{E_n \mathcal{H}}$, e $I_n^{\perp}$ é o operador identidade no subespaço de $F''_n \mathcal{H}$ ortogonal a $E_n \mathcal{H}$ (subespaço este que possui dimensão 1). Substituindo na equação 4.5 e efetuando uma nova reordenação dos termos, segundo a decomposição $\mathcal{H} = E_0 \mathcal{H} \oplus E_\infty \mathcal{H}$, escrevemos

$$H_m - K_m = \widetilde{H}_m \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n),$$

onde
$$\widetilde{H}_m = H'_m \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n^{\perp}) = H'_m \oplus (\mathrm{diag}_n(g_m(a_n))),$$
e aqui usamos que $\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n^{\perp} = \mathrm{diag}_n(g_m(a_n))$, visto que cada projeção E_n é de codimensão 1 em $F_n''\mathcal{H}$. Observe então que, em particular,
$$(H_m - K_m)E_0 = \widetilde{H}_m \oplus 0 = E_0(H_m - K_m),$$
e daí temos que
$$(\tau \circ r^*)(g_m)\mathfrak{e}_0 = \pi(H_m)\pi(E_0) = \pi(H_m - K_m)\pi(E_0) = \pi(E_0)\pi(H_m - K_m) = \\ = \mathfrak{e}_0(\tau \circ r^*)(g_m);$$
a densidade em $C_{\mathbb{R}}(A)$ da família $\{g_m\}_m$, o fato que todo elemento de $C(A)$ pode ser decomposto em suas partes real e imaginária (que são funções reais), e a linearidade e continuidade das aplicações envolvidas implicam portanto que $\mathfrak{e}_0$ comuta com $\mathrm{ran}(\tau \circ r^*)$, de onde temos que a aplicação $\tau' : C(A) \longrightarrow \mathcal{Q}(E_0\mathcal{H})$ dada por $\tau' = \alpha_{E_0} \circ \mathrm{Ad}\mathfrak{e}_0 \circ \tau \circ r^*$ é um *-homomorfismo unital. Provaremos adiante que τ' é injetora e portanto uma extensão, mas antes nos preocuparemos em estabelecer a outra parte da afirmação.

Se $\iota_0 : E_0\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ denota a inclusão, então $\iota_0\iota_0^* = E_0$, $\widetilde{H}_m = \iota_0^*(H_m - K_m)\iota_0$, e assim
$$\begin{aligned}\pi(\widetilde{H}_m) &= \pi(\iota_0^*(H_m - K_m)\iota_0) = \alpha_{E_0}(\pi(\iota\iota_0^*(H_m - K_m)\iota_0\iota^*)) = \\ &= \alpha_{E_0}(\pi(E_0(H_m - K_m)E_0)) = \alpha_{E_0}(\mathfrak{e}_0\pi(H_m - K_m)\mathfrak{e}_0) = \\ &= \alpha_{E_0}(\mathfrak{e}_0\pi(H_m)\mathfrak{e}_0) = \tau'(g_m),\end{aligned}$$
de onde podemos escrever
$$\begin{aligned}\tau \circ r^*(g_m) &= \pi(H_m) = \pi(H_m - K_m) = \pi(\widetilde{H}_m \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n)) = \\ &= \pi(\widetilde{H}_m) \hat{+} \pi(\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n) = \tau'(g_m) \hat{+} \pi(\bigoplus_{n=1}^{\infty} g_m(a_n) I_n),\end{aligned}$$
demonstrando finalmente uma das partes da afirmação.

Por linearidade, continuidade e densidade note que, em particular, ficou provado que
$$\tau \circ r^*(g) = \tau'(g) \hat{+} \pi(\bigoplus_{n=1}^{\infty} g(a_n) I_n) \quad \forall g \in C(A),$$
que é precisamente o que usamos no início do teorema para provar que i_* era isomorfismo.

Falta-nos agora apenas provar que o *-homomorfismo τ' é injetor: da decomposição $\widetilde{H}_m = H'_m \oplus (\mathrm{diag}_n(g_m(a_n)))$, podemos ver que $\sigma(\widetilde{H}_m) = \sigma(H'_m) \cup \overline{\{g_m(a_n)\}_n}$, de onde em particular $\sigma(\tau'(g_m)) = \sigma(\pi(\widetilde{H}_m)) = \sigma_e(\widetilde{H}_m)$ contém todos os pontos de acumulação da seqüência $\{g_m(a_n)\}_n$, pela caracterização do espectro essencial de um operador normal dada pelo teorema B.1.4. Dois destes pontos de acumulação são $\liminf_n g_m(a_n)$ e $\limsup_n g_m(a_n)$, logo se denotarmos por $r(\tau'(g_m))$ o raio espectral de $\tau'(g_m)$, temos

$$|\liminf_n g_m(a_n)| \leq r(\tau'(g_m)) \leq \|\tau'(g_m)\|,$$

$$|\limsup_n g_m(a_n)| \leq r(\tau'(g_m)) \leq \|\tau'(g_m)\|,$$

e portanto

$$\limsup_n |g_m(a_n)| = \max\{|\liminf_n g_m(a_n)|, |\limsup_n g_m(a_n)|\} \leq \|\tau'(g_m)\|,$$

de onde por densidade e continuidade concluímos que

$$\limsup_n |g(a_n)| \leq \|\tau'(g)\| \quad \forall g \in C_{\mathbb{R}}(A).$$

Tome arbitrariamente $g \in \ker(\tau')$; como então também temos $\mathrm{Re(g)}, \mathrm{Im(g)} \in \ker(\tau')$, sem perda de generalidade podemos supor que $g \in C_{\mathbb{R}}(A)$. Pelo observado acima, $\limsup_n |g(a_n)| \leq \|\tau'(g)\| = 0 \leq \liminf_n |g(a_n)|$, de onde $\lim_{n\to\infty}|g(a_n)| = 0$, e portanto $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = 0$.

Defina $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f = \sum_{n=1}^{\infty} g(a_n) 1_{X_n}$. Afirmamos que f é contínua: de fato, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, pelo que acabamos de ver podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq n_0$ implica em $|g(a_n)| < \varepsilon$. A função $f_0 = \sum_{n=1}^{n_0} g(a_n) 1_{X_n}$ é combinação linear finita de funções contínuas, e portanto contínua. É fácil ver que $||f - f_0|| \leq \varepsilon$, logo f é limite uniforme de funções contínuas, sendo portanto contínua, como afirmado.

Assim, também será contínua a função $h := (g \circ r) - f$. Se $x \in X \backslash A$, então $x \in X_k$ para algum k, e portanto

$$h(x) = (g \circ r)(x) - f(x) = g(a_k) - g(a_k) = 0,$$

provando desta forma que h se anula fora de A; por continuidade, h também se anula em ∂A. Ora, mas f se anula em ∂A por definição, logo temos que $g \circ r = h + f$ se anula em ∂A. Em particular, $g(a_n) = (g \circ r)(a_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Segue-se daí que

$$\tau \circ r^*(g) = \tau'(g) \hat{+} \pi(\textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} g(a_n) I_n) = 0 \hat{+} 0 = 0,$$

e da injetividade de $\tau \circ r^*$ temos de imediato $g = 0$, o que estabelece a injetividade de τ', e o teorema está finalmente demonstrado.

■

A primeira aplicação do teorema 4.2.4 é na prova do seguinte lema, que será necessário para a demonstração do teorema 4.2.6. Neste lema, usaremos em particular o conceito de espectro de C*-álgebras e o teorema de Gelfand para C*-álgebras comutativas, algo presente em qualquer literatura clássica sobre C*-álgebras; ver por exemplo [21] teorema 3.3.6., [18] teorema 1.1.7, [2] teorema 1.1.1., [9] teorema I.3.1.

Lema 4.2.5. *Sejam X, Y espaços métricos compactos, $p : X \longrightarrow Y$ contínua e sobrejetora, $B \subseteq Y$ fechado que contém todos os pontos com pré-imagem múltipla em X por p, $A = p^{-1}(B)$, $p' : A \longrightarrow B$ a restrição de p, e $i : A \longrightarrow X$, $j : B \longrightarrow Y$ as inclusões. Então,* $\ker(p_*) \subseteq i_*(\ker(p'_*))$.

Demonstração. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] & Y \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "p'"] & B \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Seja $[\tau] \in \ker(p_*)$ arbitrário. A sobrejetividade de p garante então que $\tau : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é tal que $\tau \circ p^* : C(Y) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é uma extensão trivial, e portanto existe $\psi : C(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor satisfazendo $\tau \circ p^* = \pi \circ \psi$. Seja $\mathscr{E}$ a medida espectral associada à *-representação ψ, e $\widetilde{\psi} : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a extensão de ψ para as funções limitadas e Borel-mensuráveis, como visto na seção A.1.

Note inicialmente que se $U \subseteq X$ é tal que $U \cap A = \emptyset$, então $P(U) \cap B = \emptyset$; de fato, se tivéssemos $y \in p(B) \cap B$, então por um lado $y \in B$, o que implica em $p^{-1}(y) \subseteq A$ e por outro lado $y \in p(U)$, ou seja, $y = p(x)$ para algum $x \in U$, de onde $x \in p^{-1}(y) \subseteq A$, e portanto $x \in U \cap A = \emptyset$, gerando um absurdo. Note que em particular isto prova que se $U \subseteq X$ é tal que $U \cap A = \emptyset$, então $p^{-1}(p(U)) = U$.

Tome $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma base para a topologia de $X \backslash A$ induzida da topologia de X, tal que $C_n := \overline{U_n}$ é disjunto de A para todo n, como segue: visto que $X \backslash A$ é separável, para cada ponto de um subconjunto denso e enumerável de $X \backslash A$ considere um sistema fundamental de vizinhanças para este ponto, formado por bolas centradas neste ponto e com raios racionais pequenos o suficiente para que o fecho destas bolas não intersecte A, o que é sempre possível visto que A é fechado e portanto a distância do ponto até

A é positiva. A reunião de tais sistemas fundamentais de vizinhanças é claramente uma base de $X \backslash A$ como desejado. Em particular, os conjuntos C_n são fechados em X, e portanto compactos. Ademais, o que provamos acima mostra que $p(C_n) \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ o conjunto $p(C_n)$ é compacto e portanto mensurável, logo podemos definir $\mathfrak{e}_\mathfrak{n} := \pi(\mathscr{E}(p(C_n))) = \pi(\widetilde{\psi}(1_{p(C_n)}))$, que é uma projeção em $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, e note que todas as projeções $\mathfrak{e}_n$ comutam entre si por definição. Seja $\mathfrak{M} = C^*(\mathrm{ran}(\tau), \{\mathfrak{e}_n\}_n)$, que é uma sub-C*-álgebra com unidade de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$.

Observe que $\partial p(C_n) \subseteq p(C_n)$, visto que $p(C_n)$ é compacto e portanto fechado, de onde concluímos que $\partial p(C_n) \cap B \subseteq p(C_n) \cap B = \emptyset$. Em outras palavras, $\partial p(C_n)$ é disjunto do conjunto dos pontos em Y com pré-imagem múltipla em X por p. Assim, pelo lema 4.1.7, todas as projeções $\mathfrak{e}_n$ comutam com $\mathrm{ran}(\tau)$, de onde podemos concluir de imediato que $\mathfrak{M}$ é uma C*-álgebra comutativa.

Em virtude do teorema de Gelfand, a transformada de Gelfand $\Gamma : \mathfrak{M} \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{M}})$ é um *-isomorfismo. Como $\mathrm{ran}(\tau) \subseteq \mathfrak{M}$, vemos que o *-homomorfismo dado pela composição $\Gamma \circ \tau : C(X) \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{M}})$ está bem definido e é injetor, sendo portanto dual a uma sobrejeção contínua $u : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow X$, ou seja, $\Gamma \circ \tau = u^*$. Logo, para todo $f \in C(X)$,

$$\widehat{\tau(f)} = \Gamma \circ \tau(f) = u^*(f) = f \circ u,$$

e portanto para todo $\varphi \in \widehat{\mathfrak{M}}$ tem-se

$$\varphi(\tau(f)) = \widehat{\tau(f)}(\varphi) = (f \circ u)(\varphi);$$

em particular, para todo $g \in C(Y)$, temos $p^*(g) = g \circ p \in C(Y)$, e assim

$$\varphi(\tau \circ p^*(g)) = \varphi(\tau(g \circ p)) = \widehat{\tau(g \circ p)}(\varphi) = (g \circ p \circ u)(\varphi).$$

Ademais, note que se $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{\mathfrak{M}}$ são tais que $u(\varphi_1) = u(\varphi_2)$, então $\varphi_1|_{\mathrm{ran}(\tau)} = \varphi_2|_{\mathrm{ran}(\tau)}$ pois, para $f \in C(X)$ qualquer temos

$$\varphi_1(\tau(f)) = f(u(\varphi_1)) = f(u(\varphi_2)) = \varphi_2(\tau(f)).$$

Afirmamos que se $\varphi \in \widehat{\mathfrak{M}}$ é tal que $u(\varphi) \notin C_n$, para algum n, então $\varphi(\mathfrak{e}_n) = 0$. De fato, se $u(\varphi) \notin C_n$, então $p(u(\varphi)) \notin p(C_n)$, visto que cada ponto de $p(C_n)$ possui apenas uma pré-imagem, que está portanto necessariamente em C_n. Pelo lema de Urysohn, tome então $g \in C(Y)$ com $g(p(u(\varphi))) = 1$ e $g|_{p(C_n)=0}$. Obviamente, $g \cdot 1_{p(C_n)} = 0$; assim,

$$\tau(g \circ p)\mathfrak{e}_n = \pi(\widetilde{\psi}(g))\pi(\widetilde{\psi}(1_{p(C_n)})) = \pi(\widetilde{\psi}(g \cdot 1_{p(C_n)})) = 0,$$

e daí

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\tau(g \circ p)\mathfrak{e}_n) = \varphi(\tau(g \circ p))\varphi(\mathfrak{e}_n) = (g \circ p \circ u)(\varphi) \cdot \varphi(\mathfrak{e}_n) = 1 \cdot \varphi(\mathfrak{e}_n) = \varphi(\mathfrak{e}_n),$$

o que verifica o afirmado.

Queremos provar agora que $u' : u^{-1}(A) \longrightarrow A$ dada pela restrição de u é um homeomorfismo: claramente u' é contínua. Como $u^{-1}(A)$ e compacto e A é Hausdorff, para provarmos que u' é homeomorfismo basta verificarmos que u' é bijetora. A função u' é sobrejetora por definição, falta apenas ver a injetividade. Suponha que $\varphi_1, \varphi_2 \in u^{-1}(A)$ são tais que $u'(\varphi_1) = u'(\varphi_2)$. Então, em particular $u(\varphi_1) = u(\varphi_2)$, e daí vem que $\varphi_1|_{\mathrm{ran}(\tau)} = \varphi_2|_{\mathrm{ran}(\tau)}$, conforme mostrado anteriormente. Além disso, $u'(\varphi_1) = u'(\varphi_2) \in A$, e como $A \cap C_n = \emptyset$ para todo n, concluímos do que foi visto acima que $\varphi_1(\mathfrak{e}_n) = \varphi_2(\mathfrak{e}_n) = 0$, para todo n. Provamos deste modo que φ_1 e φ_2 coincidem nos geradores da C*-álgebra $\mathfrak{M}$, o que implica então em $\varphi_1 = \varphi_2$, estabelecendo a injetividade de u', como desejado. Segue-se que u' é homeomorfismo.

Afirmamos agora que $p(U_n)$ é aberto em Y, para todo n: como X é compacto e Y é Hausdorff, a continuidade de p implica em p ser uma aplicação fechada; segue-se disto e da sobrejetividade de p que a topologia em Y é a topologia quociente da aplicação p (para a prova deste fato ver por exemplo [23], teorema 9.2). Logo, $p(U_n)$ é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(p(U_n))$ é aberto em X. Ora, mas $U_n \cap A = \emptyset$, e já vimos que neste caso $p^{-1}(p(U_n)) = U_n$; o conjunto U_n é aberto em $X \backslash A$, e portanto aberto em X, visto que $X \backslash A$ é aberto em X. Fica assim provado que $p(U_n)$ é aberto em Y, para todo n, como queríamos.

Vamos provar que, se $\varphi \in \widehat{\mathfrak{M}}$ é tal que $u(\varphi) \in U_n$, para algum n, então $\varphi(\mathfrak{e}_n) = 1$: naturalmente, $u(\varphi) \in U_n$ implica em $p(u(\varphi)) \in p(U_n)$. Como acabamos de ver, o conjunto $p(U_n)$ é aberto em Y, logo $Y \backslash p(U_n)$ é fechado em Y; pelo lema de Urysohn, existe então uma função $g \in C(Y)$ tal que $g(p(u(\varphi))) = 0$ e $g|_{Y \backslash p(U_n)} = 1$. Observando que $p(U_n) \subseteq p(C_n)$, é fácil verificar que $1_{Y \backslash p(C_n)} = g \cdot 1_{Y \backslash p(C_n)}$. Agora,

$$1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} - \mathfrak{e}_n = \pi(\widetilde{\psi}(1 - 1_{p(C_n)})) = \pi(\widetilde{\psi}(1_{Y \backslash p(C_n)})),$$

logo

$$\begin{aligned}
\varphi(1 - \mathfrak{e}_n) &= \varphi(\pi(\widetilde{\psi}(1_{Y \backslash p(C_n)}))) = \varphi(\pi(\widetilde{\psi}(g \cdot 1_{Y \backslash p(C_n)}))) = \\
&= \varphi(\pi(\widetilde{\psi}(g)))\varphi(\pi(\widetilde{\psi}(1_{Y \backslash p(C_n)}))) = \varphi(\tau(g \circ p))\varphi(1 - \mathfrak{e}_n) = \\
&= g(p(u(\varphi))) \cdot \varphi(1 - \mathfrak{e}_n) = 0 \cdot \varphi(1 - \mathfrak{e}_n) = 0,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$1 = \varphi(1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}) = \varphi(\mathfrak{e}_n + (1 - \mathfrak{e}_n)) = \varphi(\mathfrak{e}_n) + \varphi(1 - \mathfrak{e}_n) = \varphi(\mathfrak{e}_n) + 0 = \varphi(\mathfrak{e}_n),$$

como queríamos provar.

O próximo passo é provar que $\widehat{\mathfrak{M}}\backslash u^{-1}(A)$ é totalmente desconexo. Para tanto, considere o espaço quociente $M = \widehat{\mathfrak{M}}/u^{-1}(A)$, que é compacto pois é imagem contínua da aplicação quociente $q : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow M$. Observe que basta provarmos que M é totalmente desconexo, visto que o espaço $\widehat{\mathfrak{M}}\backslash u^{-1}(A)$ é homeomorfo a um subespaço de M, e subespaços de espaços totalmente desconexos são totalmente desconexos.

Denote por $a \in M$ o ponto $a = q(u^{-1}(A))$. Para cada n, se $\varphi_1, \varphi_2 \in u^{-1}(A)$, então já vimos que $\widehat{\mathfrak{e}_n}(\varphi_1) = 0 = \widehat{\mathfrak{e}_n}(\varphi_2)$; como $\widehat{\mathfrak{e}_n} \in C(\widehat{\mathfrak{M}})$, ela induz portanto uma função no quociente, $f_n \in C(M)$, dada por $f_n([\varphi]) = \widehat{\mathfrak{e}_n}(\varphi)$ para todo $[\varphi] \in M$. Note que, por definição, $f_n(a) = 0$.

Afirmamos que $C(M) = C^*(1, \{f_n\}_n)$; de fato, por Stone-Weierstrass é suficiente provar que $C^*(1, \{f_n\}_n)$ separa pontos de M. Para tanto, sejam $a_1, a_2 \in M$ distintos tomados arbitrariamente. Temos dois casos possíveis:

No primeiro caso, $a_1, a_2 \in M\backslash\{a\}$; então, estas classes possuem apenas um elemento cada, que denotaremos respectivamente por φ_1 e φ_2. Aqui, temos duas possibilidades: caso $u(\varphi_1) \neq u(\varphi_2)$, tome um C_k tal que $u(\varphi_1) \in U_k$ e $u(\varphi_2) \notin C_k$ (que certamente existe visto que $u(\varphi_1), u(\varphi_2) \in X\backslash A$, $d(u(\varphi_1), u(\varphi_2)) > 0$ e $\{U_n\}_n$ é uma base de $X\backslash A$). Então, para este k correspondente, $\widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi_1) = 1$, $\widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi_2) = 0$, e portanto $f_k(a_1) = 1 \neq 0 = f_k(a_2)$, de onde f_k separa os pontos a_1, a_2. Agora, se tivéssemos $u(\varphi_1) = u(\varphi_2)$, então sabemos que φ_1 e φ_2 coincidem em $\mathrm{ran}(\tau)$; como $\mathrm{ran}(\tau)$, os $\mathfrak{e}_n$ geram $\widehat{\mathfrak{M}}$, e $\varphi_1 \neq \varphi_2$, necessariamente existe um $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi_1) \neq \widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi_2)$, e aqui o f_k correspondente separa então os pontos a_1 e a_2.

No segundo caso, $a_1 \neq a$, $a_2 = a$; então, a classe a_1 possui apenas um elemento, que denotaremos por φ_1, e observe que $\varphi_1 \in \widehat{\mathfrak{M}}\backslash u^{-1}(A)$, de onde temos que $u(\varphi_1) \in X\backslash A$. Tome portanto $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $u(\varphi_1) \in U_k$. Vimos anteriormente que neste caso temos $\widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi_1) = 1$, e como $C_k \cap A = \emptyset$, sabemos também que $\widehat{\mathfrak{e}_k}(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in u^{-1}(A)$. Segue-se daí que $f_k(a_1) = 1$ e $f_k(a_2) = f_k(a) = 0$, provando que f_k separa os pontos a_1, a_2.

Fica provado deste modo que $C(M) = C^*(1, \{f_n\}_n)$, como afirmado; ora, mas note que $C(M)$ é gerado por uma família de idempotentes, logo M é totalmente desconexo, pela proposição E.2.2, de onde temos pelo que foi observado anteriormente que o espaço $\widehat{\mathfrak{M}}\backslash u^{-1}(A)$ é totalmente desconexo.

Considere agora a C*-álgebra $\mathfrak{N} = C^*(\mathrm{ran}(\tau \circ p^*), \{\mathfrak{e}_n\}_n)$. Observe que $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$

e que $1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})} \in \mathfrak{N}$, logo $\mathfrak{N}$ é uma sub-C*-álgebra comutativa com unidade de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Denote por $\Gamma' : \mathfrak{N} \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{N}})$ o *-isomorfismo de Gelfand, e seja $\eta : C(\widehat{\mathfrak{N}}) \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{M}})$ o *-homomorfismo dado por $\eta = \Gamma \circ (\Gamma')^{-1}$.Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{ran}(\tau) \arrow[r, hook] & \mathfrak{M} \arrow[r, "\Gamma"] & C(\widehat{\mathfrak{M}}) \\
C(Y) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "\tau\circ p^*"] & \mathrm{ran}(\tau \circ p^*) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathfrak{N} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Gamma'"] & C(\widehat{\mathfrak{N}}) \arrow[u, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\Gamma \circ \tau = u^*$, e similarmente a injetividade de η e de $\Gamma' \circ \tau \circ p^*$ implica em haver sobrejeções contínuas $\widetilde{p} : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ e $v : \widehat{\mathfrak{N}} \longrightarrow Y$ tais que $\eta = \widetilde{p}^*$, $\Gamma' \circ \tau \circ p^* = v^*$. A comutatividade do diagrama implica então em $(p \circ u)^* = u^* \circ p^* = \widetilde{p}^* \circ v^* = (v \circ \widetilde{p})^*$, de onde concluímos que $p \circ u = v \circ \widetilde{p}$.

Similarmente ao que vimos com a aplicação u, prova-se na mesma linha de raciocínio que a aplicação $v' : v^{-1}(B) \longrightarrow B$ dada pela restrição de v é um homeomorfismo, e que o espaço $\widehat{\mathfrak{N}} \backslash v^{-1}(B)$ é totalmente desconexo.

Podemos então definir aplicações $r : A \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}$ e $s : B \longrightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ por $r = u^{-1} \circ i$, $s = v^{-1} \circ j$, já que u^{-1} está bem definida em $\mathrm{ran}(i) = A \subseteq X$, e também v^{-1} está bem definida em $\mathrm{ran}(j) = B \subseteq Y$; estas aplicações são claramente contínuas.

Observe que, se denotarmos por $i' : u^{-1}(A) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}$ a inclusão, temos que $(u^{-1} \circ i)(x) = ((i') \circ (u')^{-1})(x)$ para todo $x \in A$, de onde podemos alternativamente definir a função r como $r = (i') \circ (u')^{-1}$. Agora, a aplicação $(u')_*$ é um isomorfirmo, visto que u' é um homeomorfismo, e além disso também $(i')_*$ é um isomorfismo, pelo teorema 4.2.4; vemos daí que $r_* : \mathrm{Ext}(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(\widehat{\mathfrak{M}})$ é um isomorfismo. Analogamente prova-se que $s_* : \mathrm{Ext}(B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(\widehat{\mathfrak{N}})$ é um isomorfismo.

Obtivemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathfrak{M}} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d, "u"] & \widehat{\mathfrak{N}} \arrow[d, "v"] & \\
 & X \arrow[r, "p"] & Y & \\
A \arrow[uur, "r"] \arrow[ur, "i"] \arrow[rrr, "p'"] & & & B \arrow[uul, "s"'] \arrow[ul, "j"']
\end{tikzcd}$$

Observe que $\Gamma^{-1} : C(\widehat{\mathfrak{M}}) \longrightarrow \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é em particular uma extensão; ainda, como $\Gamma \circ \tau = u^*$, temos $\tau = \Gamma^{-1} \circ u^*$; denotando $\widetilde{\tau} = \Gamma^{-1}$, vemos portanto que

$$[\tau] = u_*[\widetilde{\tau}].$$

Agora, $[\widetilde{\tau}] \in \mathrm{Ext}(\widehat{\mathfrak{M}})$, e como r^* é isomorfismo, existe $[\tau'] \in \mathrm{Ext}(A)$ tal que $r_*[\tau'] = [\widetilde{\tau}]$. Observe então que

$$[\tau] = u_*[\widetilde{\tau}] = u_* \circ r_*[\tau'] = (u \circ r)_*[\tau'] = i_*[\tau'].$$

Provaremos agora que $[\tau'] \in \ker(p'_*)$: de fato, note do diagrama acima que

$$\begin{aligned} s \circ p' &= v^{-1} \circ j \circ p' = v^{-1} \circ j \circ u \circ r = v^{-1} \circ v \circ \widetilde{p} \circ r = \\ &= \widetilde{p} \circ r = \widetilde{p} \circ u^{-1} \circ i = v^{-1} \circ p \circ i, \end{aligned}$$

e assim, visto que s_* é um isomorfismo, e $p_*[\tau] = 0$,

$$\begin{aligned} p'_*[\tau'] &= s_*^{-1} \circ s_* \circ p'_*[\tau'] = s_*^{-1} \circ (s \circ p')_*[\tau'] = s_*^{-1} \circ (v^{-1} \circ p \circ i)_*[\tau'] = \\ &= s_*^{-1} \circ (v^{-1})_* \circ p_* \circ i_*[\tau'] = s_*^{-1} \circ (v^{-1})_* \circ p_*[\tau] = s_*^{-1} \circ (v^{-1})_* \circ p_*[\tau] = \\ &= s_*^{-1} \circ (v^{-1})_*(0) = 0, \end{aligned}$$

de onde $[\tau'] \in \ker(p'_*)$, como afirmado.

Lembrando que $[\tau] \in \ker(p_*)$ havia sido tomado arbitrariamente, verificamos que $\ker(p_*) \subseteq i_*(\ker(p'_*))$ como desejado, e o lema está provado.

■

Note que, em particular, o lema 4.2.5 prova que $\ker(p_*) \subseteq \mathrm{ran}(i_*)$. Estamos finalmente em condições de provar os resultados principais da seção. Em particular, a demonstração do teorema 4.2.6 é agora imediata.

Teorema 4.2.6. *Se $A \subseteq X$ é fechado, então a seqüência*

$$\mathrm{Ext}(A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}(X) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Ext}(X/A)$$

é exata, onde $i : A \longrightarrow X$ é a inclusão e $p : X \longrightarrow X/A$ é a aplicação quociente.

Demonstração. Denotando $B = p(A)$, sabemos do lema 4.2.5 que $\ker(p_*) \subseteq i_*(\ker(p'_*)) \subseteq \mathrm{ran}(i_*)$, logo basta provarmos que $\mathrm{ran}(i_*) \subseteq \ker(p_*)$.

Naturalmente, a aplicação $p \circ i : A \longrightarrow X/A$ é uma função constante, logo pela observação 3.2.8 vemos que $p_* \circ i_* = (p \circ i)_* = 0$, o homomorfismo nulo. Daí segue de imediato que $\mathrm{ran}(i_*) \subseteq \ker(p_*)$, como queríamos provar.

■

A seqüência exata do próximo teorema é uma seqüência rudimentar de Mayer-Vietoris, introduzida por Brown, Douglas e Fillmore em [6]. Tempos mais tarde, foi verificado que esta construção dá de fato origem a uma seqüência exata longa natural de Mayer-Vietoris para Ext utilizando-se suspensões dos espaços métricos compactos; nós não discutiremos aqui esta teoria, o leitor interessado pode encontrar os detalhes em [9] teorema IX.10.5, ou em [7] teorema 2.21.

Teorema 4.2.7. *Sejam $B, C \subseteq X$ fechados com $X = B \cup C$, e $i_1 : B \cap C \longrightarrow B$, $i_2 : B \cap C \longrightarrow C$, $j_1 : B \longrightarrow X$, $j_2 : C \longrightarrow X$ as inclusões. Considere os homomorfismos*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Ext}(B \cap C) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) \\ a &\longmapsto ((i_1)_*(a), (i_2)_*(-a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ext}(X) \\ (b, c) &\longmapsto (j_1)_*(b) + (j_2)_*(c). \end{aligned}$$

Então, a seqüência

$$\mathrm{Ext}(B \cap C) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(X)$$

é exata.

Demonstração. Denote $A = B \cap C$. Temos um diagrama comutativo de inclusões,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j_1"] & X \\ A \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "i_2"] & C \arrow[u, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

Claramente temos $\mathrm{ran}(\alpha) \subseteq \ker(\beta)$, pois dado $a \in \mathrm{Ext}(A)$ arbitrário, em virtude do diagrama acima,

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(a)) = \beta((i_1)_*(a), (i_2)_*(-a)) &= (j_1)_* \circ (i_1)_*(a) + (j_2)_* \circ (i_2)_*(-a) = \\ &= (j_1 \circ i_1)_*(a) + (j_2 \circ i_2)_*(-a) = (j_1 \circ i_1)_*(a) + (j_1 \circ i_1)_*(-a) = \\ &= (j_1 \circ i_1)_*(a - a) = (j_1 \circ i_1)_*(0) = 0. \end{aligned}$$

Falta-nos apenas provar que $\ker(\beta) \subseteq \mathrm{ran}(\alpha)$. Tome arbitrariamente $(b, c) \in \ker \beta$. Então, se denotarmos por $p : B \vee C \longrightarrow X$ a aplicação de identificação canônica, que é contínua e neste caso sobrejetora, temos da observação 4.1.6 que

$$0 = \beta(b, c) = p_*(b \vee c).$$

Em outras palavras, $b \vee c \in \operatorname{Ext}(B \vee C)$ é tal que $b \vee c \in \ker(p_*)$.

Denote por $p' : A \vee A \longrightarrow X$ a restrição de p. Observe que $A = B \cap C \subseteq X$ é um fechado que contém todos os pontos de X com pré-imagem múltipla em $B \vee C$ por p, e $A \vee A = p^{-1}(A)$. Se $i : A \vee A \longrightarrow B \vee C$ é a inclusão, então do lema 4.2.5 temos que $\ker(p_*) \subseteq i_*(\ker(p'_*))$. Assim, existe um $d \in \operatorname{Ext}(A \vee A)$ tal que $p'_*(d) = 0$ e $i_*(d) = b \vee c$. Agora, do isomorfismo $\lambda : \operatorname{Ext}(A) \times \operatorname{Ext}(A) \longrightarrow \operatorname{Ext}(A \vee A)$ dado pelo teorema 3.1.5, vemos que existe $(a_1, a_2) \in \operatorname{Ext}(A) \times \operatorname{Ext}(A)$ tal que $d = a_1 \vee a$.

Para evitar confusões no que segue, denotaremos o primeiro A de $A \vee A$ por A_1, e o segundo por A_2. Então, $a_1 \in \operatorname{Ext}(A_1)$, $a_2 \in \operatorname{Ext}(A_2)$. Sejam $\tau_1 \in \operatorname{ext}(A_1)$, $\tau_2 \in \operatorname{ext}(A_2)$ extensões tais que $a_1 = [\tau_1]$, $a_2 = [\tau_2]$. Dado $f \in C(A)$ arbitrário,

$$(\tau_1 \vee \tau_2) \circ (p')^*(f) = (\tau_1 \vee \tau_2)(f \circ p') = \tau_1((f \circ p')|_{A_1}) \hat{+} \tau_2((f \circ p')|_{A_2}) = \tau_1(f) \hat{+} \tau_2(f),$$

logo $(\tau_1 \vee \tau_2) \circ (p')^* = \tau_1 \hat{+} \tau_2$, e daí

$$0 = p'_*(d) = p'_*(a_1 \vee a_2) = [(\tau_1 \vee \tau_2) \circ (p')^*] = [\tau_1 \hat{+} \tau_2] = [\tau_1] + [\tau_2] = a_1 + a_2,$$

de onde podemos concluir que $a_2 = -a_1$. Ademais, para $f \in C(B \vee C)$ arbitrário,

$$\begin{aligned}(\tau_1 \vee \tau_2) \circ i^*(f) &= \tau_1((f \circ i)|_{A_1}) \hat{+} \tau_2((f \circ i)|_{A_2}) = \tau_1((f \circ i_1)|_{A_1}) \hat{+} \tau_2((f \circ i_2)|_{A_2}) = \\ &= (\tau_1 \circ i_1^*)(f|_{A_1}) \hat{+} (\tau_2 \circ i_2^*)(f|_{A_2}) = ((\tau_1 \circ i_1^*) \vee (\tau_2 \circ i_2^*))(f),\end{aligned}$$

provando que $(\tau_1 \vee \tau_2) \circ i^* = (\tau_1 \circ i_1^*) \vee (\tau_2 \circ i_2^*)$, e daí

$$i_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_*(a_1) \vee (i_2)_*(a_2).$$

Se considerarmos agora o isomorfismo $\lambda : \operatorname{Ext}(B) \times \operatorname{Ext}(C) \longrightarrow \operatorname{Ext}(B \vee C)$ dado pelo teorema 3.1.5, temos então

$$\lambda(b, c) = b \vee c = i_*(d) = i_*(a_1 \vee a_2) = (i_1)_*(a_1) \vee (i_2)_*(a_2) = \lambda((i_1)_*(a_1), (i_2)_*(a_2)),$$

e como λ é isomorfismo concluímos que $(b, c) = ((i_1)_*(a_1), (i_2)_*(a_2))$. Daí,

$$\alpha(a_1) = ((i_1)_*(a_1), (i_2)_*(-a_1)) = ((i_1)_*(a_1), (i_2)_*(a_2)) = (b, c),$$

de onde $(b, c) \in \operatorname{ran}(\alpha)$, provando que $\ker(\beta) \subseteq \operatorname{ran}(\alpha)$, como desejado. Segue-se que a seqüência do enunciado é exata, o que completa a demonstração.

■

Gostaríamos de concluir esta seção com mais dois resultados sobre o homomorfismo β, introduzido na observação 4.1.6 e mencionado no teorema anterior. Aqui, veremos condições que garantem a sobrejetividade de β, em casos particulares que nos serão úteis no capítulo 5. Para o que segue, lembremos que um subespaço A de um espaço topológico X é dito ser um *retrato* de X quando existe uma função contínua e sobrejetora $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A = \mathrm{id}_A$; uma tal função é chamada de uma *retração* de X.

Proposição 4.2.8. *Sejam X um espaço métrico compacto, e $B, C \subseteq X$ fechados tais que $X = B \cup C$ e $B \cap C$ é um retrato de C. Então, o homomorfismo $\beta : \operatorname{Ext}(B) \times \operatorname{Ext}(C) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Seja $r_0 : C \longrightarrow B \cap C$ uma retração de C. Defina $r : X \longrightarrow B$ por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in B \\ r_0(x) & \text{se } x \in C. \end{cases}$$

Claramente, a função r está bem definida e é contínua. Sejam $i : B \longrightarrow X$, $j : C \longrightarrow X$ as inclusões, e $q : X \longrightarrow X/C$ a aplicação quociente. É fácil ver que $q \circ i \circ r = q$; além disso, sabemos do teorema 4.2.6 que $\ker(q_*) = \operatorname{ran}(j_*)$.

Tome $a \in \operatorname{Ext}(X)$ arbitrário. Pelo observado acima temos $q_* \circ i_* \circ r_*(a) = q_*(a)$, e portanto $q_*(a - i_* \circ r_*(a)) = 0$, ou seja, $a - i_* \circ r_*(a) \in \ker(q_*) = \operatorname{ran}(j_*)$; logo, existe $c \in \operatorname{Ext}(C)$ tal que $j_*(c) = a - i_* \circ r_*(a)$. Então, $(r_*(a), c) \in \operatorname{Ext}(B) \times \operatorname{Ext}(C)$ é tal que

$$\beta(r_*(a), c) = i_*(r_*(a)) + j_*(c) = i_*(r_*(a)) + a - i_* \circ r_*(a) = a,$$

de onde temos que β é sobrejetora, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 4.2.9. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $L \subseteq \mathbb{C}$ uma reta dividindo $\mathbb{C}$ em dois semi-planos fechados $\mathbb{C}^-$ e $\mathbb{C}^+$, $X^- = X \cap \mathbb{C}^-$, $X^+ = X \cap \mathbb{C}^+$, e $J \subseteq L$ um segmento de reta compacto que contenha a projeção ortogonal de X^+ sobre L. Então, o homomorfismo $\beta : \operatorname{Ext}(X^- \cup J) \times \operatorname{Ext}(X^+ \cup J) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X \cup J)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Temos uma retração $r^+ : \mathbb{C}^+ \longrightarrow L$ dada pela projeção ortogonal. Note que $r^+(X^+ \cup J) = J$; portanto, restringindo o domínio e o contra-domínio de r^+ obtemos uma retração $r : X^+ \cup J \longrightarrow J$.

Observe que X^-, X^+ e J são subconjuntos fechados de $X \cup J$. De fato, estes conjuntos são fechados em $\mathbb{C}$, e $X^- = X^- \cap (X \cup J)$, $X^+ = X^+ \cap (X \cup J)$, $J = J \cap (X \cup J)$. Naturalmente, $X \cup J = (X^- \cup J) \cup (X^+ \cup J)$, e $(X^- \cup J) \cap (X^+ \cup J) = J$; denotando $B = (X^- \cup J)$, $C = (X^+ \cup J)$, em outras palavras temos que $X \cup J = B \cup C$, e $B \cap C = J$ é um retrato de C. Segue-se portanto da proposição 4.2.8 que o homomorfismo $\beta : \mathrm{Ext}(X^- \cup J) \times \mathrm{Ext}(X^+ \cup J) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X \cup J)$ é sobrejetor, provando o resultado.

■

4.3 Ext e Limites Projetivos

Nesta seção nós discutiremos como o funtor Ext se comporta com relação a limites projetivos de espaços métricos compactos e grupos abelianos. Começaremos com uma breve exposição do conceito de limites projetivos. Poderíamos ter adotado uma postura mais geral e abstrata nesta exposição, mas optamos por uma abordagem mais direta, baseada em [9].

Um *sistema projetivo* de espaços métricos compactos consiste em uma seqüência $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de espaços métricos compactos, todos não vazios, e $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ uma seqüência de funções contínuas, $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$; denotaremos tal sistema projetivo por (X_k, p_k). O *limite projetivo* de (X_k, p_k) é o subespaço do espaço $\prod_{k \in \mathbb{N}^*} X_k$ (com a topologia produto), formado pelas seqüências $(x_k)_k$ que satisfazem a relação $p_k(x_{k+1}) = x_k$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Denotamos o limite projetivo de (X_k, p_k) por $\varprojlim(X_k, p_k)$, ou simplesmente por $\varprojlim X_k$, quando não houver possibilidade de confusão sobre as funções p_k.

Note que existem aplicações $q_n : \varprojlim(X_k, p_k) \longrightarrow X_n$ dadas pelas funções coordenadas, que são naturalmente contínuas, e elas satisfazem

$$p_n \circ q_{n+1} = q_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Observe que as funções coordenadas q_n não são necessariamente sobrejetoras, pois a priori nada nos garante que qualquer $x \in X_n$ faça parte de alguma seqüência que se constitui em um elemento de $\varprojlim(X_k, p_k)$; agora, é fácil ver que se todas as p_k são sobrejetoras, então também todas as q_n serão sobrejetoras.

O espaço $\varprojlim(X_k, p_k)$ satisfaz a propriedade universal que, se Y é um outro espaço métrico compacto e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ é uma seqüência de funções contínuas, $f_k : Y \longrightarrow X_k$, tais que $p_n \circ f_{n+1} = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então existe uma única aplicação

$$f : Y \longrightarrow \varprojlim (X_k, p_k)$$

tal que $q_n \circ f = f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$; em outras palavras, podemos dizer que uma tal seqüência de aplicações $\{f_k\}_k$ *se fatora* pelo limite projetivo via f, isto é, o seguinte diagrama comuta para todo $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "f"'] & X_n \\ Z \arrow[ur, "q_n"'] & \end{tikzcd}$$

Todo limite projetivo de uma seqüência de espaços métricos compactos não vazios é um espaço métrico compacto não vazio; para uma prova deste fato, ver por exemplo [23], teorema 29.11.

Exemplo 4.3.1. *Suponha que o sistema projetivo (X_k, p_k) é tal que $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$, e $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ é a inclusão, para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Neste caso, note que, se $(x_k)_k \in \varprojlim(X_k, p_k)$, então $x_k = p_k(x_{k+1}) = x_{k+1}$ para todo k, visto que as p_k são inclusões. Isto implica portanto em*

$$\varprojlim(X_k, p_k) = \{(x, x, x, \ldots) : x \in \textstyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} X_k\},$$

de onde vemos que, neste caso, $\varprojlim(X_k, p_k)$ é (homeomorfo a) o espaço $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} X_k$.

Similarmente, define-se o limite projetivo na categoria dos grupos, trocando os espaços e subespaços acima por grupos e subgrupos, e as funções contínuas por homomorfismos de grupos.

Tendo feito esta breve exposição no conceito de limites projetivos, vejamos como Ext interage com limites projetivos: tome uma seqüência $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de espaços métricos compactos, todos não vazios, e seja $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de funções contínuas, $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$. Denote $X = \varprojlim(X_k, p_k)$, e sejam $q_n : X \longrightarrow X_n$ as funções coordenadas, que satisfazem $p_n \circ q_{n+1} = q_n$.

Temos então também uma seqüência de grupos $\{\mathrm{Ext}(X_k)\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, e uma seqüência de homomorfismos de grupos, $(p_k)_* : \mathrm{Ext}(X_{k+1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X_k)$, de onde podemos considerar o grupo $\varprojlim \mathrm{Ext}(X_k) = \varprojlim(\mathrm{Ext}(X_k), (p_k)_*)$. Denote por $\widetilde{q}_n : \varprojlim \mathrm{Ext}(X_k) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X_n)$ as funções coordenadas, que são homomorfismos de grupos e satisfazem $(p_n)_* \circ \widetilde{q}_{n+1} = \widetilde{q}_n$ para todo n.

Observe agora que, para todo n, $(q_n)_* : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X_n)$ é um homomorfismo de grupos tal que $(p_n)_* \circ (q_{n+1})_* = (p_n \circ q_{n+1}) = (q_n)_*$. Logo, pela propriedade universal do limite projetivo de grupos, existe um único homomorfismo de grupos

$$\psi_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$$

satisfazendo $\widetilde{q}_n \circ \psi_X = (q_n)_*$ para todo n, ou seja, $\psi_X(a) = ((q_k)_* a)_k$ para todo $a \in \operatorname{Ext}(X)$.

O nosso objetivo nesta seção é provar que o homomorfismo ψ_X é sempre sobrejetor; faremos isto primeiro em um caso particular, com o próximo lema.

Lema 4.3.2. *Na notação acima, se as funções $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ são sobrejetoras para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então $\psi_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Sejam $(a_k)_k \in \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$ arbitrário, e $\tau_1 \in \operatorname{ext}(X_1)$ tal que $a_1 = [\tau_1]$. Tome arbitrariamente $\tau_2' \in \operatorname{ext}(X_2)$ tal que $a_2 = [\tau_2']$. Observe que $\tau_2' \circ p_1^*$ é uma extensão, visto que p_1 é sobrejetora; então, como $(p_1)_*[\tau_2] = (p_1)_*(a_2) = a_1 = [\tau_1]$, vemos que $\tau_2' \circ p_1^* \sim \tau_1$, e portanto existe um operador unitário $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\operatorname{Ad}\pi(U) \circ \tau_2' \circ p_1^* = \tau_1$. Definindo $\tau_2 := \operatorname{Ad}\pi(U) \circ \tau_2'$, vemos que τ_2 é uma extensão tal que $\tau_2 \circ p_1^* = \tau_1$; Ademais, $\tau_2 \sim \tau_2'$ por definição, e portanto $[\tau_2] = a_2$.

Prosseguindo recursivamente deste modo, obtemos uma seqüência de extensões $\{\tau_k\}_k$ com $a_k = [\tau_k]$ e $\tau_{k+1} \circ p_k^* = \tau_k$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

É fácil ver que $\mathfrak{A}_k = \{f \circ q_k : f \in C(X_k)\}$ é uma sub-C*-álgebra com unidade de $C(X)$. Além disso, $\mathfrak{A}_k \subseteq A_{k+1}$ para todo k, pois para $f \in C(X_k)$ qualquer, $f \circ q_k = f \circ p_k \circ q_{k+1}$, e $f \circ p_k \in C(X_{k+1})$. Assim, $\mathfrak{A} = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{A}_k$ é uma *-sub-álgebra com unidade de $C(X)$.

Afirmamos que $\mathfrak{A}$ separa pontos de X: de fato, tome dois elementos distintos de X, digamos, $x = (x_k)_k$ e $x' = (x_k')_k$. Como $x \neq x'$, existe um $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_m \neq x_m'$, ou seja, $q_m(x) \neq q_m(x')$. Agora, $x_m, x_m' \in X_m$, logo existe $f \in C(X_m)$ tal que $f(x_m) \neq f(x_m')$, ou em outras palavras, $f \circ q_m(x) \neq f \circ q_m(x')$. Visto que $f \circ q_m \in \mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}$, segue-se que $\mathfrak{A}$ separa pontos de X, como afirmado; daí, por Stone-Weierstrass concluímos que $\mathfrak{A}$ é densa em $C(X)$. Defina

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{A} &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \\ f \circ q_k &\longmapsto \tau_k(f). \end{aligned}$$

Precisamos verificar que τ está bem definida: se $m < n$ e $f_m \in C(X_m)$, $f_n \in C(X_n)$ são tais que $f_m \circ q_m = f_n \circ q_n$, então

$$\begin{aligned} f_n \circ q_n = f_m \circ q_m = f_m \circ p_m \circ q_{m+1} = f_m \circ p_m \circ p_{m+1} \circ q_{m+2} = \cdots \\ \cdots = f_m \circ p_m \circ p_{m+1} \circ \cdots \circ p_{n-1} \circ q_n, \end{aligned}$$

ou seja, a função $g = f_m \circ p_m \circ p_{m+1} \circ \cdots \circ p_{n-1} \in C(X_n)$ é tal que $f_n \circ q_n = g \circ q_n$; foi observado acima que as aplicações q_n são sobrejetoras no caso em que todas as funções p_k são sobrejetoras, logo temos de imediato $f_n = g$. Assim,

$$\tau_n(f_n) = \tau_n(g) = \tau_n(f_m \circ p_m \circ p_{m+1} \circ \cdots \circ p_{n-1}) = \tau_n \circ p_{n-1}^*(f_m \circ p_m \circ \cdots \circ p_{n-2}) = \cdots$$
$$\cdots = \tau_n \circ p_{n-1}^* \circ \cdots \circ p_m^*(f_m) = \tau_{n-1} \circ p_{n-2}^* \circ \cdots \circ p_m^*(f_m) = \cdots = \tau_m(f_m),$$

provando deste modo que τ está bem definida.

É fácil verificar que τ é um *-homomorfismo unital; observe agora que $\tau|_{\mathfrak{A}_k}$ é injetor para cada k, e portanto isométrico, visto que $\mathfrak{A}_k$ é uma C*-álgebra. Logo, τ é isométrico, e portanto contínuo, e portanto pela densidade de $\mathfrak{A}$ em $C(X)$ podemos estender τ por continuidade a um *-homomorfismo unital $\widetilde{\tau} : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$, que será também isométrico, e portanto injetor; ou seja, provamos que $\widetilde{\tau}$ é uma extensão.

A extensão $\widetilde{\tau}$ satisfaz $\widetilde{\tau} \circ q_n^* = \tau_n$, para todo n por construção visto que, para todo $f \in C(X_n)$,
$$\widetilde{\tau} \circ q_n^*(f) = \widetilde{\tau}(f \circ q_n) = \tau(f \circ q_n) = \tau_n(f).$$

Assim, $(q_n)_*[\tau] = [\tau_n] = a_n$, para todo n, de onde temos

$$\psi_X([\tau]) = ((q_k)_*[\tau])_k = (a_k)_k,$$

e portanto ψ_X é de fato sobrejetor, concluindo a prova do lema.

■

O próximo teorema é a extensão do resultado do lema 4.3.2 para o caso geral em que não é necessário supor que todas as p_k sejam sobrejetoras. isto será feito de uma maneira bastante engenhosa, envolvendo o conjunto de Cantor.

É fato que todo espaço métrico compacto é imagem contínua do conjunto de Cantor, ou seja, dado um espaço métrico compacto X, existe uma função contínua e sobrejetora do conjunto de Cantor sobre X. Para uma prova deste fato ver por exemplo [23], teorema 30.7.

Teorema 4.3.3. *Sejam $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de espaços métricos compactos não vazios, $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de funções contínuas, $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$, e denote $X = \varprojlim(X_k, p_k)$. Então, o homomorfismo induzido $\psi_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Denote o conjunto de Cantor por C. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, defina $Y_n := X_n \vee C$, que é um espaço métrico compacto, e tome $g_n : C \longrightarrow Y_n$ uma sobrejeção contínua. Defina $p'_n : Y_{n+1} \longrightarrow Y_n$ por $p'_n|_{X_{n+1}} = p_n$, $p'_n|_C = g_n$. Assim, p'_n é contínua e sobrejetora por definição.

Seja $Y = \varprojlim(Y_k, p'_k)$, e sejam $q'_n : Y \longrightarrow Y_n$ as funções coordenadas, que são contínuas e satisfazem $p'_n \circ q'_{n+1} = q'_n$, para todo n.

Para cada n denote por $j_n : X_n \longrightarrow Y_n$ a inclusão. Naturalmente, $p'_n \circ j_{n+1} = j_n \circ p_n$; portanto, as funções $j_n \circ q_n : X \longrightarrow Y_n$ são tais que

$$p'_n \circ (j_{n+1} \circ q_{n+1}) = j_n \circ p_n \circ q_{n+1} = j_n \circ p_n,$$

e então, pela propriedade universal do limite projetivo de espaços métricos compactos, existe uma única função contínua $j : X \longrightarrow Y$ tal que $q'_n \circ j = j_n \circ q_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Afirmamos que j é injetora: de fato, suponha que $x = (x_k)_k$ e $x' = (x'_k)_k$ são elementos de X tais que $j(x) = j(x')$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$j_n(x_n) = j_n \circ q_n(x) = q'_n \circ j(x) = q'_n \circ j(x') = j_n \circ q_n(x') = j_n(x'_n),$$

de onde $x_n = x'_n$, pela injetividade de j_n, e portanto $x = x'$, estabelecendo a injetividade de j, como havíamos afirmado.

Para cada n temos $p'_n(j_{n+1}(X_{n+1})) \subseteq j_n(X_n)$, logo estará bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \overline{p}_n : Y_{n+1}/j_{n+1}(X_{n+1}) &\longrightarrow Y_n/j_n(X_n) \\ [x] &\longmapsto [p'_n(x)]. \end{aligned}$$

Se $h_n : Y_n \longrightarrow Y_n/j_n(X_n)$ é a aplicação quociente, então $\overline{p}_n \circ h_{n+1} = h_n \circ p'_n$, o que implica de imediato em $\overline{p}$ ser contínua.

Note que $q'_n(j(X)) \subseteq j_n(q_n(X)) \subseteq j_n(X_n)$, logo também estará definida uma função

$$\begin{aligned} r_n : Y/j(X) &\longrightarrow Y_n/j_n(X_n) \\ [y] &\longmapsto [q'_n(y)], \end{aligned}$$

que é também contínua pois, se $h : Y \longrightarrow Y/j(X)$ é a aplicação quociente, então $r_n \circ h = h_n \circ q'_n$, que é contínua. Observe que

$$\overline{p}_n \circ r_{n+1} \circ h = \overline{p}_n \circ h_{n+1} \circ q'_{n+1} = h_n \circ p'_n \circ q'_{n+1} = h_n \circ q'_n = r_n \circ h,$$

e da sobrejetividade de h temos então $\overline{p}_n \circ r_{n+1} = r_n$, para todo n. Logo, da propriedade universal dos limites projetivos, existe uma única função contínua

$$r : Y/j(X) \longrightarrow \varprojlim(Y_k/j_k(X_k), \overline{p}_k)$$

satisfazendo $\overline{p}_n \circ r = r_n$, para todo n.

Afirmamos que $y \in j(X)$ se, e somente se, $q'_n(y) \in j_n(X_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De fato, se $y \in j(X)$, como $q'_n(j(X)) \subseteq j_n(X_n)$ para todo n, é óbvio que $q'_n(y) \in j_n(X_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$; por outro lado, suponha que $q'_n(y) \in j_n(X_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Note que, se escrevermos, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $q'_k(y) = j_k(x_k)$, com $x_k \in X_k$, então

$$j_n \circ p_n(x_{n+1}) = p'n \circ j_{n+1}(x_{n+1}) = p'_n \circ q'_{n+1}(y) = q'_n(y) = j_n(x_n),$$

de onde $p_n(x_{n+1}) = x_n$, visto que j_n é injetora. Como n era arbitrário, vemos que $x := (x_k)_k \in X = \varprojlim(X_k, p_k)$, e note que x satisfaz, para todo n,

$$q'_n \circ j(x) = j_n \circ q_n(x) = j_n(x_n) = q'_n(y);$$

a sobrejetividade de q'_n garante portanto que $j(x) = q'_n(y)$, provando que $y \in j(X)$, concluindo a afirmação.

Note também que, se $q'_n(y) = j_n(x_n)$ para algum $n > 1$, então

$$q'_{n-1}(y) = p'_{n-1} \circ q'_n(y) = p'_{n-1} \circ j_n(x_n) = j_{n-1} \circ p_{n-1}(x_n),$$

de onde $q'_{n-1}(y) \in j_{n-1}(X_{n-1})$; aplicando este raciocínio recursivamente, isto prova que se $q'_n(y) \in j_n(X_n)$ para algum $n > 1$, então $q'_m(y) \in j_m(X_m)$ para todo m com $1 \leq m < n$. Em particular, isto mostra que se existe um $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $q'_n(y) \notin j_n(X_n)$, então $q'_m(y) \notin j_m(X_m)$ para todo $m > n$.

Queremos provar agora que a função $r : Y/j(X) \longrightarrow \varprojlim(Y_k/j_k(X_k), \overline{p}_k)$ definida acima é injetora: suponha que $[y], [y'] \in Y/j(X)$ são tais que $r([y]) = r([y'])$. Então, para todo n, $r_n([y]) = \overline{p}_n \circ r([y])\overline{p}_n \circ r([y']) = r_n([y'])$, ou seja, $[q'_n(y)] = [q'_n(y')]$.

Provaremos que $[y] = [y']$ em dois casos: no primeiro, suponha que $q'_n(y) \in j_n(X_n)$ para todo n. Como $[q'_n(y)] = [q'_n(y')]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, teremos também que $q'_n(y') \in j_n(X_n)$ para todo n, e portanto, pela que foi provado acima, temos que $y, y' \in j(X)$, de onde $[y] = [y']$.

No segundo caso, suponha que exista um $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $q'_m(y) \notin j_m(X_m)$. Então, a classe $[q'_m(y)] \in Y_m/j_m(X_m)$ possui apenas o elemento $q'_m(y)$. Logo, como $[q'_m(y')] = [q'_m(y)]$, vemos que $q'_m(y') = q'_m(y)$; note então que

$$q'_{m-1}(y') = p'_{m-1} \circ q'_m(y') = p'_{m-1} \circ q'_m(y) = q'_{m-1}(y),$$

e prosseguindo recursivamente prova-se que $q'_n(y') = q'_n(y)$ para todo $n < m$. Além disso, em virtude do que foi observado acima sabemos que $q'_n(y) \notin j_n(X_n)$ para todo $n > m$, e portanto para todo $n > m$ vemos que a classe $[q'_n(y)]$ possui apenas o elemento $q'_n(y)$; segue-se então de $[q'_n(y')] = [q'_n(y)]$ que $q'_n(y') = q'_n(y)$. Ficou assim provado que $q'_n(y') = q'_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, de onde temos $y = y'$, e portanto $[y] = [y']$, e a injetividade de r está provada.

Em, virtude do fato de $Y/j(X)$ ser compacto e $\varprojlim(Y_k/j_k(X_k), \overline{p}_k)$ ser Hausdorff, vemos que r é portanto um homeomorfismo entre $Y/j(X)$ e $\operatorname{ran}(r)$, que é um subespaço de $\varprojlim(Y_k/j_k(X_k), \overline{p}_k)$; este, por sua vez, é um subespaço de $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} Y_k/j_k(X_k)$.

Agora, note que cada $Y_k/j_k(X_k)$ é a reunião disjunta do conjunto de Cantor com um ponto, e portanto totalmente desconexo. Segue-se que $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} Y_k/j_k(X_k)$ é totalmente desconexo, de onde temos que $\operatorname{ran}(r)$ também o é, e portanto $Y/j(X)$ é totalmente desconexo.

Segue-se portanto do teorema 4.2.4 que os homomorfismos $j_* : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \operatorname{Ext}(Y)$ e $(j_n)_* : \operatorname{Ext}(X_n) \longrightarrow \operatorname{Ext}(Y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, são na verdade isomorfismos.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, denote por $\widetilde{q}_n : \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X_n)$ o respectivo homomorfismo dado pela função coordenada do limite projetivo, e considere o homomorfismo

$$(j_n)_* \circ \widetilde{q}_n : \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k) \longrightarrow \operatorname{Ext}(Y_n);$$

então,

$$\begin{aligned}(p'_n)_* \circ (j_{n+1})_* \circ \widetilde{q}_{n+1} = (p'_n \circ j_{n+1})_* \circ \widetilde{q}_{n+1} = (j_n \circ p_n)_* \circ \widetilde{q}_{n+1} = \\ = (j_n)_* \circ (p_n)_* \circ \widetilde{q}_{n+1} = (j_n)_* \circ \widetilde{q}_n,\end{aligned}$$

e da propriedade universal dos limites projetivos temos que existe um único homomorfismo de grupos

$$\eta : \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}(Y_k)$$

tal que $\widehat{q}_n \circ \eta = (j_n)_* \circ \widetilde{q}_n$ para todo n, onde aqui $\widehat{q}_n : \varprojlim \operatorname{Ext}(Y_k) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X_n)$ é o homomorfismo dado pela função coordenada. Em outras palavras, para todo $(a_k)_k \in \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$, $\eta((a_k)_k) = ((j_k)_*(a_k))_k$.

Afirmamos que η é um isomorfismo; de fato, para tanto basta verificarmos que η é inversível, e isto é o que faremos, apontando explicitamente a sua inversa: considere a função

$$\begin{aligned} s : \varprojlim \operatorname{Ext}(Y_k) & \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Ext}(X_k) \\ (b_k)_k & \longmapsto ((j_k)_*^{-1}(b_k))_k. \end{aligned}$$

Como para todo n temos $p'_n \circ j_{n=1} = j_n \circ p_n$, então $(j_n)_*^{-1} \circ (p'_n)_* = (p_n)_* \circ (j_{n+1})_*^{-1}$, e portanto, dado $(b_k)_k \in \varprojlim \operatorname{Ext}(Y_k)$ arbitrário,

$$(p_n)_*((j_{n+1})_*^{-1}(b_{n+1})) = (j_n)_*^{-1} \circ (p'_n)_*(b_{n+1}) = (j_n)_*^{-1}(b_n),$$

de onde vemos que $s((b_k)_k) \in \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$, e portanto $\operatorname{ran}(s) \subseteq \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$. Restringindo o contra-domínio de s, é fácil verificar agora que s é uma inversa para η; logo, η é um isomorfismo, como afirmado.

Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ext}(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "j_*"] & \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k) \arrow[d, "\eta"'] \\ \operatorname{Ext}(Y) \arrow[r, "\psi_Y"] & \varprojlim \operatorname{Ext}(Y_k) \end{tikzcd}$$

Lembremos que $\widetilde{q}_n \circ \psi_X = (q_n)_*$, $\widehat{q}_n \circ \psi_Y = (q'_n)_*$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Afirmamos que o diagrama acima é comutativo. De fato, para $a \in \operatorname{Ext}(X)$ e $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrários,

$$\widehat{q}_n \circ \psi_Y \circ j_*(a) = (q'_n)_* \circ j_*(a) = (j_n)_* \circ (q_n)_*(a) = (j_n)_* \circ \widetilde{q}_n \circ \psi_X(a) = \widehat{q}_n \circ \eta \circ \psi_X(a),$$

de onde $\psi_Y \circ j_* = \eta \circ \psi_X$, como afirmado.

Ora, mas η é um isomorfismo, logo podemos escrever $\psi_X = \eta^{-1} \circ \psi_Y \circ j_*$; observe que o homomorfismo ψ_Y é sobrejetor, pelo lema 4.3.2; assim, visto que também j_* é um isomorfismo, segue-se que ψ_X é sobrejetor, como queríamos provar.

■

Capítulo 5

O Homomorfismo γ_X

Neste capítulo, nós concluiremos a exposição sobre os conceitos da teoria de Brown-Douglas-Fillmore necessários para a resolução do problema de classificação de operadores essencialmente normais, resultado este que será provado na seção 5.3.

5.1 Definição e Naturalidade de γ_X

Usaremos no que segue algumas propriedades elementares da teoria de homotopia; para exposições mais cuidadosas sobre teoria de homotopia, ver por exemplo [23], ou [14].

Dada uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$, denotaremos por $\mathfrak{A}^{-1}$ o subconjunto de $\mathfrak{A}$ formado pelos seus elementos inversíveis. Dizemos que elementos inversíveis $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{A}$ são *homotópicos por inversíveis*, e denotaremos $\mathfrak{a}_1 \sim_h \mathfrak{a}_2$, quando existir uma curva contínua de elementos inversíveis de $\mathfrak{A}$ ligando $\mathfrak{a}_1$ a $\mathfrak{a}_2$, ou seja, uma função contínua $H : [0,1] \longrightarrow \mathfrak{A}^{-1}$ tal que $H(0) = \mathfrak{a}_1$, $H(1) = \mathfrak{a}_2$.

Dado X um espaço métrico compacto, denotaremos por $\pi^1(X)$ o conjunto formado pelas classes de homotopia por inversíveis de elementos de $C(X)^{-1}$. Este conjunto tem naturalmente uma estrutura de grupo, dada por $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Na verdade, $\pi^1(X)$ é o chamado *primeiro grupo de cohomotopia* de X.

Exemplo 5.1.1. *Se $X \subseteq \mathbb{C}$ é compacto, então o grupo $\pi^1(X)$ é precisamente o grupo livre abeliano gerado por $\{[\zeta - \lambda_n 1] : n \in \Lambda\}$, onde $\{\lambda_n\}_{n \in \Lambda} \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto com exatamente um ponto λ_n em cada componente conexa limitada de $\mathbb{C} \backslash X$; para uma prova deste fato, ver por exemplo [9], teorema IX.7.1.*

Voltando ao assunto principal: nós vimos com o teorema 3.2.12 que o grupo $\mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1)$

é isomorfo a $\mathbb{Z}$; relembrando, o isomorfismo era dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\tau] &\longmapsto \mathrm{ind}(\tau(\zeta)). \end{aligned}$$

Na verdade, há um conceito mais profundo por detrás deste isomorfismo, que pode ser aplicado para qualquer espaço métrico compacto X. Vejamos a seguir como isto é feito.

Dado um espaço métrico compacto X, e uma extensão qualquer $\tau \in \mathrm{ext}(X)$, observe que para todo $f \in C(X)$ inversível, temos que $\tau(f)$ é inversível, e portanto podemos falar do índice $\mathrm{ind}(\tau(f))$; este índice independe do representante da classe $[\tau] \in \mathrm{Ext}(X)$: de fato, para qualquer $f \in C(X)$ inversível, se $\tau, \tau' \in \mathrm{ext}(X)$ são tais que $\tau \sim \tau'$, então tomando $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário tal que $\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau = \tau'$, e denotando $\tau(f) = \pi(T)$, vemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(\tau'(f)) = \mathrm{ind}(\mathrm{Ad}\pi(U) \circ \tau(f)) = \mathrm{ind}(\pi(UTU^*)) = \\ = \mathrm{ind}(U) + \mathrm{ind}(T) - \mathrm{ind}(U) = \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(\tau(f)). \end{aligned}$$

Observe agora que, como ind é uma função contínua com valores nos inteiros, vemos que o índice de Fredholm é invariante por homotopia; em particular vemos, passando ao quociente na álgebra de Calkin, que se $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ são inversíveis e homotópicos, então $\mathrm{ind}(\mathfrak{t}_1) = \mathrm{ind}(\mathfrak{t}_2)$.

Assim, note que se $f, f' \in C(X)^{-1}$ são homotópicos, então $\tau(f)$ e $\tau(f')$ são homotópicos, e o que foi visto acima implica em $\mathrm{ind}(\tau(f)) = \mathrm{ind}(\tau(f'))$; isto mostra que, fixado $[\tau] \in \mathrm{Ext}(X)$ arbitrariamente, temos bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_{[\tau]} : \pi^1(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\longmapsto \mathrm{ind}(\tau(f)). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\varphi_{[\tau]}$ é um homomorfismo de grupos: de fato, dados $[f], [g] \in \pi^1(X)$ arbitrários,

$$\begin{aligned} \varphi_{[\tau]}([f] \cdot [g]) = \varphi_{[\tau]}([f \cdot g]) = \mathrm{ind}(\tau(f \cdot g)) = \varphi_{[\tau]}(\tau(f)\tau(g)) = \mathrm{ind}(\tau(f)\tau(g)) = \\ = \mathrm{ind}(\tau(f)) + \mathrm{ind}(\tau(g)) = \varphi_{[\tau]}([f]) + \varphi_{[\tau]}([g]), \end{aligned}$$

o que prova o afirmado. Logo, podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_X : \mathrm{Ext}(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z}) \\ [\tau] &\longmapsto \varphi_{[\tau]}. \end{aligned}$$

Esta aplicação é um homomorfismo de grupos, pois se $[\tau], [\tau'] \in \mathrm{Ext}(X)$ e $[f] \in \pi^1(X)$ são arbitrários,

$$\begin{aligned} \gamma_X([\tau] + [\tau'])([f]) = \gamma_X([\tau \hat{+} \tau'])([f]) = \mathrm{ind}((\tau \hat{+} \tau')(f)) = \mathrm{ind}(\tau(f) \hat{+} \tau'(f)) = \\ = \mathrm{ind}(\tau(f)) + \mathrm{ind}(\tau'(f)) = (\gamma_X([\tau]) + \gamma_X([\tau']))(f), \end{aligned}$$

de onde $\gamma_X([\tau] + [\tau']) = \gamma_X([\tau]) + \gamma_X([\tau'])$.

Este homomorfismo γ_X é a chave para resolver o problema de classificação dos operadores essencialmente normais; nós deduziremos a seguir uma propriedade importante de γ_X, mas, antes, façamos algumas considerações sobre $\mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$:

Dados espaços métricos compactos X, Y e uma função contínua $h : X \longrightarrow Y$, sabemos que h é dual a um *-homomorfismo $h^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$, dado por $h^*(g) = g \circ h$, para todo $g \in C(Y)$. Este *-homomorfismo é unital, e portanto manda elementos inversíveis em elementos inversíveis; ademais, é imediato ver que, se $g_1, g_2 \in C(Y)$ são homotópicos, então também $h^*(g_1)$ e $h^*(g_2)$ são homotópicos. Portanto, h^* induz um homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : \pi^1(Y) &\longrightarrow \pi^1(X) \\ [g] &\longmapsto [g \circ h]. \end{aligned}$$

Ora, mas um homomorfismo de grupos entre $\pi^1(Y)$ e $\pi^1(X)$ induz um homomorfismo de grupos entre $\mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ e $\mathrm{Hom}(\pi^1(Y), \mathbb{Z})$ pela composição; denote por

$$h_\# : \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(Y), \mathbb{Z})$$

o homomorfismo induzido por $\widetilde{h}$, isto é, $h_\#(\varphi) = \varphi \circ \widetilde{h}$, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$. Dado $[f] \in \pi^1(X)$, vemos então que

$$h_\#(\varphi)([f]) = \varphi \circ \widetilde{h}([f]) = \varphi([f \circ h]).$$

É rotina verificar que, se tivermos X, Y, Z espaços métricos compactos e $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, então $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$, e também que $(\mathrm{id}_X)_\# = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})}$. Em outras palavras, o que isto diz é que o par de aplicações $F : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ que faz a correspondência $X \longmapsto \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ nos objetos, e $f \longmapsto f_\#$ nos morfismos, é um funtor covariante. O funtor F é comumente denotado por $\mathrm{Hom}(\pi^1(-), \mathbb{Z})$.

Retornando brevemente à teoria de categorias: Dadas categorias $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, e funtores covariantes $F : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$, $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$, dizemos que uma *transformação natural* entre os funtores F e G é uma regra denotada por $\Psi : F \longrightarrow G$, que associa a cada objeto b de $\mathscr{B}$ um morfismo $\Psi_b : F(b) \longrightarrow G(b)$, de modo que, para quaisquer objetos b, b' de $\mathscr{B}$ e morfismo $h : b \longrightarrow b'$, o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd} F(b) \arrow[r, "\Psi_b"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(b) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(b') \arrow[r, "\Psi_{b'}"] & G(b') \end{tikzcd}$$

Nós queremos provar agora que a regra $\gamma : \mathrm{Ext} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(-), \mathbb{Z})$ determinada por $X \longmapsto \gamma_X$ é uma transformação natural entre os funtores Ext e $\mathrm{Hom}(\pi^1(-), \mathbb{Z})$; em outra palavras afirmamos que, para quaisquer espaços métricos compactos X, Y e função contínua $h : X \longrightarrow Y$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(X) \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z}) \arrow[d, "h_\#"] \\ \mathrm{Ext}(Y) \arrow[r, "\gamma_y"] & \mathrm{Hom}(\pi^1(Y), \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

De fato, se tomarmos arbitrariamente $[\tau] \in \mathrm{Ext}(X)$, $[f] \in \pi^1(Y)$, e $\tau_Y \in \mathrm{ext}(Y)$ uma extensão trivial, temos

$$(\gamma_Y \circ h_*([\tau]))([f]) = \gamma_Y([(\tau \circ h^*) \hat{+} \tau_Y])(f) = \mathrm{ind}(((\tau \circ h^*) \hat{+} \tau_Y)(f)) =$$
$$\mathrm{ind}(\tau \circ h^*(f)) + \mathrm{ind}(\tau_Y(f)) = \mathrm{ind}(\tau(f \circ h)) + 0 = \gamma_X([\tau])([f \circ h]) = (h_\# \circ \gamma_X([\tau]))([f]),$$

de onde segue que $\gamma_Y \circ h_* = h_\# \circ \gamma_X$, como desejado.

Exemplo 5.1.2. *Gostaríamos agora de ilustrar esta exposição com um exemplo importante: no caso em que $X = \mathbb{S}^1$, o homomorfismo $\gamma_{\mathbb{S}^1} : \mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^1(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z})$ é injetor. De fato, isto segue do isomorfismo $\varphi : \mathrm{Ext}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ obtido no teorema 3.2.12 pois, se $[\tau] \in \ker(\gamma_{\mathbb{S}^1})$, então $\mathrm{ind}(\tau(f)) = 0$ para qualquer $f \in C(\mathbb{S}^1)$; em particular, $\mathrm{ind}(\tau(\zeta)) = 0$, e portanto $\varphi([\tau]) = 0$, de onde temos pela injetividade de φ que $[\tau] = 0$, provando a injetividade de $\gamma_{\mathbb{S}^1}$, como queríamos.*

Observação 5.1.3. Um outro caso onde o homomorfismo γ_x é injetor é o caso trivial em que $\mathrm{Ext}(X) = 0$; nós usaremos isto adiante.

5.2 Bijetividade de γ_X para $X \subseteq \mathbb{C}$

Esta seção é destinada a estudar o caso importante dos espaços métricos compactos que são subconjuntos de $\mathbb{C}$; como visto na seção 1.1, o nosso interesse nestes espaços é justificado pelo fato de que o espectro de elementos de uma dada C*-álgebra é um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{C}$. Como veremos com o corolário 5.2.9, o homomorfismo γ_X é sempre um isomorfismo, para $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto; isto nos permitirá provar o teorema de Brown-Douglas-Fillmore sobre a classificação de operadores essencialmente normais, na próxima seção.

O primeiro objetivo aqui será provar a injetividade de γ_X para $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto, com o teorema 5.2.6, mas, para isto, precisamos de resultados auxiliares; inicialmente estudaremos o comportamento do homomorfismo γ_X em outro caso, dado pelo teorema a seguir.

Teorema 5.2.1. *Sejam $J = [a, b]$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, $A \subseteq J$ fechado, e $X = J/A$. Então, o homomorfismo γ_X é injetor.*

Demonstração. Precisamos escrever X de uma maneira adequada, faremos isto como segue: o conjunto $J \backslash A$ é aberto, logo podemos escrever $J \backslash A = \dot{\bigcup}_{n \in \Lambda} I_n$, onde os I_n são intervalos abertos, e Λ é um conjunto de índices finito, ou $\Lambda = \mathbb{N}^*$. Consideraremos apenas o caso $\Lambda = \mathbb{N}^*$, visto que o caso finito é similar, porém mais fácil, visto que os argumentos não precisam ser levados ao limite.

Denotaremos por $q : J \longrightarrow J/A$ a aplicação quociente, e $x_0 = q(A)$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, escreva $I_n = (a_n, b_n)$. Queremos ver o que acontece com $\overline{I_n}$ no quociente, e temos essencialmente dois casos possíveis:

No primeiro caso, temos $a_n, b_n \in A$; neste caso, note que os extremos de $\overline{I_n}$ são identificados no quociente, tornando-se o ponto x_0, ou seja, $q(\overline{I_n})$ será uma curva fechada simples, e portanto homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

No segundo caso, apenas um dos extremos de $\overline{I_n}$ está em A; neste caso, não haverá identificação das pontas no quociente, de onde vemos que $q(\overline{I_n})$ é uma curva aberta simples, e portanto homeomorfa a um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, denote $X_n = q(\overline{I_n})$. Naturalmente $x_0 \in X_n$, e $X_n \backslash \{x_0\} = q(I_n)$, de onde vemos que $X_n \backslash \{x_0\}$ é aberto, visto que a topologia em J/A é a topologia quociente da aplicação q; observe ainda que $X_n = q(I_n) \dot{\cup} \{x_0\}$.

Como os intervalos I_n são todos disjuntos, vemos que, se $k \neq m$, então

$q(I_k) \cap q(I_m) = \emptyset$, e portanto $X_k \cap X_m = \{x_0\}$. Ademais,

$$X = J/A = q(J\backslash A) \dot{\cup} \{x_0\} = q(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}^*} I_n) \dot{\cup} \{x_0\} = (\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}^*} q(I_n)) \dot{\cup} \{x_0\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(q(I_n) \cup \{x_0\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n.$$

Outro detalhe importante é que, como J é compacto, e $J\backslash A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, necessariamente $\operatorname{diam}(\overline{I_n}) = \operatorname{diam}(I_n) \longrightarrow 0$. Em virtude da proposição E.1.5, temos então que $\operatorname{diam}(X_n) \longrightarrow 0$ (observe que este detalhe é particular do caso infinito $\Lambda = \mathbb{N}^*$ que estamos considerando).

Concluímos daí que X é a reunião de uma seqüência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de subconjuntos fechados cujos diâmetros tendem para zero, cada X_n é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ ou a um intervalo de $\mathbb{R}$, e $X_k \cap X_m = \{x_0\}$ sempre que $k \neq m$.

Feita esta caracterização de X, voltemos ao problema: seja $[\tau] \in \ker(\gamma_X)$ arbitrário. Queremos provar que $[\tau] = 0$, ou seja, que a extensão $\tau \in \operatorname{ext}(X)$ é trivial.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ defina $Y_n \subseteq X$ por $Y_n := \bigcup_{k>n} X_k$, que é fechado pois

$$X\backslash Y_n = (X_1\backslash\{x_0\}) \cup \cdots \cup (X_n\backslash\{x_0\}),$$

que é aberto. Também para cada $n \in \mathbb{N}^*$ sejam $i_n : X_n \longrightarrow X$ e $j_n : Y_n \longrightarrow X$ as inclusões.

Observando que $Y_{n-1} = X_n \cup Y_n$ para todo $n \geq 2$, podemos definir também para tais n inclusões $r_n : X_n \longrightarrow Y_{n-1}$ e $s_n : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$, e também $q_n : X_n \vee Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$ a função de identificação padrão. Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $p_n : X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n \vee Y_n \longrightarrow X$ a função de identificação padrão.

O que faremos a seguir é uma construção recursiva: observe que $X = X_1 \cup Y_1$, e $X_1 \cap Y_1 = \{x_0\}$; logo, em virtude do teorema 4.1.8, existem $d_1 \in \operatorname{Ext}(X_1)$, $d_1' \in \operatorname{Ext}(Y_1)$, tais que

$$[\tau] = (i_1)_*(d_1) + (j_1)_*(d_1') = (p_1)_*(d_1 \vee d_1').$$

Portanto, se $d_1 = [\tau_1]$, $d_1' = [\tau_1']$, para $\tau_1 : C(X_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\tau_1' : C(Y_1) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1')$ extensões, temos $\tau \sim (\tau_1 \vee \tau_1')p_1^* = (\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_1' \circ j_1^*)$, e portanto existe um *-isomorfismo $\mu_1 : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1') \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ induzido por um operador unitário $U_1 : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1' \longrightarrow \mathcal{H}$, tal que

$$\tau = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*) \hat{+} (\tau_1' \circ j_1^*)). \tag{5.1}$$

Agora, note que $Y_1 = X_2 \cup Y_2$, e $X_2 \cap Y_2 = \{x_0\}$, de onde novamente pelo teorema 4.1.8, existem $d_2 \in \operatorname{Ext}(X_2)$, $d_2' \in \operatorname{Ext}(Y_2)$ tais que

$$[\tau_1'] = (r_2)_*(d_2) + (s_2)_*(d_2') = (q_2)_*(d_2 \vee d_2').$$

Portanto, se $d_2 = [\tau_2]$, $d_2' = [\tau_2']$, para $\tau_2 : C(X_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ e $\tau_2' : C(Y_2) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2')$ extensões, temos $\tau_1' \sim (\tau_2 \vee \tau_2')q_2^* = (\tau_2 \circ r_2^*)\hat{+}(\tau_2' \circ s_2^*)$, e portanto existe um *-isomorfismo $\mu_2 : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2') \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1')$ induzido por um operador unitário $U_2 : \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2' \longrightarrow \mathcal{H}_1'$, tal que

$$\tau_1' = \mu_2((\tau_2 \circ r_2^*)\hat{+}(\tau_2' \circ s_2^*)). \tag{5.2}$$

Observando que $r_2^* \circ j_1^* = (j_1 \circ r_2)^* = i_2^*$, e $s_2^* \circ j_1^* = (j_1 \circ s_2)^* = j_2^*$, e substituindo a equação 5.2 na equação 5.1, temos

$$\tau = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}(\tau_1' \circ j_1^*)) = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}((\mu_2((\tau_2 \circ r_2^*)\hat{+}(\tau_2' \circ s_2^*))) \circ j_1^*)) =$$
$$= \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}\mu_2((\tau_2 \circ r_2^* \circ j_1^*)\hat{+}(\tau_2' \circ s_2^* \circ j_1^*))) = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\tau_2' \circ j_2^*))).$$

Prosseguindo recursivamente deste modo vemos que existem, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, extensões $\tau_n : C(X_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_n)$, $\tau_n' : C(Y_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_n')$, e um *-isomorfismo $\mu_n : \mathcal{Q}(\mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n') \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_{n-1}')$ induzido por um operador unitário $U_n : \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n' \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}'$, tal que

$$\tau = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))).$$

Queremos provar agora que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $[\tau_n] \in \ker(\gamma_{X_n})$. De fato, fixe $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrariamente, e tome $g \in C(X_n)^{-1}$ qualquer. Defina $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in X_n \\ g(x_0) & \text{se } x \in X \backslash X_n. \end{cases}$$

Obviamente f está bem definida, é contínua, e é inversível. Além disso, f é constante igual a $g(x_0)$ fora de X_n; portanto, se $m \neq n$, observe que $\tau_m(f|_{X_m}) = g(x_0)1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_m)}$, e assim $\mathrm{ind}(\tau_m(f|_{X_m})) = 0$; da mesma forma, $\mathrm{ind}(\tau_n'(f|_{Y_n})) = 0$.

Lembrando-se que $[\tau] \in \ker(\gamma_X)$ por hipótese, segue-se daí que

$$\begin{aligned}
0 =& \gamma_X([\tau])([f]) = \mathrm{ind}(\tau(f)) = \\
&= \mathrm{ind}(\mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*)))))(f)) = \\
&= \mathrm{ind}((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))(f)) = \\
&= \mathrm{ind}(\tau_1(f|_{X_1})) + \mathrm{ind}(\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))) = \\
&= \mathrm{ind}(\mu_2((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))) = \\
&= \mathrm{ind}((\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*)))) = \\
&= \mathrm{ind}(\tau_2(f|_{X_2})) + \mathrm{ind}(\mu_3((\tau_3 \circ i_3^*)\hat{+}(\cdots\hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))) =
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{ind}(\mu_3((\tau_3 \circ i_3^*)\hat{+}(\cdots \hat{+}\mu_n((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))))) = \cdots$$
$$\cdots = \mathrm{ind}(((\tau_n \circ i_n^*)\hat{+}(\tau_n' \circ j_n^*))(f)) =$$
$$= \mathrm{ind}(\tau_n(f|_{X_n})) + \mathrm{ind}(\tau_n'(f|_{Y_n})) =$$
$$= \mathrm{ind}(\tau_n(g)) = \gamma_{X_n}([\tau_n])([g]),$$

ou seja, $\gamma_{X_n}([\tau_n])([g]) = 0$, o que prova que $[\tau_n] \in \ker(\gamma_{X_n})$, como desejado.

Agora, sabemos do exemplo 5.1.2 que $\gamma_{\mathbb{S}^1}$ é injetora, e da observação 5.1.3 que γ_Z é injetora para todo $Z \subseteq \mathbb{R}$ compacto; mas os conjuntos X_n são homeomorfos a $\mathbb{S}^1$ ou a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, logo podemos concluir que γ_{X_n} é injetora, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como $[\tau_n] \in \ker(\gamma_{X_n})$, isto implica de imediato em $[\tau_n] = 0$, e daí τ_n é trivial, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Fixe portanto $\varphi_n : C(X_n) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ *-homomorfismos unitais injetores tais que $\tau_n = \pi \circ \varphi_n$.

Afirmamos agora que $\mathrm{diam}(Y_n) \longrightarrow 0$. De fato, dado $\delta > 0$ qualquer, escolha $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica em $\mathrm{diam}(X_n) < \delta/4$. Agora, para $n > n_0$, se $x, x' \in Y_n$, então $d(x, x') \leq d(x, x_0) + d(x_0, x') \leq \delta/4 + \delta/4 = \delta/2$, e portanto $\mathrm{diam}(Y_n) \leq \delta/2 < \delta$. Em outras palavras, $\mathrm{diam}(Y_n) < \delta$ para todo $n > n_0$, e isto prova o afirmado.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, defina $\mathfrak{A}_n := \{f \in C(X) : f \text{ constante em } Y_n\}$. É imediato verificar que os $\mathfrak{A}_n$ são sub-C*-álgebras de $C(X)$, e que $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}$; assim, vemos que $\mathfrak{A} := \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathfrak{A}_n$ é uma *-sub-álgebra de $C(X)$. Observe que $\mathfrak{A}$ é densa em $C(X)$: de fato, se tomarmos $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, seja $\delta > 0$ da continuidade uniforme de f, para o ε dado. Escolha $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathrm{diam}(Y_{n_0}) < \delta$. Defina $f' \in \mathfrak{A}$ por $f'|_{Y_{n_0}} = f(x_0)$, e $f' = f$ em $X \backslash Y_{n_0}$. Naturalmente, $\|f - f'\| \leq \varepsilon$, provando o observado.

Iremos finalmente provar que τ é trivial. Se $f \in C(X)$ é constante em algum Y_n, defina $\varphi^{(n)}(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por

$$\varphi^{(n)}(f) = \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus \mathrm{Ad}U_2((\varphi_2 \circ i_2^*)(f) \oplus (\cdots \oplus \mathrm{Ad}U_n((\varphi_n \circ i_n^*)(f) \oplus f(x_0)I_{\mathcal{H}_n'})))).$$

Afirmamos que $\varphi^{(n+1)}(f) = \varphi^{(n)}(f)$: para simplificar a notação, vamos supor que f é constante em Y_1, e provar que $\varphi^{(2)}(f) = \varphi^{(1)}(f)$; o leitor poderá observar que a demonstração é exatamente a mesma para inteiros maiores.

Como $X_2 \subseteq Y_1$, temos que f é constante igual a $f(x_0)$ em X_2; ainda, observando que $I_{\mathcal{H}_1'} = \mathrm{Ad}U_2(I_{\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2'})$,

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)}(f) &= \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus \mathrm{Ad}U_2((\varphi_2 \circ i_2^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_2'})) = \\
&= \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus \mathrm{Ad}U_2(\varphi_2(f|_{X_2}) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_2'})) = \\
&= \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus \mathrm{Ad}U_2(f(x_0) I_{\mathcal{H}_2} \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_2'})) = \\
&= \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) \mathrm{Ad}U_2(I_{\mathcal{H}_2} \oplus I_{\mathcal{H}_2'})) = \\
&= \mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_1'}) = \varphi^{(1)}(f),
\end{aligned}$$

e isto prova o afirmado.

Em virtude do que acabamos de provar, segue-se que se $m \in \mathbb{N}^*$ é o menor natural tal que f é constante em Y_n, então $\varphi^{(n)} = \varphi^{(m)}$ para todo $n > m$; podemos então associar a cada $f \in \mathfrak{A}$ um operador $\varphi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $\varphi(f) = \varphi^{(n)}(f)$, onde $n \in \mathbb{N}^*$ é qualquer natural tal que f seja constante em Y_n. Em outras palavras, está bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathfrak{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
f &\longmapsto \varphi(f).
\end{aligned}$$

É fácil verificar que φ é um *-homomorfismo unital; mais ainda, observe que $\varphi|_{\mathfrak{A}_n}$ é injetor para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Provaremos isto para $n = 1$ para simplificar a notação, os outros casos são idênticos:

Se $f \in \mathfrak{A}_1$ é tal que $\varphi(f) = 0$, então $\mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_1'}) = 0$, o que implica em $(\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_1'} = 0$. Assim, $\varphi_1(f|_{X_1}) = 0$, e da injetividade de φ_1 segue-se que $f|_{X_1} = 0$; em particular, $f(x_0) = 0$, e como f é constante igual a $f(x_0)$ em Y_1, concluímos de $X = X_1 \cup Y_1$ que $f = 0$, e portanto $\varphi|_{\mathfrak{A}_1}$ é injetor.

Agora, $\mathfrak{A}_n$ é uma C*-álgebra, logo $\varphi|_{\mathfrak{A}_n}$ ser injetor implica em $\varphi|_{\mathfrak{A}_n}$ ser isométrico; logo, temos que φ é isométrico.

Considere $\widetilde{\varphi} : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a extensão contínua de φ para $C(X)$. Então, $\widetilde{\varphi}$ é um *-homomorfismo unital; em virtude do observado acima, vemos que $\widetilde{\varphi}$ é isométrico, e portanto injetor.

Afirmamos que $\tau(f) = \pi \circ \widetilde{\varphi}(f)$ para todo $f \in \mathfrak{A}_1$: de fato, observe que neste caso $\widetilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$, e que $(\tau_1' \circ j_1^*)(f) = \tau_1'(f|_{Y_1}) = \tau_1'(f(x_0) \cdot 1) = f(x_0) 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1')}$; portanto, lembrando que $\tau_1 = \pi \circ \varphi_1$,

$$\begin{aligned}
\pi \circ \widetilde{\varphi}(f) = \pi(\mathrm{Ad}U_1((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_1'})) = \mu_1(\pi((\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \oplus f(x_0) I_{\mathcal{H}_1'})) = \\
\mu_1(\pi(\varphi_1 \circ i_1^*)(f) \hat{+} f(x_0) \pi(I_{\mathcal{H}_1'})) = \mu_1((\tau_1 \circ i_1^*)(f) \hat{+} (\tau_1' \circ j_1^*)(f)) = \tau(f),
\end{aligned}$$

de onde $\tau(f) = \pi \circ \widetilde{\varphi}(f)$, como afirmado.

De maneira idêntica prova-se que $\tau(f) = \pi \circ \widetilde{\varphi}(f)$ para todo $f \in \mathfrak{A}_n$, para qualquer $n > 2$; em outras palavras, vemos assim que $\tau(f) = \pi \circ \widetilde{\varphi}(f)$ para todo $f \in \mathfrak{A}$; logo, por continuidade e densidade, segue-se que $\tau = \pi \circ \widetilde{\varphi}$, e portanto τ é trivial, como queríamos demonstrar.

Em virtude disto, temos $\ker(\gamma_X) = 0$, de onde γ_X é injetora, e o teorema está provado.

■

Proposição 5.2.2. *Sejam X, Y espaços métricos compactos, e $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Então, $f_*(\ker(\gamma_X)) \subseteq \ker(\gamma_Y)$.*

Demonstração. Tome $[\tau] \in \ker(\gamma_X)$ e $[g] \in \pi^1(Y)$ arbitrários. Então, pela naturalidade de γ,

$$\gamma_Y(f_*[\tau])([g]) = (f_\# \circ \gamma_X([\tau]))([g]) = (f_\#(0))([g]) = 0,$$

de onde $f_*[\tau] \in \ker(\gamma_Y)$, e portanto $f_*(\ker(\gamma_X)) \subseteq \ker(\gamma_Y)$, como queríamos provar.

■

Na próxima proposição, o homomorfismo $\beta : \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X)$ é conforme definido na observação 4.1.6.

Proposição 5.2.3. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $L \subseteq \mathbb{C}$ uma reta dividindo $\mathbb{C}$ em dois semi-planos fechados $\mathbb{C}^-$ e $\mathbb{C}^+$, $B = X \cap \mathbb{C}^-$, e $C = X \cap \mathbb{C}^+$. Então, o homomorfismo $\beta : \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X)$ é tal que*

$$\ker(\gamma_X \circ \beta) \subseteq \ker(\gamma_B) \times \ker(\gamma_C).$$

Demonstração. Seja $([\tau_1], [\tau_2]) \in \mathrm{Ext}(B) \times \mathrm{Ext}(C)$ tal que $\beta([\tau_1], [\tau_2]) \in \ker(\gamma_X)$. Precisamos provar que $[\tau_1] \in \ker(\gamma_B)$, $[\tau_2] \in \ker(\gamma_C)$.

Denote por $i_1 : B \longrightarrow X$, $i_2 : C \longrightarrow X$ as inclusões. Agora, para $[f] \in \pi^1(X)$ arbitrário, e tomando $\tau_x \in \mathrm{ext}(X)$ trivial qualquer,

$$\begin{aligned} 0 = (\gamma_X \circ \beta([\tau_1], [\tau_2]))([f]) &= \mathrm{ind}(((\tau_1 \circ i_1^*)\hat{+}(\tau_2 \circ i_2^*)\hat{+}\tau_X)(f)) = \\ &= \mathrm{ind}(\tau_1(f|_B)\hat{+}\tau_2(f|_C)\hat{+}\tau_X(f)) = \mathrm{ind}(\tau_1(f|_B)) + \mathrm{ind}(\tau_2(f|_C)) + \mathrm{ind}(\tau_X(f)) = \\ &= \mathrm{ind}(\tau_1(f|_B)) + \mathrm{ind}(\tau_2(f|_C)). \end{aligned}$$

Tome arbitrariamente $g \in C(B)^{-1}$. O conjunto $B \cap L$ é fechado em L, logo o seu complementar em L é uma reunião disjunta de intervalos abertos, digamos, $L \backslash (B \cap L) = \dot{\bigcup}_{n \in \Lambda} I_n$.

Queremos encontrar uma extensão contínua inversível de g para $B \cup L$. Como $B \cup L = B \dot{\cup} L \backslash (B \cap L)$, basta definirmos a extensão g' em $L \backslash (B \cap L)$, e portanto em cada intervalo aberto I_n como acima.

Digamos que, para cada $n \in \Lambda$, $\overline{I_n} = [a_n, b_n]$. Os pontos a_n, b_n estão em $B \cap L$, logo $g(a_n)$ e $g(b_n)$ estão definidos. Parametrizando $\overline{I_n}$ linearmente, via $a_n(1-t) + b_n t$, $t \in [0,1]$, podemos definir $g'|_{\overline{I_n}}$ por

$$g'(a_n(1-t) + b_n t) := g(a_n)(1-t) + g(b_n)t, \quad \forall t \in [0,1],$$

ou eventualmente usando uma outra curva contínua ligando $g(a_n)$ a $g(b_n)$, não passando pelo zero, pois precisamos que g' seja inversível.

Fazendo o procedimento acima para todo $n \in \lambda$, é imediato que a $g'|_{\overline{L \backslash (B \cap L)}}$ obtida assim é contínua; daí, segue-se que a função $g' : B \cup L \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g'|_B = g$, e $g'|_{\overline{L \backslash (B \cap L)}}$ como acima é contínua, e ela é inversível por construção.

Seja $p : X \longrightarrow B \cup L$, onde $p|_B = \mathrm{id}$, e $p|_C$ é a projeção ortogonal de C sobre L; a função p é contínua, logo $f := g' \circ p$ é contínua e inversível, ou seja, $f \in C(X)^{-1}$.

Observe agora que L é um espaço contrátil, logo a função id_L é homotópica a uma função constante, e podemos supor que esta função constante é inversível; agora, como $p|_C = \mathrm{id}_L \circ p|_C$, temos que também a função $p|C$ é homotópica a uma função constante inversível, e daí segue-se que a função $f|_C = g' \circ p|_C$ é homotópica a uma função constante e inversível. Portanto, $\mathrm{ind}(\tau_2(f|_C)) = 0$ e assim, pelo que vimos acima, observando-se que $f|_B = g$,

$$0 = \mathrm{ind}(\tau_1(f|_B)) + \mathrm{ind}(\tau_2(f|_C)) = \mathrm{ind}(\tau_1(f|_B)) = \mathrm{ind}(\tau_1(g)),$$

ou seja, $\gamma_B([\tau_1])([g]) = 0$; segue-se daí que $[\tau_1] \in \ker(\gamma_B)$, e da mesma forma prova-se que $[\tau_2] \in \ker(\gamma_C)$.

$\blacksquare$

Proposição 5.2.4. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $L \subseteq \mathbb{C}$ uma reta dividindo $\mathbb{C}$ em dois semi-planos fechados $\mathbb{C}^-$ e $\mathbb{C}^+$, $X^- = X \cap \mathbb{C}^-$, e $X^+ = X \cap \mathbb{C}^+$. Se $a \in \mathrm{Ext}(X)$ é tal que $a \in \ker(\gamma_X)$, então a cinde em $b \in \mathrm{Ext}(X^-)$ e $c \in \mathrm{Ext}(X^+)$ tais que $a \in \ker(\gamma_{X^-})$, $b \in \ker(\gamma_{X^+})$.*

Demonstração. Seja $J \subseteq L$ um segmento de reta compacto que contenha a projeção ortogonal de X^+ sobre L, e considere o seguinte diagrama de inclusões:

$$\begin{tikzcd}
 & J \arrow[d, "j_3"'] & \\
X^- \cup J \arrow[r, "i_1'"] & X \cup J & X^+ \cup J \arrow[l, "i_2'"'] \\
X^- \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "i_1"] & X \arrow[u, "j"] & X^+ \arrow[u, "j_2"'] \arrow[l, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Como $a \in \ker(\gamma_X)$, sabemos da proposição 5.2.2 que $j_*(a) \in \ker(\gamma_{(X\cup J)}) \subseteq \operatorname{Ext}(X \cup J)$. Sabemos também da proposição 4.2.9 que o homomorfismo

$$\beta : \operatorname{Ext}(X^- \cup J) \times \operatorname{Ext}(X^+ \cup J) \longrightarrow \operatorname{Ext}(X \cup J)$$

é sobrejetor, e portanto existe $(b', c') \in \operatorname{Ext}(X^- \cup J) \times \operatorname{Ext}(X^+ \cup J)$ tal que $j_*(a) = \beta(b', c')$. Ademais, observando-se que $(X \cup J) \cap \mathbb{C}^- = X^- \cup J$, $(X \cup J) \cap \mathbb{C}^+ = X^+ \cup J$, temos da proposição 5.2.3 que

$$\ker(\gamma_{(X\cup J)} \circ \beta) \subseteq \ker(\gamma_{(X^-\cup J)}) \times \ker(\gamma_{(X^+\cup J)}),$$

e portanto $b' \in \ker(\gamma_{(X^-\cup J)})$, $c' \in \ker(\gamma_{(X^+\cup J)})$.

Denote $A^- = (X^- \cup J)/X^-$, $A^+ = (X^+ \cup J)/X^+$, e por $p : X^- \cup J \longrightarrow A^-$, $q : X^+ \cup J \longrightarrow A^+$ as aplicações quocientes. Então, novamente da proposição proposição 5.2.2 vemos que $p_*(b') \in \ker(\gamma_{A^-})$, $q_*(c') \in \ker(\gamma_{A^+})$.

Afirmamos que os homomorfismos γ_{A^-} e γ_{A^+} são injetores: de fato, note que $X^- \cap X^+ = X \cap L \subseteq J$, ou seja, $X^- \cap X^+$ é um subconjunto fechado de J, e assim, se denotarmos $A = J/(X^- \cap X^+)$, temos pelo teorema 5.2.1 que o homomorfismo γ_A é injetor.

Observe que $X^- \cup J = X^- \,\dot\cup\, (J \backslash X^-)$, e que $X^- \cap X^+ = J \cap X^-$; logo,

$$J = (J \cap X^-) \,\dot\cup\, (J \backslash X^-) = (X^- \cap X^+) \,\dot\cup\, (J \backslash X^-),$$

e daí segue-se que A^- é homeomorfo a A, visto que

$$A^- = (X^- \cup (X^- \cap X^+) \,\dot\cup\, (J \backslash X^-))/X^- = (X^- \,\dot\cup\, (J \backslash X^-))/X^- \sim (J \backslash X^-),$$

e

$$A = ((X^- \cap X^+) \,\dot\cup\, (J \backslash X^-))/(X^- \cap X^+) \sim (J \backslash X^-).$$

Se $f : A^- \longrightarrow A$ é um homeomorfismo, então podemos ver pela proposição 5.2.2 que

$f_*(\ker(\gamma_{A^-})) \subseteq \ker(\gamma_A)$, e assim $\ker(\gamma_{A^-}) \subseteq (f)_*^{-1}(\ker(\gamma_A))$. Ora, mas γ_A é injetor, logo temos $(f)_*^{-1}(\ker(\gamma_A)) = \{0\}$, e portanto $\ker(\gamma)A^-) = \{0\}$, de onde fica provado que γ_{A^-} é injetor. Analogamente prova-se que γ_{A^+} é injetor.

Assim, temos $p_*(b') = 0$, $q_*(c') = 0$, ou seja, $b' \in \ker(p_*)$, $c' \in \ker(q_*)$. Agora, sabemos do teorema 4.2.6 que $\ker(p_*) = \mathrm{ran}((j_1)_*)$, $\ker(q_*) = \mathrm{ran}((j_2)_*)$, logo existem $b \in \mathrm{Ext}(X^-)$ e $c \in \mathrm{Ext}(X^+)$ tais que $b' = (j_1)_*(b)$, $c' = (j_2)_*(c)$.

Considere a seqüência de Mayer-Vietoris do teorema 4.2.7,

$$\mathrm{Ext}(X \cap J) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X) \times \mathrm{Ext}(J) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}(X \cup J),$$

ou seja, esta é uma seqüência exata e φ é dada por $\varphi(x, y) = j_*(x) + (j_3)_*(y)$. Observe que $\mathrm{Ext}(X \cap J) = 0$, visto que $X \cap J$ está contido em um segmento de reta e é portanto homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}$; logo, isto implica em φ ser injetor.

Suponha agora que $x \in \mathrm{Ext}(X)$ é tal que $j_*(x) = 0$. Então,

$$\varphi(x, 0) = j_*(x) + (j_3)_*(0) = 0 + 0 = 0,$$

e da injetividade de φ vem que $(x, 0) = (0, 0)$, de onde obtemos $x = 0$, provando deste modo que j_* é injetor.

Usando a comutatividade dos quadrados do diagrama acima, vemos que

$$\begin{aligned} j_*(a) = \beta(b', c') = \beta((j_1)_*(b), (j_2)_*(c)) = (i_1')_* \circ (j_1)_*(b) + (i_2')_* \circ (j_2)_*(c) = \\ = j_* \circ (i_1)_*(b) + j_* \circ (i_2)_*(c) = j_*((i_1)_*(b) + (i_2)_*(c)), \end{aligned}$$

e a injetividade de j_* nos dá então

$$a = (i_1)_*(b) + (i_2)_*(c),$$

ou seja, concluímos que a cinde em b e c.

Se denotarmos por $\beta' : \mathrm{Ext}(X^-) \times \mathrm{Ext}(X^+) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X)$ o homomorfismo da observação 4.1.6, vemos então que $a = \beta'(b, c)$. Agora, sabemos da proposição 5.2.3 que

$$\ker(\gamma_X \circ \beta') \subseteq \ker(\gamma_{X^-}) \times \ker(\gamma_{X^+});$$

como $a \in \ker(gx)$, de imediato temos $b \in \ker(\gamma_{X^-})$, $c \in \ker(\gamma_{X^+})$, e a proposição está provada.

■

Proposição 5.2.5. *Sejam X, Y espaços métricos compactos, $b \in \ker(\gamma_X)$, $c \in \ker(\gamma_Y)$. Então, $b \vee c \in \ker(\gamma_{(X \vee Y)})$.*

Demonstração. Denote $b = [\tau]$, $c = [\tau']$. Tomando arbitrariamente $f \in C(X \vee Y)^{-1}$, claramente temos $f|_X \in C(X)^{-1}$, $f|_Y \in C(Y)^{-1}$, e assim

$$\gamma_{(X \vee Y)}(b \vee c)([f]) = \operatorname{ind}((\tau \vee \tau')(f)) = \operatorname{ind}(\tau(f|_X) \hat{+} \tau'(f|_Y)) =$$
$$= \operatorname{ind}(\tau(f|_X)) + \operatorname{ind}(\tau'(f|_Y)) = \gamma_X(b)([f|_X]) + \gamma_Y(c)([f|_Y]) = 0 + 0 = 0,$$

de onde $b \vee c \in \ker(\gamma_{(X \vee Y)})$, como desejado.

■

Estamos finalmente em condições de provar a injetividade de γ_X para $X \subseteq \mathbb{C}$ arbitrário.

Teorema 5.2.6. *Se $X \subseteq \mathbb{C}$ é compacto, então $\gamma_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é injetor.*

Demonstração. O primeiro passo é determinar um sistema projetivo de espaços métricos compactos adequado aos nossos futuros propósitos. Isto será feito da seguinte forma:

Considere um quadrado $S \subseteq \mathbb{C}$ grande o suficiente, de modo que $X \subseteq S$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, divida S em 2^k retângulos iguais, utilizando retas paralelas aos lados do quadrado S, de modo que o diâmetro dos retângulos tenda para zero quando k tende ao infinito, e defina X_k como sendo o espaço métrico dado pela reunião disjunta das intersecções de X com cada um dos 2^k retângulos; denote por $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ a aplicação natural de identificação de pontos, que é contínua e claramente sobrejetora. Observe que $X_0 = X$.

Isto define um sistema projetivo (X_k, p_k); denotaremos $Y = \varprojlim(X_k, p_k)$, e por $q_n : Y \longrightarrow X_n$ as funções coordenadas, que são sobrejetoras neste caso pois todas as p_k são sobrejetoras.

Tome arbitrariamente $a \in \operatorname{Ext}(X)$ tal que $a \in \ker(\gamma_X)$. Queremos provar que $a = 0$. Inicialmente, afirmamos que existe $(a_k)_k \in \varprojlim(\operatorname{Ext}(X_k), (p_k)_*)$ tal que $a_0 = a$, e $a_k \in \ker(\gamma_{X_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Estes a_k serão construídos recursivamente, como segue:

Seja $a_0 = a$. Considere $X_1 = X^- \vee X^+$, obtido ao cortar-se X com uma linha reta; logo, sabemos da proposição 5.2.4 que existem $b \in \ker(\gamma_{X^-})$, $C \in \ker(\gamma_{X^+})$ tais que a cinde em b e c, ou seja, $a = (p_0)_*(b \vee c)$, onde $p_0 : X^- \vee X^+ \longrightarrow X$ é a função de identificação definida acima.

Defina $a_1 = b \vee c$. Logo, $(p_0) * (a_1) = a_0$, e ainda $a_1 \in \ker(\gamma_{X_1})$, pela proposição 5.2.5.

Ao passarmos para X_2, os conjuntos X^- e X^+ são possivelmente ambos divididos em dois pedaços cada um; escreveremos $X_2 = X^{--} \vee X^{-+} \vee X^{+-} \vee X^{++}$, onde $X^{--} \vee X^{-+}$ define a divisão de X^-, e $X^{+-} \vee X^{++}$ define a divisão de X^+.

Aplicando a proposição 5.2.4 separadamente para b e c, obtemos uma cisão de b em $b^- \in \ker(\gamma_{X^{--}})$ e $b^+ \in \ker(\gamma_{X^{-+}})$, e uma cisão de c em $c^- \in \ker(\gamma_{X^{+-}})$ e $c^+ \in \ker(\gamma_{X^{++}})$.

Defina $a_2 = b^- \vee b^+ \vee c^- \vee c^+ \in \mathrm{Ext}(X_2)$. Então, por aplicações repetidas da proposição 5.2.5, vemos que $a_2 \in \ker(\gamma_{X_2})$.

Queremos provar agora que $(p_1)_*(a_2) = a_1$, ou seja, $(p_1)_*(b^- \vee b^+ \vee c^- \vee c^+) = b \vee c$; para tanto, precisamos ter uma visão mais precisa dos espaços que estamos trabalhando, algo que é dado com o seguinte diagrama comutativo de inclusões, mais a aplicação de identificação p_1:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X_1 & & & \\
 & & X^- \arrow[ur, "u"] & & X^+ \arrow[ul, "v"'] & & \\
X^{--} \arrow[uurrr, "i'_-"] \arrow[urr, "r_-"'] \arrow[drrr, "i_-"'] & & X^{-+} \arrow[u, "r_+"] \arrow[uur, "i'_+"'] \arrow[dr, "i_+"] & & X^{+-} \arrow[u, "s_-"'] \arrow[uul, "j'_-"] \arrow[dl, "j_-"'] & & X^{++} \arrow[ull, "s_+"] \arrow[uulll, "j'_+"'] \arrow[dlll, "j_+"] \\
 & & & X_2 \arrow[uuu, "p_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Tendo em vista o diagrama acima, vemos que

$$b \vee c = u_*(b) + v_*(c), \quad b = (r_-)_*(b^-) + (r_+)_*(b^+), \quad c = (s_-)_*(c^-) + (s_+)_*(c^+),$$

e também que

$$b^- \vee b^+ \vee c^- \vee c^+ = (i_-)_*(b^-) + (i_+)_*(b^+) + (j_-)_*(c^-) + (j_+)_*(c^+).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(p_1)_*(b^- \vee b^+ \vee c^- \vee c^+) &= (p_1)_*((i_-)_*(b^-) + (i_+)_*(b^+) + (j_-)_*(c^-) + (j_+)_*(c^+)) = \\
&= (p_1)_* \circ (i_-)_*(b^-) + (p_1)_* \circ (i_+)_*(b^+) + (p_1)_* \circ (j_-)_*(c^-) + (p_1)_* \circ (j_+)_*(c^+) = \\
&= (p_1 \circ i_-)_*(b^-) + (p_1 \circ i_+)_*(b^+) + (p_1 \circ j_-)_*(c^-) + (p_1 \circ j_+)_*(c^+) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (i'_-)_*(b^-) + (i'_+)_*(b^+) + (j'_-)_*(c^-) + (j'_+)_*(c^+) = \\
&= (u \circ r_-)_*(b^-) + (u \circ r_+)_*(b^+) + (v \circ s_-)_*(c^-) + (v \circ s_+)_*(c^+) = \\
&= u_* \circ (r_-)_*(b^-) + u_* \circ (r_+)_*(b^+) + v_* \circ (s_-)_*(c^-) + v_* \circ (s_+)_*(c^+) = \\
&= u_*((r_-)_*(b^-) + (r_+)_*(b^+)) + v_*((s_-)_*(c^-) + (s_+)_*(c^+)) = \\
&= u_*(b) + v_*(c) = b \vee c,
\end{aligned}
$$

de onde temos $(p_1)_*(a_2) = a_1$, como desejado.

Os $a_k \in \operatorname{Ext}(X_k)$ tais que $(p_{k-1})_*(a_k) = a_{k-1}$ e $a_k \in \ker(\gamma_{X_k})$ para $k \geq 3$ são construídos recursivamente de maneira completamente análoga, utilizando a proposição 5.2.4 em cada um dos fatores obtidos no passo anterior, e usando a proposição 5.2.5 repetidas vezes.

Segue-se daí portanto que $(a_k)_k \in \varprojlim(\operatorname{Ext}(X_k), (p_k)_*)$, e ele é tal que $a_0 = a$, e $a_k \in \ker(\gamma_{X_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, provando o afirmado.

Agora, é sabido do teorema 4.3.3 que o homomorfismo $\psi_Y : \operatorname{Ext}(Y) \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$ é sobrejetor; relembrando, este homomorfismo era dado por $\psi_Y(d) = ((q_k)_*(d))_k$, para todo $d \in \operatorname{Ext}(Y)$.

Logo, existe $d \in \operatorname{Ext}(Y)$ tal que $\psi_Y(d) = (a_k)_k$, ou seja, $((q_k)_*(d))_k = (a_k)_k$; em particular, vemos que $(q_0)_*(d) = a_0 = a$.

Observe que o diâmetro das componentes conexas dos espaços X_k tendem para zero quando $k \longrightarrow \infty$, por construção; assim, da observação E.2.7 vemos que o espaço Y é totalmente desconexo, e então $\operatorname{Ext}(Y) = 0$, de onde temos de imediato $d = 0$, e portanto

$$a = a_0 = (q_0)_*(d) = (q_0)_*(0) = 0,$$

provando que $a = 0$. Como $a \in \ker(\gamma_X)$ havia sido tomado arbitrariamente, concluímos que $\ker(\gamma_X) = \{0\}$, ou seja, γ_X é injetor, como queríamos provar.

■

O próximo passo é estabelecer a sobrejetividade de γ_X para todo $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Aqui, também provaremos este resultado primeiro em um caso particular, e depois faremos o caso geral, recorrendo novamente a um argumento via limites projetivos. Precisamos de mais um conceito:

Tome $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto, e $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ uma curva fechada simples, suave por partes e com orientação positiva, isto é, a parametrização de Γ é tal que a componente limitada de $\mathbb{C}$ que é limitada por Γ fica à "esquerda" de Γ; a grosso modo, a curva Γ é desenhada no sentido anti-horário. Considere $f \in C(X)$ tal que $f|_\Gamma \in C(\Gamma)$ é inversível. Então, tomando um homeomorfismo $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ que preserva orientação, podemos definir o *índice de f com relação à curva* Γ, denotado $\operatorname{ind}_\Gamma(f)$, como sendo o inteiro

$$\operatorname{ind}_\Gamma(f) = \operatorname{wn}(f \circ g).$$

Aqui, $\operatorname{wn}(f \circ g)$ denota o winding number da função $f \circ g$, como visto na seção A.5. O inteiro $\operatorname{ind}_\Gamma(f)$ independe do homeomorfismo $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ que preserva orientação. Se Γ consiste em uma reunião disjunta de curvas $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ fechadas simples, orientadas e suaves por partes, podemos também definir $\operatorname{ind}_\Gamma(f)$ como sendo

$$\operatorname{ind}_\Gamma(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \operatorname{ind}_{\Gamma_i}(f),$$

onde $\varepsilon_i = 1$ caso Γ_i tenha orientação positiva, e $\varepsilon_i = -1$ caso Γ_i tenha orientação negativa.

Proposição 5.2.7. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto cuja fronteira ∂X consiste em uma quantidade finita de curvas fechadas simples, suaves por partes, e disjuntas. Então, o homomorfismo $\gamma_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é sobrejetor.*

Demonstração. A hipótese sobre a fronteira de X implica em haver apenas uma quantidade finita de componentes limitadas em $\mathbb{C} \backslash X$; denotaremos tais componentes por $\mathcal{O}_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Para cada $k = 1, \ldots, m$, fixe $\lambda_k \in \mathcal{O}_k$ arbitrariamente. Então, sabemos do exemplo 5.1.1 que $\pi^1(X)$ é o grupo livre abeliano gerado por $\{[\zeta - \lambda_k 1] : k = 1, \ldots, m\}$. Logo, o grupo $\operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é gerado pelos homomorfismos $h_j : \pi^1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, m$, tais que

$$h_j([\zeta - \lambda_k 1]) = \delta_{j,k},$$

ou seja, $h_j([\zeta - \lambda_k 1]) = 1$ caso $j = k$, e $h_j([\zeta - \lambda_k 1]) = 0$ caso contrário.

Como para obtermos a sobrejetividade de γ_X basta encontrarmos elementos de $\operatorname{Ext}(X)$ que atinjam os geradores de $\operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ acima explicitados (pois γ_X é um homomorfismo), será suficiente construir extensões $\tau_j : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_j)$ para $j = 1, \ldots, m$ tais que $\operatorname{ind}(\tau_j(\zeta - \lambda_k 1)) = \delta_{j,k}$ para todo $k = 1, \ldots, m$, visto que, daí,

$$\gamma_X([\tau_j])([\zeta - \lambda_k 1]) = \operatorname{ind}(\tau_j(\zeta - \lambda_k 1)) = \delta_{j,k} = h_j([\zeta - \lambda_k 1]),$$

e potanto $\gamma_X([\tau_j]) = h_j$. Isto é o que faremos.

Fixe um $j = 1, \ldots, m$ arbitrariamente. A fronteira de $\mathcal{O}_j$ consiste em algumas das curvas que constituem a fronteira de X; mais precisamente, $\mathcal{O}_j$ possui uma fronteira exterior, que separa $\mathcal{O}_j$ da componente não limitada de $\mathbb{C}\backslash\mathcal{O}_j$, e possivelmente alguns buracos. Denotaremos por Γ_0 a curva que determina a fronteira exterior de $\mathcal{O}_j$, e por $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, as curvas que determinam as fronteiras dos possíveis p buracos de $\mathcal{O}_j$. Queremos considerar a orientação positiva padrão em $\partial\mathcal{O}_j$; isto é feito considerando-se Γ_0 como estando orientada positivamente, e as curvas $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, estando contidas na região limitada do plano limitada pela curva Γ_0, possuem orientação contrária a orientação da curva Γ_0. Dado $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\partial\mathcal{O}_j$, teremos portanto que

$$\mathrm{ind}_{\partial\mathcal{O}_j}(\zeta - \lambda 1) = \mathrm{ind}_{\Gamma_0}(\zeta - \lambda 1) - \textstyle\sum_{i=1}^{p}\mathrm{ind}_{\Gamma_i}(\zeta - \lambda 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \in \mathcal{O}_j \\ 0 & \text{se } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{O}_j}. \end{cases}$$

Em particular, para $k = 1, \ldots, m$ temos $\mathrm{ind}_{\partial\mathcal{O}_j}(\zeta - \lambda_k 1) = \delta_{j,k}$.

Tome agora $g_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma_0$ um homeomorfismo que inverte a orientação, e $g_i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma_i$ um homeomorfismo que preserva a orientação, para cada $i = 1, \ldots, p$.

Estes g_i podem ser vistos como elementos de $C(\mathbb{S}^1)$, logo podemos considerar os operadores de Toeplitz $T_{g_0}, T_{g_1}, \ldots, T_{g_1}$. Pela exposição da seção A.5, estes operadores são essencialmente normais, e ainda $\sigma_e(T_{g_i}) = \mathrm{ran}(g_i) = \Gamma_i$, $i = 0, 1, \ldots, p$. Ademais, para todo $k = 1, \ldots, m$, o ponto $\lambda_k \in \mathcal{O}_k$ não está em $\Gamma_0 = \mathrm{ran}(g_0)$, e assim a função $g_0 - \lambda_k 1$ é inversível. Portanto, o operador $T_{g_0} - \lambda_k I = T_{g_0} - \lambda_k T_1 = T_{(g_0 - \lambda_k 1)}$ é de Fredholm, e

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(T_{g_0} - \lambda_k I) = \mathrm{ind}(T_{(g_0 - \lambda_k 1)}) = -\mathrm{wn}(g_0 - \lambda_k 1) = \\ = -\mathrm{wn}((\zeta - \lambda_k 1) \circ g_0) = \mathrm{ind}_{\Gamma_0}(\zeta - \lambda_k 1), \end{aligned}$$

onde houve a troca de sinal na última igualdade devido ao fato que g_0 inverte a orientação. Do mesmo modo, prova-se que, para todo $i = 1, \ldots, p$ e todo $k = 1, \ldots, m$, o operador $T_{g_i} - \lambda_k I$ é de Fredholm, e $\mathrm{ind}(T_{g_i} - \lambda_k I) = -\mathrm{ind}_{\Gamma_i}(\zeta - \lambda_k 1)$ (note a diferença de sinal ocasionada pelo fato de g_i preservar a orientação).

Pela proposição B.1.5, seja $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal tal que $\sigma(N) = \sigma_e(N) = X$. Para todo $k = 1, \ldots, m$, observando que $\lambda_k \notin X$, denotando $f = (\zeta - \lambda_k 1) \in C(X)$, temos que f é inversível; como

$$\sigma(\pi(N - \lambda_k I)) = \sigma(\pi(f(N))) = \sigma(f(\pi(N))) = f(\sigma(\pi(N))) = f(X) = \mathrm{ran}(f),$$

vemos que $0 \notin \sigma(\pi(N - \lambda_k I))$, o que implica em $\pi(N - \lambda_k I)$ ser inversível, e daí concluímos que o operador $N - \lambda_k I$ é de Fredholm. Como este operador é normal, temos $\mathrm{ind}(N - \lambda_k I) = 0$.

Defina um operador T_j por

$$T_j = (\oplus_{i=0}^{p} T_{g_i}) \oplus N.$$

Note que T_j é essencialmente normal por definição, e também $\sigma_e(T_j)$ =X, visto que $\Gamma_i \subseteq \partial X \subseteq X$ para todo i, e assim

$$\sigma_e(T_j) = (\bigcup_{i=01}^{p} \sigma_e(T_{g_i})) \cup \sigma_e(N) = (\bigcup_{i=01}^{p} \Gamma_i) \cup X = X.$$

Além disso, para $k = 1, \ldots, m$, o operador $T_j - \lambda_k I$ é de Fredholm, pois

$$T_j - \lambda_k I = (\oplus_{i=0}^{p} (T_{g_i} - \lambda_k I)) \oplus (N - \lambda_k I),$$

e cada uma das componentes desta soma direta é sabida ser um operador de Fredholm.

Calculando o índice de Fredholm do operador $T_j - \lambda_k I$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T_j - \lambda_k I) &= \operatorname{ind}((\oplus_{i=0}^{p} (T_{g_i} - \lambda_k I)) \oplus (N - \lambda_k I)) = \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ind}(T_{g_i} - \lambda_k I) + \operatorname{ind}(N - \lambda_k I) = \\ &= \operatorname{ind}_{\Gamma_0}(\zeta - \lambda_k 1) - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \operatorname{ind}_{\Gamma_i}(\zeta - \lambda_k 1) + 0 = \\ &= \operatorname{ind}_{\partial \mathcal{O}_j}(\zeta - \lambda_k 1) = \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{H}_j$ o espaço de Hilbert onde T_j age. Observando agora que $\sigma(\pi(T_j)) = \sigma_e(T_j) = X$, e que $\pi(T_j)$ é normal, pois T_j é essencialmente normal, podemos definir uma extensão $\tau_j : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_j)$ através do cálculo funcional contínuo de $\pi(T_j)$, isto é, $\tau_j(f) = f(\pi(T_j)), \forall f \in C(X)$. Em virtude do que acabamos de ver acima,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\tau(\zeta - \lambda_k 1)) = \operatorname{ind}((\zeta - \lambda_k 1)(\pi(T_j))) = \operatorname{ind}(\pi(T_j) - \lambda_k 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_j)}) = \\ = \operatorname{ind}(\pi(T_j - \lambda_k I)) = \operatorname{ind}(T_j - \lambda_k I) = \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

Como j e k haviam sido tomados arbitrariamente, segue-se do que havia sido observado no início que o homomorfismo γ_X é sobrejetor, e o resultado está portanto provado.

■

Façamos agora a prova da sobrejetividade no caso geral.

Teorema 5.2.8. *Se $X \subseteq \mathbb{C}$ é compacto, então o homomorfismo $\gamma_X : \operatorname{Ext}(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é sobrejetor.*

Demonstração. Novamente, precisamos de um sistema projetivo de espaços métricos compactos adequado: para cada $k \in \mathbb{N}^*$, considere um número finito n_k de bolas fechadas $B_1^k, \ldots, B_{n_k}^k$ de raio $1/k$, que formam uma cobertura de X, e tais que $B_i^k \cap X \neq \emptyset$, para todo $i = 1, \ldots, n_k$. Seja $Y_k = B_1^k \cup \cdots \cup B_{n_k}^k$, e defina

$$X_k = Y_1 \cap \cdots \cap Y_k.$$

É fácil ver que, por construção, o conjunto X_k é compacto, e a fronteira de X_k consiste em uma quantidade finita de curvas fechadas simples, suaves por partes, e disjuntas, pois X_k é determinado por uma quantidade finita de operações (isto é, reunião e intersecção) em uma quantidade finita de bolas fechadas.

Também por construção obtemos $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots$. Dado $k \in \mathbb{N}^*$, como $B_i^k \cap X \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n_k$, e os raios das bolas B_i^k são iguais a $1/k$, vemos que $\operatorname{diam}(Y_k) \leq \operatorname{diam}(X) + 4/k$, e portanto $\operatorname{diam}(X_k) \leq \operatorname{diam}(X) + 4/k$. Logo, um elemento $x \in X_k$ não pode distar de X mais do que $4/k$. Agora, se $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_k$, então x não pode distar de X mais do que $4/k$, para *todo* $k \in \mathbb{N}^*$, o que implica em $\operatorname{dist}(x, X) = 0$, e portanto $x \in X$, ou seja, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_k \subseteq X$. Como temos também obviamente $X \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_k$, segue-se que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_k = X$.

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, seja $p_k : X_{k+1} \longrightarrow X_k$ a inclusão. Obtemos desta forma um sistema projetivo (X_k, p_k), e sabemos do exemplo 4.3.1 que, neste caso, o limite projetivo $\varprojlim(X_k, p_k)$ é (homeomorfo a) o espaço $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_k = X$. Para simplificar a notação, sem perda de generalidade suporemos portanto que $\varprojlim(X_k, p_k) = X$. Assim, em particular as funções coordenadas $q_n : X \longrightarrow X_n$ do limite projetivo ficam sendo simplesmente as inclusões.

Seja $h \in \operatorname{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ arbitrário. Queremos provar que existe $a \in \operatorname{Ext}(X)$ tal que $\gamma_X(a) = h$. Faremos isto como segue:

Considere, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $h_k = (q_k)_\#(h) \in \operatorname{Hom}(\pi^1(X_k), \mathbb{Z})$, e note que

$$(p_k)_\#(h_{k+1}) = (p_k)_\# \circ (q_{k+1})_\#(h) = (p_k \circ q_{k+1})_\#(h) = (q_k)_\#(h) = h_k.$$

Sabemos da proposição 5.2.7 que o homomorfismo $\gamma_{X_k} : \operatorname{Ext}(X_k) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi^1(X_k), \mathbb{Z})$ é sobrejetor, logo existe $a_k \in \operatorname{Ext}(X_k)$ tal que $h_k = \gamma_{X_k}(a_k)$. Observe que, pela naturalidade de γ,

$$\gamma_{X_k}((p_k)_*(a_{k+1})) = (p_k)_\# \circ \gamma_{X_{k+1}}(a_{k+1}) = (p_k)_\#(h_{k+1}) = h_k = \gamma_{X_k}(a_k),$$

de onde a injetividade de γ_{X_k}, assegurada pelo teorema 5.2.6, nos dá $(p_k)_*(a_{k+1}) = a_k$. Em outras palavras, vemos que $(a_k)_k \in \varprojlim \operatorname{Ext}(X_k)$.

Agora, é sabido do teorema 4.3.3 que o homomorfismo $\psi_X : \text{Ext}(X) \longrightarrow \varprojlim \text{Ext}(X_k)$ é sobrejetor (relembrando, $\psi_X(x) = ((q_k)_*(x))_k \ \forall x \in \text{Ext}(X)$). Assim, existe $a \in \text{Ext}(X)$ tal que $\psi_X(a) = (a_k)_k$, ou seja, tal que $(q_k)_*(a) = a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Afirmamos que $\gamma_X(a) = h$. De fato, tome arbitrariamente $f \in C(X)^{-1}$. Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ uma bola fechada contendo X_1. Assim, $X \subseteq D$, e pelo teorema de extensão de Tietze podemos considerar $F \in C(D)$ uma extensão de f. Agora, $F|_X = f$ não se anula em nenhum ponto de X, logo pela continuidade uniforme de F vemos que existe uma vizinhança aberta A de X tal que F não se anula em nenhum ponto de A. Tome um $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande, de forma que $X_n \subseteq A$. Assim, vemos que a função $f_n := F|_{X_n}$ é inversível, ou seja, $f_n \in C(X_n)^{-1}$. Observando que $f = f_n \circ q_n$, temos novamente da naturalidade de γ que

$$\begin{aligned}\gamma_X(a)([f]) = \gamma_X(a)([f_n \circ q_n]) = (q_n)_\#(\gamma_X(a))([f_n]) = \gamma_{X_n} \circ (q_n)_*(a)([f_n]) = \\ = \gamma_{X_n}(a_n)([f_n]) = h_n([f_n]) = (q_n)_\#(h)([f_n]) = h([f_n \circ q_n]) = h([f]),\end{aligned}$$

e a arbitrariedade de f implica portanto em $\gamma_X(a) = h$, verificando o afirmado.

Segue-se que o homomorfismo $\gamma_X : \text{Ext}(X) \longrightarrow \text{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é sobrejetor, como queríamos provar.

■

Por referência, agrupamos os resultados obtidos nesta seção com o seguinte corolário.

Corolário 5.2.9. *Se $X \subseteq \mathbb{C}$ é compacto, então $\gamma_X : \text{Ext}(X) \longrightarrow \text{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Conseqüência imediata dos teoremas 5.2.6 e 5.2.8.

■

Uma prova do corolário 5.2.9 que envolva apenas técnicas de teoria de operadores foi encontrada só quase vinte anos mais tarde, e publicada em 1991 com o artigo [4], de I. D. Berg e K. R. Davidson.

5.3 Aplicações à Teoria de Operadores

Após todos os aspectos da teoria de Brown-Douglas-Fillmore estudados nas seções e capítulos anteriores, estamos finalmente em uma posição onde podemos atacar, com sucesso, o problema de classificação de operadores essencialmente normais, via equivalência unitária módulo os compactos. Utilizaremos em particular a injetividade do homomorfismo γ_X, obtida na seção anterior.

Teorema (Brown-Douglas-Fillmore). *Sejam $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ operadores essencialmente normais. Então, $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$ se, e somente se, $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ e*

$$\operatorname{ind}(T_1 - \lambda I) = \operatorname{ind}(T_2 - \lambda I) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_e(T_1).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2$, então existe $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ unitário e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ tais que $T_2 = UT_1U^* + K$. Assim,

$$\sigma_e(T_2) = \sigma(\pi(T_2)) = \sigma(\pi(UT_1U^* + K)) = \sigma(\pi(UT_1U^*)) = \sigma(\pi(T_1)) = \sigma_e(T_1),$$

e para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_e(T_1)$ temos

$$\begin{aligned} &\operatorname{ind}(T_2 - \lambda I_{\mathcal{H}_2}) = \operatorname{ind}(UT_1U^* + K - \lambda I_{\mathcal{H}_2}) = \operatorname{ind}(U(T_1 - \lambda I_{\mathcal{H}_1})U^* + K) = \\ &\quad = \operatorname{ind}(U(T_1 - \lambda I_{\mathcal{H}_1})U^*) = \operatorname{ind}(U) + \operatorname{ind}(T_1 - \lambda I_{\mathcal{H}_1}) - \operatorname{ind}(U) = \operatorname{ind}(T_1 - \lambda I_{\mathcal{H}_1}). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Denote $X = \sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$. Os elementos $\pi(T_1) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$ e $\pi(T_2) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ são normais, e $\sigma(\pi(T_1)) = \sigma(\pi(T_2)) = X$, logo eles determinam extensões $\tau_1 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)$, $\tau_2 : C(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)$ via cálculo funcional contínuo, ou seja, $\tau_1(f) = f(\pi(T_1))$, $\tau_2(f) = f(\pi(T_2))$, para todo $f \in C(X)$.

Considere $\{\lambda_n\}_{n\in\Lambda} \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto com exatamente um ponto λ_n em cada componente limitada de $\mathbb{C}\backslash X$. Sabemos então do exemplo 5.1.1 que grupo $\pi^1(X)$ é o grupo livre abeliano gerado por $\{[\zeta - \lambda_n 1] : n \in \Lambda\}$. Agora, para todo $n \in \Lambda$ temos $\lambda_n \notin X$, logo $\operatorname{ind}(T_1 - \lambda_n I) = \operatorname{ind}(T_2 - \lambda_n I)$ por hipótese, e então

$$\begin{aligned} \gamma_X([\tau_1])([\zeta - \lambda_n 1]) &= \operatorname{ind}(\tau_1(\zeta - \lambda_n 1)) = \operatorname{ind}((\zeta - \lambda_n 1)(\pi(T_1))) = \\ &= \operatorname{ind}(\pi(T_1) - \lambda_n 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_1)}) = \operatorname{ind}(\pi(T_1 - \lambda_n I)) = \\ &= \operatorname{ind}(T_1 - \lambda_n I) = \operatorname{ind}(T_2 - \lambda_n I) = \\ &= \operatorname{ind}(\pi(T_2 - \lambda_n I)) = \operatorname{ind}(\pi(T_2) - \lambda_n 1_{\mathcal{Q}(\mathcal{H}_2)}) = \\ &= \operatorname{ind}((\zeta - \lambda_n 1)(\pi(T_2))) = \operatorname{ind}(\tau_2(\zeta - \lambda_n 1)) = \\ &= \gamma_X([\tau_2])([\zeta - \lambda_n 1]), \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma_X([\tau_1])$ e $\gamma_X([\tau_1])$ coincidem nos geradores de $\pi^1(X)$, de onde temos $\gamma_X([\tau_1]) = \gamma_X([\tau_2])$. A injetividade do homomorfismo γ_X implica então em $[\tau_1] = [\tau_2]$, de onde temos que as extensões τ_1 e τ_2 são equivalentes, e portanto que T_1 e T_2 são unitariamente equivalentes módulo os compactos, em virtude da observação 2.2.8.

■

Encerra-se aqui portanto o objetivo principal deste trabalho. Para concluir, vejamos dois corolários deste teorema; aparentemente, o corolário 5.3.2, até os dias de hoje, ainda não possui uma prova direta que envolva apenas conceitos da teoria clássica de operadores.

Corolário 5.3.1. *Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é da forma $T = N + K$ para $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ se, e somente se, T é essencialmente normal e* $\operatorname{ind}(T - \lambda I) = 0$ *para todo $\lambda \notin \sigma_e(T)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $T = N + K$ para $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, então T é claramente essencialmente normal; ainda, para todo $\lambda \notin \sigma_e(T)$,

$$\operatorname{ind}(T - \lambda I) = \operatorname{ind}(N + K - \lambda I) = \operatorname{ind}(N - \lambda I) = 0,$$

pois todo operador normal de Fredholm possui índice zero.

($\Leftarrow$) Pela proposição B.1.5, seja $\widetilde{N} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal tal que $\sigma(\widetilde{N}) = \sigma_e(\widetilde{N}) = \sigma_e(T)$. É óbvio que $\operatorname{ind}(\widetilde{N} - \lambda I) = 0$ para todo $\lambda \notin \sigma_e(\widetilde{N})$, logo o teorema de Brown-Douglas-Fillmore implica em $T \sim_{\mathcal{K}} \widetilde{N}$. Se um operador unitário U e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ são tais que $T = U\widetilde{N}U^* + K$, então $N = U\widetilde{N}U^*$ é um operador normal, e $T = N + K$.

■

Corolário 5.3.2. *O subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formado pelos operadores da forma $N + K$, com $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, é fechado na topologia da norma.*

Demonstração. Suponha que $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ é uma seqüência de operadores que são perturbações compactas de operadores normais, e tais que $T_k \longrightarrow T$ na topologia da norma, para algum $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Queremos provar que T também é perturbação compacta de um operador normal.

Os operadores T_k são essencialmente normais, logo $T_k^* T_k - T_k T_k^*$ é compacto para todo $k \in \mathbb{N}^*$; ademais, como

$$\lim_{k \to \infty} T_k^* T_k - T_k T_k^* = T^* T - T T^*,$$

vemos que também $T^*T - TT^*$ é compacto, ou seja, T é essencialmente normal.

Se $\lambda \notin \sigma_e(T)$, então $T - \lambda I$ é de Fredholm; como $T_k - \lambda I$ converge para $T - \lambda I$, do fato de o subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formado pelos operadores de Fredholm ser aberto, vemos que existe um $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_k - \lambda I$ é de Fredholm para todo $k > k_0$. Portanto, em particular $\lambda \notin \sigma_e(T_k)$ para todo $k > k_0$, e o corolário 5.3.1 nos diz portanto que $\operatorname{ind}(T_k - \lambda I) = 0$ para todo $k > k_0$.

Agora, o índice de Fredholm é uma função contínua, logo

$$\operatorname{ind}(T - \lambda I) = \operatorname{ind}(\lim_{k \to \infty} (T_k - \lambda I)) = \lim_{k \to \infty} \operatorname{ind}(T_k - \lambda I) = 0,$$

de onde vemos, aplicando novamente o corolário 5.3.1, que o operador T é perturbação compacta de um operador normal, como queríamos demonstrar.

■

Apêndice A

Teorema Espectral, Operadores Especiais

A.1 Medidas Espectrais e o Teorema Espectral

Esta seção contém um mínimo de informações sobre os conceitos de medida espectral, integrais espectrais e o Teorema Espectral para operadores normais, bem como a relação entre medidas espectrais e *-representações, que serão assumidos e utilizados no texto principal. Maiores informações sobre este assunto e demonstrações podem ser encontradas por exemplo em [10] ou [21]. Para estudar esta teoria é indispensável o conhecimento de noções da teoria geral da medida; os conceitos e resultados necessários sobre teoria da medida estão expostos nas referências acima citadas, e também em [16].

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ o subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formado pelas projeções. Dado um espaço topológico X, denotaremos por $\mathcal{B}_X$ a σ-álgebra de Borel de X.

Uma *medida espectral* sobre o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}_X)$ é uma aplicação

$$\mathscr{E} : \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

1. $\mathscr{E}(\emptyset) = 0$, $\mathscr{E}(X) = I$;

2. Se $\{X_n\}_n$ é uma coleção enumerável de subconjuntos borelianos de X disjuntos dois a dois tal que $Y = \bigcup_n X_n$, então $\mathscr{E}(Y) = \sum_n \mathscr{E}(X_n)$, onde esta soma é interpretada na topologia pontual forte de operadores (strong operator topology).

Na definição acima, podemos equivalentemente interpretar a soma do item 2 na topologia pontual fraca de operadores (weak operator topology), ou poderíamos ter substituído o item 2 por outro equivalente, requerendo que, para $\{X_n\}_n$ como acima, as projeções $\mathscr{E}(X_n)$ são ortogonais duas a duas, e a imagem de $\mathscr{E}(Y)$ é a soma direta das imagens dos $\mathscr{E}(X_n)$; para mais detalhes sobre isto, ver por exemplo [21], proposição 2.5.4 e definição 3.5.11.

Considere X um espaço métrico compacto. Denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ a C*-álgebra das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ limitadas e Borel-mensuráveis (com a norma do supremo). Seja $\mathscr{E}$ uma medida espectral sobre $(X, \mathcal{B}_X)$. Dada $f \in \mathcal{B}(X)$, é possível associar a f, utilizando $\mathscr{E}$, um operador $\varphi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de modo que a correspondência

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B}(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \varphi(f) \end{aligned}$$

define uma *-representação de $\mathcal{B}(X)$. O operador $\varphi(f)$ é a chamada *integral espectral* de f com respeito a medida espectral $\mathscr{E}$, também denotado por

$$\varphi(f) = \int_X f \, d\mathscr{E}.$$

Uma propriedade da integral espectral que estaremos utilizando é que, para todo $Y \in \mathcal{B}_X$,

$$\mathscr{E}(Y) = \varphi(1_Y) = \int_X 1_Y \, d\mathscr{E},$$

onde $1_Y : X \longrightarrow \mathbb{C}$ denota a função característica do subconjunto Y de X. Em particular, dados $Y, Z \in \mathcal{B}_X$, vemos que $\mathscr{E}(Y)$ comuta com $\mathscr{E}(Z)$, pois

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(Y)\mathscr{E}(Z) &= \varphi(1_Y)\varphi(1_Z) = \varphi(1_Y 1_Z) = \varphi(1_{Y\cap Z}) = \\ &= \varphi(1_{Z\cap Y}) = \varphi(1_Z 1_Y) = \varphi(1_Z)\varphi(1_Y) = \mathscr{E}(Z)\mathscr{E}(Y). \end{aligned}$$

Para X um espaço métrico compacto, dada agora uma *-representação $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, é fato que existe uma medida espectral $\mathscr{E}$ sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ tal que, para todo $f \in C(X)$, $\varphi(f) = \int_X f \, d\mathscr{E}$; esta medida é dita ser a *medida espectral associada a* φ. Diremos que a *extensão da *-representação* φ *para* $\mathcal{B}(X)$ é a *-representação $\widetilde{\varphi}$ de $\mathcal{B}(X)$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \mathcal{B}(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \int_X f \, d\mathscr{E}. \end{aligned}$$

Esta representação é tal que, para qualquer $f \in C(X)$, $\widetilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$.

Por referência, enunciaremos aqui a versão do teorema espectral para operadores normais de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que estaremos utilizando:

Teorema (Teorema Espectral). *Seja $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Então, existe uma correspondência 1-1 entre operadores normais $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com $\sigma(T) \subseteq X$, e medidas espectrais $\mathscr{E} : \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$; esta correspondência é dada por*

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \int_X \zeta(x)\ d\mu_{\xi,\eta}(x)\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

onde a medida $\mu_{\xi,\eta}$ é definida por $\mu_{\xi,\eta}(Y) = \langle \mathscr{E}(Y)\xi, \eta \rangle$.

A proposição A.1.2 é técnica e será necessária para a prova do teorema 2.4.4. No próximo lema, estaremos usando o fato de que, se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são C*-álgebras e $\mathfrak{C}$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathfrak{A}$, então dado um *-homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ temos que $\varphi(\mathfrak{C})$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathfrak{B}$; para uma prova deste fato ver por exemplo [5], proposição 2.3.1.

Lema A.1.1. *Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são C*-álgebras e $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é um *-homomorfismo, então dado um subconjunto $D \subseteq \mathfrak{A}$ temos $\varphi(C^*(D)) = C^*(\varphi(D))$.*

Demonstração. Pelo observado acima, $\varphi(C^*(D))$ é uma sub-C*-álgebra de $\mathfrak{B}$; como $D \subseteq C^*(D)$, temos $\varphi(D) \subseteq \varphi(C^*(D))$, de onde segue $C^*(\varphi(D)) \subseteq \varphi(C^*(D))$.

Por outro lado, dado um elemento de $C^*(D)$ da forma

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} d_{ij},$$

onde $d_{ij} \in (D \cup D^*)\ \forall i, j$, temos

$$\textstyle\varphi(\sum_i \prod_j d_{ij}) = \sum_i \prod_j \varphi(d_{ij}) \in C^*(\varphi(D));$$

a densidade de elementos em $C^*(D)$ desta forma e a continuidade de φ nos dão $\varphi(C^*(D)) \subseteq C^*(\varphi(D))$, o que estabelece a igualdade desejada.

$\blacksquare$

Para a proposição seguinte, utilizaremos o fato de que todo espaço métrico compacto possui uma base enumerável de abertos.

Proposição A.1.2. *Sejam X um espaço métrico compacto, $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma *-representação de $C(X)$, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma base de abertos de X, e $\mathscr{E}$ a medida espectral associada a φ. Então,* $\operatorname{ran}(\varphi) \subseteq C^*(I, \{\mathscr{E}(U_n)\}_n)$.

Demonstração. Seja $\widetilde{\varphi}$ a extensão de φ para $\mathcal{B}(X)$, e lembremos que $\mathscr{E}(U_n) = \widetilde{\varphi}(1_{U_n})$. Então, se provarmos que $C(X) \subseteq C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$ teremos pelo lema A.1.1 que

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(\varphi) = \varphi(C(X)) = \widetilde{\varphi}(C(X)) \subseteq \widetilde{\varphi}(C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)) = \\ = C^*(I, \widetilde{\varphi}(\{1_{U_n}\}_n)) = C^*(I, \{\mathscr{E}(U_n)\}_n).\end{aligned}$$

Basta portanto provarmos que $C(X) \subseteq C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$; para tanto, sejam $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. A compacidade de X implica na continuidade uniforme de f, logo para cada $x \in X$ podemos tomar $V_x \in \{U_n\}_n$ tal que $x \in V_x$ e

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2, \ \forall y \in V_x.$$

Obviamente $X = \cup_{x \in X} V_x$, logo podemos tomar uma subcobertura finita de abertos $V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}$ que é minimal no sentido que, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, a família $\{V_{x_i}\}_{i=1}^m \backslash \{V_{x_j}\}$ não cobre X; por simplicidade denotaremos $B_i = V_{x_i}$. Defina agora $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}g = f(x_1)1_{B_1} + f(x_2)1_{B_2 \backslash B_1} + f(x_3)1_{B_3 \backslash (B_1 \cup B_2)} + \ldots \\ \ldots + f(x_m)1_{B_m \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_{m-1})}.\end{aligned}$$

É fácil ver que, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$1_{B_j \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_{j-1})} = 1_{B_j} \cdot (1 - 1_{B_1}) \cdot (1 - 1_{B_2}) \cdots (1 - 1_{B_{j-1}}),$$

e daí concluímos que $g \in C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$. Finalmente, dado $x \in X$ arbitrário, existe um $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B_j \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_{j-1})$; temos então $g(x) = f(x_j)$, e como $B_j = V_{x_j}$, segue-se que

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/2.$$

Como x foi tomado arbitrariamente, temos que $||f - g|| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, e o fato de $C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$ ser fechado implica então em $f \in C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$, de onde $C(X) \subseteq C^*(1, \{1_{U_n}\}_n)$, concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

A.2 Operadores Compactos

A teoria de operadores compactos pode ser feita para espaços normados sobre $\mathbb{C}$ arbitrários, mas nos restringiremos nesta discussão à teoria de operadores compactos em espaços de Hilbert. As demonstrações da maioria dos resultados aqui expostos podem ser encontradas por exemplo em [21] ou [17]. Assumiremos que o leitor está acostumado com a teoria exposta na seção A.1.

Existem várias formas, todas equivalentes, de se definir um operador compacto; vejamos algumas delas. Um operador linear $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é dito ser *compacto* se satisfaz a uma das seguintes condições equivalentes (e portanto a todas):

1. Para todo subconjunto limitado $B \subseteq \mathcal{H}_1$, $T(B)$ é totalmente limitado em $\mathcal{H}_2$;
2. Para todo subconjunto limitado $B \subseteq \mathcal{H}_1$, $T(B)$ é relativamente compacto em $\mathcal{H}_2$ (ou seja, $T(B)$ possui fecho compacto);
3. $T(B_1(\mathcal{H}_1))$ é relativamente compacto;
4. Para toda seqüência limitada $\{\xi_n\}_n \subseteq \mathcal{H}_1$, a seqüência $\{T(\xi_n)\}_n$ possui uma subseqüência convergente na topologia da norma.

O conjunto dos operadores compactos de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ é denotado por $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Todo operador compacto é limitado; na verdade, $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, fechado na topologia da norma em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Dados operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, se T ou S é compacto então o operador $ST \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ é compacto. Em particular, no caso $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}$, conclui-se daí que $\mathcal{K}(\mathcal{H}) := \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ é um ideal bilateral fechado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Outro fato importante é que um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é compacto se, e somente se, o operador $|T| := (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ é compacto; isto é conseqüência da decomposição polar. Em particular, T é compacto se, e somente se, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ é compacto.

Lembremos que um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito ter *posto finito* quando sua imagem possui dimensão finita; neste caso, a dimensão da imagem é o chamado *posto* do operador. Um teorema importante na teoria de operadores compactos diz que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um operador compacto se, e somente se, é o limite na norma de uma seqüência de operadores de posto finito. Em outras palavras, $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é o fecho na norma do subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ dos operadores de posto finito.

Finalmente, um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é compacto se, e somente se, $\operatorname{ran}(T)$ não contém nenhum subespaço fechado de dimensão infinita de $\mathcal{H}_2$.

No que segue consideraremos apenas o ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ dos operadores compactos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

A teoria espectral de operadores compactos *normais* é bastante elegante e útil. Dado $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ normal, então $\sigma(T)$ é um conjunto enumerável, e seu único possível ponto de acumulação é o zero. Todo elemento de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é um autovalor de T com multiplicidade finita. Além disso, se E é a medida espectral associada ao operador T pelo teorema espectral, então podemos escrever

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda E(\{\lambda\}),$$

onde esta soma, lembramos, deve ser interpretada na topologia pontual forte de operadores em $\mathcal{H}$ (strong operator topology), ou, equivalentemente, na topologia pontual fraca de operadores em $\mathcal{H}$ (weak operator topology). As projeções $E(\{\lambda\})$ que aparecem na soma são as chamadas *projeções espectrais* do operador T. Em particular, $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} E(\{\lambda\}) = I_{\mathcal{H}}$.

A teoria de *-representações do ideal dos operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é bastante tratável; uma exposição detalhada do assunto pode ser encontrada em [2], por exemplo. Gostaríamos de citar abaixo os dois resultados desta teoria que utilizaremos no texto principal, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência citada; a definição de uma representação não degenerada é dada na discussão que segue a definição 2.1.4.

- Seja $\psi : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma *-representação não degenerada; então, existe uma decomposição $\mathcal{H} = \oplus_{k\in\Lambda}\mathcal{H}_k$, e operadores unitários $U_k : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_k$, tais que $\psi = \oplus_k \mathrm{Ad}U_k$ com relação à decomposição de $\mathcal{H}$ dada.

- Seja $\psi : \mathcal{K}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ um *-isomorfismo. Então, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\psi = \mathrm{Ad}U$.

A.3 Operadores de Fredholm e Índice de Fredholm

Operadores de Fredholm podem ser definidos e estudados em espaços de Banach em geral, mas estaremos interessados apenas na teoria de operadores de Fredholm em espaços de Hilbert. Uma boa parte das demonstrações dos fatos aqui descritos podem ser encontradas por exemplo em [21].

Assim como no caso dos operadores compactos, existem várias maneiras, todas equivalentes, de se definir um operador de Fredholm. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é dito um *operador de Fredholm* se ele satisfaz a qualquer uma das seguintes condições equivalentes seguintes:

1. Existem operadores $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ e operadores compactos $K_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, $K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$, tais que

$$S_1 T = I_{\mathcal{H}_1} + K_1 \text{ e } TS_2 = I_{\mathcal{H}_2} + K_2;$$

2. $\mathrm{ran}(T)$ é fechado, e os espaços $\ker(T)$ e $\ker(T^*)$ têm dimensão finita;

3. Existem $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ e subespaços de dimensão finita $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{H}_i,\ i = 1, 2$, tais que

$$ST = I_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{N}_1} \text{ e } TS = I_{\mathcal{H}_2} - P_{\mathcal{N}_2},$$

onde $P_{\mathcal{N}_i},\ i = 1, 2$ denota a projeção ortogonal no subespaço $\mathcal{N}_i$.

O Teorema que demonstra a equivalência destas condições é conhecido como teorema de Atkinson ([21], proposição 4.4.4). Naturalmente, um operador T é de Fredholm se, e somente se, T^* é de Fredholm. Também, se o operador T possui decomposição polar $T = U|T|$, então T é de Fredholm se, e somente se, U e $|T|$ são de Fredholm.

É conseqüência da definição de operador de Fredholm (mais visivelmente, das condições 1 e 3 acima) que um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é de Fredholm se, e somente se, $\pi(T) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ é um elemento inversível da álgebra de Calkin.

Conforme mencionado acima, se T é um operador de Fredholm, então os espaços $\ker(T)$ e $\ker(T^*)$ têm dimensão finita; podemos então associar a T um número inteiro,

$$\mathrm{ind}(T) = \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*),$$

chamado de *índice de Fredholm* do operador T, ou, simplesmente, o *índice* de T.

Todo operador normal de Fredholm possui índice de Fredholm zero.

Denote por $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ o subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores de Fredholm. Podemos então definir uma função

$$\begin{aligned} \mathrm{ind} : \mathcal{F}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ T &\longmapsto \mathrm{ind}(T). \end{aligned}$$

Um teorema importante desta teoria é que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ é um subconjunto *aberto* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e que a função ind definida acima é localmente constante, e portanto em particular contínua. Um outro resultado de grande importância diz que, se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é de Fredholm e $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é compacto, então $T+K$ é de Fredholm, e $\mathrm{ind}(T + K) = \mathrm{ind}(T)$. Como conseqüência deste resultado, podemos associar a cada elemento inversível $\mathfrak{t} =$

$\pi(T) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ um índice, $\text{ind}(\mathfrak{t}) = \text{ind}(T)$, que independe do representante T.

A função ind definida acima para os operadores de Fredholm satisfaz algumas propriedades úteis: naturalmente, se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é de Fredholm, então $\text{ind}(T^*) = -\text{ind}(T)$, pela própria definição do índice. Se $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são de Fredholm, então é fato que o operador TS é também de Fredholm, e

$$\text{ind}(TS) = \text{ind}(T) + \text{ind}(S).$$

Por fim, dados operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, então T, S são de Fredholm se, e somente se, o operador $T \oplus S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ é de Fredholm; neste caso, temos

$$\text{ind}(T \oplus S) = \text{ind}(T) + \text{ind}(S).$$

A.4 Operadores de Shift

Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser um *operador de shift unilateral* quando existir uma base ortonormal $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que T é o operador determinado por

$$T(\xi_n) = \xi_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Gostaríamos de fixar um operador de shift unilateral em particular, e referirmo-nos a ele como *o* operador de shift unilateral $\mathcal{S}$. Para nós, *o* operador de shift unilateral será o operador $\mathcal{S} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$ determinado por $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, a base canônica de $\ell_2(\mathbb{N}^*)$, isto é,

$$\mathcal{S}(e_n) = e_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Evidentemente, todos os operadores de shift unilateral são unitariamente equivalentes; como estamos interessados apenas em propriedades destes operadores que são invariantes por equivalência unitária, como espectro, espectro essencial e índice de Fredholm, tudo o que fizermos a seguir para o shift $\mathcal{S}$ valerá para qualquer shift unilateral. Estes operadores são de Fredholm com índice de Fredholm -1 (pois $\mathcal{S}$ o é). É fácil verificar diretamente que $\pi(\mathcal{S})$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin.

É fato que o $\sigma(\mathcal{S}) = \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D}$ denota o disco unitário. Para ver isto, devido a simetria do disco, basta provar que $\sigma(\mathcal{S}^*) = \mathbb{D}$: naturalmente, $||\mathcal{S}^*|| = 1$, logo $\sigma(\mathcal{S}^*) \subseteq \mathbb{D}$. Obviamente, $0 \in \sigma(\mathcal{S}^*)$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $0 < |\lambda| < 1$, então é fácil ver que λ é autovalor de $\mathcal{S}^*$, com autovetor associado $v = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^n e_n$, de onde temos $\lambda \in \sigma(\mathcal{S}^*)$, ou seja, $\text{int}(\mathbb{D}) \subseteq \sigma(\mathcal{S}^*) \subseteq \mathbb{D}$; como o espectro é fechado, temos de imediato o desejado.

Vejamos agora que $\sigma_e(\mathcal{S}) = \mathbb{S}^1$: $\pi(\mathcal{S})$ é um elemento unitário da álgebra de Calkin, logo $\sigma_e(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{S}^1$. Agora, dado $\lambda \in \mathbb{S}^1$ arbitrário, o operador $U_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $U_\lambda = \mathrm{diag}_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda^n)$ é um operador unitário tal que $\lambda S U_\lambda = U_\lambda S$, ou seja, $\lambda S = U_\lambda S U_\lambda^{-1}$. Assim, temos que

$$\lambda\sigma(\pi(\mathcal{S})) = \sigma(\lambda\pi(\mathcal{S})) = \sigma(\pi(U_\lambda)\pi(\mathcal{S})\pi(U_\lambda)^{-1}) = \sigma(\pi(\mathcal{S}));$$

segue-se daí que $\sigma_e(\mathcal{S}) = \sigma(\pi(\mathcal{S}))$ é um subconjunto de $\mathbb{S}^1$ que é invariante por rotações arbitrárias, o que implica automaticamente $\sigma_e(\mathcal{S}) = \mathbb{S}^1$, como queríamos.

Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser um *operador de shift bilateral* quando existir uma base ortonormal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que T é o operador determinado por

$$T(\xi_n) = \xi_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Os operadores de shift bilateral são inversíveis, e portanto de Fredholm com índice zero. Com argumentos análogos aos utilizados no caso dos shifts unilaterais, prova-se que os shifts bilaterais possuem como espectro essencial o círculo $\mathbb{S}^1$.

A.5 Operadores de Toeplitz

A teoria de operadores de Toeplitz é vasta, estaremos aqui interessados apenas nos resultados mais elementares da teoria, envolvendo em particular operadores de Toeplitz com símbolo contínuo. Uma boa referência adequada para estes propósitos é [17], que contém as demonstrações de tudo o que discutimos aqui.

Considere o espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$, a medida subjacente sendo a medida de Haar normalizada do $\mathbb{S}^1$. Sabemos que $L^2(\mathbb{S}^1)$ é espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f \cdot \overline{g}\, d\lambda \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{S}^1).$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$\begin{aligned} \varepsilon_n : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ e^{i\theta} &\longmapsto e^{in\theta}. \end{aligned}$$

É fato que o conjunto $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ constitui uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$. Considere $\mathcal{H}^2 = \overline{\mathrm{span}}\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este subespaço de $L^2(\mathbb{S}^1)$ é chamado de *espaço de Hardy*.

Lembremos que, dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$, podemos definir $M_\varphi \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$, o *opera-*

dor de multiplicação por φ, dado por $M_\varphi(f) = \varphi \cdot f$, para todo $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Seja $\iota : \mathcal{H}^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ a inclusão. Então, $\iota^*\iota = I_{\mathcal{H}^2}$, e $\iota\iota^* = P$, onde $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ é a projeção ortogonal sobre o espaço $\mathcal{H}^2$. Podemos então definir $T_\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^2)$ como $T_\varphi = \iota^* M_\varphi \iota$. O operador T_φ assim definido é o chamado *operador de Toeplitz com símbolo* φ.

É trivial verificar que, para $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$T_{\lambda\varphi+\psi} = \lambda T_\varphi + T_\psi \quad \text{e que} \quad (T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}.$$

Em geral não é verdade que $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$, mas dados $\varphi \in C(\mathbb{S}^1)$ e $\psi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$, os operadores $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ e $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$ são sempre compactos. Em particular, dado $\varphi \in C(\mathbb{S}^1)$, isto implica em o operador T_φ ser essencialmente normal.

Outra propriedade importante dos operadores de Toeplitz é que T_φ é um operador compacto se, e somente se, $\varphi = 0$. Se definirmos então

$$\begin{aligned} \tau : C(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H}^2) \\ f &\longmapsto \pi(T_f), \end{aligned}$$

vemos das propriedades acima citadas que τ é um *-homomorfismo, que é obviamente unital; ademais, τ é injetor, visto que se $\pi(T_f) = 0$, então T_f é compacto, e portanto $f = 0$. Usando a terminologia do texto principal, τ é uma *extensão dos compactos por* $C(\mathbb{S}^1)$ (mais precisamente, o *invariante de Busby* de uma extensão dos compactos por $C(\mathbb{S}^1)$); esta extensão é a chamada *extensão de Toeplitz*.

Dado $f \in C(\mathbb{S}^1)$, é evidente da definição do operador T_f que $\|T_f\| \leq \|f\|$. Também, do fato da extensão de Toeplitz ser injetora, e portanto isométrica, temos $\|f\| = \|\tau(f)\| = \|\pi(T_f)\| \leq \|T_f\|$, de onde $\|T_f\| = \|f\|$. É possível provar que $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|$ para toda $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ (ver por exemplo [17], teorema 3.5.7), mas não precisaremos disto aqui. Uma outra conseqüência que podemos tirar da extensão de Toeplitz é que, para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$,

$$\sigma_e(T_f) = \sigma(\pi(T_f)) = \sigma(\tau(f)) = \sigma(f) = \operatorname{ran}(f).$$

Finalmente, vejamos a relação entre operadores de Toeplitz e operadores de Fredholm: dada uma função contínua $f \in C(\mathbb{S}^1)$, temos que T_f é um operador de Fredholm se, e somente se, f é inversível.

Logo, quando f é inversível, podemos associar a T_f um índice de Fredholm; para vermos explicitamente quem é o índice de Fredholm de T_f, precisamos do seguinte fato: se $f \in C(\mathbb{S}^1)$ é inversível, então existe um único inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f = \varepsilon_n e^g$, para alguma $g \in C(\mathbb{S}^1)$. Tal inteiro n é o chamado *winding number* da função f, e denotado por $\mathrm{wn}(f)$. A grosso modo, geometricamente falando, $\mathrm{ran}(f)$ é uma curva fechada no plano complexo, que não passa pela origem. Considerando $\mathrm{ran}(f)$ como uma curva com orientação usual dada pelo sentido crescente do parâmetro da função, o winding number de f indica o número de voltas que a curva $\mathrm{ran}(f)$ dá em torno da origem; a sinal do índice depende da orientação da curva, algo que é mais complicado de se definir precisamente para uma função contínua f arbitrária. Em outras palavras, o winding number de f é simplesmente o *índice* da curva $\mathrm{ran}(f)$ em relação à origem do plano complexo.

Um teorema célebre da teoria de operadores de Toeplitz estabelece então que, se $f \in C(\mathbb{S}^1)$ é inversível,

$$\mathrm{ind}(T_f) = -\mathrm{wn}(f).$$

Apêndice B

Operadores Normais

B.1 O Espectro Essencial de um Operador Normal

O objetivo principal desta seção é provar o teorema B.1.4. Começaremos com três lemas.

Lema B.1.1. *Sejam $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal, e $\lambda \in \sigma(N)$ isolado. Então, λ é um autovalor de N.*

Demonstração. O ponto $\lambda \in \sigma(N)$ é isolado, logo a função característica $1_{\{\lambda\}} : \sigma(N) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua e idempotente, pelo lema E.2.1. Pelo cálculo funcional contínuo de N, como $1_{\{\lambda\}} \neq 0$, temos que $P = 1_{\{\lambda\}}(N) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma projeção não nula, e portanto $\mathrm{ran}(P) \neq \{0\}$.

Naturalmente, P comuta com N, logo $\mathrm{ran}(P)$ é N-invariante. Note que $\zeta \cdot 1_{\{\lambda\}} - \lambda 1_{\{\lambda\}} = 0$, logo $NP - \lambda P = 0$. Assim, dado $\xi \in \mathrm{ran}(P) \backslash \{0\}$, temos

$$(N - \lambda I)\xi = (N - \lambda I)P\xi = (NP - \lambda P)\xi = 0\xi = 0,$$

ou seja, $N\xi = \lambda\xi$, provando que λ é autovalor de N como desejado.

∎

Lema B.1.2. *Sejam $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, e $F \subseteq \sigma(N)$ fechado. Então, denotando $P = 1_F(N)$, $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a inclusão, e $N' = \iota^* N \iota \in \mathcal{B}(P\mathcal{H})$, temos que $\sigma(N') \subseteq F$.*

Demonstração. Observe que $\iota^*\iota = I_{P\mathcal{H}}$, e $\iota\iota^* = P$. Vamos provar que $\mu \notin F$ implica em $\mu I_{P\mathcal{H}} - N'$ ser inversível.

Seja portanto $\mu \notin F$. O conjunto F é fechado, logo $\text{dist}(\mu, F) > 0$ e assim a função $\varphi : \sigma(N) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu - x} & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \end{cases}$$

é limitada e mensurável. Note que $\varphi 1_F = 1_F \varphi = \varphi$. Usando o cálculo funcional mensurável de N, seja $S = \iota^* \varphi(N) \iota \in \mathcal{B}(P\mathcal{H})$. Como

$$(\mu 1_F - \zeta) 1_F \varphi = 1_F,$$

temos que $(\mu P - N) P \varphi(N) = P$, e portanto

$$I_{P\mathcal{H}} = \iota^* P \iota = \iota^* (\mu P - N) P \varphi(N) \iota = \iota^* P \iota = \iota^* (\mu P - N) \iota \iota^* \varphi(N) \iota = (\mu I_{P\mathcal{H}} - N') S,$$

de onde $\mu I_{P\mathcal{H}} - N'$ é inversível. O resultado segue.

■

Lema B.1.3. *Sejam $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, $\lambda \in \sigma(N)$ um ponto de acumulação de $\sigma(N)$, $V \subseteq \sigma(N)$ um aberto tal que $\lambda \in V$, $P = 1_V(N)$, $\iota : P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a inclusão, e $N' = \iota^* N \iota \in \mathcal{B}(P\mathcal{H})$. Então, $V \subseteq \sigma(N')$.*

Demonstração. Seja $\mu \in V$, e suponha por absurdo que $\mu \notin \sigma(N')$, ou seja, que $\mu I_{P\mathcal{H}} - N'$ é inversível.

Denote $F = \sigma(N) \backslash V$, que é fechado em $\sigma(N)$, e observe que $P^\perp = I - P = 1_F(N)$. Se $j : P^\perp \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é a inclusão e $\widetilde{N} = j^* N j \in \mathcal{B}(P^\perp \mathcal{H})$, então do lema B.1.2, visto que $\mu \notin F$ temos que $\mu I_{P^\perp \mathcal{H}} - \widetilde{N}$ é inversível. Note que P comuta com N, logo podemos escrever $N = (\iota^* N \iota) \oplus (j^* N j) = N' \oplus \widetilde{N}$ relativo à $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus P^\perp \mathcal{H}$. Ora, mas então será inversível o operador

$$(\mu I_{P\mathcal{H}} - N') \oplus (I_{P^\perp \mathcal{H}} - \widetilde{N}) = \mu I_{\mathcal{H}} - N' \oplus \widetilde{N} = \mu I - N,$$

de onde temos $\mu \notin \sigma(N)$, absurdo.

■

Teorema B.1.4. *Seja $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal. Então, o espectro essencial de N, $\sigma_e(N)$, é precisamente o conjunto formado pela reunião dos pontos de acumulação de $\sigma(N)$ com os autovalores isolados de N com multiplicidade infinita.*

Demonstração. Denote por A o conjunto formado pela reunião dos pontos de acumulação de $\sigma(N)$ com os autovalores isolados de N com multiplicidade infinita.

Provemos que $\sigma_e(N) \subseteq A$: seja $\lambda \in \sigma_e(N)$ arbitrário, e suponha por absurdo que $\lambda \notin A$; assim, λ é um ponto isolado de $\sigma(N)$ e, em virtude do lema B.1.1, λ é um autovalor isolado de N; ademais, $\lambda \notin A$ implica portanto em particular que λ é um autovalor de N com multiplicidade finita.

Denote $\mathcal{H}_\lambda = \ker(N - \lambda I)$. Então, relativo à decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda \oplus \mathcal{H}_\lambda^\perp$ podemos escrever $N = \lambda I \oplus N_1$. Note que $\lambda \notin \sigma(N_1)$, pois caso contrário λ seria ponto isolado de $\sigma(N_1)$, logo um autovalor de N_1, e assim haveria um $\xi \in \mathcal{H}_\lambda^\perp$ não nulo com $N_1\xi = \lambda\xi$; ora, mas isto implicaria em $N\xi = (\lambda I \oplus N_1)(0 + \xi) = N_1\xi = \lambda\xi$, ou seja, $\xi \in \ker(N - \lambda I) = \mathcal{H}_\lambda$, absurdo.

Como $\dim(\mathcal{H}_\lambda) < \infty$, se tomarmos um $\mu \in \sigma(N_1)$ qualquer, então $\mu I \oplus N_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ será perturbação compacta de N, e assim

$$\lambda \in \sigma_e(N) = \sigma_e(\mu I \oplus N_1) = \sigma_e(\mu I) \cup \sigma_e(N_1) \subseteq \sigma(\mu I) \cup \sigma(N_1) = \{\mu\} \cup \sigma(N_1) = \sigma(N_1),$$

gerando um absurdo. Ficou assim provado que $\sigma_e(N) \subseteq A$.

Façamos a outra inclusão: seja $\lambda \in A$ arbitrário. Queremos provar que $\lambda \in \sigma_e(N)$, ou seja, que $N - \lambda I$ não é operador de Fredholm.

Se λ é um autovalor isolado de N com multiplicidade infinita, então teremos que $\dim(\ker(N - \lambda I)) = \infty$, de modo que $N - \lambda I$ não é de Fredholm. Logo, basta considerarmos o caso em que λ é um ponto de acumulação de $\sigma(N)$.

Queremos provar agora que, para todo $r > 0$, existe um subespaço de Hilbert $\mathcal{H}_r$ de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}$ é $(N - \lambda I)$-invariante, $\dim(\mathcal{H}_r) = \infty$, e $||(N - \lambda I)|_{\mathcal{H}_r}|| < r$.

De fato, tome $r > 0$ arbitrário, seja $V_r = B(\lambda, r) \subseteq \sigma(N)$, e denote $P_r = 1_{V_r}(N) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Note que a projeção P_r tem posto infinito. De fato, λ é um ponto de acumulação de $\sigma(N)$, logo V_r é um conjunto infinito. Seja $\iota : P_r\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a inclusão, e $N' = \iota^* n \iota$. Sabemos então pelo lema B.1.3 que $V_r \subseteq \sigma(N')$, e portanto em particular $\sigma(N')$ é um conjunto infinito; logo, de imediato temos $\dim(P_r\mathcal{H}) = \infty$, ou seja, P_r tem posto infinito, pois caso contrário teríamos que $\sigma(N')$ seria finito.

Seja $H_r = P_r\mathcal{H}$. Então, H_r tem dimensão infinita; também, $\mathcal{H}_r$ é $(N - \lambda I)$-invariante, visto que P_r comuta com N.

Agora, é fácil ver que $\sup_{\sigma(N)} |\zeta \cdot 1_{V_r} - \lambda 1_{V_r}| < r$, logo $\|(N - \lambda I)P_r\| < r$. Então, tomando $\xi \in \mathcal{H}_r$ com norma 1 arbitrariamente, temos

$$||(N - \lambda I)|_{\mathcal{H}_r}\xi|| = ||(N - \lambda I)P_r\xi|| \leq ||(N - \lambda I)P_r|| \cdot ||\xi|| < r,$$

e isto prova que $\mathcal{H}_r$ é como desejado.

Suponha por absurdo que $N - \lambda I$ é um operador de Fredholm. Denote $\mathcal{H}' = (\ker(N - \lambda I))^{\perp}$, e defina $N_1 : \mathcal{H}' \longrightarrow \operatorname{ran}(N - \lambda I)$ por $N_1 = (N - \lambda I)|_{\mathcal{H}'}$. Naturalmente, N_1 é inversível, logo existe uma constante $c > 0$ tal que $\|N_1 \xi\| \geq c\|\xi\|$, $\forall \xi \in \mathcal{H}'$.

Tome r com $0 < r < c$. Pelo que provamos anteriormente, existe um subespaço de Hilbert $\mathcal{H}_r$ de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}$ é $(N - \lambda I)$-invariante, $\dim(\mathcal{H}_r) = \infty$, e $||(N - \lambda I)|_{\mathcal{H}_r}|| < r$. Como $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \ker(N - \lambda I)$ e $\dim(\ker(N - \lambda I)) < \infty$ (pois este operador é de Fredholm pela hipótese de absurdo), vemos que $\mathcal{H}_r \cap \mathcal{H}' \neq \{0\}$. Considere então $\xi \in \mathcal{H}_r \cap \mathcal{H}'$ não nulo. Logo, por um lado temos, como $\xi \in \mathcal{H}_r$,

$$\|(N - \lambda I)\xi\| \leq r\|\xi\| < c\|\xi\|,$$

e por outro lado, como $\xi \in \mathcal{H}'$, temos

$$\|(N - \lambda I)\xi\| = \|N_1 \xi\| \geq c\|\xi\|,$$

gerando um absurdo. Segue-se que $N - \lambda I$ não é de Fredholm.

Fica assim provado que $\sigma_e(N) = A$, como queríamos.

■

Uma demonstração alternativa do teorema B.1.4 pode ser encontrada em [11].

Para concluir a seção, um resultado simples, porém bastante útil.

Proposição B.1.5. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Então, existe um operador normal $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sigma(N) = \sigma_e(N) = X$.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq X$ uma seqüência densa em X tal que cada elemento da seqüência figura na seqüência infinitas vezes, e defina $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $N = \operatorname{diag}_n(x_n)$, relativo à base canônica de $\mathcal{H}$. Por construção, o operador N é normal, e $\sigma(N) = \sigma_e(N) = X$, pois todos os seus autovalores possuem multiplicidade infinita.

■

B.2 O Teorema de Weyl-von Neumann-Berg

O objetivo desta seção é provar um resultado que é conhecido como teorema de *Weyl-von Neumann-Berg*, dado pelo teorema B.2.6. Este é o resultado que dá a classificação, via equivalência unitária módulo os compactos, dos operadores *normais*.

É importante ressaltar que existe um outro resultado na literatura que é também conhecido como teorema de Weyl-von Neumann-Berg, dado por uma versão mais forte do corolário B.2.2, e garantindo que todo operador normal N pode ser escrito como $D + K$, para D diagonal e K compacto com norma tão pequena quanto quisermos; mais ainda, esta decomposição pode ser feita simultaneamente, em um certo sentido, para qualquer família finita de operadores auto adjuntos que comutam entre si. Para uma prova deste resultado, ver por exemplo [9], corolário II.4.2. Não precisaremos dele aqui.

Para o próximo teorema precisaremos do fato que, dada $\mathfrak{A}$ uma sub-C*-álgebra comutativa de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe uma família $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de projeções que comutam duas a duas, tais que $\mathfrak{A} \subseteq C^*(\{E_n\}_n)$. Para uma prova deste fato ver por exemplo [9], lema II.2.8.

Teorema B.2.1. *Seja $\mathfrak{A}$ uma sub-C^*-álgebra comutativa de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então, existe uma base ortonormal $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\mathfrak{A}$ está contida em $\mathfrak{D}+\mathcal{K}$, onde $\mathfrak{D}$ é a C^*-álgebra de operadores diagonais com respeito a esta base.*

Demonstração. Pelo que foi observado acima, existe uma família $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de projeções que comutam duas a duas, tais que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{E} = C^*(\{E_n\}_n)$.

Fixe $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$uma base ortonormal de $\mathcal{H}$; para cada $i \in \mathbb{N}^*$, denote $E_i^{(-1)} = E_i^{\perp}$, e $E_i^{(1)} = E_i$. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, defina

$$\mathcal{L}_k = \operatorname{span}\{\textstyle\prod_{i=1}^{k} E_i^{(\varepsilon_i)}\eta_j : 1 \leq j \leq k, \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

Claramente os espaços $\mathcal{L}_k$ têm dimensão finita, e ainda $\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}_{k+1}$. Também, observe que para todo $k \in \mathbb{N}^*$, temos $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathcal{L}_k$: de fato, seja $k \in \mathbb{N}^*$, e fixe j com $1 \leq j \leq k$. Então, estão em $\mathcal{L}_k$ os vetores

$$E_1E_2\cdots E_{k-1}E_k\eta_j, \quad E_1E_2\cdots E_{k-1}E_k^{\perp}\eta_j;$$

se efetuarmos a soma, vemos que

$$E_1E_2\cdots E_{k-1}(E_k + E_k^{\perp})\eta_j = E_1E_2\cdots E_{k-1}\eta_j \in \mathcal{L}_k.$$

Aplicando este raciocínio recursivamente podemos concluir que $E_1\eta_j \in \mathcal{L}_k$, e da mesma forma $E_1^{\perp}\eta_j \in \mathcal{L}_k$, de onde temos $\eta_j \in \mathcal{L}_k$, como desejado.

Segue-se destas observações que $\mathcal{L} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{L}_k$ é um subespaço vetorial denso em $\mathcal{H}$; denotando por $F_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a projeção ortogonal sobre o espaço $\mathcal{L}_k$, vemos então que a seqüência $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge fortemente para a identidade I. Como cada F_k é de posto finito, temos que $\{F_k\}_k \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Observe agora que, se $n \leq k$, então $\mathcal{L}_k$ é E_n-invariante, e assim F_k comuta com E_n, para todo $n \leq k$.

Denote $D_n = E_n F_n^{\perp}$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Note que D_n é uma projeção para todo n, pois E_n comuta com F_n e portanto com $F_n^{\perp}$. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, D_n comuta com F_k para todo $k \in \mathbb{N}^*$; isto segue do fato que $F_r F_s = F_s F_r = F_{\min\{r,s\}}$, e do que foi observado acima sobre as projeções pertinentes. Também, as projeções D_n comutam todas entre si.

Seja $\mathfrak{D}' = C^*(\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$. Vemos então que $\mathfrak{D}'$ é uma sub-C*-álgebra comutativa de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Além disso,

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{D}' + \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

pois $\{E_n\}_n \subseteq \mathfrak{D}' + \mathcal{K}(\mathcal{H})$: de fato, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $D_n = E_n F_n^{\perp}$ implica em $E_n = D_n + E_n F_n$, e o operador $E_n F_n$ é compacto visto que F_n é compacto.

Queremos agora mostrar que a C*-álgebra $\mathfrak{D}'$ é diagonalizável, ou seja, que existe uma base ortonormal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ tal que todos os elementos de $\mathfrak{D}'$ sejam operadores diagonais com relação a esta base. Isto segue do teorema espectral para espaços de dimensão finita: sabemos que F_k comuta com todos os elementos de $\mathfrak{D}'$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, logo os espaços $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{H}_k = \mathcal{L}_k \ominus \mathcal{L}_{k-1}$ para $k > 1$ são todos $\mathfrak{D}'$-invariantes. Observe que todos estes espaços são de dimensão finita; para cada k, e lembrando que $\mathfrak{D}'$ é uma C*-álgebra comutativa, vemos que a restrição dos elementos de $\mathfrak{D}'$ ao espaço $\mathcal{H}_k$ constitui uma família de operadores normais de $\mathcal{H}_k$ que comutam dois a dois, e esta família é conjuntamente diagonalizável, pelo teorema espectral em dimensão finita. Escolha portanto uma base ortonormal para $\mathcal{H}_k$ que efetua esta diagonalização. Lembrando-se que a reunião destes espaços é densa em $\mathcal{H}$, ao juntarmos as bases dos espaços $\mathcal{H}_k$, para todo k, obtemos uma base ortonormal para $\mathcal{H}$, denotada por $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, que claramente diagonaliza $\mathfrak{D}'$, ou seja, $\mathfrak{D}'$é diagonalizável.

Como $\mathfrak{D}'$ está portanto obviamente contida na sub-C*-álgebra de $\mathcal{H}$ formada por todos os operadores diagonais com respeito à base $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$, obtemos de imediato

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{D}' + \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D} + \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

e o teorema está provado.

∎

Corolário B.2.2. *Seja $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal. Então, podemos escrever $N = D + K$, com $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador diagonal e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Obviamente $C^*(\{N\})$ é uma sub-C*-álgebra comutativa de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, logo pelo teorema B.2.1, $C^*(\{N\}) \subseteq \mathfrak{D} + \mathcal{K}$, com relação a alguma base de $\mathcal{H}$; como

$N \in C^*(\{N\})$, temos em particular que $N = D + K$ para algum operador diagonal D e algum operador compacto K.

■

A prova original do corolário B.2.2 pode ser encontrada no artigo [3], publicado por I. D. Berg em 1971. Uma outra prova pode ser encontrada em [12], usando o fato de que todo espaço métrico compacto é imagem contínua do conjunto de Cantor, resultados sobre a existência de seções de certas funções contínuas, teoria da medida e o teorema espectral.

Corolário B.2.3. *Seja $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal. Então, podemos escrever $N = D + K$ com D diagonal, K compacto e $\sigma(D) = \sigma_e(D) = \sigma_e(N)$.*

Demonstração. Pelo corolário B.2.2, escreva $N = D' + K'$, onde D' é diagonal e K' é compacto, observando que $\sigma_e(D') = \sigma_e(N)$. Pela compacidade de $\sigma(D')$ e a continuidade da métrica em $\sigma(D')$ induzida da métrica padrão em $\mathbb{C}$, para cada $x \in \sigma(D') \backslash \sigma_e(D')$ fixe $x' \in \sigma_e(D')$ tal que $|x - x'| = \operatorname{dist}(x, \sigma_e(D'))$. Defina uma função $r : \sigma(D') \longrightarrow \sigma_e(D')$ por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \sigma_e(D') \\ x' & \text{se } x \in \sigma(D') \backslash \sigma_e(D'). \end{cases}$$

Afirmamos que a função r é contínua; de fato, é evidente que r é contínua em qualquer ponto no interior de $\sigma_e(D')$. Também, pelo teorema B.1.4, qualquer elemento em $\sigma(D') \backslash \sigma_e(D')$ é isolado, logo r é também contínua em qualquer elemento de $\sigma(D') \backslash \sigma_e(D')$. Basta então verificarmos a continuidade de r nos elementos de $\partial(\sigma_e(D'))$.

Tome portanto $x \in \partial(\sigma_e(D'))$ arbitrário, e considere uma seqüência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \in \sigma(D')$ tal que $x_k \longrightarrow x$. Agora, $\sigma_e(D')$ é compacto, e em particular fechado, logo $x \in \sigma_e(D')$, e portanto $r(x) = x$. Naturalmente, temos $\operatorname{dist}(x_k, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$; assim,

$$|r(x) - r(x_k)| \leq |r(x) - x_k| + |x_k, r(x_k)| = |x - x_k| + \operatorname{dist}(x_k, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0,$$

de onde $r(x_k) \longrightarrow r(x)$, o que prova a continuidade de r em x, como queríamos.

Usando o cálculo funcional contínuo de D' podemos então definir $D := r(D')$. Observe que D é um operador diagonal, pois se com relação a uma dada base de $\mathcal{H}$ temos $D' = \operatorname{diag}_k(\lambda_k)$, então $D = \operatorname{diag}_k(r(\lambda_k))$, pela observação 2.4.10. Além disto, pelo teorema do mapeamento espectral, temos

$$\sigma(D) = \sigma(r(D')) = r(\sigma(D')) = \sigma_e(D').$$

Afirmamos que $\text{dist}(\lambda_k, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$. De fato: note que a seqüência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ é a seqüência de autovalores (a diagonal) de D'; como todos os autovalores de D' estão em $\sigma_e(D')$, com exceção dos autovalores isolados de D' com multiplicidade finita, basta provarmos que $\text{dist}(\lambda_{k_m}, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$, onde $\{\lambda_{k_m}\}_m$ é a subseqüência de $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ formada pelos autovalores isolados de D' com multiplicidade finita (ignoraremos aqui o caso em que há apenas uma quantidade finita de autovalores isolados de D' com multiplicidade finita, visto que este caso é trivial).

Para provarmos isto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, considere o conjunto

$$H_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma_e(D')) < \varepsilon\};$$

o conjunto H_ε é claramente aberto, logo $G_\varepsilon = \sigma(D') \cap H_\varepsilon$ é aberto em $\sigma(D')$; se $F_\varepsilon = \sigma(D') \backslash G_\varepsilon$, então F_ε é fechado em $\sigma(D')$, e portanto compacto; é fácil ver que

$$F_\varepsilon = \{\lambda_{k_m} : \text{dist}(\lambda_{k_m}, \sigma_e(D')) \geq \varepsilon\};$$

como F_ε é discreto, visto que todos os elementos de F_ε são isolados, temos então necessariamente que F_ε é finito. Segue-se daí que $\text{dist}(\lambda_{k_m}, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$, como desejado.

Como conseqüência do fato de que $\text{dist}(\lambda_k, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$, temos que

$$(r(\lambda_k) - \lambda_k) \longrightarrow 0,$$

o que implica de imediato em $\widetilde{K} := D - D' = \text{diag}_k(r(\lambda_k) - \lambda_k)$ ser compacto, e em particular $\sigma_e(D) = \sigma_e(D') = \sigma_e(N)$. Denotando $K = K' - \widetilde{K}$, vemos que K é compacto e

$$N = D' + K' = D - D + D' + K' = D - \widetilde{K} + K' = D + K;$$

além disso, provamos acima que $\sigma(D) = \sigma_e(D') = \sigma_e(N) = \sigma_e(D)$, o que conclui a prova do corolário.

■

Corolário B.2.4. *Seja $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador normal. Então, podemos escrever $N = D + K$ com D diagonal, K compacto e $\sigma(D) = \sigma(N)$.*

Demonstração. Pelo corolário B.2.3 escreva $N = D' + K'$ com D' diagonal, K' compacto e $\sigma(D') = \sigma_e(D') = \sigma_e(N)$. Denote $D' = \text{diag}_k(\lambda_k)$ relativo a uma base $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$. Para simplificar a notação, seja $\{\mu_n\}_{n\in\Lambda}$ uma enumeração dos autovalores isolados de multiplicidade finita de N.

Sabemos que $\overline{\{\lambda_k\}_k} = \sigma(D') = \sigma_e(D')$, logo para cada $n \in \Lambda$ existe um $k_n \in \mathbb{N}^*$ tal que $|\lambda_{k_n} - \mu_n| \leq 2 \cdot \mathrm{dist}(\mu_n, \sigma_e(D'))$. Defina D como sendo o operador diagonal com relação a base $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$ dado por

$$D(\xi_k) = \begin{cases} D'(\xi_k) & \text{se } k \neq k_n \ \forall n \in \Lambda \\ \mu_n \xi_{k_n} & \text{se } k = k_n \text{ para algum } n \in \Lambda. \end{cases}$$

Afirmamos que o operador diagonal $D - D'$ é tal que sua seqüência diagonal converge para zero: de fato, isto é óbvio caso D' possua apenas uma quantidade finita de autovalores isolados com multiplicidade finita; caso contrário, vimos na demonstração do corolário B.2.3 que $\mathrm{dist}(\mu_n, \sigma_e(D')) \longrightarrow 0$, de onde temos $|\lambda_{k_n} - \mu_n| \longrightarrow 0$; como todas as outras entradas de $D - D'$ são zero, o afirmado segue. Daí, concluímos que $D - D'$ é um operador compacto, e em particular $\sigma_e(D) = \sigma_e(D')$. Segue-se daí também que $N = D + K$, onde $K = D' - D + K'$ é um operador compacto. Agora, todos os μ_n figuram na diagonal de D, logo $\{\mu_n\}_n \subseteq \sigma(D)$, e portanto, do teorema B.1.4, temos

$$\sigma(N) = \sigma_e(N) \cup \{\mu_n\}_n = \sigma_e(D') \cup \{\mu_n\}_n = \sigma_e(D) \cup \{\mu_n\}_n \subseteq \sigma(D).$$

Por outro lado, sendo $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_{k_n}\}_{n\in\Lambda}$, podemos escrever $D = D_1 \oplus D_2$, $D' = D'_1 \oplus D'_2$ relativamente a decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, observando que $D_1 = \mathrm{diag}_n(\mu_n)$ e $D_2 = D'_2$. Então, temos

$$\sigma(D) = \sigma(D_1) \cup \sigma(D_2) = \sigma(D_1) \cup \sigma(D'_2) \subseteq \sigma(D_1) \cup \sigma(D') = \overline{\{\mu_n\}_n} \cup \sigma_e(N) = \sigma(N),$$

provando desta forma que $\sigma(D) = \sigma(N)$, e o corolário está demonstrado.

■

Lema B.2.5. *Seja X um espaço métrico compacto, com métrica d, e sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ seqüências densas em X tais que cada termo isolado da seqüência $\{x_n\}_n$ figura nela infinitas vezes, e também cada termo isolado da seqüência $\{y_n\}_n$ figura nela infinitas vezes. Então, existe uma permutação $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_{\alpha(n)}) = 0.$$

Demonstração. Construiremos α indutivamente. Por densidade, escolha $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_1, y_{m_1}) < 1$, e $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_{n_2}, y_1) < 1/2$. Denote $M_1 = \{m_1, m_2\}$, $N_1 = \{n_1, n_2\}$, onde $m_2 = 1$, $n_1 = 1$. Estes conjuntos são portanto tais que $d(x_{n_i}, y_{m_i}) <$

$1/i$, para $i = 1, 2$, e $1 \in M_1 \cap N_1$. Podemos adicionalmente supor, sem perda de generalidade, que $2 \notin M_1$, $2 \notin N_1$.

Por hipótese de indução, suponha que tenham sido encontrados $M_k, N_k \subseteq \mathbb{N}^*$, $M_k = \{m_1, m_2, \ldots, m_{2k}\}$, $N_k = \{n_1, n_2, \ldots, n_{2k}\}$, tais que $d(x_{n_i}, y_{m_i}) < 1/i$ para $i = 1, 2, \ldots, 2k$, tais que $1, 2, \ldots, 2k \in M_k \cap N_k$, e tais que $k + 1 \notin M_k \cup N_k$.

Denote $N = \{x_n\}_n$, $M = \{y_m\}_m$. Observe que o conjunto $M \backslash \{y_{m_1}, \ldots, y_{m_{2k}}\}$ ainda é denso em X, em virtude da hipótese sobre os termos isolados. Logo, existe $m_{2k+1} \in \mathbb{N}^* \backslash M_k$ tal que $d(x_{k+1}, y_{m_{2k+1}}) < 1/(2k + 1)$. Analogamente, existe $n_{2k+2} \in \mathbb{N}^* \backslash N_k$ tal que $d(x_{n_{2k+2}}, y_{k+1}) < 1/(2k+2)$. Podemos tomar sem perda de generalidade $m_{2k+1} \neq k + 2$, $n_{2k+2} \neq k + 2$.

Denote $M_{k+1} = M_k \cup \{m_{2k+1}, m_{2k+2}\}$, $N_{k+1} = N_k \cup \{n_{2k+1}, n_{2k+2}\}$, onde $m_{2k+2} = k + 1$, $n_{2k+1} = k + 1$. Então, é imediato que os conjuntos M_{k+1} e N_{k+1} satisfazem o desejado.

Portanto, podemos definir permutações $\beta : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ e $\gamma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ por $\beta(l) = n_l$, $\gamma(l) = m_l$, $\forall l \in \mathbb{N}^*$, e elas serão portanto por construção tais que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{\beta(n)}, y_{\gamma(n)}) = 0.$$

Defina uma permutação $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ por $\alpha = \gamma \circ \beta^{-1}$. Então, observando-se que $\beta^{-1}(n) \longrightarrow \infty$ se, e somente se, $n \longrightarrow \infty$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_{\alpha(n)}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_{\gamma\circ\beta^{-1}(n)}) = \lim_{n\to\infty} d(x_{\beta(\beta^{-1}(n))}, y_{\gamma\circ\beta^{-1}(n)}) =$$
$$= \lim_{\beta^{-1}(n)\to\infty} d(x_{\beta(\beta^{-1}(n))}, y_{\gamma\circ\beta^{-1}(n)}) = \lim_{m\to\infty} d(x_{\beta(m)}, y_{\gamma(m)}) = 0,$$

e o lema está provado.

■

Teorema B.2.6. *Sejam $N_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $N_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ operadores normais Então, $N_1 \sim_{\mathcal{K}} N_2$ se, e somente se, $\sigma_e(N_1) = \sigma_e(N_2)$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Óbvio.

$(\Leftarrow)$ Pelo corolário B.2.3, escreva, para $i = 1, 2$, $N_i = D_i + K_i$, com D_i diagonal, K_i compacto e $\sigma(D_i) = \sigma_e(N_i)$. Denote por $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ na qual D_1 é diagonal, e por $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ na qual D_2 é diagonal. Seja $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o operador unitário tal que $V(\eta_k) = \xi_k$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Nas respectivas bases fixadas, denote $D_1 = \mathrm{diag}_k(\lambda_k)$, $D_2 = \mathrm{diag}_k(\mu_k)$. Todos os autovalores isolados de D_1 e D_2 possuem multiplicidade infinita, visto que D_1 e D_2 são operadores normais,

$\sigma(D_1) = \sigma_e(N_1) = \sigma_e(D_1)$, e similarmente $\sigma(D_2) = \sigma_e(D_2)$. Isto implica em todos os termos da seqüência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ figurarem infinitas vezes nesta seqüência, e em todos os termos da seqüência $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ figurarem infinitas vezes nesta seqüência. Além disso, da hipótese $\sigma_e(N_1) = \sigma_e(N_2)$,

$$\overline{\{\lambda_k\}_k} = \sigma(D_1) = \sigma_e(D_1) = \sigma_e(N_1) = \sigma_e(N_2) = \sigma_e(D_2) = \sigma(D_2) = \overline{\{\mu_k\}_k};$$

segue-se portanto do lema B.2.5 que existe uma permutação $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ tal que $|\lambda_{\alpha(k)} - \mu_k| \longrightarrow 0$.

Seja $U' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o unitário determinado por $U'(\eta_k) = \eta_{\alpha(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, e denote $U = VU'$. Então, o operador U é unitário e $U(\eta_k) = VU'(\eta_k) = V\eta_{\alpha(k)} = \xi_{\alpha(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ tem-se

$$(D_1 - UD_2U^{-1})\xi_{\alpha(k)} = D_1\xi_{\alpha(k)} - UD_2(\eta_k) = \lambda_{\alpha(k)}\xi_{\alpha(k)} - \mu_k\xi_{\alpha(k)} = (\lambda_{\alpha(k)} - \mu_k)\xi_{\alpha(k)},$$

provando que o operador $D_1 - UD_2U^{-1}$ é diagonal e sua diagonal converge para zero; logo, $D_1 - UD_2U^{-1}$ é compacto, de onde $D_1 \sim_{\mathcal{K}} D_2$, e portanto de imediato $N_1 \sim_{\mathcal{K}} N_2$, o que prova o teorema.

$\blacksquare$

Apêndice C

Seqüências de Operadores

C.1 O Joint Spectrum

Definição C.1.1. Seja $\mathfrak{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade. Dada uma família $\{a_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathfrak{A}$, onde Λ é um conjunto finito ou $\Lambda = \mathbb{N}^*$, definimos o *joint spectrum* desta família como sendo o conjunto

$$\mathrm{Jspec}_k(a_k) = \{(\varphi(a_k))_{k\in\Lambda} : \varphi \in \widehat{\mathfrak{A}}\}.$$

Lembrando-se que $\widehat{a}(\widehat{\mathfrak{A}}) = \sigma(a)$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ (ver por exemplo [21], lema 3.2.8(b)), podemos ver que $\mathrm{Jspec}_k(a_k) \subseteq \prod_{k\in\Lambda} \sigma(a_k)$. Em particular, caso Λ seja um conjunto unitário, ou seja, se tivermos uma família formada por apenas um elemento $a \in \mathfrak{A}$, então $\mathrm{Jspec}(a) = \sigma(a)$.

Com o exemplo a seguir, veremos que o joint spectrum $\mathrm{Jspec}_k(a_k)$ pode ser um subconjunto próprio de $\prod_{k\in\Lambda} \sigma(a_k)$.

Exemplo C.1.2. *Seja $X = [0, 2\pi]$, $\mathfrak{A} = C(X)$, e $f, g \in C(X)$ as funções seno e cosseno, respectivamente. Então, $\sigma(f) = \sigma(g) = [-1, 1]$. Além disso, $\widehat{\mathfrak{A}}$ neste caso é homeomorfo a X, homeomorfismo este dado por $r : X \longrightarrow \widehat{\mathfrak{A}}$, onde $r(x)$ é tal que $r(x)(h) = h(x)$, para todo $h \in C(X)$. Assim, vemos que*

$$\mathrm{Jspec}(f, g) = \{(f(x), g(x)) : x \in X\} = \{(\sin(x), \cos(x)) : x \in [0, 2\pi]\} = \mathbb{S}^1.$$

Observe que, a rigor, a definição do joint spectrum $\mathrm{Jspec}_k(a_k)$ depende da C*-álgebra ambiente $\mathfrak{A}$; por enquanto, denotaremos esta dependência por $\mathrm{Jspec}_k^{\mathfrak{A}}(a_k)$. O que queremos provar agora é que o joint spectrum *independe* da C*-álgebra comutativa com unidade que contém a família $\{a_k\}_k$. Precisamos de um lema.

Lema C.1.3. *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ C^*-álgebras comutativas com unidade, tais que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e $1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{B}}$. Então, dado $\varphi \in \widehat{\mathfrak{A}}$, existe $\psi \in \widehat{\mathfrak{B}}$ tal que $\psi|_{\mathfrak{A}} = \varphi$.*

Demonstração. Seja $i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ a inclusão, e denote por $\Gamma_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{A}})$, $\Gamma_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \longrightarrow C(\widehat{\mathfrak{B}})$ as transformadas de Gelfand. Então, o *-homomorfismo de $C(\widehat{\mathfrak{A}})$ em $C(\widehat{\mathfrak{B}})$ dado por $\Gamma_{\mathfrak{B}} \circ i \circ \Gamma_{\mathfrak{A}}^{-1}$ é injetor, e portanto dual a uma sobrejeção contínua $u : \widehat{\mathfrak{B}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{A}}$, isto é, $\Gamma_{\mathfrak{B}} \circ i \circ \Gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} = u^*$.

Assim, dado $\varphi \in \widehat{\mathfrak{A}}$, existe $\psi \in \widehat{\mathfrak{B}}$ tal que $u(\psi) = \varphi$. Afirmamos que $\psi|_{\mathfrak{A}} = \varphi$: de fato, dado $a \in \mathfrak{A}$ arbitrário,

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \Gamma_{\mathfrak{A}}(a)(\varphi) = \Gamma_{\mathfrak{A}}(a)(u(\psi)) = u^*(\Gamma_{\mathfrak{A}}(a))(\psi) = \Gamma_{\mathfrak{B}} \circ i \circ \Gamma_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma_{\mathfrak{A}}(a))(\psi) = \\ = \Gamma_{\mathfrak{B}} \circ i(a)(\psi) = \Gamma_{\mathfrak{B}}(a)(\psi) = \psi(a),\end{aligned}$$

provando o afirmado.

■

A próxima proposição mostra que o joint spectrum independe da C*-álgebra ambiente.

Proposição C.1.4. *Seja $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra comutativa com unidade, $\{a_k\}_{k\in\Lambda}$, onde Λ é um conjunto finito ou $\Lambda = \mathbb{N}^*$, e $\mathfrak{A}_0 = C^*(1_{\mathfrak{A}}, \{a_k\}_k)$. Então, $\mathrm{Jspec}_k^{\mathfrak{A}}(a_k) = \mathrm{Jspec}_k^{\mathfrak{A}_0}(a_k)$.*

Demonstração. Que $\mathrm{Jspec}_k^{\mathfrak{A}}(a_k) \subseteq \mathrm{Jspec}_k^{\mathfrak{A}_0}(a_k)$ é óbvio, e a outra inclusão segue do lema C.1.3.

■

Em particular, vemos que $\mathfrak{A}$ é uma C*-álgebra com unidade e $\{a_k\}_k \subseteq \mathfrak{A}$ é tal que a_k é normal para todo k, e $a_i a_j = a_j ai$ para todo i, j, então podemos falar no joint spectrum $\mathrm{Jspec}_k(a_k)$, mesmo que $\mathfrak{A}$ não seja comutativa, visto que $C^*(1, \{a_k\}_k)$ será comutativa, e podemos portanto usá-la para definir o joint spectrum.

A próxima proposição será útil na seção seguinte. Se $a \in \mathfrak{A}$, denotamos $\mathrm{Re(a)} = (a + a^*)/2$, $\mathrm{Im(a)} = (a - a^*)/(2i)$.

Proposição C.1.5. *Sejam $\mathfrak{A}$ uma C^*-álgebra com unidade, e $\{a_k\}_k \subseteq \mathfrak{A}$ tal que a_k é normal para todo k, e $a_i a_j = a_j ai$ para todo i, j. Então,*

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots) \in \mathrm{Jspec}_k(a_k) \iff \\ \iff (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \in \mathrm{Jspec}(\mathrm{Re(a_1)}, \mathrm{Im(a_1)}, \mathrm{Re(a_2)}, \mathrm{Im(a_2)}, \ldots).\end{aligned}$$

Demonstração. Observe inicialmente que $C^*(1, \{a_k\}_k) = C^*(1, \{\mathrm{Re(a_k)}\}_k, \{\mathrm{Im(a_k)}\}_k)$. Denote $\mathfrak{A}_0 = C^*(1, \{a_k\}_k)$. Seja $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots) \in \mathrm{Jspec}_k(a_k)$. Então existe $\varphi \in \widehat{\mathfrak{A}_0}$ tal que $x_k + iy_k = \varphi(a_k)$, para todo k, ou seja, $x_k = \mathrm{Re}(\varphi(\mathrm{a_k})) = \varphi(\mathrm{Re(a_k)})$, $y_k = \mathrm{Im}(\varphi(\mathrm{a_k})) = \varphi(\mathrm{Im(a_k)})$, para todo k. Segue-se daí de imediato que

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \in \mathrm{Jspec}(\mathrm{Re(a_1)}, \mathrm{Im(a_1)}, \mathrm{Re(a_2)}, \mathrm{Im(a_2)}, \ldots).$$

O argumento acima claramente pode ser revertido, verificando a implicação contrária, e isto conclui a prova.

■

Observação C.1.6. A proposição anterior garante em particular que se $a \in \mathfrak{A}$ é normal, então $x + iy \in \sigma(a)$ se, e somente se, $(x, y) \in \mathrm{Jspec}(\mathrm{Re(a)}, \mathrm{Im(a)})$.

C.2 Diagonalização Parcial Simultânea Módulo os Compactos

Temos como objetivo nesta seção provar o teorema C.2.3, que é essencialmente um teorema sobre diagonalização parcial simultânea de operadores módulo os operadores compactos. Este teorema é utilizado várias vezes no texto principal.

Faremos antes alguns resultados preparatórios. Para o próximo lema, precisaremos do teorema de Fuglede ([17], exercício 2.8): seja $\mathfrak{A}$ uma C*-álgebra, e $a, b \in \mathfrak{A}$ tais que a é normal, e $ba = ab$; então, também temos $b^*a = ab^*$.

Lema C.2.1. *Seja $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T_i^*T_j - T_jT_i^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \forall i, j$. Então, $C^*(1, \{\pi(T_k)\}_k)$ é uma sub-C*-álgebra comutativa de $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$, com unidade.*

Demonstração. Obviamente da hipótese, $\pi(T_k)$ é normal para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Também da hipótese, para todo i, j temos $\pi(T_i)^*\pi(T_j) = \pi(T_j)\pi(T_i)^*$, logo pelo teorema de Fuglede vemos que $\pi(T_i)\pi(T_j) = \pi(T_j)\pi(T_i)$. O resultado segue.

■

Como conseqüência do lema, podemos então falar do joint spectrum $\mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k))$.

Lema C.2.2. *Nas condições do lema C.2.1, tome $(\lambda_k)_k \in \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k))$. Então, existe $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que $\lim_{n\to\infty}\|(T_k - \lambda_k I)\eta_n\| = 0 \ \forall k$.*

Demonstração. Para todo k tal que $T_k \neq \lambda_k I$, note que

$$\left\| \frac{(T_k - \lambda_k I)^*(T_k - \lambda_k I)}{2^k \|T_k - \lambda_k I\|^2} \right\| = \frac{1}{2^k},$$

e assim vemos que a série

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_k - \lambda_k I)^*(T_k - \lambda_k I)}{2^k \|T_k - \lambda_k I\|^2},$$

converge absolutamente, e portanto converge (visto que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é de Banach). Portanto, esta série define um operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. É fácil ver que $S^* = S$, e portanto em particular S é um operador normal.

Denote $\mathfrak{A}_0 = C^*(1, \{\pi(T_k)\}_k)$. Por hipótese, sabemos que existe $\varphi \in \widehat{\mathfrak{A}_0}$ tal que $\varphi(\pi(T_k)) = \lambda_k$, para todo k. Observe então que, por continuidade e linearidade,

$$\varphi(\pi(S)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{(\pi(T_k) - \lambda_k 1)^*(\pi(T_k) - \lambda_k 1)}{2^k \|T_k - \lambda_k I\|^2} \right) = 0,$$

de onde concluímos que $0 \in \sigma(\pi(S)) = \sigma_e(S) \subseteq \sigma(S)$.

Afirmamos que existe $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que $\lim_{n\to\infty}\|S\eta_n\| = 0$. De fato, considere $\mathscr{E}$ a medida espectral associada ao operador S, pelo teorema espectral, e para cada $n \in \mathbb{N}^*$ defina

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} : 1/(n+1) < |z| \leq 1/n\} \cap \sigma(S),$$

que é claramente um subconjunto Boreliano de $\sigma(S)$ (pode ser vazio), e ainda $A_i \cap A_j = \emptyset$ caso $i \neq j$.

Temos dois casos possíveis:

No primeiro caso, $\mathscr{E}(A_n) \neq 0$ para uma quantidade infinita de A_n's. Neste caso, descartando os A_k para os quais $\mathscr{E}(A_k) = 0$ e renumerando, podemos supor sem perda de generalidade que $\mathscr{E}(A_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Para cada $i \in \mathbb{N}^*$ tome $\eta_i \in \operatorname{ran}(\mathscr{E}(A_i))$ tal que $\|\eta_i\| = 1$. Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ caso $i \neq j$, temos que $\operatorname{ran}(\mathscr{E}(A_i)) \perp \operatorname{ran}(\mathscr{E}(A_j))$, e portanto a seqüência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ assim obtida é ortonormal.

Note que $|(\zeta \cdot 1_{A_n})(z)| \leq 1/n$ para todo $z \in \sigma(S)$, logo $\|\zeta \cdot 1_{A_n}\| \leq 1/n$ e portanto, pelo cálculo funcional mensurável de S, $\|S\mathscr{E}(A_n)\| \leq 1/n$. Em particular, isto nos dá, para todo n,

$$\|S\eta_n\| = \|S\mathscr{E}(A_n)\eta_n\| \leq \|S\mathscr{E}(A_n)\|\|\eta_n\| = \|S\mathscr{E}(A_n)\| \leq 1/n,$$

de onde podemos concluir que $\lim_{n\to\infty}\|S\eta_n\| = 0$, como desejado.

No segundo caso, $\mathscr{E}(A_n) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de A_n's. Neste caso, existe um $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathscr{E}(A_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Lembrando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ caso $i \neq j$, vemos que $\mathscr{E}(\dot{\bigcup}_{n\geq n_0} A_n) = \sum_{n\geq n_0} \mathscr{E}(a_n) = 0$. Como $\sigma(S)$ é o suporte da medida espectral $\mathscr{E}$, temos que $\left(\dot{\bigcup}_{n\geq n_0} A_n\right) \cap \sigma(S) = \emptyset$.

Agora, $\dot{\bigcup}_{n\geq n_0} A_n = (B_F(0, 1/n_0)\backslash\{0\}) \cap \sigma(S)$. Provamos acima que $0 \in \sigma(S)$; logo, vemos daí que 0 é um ponto isolado de $\sigma(S)$, e portanto um autovalor isolado de S; mais ainda, como provamos que $0 \in \sigma_e(S)$, vemos que na verdade 0 é um autovalor de S com multiplicidade infinita, pelo teorema B.1.4. Então, $\dim(\ker(S)) = \infty$, de onde podemos tomar uma seqüência ortonormal $\{\eta_n\}_n \subseteq \ker(S)$. Obviamente, $\lim_{n\to\infty}\|S\eta_n\| = 0$.

Isto verifica o afirmado. Defina agora, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_k = \frac{T_k - \lambda_k I}{\|T_k - \lambda_k I\|}.$$

Então, $S = \sum_{k=1}^{\infty}(P_k^* P_k)/2^k$, e portanto $P_k^* P_k \leq 2^k S$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Finalmente, queremos provar que $\lim_{n\to\infty}\|(T_k - \lambda_k I)\eta_n\| = 0\ \forall k$. De fato, para um $k \in \mathbb{N}^*$ fixado,

$$\begin{aligned} \|P_k\eta_n\|^2 = \langle P_k\eta_n, P_k\eta_n\rangle = \langle P_k^* P_k\eta_n, \eta_n\rangle \leq \langle 2^k S\eta_n, \eta_n\rangle \leq \\ \leq 2^k\|S\eta_n\|\|\eta_n\| \leq 2^k\|S\eta_n\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

e como $T_k - \lambda_k I = \|T_k - \lambda_k I\|P_k$, o resultado segue.

■

No teorema a seguir, usaremos o conceito de operador de *Hilbert-Schmidt*. Para definições e resultados sobre estes operadores, ver por exemplo [21], seção 4.3.

Teorema C.2.3. *Seja $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T_i^* T_j - T_j T_i^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \forall i, j$. Tome, para cada $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^{(r)} = (\lambda_k^{(r)})_k \in \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k))$. Então, existe $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que*

$$T_k = (D_k \oplus R_k) + L_k\ \forall k \geq 1,$$

decomposição em soma direta esta relativa a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_r\}_r$, L_k é compacto, e $D_k = \mathrm{diag}_r(\lambda_k^{(r)})$ com relação à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$.

Demonstração. Provaremos primeiro o resultado no caso em que os operadores T_k são todos auto-adjuntos.

Vamos mostrar inicialmente que existe $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que, para todo $r \in \mathbb{N}^*$, $||(T_k - \lambda_k^{(r)} I)\xi_r|| < 1/2^r$, $\forall k \leq r$, usando indução sobre r.

$r = 1$: queremos provar que existe $\xi_1 \in \mathcal{H}$ de norma 1 tal que

$$||(T_1 - \lambda_1^{(1)I})\xi_1|| < 1/2.$$

Note que $\lambda_1^{(1)} \in \sigma(T_1) \subseteq \mathbb{R}$, pois T_1 é auto-adjunto. Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno, considere pelo lema de Urysohn uma função contínua $h : \sigma(T_1) \longrightarrow [0,1]$ tal que $h(\lambda_1^{(1)}) = 1$, h se anula em $\sigma(T_1)\backslash(\lambda_1^{(1)} - \delta, \lambda_1^{(1)} + \delta)$, e $||(\zeta - \lambda_1^{(1)} 1) \cdot h|| < 1$. Pelo cálculo fumcional contínuo de T_1, denotando $S = h(T_1)$, temos portanto $||(T_1 - \lambda_1^{(1)} I)S|| < 1$.

Obviamente $\|h\| = 1$, logo $\|S\| = 1$; tome então $\omega \in \mathcal{H}$ tal que $\|\omega\| = 1$ e $\|S\omega\| > 1/2$. Definindo $\xi_1 = (S\omega)/\|S\omega\|$, temos assim que $\|\xi_1\| = 1$, e ainda

$$||(T_1 - \lambda_1^{(1)} I)\xi_1|| = \frac{1}{\|S\omega\|}||(T_1 - \lambda_1^{(1)} I)S\omega|| \leq \frac{1}{\|S\omega\|}||(T_1 - \lambda_1^{(1)} I)S|| \cdot ||\omega|| < \frac{1}{2}.$$

Como hipótese de indução, suponha que existam $\xi_1, \ldots \xi_{s-1} \in \mathcal{H}$ ortonormais tais que $||(T_k - \lambda_k^{(r)} I)\xi_r|| < 1/2^r$, $\forall r < s$, $\forall k \leq r$. Vamos encontrar $\xi_s \in \mathcal{H}$ unitário tal que ξ_s é ortogonal a ξ_r para todo $r < s$, e $||(T_k - \lambda_k^{(s)} I)\xi_s|| < 1/2^s$, para todo $k \leq s$.

Usando o lema C.2.1 para o elemento $(\lambda_k^{(s)})_k \in \mathrm{Jspec}_k(\pi(T_k))$, temos que existe $\{\eta_n\}_n \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que $\lim_{n\to\infty}||(T_k - \lambda_k^{(s)} I)\eta_n|| = 0$ $\forall k$.

A seqüência $\{\eta_n\}_n$ é ortonormal, logo converge fracamente para zero. Defina $M = \max_{k\leq s}\{1 + \|T_k\| + |\lambda_k^{(s)}|\}$, e tome $\delta > 0$ com $\delta < 1/(M2^s + 2)$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|\langle \eta_{n_0}, \xi_r\rangle| < \frac{\delta}{s-1} \;\forall r < s, \qquad ||(T_k - \lambda_k^{(s)})\eta_{n_0}|| < \delta \;\forall k \leq s.$$

Denote $\eta = \eta_{n_0}$, defina $\xi = \eta - \sum_{r=1}^{s-1} \langle \eta, \xi_r\rangle \xi_r$, e faça $\xi_s = \xi/\|\xi\|$. Obviamente por construção, $\|\xi_s\| = 1$, e ξ_s é ortogonal a ξ_r $\forall r < s$.

Note que $\|\eta\| = \|\eta - \xi + \xi\| \leq \|\eta - \xi\| + \|\xi\|$ implica em $\|\xi\| \geq \|\eta\| - \|\eta - \xi\|$. Ora, mas

$$\|\eta - \xi\| \leq \textstyle\sum_{r=1}^{s-1}|\langle \eta, \xi_r\rangle| < \sum_{r=1}^{s-1}\delta/(s-1) = \delta,$$

e portanto $-\|\eta - \xi\| > -\delta$. Ainda, $\|\eta\| = 1$, logo podemos escrever $\|\eta\| > 1 - \delta$. Juntando,

$$\|\xi\| \geq \|\eta\| - \|\eta - \xi\| > 1 - \delta - \delta = 1 - 2\delta,$$

de onde temos

$$\frac{1}{\|\xi\|} < \frac{1}{1-2\delta}.$$

Observando-se que $1-2\delta > (M2^{s-1})/(M2^{s-1}+1)$, vemos então que, para todo $k \leq s$,

$$\begin{aligned}
||(T_k - \lambda_k^{(s)}I)\xi_s|| &= \frac{1}{\|\xi\|}||(T_k - \lambda_k^{(s)}I)\xi|| \leq \\
&\leq \frac{1}{\|\xi\|}\left[||(T_k - \lambda_k^{(s)}I)\eta|| + \textstyle\sum_{r=1}^{s-1}|\langle \eta, \xi_r\rangle| \cdot ||T_k - \lambda_k^{(s)}I|| \cdot ||\xi_r||\right] < \\
&< \frac{1}{1-2\delta}\left[\delta + \textstyle\sum_{r=1}^{s-1}\frac{\delta}{s-1}(\|T_k\| + |\lambda_k^{(s)}|)\right] = \frac{\delta}{1-2\delta}(1 + \|T_k\| + |\lambda_k^{(s)}|) \leq \\
&= \frac{\delta}{1-2\delta}M < \frac{1}{2(M2^{s-1}+1)} \cdot \frac{(M2^{s-1}+1)}{M2^{s-1}} \cdot M = \frac{1}{2^s},
\end{aligned}$$

como queríamos. A seqüência $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal assim obtida é portanto tal que, para todo $r \in \mathbb{N}^*$, $||(T_k - \lambda_k^{(r)}I)\xi_r|| < 1/2^r$, $\forall k \leq r$.

De acordo com a decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_r\}_r$, podemos escrever cada T_k matricialmente como

$$T_k = \begin{pmatrix} X_k & Y_k^* \\ Y_k & R_k \end{pmatrix},$$

visto que os T_k são auto-adjuntos.

Seja $D_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ o operador $D_1 = \mathrm{diag}_r(\lambda_k^{(r)})$, relativo a base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$. Então, podemos escrever

$$T_k - D_k \oplus R_k = \begin{pmatrix} X_k - D_k & Y_k^* \\ Y_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado $r \geq 1$, temos

$$\|(T_k - D_k \oplus R_k)\xi_r\|^2 = \|(X_k - D_k)\xi_r + Y_k\xi_r\|^2 = \|(X_k - D_k)\xi_r\|^2 + \|Y_k\xi_r\|^2,$$

e por outro lado

$$\|(T_k - D_k \oplus R_k)\xi_r\|^2 = \|T_k\xi_r - D_k\xi_r\|^2 = ||(T_k - \lambda_k^{(r)})\xi_r||^2 < \left(\frac{1}{2^r}\right)^2,$$

de onde vemos que

$$\|(X_k - D_k)\xi_r\|^2 < \left(\frac{1}{2^r}\right)^2, \quad \|Y_k\xi_r\|^2 < \left(\frac{1}{2^r}\right)^2,$$

e assim

$$\textstyle\sum_{r=1}^{\infty}\|(X_k - D_k)\xi_r\|^2 < \infty, \qquad \sum_{r=1}^{\infty}\|Y_k\xi_r\|^2 < \infty,$$

provando deste modo que os operadores $(X_k - D_k)$ e Y_k são operadores de Hilbert-Schmidt. Assim, $L_k := T_k - (D_k \oplus R_k)$ é um operador de Hilbert-Schmidt (pois cada componente da matriz de L_k dada acima é de Hilbert-Schmidt), e portanto em particular compacto. O resultado para o caso de operadores auto-adjuntos fica então provado.

Faremos agora o caso geral, reduzindo ao caso auto-adjunto que acabamos de provar.

Note que $\mathrm{Re(T_k)}$ e $\mathrm{Im(T_k)}$ são auto-adjuntos, para todo k. Denotando $\lambda_k^{(r)} = x_k^{(r)} + iy_k^{(r)}$, e observando que $\mathrm{Re}(\pi(\mathrm{T_k})) = \pi(\mathrm{Re(T_k)})$, $\mathrm{Im}(\pi(\mathrm{T_k})) = \pi(\mathrm{Im(T_k)})$, vemos da proposição C.1.5 que

$$\widetilde{\lambda}^{(r)} := (x_1^{(r)}, y_1^{(r)}, x_2^{(r)}, y_2^{(r)}, \ldots) \in \mathrm{Jspec}(\pi(\mathrm{Re(T_1)}), \pi(\mathrm{Im(T_1)}), \pi(\mathrm{Re(T_2)}), \ldots).$$

Então, pelo caso auto-adjunto já estabelecido, aplicado à seqüência de operadores $\{T'_k\}_k$ dada por $T'_{2k-1} = \mathrm{Re(T_k)}$, $T'_{2k} = \mathrm{Im(T_k)}$, e aos $\widetilde{\lambda}^{(r)}$ acima definidos, existe $\{\xi_r\}_r \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que

$$\mathrm{Re(T_k)} = (E_k \oplus S_k) + M_k, \qquad \mathrm{Im(T_k)} = (E'_k \oplus S'_k) + M'_k, \ \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

relativo à decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_r\}_r$, os operadores M_k e M'_k são compactos, e $E_k = \mathrm{diag}_k(\widetilde{\lambda}_{2k-1}^{(r)}) = \mathrm{diag}_k(x_k^{(r)})$, $E'_k = \mathrm{diag}_k(\widetilde{\lambda}_{2k}^{(r)}) = \mathrm{diag}_k(y_k^{(r)})$ relativos à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$.

Denotando $D_k = E_k + iE'_k$, $R_k = S_k + iS'_k$, e $L_k = M_k + iM'_k$, vemos que

$$D_k = \mathrm{diag}_k(x_k^{(r)} + iy_k^{(r)}) = \mathrm{diag}_k(\lambda_k^{(r)}),$$

os operadores L_k são compactos,

$$T_k = \mathrm{Re(T_k)} + i\mathrm{Im(T_k)} = (E_k + iE'_k) \oplus (S_k + iS'_k) + (M_k + iM'_k) = (D_k \oplus R_k) + L_k,$$

e o teorema está portanto provado.

■

Observação C.2.4. É possível refinar ainda mais a decomposição dada pelo teorema C.2.3, de forma que $\sigma_e(R_k) = \sigma_e(T_k)$ para todo k, mas não precisaremos deste fato.

Um caso particular do teorema C.2.3 de relevância para nós é o caso em que a família de operadores $\{T_k\}_k$ é na verdade uma família unitária, isto é, ela consiste em um único operador T. É fácil ver que $\mathrm{Jspec}(\pi(T)) = \sigma(\pi(T)) = \sigma_e(T)$. Portanto, neste caso particular temos o corolário seguinte.

Corolário C.2.5. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ essencialmente normal. Tome, para cada $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^{(r)} \in \sigma_e(T)$. Então, existe $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{H}$ ortonormal tal que*

$$T = (D \oplus R) + L,$$

decomposição em soma direta esta relativa a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, onde $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathrm{span}}\{\xi_r\}_r$, L é compacto, e $D = \mathrm{diag}_r(\lambda^{(r)})$ com relação à base $\{\xi_r\}_r$ de $\mathcal{H}_1$.

Demonstração. Óbvio do teorema C.2.3.

■

Apêndice D

Aplicações Positivas

No decorrer de todo este apêndice, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ denotam C*-álgebras comutativas com unidade, $\mathfrak{L}$ um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{A}$, e $\mathfrak{J}$ um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{B}$. As aplicações de projeção nos quocientes, $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$, serão denotadas simplesmente por π. O conjunto dos elementos positivos de $\mathfrak{A}$ será denotado por $\mathfrak{A}_+$. Esta discussão é baseada no texto contido em [9] sobre aplicações positivas.

D.1 O Teorema de Stinespring

Definição D.1.1. Uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é dita ser *positiva* quando $\varphi(a) \geq 0 \ \forall a \in \mathfrak{A}_+$. O conjunto das aplicações positivas de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ será denotado por $\mathcal{P}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, e o subonjunto destas aplicações tais que $\varphi(1) = 1$ será denotado por $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Dada uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, defina $\varphi^{(n)} : M_n(\mathfrak{A}) \longrightarrow M_n(\mathfrak{B})$ por

$$\varphi^{(n)}([a_{ij}]_{ij}) = [\varphi(a_{ij})]_{ij} \quad \forall [a_{ij}]_{ij} \in M_n(\mathfrak{A}),$$

que é claramente linear, e unital se φ o for.

Definição D.1.2. Dado $n \in \mathbb{N}^*$, dizemos que uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é *n-positiva* quando $\varphi^{(n)}$ é positiva. Diremos que φ é *completamente positiva* se φ é n-positiva para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Um importante resultado é dado pela proposição D.1.10. Nós faremos alguns lemas antes.

Lema D.1.3. *Se $a \in \mathfrak{A}_+$ e $0 \leq a \leq c \cdot 1$, para algum $c \in \mathbb{R}$, então $\|a\| \leq c$.*

Demonstração. Usando o teorema do mapeamento espectral, e o fato que a e $c \cdot 1 - a$ são positivos, vemos que $\{c - \lambda : \lambda \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}_+$, e assim de imediato $\|a\| = r(a) \leq c$.

■

Lema D.1.4. *Se $a \in \mathfrak{A}$ é auto-adjunto, então podemos escrever $a = a_+ - a_-$, onde $a_+, a_- \in \mathfrak{A}_+$. Ademais, se $\|a\| \leq 1$, então podemos tomar $a_+ \leq 1$, $a_- \leq 1$.*

Demonstração. Ver por exemplo [21], proposição 3.3.11(f).

■

Lema D.1.5. *Seja $\varphi \in \mathcal{P}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Então, $\|\varphi\| \leq 4\|\phi(1)\|$.*

Demonstração. Tome $a \in \mathfrak{A}$ auto-adjunto com $\|a\| \leq 1$ arbitrariamente. Escreva $a = a_+ - a_-$ com $a_+, a_- \in \mathfrak{A}_+$ e $a_+ \leq 1$, $a_- \leq 1$, pelo lema D.1.4. A positividade de φ implica então em

$$0 \leq \varphi(a_-) \leq \varphi(1) \leq \|\varphi(1)\| \cdot 1,$$

e da mesma forma $0 \leq \varphi(a_+) \leq \|\varphi(1)\| \cdot 1$. Em virtude do lema D.1.3, vem que $\|\varphi(a_-)\| \leq \|\varphi(1)\|$, $\|\varphi(a_+)\| \leq \|\varphi(1)\|$.

Se tomarmos agora um $a \in \mathfrak{A}$ com $\|a\| \leq 1$ arbitrário, escrevendo a em suas partes real e imaginária, usando a linearidade de φ e a desigualdade triangular, teremos $\|\varphi(a)\| \leq 4\|\varphi(1)\|$, e o resultado segue.

■

Se $\varrho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ é um *-automorfismo unital, então sabemos que $\sigma(a) = \sigma(\varrho(a))$, para todo $a \in \mathfrak{A}$. Esta observação nos permite enunciar o lema seguinte.

Lema D.1.6. *Seja $\varrho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ um *-automorfismo unital. Então, o cálculo funcional contínuo comuta com ϱ, isto é, $f(\varrho(a)) = \varrho(f(a))$, para todo $a \in \mathfrak{A}$ normal e $f \in C(\sigma(a)) = C(\sigma(\varrho(a)))$.*

Demonstração. Tome $a \in \mathfrak{A}$ normal arbitrário. As aplicações $\eta_1 : C(\sigma(\varrho(a))) \longrightarrow \mathfrak{A}$ e $\eta_2 : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathfrak{A}$ dadas respectivamente por $\eta_1(f) = \varrho(f(a))\ \forall f \in C(\sigma(a))$ e $\eta_2(f) = f(\varrho(a))\ \forall f \in C(\sigma(\varrho(a)))$ são obviamente *-homomorfismos (η_1 é ϱ composta com o cálculo funcional contínuo de a, e η_2 é o cálculo funcional contínuo de a). Agora, note que, para $1, \zeta \in C(\sigma(a)) = C(\sigma(\varrho(a)))$, temos

$$\eta_2(1) = 1(\varrho(a)) = 1_{\mathfrak{A}} = \varrho(1_{\mathfrak{A}}) = \varrho(1(a)) = \eta_1(1),$$

$$\eta_2(\zeta) = \zeta(\varrho(a)) = \varrho(a) = \varrho(\zeta(a)) = \eta_1(\zeta).$$

Em outras palavras, η_1 e η_2 coincidem nos geradores de $C(\sigma(a)) = C(\sigma(\varrho(a)))$, de onde $\eta_1 = \eta_2$, e o resultado segue de imediato.

■

Observação D.1.7. Se $\varrho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ é simplesmente um *-*homomorfismo* unital, lembremos que ϱ contrai espectro, ou seja, $\sigma(\varrho(a)) \subseteq \sigma(a)$, $\forall a \in \mathfrak{A}$. Assim, dado $f \in C(\sigma(a))$, podemos considerar f como um elemento de $C(\sigma(\varrho(a)))$, fazendo a restrição. Nestes termos, nota-se que o lema D.1.6 generaliza-se de imediato, e temos que $f(\varrho(a)) = \varrho(f(a))$, para todo $a \in \mathfrak{A}$ normal e $f \in C(\sigma(a))$.

Lema D.1.8. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Então, para quaisquer $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$, tenhamos $\|f(a) - f(b)\| < \varepsilon$.*

Demonstração. Considere $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ o conjunto formado por todos elementos $f \in C(X)$ que satisfazem a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$, tenhamos $\|f(a) - f(b)\| < \varepsilon$.

Nós iremos mostrar que $\mathcal{F} = C(X)$. Provemos que $\mathcal{F}$ é uma *-sub-álgebra de $C(X)$:

Sejam $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ arbitrários. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta_f > 0$ associado a f com $\varepsilon' = \varepsilon/(2|\alpha|)$, e $\delta_g > 0$ associado a g com $\varepsilon'' = \varepsilon/2$, pela propriedade acima mencionada. Então, tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, para $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$ teremos

$$\|(\alpha f + g)(a) - (\alpha f + g)(b)\| \leq |\alpha| \cdot \|f(a) - f(b)\| + \|g(a) - g(b)\| < |\alpha| \cdot \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon,$$

provando deste modo que $\alpha f + g \in \mathcal{F}$.

Observe agora que, para todo $h \in C(X)$, e para todo $c \in \mathfrak{A}$ normal com $\sigma(c) \subseteq X$ temos

$$\|h(c)\| = \|h\|_{C(\sigma(c))} = \sup_{t \in \sigma(c)} |h(t)| \leq \sup_{t \in X} |h(t)| = \|h\|_{C(X)}.$$

Então, para quaisquer $f, g \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$, tome δ_f associado a f com $\varepsilon' = \varepsilon/(2 \cdot \|g\|_{C(X)})$, e tome δ_g associado a g com $\varepsilon'' = \varepsilon/(2 \cdot \|f\|_{C(X)})$; faça $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Então, para $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$ teremos

$$\begin{aligned} &\|(f \cdot g)(a) - (f \cdot g)(b)\| \leq \|f(a)g(a) - f(a)g(b)\| + \|f(a)g(b) - f(b)g(b)\| \leq \\ &\leq \|f(a)\| \cdot \|g(a) - g(b)\| + \|f(a) - f(b)\| \cdot \|g(b)\| < \|f\|_{C(X)} \cdot \varepsilon'' + \|g\|_{C(X)} \cdot \varepsilon' = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que $f \cdot g \in \mathcal{F}$.

Finalmente, dado $f \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$, para $\delta > 0$ associado a f e o ε dado, vemos que para para $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$ temos

$$\left\|\overline{f}(a) - \overline{f}(b)\right\| = \|(f(a))^* - (f(b))^*\| = \|(f(a) - f(b))^*\| = \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon,$$

de onde segue que $\overline{f} \in \mathcal{F}$, e portanto $\mathcal{F}$ é uma *-sub-álgebra de $C(X)$, como afirmado.

Como para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$ normais temos $1(a) = 1(b) = 1_{\mathfrak{A}}$, é óbvio que $\mathcal{F}$ contém a função $1 \in C(X)$, e portanto também as funções constantes.

Afirmamos agora que $\zeta \in \mathcal{F}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon$; então, para $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$ temos

$$\|\zeta(a) - \zeta(b)\| = \|a - b\| < \delta = \varepsilon,$$

e assim $\zeta \in \mathcal{F}$, verificando o afirmado.

Em particular, isto mostra que a *-sub-álgebra $\mathcal{F}$ separa pontos de X. Assim, por Stone-Weierstrass, concluímos que $\mathcal{F}$ é densa em $C(X)$.

Agora, tome $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Por densidade, seja $f \in \mathcal{F}$ com $\|f - g\|_{C(X)} < \varepsilon/3$, e seja $\delta > 0$ associado a g com $\varepsilon' = \varepsilon/3$. Então, para $a, b \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq X$ e $\|a - b\| < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &\leq \|f(a) - g(a)\| + \|g(a) - g(b)\| + \|g(b) - f(b)\| \leq \\ &\leq \|f - g\|_{C(X)} + \frac{\varepsilon}{3} + \|g - f\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e isto implica em $f \in \mathcal{F}$, de onde $C(X) = \mathcal{F}$, e o lema está provado.

■

Lema D.1.9. *Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Então,*

$$C(X, M_n(\mathbb{C})_+) = C(X, M_n(\mathbb{C}))_+.$$

Demonstração. Tome $F \in C(X, M_n(\mathbb{C}))_+$ arbitrário. Então, existe $\widetilde{F} \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$ tal que $F = \widetilde{F}^* \widetilde{F}$, e assim vemos que $F(x) = \widetilde{F}^*(x)\widetilde{F}(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, de onde temos de imediato que $C(X, M_n(\mathbb{C}))_+ \subseteq C(X, M_n(\mathbb{C})_+)$.

Por outro lado, tome $F \in C(X, M_n(\mathbb{C})_+)$ arbitrário. Para cada $x \in X$, temos $F(x) \geq 0$; podemos definir portanto uma aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{F} : X &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ x &\longmapsto (F(x))^{1/2}. \end{aligned}$$

Se $\lambda \in \sigma(F(x))$, então $F(x) - \lambda I$ é não inversível, e portanto a função $F - \lambda 1$ não é inversível; em outras palavras, $\sigma(F(x)) \subseteq \sigma(F)$, para todo $x \in X$. Segue-se então do lema D.1.8 que $\widetilde{F}$ é uma função contínua: de fato, sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Considere um $\delta > 0$ associado a função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ dada pela raiz quadrada, e ao ε dado, como no lema D.1.8. Pela continuidade de F, seja $V \subseteq X$ uma vizinhança aberta de X tal que $y \in V$ implica em $\|F(y) - F(x)\| < \delta$. Assim, usando o fato provado acima que $\sigma(F(x)) \subseteq \sigma(F)$, $\sigma(F(y)) \subseteq \sigma(F)$, temos de imediato pelo lema D.1.8 que

$$\left\|\widetilde{F}(y) - \widetilde{F}(x)\right\| = \left\|(F(y))^{1/2} - (F(x))^{1/2}\right\| = \|f(F(y)) - f(F(x))\| < \varepsilon,$$

estabelecendo a continuidade de $\widetilde{F}$ em x. Como x foi tomado arbitrariamente, isto mostra que $\widetilde{F}$ é contínua, como desejado.

Assim, vemos que $\widetilde{F} \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$ é tal que $F(x) = \widetilde{F}^*(x)\widetilde{F}(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, de onde temos que $F = \widetilde{F}^*\widetilde{F} \geq 0$, ou seja, $F \in C(X, M_n(\mathbb{C}))_+$. Fica assim provado que $C(X, M_n(\mathbb{C})_+) = C(X, M_n(\mathbb{C}))_+$, como queríamos.

■

Na proposição seguinte, será utilizado o conceito de *partição da unidade*. Para uma exposição rigorosa e adequada sobre este conceito, ver por exemplo [22].

Proposição D.1.10. *Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff, e seja $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}$ uma aplicação positiva. Então, φ é completamente positiva.*

Demonstração. Note inicialmente que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(C(X))$ é obviamente *-isomorfo a $C(X, M_n(\mathbb{C}))$. Sem perda de generalidade faremos uma identificação entre estas duas álgebras, portanto.

Suponha que $F \in M_n(C(X))$ é da forma $F = f \cdot T$, com $f \in C(X)$ e $T \in M_n(\mathbb{C})_+$. Se $T = [t_{ij}]_{ij}$, então $f \cdot T = [f \cdot t_{ij}]$, e assim

$$\varphi^{(n)}(F) = \varphi^{(n)}([f \cdot t_{ij}]_{ij}) = [\varphi(f \cdot t_{ij})]_{ij} = [\varphi(f) \cdot t_{ij}]_{ij} = \varphi(f)[t_{ij}]_{ij} = \varphi(f) \cdot T.$$

Em particular, se $f \geq 0$ então $\varphi(f) \geq 0$ e portanto $\varphi^{(n)}(F) \geq 0$: de fato, se escrevermos $T = M^*M$, com $M = [a_{ij}]_{ij}$, para $a_{ij} \in \mathbb{C}$, e $\varphi(f) = b^*b$ para algum $b \in \mathfrak{B}$, então $M^* = [\overline{a_{ji}}]_{ij}$, e

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(F) = \varphi(f) \cdot T = b^*b[\overline{a_{ji}}]_{ij}[a_{ij}]_{ij} = b^*b[\textstyle\sum_k \overline{a_{ki}} a_{kj}]_{ij} = [\textstyle\sum_k b^*b\overline{a_{ki}} a_{kj}]_{ij} = \\ = [\textstyle\sum_k (\overline{a_{ki}} b^*)(a_{kj} b)]_{ij} = [\overline{a_{ji}} b^*]_{ij}[a_{ij} b]_{ij} = ([a_{ij} b]_{ij})^*[a_{ij} b]_{ij} \geq 0,\end{aligned}$$

como afirmado.

Agora, tome $\varepsilon > 0$ e $F \in M_n(C(X))_+ = C(X, M_n(\mathbb{C}))_+ = C(X, M_n(\mathbb{C})_+)$. A função $\varphi^{(n)}$ é contínua, logo em particular contínua em F; tome um $\delta > 0$ associado por tal continuidade ao ε dado. Para cada $x \in X$ tome $V_x \subseteq X$ uma vizinhança aberta de x tal que $y \in V_x$ implica em $\|F(x) - F(y)\| < \delta/2$. Note que $\{V_x\}_x$ é uma cobertura de abertos de X, logo podemos selecionar uma sub-cobertura finita $U_1, \dots U_k$. Usando desigualdade triangular vemos que, para todo $i = 1, \dots k$, se $y, y' \in U_i$, então $\|F(y) - F(y')\| < \delta$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, fixe $x_i \in U_i$, e denote $T_i = F(x_i)$. Tome $\{p_i\}_{i=1}^k$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_i\}_{i=1}^k$. Então, definindo $G \in M_n(C(X))$ por $G = \sum_{i=1}^k p_i \cdot T_i$, e observando que $p_i(x) > 0$ implica em $x \in U_i$, e portanto

$$\|F(x) - T_i\| = \|F(x) - F(x_i)\| < \delta,$$

vemos que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|F(x) - G(x)\| = \|F(x) \cdot 1 - G(X)\| &= \left\|F(x)\textstyle\sum_{i=1}^k p_i(x) - \sum_{i=1}^k p_i(x) \cdot T_i\right\| = \\ &= \left\|\textstyle\sum_{i=1}^k p_i(x)(F(x) - T_i)\right\| \leq \textstyle\sum_{i=1}^k p_i(x)\|F(x) - T_i\| < \delta,\end{aligned}$$

e assim $\|F - G\| \leq \delta$. Segue-se por continuidade que $\left\|\varphi^{(n)}(F) - \varphi^{(n)}(G)\right\| \leq \varepsilon$.

Observe agora que $\varphi^{(n)}(G) = \sum_{i=1}^k \varphi(p_i) \cdot T_i$ é positivo, visto que é soma de positivos. Provamos portanto que $\varphi^{(n)}(F)$ é limite de positivos, e portanto positivo, de onde temos que φ é uma aplicação n-positiva; como o $n \in \mathbb{N}^*$ havia sido tomado arbitrariamente, fica estabelecido que φ é completamente positiva, como queríamos provar.

■

O teorema D.1.11, provado por Stinespring em [20], é conhecido como *teorema de Stinespring*. Este teorema, juntamente com a proposição D.1.10, são usados na prova de que $\mathrm{Ext}(X)$ é um grupo abeliano. Enfatizamos que, assim como no resto do trabalho, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita *separável*.

Teorema D.1.11. *Seja $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma aplicação unital e completamente positiva. Então, existem $\widetilde{\mathcal{H}}$ um espaço de Hilbert com $\mathcal{H} \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$, e $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ uma *-representação tais que $\varphi = \iota^* \circ \psi \circ \iota$, onde $\iota : \mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ é a inclusão. Se $\mathfrak{A}$ é separável, então $\widetilde{\mathcal{H}}$ pode ser tomado separável.*

Demonstração. Considere o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dado pelo produto tensorial algébrico $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$. É fácil verificar, usando a propriedade universal do produto tensorial, que a aplicação $T : (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}) \times (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T(\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes \eta_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(b_j^* a_i)\xi_i, \eta_j \rangle$$

está bem definida e é uma forma sesquilinear (linear na primeira e anti-linear na segunda entradas). Nós queremos provar que esta forma T é semidefinida positiva: de fato, dado $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$ arbitrário, denote $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$ e observe que

$$[a_i^* a_j]_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n \times n}^{*} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n \times n} \geq 0.$$

Como φ é completamente positiva, temos $\varphi^{(n)}([a_i^* a_j]_{ij}) \geq 0$, e assim

$$\begin{aligned} T(\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes \xi_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(a_i^* a_j)\xi_j, \xi_i \rangle = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_i^* a_j)\xi_j, \xi_i \rangle = \langle \varphi^{(n)}([a_i^* a_j]_{ij})\xi, \xi \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

de onde vemos que T é semidefinida positiva, como desejado.

Denote $\mathcal{N} = \{v \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} : T(v, v) = 0\}$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (que é válida para qualquer forma sesquilinear semidefinida positiva - ver [21], observação 2.1.5(1)), é fácil verificar que $\mathcal{N} = \{v \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} : T(v, u) = 0 \ \forall u \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}\}$, de onde vemos que $\mathcal{N}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$.

É padrão então que T induz um produto interno $\langle , \rangle$ (não degenerado) no espaço $(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$, dado por

$$\langle [g], [h] \rangle = T(g, h) \ \ \forall [g], [h] \in (\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}.$$

Seja $\widetilde{\mathcal{H}}$ o completamento de $(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$ na norma induzida pelo produto interno dado acima. Então, $\widetilde{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert.

Nós iremos agora construir a *-representação ψ como no enunciado. Fixado $a \in \mathfrak{A}$, e novamente utilizando a propriedade universal do produto tensorial, verifica-se facilmente que está bem definida uma aplicação linear $F_a : \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$ dada por

$$F_a(\textstyle\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a b_i \otimes \xi_i.$$

É fácil ver que $T_a T_b = T_{ab}$, para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$. Observe que $T(F_a(v), w) = T(v, F_{a^*}(w))$, para quaisquer $a \in \mathfrak{A}$ e $v, w \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$. De fato, tomando arbitrariamente

$a \in \mathfrak{A}$ e $v, w \in \mathfrak{A}\otimes\mathcal{H}$, se denotarmos $v = \sum_{j=1}^n b_j\otimes\xi_j$, $w = \sum_{i=1}^m c_i\otimes\eta_i$, então

$$T(F_a(v), w) = T(\textstyle\sum_{j=1}^n ab_j\otimes\xi_j, \sum_{i=1}^m c_i\otimes\eta_i) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \langle\varphi(c_i^* ab_j)\xi_j, \eta_i\rangle =$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \langle\varphi((a^*c_i)^* b_j)\xi_j, \eta_i\rangle = T(\sum_{j=1}^n b_j\otimes\xi_j, \sum_{i=1}^m (a^*c_i)\otimes\eta_i) = T(v, F_{a^*}(w)),$$

como desejado.

Afirmamos que para quaisquer $a \in \mathfrak{A}$ e $v \in \mathfrak{A}\otimes\mathcal{H}$ temos

$$T(F_a(v), F_a(v)) \leq \|a\|^2 T(v, v).$$

De fato, escrevendo $v = \sum_{j=1}^n b_j\otimes\xi_j$, denotando $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathcal{H}^n$, e $C = [c_{ij}]_{ij}$, onde $c_{ij} = b_i^* a^* a b_j$, temos, pelo que acabamos de provar, que

$$T(F_a(v), F_a(v)) = T(F_{a^*}(F_a(v)), v) = T(F_{a^*a}(v), v) =$$
$$= T(\textstyle\sum_{j=1}^n a^*ab_j\otimes\xi_j, \sum_{i=1}^n b_i\otimes\xi_i) = \sum_{i=1}^n \langle\sum_{j=1}^n \varphi(b_i^* a^* a b_j)\xi_j, \xi_i\rangle = \langle\varphi^{(n)}(C)\xi, \xi\rangle.$$

Seja $A \in M_n(\mathfrak{A})$ a matriz diagonal cujas entradas diagonais são todas iguais a a^*a; então, obviamente temos

$$C = \begin{pmatrix} b_1^* & \vdots & \iddots \\ \vdots & 0 & \cdots \\ b_n^* & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ademais, como $\|A\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, temos $0 \leq A \leq \|a\|^2 \cdot I$, e portanto

$$0 \leq C \leq \begin{pmatrix} b_1^* & \vdots & \iddots \\ \vdots & 0 & \cdots \\ b_n^* & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \|a\|^2 \cdot I \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \|a\|^2 [b_i^* b_j]_{ij}.$$

Segue-se então da positividade de $\varphi^{(n)}$ que $0 \leq \varphi^{(n)}(C) \leq \|a\|^2 \varphi^{(n)}([b_i^* b_j]_{ij})$, e portanto

$$T(F_a(v), F_a(v)) = \langle\varphi^{(n)}(C)\xi, \xi\rangle \leq \|a\|^2 \langle\varphi^{(n)}([b_i^* b_j]_{ij})\xi, \xi\rangle =$$
$$= \|a\|^2 \textstyle\sum_{i=1}^n \langle\sum_{j=1}^n \varphi(b_i^* b_j)\xi_j, \xi_i\rangle = \|a\|^2 T(v, v),$$

provando o afirmado.

Note que isto prova em particular que $\mathcal{N}$ é um subespaço F_a-invariante, para todo

$a \in \mathfrak{A}$, visto que, para $a \in \mathfrak{A}$ e $v \in \mathcal{N}$ arbitrários,

$$T(F_a(v), F_a(v)) \leq \|a\|^2 T(v,v) = \|a\|^2 \cdot 0 = 0,$$

o que implica em $F_a(v) \in \mathcal{N}$. Naturalmente, fica portanto bem definida uma aplicação $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$, onde para todo $a \in \mathfrak{A}$, $\psi(a)$ é dada por $\psi(a)([v]) = [F_a(v)]$, $\forall [v] \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

Observe agora que $\psi(a)$ é um operador *limitado*, pois para $[v] \in \widetilde{\mathcal{H}}$ arbitrário temos

$$\|\psi(a)[v]\|^2 = \|[F_a(v)]\|^2 = T(F_a(v), F_a(v)) \leq \|a\|^2 T(v,v) = \|a\|^2 \cdot \|[v]\|^2,$$

e portanto $\|\psi(a)[v]\| \leq \|a\| \cdot \|[v]\|$; em outras palavras, podemos restringir o contra-domínio de ψ e considerar $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$. Usando as propriedades acima verificadas de F_a, é imediato provar que ψ é uma *-representação de $\mathfrak{A}$ sobre $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Provemos que existe uma cópia isométrica de $\mathcal{H}$ dentro de $\widetilde{\mathcal{H}}$: defina

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{H} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}} \\ \xi & \longmapsto & [1 \otimes \xi]. \end{array}$$

É óbvio que ι é linear; mais ainda, ι é isometria, pois

$$\|\iota(\xi)\|^2 = \langle [1\otimes\xi], [1\otimes\xi] \rangle = T(1\otimes\xi, 1\otimes\xi) = \langle \varphi(1^*1)\xi, \xi \rangle = \langle I\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2.$$

Observe agora que, para $a \in \mathfrak{A}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ arbitrários,

$$\begin{aligned} \langle \iota^* \psi(a) \iota(\xi), \eta \rangle = \langle \psi(a)\iota(\xi), \iota(\eta) \rangle = \langle \psi(a)[1\otimes\xi], [1\otimes\eta] \rangle = \\ = \langle [a\otimes\xi], [1\otimes\eta] \rangle = \langle \varphi(1^*a)\xi, \eta \rangle = \langle \varphi(a)\xi, \eta \rangle, \end{aligned}$$

provando com isto que $\varphi = \mathrm{Ad}\iota \circ \psi$.

Falta-nos apenas provar que, se $\mathfrak{A}$ é separável, então $\widetilde{\mathcal{H}}$ pode ser tomado separável. Para tanto, tome $F = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ denso em $\mathfrak{A}$, e $G = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ denso em $\mathcal{H}$. Considere o subconjunto $E \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$ dado por somas finitas de elementos da forma $[a_i \otimes \xi_j]$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}^*$. Nós provaremos que E é denso em $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Primeiro observe que, para qualquer elemento de $\widetilde{\mathcal{H}}$ da forma $[a\otimes\xi]$, o fato de $a^*a \leq \|a\|^2 \cdot 1$ implica em

$$\langle [a\otimes\xi], [a\otimes\xi] \rangle = T(a\otimes\xi, a\otimes\xi) = \langle \varphi(a^*a)\xi, xi \rangle \leq \|a\|^2 \langle \varphi(1)\xi, \xi \rangle = \|a\|^2 \cdot \|\xi\|^2.$$

Tome agora $\varepsilon > 0$ qualquer, e um elemento de $\widetilde{\mathcal{H}}$ da forma $[b\otimes\eta]$. Por densidade, tome $\xi_j \in G$ tal que $\|\eta - \xi_j\| < \varepsilon/(2 \cdot \|b\|)$, e $a_i \in F$ tal que $\|b - a_i\| < \varepsilon/(2 \cdot \|\xi_j\|)$.

Então, temos $[a_i \otimes \xi_j] \in E$ e, em virtude do que acabamos de observar acima,

$$\|[b\otimes\eta] - [a_i\otimes\xi_j]\| = \|[b\otimes(\eta - \xi_j + \xi_j)] - [a_i\otimes\xi_j]\| = \|[b\otimes(\eta - \xi_j)] - [(b - a_i)\otimes\xi_j]\| \leq$$
$$\leq \|[b\otimes(\eta - \xi_j)]\| + \|[(b - a_i)\otimes\xi_j]\| \leq \|b\| \cdot \|\eta - \xi_j\| + \|\xi_j\| \cdot \|b - a_i\| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, provamos que um elemento de $\widetilde{\mathcal{H}}$ da forma $[b\otimes\eta]$ pode ser aproximado arbitrariamente por elementos de E. O caso para um elemento arbitrário $[\sum_{k=1}^{n} b_l \otimes \eta_k] \in \widetilde{\mathcal{H}}$ é agora uma conseqüência direta da desigualdade triangular. O teorema fica assim provado.

■

D.2 Levantamento de Aplicações Positivas

Esta seção contém uma série de resultados importantes sobre que são utilizados no texto principal. Dado um espaço topológico compacto Hausdorff X, e $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ uma aplicação linear, unital e positiva, então uma aplicação linear, unital e positiva $\psi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $\varphi = \pi \circ \psi$ é dita ser um *levantamento unital positivo* de φ. O nosso objetivo principal nesta seção é provar, com o teorema D.2.14, que se X é um espaço métrico, então toda aplicação linear, unital e positiva $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ possui um levantamente unital positivo. Este teorema será em particular usado na prova de que $\mathrm{Ext}(X)$ é um grupo abeliano.

Proposição D.2.1. *Sejam $a \in \mathfrak{A}$ com $a \geq 0$, e $\mathfrak{y} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ tais que $\mathfrak{y}\mathfrak{y}^* \leq \pi(a)$. Então, existe $y \in \mathfrak{A}$ tal que $\pi(y) = \mathfrak{y}$ e $yy^* \leq a$.*

Demonstração. Seja $w \in \mathfrak{A}$ tal que $\pi(w) = \mathfrak{y}$. Denote $b = ww^* + |a - ww^*|$. Naturalmente, $ww^* \leq b$. Como $a - ww^* \leq |a - ww^*|$, temos também $a = ww^* + (a - ww^*) \leq ww^* + |a - ww^*| = b$. Ainda,

$$\pi(b) = \mathfrak{y}\mathfrak{y}^* + |\pi(a) - \mathfrak{y}\mathfrak{y}^*| = \mathfrak{y}\mathfrak{y}^* + \pi(a) - \mathfrak{y}\mathfrak{y}^* = \pi(a).$$

Considere a seqüência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{A}$, onde y_n é dado por

$$y_n = a^{1/2}(b + \frac{1}{n} \cdot 1)^{-1/2} w.$$

Afirmamos que esta seqüência é de Cauchy; de fato, para $m, n \in \mathbb{N}^*$ com $m < n$, denote

$$d_{nm} = (b + \frac{1}{n} \cdot 1)^{-1/2} - (b + \frac{1}{m} \cdot 1)^{-1/2}.$$

Então,

$$(y_n - y_m)(y_n - y_m)^* = a^{1/2} d_{nm} w w^* d_{nm} a^{1/2} \leq a^{1/2} d_{nm} b d_{nm} a^{1/2},$$

pois $ww^* \leq b$. Assim, pelo lema D.1.3, e observando que d_{nm} comuta com b, vemos que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - y_m)(y_n - y_m)^*\| \leq \left\|a^{1/2} d_{nm} b d_{nm} a^{1/2}\right\| = \\
&= \left\|(b^{1/2} d_{nm} a^{1/2})^* (b^{1/2} d_{nm} a^{1/2})\right\| = \left\|(b^{1/2} d_{nm} a^{1/2})(b^{1/2} d_{nm} a^{1/2})^*\right\| = \\
&= \left\|b^{1/2} d_{nm} a d_{nm} b^{1/2}\right\| \leq \left\|b^{1/2} d_{nm} b d_{nm} b^{1/2}\right\| = \left\|b^2 d_{nm}^2\right\| = \|f_{nm}(b)\|,
\end{aligned}$$

onde $f_{mn} \in C(\sigma(b))$ é a função dada por

$$f_{mn}(x) = x^2 \left[(x + \frac{1}{n})^{-1/2} - (x + \frac{1}{m})^{-1/2} \right]^2 \quad \forall x \in \sigma(b).$$

Agora, observe que, para $x \in \sigma(b)$ arbitrário,

$$\begin{aligned}
f_{mn}(x) &= x^2 \frac{\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} - (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]^2}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})} = \\
&= x^2 \frac{\left\{\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} - (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]\right\}^2}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]^2} = \\
&= x^2 \frac{\left[(x + \frac{1}{m}) - (x - \frac{1}{n})\right]^2}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]^2} = \\
&= x^2 \frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]^2} < \\
&< x^2 \frac{m^{-2}}{(x + \frac{1}{n})(x + \frac{1}{m})\left[(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}\right]^2} = \\
&= \frac{x}{(x + \frac{1}{n})} \left[\frac{x^{1/2}}{(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}}\right]^2 \frac{m^{-2}}{(x + \frac{1}{m})} \leq \frac{1}{4m},
\end{aligned}$$

visto que $\frac{x}{(x+\frac{1}{n})} \leq 1$, que

$$\frac{x^{1/2}}{(x + \frac{1}{m})^{1/2} + (x + \frac{1}{n})^{1/2}} \leq \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} + x^{1/2}} = \frac{1}{2},$$

(caso $x \neq 0$; a relação é trivialmente satisfeita caso $x = 0$), e também

$$\frac{m^{-2}}{(x + \frac{1}{m})} = \frac{m}{m^2(mx + 1)} = \frac{1}{m(mx + 1)} < \frac{1}{m},$$

visto que $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Segue-se que $\|f_{nm}\| \leq 1/(4m)$, e portanto $\|f_{nm}(b)\| \leq 1/(4m)$, de onde temos de imediato $\|y_n - y_m\|^2 \leq 1/(4m)$, provando deste modo que a seqüência $\{y_n\}_n$ é de Cauchy, como afirmado.

Seja $y \in \mathfrak{A}$ o limite desta seqüência. Note que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$b \leq b + \frac{1}{n} \cdot 1 = \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{1/2} \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{1/2},$$

logo

$$\begin{aligned}
y_n y_n^* &= a^{1/2}\left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} ww^* \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} a^{1/2} \leq \\
&\leq a^{1/2}\left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} b \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} a^{1/2} \leq \\
&\leq a^{1/2}\left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{1/2} \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{1/2} \left(b + \frac{1}{n} \cdot 1\right)^{-1/2} a^{1/2} = \\
&= a^{1/2} a^{1/2} = a,
\end{aligned}$$

e isto implica portanto em $yy^* \leq a$.

Finalmente, visto que $\pi(a)^{1/2}(\pi(a) + 1/n)^{-1/2} \longrightarrow 1$, e que $\pi(b) = \pi(a)$, temos

$$\pi(y_n) = \pi(a)^{1/2}\left(\pi(a) + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \pi(w) \longrightarrow \pi(w) = \mathfrak{y},$$

e da unicidade do limite vem que $\pi(y) = \mathfrak{y}$, provando a proposição.

■

Corolário D.2.2. *Sejam $a \in \mathfrak{A}$ com $a \geq 0$, e $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ tais que $0 \leq \mathfrak{b} \leq \pi(a)$. Então, existe $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{b} = \pi(b)$ e $0 \leq b \leq a$.*

Demonstração. Tome $\mathfrak{y} = \mathfrak{b}^{1/2}$ e aplique a proposição D.2.1.

■

Corolário D.2.3. *Seja X um conjunto finito discreto, e seja $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ uma aplicação linear, unital e positiva. Então, existe uma aplicação linear, unital e positiva $\psi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que $\varphi = \pi \circ \psi$.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$; para $i = 1, \ldots, n$, denote por $\delta_i \in C(X)$ a função característica do conjunto $\{x_i\}$. É fácil ver que todo elemento de $C(X)$ se escreve como combinação linear das δ_i, e que $f \in C(X)_+$ se, e somente se, $f \cdot \delta_i \in C(X)_+$, para todo i.

Denote $\mathfrak{a}_i = \varphi(\delta_i)$. Como φ é unital, temos

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^n \varphi(\delta_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \delta_i) = \varphi(1) = 1.$$

Faremos agora um argumento recursivo: temos $0 \leq \mathfrak{a}_1 \leq \pi(1) = 1$; logo, pelo corolário D.2.2, existe $a_1 \in \mathfrak{A}$ tal que $\pi(a_1) = \mathfrak{a}_1$ e $0 \leq a_1 \leq 1$. Agora, lembrando que $1 = \sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$,

$$0 \leq \mathfrak{a}_2 \leq 1 - \mathfrak{a}_1 = \pi(1 - a_1),$$

e assim novamente pelo corolário D.2.2, existe $a_2 \in \mathfrak{A}$ tal que $\pi(a_2) = \mathfrak{a}_2$, e também $0 \leq a_2 \leq 1 - a_1$.

Prosseguindo desta forma, no k-ésimo estágio encontraremos $a_k \in \mathfrak{A}$ tal que $\pi(a_k) = \mathfrak{a}_k$, e $0 \leq a_k \leq 1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i$. Para o último termo, tome $a_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Obviamente, $\pi(a_n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_n$.

Definindo então

$$\begin{aligned} \psi : C(X) &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ f &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i) a_i, \end{aligned}$$

temos de imediato que ψ é uma aplicação linear unital positiva tal que $\varphi = \pi \circ \psi$, provando o desejado.

$\blacksquare$

Proposição D.2.4. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, $\mathrm{id}_{C(X)}$ é o limite pontual de uma seqüência de aplicações $\alpha_k \circ \beta_k : C(X) \longrightarrow C(X)$, onde $\beta_k : C(X) \longrightarrow C(Y_k)$ é um *-homomorfismo sobrejetor, Y_k é um espaço finito discreto, e $\alpha_k : C(Y_k) \longrightarrow C(X)$ é uma aplicação linear unital e positiva.*

Demonstração. Fixe $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrariamente. Seja $Y_k = y_i^k \in X : 1 \leq i \leq n_k \subseteq X$ tal que as bolas abertas com centro nos y_i^k e raio $1/k$ cobrem X. Seja $\beta_k : C(X) \longrightarrow C(Y_k)$ o *-homomorfismo dado pela restrição, que é obviamente sobrejetor, pelo teorema de extensão de Tietze.

Tome $\{f_i^k\}_{i=1}^{n_k}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura das bolas centradas nos y_i^k e de raio $1/k$. Defina então $\alpha_k : C(Y_k) \longrightarrow C(X)$ por

$$\alpha_k(g) = \textstyle\sum_{i=q}^{n_k} g(y_i^k) \cdot f_i^k \quad \forall g \in C(Y_k),$$

que é claramente uma aplicação linear, unital e positiva.

Vamos provar que $\alpha_k \circ \beta_k$ converge para $\mathrm{id}_{C(X)}$ pontualmente: Sejam $\varepsilon > 0$ e $h \in C(X)$ arbitrários. A continuidade uniforme de h implica em existir um $k \in \mathbb{N}^*$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$ com $d(x, y) < 1/k$, tenhamos $|h(x) - h(y)| < \varepsilon/2$.

Agora, note que se $x \in X$ e $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ são tais que $f_i^k(x) > 0$, então $d(x, y_i^k) < 1/k$, e portanto $|h(x) - h(y_i^k)| < \varepsilon/2$. Assim, para um $x \in X$ arbitrário temos

$$|h(x) - \alpha_k \circ \beta_k(x)| = |h(x) - \textstyle\sum_{i=1}^{n_k} h(y_i^k) \cdot f_i^k(x)| \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n_k} |h(x) - h(y_i^k)| \cdot f_i^k(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de onde $\|h - \alpha_k \circ \beta_k\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, e o resultado segue.

■

Proposição D.2.5. *Suponha que $\mathfrak{A}$ é separável. Então, $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, com a topologia da convergência pontual na norma, é completo e metrizável.*

Demonstração. Que $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ com a topologia da convergência pontual na norma é completo segue-se facilmente do fato de que $\mathfrak{B}$ é completo. Denote por $B_{\mathfrak{A}}$ a bola fechada unitária de $\mathfrak{A}$, e tome $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq B_{\mathfrak{A}}$ denso. Defina $d : \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \times \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(\varphi, \psi) = \textstyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \|\varphi(a_n) - \psi(a_n)\|,$$

observando que esta série é obviamente somável pois $\|a_n\| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, e assim

$$\|\varphi(a_n) - \psi(a_n)\| \leq \|\varphi(a_n)\| + \|\psi(a_n)\| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|a_n\| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|).$$

Obviamente, $d(\varphi, \varphi) = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Se $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ forem tais que $d(\varphi, \psi) = 0$, então $\|\varphi(a_n) - \psi(a_n)\| = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, o que implica em $\varphi(a_n) = \psi(a_n)$ para todo n, e por densidade e linearidade temos $\varphi = \psi$.

A simetria e desigualdade triangular para d são obviamente satisfeitas, logo vemos que d é uma métrica sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o espaço métrico $M_n = \{\varphi(a_n) : \varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\}$, com a métrica d_n determinada por $d_n(\varphi(a_n), \psi(a_n)) = \|\varphi(a_n) - \psi(a_n)\|$. Claramente, a convergência em M_n na métrica d_n é equivalente à convergência em M_n na métrica d'_n determinada por $d'_n(\varphi(a_n), \psi(a_n)) = \min\{1, d_n(\varphi(a_n), \psi(a_n))\}$.

Observe que a métrica d em $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pode ser escrita como

$$d(\varphi, \psi) = \textstyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(\varphi(a_n), \psi(a_n)).$$

Defina agora uma métrica d' em $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ determinada por

$$d'(\varphi, \psi) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} d'_n(\varphi(a_n), \psi(a_n)).$$

É fácil ver que a convergência em d' implica na convergência em d.

Afirmamos que se uma net $\{\varphi_\lambda\}_\lambda \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ é tal que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ pontualmente, para algum $\varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, então $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d: de fato, em virtude do observado acima, basta provarmos que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d'.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, e tome $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sum_{n=N+1} 2^{-n} < \varepsilon/2$. A convergência pontual implica em particular que $\varphi_\lambda(a_n) \longrightarrow \varphi(a_n)$ na norma para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e portanto $\varphi_\lambda(a_n) \longrightarrow \varphi(a_n)$ no espaço (M_n, d'_n), para todo n. Assim, para $n = 1, \ldots, N$, existe λ_n tal que $\lambda \geq \lambda_n$ implica em $d'_n(\varphi(a_n), \psi(a_n)) < \varepsilon/N$.

Tome λ_0 tal que $\lambda_0 \geq \lambda_n$, $\forall n \in \{1, \ldots, N\}$. Assim, para $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} d'(\varphi, \varphi_\lambda) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} d'_n(\varphi(a_n), \varphi_\lambda(a_n)) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} d'_n(\varphi(a_n), \varphi_\lambda(a_n)) + \\ + \sum_{n\geq N+1} 2^{-n} d'_n(\varphi(a_n), \varphi_\lambda(a_n)) < \sum_{n=1}^{N} 2^{-1} \frac{\varepsilon}{N} + \sum_{n\geq N+1} 2^{-n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

provando deste modo que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d', e portanto $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d, como afirmado.

Observe agora que $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subseteq C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ é equicontínuo, pois para quaisquer $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, temos

$$\|\varphi(a) - \varphi(b)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|a - b\| \leq 4\|\varphi(1)\| \cdot \|a - b\| = 4\|1\| \cdot \|a - b\|,$$

em virtude do lema D.1.5. Assim, pela proposição E.1.6, temos que a topologia sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ da convergência pontual é equivalente à topologia sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ da convergência pontual no subconjunto $D = \{\alpha \cdot a_n : \alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathfrak{A}$, que é denso em $\mathfrak{A}$.

Finalmente, suponha que uma net $\{\varphi_\lambda\}_\lambda \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ e $\varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ são tais que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d. Afirmamos que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ pontualmente em $\mathfrak{A}$:

De fato, se $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ na métrica d, então obviamente $\varphi_\lambda(a_n) \longrightarrow \varphi(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ quaisquer, como

$$\|\varphi(\alpha \cdot a_n) - \varphi_\lambda(\alpha \cdot a_n)\| = |\alpha| \cdot \|\varphi(a_n) - \varphi_\lambda(a_n)\|,$$

vemos que $\varphi_\lambda(\alpha \cdot a_n) \longrightarrow \varphi(\alpha \cdot a_n)$, de onde $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ pontualmente em D, e portanto $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ pontualmente em $\mathfrak{A}$, pelo observado acima, provando o afirmado.

Fica assim provado que a topologia sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ da convergência pontual é equivalente a topologia sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ dada pela métrica d. O resultado segue.

■

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de fazer mais um resultado técnico sobre decomposição de elementos positivos de C*-álgebras.

Lema D.2.6. *Seja $a \in \mathfrak{A}_+$ com $\|a\| \leq 1$. Então, a pode ser escrito como combinação linear de dois elementos unitários de $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. A hipótese garante que $\sigma(a) \subseteq [0,1]$. Note que, para qualquer $t \in [0,1]$, vale a igualdade

$$t = \frac{1}{2}\Big[(t + i\sqrt{1-t^2}) + (t - i\sqrt{1-t^2})\Big].$$

Naturalmente, tomando as funções $f_1, f_2 \in C(\sigma(a))$ determinadas por

$$f_1(t) = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad f_2(t) = t - i\sqrt{1-t^2},$$

vemos que $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, $f_1^* = f_2$, $f_1 \cdot f_1 = f_1 \cdot f_1^* = 1$. Segue-se pelo cálculo funcional contínuo de a que os elementos $f_1(a), f_2(a) \in \mathfrak{A}$ são unitários, e ainda

$$a = \frac{1}{2}[f_1(a) + f_2(a)],$$

provando o lema.

■

Observação D.2.7. Como todo elemento auto-adjunto de $\mathfrak{A}$ pode ser escrito como combinação linear de dois positivos, e qualquer elemento de $\mathfrak{A}$ é combinação linear de dois auto-adjuntos, escalonando quando necessário temos pelo lema D.2.6 que todo elemento de $\mathfrak{A}$ pode ser escrito como combinação linear de oito elementos unitários de $\mathfrak{A}$.

Para o resultado seguinte, lembremos que uma *identidade aproximada* para uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$ é uma net $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathfrak{A}$ tal que $0 \geq e_\lambda$, $\|e_\lambda\| \leq 1$ para todo λ, tal que $\lambda \leq \mu$ implica em $e_\lambda \leq e_\mu$, e tal que

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda a = \lim_{\lambda\in\Lambda} a e_\lambda = a \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

Toda C*-álgebra possui uma identidade aproximada; a prova deste fato pode ser encontrada em diversos livros clássicos da teoria de C*-álgebras, como [18], [17], [9].

Lembremos também que uma identidade aproximada *quase-central* para um ideal bilateral fechado $\mathfrak{L}$ de uma C*-álgebra $\mathfrak{A}$, é uma identidade aproximada $\{e_\lambda\}_\lambda$ para $\mathfrak{L}$ que satisfaz adicionalmente

$$\lim_\lambda \|e_\lambda a - a e_\lambda\| = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

Todo ideal $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ possui uma identidade aproximada quase-central; para uma prova deste fato, ver por exemplo [9], teorema I.9.16.

A observação seguinte será útil.

Observação D.2.8. Seja $\{e_\lambda\}_\lambda$ uma identidade aproximada quase-central para $\mathfrak{L}$. Denotando por $f \in C([0,1])$ a função raiz quadrada, e observando que o fato de e_λ e $1 - e_\lambda$ serem positivos, e $\|e_\lambda\| \leq 1$ e $\|1 - e_\lambda\| \leq 1$, implicam em $\sigma(e_\lambda) \cup \sigma(1 - e_\lambda) \subseteq [0,1]$, temos que

$$||e_\lambda^{1/2}|| = ||f(e_\lambda)|| = ||f||_{C(\sigma(e_\lambda))} \leq 1,$$

e da mesma forma $||(1 - e_\lambda)^{1/2}|| \leq 1$. Em particular, dado $j \in \mathfrak{L}$ arbitrário, podemos ver que

$$\begin{aligned} ||(1-e_\lambda)^{1/2} j (1-e_\lambda)^{1/2}||^2 &= ||(1-e_\lambda)^{1/2} j (1-e_\lambda)^{1/2} (1-e_\lambda)^{1/2} j^* (1-e_\lambda)^{1/2}|| \leq \\ &\leq ||(1-e_\lambda)^{1/2}||^2 \cdot ||j(1-e_\lambda)|| \cdot ||j^*|| \leq ||j^*|| \cdot ||j(1-e_\lambda)|| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

e portanto $||(1 - e_\lambda)^{1/2} j (1 - e_\lambda)^{1/2}|| \longrightarrow 0$.

Lema D.2.9. *Sejam $\{e_\lambda\}_\lambda$ uma identidade aproximada quase-central para $\mathfrak{L}$, e $a \in \mathfrak{A}$. Então, $||e_\lambda^{1/2} a - a e_\lambda^{1/2}|| \longrightarrow 0$, e também $||(1 - e_\lambda)^{1/2} a - a(1 - e_\lambda)^{1/2}|| \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Em virtude da observação D.2.7, basta considerarmos o caso em que a é unitário. Neste caso, é fato que $\mathrm{Ad}(a) : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ é um *-automorfismo unital, e que $\|a^* b\| = \|b\|\ \forall b \in \mathfrak{A}$. Seja $f \in C(\mathbb{R}_+)$ a função raiz quadrada. Portanto, do lema D.1.6 temos em particular que

$$\begin{aligned} ||e_\lambda^{1/2} a - a e_\lambda^{1/2}|| = ||a^*(e_\lambda^{1/2} a - a e_\lambda^{1/2})|| = ||\mathrm{Ad}(a)(f(e_\lambda)) - f(e_\lambda)|| = \\ ||f(\mathrm{Ad}(a)(e_\lambda)) - f(e_\lambda)|| = ||(f(a^* e_\lambda a)) - f(e_\lambda)||. \end{aligned}$$

Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Os elementos a e $a^* e_\lambda a = \mathrm{Ad}(a) e_\lambda$ são positivos, logo são normais, e em particular $\sigma(e_\lambda) = \sigma(a^* e_\lambda a) \subseteq \mathbb{R}$; assim, pelo lema D.1.8, existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer $c, d \in \mathfrak{A}$ normais com $\sigma(c) \cup \sigma(d) \subseteq \mathbb{R}_+$ e $\|c - d\| < \delta$, temos $\|f(c) - f(d)\| < \varepsilon$.

Usando que $\{e_\lambda\}_\lambda$ é uma identidade aproximada quase-central para $\mathfrak{L}$, existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica em

$$\|a^* e_\lambda a - e_\lambda\| = \|e_\lambda a - a e_\lambda\| < \delta.$$

Agora, vimos acima que a e $a^* e_\lambda a$ são normais e $\sigma(e_\lambda) = \sigma(a^* e_\lambda a) \subseteq \mathbb{R}$; portanto, temos de imediato que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$,

$$||e_\lambda^{1/2} a - a e_\lambda^{1/2}|| = ||(f(a^* e_\lambda a)) - f(e_\lambda)|| < \varepsilon,$$

e a primeira parte do lema está provada.

Para o segundo limite, observe que a definição de identidade aproximada nos diz que $(1 - e_\lambda)$ é positivo para todo λ, logo $a^*(1 - e_\lambda)a$ também o é, e em particular são todos normais, com $\sigma(1 - e_\lambda) = \sigma(a^*(1 - e_\lambda)a) \subseteq \mathbb{R}$. Assim, também para todo $\lambda \geq \lambda_0$, teremos

$$\begin{aligned}\|a^*(1 - e_\lambda)a - (1 - e_\lambda)\| &= \|a^*(e_\lambda - 1)a + (1 - e_\lambda)\| = \\ &= \|a^* e_\lambda a - a^* a + 1 - e_\lambda\| = \|a^* e_\lambda a - e_\lambda\| < \delta,\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}||(1 - e_\lambda)^{1/2} a - a(1 - e_\lambda)^{1/2}|| &= ||a^*(1 - e_\lambda)^{1/2} a - (1 - e_\lambda)^{1/2}|| = \\ &= ||f(a^*(1 - e_\lambda)a) - f(1 - e_\lambda)|| < \varepsilon,\end{aligned}$$

e o lema está demonstrado.

■

Façamos agora um lema simples envolvendo limites inferiores de nets em $\mathbb{R}$.

Lema D.2.10. *Sejam $\{a_\lambda\}_\lambda, \{b_\lambda\}_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ nets, com $a_\lambda \longrightarrow 0$. Então,*

$$\liminf_\lambda (a_\lambda + b_\lambda) \leq \liminf_\lambda (b_\lambda).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica em $a_\lambda < \varepsilon$. Assim, para $\lambda \geq \lambda_0$ temos $a_\lambda + b_\lambda \leq \varepsilon + b_\lambda$, e como para efeitos de cálculo do limite inferior não interessa o que acontece para $\lambda < \lambda_0$, vemos que

$$\liminf_\lambda (a_\lambda + b_\lambda) \leq \liminf_\lambda (\varepsilon + b_\lambda) = \varepsilon + \liminf_\lambda (b_\lambda).$$

Como ε foi tomado arbitrariamente, o resultado segue.

■

Para os próximos resultados, lembremos da notação fixada no início deste apêndice: $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ denotam C*-álgebras comutativas com unidade, $\mathfrak{L}$ é um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{A}$, e $\mathfrak{J}$ é um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{B}$. As aplicações de projeção nos quocientes, $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$, são ambas denotadas por π.

Lema D.2.11. *Dado $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$, existe $b \in \mathfrak{B}$ tal que $\pi(b) = \mathfrak{b}$ e $\|b\| = \|\mathfrak{b}\|$.*

Demonstração. Como $\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^*(\mathfrak{b}^*)^* \leq \|\mathfrak{b}\|^2 \cdot 1_{\mathfrak{B}/\mathfrak{J}} = \pi(\|\mathfrak{b}\|^2 \cdot 1_{\mathfrak{B}})$, temos pela proposição D.2.1 que existe $b' \in \mathfrak{B}$ tal que $\pi(b') = \mathfrak{b}^*$, e $b'(b')^* \leq \|\mathfrak{b}\|^2 \cdot 1_{\mathfrak{B}}$. Fazendo $b = (b')^*$, teremos então que $\pi(b) = \mathfrak{b}$, e ainda $b^*b \leq \|\mathfrak{b}\|^2 \cdot 1_{\mathfrak{B}}$, de onde

$$\|b\|^2 = \|b^*b\| \leq \left\| \|\mathfrak{b}\|^2 \cdot 1_{\mathfrak{B}} \right\| = \|\mathfrak{b}\|^2,$$

ou seja, $\|b\| \leq \|\mathfrak{b}\|$.

A outra desigualdade é óbvia, pois π é contrativo, e o resultado segue.

■

Na próxima proposição, visto que $\mathfrak{A}$ será tomado separável, os espaços $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ e $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{J})$ serão metrizáveis, pela proposição D.2.5. As métricas sobre estes espaços serão denotadas por d e d', respectivamente.

Proposição D.2.12. *Suponha que $\mathfrak{A}$ é separável, e sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Então, $\pi \circ \varphi, \pi \circ \psi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{J})$, e*

$$d'(\pi \circ \varphi, \pi \circ \psi) = \inf_{\pi \circ \psi' = \pi \circ \psi} d(\varphi, \psi').$$

Demonstração. É óbvio que $\pi \circ \varphi, \pi \circ \psi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{J})$. Além disso, se $\psi' \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ é tal que $\pi \circ \psi' = \pi \circ \psi$, então

$$\begin{aligned} d'(\pi \circ \varphi, \pi \circ \psi) = \textstyle\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \|\pi(\varphi(a_n)) - \pi(\psi'(a_n))\| \leq \\ \leq \textstyle\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \|\varphi(a_n) - \psi'(a_n)\| = d(\varphi, \psi'), \end{aligned}$$

visto que π é contrativo.

Seja $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathfrak{J}$ identidade aproximada quase-central para $\mathfrak{J}$. Para cada λ defina $\psi_\lambda : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ por

$$\psi_\lambda(a) = e_\lambda^{1/2} \varphi(a) e_\lambda^{1/2} + (1 - e_\lambda)^{1/2} \psi(a) (1 - e_\lambda)^{1/2} \quad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

É imediato verificar que ψ_λ é uma aplicação linear, unital e positiva, visto que φ e ψ o são. Também, visto que $\pi(e_\lambda) = 0$ pois $e_\lambda \in \mathfrak{J}$, vemos que, para todo $a \in \mathfrak{A}$,

$$\pi(\psi_\lambda(a)) = \pi(e_\lambda)^{1/2}\pi(\varphi(a))\pi(e_\lambda)^{1/2} + (\pi(1-e_\lambda))^{1/2}\pi(\psi(a))\pi((1-e_\lambda))^{1/2} = \pi(\psi(a)),$$

o que implica portanto em $\pi \circ \psi_\lambda = \pi \circ \psi$.

Dado $b \in \mathfrak{B}$ arbitrário, defina nets $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{b'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathfrak{B}$ por

$$b_\lambda = e_\lambda^{1/2} b e_\lambda^{1/2} + (1-e_\lambda)^{1/2} b (1-e_\lambda)^{1/2},$$

$$b'_\lambda = (1-e_\lambda)^{1/2} b (1-e_\lambda)^{1/2}.$$

Afirmamos que $b_\lambda \longrightarrow b$. De fato, isto segue da observação D.2.8 e do lema D.2.9, visto que

$$\begin{aligned} ||b - b_\lambda|| &= ||b(e_\lambda + 1 - e_\lambda) - e_\lambda^{1/2} b e_\lambda^{1/2} - (1-e_\lambda)^{1/2} b (1-e_\lambda)^{1/2}|| = \\ &= ||(e_\lambda^{1/2} b - b e_\lambda^{1/2}) e_\lambda^{1/2} - ((1-e_\lambda)^{1/2} b - b(1-e_\lambda)^{1/2})(1-e_\lambda)^{1/2}|| \leq \\ &\leq ||e_\lambda^{1/2}|| \cdot ||e_\lambda^{1/2} b - b e_\lambda^{1/2}|| + ||(1-e_\lambda)^{1/2}|| \cdot ||(1-e_\lambda)^{1/2} b - b(1-e_\lambda)^{1/2}|| \leq \\ &\leq ||e_\lambda^{1/2} b - b e_\lambda^{1/2}|| + ||(1-e_\lambda)^{1/2} b - b(1-e_\lambda)^{1/2}|| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

provando que $b_\lambda \longrightarrow b$, como afirmado.

Para cada λ defina $\varphi_\lambda : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ por

$$\varphi_\lambda(a) = e_\lambda^{1/2}\varphi(a)e_\lambda^{1/2} + (1-e_\lambda)^{1/2}\varphi(a)(1-e_\lambda)^{1/2} \quad \forall a \in \mathfrak{A},$$

observando que $\varphi_\lambda \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Então, em virtude do que acabamos de provar acima, vemos que $\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$, na topologia sobre $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ da convergência pontual, que é equivalente à convergência na métrica d, pela proposição D.2.5. Em outras palavras, a net $\{d(\varphi,\varphi_\lambda)\}_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $d(\varphi,\varphi_\lambda) \longrightarrow 0$. Agora, como

$$d(\varphi,\psi_\lambda) \leq d(\varphi,\varphi_\lambda) + d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda),$$

podemos concluir pelo lema D.2.10 que

$$\inf_\lambda d(\varphi,\psi_\lambda) \leq \liminf_\lambda d(\varphi,\psi_\lambda) \leq \liminf_\lambda (d(\varphi,\varphi_\lambda) + d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda)) \leq \liminf_\lambda d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda).$$

Afirmamos agora que $\lim_\lambda \|b'_\lambda\| = \|\pi(b)\|$. De fato, pelo lema D.2.11, tome $c \in \mathfrak{B}$ tal que $\pi(c) = \pi(b)$ e $\|c\| = \|\pi(b)\|$. Escreva $b = c + j$, para algum $j \in \mathfrak{J}$, e considere a net $\{j_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dada por

$$j_\lambda = (1-e_\lambda)^{1/2} j (1-e_\lambda)^{1/2}.$$

Sabemos da observação D.2.8 que $j_\lambda \longrightarrow 0$; logo,

$$\begin{aligned}\|b'_\lambda\| = ||(1-e_\lambda)^{1/2}(c+j)(1-e_\lambda)^{1/2}|| \leq ||(1-e_\lambda)^{1/2}c(1-e_\lambda)^{1/2}|| + \|j_\lambda\| \leq \\ \leq ||(1-e_\lambda)^{1/2}||^2 \cdot \|c\| + \|j_\lambda\| \leq \|c\| + \|j_\lambda\| \longrightarrow \|c\| = \|\pi(b)\|,\end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_\lambda \|b'_\lambda\| \leq \limsup_\lambda (\|c\| + \|j_\lambda\|) = \lim_\lambda (\|c\| + \|j_\lambda\|) = \|c\| = \|\pi(b)\|.$$

Por outro lado, usando a observação D.1.7 para o *-homomorfismo $\pi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$, e que $\pi(1-e_\lambda) = 1$, temos

$$\|b'_\lambda\| \geq \|\pi(b'_\lambda)\| = ||(\pi(1-e_\lambda))^{1/2}\pi(b)(\pi(1-e_\lambda))^{1/2}|| = \|\pi(b)\|,$$

logo $\pi(b) \leq \liminf_\lambda \|b'_\lambda\|$, e portanto

$$\limsup_\lambda \|b'_\lambda\| \leq \pi(b) \leq \liminf_\lambda \pi(b'_\lambda),$$

de onde segue de imediato que $\pi(b) = \lim_\lambda \|b'_\lambda\|$, estabelecendo o afirmado.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Tome $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4(\|\varphi\| + \|\psi\| + 1)}.$$

Para cada n tal que $1 \leq n \leq N$, usando a afirmação que acabamos de provar para $b_n = \varphi(a_n) - \psi(a_n)$, podemos tomar um λ_0 tal que, para qualquer $\lambda \geq \lambda_0$ e $1 \leq n \leq N$ tenhamos

$$||(1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n) - \psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| < \|\pi(\varphi(a_n) - \psi(a_n))\| + \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Assim, para $\lambda \geq \lambda_0$ teremos

$$\begin{aligned}&d(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) = \textstyle\sum_{n\geq 1} 2^{-n} \|\varphi_\lambda(a_n) - \psi_\lambda(a_n)\| = \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1} 2^{-n} ||e_\lambda^{1/2}(\varphi(a_n) - \varphi(a_n))e_\lambda^{1/2} + (1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n) - \psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| = \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1} 2^{-n} ||(1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n) - \psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| = \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} ||(1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n) - \psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \textstyle\sum_{n>N} 2^{-n} ||(1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n)-\psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| \leq \\
&\leq \textstyle\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} ||(1-e_\lambda)^{1/2}(\varphi(a_n)-\psi(a_n))(1-e_\lambda)^{1/2}|| + \\
&+ \textstyle\sum_{n>N} 2^{-n} ||(1-e_\lambda)^{1/2}||^2 \cdot ||(\varphi(a_n)-\psi(a_n))|| < \\
&< \textstyle\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} (\|\pi(\varphi(a_n)-\psi(a_n))\| + \dfrac{\varepsilon}{2N}) + \textstyle\sum_{n>N} 2^{-n}(\|\varphi\|+\|\psi\|) < \\
&< \textstyle\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|\pi(\varphi(a_n)-\psi(a_n))\| + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4(\|\varphi\|+\|\psi\|+1)}(\|\varphi\|+\|\psi\|) < \\
&< d'(\pi\circ\varphi, \pi\circ\psi) + \dfrac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\inf_\lambda d(\varphi,\psi_\lambda) \leq \liminf_\lambda d(\varphi_\lambda,\psi_\lambda) \leq \liminf_\lambda (d'(\pi\circ\varphi,\pi\circ\psi) + \frac{\varepsilon}{2}) = \\
= d'(\pi\circ\varphi,\pi\circ\psi) + \frac{\varepsilon}{2} < d'(\pi\circ\varphi,\pi\circ\psi) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Assim, vemos que existe λ' tal que $\psi' := \psi_{\lambda'}$ é tal que

$$d(\varphi,\psi') < d'(\pi\circ\varphi,\pi\circ\psi) + \varepsilon,$$

e como $\pi\circ\psi' = \pi\circ\psi$, segue-se de imediato que

$$d'(\pi\circ\varphi,\pi\circ\psi) = \inf_{\pi\circ\psi'=\pi\circ\psi} d(\varphi,\psi'),$$

como queríamos provar.

■

Corolário D.2.13. *Suponha que $\mathfrak{A}$ é separável. Então, o subconjunto de $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B}/\mathfrak{J})$ formado pelas aplicações que possuem levantamento unital positivo, é fechado na topologia da convergência pontual.*

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B}/\mathfrak{J})$ com a topologia da convergência pontual é metrizável (denotemos a métrica padrão deste espaço por d', como de costume), logo esta topologia pode ser descrita usando apenas seqüências. Suponha que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B}/\mathfrak{J})$ é uma seqüência de aplicações que possuem levantamento unital positivo, e que convergem pontualmente para algum $\varphi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B}/\mathfrak{J})$.

Tomando uma subseqüência se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $d'(\varphi_k,\varphi_{k+1}) < 2^{-k}$, para todo $k\in\mathbb{N}^*$. Seja $\psi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ um levantamento de φ_1, isto é, $\varphi_1 = \pi\circ\psi_1$. Então, pela proposição D.2.12,

$$d'(\varphi_2,\varphi_1) = \inf_{\pi\circ\psi'=\varphi_2} d(\psi_1,\psi'),$$

e portanto existe $\psi_2 \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ tal que $\pi \circ \psi_2 = \varphi_2$ e $d(\psi_1, \psi_2) < 2^{-1}$. Prosseguindo recursivamente desta forma, obtemos uma seqüência $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ tal que $\pi \circ \psi_k = \varphi_k$ e $d(\psi_k, \psi_{k+1}) < 2^{-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Em particular, vemos que esta seqüência $\{\psi_k\}_k$ é de Cauchy, e portanto possui um limite $\psi \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ na métrica d (lembrando que $(\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), d)$ é completo, pela proposição D.2.5).

Considere a aplicação $\eta : (\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), d) \longrightarrow (\mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}/\mathfrak{J}), d')$ dada por $\eta(\varrho) = \pi \circ \varrho$; como $d'(\pi \circ \varrho_1, \pi \circ \varrho_2) \leq d(\varrho_1, \varrho_2)$ $\forall \varrho_1, \varrho_2 \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, vemos que a função η é contínua, e portanto

$$\pi \circ \psi = \eta(\psi) = \eta(\lim_k \psi_k) = \lim_k \eta(\psi_k) = \lim_k \varphi_k = \varphi,$$

de onde φ possui um levantamento unital positivo, e o resultado segue.

■

Finalmente, o resultado principal da seção.

Teorema D.2.14. *Seja X um espaço métrico compacto, e $\mathfrak{J}$ um ideal bilateral fechado de $\mathfrak{B}$. Se $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ é uma aplicação unital positiva, então φ possui um levantamento unital positivo.*

Demonstração. Como X é métrico, temos que $C(X)$ é separável. Tome arbitrariamente $\varphi \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathfrak{B}/\mathfrak{J})$. Considere as aplicações $\varphi_k : C(X) \longrightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ dadas por $\varphi_k = \varphi \circ \alpha_k \circ \beta_k$, onde α_k e β_k são como na proposição D.2.4. Então, é claro que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ pontualmente, pois $\alpha_k \circ \beta_k \longrightarrow \mathrm{id}_{C(X)}$ pontualmente. Ademais, $\varphi \circ \alpha_k \in \mathcal{P}_1(C(Y_k), \mathfrak{B}/\mathfrak{J})$, para todo k. Então, pelo corolário D.2.3, para todo k existe $\psi_k \in \mathcal{P}_1(C(Y_k), \mathfrak{B})$ tal que $\varphi \circ \alpha_k = \pi \circ \psi_k$.

Ora, mas β_k é um *-homomorfismo unital, e portanto em particular positivo; logo, $\psi_k \circ \beta_k \in \mathcal{P}_1(C(X), \mathfrak{B})$. Observe ainda que

$$\pi \circ (\psi_k \circ \beta_k) = (\pi \circ \psi_k) \circ \beta_k = \varphi \circ \alpha \circ \beta_k = \varphi_k,$$

de onde vemos que φ_k possui levantamento unital positivo. Temos agora de imediato do corolário D.2.13 que φ também terá levantamento unital positivo, e o teorema está demonstrado.

■

Apêndice E

Topologia Geral

E.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção, X denota um espaço métrico compacto, a menos que dito em contrário. No texto principal, em alguns momentos precisamos de resultados úteis de topologia geral, e em particular sobre espaços métricos compactos. Por completeza, incluímos alguns deles aqui.

Proposição E.1.1. *Sejam $A, V \subseteq X$, com V aberto e $A \subsetneq V$. Então, existe $U \subseteq X$ aberto contendo A e tal que $\overline{U} \subsetneq V$.*

Demonstração. Para cada $x \in A$, tome $V_x \subseteq X$ um aberto tal que $x \in V_x$ e $\overline{V_x} \subsetneq V$, como por exemplo uma bola aberta com centro em x e raio suficientemente pequeno. A família $\{V_x\}_x$ forma uma cobertura de abertos de A, e podemos portanto extrair uma subcobertura finita $V_1, \ldots, V_n$. Então, $U = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ é aberto, $A \subseteq U$, e ainda

$$\overline{U} = \overline{V_1 \cup \cdots \cup V_n} \subseteq \overline{V_1} \cup \cdots \cup \overline{V_n} \subsetneq V,$$

provando o desejado.

■

Proposição E.1.2. *Sejam $A \subseteq X$ fechado, e $f \in C(X)$ tal que $f|_A = 0$. Então, f é um limite uniforme de funções que se anulam em vizinhanças abertas de A.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade uniforme de f (X é compacto), existe um aberto $V \subseteq X$ tal que $A \subseteq V$, e $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in V$. Da proposição E.1.1, tome $U \subseteq X$ aberto contendo A e tal que $\overline{U} \subsetneq V$. Pelo lema de Urysohn, tome $h \in C(X)$ tal que $\operatorname{ran}(h) \subseteq [0,1]$, $h|_U = 0$, e $h|_{X \setminus V} = 1$.

Defina $g := hf$, e observe que g se anula em uma vizinhança aberta U de A. Dado $x \in X$, temos 2 casos para analisar: se $x \in X \backslash V$, então

$$|f(x) - g(x)| = |f(x)| \cdot |1 - h(x)| = |f(x)| \cdot |1 - 1| = 0;$$

no outro caso, se $x \in V$, então $|f(x)| < \varepsilon$, e portanto

$$|f(x) - g(x)| = |f(x)| \cdot |1 - h(x)| = |f(x)| \cdot |1 - 0| < \varepsilon.$$

Segue-se daí que $\|f - g\| \leq \varepsilon$, o que prova o desejado.

■

Proposição E.1.3. *Sejam $A, V \subseteq X$, com V aberto e $A \subsetneq V$. Então, existe $f \in C(X)$ tal que $f|_A = 1$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq V$.*

Demonstração. Em virtude da proposição E.1.1, tome $U \subseteq X$ aberto contendo A e tal que $\overline{U} \subsetneq V$. Pelo lema de Urysohn, existe uma função $f \in C(X)$ tal que $f|_A = 1$ e $f|_{X \backslash U} = 0$. Portanto, $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{U} \subseteq V$, de onde f é como queríamos.

■

Para a próxima proposição, precisamos do conceito de espaço topológico *perfeitamente normal*: dado X um espaço topológico T_1, dizemos que X é *perfeitamente normal* quando para cada par de subconjuntos $A, B \subseteq X$, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(-1)$.

É fato que todo espaço métrico é perfeitamente normal; ver por exemplo [23], exercício 15C.2.

Proposição E.1.4. *Sejam $A, B \subseteq X$ fechados tal que $X = A \cup B$, e $A \cap B = \{x_0\}$, para algum $x_0 \in X$. Então, existe uma função contínua $p : X \longrightarrow [-1,1]$ tal que $p(x_0) = 0$, $p < 0$ em $A \backslash \{x_0\}$, e $p > 0$ em $B \backslash \{x_0\}$.*

Demonstração. O conjunto B, com a topologia induzida de X, é um espaço métrico compacto, e portanto perfeitamente normal. Tome um $r > 0$. Então, existe uma função contínua $p_2 : B \longrightarrow [0,1]$ tal que $\{x_0\} = p_2^{-1}(0)$, $B \backslash B(x_0, r) = p_2^{-1}(1)$. Em particular, $p_2 > 0$ em $B \backslash \{x_0\}$, e $p_2(x_0) = 0$.

Similarmente, existe $\widetilde{p_1} : A \longrightarrow [0,1]$ contínua tal que $\{x_0\} = \widetilde{p_1}^{-1}(1)$, $A \backslash B(x_0, r) = \widetilde{p_1}^{-1}(0)$; definindo $p_1 : A \longrightarrow [-1,0]$ por $p_1 := \widetilde{p_1} - 1$, temos então que $p_1(x_0) = 0$ e $p_1 < 0$ em $A \backslash \{x_0\}$.

Temos $X = A \cup B$, as funções p_1, p_2 são contínuas, e $p_1(A \cap B) = p_1(x_0) = p_2(x_0) = p_2(A \cap B)$; logo, estará bem definida e será contínua a função $p : X \longrightarrow [-1, 1]$ dada por

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{se } x \in A \\ p_2(x) & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Por construção, p é tal que $p(x_0) = 0$, $p < 0$ em $A \backslash \{x_0\}$, e $p > 0$ em $B \backslash \{x_0\}$, e a proposição está provada.

■

Dado X um espaço topológico, e $A \subseteq X$ fechado, denotaremos por X/A o espaço quociente obtido ao colapsarmos A em um ponto a. Em outras palavras, $X/A = (X \backslash A) \dot{\cup} \{a\}$ com a topologia quociente da aplicação $p : X \longrightarrow X/A$ dada por

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \backslash A \\ a & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Proposição E.1.5. *Seja X espaço métrico compacto com métrica d, e $A \subseteq X$ fechado. Então, X/A é um espaço métrico compacto, com a métrica d' dada por*

$$d'([x], [y]) = \begin{cases} d(x, y) & \textit{se } x, y \in X \backslash A \\ \operatorname{dist}(x, A) & \textit{se } y \in A \\ \operatorname{dist}(A, y) & \textit{se } x \in A. \end{cases}$$

Demonstração. É fácil verificar que d' como acima está bem definida e satisfaz os axiomas de métrica. Queremos provar que a topologia sobre X/A induzida por d' é equivalente a topologia quociente da aplicação $p : X \longrightarrow X/A$ mencionada acima.

Tome $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma base de abertos de X/A na topologia quociente. Dado V_λ arbitrário, afirmamos que V_λ contém uma bola aberta da topologia induzida por d'. De fato, temos dois casos para analisar: caso $a \notin V_\lambda$, então V_λ é homeomorfo (via p) a um aberto $V'_\lambda \in X \backslash A$. Considere $B = B(x, r) \subseteq X$ uma bola aberta contida em V'_λ; então, é imediato ver que $p(B) = B_{d'}([x], r)$, e ainda $p(B) \subseteq V_\lambda$, verificando o afirmado neste caso. Concluímos daí que a topologia da métrica é mais fina que a topologia quociente.

Caso $a \in V_\lambda$, então $p^{-1}(V_\lambda) \subseteq X$ é um aberto tal que $A \subseteq p^{-1}(V_\lambda)$. Logo, existe um $r > 0$ tal que o conjunto $W = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < r\}$ satisfaz $W \in p^{-1}(V_\lambda)$. É claro que $p(W) = \{[x] \in X/A : d'([x], a) < r\} = B_{d'}(a, r)$, e também $p(W) \subseteq p(p^{-1}(V_\lambda)) \subseteq V_\lambda$, de onde segue o afirmado.

Por outro lado, tome arbitrariamente $[x] \in X/A$ com $[x] \neq a$, e $0 < r < \text{dist}(x, A)$. Então, $B_{d'}([x], r) = \{[y] \in X/A : d'([y], [x]) < r\}$ é tal que $p^{-1}(B_{d'}([x], r)) = B_d(x, r)$, e de onde $B_{d'}([x], r)$ é aberto na topologia quociente. Também, para todo $r > 0$ temos que $p^{-1}(B_{d'}(a, r)) = \{y \in X : \text{dist}(y, A) < r\}$, que é um conjunto aberto de X, e portanto $B_{d'}(a, r)$ é aberto na topologia quociente. Como a coleção de todas estas bolas consideradas constitui-se em uma base de abertos para o espaço métrico $(X/A, d')$, vemos que a topologia quociente é mais fina que a topologia da métrica.

Fica assim provado que as topologias são equivalentes, como queríamos. Além disso, é óbvio que X/A é compacto, visto que é imagem contínua de um compacto.

$\blacksquare$

Lembremos que dados X um espaço topológico Hausdorff e Y um espaço métrico, dizemos que um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ é *equicontínuo* quando para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$, tal que $d(g(y), g(x)) < \varepsilon$, para todo $y \in V$ e $g \in \mathcal{F}$.

Proposição E.1.6. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff, Y um espaço métrico, $D \subseteq X$ denso em X, e $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ equicontínuo. Então, a topologia sobre $\mathcal{F}$ da convergência pontual coincide com a topologia da convergência pontual em D.*

Demonstração. Se $\{f_\lambda\}_\lambda \subseteq \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{F}$ são tais que $f_\lambda \longrightarrow f$ pontualmente, então obviamente $f_\lambda \longrightarrow f$ pontualmente em D, ou seja, $f_\lambda(d) \longrightarrow f(d)$ $\forall d \in D$.

Por outro lado, suponha que $\{f_\lambda\}_\lambda \subseteq \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{F}$ são tais que $f_\lambda \longrightarrow f$ pontualmente em D. Dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, tome $V \subseteq X$ aberto com $x \in V$ resultante da equicontinuidade de $\mathcal{F}$ para $\varepsilon' = \varepsilon/3$. Por densidade, tome $d \in V \cap D$. Da equicontinuidade temos portanto $d(f(d), f(x)) < \varepsilon/3$. A convergência pontual em D nos garante a existência de um λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica em $d(f_\lambda(d), f(d)) < \varepsilon/3$. Então, para todo $\lambda \geq \lambda_0$,

$$d(f_\lambda(x), f(x)) \leq (f_\lambda(x), f_\lambda(d)) + d(f_\lambda(d), f(d)) + d(f(d), f(x)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

e o resultado segue.

$\blacksquare$

E.2 Espaços Topológicos Totalmente Desconexos

Os fundamentos da teoria de espaços topológicos totalmente desconexos são discutidos com mais detalhes por exemplo em [23]; nós faremos aqui um apanhado dos resultados sobre estes espaços, nos restringindo apenas aos espaços *métricos compactos* que são totalmente desconexos. Para estes espaços, existe uma grande quantidade de maneiras, todas equivalentes, de se definir um espaço totalmente desconexo.

Dado um espaço topológico X, dizemos que um subconjunto $A \subseteq X$ é *clopen* quando A é um conjunto que é simultaneamente aberto e fechado na topologia de X.

Um espaço métrico compacto X é dito ser *totalmente desconexo* se ele satisfaz a qualquer uma das condições equivalentes:

- Os únicos subconjuntos conexos e não vazios de X são os conjuntos formados por um único ponto;
- Cada ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças clopen;
- X possui uma base enumerável de conjuntos clopen;
- Para cada $A \subseteq X$ fechado e $x \in X \backslash A$, existe $B \subseteq X$ clopen tal que $x \in B$ e $A \cap B = \emptyset$;
- Para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $A \subseteq X$ clopen tal que A contém x e não y;

É fato que subespaços de espaços topológicos totalmente desconexos são também totalmente desconexos, e que produtos de espaços topológicos totalmente desconexos são também totalmente desconexos. Exemplos de espaços totalmente desconexos incluem qualquer espaço discreto, o conjunto de Cantor, e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais (estes dois últimos com as topologias induzidas de $\mathbb{R}$).

Lema E.2.1. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, os idempotentes de $C(X)$ são precisamente as funções características de subconjuntos clopen de X.*

Demonstração. Seja $f \in C(X)$ um idempotente. Então, $f = 1_{f^{-1}(\{1\})}$. Obviamente $f^{-1}(\{1\})$ é fechado, pois é imagem inversa de um fechado por uma função contínua, e é aberto pois é o complementar de $f^{-1}(\{0\})$, que é fechado pela mesma razão de $f^{-1}(\{1\})$ ser fechado.

Por outro lado, se U é um subconjunto clopen de X, afirmamos que 1_U é contínua: de fato, seja V um aberto de $\mathbb{C}$. Se $1 \in V$ então $(1_U)^{-1}(V) = U$, que é aberto, e se $1 \notin V$ então $(1_U)^{-1}(V) = U^C$, que também é aberto. Desta forma, fica provado que 1_U é um idempotente de $C(X)$, e o resultado segue.

■

Proposição E.2.2. *Seja X um espaço métrico compacto. Então, X é totalmente desconexo se, e somente se, $C(X)$ é gerado por uma família de idempotentes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{A}$ a sub-C*-álgebra de $C(X)$ gerada por todos os seus idempotentes. Queremos mostrar que $\mathfrak{A} = C(X)$. De fato, $\mathfrak{A}$ contém a identidade da álgebra $C(X)$, visto que é um idempotente; conseqüentemente, $\mathfrak{A}$ contém as funções constantes. Provaremos agora que $\mathfrak{A}$ separa pontos de X: sejam $x, y \in X$ distintos. Como X é totalmente desconexo por hipótese, existe uma vizinhança clopen V de x que não contém y. Pelo lema E.2.1, a função característica de V é um idempotente de $C(X)$, que evidentemente separa os pontos x e y. Segue-se que $\mathfrak{A} = C(X)$, por Stone-Weierstrass.

($\Leftarrow$) Denote por P a família de idempotentes que gera $C(X)$. Então, P separa pontos de X, pois caso contrário $C(X) = C^*(P)$ não separaria pontos de X. Dados $x, y \in X$ distintos, existe portanto um idempotente $f \in P$ separando x e y. Como $f = 1_U$ para algum subconjunto clopen U de X, vemos que existe um subconjunto clopen de X que contém x e não contém y, de onde concluímos que X é totalmente desconexo.

■

Lema E.2.3. *Sejam X um espaço métrico compacto totalmente desconexo, e $\varepsilon > 0$. Então, existe uma cobertura disjunta e finita de X por subconjuntos clopen com diâmetros menores que ε.*

Demonstração. Pela compacidade e o fato de X ser totalmente desconexo, tome $U_1, \ldots, U_n$ uma cobertura finita de X por subconjuntos clopen com diâmetros menores que ε. Definindo conjuntos $V_1, \ldots, V_n$ por $V_1 = U_1$, e $V_i = U_i \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_{i-1})$, para $i = 2, \ldots, n$, é trivial verificar que $V_1, \ldots, V_n$ é uma cobertura como desejado.

■

Proposição E.2.4. *Sejam X um espaço métrico compacto totalmente desconexo, e $a \in X$. Então, podemos escrever $X \backslash \{a\}$ ou como a reunião disjunta de uma família finita de subconjuntos clopen de X, ou como a reunião disjunta de uma família enumerável de subconjuntos clopen de X, cujos diâmetros tendem para zero.*

Demonstração. Pelo lema E.2.3 seja $V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}$ uma cobertura disjunta para X de subconjuntos clopen cujos diâmetros são menores que $1/(\mathrm{diam}(X)+1)$, e suponha sem perda de generalidade que $a \in V_{n_1}^{(1)}$. No caso em que $\{a\} = V_{n_1}^{(1)}$ não há mais nada o que fazer, visto que existe portanto uma família finita como no enunciado. Caso contrário, observe que $V_{n_1}^{(1)}$ é por si só um espaço métrico compacto com a topologia induzida, que é totalmente desconexo; logo, podemos repetir o argumento para $V_{n_1}^{(1)}$ e $a \in V_{n_1}^{(1)}$, e tomar $V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2}^{(2)}$ uma cobertura disjunta para $V_{n_1}^{(1)}$ de subconjuntos clopen de $V_{n_1}^{(1)}$ cujos diâmetros são menores que

$$\min\left\{\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{\operatorname{diam}(V_{n_1}^{(1)})+1}\right\},$$

e $a \in V_{n_2}^{(2)}$. Prosseguindo desta forma, pode ou não existir um $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\{a\} = V_{n_r}^{(r)}$; caso ele exista o resultado está automaticamente demonstrado, conforme visto no caso $r = 1$. Assumamos portanto que o argumento acima seja realizado para cada $k \in \mathbb{N}^*$, tomando $V_1^{(k)}, \ldots, V_{n_k}^{(k)}$ uma cobertura disjunta para $V_{n_{k-1}}^{(k-1)}$ de subconjuntos clopen de $V_{n_{k-1}}^{(k-1)}$ cujos diâmetros são menores que

$$\min\left\{\frac{1}{2^{k-1}}\ ,\ \frac{1}{\operatorname{diam}(V_{n_{k-1}}^{(k-1)})+1}\right\},$$

e $a \in V_{n_k}^{(k)}$. Isto nos dará uma família de subconjuntos clopen de X, disjuntos dois a dois, cujos diâmetros tendem para zero,

$$V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1-1}^{(1)}, V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2-1}^{(2)}, V_1^{(3)}, \ldots$$

que denotaremos por $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$, a enumeração dada como acima. Observe que

$$X = \Big(\dot{\bigcup}_m V_m\Big) \,\dot{\cup}\, \Big(X \backslash \Big(\dot{\bigcup}_m V_m\Big)\Big) = \Big(\dot{\bigcup}_m V_m\Big) \,\dot{\cup}\, \Big(\bigcap_k V_{n_k}^{(k)}\Big).$$

Por construção, o conjunto $V = \cap_{k\in\mathbb{N}^*} V_{n_k}^{(k)}$ é não vazio, visto que $a \in V_{n_k}^{(k)}$ para todo k. Na verdade, observando que os diâmetros dos conjuntos $V_{n_k}^{(k)}$ tendem para zero, temos que $\operatorname{diam}(V) = 0$, e portanto $V = \{a\}$. Segue-se daí que $X = (\dot{\bigcup}_m V_m) \,\dot{\cup}\, (\bigcap_k V_{n_k}^{(k)}) = (\dot{\bigcup}_m V_m) \,\dot{\cup}\, \{a\}$, e a proposição está demonstrada.

■

Corolário E.2.5. *Sejam X um espaço métrico compacto totalmente desconexo, e $A \subseteq X$ fechado. Então, podemos escrever $X \backslash A$ ou como a reunião disjunta de uma família finita de subconjuntos clopen de X, ou como a reunião disjunta de uma família enumerável de subconjuntos clopen de X, cujos diâmetros tendem para zero.*

Demonstração. Vejamos apenas o caso infinito; o caso finito segue da mesma maneira, porém sem as complicações adicionais envolvendo diâmetros tendendo para zero.

Pela proposição E.1.5 o espaço X/A é métrico e compacto, e também é totalmente desconexo pois é o quociente de um espaço totalmente desconexo. Denote $a = p(A)$, e aplique a proposição E.2.4 para o espaço X/A e o ponto a. Logo, $(X/A)\backslash\{a\} = X\backslash A$ é escrito como a reunião disjunta de subconjuntos clopen de X/A cujos diâmetros tendem para zero, que denotaremos por $X_1, X_2, \ldots$. Observe que X_i é clopen em X para todo i, visto que $p^{-1}(X_i) = X_i$ e pela definição da topologia quociente em X/A. O requerimento dos diâmetros dos conjuntos clopen tenderem para zero é conseqüência da definição da métrica em X/A, dada na proposição E.1.5.

■

Observação E.2.6. Observe que está implícito na demonstração do caso infinito da proposição E.2.4 que a família $\{X_i\}_i$ de subconjuntos clopen de X satisfaz $\mathrm{dist}(X_i, a) \longrightarrow 0$, e portanto também no caso infinito do corolário E.2.5 temos $\mathrm{dist}(X_i, A) \longrightarrow 0$.

Observação E.2.7. Complementando a discussão da seção 4.3, é um fato da teoria de limites projetivos de espaços métricos compactos que, se o diâmetro das componentes conexas dos espaços X_k tendem para zero quando $k \longrightarrow \infty$, então as componentes conexas do limite projetivo $\varprojlim(X_k, p_k)$ têm diâmetro zero, e portanto neste caso o espaço $\varprojlim(X_k, p_k)$ é totalmente desconexo.

Referências Bibliográficas

[1] W. Arveson. A note on essentially normal operators. *Proc. Roy. Irish. Acad.*, (74):143–146, 1974.

[2] W. Arveson. *An invitation to C*-algebras.* Number 39 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.

[3] I. D. Berg. An extension of the weyl-von neumann theorem to normal operators. *Amer. Math. Soc.*, 160:365–371, 1971.

[4] I. D. Berg and K. R. Davidson. A quantitative version of the Brown-Douglas-Fillmore theorem. *Acta. Math.*, 166:121–161, 1991.

[5] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2002.

[6] L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore. Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras. In *Proceedings of a conference on operator theory, Halifax, Nova Scotia*, number 345 in Lecture notes in Mathematics, pages 58–128, Heidelberg, 1973. Springer-Verlag.

[7] L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore. Extensions of C*-algebras and K-homology. *Ann. Math (2)*, 2(105):265–324, Mar. 1977.

[8] J. W. Calkin. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. *Ann. Math*, 42:839–873, 1941.

[9] K. R. Davidson. *C*-algebras by example.* Fields Institute Monographs. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[10] J. Fell and R. Doran. *Representations of *-algebras, Locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles, I*, volume 125 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., 1988.

[11] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli, and J. P. Williams. On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, (33):179–192, 1972.

[12] P. R. Halmos. Continuous functions of Hermitian operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31(1):130–132, 1972.

[13] E. L. Lima. *Espaços métricos.* Projeto Euclides. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, third edition, 1993.

[14] E. L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento.* Projeto Euclides. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1993.

[15] S. MacLane. *Categories for the working mathematician.* Number 5 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1971.

[16] P. Malliavin. *Integration and probability.* Number 157 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[17] G. J. Murphy. *C*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., San Diego, 1990.

[18] G. K. Pedersen. *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press Inc., London, 1979.

[19] C. A. Rickart. *General theory of Banach algebras.* Van Nostrand, Princeton, 1960.

[20] W. F. Stinespring. Positive functions on C*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (6):211–216, 1955.

[21] V. S. Sunder. *Functional analysis: spectral theory.* Birkhäuser Verlag, 1998.

[22] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Number 94 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] S. Willard. *General topology.* Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970.