Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Existência, unicidade e estabilização de soluções de um modelo de ondas com efeitos térmicos na presença de dissipação localizada

Cleuzir Da Luz

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Co-Orientador: Prof. Dr. Jauber C. de Oliveira

Florianópolis
Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Existência, unicidade e estabilização de soluções de um modelo de ondas com efeitos térmicos na presença de dissipação localizada

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Cleuzir Da Luz

Florianópolis
Fevereiro de 2005

Existência, unicidade e estabilização de soluções de um modelo de ondas com efeitos térmicos na presença de dissipação localizada

por

Cleuzir Da Luz

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski (Coordenador)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto (UFRJ)

Prof. Dr. Jauber C. De Oliveira (UFSC-Co-Orientador)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2005.

À Deus

À minha Noiva, Adriana Dervanoski

Aos meus pais, Azirmo e Terezinha

Às minhas irmãs, Clenilza e Eliza

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha noiva Adriana, que com amor e paciência me encorajou nas horas mais difíceis. Ao carinho e incentivo de meus pais e minhas irmãs.

Também a agradável companhia dos meus colegas Cleverson, Vanderlei, Lucia e Maycon, também Anderson, Danilo, André e Ronie.

Ao apoio financeiro dado pelo CNPQ e aos professores que de alguma forma me ajudaram nesse trabalho.

Agradeço em especial ao orientador professor Ruy Coimbra Charão e ao Co-orientador Jauber C. de Oliveira, que para mim foram pessoas fundamentais para o meu desempenho neste trabalho.

Resumo

Neste trabalho mostramos a existência e unicidade de soluções fortes de um modelo de ondas com efeitos térmicos em um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, na presença de uma dissipação localizada em uma vizinhança da fronteira do dominio. Também provamos a estabilização da energia total do sistema com taxas de decaimento exponencial. Para obtenção da existência de soluções usamos o método de Galerkin enquanto que a estabilização ou decaimento da energia é obtida via Lema de Nakao considerando-se o Método de Multiplicadores associado com adequadas estimativas de energia e um argumento de continuação única (Teorema de Holmgreen).

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of strong solutions for a model of waves with termal efects in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and with a localized linear dissipative term. Also we prove the exponential stabilization of the total energy of the system. To prove the existence of solutions we use the Galerkin method. The stabilization of the energy is obtained via Nakao's method and the multiplier method associated with special energy estimates and the unique continuation principle (Holmgreen's theorem).

Conteúdo

Introdução

O seguinte problema de valor inicial para a equação unidimensional da onda acoplada de modo linear com a equação unidimensional do calor é chamado na literatura como sistema termoelástico. Este problema modela vibrações de uma barra muito fina, homogênea, formada por material condutor de calor sujeita a efeitos térmicos.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta\, u_{xt} = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{ e } \ \theta(x,0) = \theta_0(x), & 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui $u = u(x,t)$ é a função deslocamento, $\theta = \theta(x,t)$ é a temperatura da barra, α e β são números reais positivos que descrevem o acoplamento.

Um importante trabalho sobre este sistema é o trabalho de C. Dafermos [2], onde prova-se a existência, unicidade, regularidade da solução do sistema (1) e o comportamento assintótico da solução quando $t \longrightarrow \infty$. De fato, este trabalho é o precursor no que se refere ao estudo de sistemas termoelásticos. Em Dassios e Grillakis [8], estudou-se o decaimento da energia para um modelo isotrópico em $\mathbb{R}^3$, a qual os autores dividiram em três partes: energia cinética, energia de deformação e energia térmica. Eles concluíram que quando os dados iniciais são regulares com suporte compacto, as três partes da energia decaem para zero, quando $t \longrightarrow \infty$ na razão $t^{-(m+\frac{3}{2})}$, sendo m um número real positivo adequado que depende dos dados iniciais.

No caso especial do sistema termoelástico em um meio isotrópico, não homogêneo, limitado, em dimensão n:

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} \,-\, b^2\Delta u \,-\, (a^2-b^2)\nabla(div\, u) \,+\, \alpha u_t \,+ & \\ +\, q(x)u \,+\, \beta\nabla\theta \,=\, 0, & x\in\Omega, \quad t>0 \\ \rho(x)\theta_t \,-\, k\Delta\theta \,+\, \beta div\, u_t \,=\, 0, & x\in\Omega, \quad t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega \\ \theta(x,0)=\theta_0(x), & x\in\Omega \\ u(x,t)=0=\theta(x,t), & x\in\partial\Omega, \quad t>0, \end{cases} \tag{2}$$

com uma força de restauração proporcional à velocidade do vetor deslocamento, D. Carvalho e G.P Menzala [3] provaram que a energia total do sistema decai para zero de modo exponencial.

Em J. E. M. Rivera [10], prova-se que a energia do sistema (1) decai para zero exponencialmente quando $t \longrightarrow +\infty$. De fato, esse trabalho foi surpreendente pois C. Dafermos [2] não obteve taxas uniformes em seu trabalho.

Posteriormente D. Henry, O. Lopes e Perisinotto [4], mostraram que as três partes da energia decaem exponencialmente para zero no caso unidimensional, mas não quando $n > 1$. Os autores provaram o decaimento assintótico, estudando o espectro essencial de semigrupos associados ao sistema termoelástico.

Além destes trabalhos, podemos citar outros trabalhos relacionados a termoelasticidade como W. Scott Hansen [28] e J. E. M. Rivera [11], [12] e [13].

Em E. Bisognin, V. Bisognin, R. Coimbra Charão [5] e [6] estudaram a estabilização do sistema de elasticidade linear com dissipação localizada. Observamos que nos trabalhos sobre sistemas termoelásticos acima mencionados a dissipação é considerada efetiva sobre todo o domínio.

Neste trabalho estudamos um problema que generaliza o sistema (1) e o trabalho de D. Carvalho e G.P Menzala [3]. O problema de valor inicial e de fronteira que consideramos é o seguinte:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla \theta + a(x) u_t = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \Delta \theta + div\, u_t = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 = \theta(x,t), & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

sendo $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^n(x,t))$, $\theta = \theta(x,t)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, (u_0, u_1, θ_0) as condições iniciais e $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de $L^\infty(\Omega)$ que é efetiva apenas em uma parte do domínio Ω, isto é, $a(x) \geq a_0 > 0$ apenas em uma vizinhança da fronteira de Ω. Assim, a dissipação que consideramos neste trabalho é localizada e, portanto, mais fraca que a dissipação considerada no trabalho de D. Carvalho e G.P Menzala [3]. Notamos que quando $\rho(x) = 1$, $a = b = \beta = k = 1$, $q(x) \equiv 0$ e $a(x) \equiv \alpha$, então o sistema (2) é exatamente o sistema (3).

Portanto, neste trabalho estudamos no capítulo 2 a existência e unicidade de soluções para o sistema (3). No capítulo 3, estudamos a estabilização da energia total do sistema (3) e obtemos taxas de decaimento exponencial.

Para obtenção de existência de soluções, usamos o método de Galerkin, enquanto que a estabilização ou decaimento da energia é obtido via Lema de Nakao, considerando-se o Método de Multiplicadores associado com adequadas estimativas de energia e um argumento de continuação única.

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos os quais serão utilizados nos capítulos posteriores. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de f, que será denotado por ∇f , é definido como o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

5. Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o *divergente* de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, denotado por $\operatorname{div} \mathbf{F}$ como $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

6. O *Laplaciano* de uma função f é definido como $\text{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por $\triangle f$.

Identidades Úteis

Se f, g são funções escalares de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, c uma constante real e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente provadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4. $\text{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$

5. $\text{div}(f\mathbf{F}) = f\,\text{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

1.2 Topologias Fraca e Fraca-$\star$

Um espaço métrico é dito completo quando toda sucessão de Cauchy nesse espaço for convergente. Um espaço vetorial normado que é completo, relativamente à métrica induzida pela norma, chama-se espaço de Banach.

Um espaço vetorial com produto interno V denomina-se um espaço de Hilbert V, se V é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Um espaço métrico E é dito separável se existe um subconjunto $D \subset E$, tal que D é enumerável e denso em E. Seja E um espaço de Banach e seja $f \in E'$ designamos por $T_f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ a aplicação dada por $T_f(x) = \langle f, x\rangle$, onde a notação $\langle f, x\rangle$ indica o funcional f calculado em x. A qui E` é o dual de $E$ dado por $E$` $=\Big\{ f : E \longrightarrow \mathbb{K}; f \text{ linear e continua}\Big\}$.

A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $(T_f)_{f\in E'}$.

Se E é espaço normado, diz-se que $x_n \longrightarrow x$ forte em E se $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$.

Dada uma sucessão x_n em E espaço normado, a notação de convergência fraca é indicada por:

$$x_n \rightharpoonup x \;\; \sigma(E,E') \text{ ou simplesmente } x_n \longrightarrow x \text{ fraco em } \sigma(E,E').$$

Proposição 1.1 *Seja x_n uma sucessão em E. Então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x \;\; \sigma(E,E')$ *se e somente se* $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in E'$*;*

(ii) $x_n \longrightarrow x$ *forte em E, então* $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em E.*

Demonstração em Brézis [9].

Seja E' o dual de E munido da norma $\|f\| = sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|$ e E'' o bidual munido da norma $\|\xi\| = sup_{f\in E', \|f\|\leq 1}|\langle \xi, f\rangle|$. A topologia fraca-$\star$ denotada por $\sigma(E',E)$ é a topologia menos fina sobre E' que torna contínua todas as aplicações $(T_x)_{x\in E}$, onde $T_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \langle T_x, , f\rangle, \quad \forall\, f \in E'$.

Dada uma sucessão f_n em E' a notação de convergência fraca-$\star$ pode ser $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} x$ $\sigma(E',E)$ ou simplesmente $x_n \longrightarrow x$ fraco-$\star$ $\sigma(E',E)$.

Proposição 1.2 *Seja E um espaço de Banach e seja f_n uma sucessão de E' então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \;\sigma(E',E)$ *se e somente se* $\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E$*;*

(ii) $f_n \longrightarrow f$*, então* $f_n \rightharpoonup f \;\sigma(E',E'')$.

(iii) $f_n \rightharpoonup f \;\sigma(E',E'')$*, então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \;\sigma(E',E)$*;*

(iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \;\sigma(E',E)$*, então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq lim \;\; inf\|f_n\|$*;*

(v) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \;\sigma(E',E)$ *e* $x_n \longrightarrow x$ *fonte em E, então* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Demonstração em Brézis [9].

1.3 Distribuições

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ uma função. O suporte de f, que denotaremos por $supp\, f$, é o fecho em Ω do seguinte conjunto:

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.1 *Representamos por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, *cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de* Ω. *Os elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam* (φ_k) *uma sequência em* $C_0^\infty(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Dizemos que* $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ *se:*

i) $\exists\, K \subset \Omega$, K *compacto, tal que* $Supp\, \varphi_k \subset K$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \longrightarrow D^\alpha \varphi(x)$ *uniformemente em* $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com a noção de convergência definida acima é denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *O conjunto de todas as distribuições sobre* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado ao elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que* $T_k \longrightarrow T$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se* $\langle T_k, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.4 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de *Lebesgue*, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6 *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde:*

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} , \ se \ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = sup\, ess_{t \in \Omega} |f(t)| = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ \ / \ \ med\{t \in \Omega \ / \ |f(t)| > C\} = 0\}$$

$$= \inf\{C; \quad |f| \leq C \quad q.s\}.$$

Observação: As funções $\|.\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+, \ 1 \leq p \leq \infty,$ são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral.

Teorema 1.1 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.2 (Interpolação dos Espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in l^r(\Omega)$ para todo $r \in (p, q)$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha \dfrac{1}{p} + (1 - \alpha) \dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde χ_K é a função característica do compacto K.*

Observação: $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integraveis.

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ q.s. em Ω.*

Obeservemos que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.1). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é a distribuição definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \ \ \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. Assim, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.5 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser vistos nas referências Adams [25], Brezis [9], Kesavan [27] e Medeiros [21], [22].

Definição 1.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a* $\mathrm{L}^p(\Omega)$,

sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.
Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \quad |\alpha| \leqslant m\}$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

ou

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então a medida de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ é nula.

3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.11 *Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$

Proposição 1.3 *O espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ coincide com o conjunto*

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n); J_m\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde J_m é a função dada por $J_m(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Aqui, $\hat{u}$ indica a Transformada de Fourier da função u.

Além disso, a função $|||.|||_m : H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $|||u|||_m = \|J_m\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é uma norma equivalente a norma de Sobolev.

A partir dessa proposição definimos:

Definição 1.12 *Para $s \in \mathbb{R}^+$, indicaremos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ o conjunto*

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n); J_s\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $J_s(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Observações

1. Em $H^s(\mathbb{R}^n)$ define-se o seguinte produto interno:

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J_s\widehat{u}, J_s\widehat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \widehat{u}(x)\overline{\widehat{v}(x)}dx.$$

2. $H^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}^+$, é um espaço de Hilbert.

Definição 1.13 *Seja $s \in \mathbb{R}^+$. Representa-se por $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.14 *Um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dito ser* **bem regular** *se a fronteira de Ω é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$.*

Definição 1.15 *Sejam $s \geq 0$ e Ω um conjunto aberto limitado bem regular. O espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ é definido por:*

$$H^s(\Omega) = \{r_\Omega u; u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $r_\Omega u$ indica a restrição de u ao aberto Ω.

Para cada $u \in H^s(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ e } r_\Omega v = u\}$$

define uma norma em $H^s(\Omega)$.

Observações

1. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

2. $H^s(\Omega)$, $s > 0$, é um espaço de Hilbert.

3. $H^s(\Omega)$ coincide com o espaço usual de Sobolev $H^m(\Omega)$, definido anteriormente, se $s = m \in \mathbb{N}$ e se $\partial\Omega$ for regular (ver Adams [25], Kesavan [27] e Medeiros [21]).

4. $H_0^s(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$.

5. $H^{-s}(\Omega)$ é definido como sendo o dual de $H_0^s(\Omega)$, $s > 0$.

Os espaços $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.16 *Seja $\bar{\Omega}$ o fecho de Ω em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $D(\bar{\Omega})$ o seguinte conjunto:*

$$D(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_{\bar{\Omega}};\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação: $D(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$.

Definição 1.17 *Denotaremos por $D(\Gamma)$ o seguinte conjunto:*

$$D(\Gamma) = \{u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ u \in C^\infty(\Gamma) \text{ e tem suporte compacto em } \Gamma\}$$

onde Γ denota a fronteira de Ω, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$.

Seja $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma função. Então $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ está bem definida como uma função de Γ em $\mathbb{K}$. Com isto tem-se que se $u \in D(\bar{\Omega})$ então $\gamma_0 u \in D(\Gamma)$.

Definição 1.18 *Um sistema de cartas locais para Ω é uma família $\{\varphi_i, U_i\}_{i\in I}$ tal que:*

i) para todo $i \in I$:

$$\varphi_i : \bar{U}_i \longrightarrow Q = [0,1]^{n-1} \times [-1,1]$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ tal que

- $\varphi_i(U_i \cap \Omega) \subset [0,1]^n = Q^+$
- $\varphi_i(U_i \cap \partial\Omega) \subset [0,1]^{n-1} \times \{0\} = \Gamma_0$
- $\varphi_i(\partial(U_i \cap \Omega)) = \partial Q^+$.

ii) $\partial\Omega \subset U = \bigcup_{i\in I} U_i$;

iii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e se $W_i = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $W_j = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ então $\varphi_j(\varphi_i^{-1}) : W_i \longrightarrow W_j$ e $\varphi_i(\varphi_j^{-1}) : W_j \longrightarrow W_i$ são de classe C^∞.

Agora, sejam $(\psi_1, U_1), \cdots, (\psi_N, U_N)$ um sistema de cartas locais e $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ funções testes do $\mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i(x) = 1$ para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$ e $spp\sigma_i \subset U_i$ (tais funções existem pois Ω é um aberto limitado bem regular).

Para uma função w definida em $\Gamma = \partial\Omega$ sejam $w_j : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\quad j = 1, 2, \cdots, N$ funções definidas por:

$$w_j(x') = \begin{cases} (\sigma_j w)(\psi_j^{-1}(x', 0), & \text{se } x' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1} \\ 0, & \text{se } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

Definição 1.19 *Denotaremos por $H^s(\Gamma)$ o conjunto das funções $w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \cdots, N$, onde w_j são definidas acima. Isto é,*

$$H^s(\Gamma) = \{w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, \cdots, N\}.$$

Observações

1. Para $u, v \in H^s(\Gamma)$, a função

$$(u,v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (u_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

define um produto interno sobre $H^s(\Gamma)$.

2. $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

3. $D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.4 *A aplicação*

$$\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definida por $\gamma_0 u = u|_\Gamma$, é contínua na topologia de $H^1(\Omega)$, isto é, existe uma constante positiva C tal que

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Como $D(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, em particular em $H^1(\Omega)$, segue da proposição acima que existe uma aplicação, que continuaremos denotando por γ_0, de $H^1(\Omega)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ linear e contínua que estende γ_0, isto é, tal que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ para toda $u \in D(\bar{\Omega})$. Esta aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é chamada de função traço e seu valor em um dado $u \in H^1(\Omega)$ é chamado o traço de u sobre Γ.

Teorema 1.3 (Teorema do Traço) *Seja Ω um conjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. A função traço*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é sobrejetiva e $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$

Observação: Quando dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ anula na fronteira de Ω, isto é, que $u = 0$ sobre $\Gamma = \partial\Omega$, na verdade significa que $\gamma_0 u = 0$ sobre Γ.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.4 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ q \in [p, \infty)$,

iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

1.6 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$). Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ e $g : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f,g)_{L^2}| = \left| \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \right| \leqslant \left[\int_\Omega |f(x)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω) tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

A constante $C = C(\Omega)$ citada no teorema acima é chamada de constante de Poincaré para Ω. A desigualdade (1.1) também é válida se Ω for limitado em apenas uma direção.

Observações

1. A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o traço de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ anular sobre apenas uma parte de Γ (ver Brezis [9]).

2. A desigualdade de Poincaré (1.1) continua válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Consequências da Desigualdade de Poincaré

1. A norma de Sobolev $\|.\|_{1,\Omega}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. De fato, a desigualdade de Poicaré diz que existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, naturalmente, tem-se que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

2. A norma de Sobolev $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^2(\Omega)$. Isso segue do fato que se $u \in H_0^2(\Omega)$ então $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda da desigualdade de Poincaré.

1.7 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas

i.

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma, \quad \mathbf{F} \in \left[H^1(\Omega)\right]^n$$

ii.

$$\int_\Omega v \triangle u\, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$$

iii.

$$\int_\Omega v \Delta u\, dx = \int_\Omega (\Delta v) u\, dx,\ \ u,\, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$. A função $\mathbf{F}(x)$ integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço, isto é, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma$ significa $\displaystyle\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 \mathbf{F})(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma$

1.8 Teoremas de Compacidade

Teorema 1.5 (Banach - Alaoglu - Bourbaki) *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Então*

$$B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca, onde E' é o dual topológico de E.*

A demonstração do teorema acima pode ser vista em Brezis [9].

Definição 1.20 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$ da forma*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \;\; x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq C|\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 1.6 (Teorema de Regularidade Elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e u solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$. Então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

Demonstração em Agmon-Douglis-Nirenberg [26] (e também Perla Menzala [3]).

Definição 1.21 *Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o conjunto das classes de funções $f : [0,T] \longrightarrow X$ mensuráveis tais que*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad se \;\; 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é constituído das funções $f : [0,T] \longrightarrow X$ tais que

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \|f(t)\|_X < \infty.$$

Observações

1. $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ (veja Boubarki [24]).

2. $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q)$, onde $Q = (0,T) \times \Omega$.

3. $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ é o dual de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ (ver Yosida [20]).

Vamos enunciar outro resultado conhecido como Teorema Rellich sobre compacidade que pode ser encontrado em L. A. Medeiros, P. H. Rivera, [21].

Teorema 1.7 (Teorema Rellich) *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então $H_0^{m+1}(\Omega)$ está imerso compactamente em $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Além disso, se Ω for aberto limitado com a propriedade do m-prolongamento, então a imersão de $H^{m+1}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é compacta.*

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções Fortes

2.1 Introdução

Usando o método de Faedo-Galerkin, mostraremos neste capítulo a existência e unicidade de soluções fortes do problema abaixo, que se refere a um Sistema Acoplado Equação da Onda $\times$ Equação do Calor, dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \nabla\theta + a(x)u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \Delta\theta + div\, u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 = \theta(x,t) & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^n(x,t))$ e $\theta = \theta(x,t)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ um conjunto aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$, (u_0, u_1, θ_0) as condições iniciais e $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de $L^\infty(\Omega)$.

De fato, o sistema de equações em (2.1) é um caso particular do sistema termoelástico:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(div\, u) + a(x)u_t + \nabla\theta = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \Delta\theta + div\, u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

quando $\mu = 1$ e $\lambda + \mu = 0$.

Todos os resultados obtidos neste trabalho para o sistema (2.1) são facilmente estendidos para o sistema termoelástico (2.2). De fato, o termo $(\lambda+\mu)\nabla(div\, u)$ não acarreta grandes dificuldades técnicas.

2.2 Formulação Variacional

Suponhamos que $(u(x,t), \theta(x,t))$ seja uma solução regular de (2.1) em algum intervalo $[0,T]$. Então, fazendo o produto interno em $\mathbb{R}^n$, que indicaremos por "$\cdot$", da equação $u_{tt} - \Delta u + \nabla\theta + a(x)u_t = 0$ com $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e integrando em relação a $x \in \Omega$, tem-se

$$\int_\Omega u_{tt} \cdot w\, dx - \int_\Omega w \cdot \Delta u\, dx + \int_\Omega w \cdot \nabla\theta\, dx + \int_\Omega a(x)u_t \cdot w\, dx = 0.$$

Uma vez que $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$, segue da Fórmula de Green que:

$$-\int_\Omega w \cdot \Delta u\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx,$$

onde $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u^i \cdot \nabla w^i\, dx$, sendo u^i e w^i as i-ésimas componentes de $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \dots, u^n(x,t))$ e $w = (w^1, \dots, w^n)$. Também escrevemos a notação que $\|\nabla u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \|\nabla u^i\|^2_{L^2(\Omega)}$ onde u^i é a i-ésima componente do vetor $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ e $\|\nabla u^i\|^2_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u^i(x)|^2 dx$. No entanto, neste trabalhos vamos denotar $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ como sendo $\|\nabla u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n}$ também denotaremos $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ como sendo $\|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n}$.

Logo,

$$\int_\Omega u_{tt} \cdot w\, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, dx + \int_\Omega w \cdot \nabla\theta\, dx + \int_\Omega a(x)u_t \cdot w\, dx = 0, \forall w \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Com isso obtemos,

$$(u_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta, w)_{L^2(\Omega)} + (au_t, w)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall w \in [H_0^1(\Omega)]^n. \quad (2.3)$$

Multiplicando a equação $\theta_t - \Delta\theta + div\, u_t = 0$ por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega v\theta_t\, dx - \int_\Omega v\Delta\theta\, dx + \int_\Omega v\, div\, u_t\, dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Novamente usando a Fórmula de Green tem-se, para $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\int_\Omega v\Delta\theta\, dx = \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla v\, dx$$

e

$$\int_\Omega v\, div u_t\, dx = -\int_\Omega u_t \cdot \nabla v\, dx.$$

Assim obtemos que

$$(\theta_t, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u_t, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Concluímos então, por (2.3) e (2.4), que (u, θ) devem satisfazer o seguinte problema variacional associado ao problema (2.1):

$$\begin{cases} (u_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta, w)_{L^2(\Omega)} + (a(x)u_t, w)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ (\theta_t, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u_t, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

para toda $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ e para todo $t \in [0, T]$.

É claro que se o par (u, θ) é solucão clássica de (2.1), então o par (u, θ) é solução de (2.5). Reciprocamente se o par (u, θ) é solução de (2.5) na classe
$u \in L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n)$,
$u_t \in L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega)]^n)$,
$u_{tt} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$,
$\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$,
$\theta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
então o par (u, θ) é chamado de solução forte da equação (2.1) em $[0, T]$.

Teorema 2.1 *Seja $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) \geq 0$ q.s. em Ω e $(u_0, u_1, \theta_0) \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)]^n \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então, existe um único par (u, θ) solução forte de (2.1).*

A demonstração desse Teorema será feita em várias etapas e usaremos para isto o Método de **Faedo-Galerkin**.

2.3 Existência

2.3.1 Problema Aproximado

Sabemos que os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert separáveis e $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$. Logo, podemos tomar uma base Hilbertiana $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $W = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$. As componentes desta base podem ser formadas por autofunções $(v_{\nu})_{\in\mathbb{N}}$ do Laplaciano.

De fato, pois $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é autoadjunto e positivo definido, pois $(-\Delta u, u) \geq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \ c > 0$. Também notamos * que $H_0^1(\Omega)$ tem imersão compacta em $L^2(\Omega)$, pois Ω é limitado. Então, pela Teoria Espectral, $W = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$ possui base Hilbertiana formada por autofunções de $-\Delta$.

Seja $W_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, onde w_i, $i = 1, \cdots, m$ são os m primeiros elementos da base de W e $V_m = [v_1, v_2, ..., v_m]$, onde $v_i, i = 1, \cdots, m$ são os m primeiros elementos da base de $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Claro que W_m e V_m tem dimensão m e são subespaços fechados de W e V, respectivamente.

Procuramos solução aproximadas, do problema (2.1), u^m em W_m e θ^m em V_m na forma

$$\begin{aligned} u^m &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \\ \theta^m &= \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

com $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$, $1 \leqq j \leqq m$, funções reais definidas em algum intervalo $[0, T]$ e satisfazendo adequadas condições iniciais em $t = 0$. De fato, podemos tomar $T > 0$ arbitrário por causa da linearidade do problema.

Claro que u^m e θ^m não podem satisfazer os dados iniciais de (2.1), pois, u^m e θ^m estão em subespaços de dimensão finita.

Como $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é completa em $[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$ e $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é completa em $H_0^1(\Omega)$ tem-se que

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, w_j, \quad u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \, w_j \quad \text{e} \quad \theta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} e_j \, v_j \tag{2.7}$$

*Teorema Rellich; cap.1; seção 1.8

com c_j, d_j e e_j constantes reais, $j = 1, 2, \ldots$.

Então, consideramos o seguinte problema aproximado associado ao problema (2.1).

$$\begin{cases} (u_{tt}^m, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u^m, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta^m, w)_{L^2(\Omega)} + (a(x) u_t^m, w)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ (\theta_t^m, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta^m, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u_t^m, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ u^m(0) = u_0^m = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j\, w_j \\ u_t^m(0) = u_1^m = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} d_j\, w_j \\ \theta^m(0) = \theta_0^m = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} e_j\, v_j \end{cases} \tag{2.8}$$

com $w \in W_m$ e $v \in V_m$.

Vamos mostrar que para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, existem funções $u^m : [0, \infty) \longrightarrow W_m$ e $\theta^m : [0, \infty) \longrightarrow V_m$, da forma (2.6), que satisfazem o problema (2.8). O problema se reduz a achar as funções $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$.

A ideia é provar que existem funções u e θ em algum espaço tais que

$$u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \longrightarrow u(t)$$

$$\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j \longrightarrow \theta(t)$$

em algum sentido e que o par (u, θ) seja solução de (2.1).

Então, devemos ter que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} c_j\, w_j \; &= \; u^m(0) \; = \; \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j, \\ \sum_{j=1}^{m} d_j\, w_j \; &= \; u_t^m(0) \; = \; \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0) w_j \\ \sum_{j=1}^{m} e_j\, v_j \; &= \; \theta^m(0) \; = \; \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(0) v_j. \end{aligned}$$

Como (w_j) e (v_j) são L.I., devemos impor que $g_{jm}(0) = c_j$, $g'_{jm}(0) = d_j$, $h_{jm}(0) = e_j$ para $1 \leq j \leq m$.

Como $W_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$ e $V_m = [v_1, v_2, \cdots, v_m]$, pela linearidade do produto interno, é suficiente satisfazer (2.8) com w_i e v_i em lugar de $w \in W_m$

e $v \in V_m$ para cada $1 \leq i \leq m$. Também, substituindo $u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ e $\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$ no problema aproximado, obtemos que (2.8) fica equivalente ao seguinte sistema de EDO'S para as funções $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$:

$$
\begin{cases}
\left(\sum_{j=1}^{m} g^{''}_{jm}(t) w_j, w_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) \nabla w_j, \nabla w_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) \nabla v_j, w_i\right) + \\
+ \left(\sum_{j=1}^{m} a(x) g^{'}_{jm}(t) w_j, w_i\right) = 0 \\
\\
\left(\sum_{j=1}^{m} h^{'}_{jm}(t) v_j, v_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) \nabla v_j, \nabla v_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} g^{'}_{jm}(t) w_j, \nabla v_i\right) = 0 \\
\\
g_{jm}(0) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\
g^{'}_{jm}(0) = d_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\
h_{jm}(0) = e_j, \qquad 1 \leq j \leq m
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

para $1 \leq i \leq m$.

Usando a linearidade do produto interno de $L^2(\Omega)$ em (2.9) temos:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{m} g^{''}_{jm}(t)(w_j, w_i) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)(\nabla w_j, \nabla w_i) + \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\nabla v_j, w_i) \ + \\
\sum_{j=1}^{m} g^{'}_{jm}(t)(a(x) w_j, w_i) = 0 \\
\\
\sum_{j=1}^{m} h^{'}_{jm}(t)(v_j, v_i) + \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\nabla v_j, \nabla v_i) - \sum_{j=1}^{m} g^{'}_{jm}(t)(w_j, \nabla v_i) = 0 \\
\\
g_{jm}(0) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\
g^{'}_{jm}(0) = d_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\
h_{jm}(0) = e_j, \qquad 1 \leq j \leq m
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

para $1 \leq i \leq m$.

Vamos chamar $(w_j, w_i)_{L^2(\Omega)} = A_{ji}$, $(a(x) w_j, w_i)_{L^2(\Omega)} = B_{ji}$, $(\nabla w_j, \nabla w_i)_{L^2(\Omega)} = C_{ji}$, $(\nabla v_j, w_i)_{L^2(\Omega)} = D_{ji}$, $(w_j, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)} = E_{ji}$, $(v_j, v_i)_{L^2(\Omega)} =$

F_{ji} e $(\nabla v_j, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)} = G_{ji}$. Logo, o sistema (2.10) é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} A_{ji} g_{jm}^{''}(t) + \sum_{j=1}^{m} C_{ji} g_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} D_{ji} h_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} B_{ji} g_{jm}^{'}(t) = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} F_{ji} h_{jm}^{'}(t) + \sum_{j=1}^{m} G_{ji} h_{jm}(t) - \sum_{j=1}^{m} E_{ji} g_{jm}^{'}(t) = 0 \\ g_{jm}(0) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ g_{jm}^{'}(0) = d_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ h_{jm}(0) = e_j, \qquad 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{2.11}$$

para $1 \leq i \leq m$.

Esse é um sistema linear de $2m$ EDO´S de 1ª e 2ª ordens com condições iniciais para as funções $(g_{jm})_{j=1}^{m}$ e $(h_{jm})_{j=1}^{m}$. Um sistema desse tipo pode ser colocado na forma:

$$\begin{cases} Y' = \mathcal{A} Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

com $Y = (g_{1m}, \cdots, g_{mm}, g_{1m}^{'}, \cdots, g_{mm}^{'}, h_{1m}, \cdots, h_{mm})$ e $Y_0 = (c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_m, e_1, \cdots, e_m)$. Aqui $\mathcal{A} = M_1^{-1} M_2$, onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -C & -B & -D \\ 0 & E & -G \end{bmatrix},$$

sendo A a matriz (A_{ij}), B a matriz (B_{ij}), C a matriz (C_{ij}), D a matriz (D_{ij}), E a matriz (E_{ij}), F a matriz (F_{ij}) e G a matriz (G_{ij}).

Observamos que $\mathcal{A}$ é uma matriz de ordem $3m \times 3m$ e suas entradas são constantes. Logo, a solução do sistema linear (2.12) é dada por $Y(t) = e^{t\mathcal{A}} Y_0$, $t \geq 0$. Assim (2.12) possui solução global. Portanto, se

$$Y(t) = (y_1(t), \cdots, y_m(t), y_{m+1}(t), \cdots, y_{2m}(t), y_{2m+1}(t), \cdots, y_{3m}(t)),\ t \geq 0,$$

então os coeficientes $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$ são dados, respectivamente, por $g_{jm}(t) = y_j(t)$, $j = 1, 2, \cdots, m$ e $h_{jm}(t) = y_{2m+j}(t)$, $j = 1, 2, \cdots, m$, onde estão definidas para todo $t \geq 0$.

Portanto as funções $u^m : [0,\infty) \longrightarrow W_m$ e $\theta^m : [0,\infty) \longrightarrow V_m$ dadas por $u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ e $\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$ são soluções do problema aproximado (2.8) no intervalo $[0,\infty)$.

2.3.2 Estimativas para as Soluções Aproximadas

Nesta seção faremos algumas estimativas, com o objetivo de obtermos limitações das normas de u^m, u_t^m, u_{tt}^m, θ^m e θ_t^m. Essas estimativas serão usadas para passagem ao limite no problema aproximado e alguns resultados desses serão usados posteriormente para análise das condições iniciais.

Sabemos que $u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ e $\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$ estão definidas para todo $t \geq 0$ e satisfazem:

$$(u_{tt}^m, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u^m, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta^m, w)_{L^2(\Omega)} + (a(x) u_t^m, w)_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{2.13}$$

$$(\theta_t^m, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta^m, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u_t^m, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.14}$$

para todo $w \in W_m$ e $v \in V_m$. Agora, tomando $w = u_t^m$ e $v = \theta^m$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
(u_{tt}^m,\, w)_{L^2(\Omega)} &= (u_{tt}^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u_{tt}^m \cdot u_t^m \, dx = \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[u_t^m \cdot u_t^m]\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t^m)^2 \, dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|u_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla u^m,\, \nabla w)_{L^2(\Omega)} &= (\nabla u^m,\, div\, u_t^m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u^m \, div u_t^m \, dx = \\
&= -\int_\Omega \nabla^2 u^m \cdot u_t^m \, dx = -\int_\Omega \Delta u^m \, u_t^m \, dx = \\
&= \int_\Omega \nabla u^m \cdot \nabla u_t^m \, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt} (\nabla u^m)^2 \, dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega (\nabla u^m)^2 \, dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|\nabla u^m\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$(\nabla \theta^m,\, w)_{L^2(\Omega)} = (\nabla \theta^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
(a(x)\, u_t^m,\, w)_{L^2(\Omega)} &= (a(x)\, u_t^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega a(x)\, u_t^m \cdot u_t^m \, dx = \\
&= \int_\Omega (\sqrt{a(.)}\, u_t^m)^2 \, dx = \|\sqrt{a(.)}\, u_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$
\begin{aligned}
(\theta_t^m,\, v)_{L^2(\Omega)} &= (\theta_t^m,\, \theta^m)_{L^2(\Omega)} &&= \int_\Omega \theta_t^m\, \theta^m\, dx &&= \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(\theta^m)^2\, dx &&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\theta^m)^2\, dx &&= \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

$$
(\nabla\theta^m,\, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\theta^m,\, \nabla\theta^m)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)},
\tag{2.20}
$$

$$
(u_t^m,\, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (u_t^m,\, \nabla\theta^m)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\theta^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)}.
\tag{2.21}
$$

Substituindo (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18) em (2.13) e substituindo (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.14) e ainda somando (2.13) com (2.14) resulta que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla u^m\|^2_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{a(.)}\, u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} - (\nabla\theta^m,\, u_t^m)_{L^2(\Omega)} = 0
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\{ \|u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} + \|\sqrt{a(.)}\, u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \|\nabla\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.
\end{aligned}
$$

Agora definimos a energia do problema aproximado por:

$$
E_m(t) = \frac{1}{2}\left\{ \|u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.
$$

Com isso, obtemos da identidade anterior que

$$
\frac{d}{dt}E_m(t) + \|\sqrt{a(.)}\, u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.
$$

Integrando em $[0,\, t]$, $0 < t < \infty$ temos,

$$
E_m(t) + \int_0^t \|\sqrt{a(.)}\, u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \int_0^t \|\nabla\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds = E_m(0).
\tag{2.22}
$$

Logo,

$$
E_m(t) \leq E_m(0), \quad \forall\, t.
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
E_m(0) &= \frac{1}{2}\left\{ \|u_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \|u_1^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta_0^m\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.
\end{aligned}
$$

Pela escolha de θ_0^m, u_0^m e u_1^m em (2.8) temos, que $\theta_0^m \longrightarrow \theta_0$ forte em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1^m \longrightarrow u_1$ forte em $[L^2(\Omega)]^n$ e $\nabla u_0^m \longrightarrow \nabla u_0$ forte em $[H_0^1(\Omega)]^n$ quando $m \longrightarrow \infty$. Notamos que a última convergência é devido ao fato que $u_0^m \longrightarrow u_0$ forte em $[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$. Então $\{\theta_0^m\}$ é uma seqüência limitada em W, $\{u_1^m\}$ é uma seqüência limitada em $[H_0^1(\Omega)]^n$ e $\{\nabla u_0^m\}$ é uma seqüência limitada em $[L^2(\Omega)]^n$.

Logo, existe $C = C(\theta_0, u_0, u_1)$ uma constante positiva independente de m, tal que $E_m(0) \leq C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$. Como $E_m(t) \leq E_m(0), \quad \forall\, t$, concluimos que $E_m(t) \leq C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$ e $\forall\, t \geq 0$, com $C > 0$ independente de m e t. Isto é

$$\sup_{t\geq 0}\{\|u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta^m\|^2_{L^2(\Omega)}\} \leq 2C, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Essa estimativa diz que as seqüências $\{u_t^m\}$, $\{u^m\}$ e $\{\theta^m\}$ são tais que

$$\begin{aligned} &\{u_t^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)\\ &\{u^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)\\ &\{\theta^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Mas, pela estimativa (2.22), temos que $\|\nabla\theta^m\|_{L^2(\Omega\times(0,\infty))}$ é limitada por alguma constante que independe de m. Como $\|\nabla\theta^m\|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente a $\|\theta^m\|_{H_0^1(\Omega)}$ segue que também

$$\begin{aligned} &\{u_t^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)\\ &\{u^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)\\ &\{\theta^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))\\ &\{\theta^m\} \text{ limitada em } L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Agora, vamos estimar a norma de $u_{tt}^m(0)$ e $\theta_t^m(0)$ em $[L^2(\Omega)]^n$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Consideramos $w = u_{tt}^m(t)$ e $v = \theta_t^m(t)$. Substituindo em (2.8) segue que

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m(t), u_{tt}^m(t)) + (\nabla u^m(t), \nabla u_{tt}^m(t)) + (\nabla\theta^m(t), u_{tt}^m(t)) + (a(x)u_t^m(t), u_{tt}^m(t)) = 0,\\ &(\theta_t^m(t), \theta_t^m(t)) + (\nabla\theta^m(t), \nabla\theta_t^m(t)) - (u_t^m(t), \nabla\theta_t^m(t)) = 0 \end{aligned}$$

para $t \in [0,\infty)$.

Isso diz que

$$\begin{aligned} &\|u_{tt}^m(t)\|^2 + (\nabla u^m(t), \nabla u_{tt}^m(t)) + (\nabla\theta^m(t), u_{tt}^m(t)) + (a(x)u_t^m(t), u_{tt}^m(t)) = 0,\\ &\|\theta_t^m(t)\|^2 + (\nabla\theta^m(t), \nabla\theta_t^m(t)) - (u_t^m(t), \nabla\theta_t^m(t)) = 0 \end{aligned}$$

Calculando em $t = 0$ e usando a segunda Fórmula de Green e Teorema da Divergência, já que $u^m(t) \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$ e $\theta^m(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, resulta que:

$$\|u_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - (\Delta u^m(0), u_{tt}^m(0)) + (\nabla\theta^m(0), u_{tt}^m(0)) + (a(x)u_t^m(0), u_{tt}^m(0)) = 0,$$
$$\|\theta_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - (\Delta\theta^m(0), \theta_t^m(0)) \quad + \quad (divu_t^m(0), \theta_t^m(0)) \quad = \quad 0.$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} &\|u_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\{\|\Delta u^m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta^m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a(.)u_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)}\right\} \|u_{tt}^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\|\theta_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\{\|\Delta\theta^m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|divu_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)}\right\} \|\theta_t^m(0))\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se $\|u_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ e $\|\theta_t^m(0))\|_{L^2(\Omega)} = 0$ então $\|u_{tt}^m(0)\|$ e $\|\theta_t^m(0))\|$ são limitadas. Caso contrário, tem-se de (2.23) que

$$\begin{aligned} &\|u_{tt}^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \ + \ \|\nabla\theta^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \ + \ \|a(.)u_t^m(0)\| \\ &\|\theta_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\theta^m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|divu_t^m(0)\| \end{aligned} \tag{2.24}$$

De (2.24) e do fato que $u^m(0) = u_0^m \longrightarrow u_0$ forte em $[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^n$, $u_t^m(0) = u_1^m \longrightarrow u_1$ forte em $[H_0^1(\Omega)]^n$ e $\theta^m(0) = \theta_0^m \longrightarrow \theta_0$ forte em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ segue que

$$\begin{aligned} &\|u_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1(u_0) + C_1(\theta_0) + C_1(u_1) = C_1 \\ &\|\theta_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2(\theta_0) + C_2(u_1) = C_2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independentes de m.

Concluímos, então, que $u_{tt}^m(0)$ e $\theta_t^m(0)$ são seqüências limitadas, respectivamente, em $[L^2(\Omega)]^n$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.

Agora, derivando (2.11) em t, obtém-se que as funções g_{jm} e h_jm devem ser soluções do sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m A_{ji}g_{jm}^{'''}(t) + \sum_{j=1}^m C_{ji}g_{jm}^{'}(t) + \sum_{j=1}^m D_{ji}h_{jm}^{'}(t) + \sum_{j=1}^m B_{ji}g_{jm}^{''}(t) = 0 \\ &\sum_{j=1}^m F_{ji}h_{jm}^{''}(t) + \sum_{j=1}^m G_{ji}h_{jm}^{'}(t) - \sum_{j=1}^m E_{ji}g_{jm}^{''}(t) = 0 \\ &g_{jm}(0) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ &g_{jm}^{'}(0) = d_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ &g_{jm}^{''}(0) = \alpha_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ &h_{jm}(0) = e_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ &h_{jm}^{'}(0) = \beta_j, \qquad 1 \leq j \leq m \end{aligned}\right. \tag{2.26}$$

para $1 \leq i \leq m$, sendo α_j e β_j os coeficientes de $u^m_{tt}(0)$ e $\theta^m_t(0)$, respectivamente, isto é,

$$u^m_{tt}(0) = \sum_{j=1}^{m} g^{''}_{jm}(0)w_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j \ \text{ e } \ \theta^m_t(0) = \sum_{j=1}^{m} h^{'}_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j.$$

Pelo **Teorema de Existência e Unicidade** para EDO'S, o problema (2.26) tem únicas soluções g_{jm} e h_{jm} definidas em $[0, \infty)$. Isto é, o sistema de EDO's possui única funções, g_{jm} e $h_j m$ definida para todo $t \geq 0$, onde essas funções são três vezes diferenciáveis e duas vezes diferenciáveis, respectivamente. Portanto,

$$u^m_{ttt}(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g^{'''}_{jm}(t)w_j(x)$$

e

$$\theta^m_{tt}(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h^{''}_{jm}(t)v_j(x)$$

existem em $[0, \infty)$.

Segue que $u^m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j$ e $\theta^m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)v_j$ satisfazem em $[0, \infty)$ o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&(u^m_{ttt}, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\, u^m_t, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\, \theta^m_t, w)_{L^2(0,1)} + (a(x)u^m_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} = 0\\
&(\theta^m_{tt}, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\, \theta^m_t, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u^m_{tt}, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0
\end{aligned}$$

para toda $w \in W_m$ e $v \in V_m$. Fazendo $w = u^m_{tt}$, $v = \theta^m_t$ e somando as duas equação, resulta que:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u^m_{tt}\|^2 \,+\, \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\nabla u^m_t\|^2 \,+\, \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\theta^m_t\|^2 \,+\, \|\sqrt{a(.)}\, u^m_{tt}\|^2 \,+\, \|\nabla\theta^m_t\|^2 \,=\, 0,$$

para cada $t \geq 0$.As normas acima são em $L^2(\Omega)$. Agora, integrando em $(0,t)$, $0 < t < \infty$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|u^m_{tt}(t)\|^2 + \|\nabla u^m_t(t)\|^2 + \|\theta^m_t(t)\|^2 + 2\int_0^t \|\sqrt{a(.)}u^m_{tt}(t)\|^2 ds + 2\int_0^t \|\nabla\theta^m_t(t)\|^2 ds = \\
= \|u^m_{tt}(0)\|^2 \,+\, \|\nabla u^m_t(0)\|^2 + \|\theta^m_t(0)\|^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|u^m_{tt}(t)\|^2 + \|\nabla u^m_t(t)\|^2 + \|\theta^m_t(t)\|^2 &\leq \|u^m_{tt}(0)\|^2 \,+\, \|\nabla u^m_t(0)\|^2 + \|\theta^m_t(0)\|^2 \\
&= \|u^m_{tt}(0)\|^2 \,+\, \|\nabla u^m_1\|^2 \,+ \|\theta^m_t(0)\|^2 \,\leq\, C,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $C = C(u_0, u_1, \theta_0,)$ é uma constante positiva independente de m e t, devido a (2.25) e ao fato que $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em $[H_0^1(\Omega)]^n$. Então concluimos que

$$\|u_{tt}^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_t^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_t^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \forall\, t \geq 0,$$

com $C > 0$ independente de m e t. Logo

$$\int_0^\infty \|\nabla \theta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx \leqq C, \, \forall t \geqq 0 \text{ e}$$
$$\sup_{t\geq 0}\{\|u_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta^m\|_{L^2(\Omega)}^2\} \leq 2C, \, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Isso diz que as seqüências $\{u_{tt}^m\}$, $\{u_t^m\}$ e $\{\theta_t^m\}$ são tais que

$$\begin{array}{ll} \{\nabla u_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \\ \{u_{tt}^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \\ \{\theta_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \end{array}$$

Mas, como $\|\nabla u_t^m\|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente a $\|u_t^m\|_{H_0^1(\Omega)}$, segue que u_t^m é uma seqüência limitada em $L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$. Então, temos que

$$\begin{array}{ll} \{u_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ \{u_{tt}^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \\ \{\theta_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \end{array}$$

Portanto, as seqüências $\{u_{tt}^m\}$, $\{u_t^m\}$, $\{u^m\}$, $\{\theta_t^m\}$ e $\{\theta^m\}$ são tais que

$$\begin{array}{ll} \{u^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ \{u_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ \{u_{tt}^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \\ \{\theta^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ \{\theta^m\} & \text{limitada em } \; L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \\ \{\theta_t^m\} & \text{limitada em } \; L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \end{array} \tag{2.28}$$

Agora, de (2.28) segue † que existe funções $u \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$ e $\theta \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega))$, com $u_t \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$,

†Teorema Banach-Aloglu-Boubarki; cap.1; seção 1.7

$u_{tt} \in L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ e $\theta_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, tais que

$$\begin{aligned} &u^m \longrightarrow u, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ &u_t^m \longrightarrow u_t, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ &u_{tt}^m \longrightarrow u_{tt}, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \\ &\theta^m \longrightarrow \theta, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ &\theta^m \longrightarrow \theta, \text{ fraco em } L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \\ &\theta_t^m \longrightarrow \theta_t, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

2.3.3 Passagem ao Limite

Agora, queremos passar o limite, quando $m \longrightarrow \infty$, no problema aproximado (2.8).

Como podemos identificar $L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ com o dual de $L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$, o fato que $u_t^m \longrightarrow u_t$, fraco-$\star$ em $L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \subset L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$, conforme (2.29), significa que para toda $w \in L^1(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ tem-se que

$$\langle u_t^m, w\rangle \longrightarrow \langle u_t, w\rangle,$$

ou seja,

$$\int_0^\infty \int_\Omega u_t^m(x,t)\cdot w(x,t)\,dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega u_t(x,t)\cdot w(x,t)\,dxdt \tag{2.30}$$

para toda $w \in L^1(0,T,;[L^2(\Omega)]^n)$.

Seja $w = \varphi\psi$ com $\varphi(t) \in L^1(0,\infty)$ e $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$. Então, de (2.30) tem-se

$$\int_0^\infty (u_t^m(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty (u_t(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt \tag{2.31}$$

para toda $\varphi \in L^1(0,\infty)$ e para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Em particular tomando $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$. Podemos concluir de (2.31) que

$$(u_t^m, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u_t, \psi)_{L^2(\Omega)}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Portanto, para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$ vale que

$$(u_{tt}^m,\psi) = \frac{d}{dt}(u_t^m,\psi) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u_t,v) = (u_{tt},\psi) \tag{2.32}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

Também, de (2.29) temos a convergência

$$u^m \longrightarrow u, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n).$$

Então,

$$\nabla u^m \longrightarrow \nabla u, \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) = (L^1(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n))'.$$

Mas o fato de $\nabla u^m \longrightarrow \nabla u$, fraco-$\star$ em $(L^1(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n))'$, significa que para toda $w \in L^1(0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$ tem-se que

$$\big\langle \nabla u^m,\, w\big\rangle \longrightarrow \big\langle \nabla u,\, w\big\rangle, \tag{2.33}$$

onde usamos a notação que $\big\langle \nabla u^m,\, w\big\rangle = \sum_{i=1}^n \big\langle \nabla u_i^m,\, w\big\rangle$ sendo u_i a i-ésima componente do vetor u.

Seja $\varphi(t) \in L^1(0,\infty)$ e $\psi(x) \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Seja $v = \varphi\,\psi \in L^1(0,\infty;\,[H_0^1(\Omega)]^n)$. Portanto $w = \nabla v = \varphi\,\nabla\psi \in L^1(0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$.

Então de (2.33) tem-se que

$$\big\langle \nabla u^m,\, \varphi\,\nabla\psi\big\rangle \longrightarrow \big\langle \nabla u,\, \varphi\,\nabla\psi\big\rangle, \quad \forall \varphi \in L^1(0,\infty), \quad \forall \psi \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Então,

$$\int_0^\infty \int_\Omega \nabla u^m(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt$$

para $\varphi \in L^1(0,\infty)$ e $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Ou seja,

$$\int_0^\infty (\nabla u^m(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty (\nabla u(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt$$

para $\varphi \in L^1(0,\infty)$, $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Portanto temos que

$$(\nabla u^m,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\nabla u,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.34}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Agora, usando a convergência (conforme (2.29)),

$$\nabla\theta^m \longrightarrow \nabla\theta, \text{ fraco em } (L^2(0,\infty;L^2(\Omega)))' \cong L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{2.35}$$

De (2.35), para toda $w \in L^2(0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$ tem-se que

$$\big\langle \nabla\theta^m,\, w\big\rangle \longrightarrow \big\langle \nabla\theta,\, w\big\rangle.$$

Assim,

$$\int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta^m(x,t)\cdot w(x,t)\, dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta(x,t)\cdot w(x,t)\, dxdt$$

para toda $w \in L^2(\,0,\,T;[L^2(\Omega)]^n)$.

Seja $w = \varphi\,\psi$ com $\varphi(t) \in L^2(0,\infty)$ e $\psi(x) \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$. Então, tem-se

$$\int_0^\infty (\nabla\theta^m(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\nabla\theta(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\, dt$$

para toda $\varphi \in L^2(0,\infty)$ e para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Tomando $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$, tem-se que

$$(\nabla\theta^m,\,\psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\nabla\theta,\,\psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.36}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Agora da convergência (conforme (2.29)) $u_t^m \longrightarrow u_t$, fraco-$\star$ em $L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \subset L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ e do fato que $a:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^+)$ temos que

$$a(.)\,u_t^m \longrightarrow a(.)\,u_t,\ \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$$

Identificando $L^\infty(\,0,\,T;\,[L^2(\Omega)]^n)$ com o dual do $L^1(\,0,\,T;\,[L^2(\Omega)]^n)$, temos para toda $w \in L^1(0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$ que

$$\big\langle a(.)\,u_t^m,\, w\big\rangle \longrightarrow \big\langle a(.)\,u_t^m,\, w\big\rangle.$$

Assim,

$$\int_0^\infty \int_\Omega a(.)\,u_t^m\,(x,t)\cdot w(x,t)\, dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega a(.)\,u_t^m\,(x,t)\cdot w(x,t)\, dxdt$$

para toda $w \in L^1(\,0,\,T,\,[L^2(\Omega)]^n)$. Seja $w = \varphi\,\psi$ com $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$ e $\psi(x) \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$. Então,

$$\int_0^\infty (a(.)\,u_t^m(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (a(.)\,u_t(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\, dt$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Assim temos que

$$(a(.)\, u_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (a(.)\, u_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.37}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Usando a convergência de (2.29) a qual diz que $\theta_t^m \longrightarrow \theta_t$ fraco-$\star$ em $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ e também o fato que podemos identificar $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ com o dual do $L^1(0,\infty;L^2(\Omega))$, teremos que para toda $v \in L^1(0,\infty;L^2(\Omega))$

$$\big\langle \theta_t^m,\, v\big\rangle \longrightarrow \big\langle \theta_t,\, v\big\rangle.$$

Ou seja,

$$\int_0^\infty \int_\Omega \theta_t^m(x,t)\, v(x,t)\, dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \theta_t(x,t)\, v(x,t)\, dxdt \tag{2.38}$$

para toda $v \in L^1(\,0,\,\infty;\,L^2(\Omega))$. Seja $v = \varphi\,\psi$ com $\varphi(t) \in L^1(0,\infty)$ e $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Então, de (2.38) tem-se

$$\int_0^\infty (\theta_t^m(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\, \varphi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\theta_t(t),\psi)_{L^2(\Omega)}\, \varphi(t)\, dt \tag{2.39}$$

para toda $\varphi \in L^1(0,\infty)$ e para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$. Então, concluimos que

$$(\theta_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\theta_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.40}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Do fato que $\nabla\theta^m \longrightarrow \nabla\theta$, fraco em $L^2(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ (conforme 2.35) e como podemos identificar $L^2(\,0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$ com o dual de $L^2(\,0,\,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$, então para toda $v \in L^2(0,\infty;\,[L^2(\Omega)]^n)$ tem-se que

$$\big\langle \nabla\theta^m,\, v\big\rangle \longrightarrow \big\langle \nabla\theta,\, v\big\rangle.$$

Assim,

$$\int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta^m(x,t)\, v(x,t)\, dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta(x,t)\, v(x,t)\, dxdt$$

para toda $v \in L^2(\,0,\,\infty,\,[L^2(\Omega)]^n)$. Seja $w = \varphi\,\psi$ com $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$ e $\psi(x) \in H_0^1(\Omega)$, assim $v = \nabla w = \varphi\,\nabla\psi \in L^2(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$. Então temos que

$$\big\langle \nabla\theta^m,\, \varphi\,\nabla\psi\big\rangle \longrightarrow \big\langle \nabla\theta,\, \varphi\,\nabla\psi\big\rangle,$$

para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$ e cada $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$.

Então

$$\int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta^m(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \nabla\theta(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e $\psi \in H_0^1(\Omega))$. Isto é:

$$\int_0^\infty (\nabla\theta^m(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty (\nabla\theta(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto temos que

$$(\nabla\theta^m,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\nabla\theta,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.41}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Por fim vamos mostrar que $(u_t^m,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u_t,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$. De fato isso ocorre, pois, de (2.29) $u_t^m \longrightarrow u_t$ fraco-$\star$ em $L^\infty(0,\infty;\, [H_0^1(\Omega)]^n) \subset L^\infty(0,\infty;\, [L^2(\Omega)]^n)$. Então identificando $L^\infty(\,0,\, \infty;\, [L^2(\Omega)]^n)$ com o dual de $L^1(\,0,\, \infty;\, [L^2(\Omega)]^n)$, temos que

$$\int_0^\infty \int_\Omega u_t^m(x,t)\,v(x,t)\,dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega u_t(x,t)\,v(x,t)\,dxdt \tag{2.42}$$

para toda $v \in L^1(\,0,\, \infty,\, [L^2(\Omega)]^n)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$ e $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Assim $w = \varphi\,\psi \in L^1(\,0,\, T\,; H_0^1(\Omega))$ e, portanto, $v = \nabla w = \varphi\,\nabla\psi \in L^1(0,\infty; [L^2(\Omega)]^n)$. Então, de (2.42), tem-se que

$$\int_0^\infty \int_\Omega u_t^m(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega u_t(x,t)\,\varphi(t)\,\nabla\psi(x)\,dxdt$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e para $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\int_0^\infty (u_t^m(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty (u_t(t), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ e para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, temos que

$$(u_t^m,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u_t,\, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.43}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$, para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Como u^m e θ^m satisfazem o Problema Aproximado (2.8) para cada $w \in W_m$ e $v \in V_m$, então como as combinações lineares finitas de W_m e V_m, $m \in \mathbb{N}$, são densos em W e V, respectivamente, segue que o Problema Aproximado vale para $w \in W$ e $v \in V$.

Portanto de (2.32), (2.34), (2.36), (2.37), (2.40), (2.41) e (2.43), tomando limite com $m \longrightarrow \infty$, resulta que as funções u e θ dadas em (2.29) satisfazem o problema variacional

$$\begin{cases} (u_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta, w)_{L^2(\Omega)} + (a(.)\, u_t, w)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ (\theta_t, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \theta, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (u_t, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases}$$

para toda $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,\infty)$. Em particular, tem-se que

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + \nabla \theta = 0 \\ \theta_t - \Delta \theta + div u_t = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

no sentido de $\mathcal{D}'((0,\infty) \times \Omega)$.

2.3.4 Regularidade

Seja (u, θ) a solução de (2.1) obtida na seção anterior. Usando o fato u_{tt}, $a(x)u_t$, $\nabla \theta \in [L^2(\Omega)]^n$, θ_t, $div\, u_t \in L^2(\Omega)$ e que

$$\begin{cases} \Delta u(t) = u_{tt}(t) + a(x)u_t(t) + \nabla \theta(t) \\ \Delta \theta(t) = \theta_t(t) + div u_t(t) \end{cases} \tag{2.45}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$, para cada $t \in [0, \infty]$, segue então do Teorema de Regularidade Elíptica ‡ aplicando ao operador de Laplace que

$$u(t) \in [H^2(\Omega)]^n \;\text{ e }\; \theta(t) \in H^2(\Omega)$$

para cada $t \in [0, \infty)$. Então podemos concluir de (2.45) que:

$$\begin{gathered} u \in L^\infty(0,\infty; [H^2(\Omega)]^n \cap [H_0^1(\Omega)]^n), \quad u_t \in L^\infty(0,\infty; [H_0^1(\Omega)]^n), \\ u_{tt} \in L^\infty(0,\infty; [L^2(\Omega)]^n), \quad \theta \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty; H^2(\Omega)) \\ \text{e } \; \theta_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)). \end{gathered} \tag{2.46}$$

Então resulta que as igualdades

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + \nabla \theta = 0 \\ \theta_t - \Delta \theta + div u_t = 0 \end{cases}$$

‡ver cap1; seção 1.8

valem no sentido de $L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ e $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente. Assim, u e θ são soluções fortes do sistema (2.1).

2.3.5 Análise das Condições Iniciais

Vamos mostrar agora, que as funções u e θ dadas em (2.29) também satisfazem as condições inicias do problema (2.1), isto é,

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \qquad \text{e} \qquad \theta(0) = \theta_0.$$

Para fazer isso, vamos considerar a seguinte proposição, que pode ser encontrada em Lions [17]:

Proposição 2.1 *Sejam V_1 e V_2 espaços de Hilbert tal que V_1 está imerso continuamente em V_2. Seja, $W(0,T) = \{\phi \in L^p(0,T;V_1) : \dfrac{d\phi}{dt} \in L^p(0,T;V_2)\}$. Então $W(0,T)$ está imerso continuamente em $C(0,T;V_2)$.*

Lembremos que as soluções u e θ de (2.1), dadas em (2.46), são tais que $u \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]^n)$, $u_t \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$, $\theta \in L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e $\theta_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$. Logo é claro que $u \in W(0,T)$ com $p=\infty$ e $V_1 = V_2 = [H_0^1(\Omega)]^n$. Portanto, pela proposição acima tem-se que

$$u \in C([0,\infty],[H_0^1(\Omega)]^n).$$

Também é claro que $\theta \in W(0,\infty)$ com $p=\infty$ e $V_1 = H^2(\Omega)$ e $V_2 = L^2(\Omega)$. Então, pela proposição tem-se que

$$\theta \in C([0,\infty),L^2(\Omega)).$$

Temos ainda que $u_t \in W(0,\infty)$ com $p=\infty$ e $V_1 = [H_0^1(\Omega)]^n$ e $V_2 = [L^2(\Omega)]^n$. Assim, pela Proposição 2.1

$$u_t \in C([0,\infty);[L^2(\Omega)]^n.$$

Logo, faz sentido calcular $u(0)$, $u_t(0)$ e $\theta(0)$.

Vamos então calcular $u(0)$. Temos que

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$$

conforme (2.29).

Então, como em (2.30) e (2.31), escolhendo $w = \varphi\psi$ com $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$ e $\varphi \in L^1(0,\infty)$ tem-se:

$$\int_0^\infty (u_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \tag{2.47}$$

para toda $\varphi \in L^1(0,\infty)$. Em particular, para toda $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$ já que $C_0^1(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$, onde $C_0^1(0,\infty)$ são as funções de classe C^1 com suporte compacto em $[0,\infty)$.

Também, de (2.29) tem-se

$$u^m \rightharpoonup u \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty([0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n).$$

Então, como acima, para $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$ e $\phi \in L^1(0,\infty)$ vale que:

$$\int_0^\infty (u^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\phi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\phi\, dt \tag{2.48}$$

para toda $\phi \in L^1(0,\infty)$. Em particular, para toda $\phi \in C_0(0,\infty)$ pois $C_0(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$, onde $C_0(0,\infty)$ representa as funcões continuas que tem suporte compacto em $[0,\infty)$.

Escolhendo $\phi = \varphi'$ com $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$ concluimos de (2.47) que

$$\int_0^\infty (u_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \tag{2.49}$$

e de (2.48) comcluimos que

$$\int_0^\infty (u^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi'\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (u,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi'\, dt \tag{2.50}$$

para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$ e para toda $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$.

Somando (2.49) e (2.50) temos que

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\Big[(u^m(t),\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)\Big]\, dt \longrightarrow \int_0^\infty \frac{d}{dt}\Big[(u(t),\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)\Big]\, dt,$$

para $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$. Então, integrando e impondo a condição adicional sobre φ que $\varphi(0) = 1$ segue que

$$(u^m(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n \subset [L^2(\Omega)]^n$.

Mas, pela escolha de $u^m(0)$ em (2.8), tem-se $u^m(0) = u_0^m \longrightarrow u_0$ forte em $[H_0^1(\Omega)]^n$ e portanto em $[L^2(\Omega)]^n$. Dai, tem-se que

$$(u^m(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u_0,\, \psi)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $\psi \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Portanto, da unicidade do limite, concluimos que

$$u(0) = u_0. \tag{2.51}$$

Assim, como era esperado, $u(t)$ atende a condição inicial dada.

Calculamos agora $\theta(0)$. Sabemos que

$$\theta_t^m \rightharpoonup \theta_t \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$$

(conforme (2.29)).

Então, escolhendo $w = \varphi\psi$ com $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(0,1)$ e $\varphi \in L^1(0,\infty)$ tem-se:

$$\int_0^\infty (\theta_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\theta_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt$$

para toda $\varphi \in L^1(0,\infty)$. Em particular, para toda $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$ já que $C_0^1(0,\infty) \subset L^1(0,\infty)$. Temos também, de (2.29) que

$$\theta^m \rightharpoonup \theta \text{ fraco em } L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)).$$

Então, para $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $\phi \in L^2(0,\infty)$ vale que:

$$\int_0^\infty (\theta^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\phi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\theta,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\phi\, dt$$

para toda $\phi \in L^2(0,\infty)$. Em particular, para toda $\phi \in C_0(0,\infty)$ pois $C_0(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$. Tomando $\phi = \varphi'$ com $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$ concluimos que

$$\int_0^\infty (\theta_t^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\theta_t,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi\, dt \tag{2.52}$$

e

$$\int_0^\infty (\theta^m,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi'\, dt \longrightarrow \int_0^\infty (\theta,\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi'\, dt \tag{2.53}$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e para toda $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$.

Somando (2.52) e (2.53) temos que

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[(\theta^m(t),\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)\right] dt \longrightarrow \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[(\theta(t),\, \psi)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)\right] dt,$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^1(0,\infty)$. Então, impondo a condição adicional que $\varphi(0) = 1$ e integrando, tem-se que

$$(\theta^m(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\theta(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Mas pela escolha de $\theta^m(0)$ em (2.8), tem-se $\theta^m(0) = \theta_0^m \longrightarrow \theta_0$ forte em $H_0^1(\Omega)$ e portanto em $L^2(\Omega)$. Desse modo tem-se que

$$(\theta^m(0),\, \psi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\theta_0,\, \psi)_{L^2(\Omega)}$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Logo, da unicidade do limite, concluimos que

$$\theta(0) = \theta_0. \tag{2.54}$$

Usando as convergências

$$\begin{aligned} u_t^m &\longrightarrow u_t, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n) \\ u_{tt}^m &\longrightarrow u_{tt}, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n) \end{aligned}$$

já vistas em (2.29) e fazendo de modo semelhante ao acima para $u(0) = u_0$ e $\theta(0) = \theta_0$, mostra-se que

$$u_t(0) = u_1. \tag{2.55}$$

Agora, de (2.46), (2.51), (2.54) e (2.55) concluímos que as funções u e θ são soluções do problema (2.1), já que as condições de fronteira em (2.1) estão satisfeitas pois $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e $\theta \in H_0^1(\Omega)$.

Resta então, verificar a unicidade das soluções u e θ.

2.4 Unicidade de Soluções

Suponhamos que existem dois pares $(u,\, \theta)$ e $(\tilde{u},\, \tilde{\theta})$ soluções do problema (2.1) nas classes indicadas no final da seção 2.2.4. Então $w = u - \tilde{u}$ e $v = \theta - \tilde{\theta}$ são soluções de

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + a(x)w_t + \nabla v = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ v_t - \Delta v + div w_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0 & x \in \Omega \\ v(x,0) = 0 & x \in \Omega \\ w(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0 & t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.56}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.56) por w_t e a segunda equação de (2.56) por v, somando as duas e, em seguida integrando em relação a $x \in \Omega$ e usando as condições iniciais para w e v dadas em (2.56), resulta que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\{ \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} + \|\sqrt{a(.)}\, w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

A energia do problema (2.56) é dada por:

$$E(t) = E(w(t), v(t)) = \frac{1}{2}\left\{ \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

Agora, integrando em $[0, t]$, $t > 0$, e usando as condições iniciais dadas em (2.56) segue que $E(t) = E(w(t), v(t))$ satisfaz

$$E(t) + \int_0^t \{\|\sqrt{a(.)}\, w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\}\, ds = E(0) = E(w(0), v(0)). \quad (2.57)$$

para todo $t \geq 0$. Assim $E(t) = 0$, $\forall t$. Donde resulta que $w = v = 0$ quase sempre. Logo $u = \tilde{u}$ e $\theta = \tilde{\theta}$. Portanto, o problema (2.1) admite solução (u, θ) única.

Capítulo 3

Estabilização

Neste capítulo estudamos a estabilização do sistema acoplado Equação da Onda $\times$ Equação do Calor (2.1). Por estabilização, entendemos o comportamento da energia $E(t)$ do sistema, quando $t \longrightarrow \infty$ ou o estudo do comportamento das soluções $u(t)$ e $\theta(t)$ quando $t \longrightarrow \infty$, em alguma norma. Por exemplo, estudar $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \|\theta(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$. Mostraremos taxas de decaimento explícitas para as soluções do sistema (2.1).

De fato, nosso objetivo é estudar a estabilização da energia $E(t)$, do sistema (2.1), que é dada por:

$$E(t) \,=\, \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 \,+\, |\nabla u|^2 \,+\, \theta^2\right) dx.$$

A energia $E(t)$ é a soma das energias $E_1(t)$ e $E_2(t)$ dadas por:

$$E_1(t) \,=\, \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 \,+\, |\nabla u|^2\right) dx \quad \text{(energia cinética e potencial)} \tag{3.1}$$

$$E_2(t) \,=\, \frac{1}{2}\int_\Omega \theta^2\, dx \quad \text{(energia térmica).} \tag{3.2}$$

Conforme já vimos no capítulo 2, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) \,+\, \int_\Omega a(x)|u_t|^2 dx \,+\, \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \,=\, 0,$$

para todo $t \geq 0$.

Assim, para $t \geq 0$ e $T > 0$ a energia $E(t)$ satisfaz a identidade

$$E(t) \,-\, E(t+T) \,=\, \int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxds \,+\, \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxds. \tag{3.3}$$

Em particular, vê-se que a energia $E(t)$ é uma função decrescente. Então, faz sentido estudar taxas de decaimento da energia total $E(t)$ associada ao sistema (2.1).

Agora precisamos definir o subconjunto $\Gamma(x_0)$ de $\Gamma = \partial\Omega$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixado de modo arbitrário.

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma;\ (x - x_0).\eta(x) \geq 0\}$$

onde $\eta(x)$ é a normal exterior unitária a Ω no ponto $x \in \Gamma = \partial\Omega$.

Seja, $\omega \subset \bar{\Omega}$ uma vizinhança em $\bar{\Omega}$ de $\Gamma(x_0)$. Assim, $\omega = \bar{\Omega} \cap W$, onde W é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma(x_0) \subset W$.

A estabilização da energia $E(t)$ será estudada com a seguinte hipótese adicional na função $a(x)$:

$$a(x) \geq a_0 \ \text{ sobre } \ \omega \tag{3.4}$$

para alguma constante a_0 positiva.

Assim, o termo dissipativo $a(x)u_t$ na primeira equação em (2.1) é localizado ou efetivo apenas em uma parte de Ω

De fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Estabilização) *Sejam $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ as soluções do problema (2.1). Seja $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geq 0$ q.s. em Ω, satisfazendo (3.4). Então, existem constantes positivas C e σ, com C dependendo da energia inicial $E(0)$, tais que:*

$$E(t) \ \leq \ Ce^{-\sigma t}, \tag{3.5}$$

para todo $t \geq 0$.

Para provar esse teorema vamos precisar de alguns lemas e estimativas especiais sobre as soluções u e θ.

3.1 Lema de Nakao

Para provar a estabilização da energia $E(t)$ vamos mostrar que $E(t)$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$E(t) \ \leq \ C[E(t) - E(t+T)], \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

onde C é uma constante positiva e $T > 0$ é uma constante fixa adequada.

Então, a propriedade de decaimento (3.5) seguirá de (3.6) e do seguinte lema:

Lema 3.1 (Nakao) *Seja $\varphi(t)$ uma função não negativa em $\mathbb{R}^+$ satisfazendo para $t \geq 0$:*

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \varphi(s) \leq C[\varphi(t) - \varphi(t+T)]$$

com $T > 0$ e $C > 0$ constantes fixas.

Então φ tem o seguinte comportamento assintótico

$$\varphi(t) \leq C\varphi(0)e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

para algum $\sigma > 0$ fixo e $C > 0$ uma constante.

3.2 Identidades de Energia

Para provar (3.6) também precisamos desenvolver algumas identidades de energia.

Lema 3.2 *Sejam $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ as soluções do problema (2.1). Sejam $h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funcão de classe $C^1(\overline{\Omega})$, $m \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $T > 0$ fixado. Então as seguintes identidades são válidas, para todo $t \geq 0$:*

$$\int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla\theta|^2 \, dxds = -\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \theta^2 \, dx\right]_t^{t+T} + \int_t^{t+T} \int_\Omega u_t \cdot \nabla\theta \, dxds, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \int_\Omega m(x)|\nabla\theta|^2 \, dxds = & - \left[\frac{1}{2}\int_\Omega m(x)\theta^2 \, dx\right]_t^{t+T} \\ & - \int_t^{t+T} \int_\Omega \theta(\nabla m \cdot \nabla\theta) \, dxds \\ & - \int_t^{t+T} \int_\Omega m(x)\theta(div\, u_t) \, dxds, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \int_\Omega [|\nabla u|^2 - |u_t|^2] \, dxds = & - \left[\int_\Omega u \cdot u_t \, dx\right]_t^{t+T} \\ & - \int_t^{t+T} \int_\Omega u \cdot \nabla\theta \, dxds \\ & - \left[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|u|^2 \, dx\right]_t^{t+T}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)[|\nabla u|^2-|u_t|^2]\,dxds \;=\; &-\left[\int_\Omega m(x)u\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla m\sum_{i=1}^n u^i\nabla u^i dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)u\cdot\nabla\theta dxds\\
&-\left[\frac{1}{2}\int_\Omega m(x)a(x)|u|^2dx\right]_t^{t+T},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (h.\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds \;=\; &-\left[\int_\Omega (h.\nabla u)u_t\,dx\right]_t^{t+T}\\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (divh)[|\nabla u|^2-|u_t|^2]dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)(h.\nabla u)u_t\,dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega (h\cdot\nabla u)\nabla\theta\,dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega \partial_k h_i\,\partial_i u_j\,\partial_k u_j\,dxds,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

onde h^k *indica a k-ésima componente do campo* h*,* $\Delta h=(\Delta h^1,\cdots,\Delta h^n)$ *e* $\eta=\eta(x)$ *é a normal exterior unitária no ponto* $x\in\Gamma=\partial\Omega$*,*

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (x-x_0).\eta\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds \;=\; &-\left[\int_\Omega [(x-x_0).\nabla u]u_t\,dx\right]_t^{t+T}\\
&+\frac{n}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega [|\nabla u|^2-|u_t|^2]\,dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)[(x-x_0).\nabla u]\cdot u_t\,dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega [(x-x_0)\cdot\nabla u]\cdot\nabla\theta\,dxds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dxds.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Demonstração:

As identidades (3.7) e (3.8) são obtidas fazendo o produto da segunda equação do sistema (2.1) com os multiplicadores $M(\theta)=\theta$ e $M(\theta)=m(x)\theta$ respectivamente, e integrando em $\Omega\times[t,t+T]$. As identidades (3.9), (3.10) e (3.11) são obtidas fazendo o produto interno em $\mathbb{R}^n$ da primeira equação do sistema (2.1) com os multiplicadores $M(u)=u$, $M(u)=m(x)u$ e $M(u)=h.\nabla u$ respectivamente, e integrando em $\Omega \times [t, t+T]$. A identidade (3.12) é um caso particular da equação (3.11) quando $h(x) = (x - x_0)$.

$\square$

3.3 Estimativas de Energia

Observamos que, em todas as estimativas que se seguirem, a letra C poderá indicar diferentes constantes positivas.

Seja $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{array}{ccc} h(x) = \eta(x) & \text{sobre} & \Gamma(x_0) \\ h(x).\eta(x) \geq 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \\ h(x) = 0 & \text{sobre} & \Omega \backslash \hat{\omega} \end{array} \tag{3.13}$$

onde $\eta(x)$ é a normal únitaria exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$ e $\widehat{\omega}$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\widehat{\omega} \subset \omega$, $\Gamma(x_0) \subset \widehat{\omega} \cap \overline{\Omega} \subset \omega \subset \overline{\Omega}$ (a existência de um tal campo h aparece em Lions [15]). O conjunto ω foi definido na introdução deste capítulo.

A primeira estimativa é dada pelo seguinte lema:

Lema 3.3 *Seja $T > 0$ fixo. Então, existem $\gamma > 0$ e $\beta > 0$ tal que as soluções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ de (2.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\gamma \int_t^{t+T} E_1(s)\, ds \leq C\big[E_1(t+T) + E_1(t)\big]$$
$$+\frac{1}{2}\beta M \int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds + \int_t^{t+T} \int_\Omega \big[|u| + \beta M |\nabla u|\big] |a(x) u_t|\, dx ds$$
$$+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \big[|u| + \beta M |\nabla u|\big] |\nabla \theta|\, dx ds,$$

onde $M = \sup\limits_{\bar{\Omega}} |x - x_0|$ e $E_1(t)$ é a energia associada a solução $u(x,t)$ da primeira equação do sistema (2.1), isto é, $E_1(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\big)\, dx$.

Demonstração:

Multiplicando (3.12) por β, $\beta > 0$ e depois somando com (3.9) resulta:

$$
\begin{aligned}
&(1-\frac{\beta n}{2})\int_t^{t+T}\int_\Omega \big[|\nabla u|^2 - |u_t|^2\big]\,dxds + \beta\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dxds \\
= \quad & -\beta\Big[\int_\Omega \big[(x-x_0)\cdot\nabla u\big]u_t\Big]_t^{t+T} - \Big[\int_\Omega u\cdot u_t\,dx\Big]_t^{t+T} - \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|u|^2\Big]_t^{t+T} \\
& -\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\Big[(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]\,dxds \\
& +\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma \Big[(x-x_0)\cdot\eta\Big]\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds - \int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\Big[u+\beta(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]dxds.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\beta n}{2}-1)\int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\,dxds + (1+\beta-\frac{\beta n}{2})\int_t^{t+T}\int_\Omega \big[|\nabla u|^2\,dxds \\
= \quad & -\beta\Big[\int_\Omega \big[(x-x_0)\cdot\nabla u\big]u_t\Big]_t^{t+T} - \Big[\int_\Omega u\cdot u_t\,dx\Big]_t^{t+T} - \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|u|^2\Big]_t^{t+T} \\
& -\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\Big[(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]\,dxds \\
& +\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma \Big[(x-x_0)\cdot\eta\Big]\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds \\
& -\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\cdot\Big[u+\beta(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]dxds.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Agora, fixando um número β tal que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{n} < \beta < \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 3 \\
&\beta > 2, \quad n = 1 \\
&\beta > 1, \quad n = 2
\end{aligned}
$$

Tomamos $\gamma := 2\,min\Big\{\frac{\beta n}{2}-1,\ 1+\beta(1-\frac{n}{2}\Big\}$ e, portanto, $\gamma > 0$. Então, de (3.15) se obtém que

$$
\begin{aligned}
\gamma\int_t^{t+T}\frac{1}{2}\int_\Omega \big[|u_t|^2+|\nabla u|^2\big]\,dxds \leq & -\beta\Big[\int_\Omega \big[(x-x_0)\cdot\nabla u\big]u_t\Big]_t^{t+T} - \Big[\int_\Omega u\cdot u_t\,dx\Big]_t^{t+T} \\
& -\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|u|^2\Big]_t^{t+T} - \beta\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\Big[(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]\,dxds \\
& +\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma \Big[(x-x_0)\cdot\eta\Big]\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds - \int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\Big[u+\beta(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]dxds.
\end{aligned}
$$

Isso quer dizer que

$$\begin{aligned}\gamma\int_t^{t+T}E_1(s)\,ds\leq -\beta\Big[\int_\Omega\big[(x-x_0)\cdot\nabla u\big]u_t\Big]_t^{t+T}-\Big[\int_\Omega u\cdot u_t\,dx\Big]_t^{t+T}\\ -\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|u|^2\Big]_t^{t+T}-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\Big[(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]\,dxds\\ +\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma\Big[(x-x_0)\cdot\eta\Big]\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\Big[u+\beta(x-x_0)\cdot\nabla u\Big]dxds.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Mas a desigualdade (3.16) é equivalente a

$$\begin{aligned}\gamma\int_t^{t+T}E_1(s)\,ds\leq -\Big[\int_\Omega\big[\beta(x-x_0)\cdot\nabla u+u\big]u_t\Big]_t^{t+T}\\ -\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\big[\beta(x-x_0)\cdot\nabla u+u\big]\,dxds\\ +\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\Big[(x-x_0)\cdot\eta\Big]\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds\\ -\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\Big[\beta(x-x_0)\cdot\nabla u+u\Big]dxds.\end{aligned}\tag{3.17}$$

já que $(x-x_0).\eta\leq 0$ em $\Gamma\backslash\Gamma(x_0)$.

Então, sendo $M=\sup\limits_{x\in\bar\Omega}|x-x_0|$ e usando a desigualdade de Poincaré, da estimativa (3.17) segue que:

$$\begin{aligned}\gamma\int_t^{t+T}E_1(s)\,ds &\leq \Big[\int_\Omega\big[\beta M\nabla u+u\big]u_t\Big]_t^{t+T}\\ &\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\big[\beta M\nabla u+u\big]\,dxds\\ &\quad+\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}M\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds\\ &\quad-\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\Big[\beta M\nabla u+u\Big]dxds\\ &\leq C\big\{\|u_t(t+T)\|\big[\|\nabla u(t+T)\|+\|u(t+T)\|\big]\\ &\quad+\|u_t(t+T)\|\big[\nabla u(t)\|+\|u(t)\|\big]\big\}\\ &\quad+\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}M\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds\\ &\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\big[\beta M\nabla u+u\big]\,dxds\\ &\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\Big[\beta M\nabla u+u\Big]dxds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\big[\|u_t(t+T)\|\|\nabla u(t+T)\| + \|u(t)\|\|\nabla u(t)\|\big]\\
&\quad +M\frac{\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds\\
&\quad +\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t\big[\beta M\nabla u + u\big]\,dxds\\
&\quad +\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\Big[\beta M\nabla u + u\Big]dxds
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Logo, de (3.18), resulta que

$$
\begin{gathered}
\gamma\int_t^{t+T} E_1(s)\,ds \leq C\big[E_1(t+T) + E_1(t)\big]\\
+\frac{1}{2}\beta M\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u| + \beta M|\nabla u|\big]\,dxds\\
+\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|\big[|u| + \beta M|\nabla u|\big]\,dxds
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

□

Para a demonstração do próximo Lema vamos precisar usar a identidade (3.10), $m = m(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{|\nabla m|^2}{m} & \text{é limitada em } \ \Omega\\
0 \leq m(x) \leq 1 & \text{em } \ \Omega\\
m = 1 & \text{em } \ \widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}\\
m = 0 & \text{em } \ \overline{\Omega}\backslash\omega
\end{array}
\tag{3.20}
$$

onde $\widehat{\omega}$ aparece nas propriedades de h em (3.13).

A existência de uma tal função $m(x)$ é mencionada em A. Haraux [1] e J. L. Lions [15].

Lema 3.4 *Seja $T > 0$ fixo. Então, existe $\gamma > 0$ tal que as soluções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ de (2.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$
\begin{aligned}
\gamma\int_t^{t+T} E_1(s)\,ds \ &\leq C\Bigg[E_1(t) + E_1(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2 + |u|^2)\,dxds\\
&+ \ \int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u| + \nabla u]dxds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big[|\nabla u| + |u|\big]\Bigg],
\end{aligned}
$$

sendo $E_1(t)$ é a energia associada a solução $u(x,t)$ da primeira equação do sistema (2.1).

Demonstração:

Usando a identidade (3.11) com $h = h(x)$ satisfazendo (3.13) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds &= \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds\\
&\leq \int_t^{t+T}\int_{\Gamma}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds\\
&\leq 2\left[\int_\Omega (h.\nabla u)u_t\,dx\right]_t^{t+T}\\
&\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega (\text{div}h)[|u_t|^2-|\nabla u|^2]\,dxds\\
&\quad+2\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)u_t(h.\nabla u)\,dxds\\
&\quad+2\int_t^{t+T}\int_\Omega (h\cdot\nabla u)\nabla\theta\,dxds\\
&\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega \partial_k h_i\,\partial_i u_j\,\partial_k u_j\,dxds.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Como $h\in C^1(\bar{\Omega})$, $h=0$ em $\Omega\backslash\hat{\omega}$ e $\hat{\omega}\subset\omega$, $\;0\leq m\leq 1$, $\;m=1$ em $\hat{\omega}$, então de (3.21) tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma ds &\leq C\Big[E_1(t)+E_1(t+T)\Big]+\int_t^{t+T}\int_{\hat{\omega}\cap\bar{\Omega}}(|u_t|^2+|\nabla|^2)dxds\\
&\quad+C\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t||\nabla u|dxds\\
&\quad+C\int_t^{t+T}\int_{\hat{\omega}\cap\bar{\Omega}}\sum_{i,j,k=1}^{n}|\partial_i u_j|\,|\partial_k u_j|dxdx\\
&\quad+C\int_t^{t+T}\int_{\hat{\omega}\cap\bar{\Omega}}|\nabla u||\nabla\theta|\,dxds\\
&\leq C\Bigg[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2dxds\\
&\quad+\int_t^{t+T}\int_{\hat{\omega}\cap\bar{\Omega}}m(x)|\nabla u|^2dxds\\
&\quad+\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t||\nabla u|dxds\\
&\quad+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla u||\nabla\theta|dxds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Agora, vamos usar (3.10), com $m=m(x)$ satisfazendo (3.20). Do fato que $m(x)\geq 0$

e de (3.10), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{\hat{\omega}\cap\bar{\Omega}} m(x)|\nabla u|^2 dxds &\leq \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|\nabla u|^2 dxds\\
&= \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|u_t|^2]\, dxds\\
&\quad - \left[\int_\Omega m(x)u\cdot u_t\, dx\right]_t^{t+T}\\
&\quad - \int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla m\sum_{i=1}^n \nabla u^i u^i dxdt\\
&\quad - \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)u\cdot\nabla\theta dxds\\
&\quad - \int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)a(x)u_t\cdot udxds\\
&\leq C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega(|u_t|^2+|u|^2)\, dxds\right.\\
&\quad \left. + \int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t||u|dxds\right],
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

onde a última estimativa na expressão acima é devida a desigualdade de Poincaré.

Logo,(3.21) torna-se:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds \;&\leq C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega(|u_t|^2+|u|^2)\, dxds\right.\\
&+ \left.\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u|+\nabla u]dxds+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla u||\nabla\theta|\right].
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Substituindo esta estimativa no Lema (3.3) obtemos que:

$$
\begin{aligned}
\gamma\int_t^{t+T} E_1(s)\, ds \;&\leq C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega(|u_t|^2+|u|^2)\, dxds\right.\\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u|+\nabla u]dxds\\
&+ \left.\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big[|\nabla u|+|u|\big]\right].
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Isso prova o Lema.

□

Lema 3.5 *Seja (u,θ) solução do problema (2.1), existe uma constante $T>0$, que depende de $E(0)$, tal que*

$$
\begin{aligned}
E(t) \;&\leq C\Bigg\{E(t)-E(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega\big[|u_t|^2+|u|^2\big]\, dxds\\
&+ \int_t^{t+T}\int_\omega \nabla\theta\big[|\nabla u|+|u|\big]\, dxds\Bigg\}
\end{aligned}
$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$.

Demonstração:

Sabemos de (3.3) que

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dxds \,+\, \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxds \,=\, E(t) \,-\, E(t+T).$$

Pela desigualdade de Poincaré temos que

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \theta^2 dxds \,\leq\, C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxds \,\leq\, C\Big[E(t) \,-\, E(t+T)\Big].$$

Isto diz que

$$\int_t^{t+T} E_2(t) ds \,\leq\, C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxds \,\leq\, C\Big[E(t) \,-\, E(t+T)\Big], \tag{3.25}$$

onde $E_2(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \theta^2 dx$.

Combinando a estimativa obtida no Lema 3.4 e a estimativa (3.25) segue que

$$\begin{aligned}\gamma\int_t^{t+T} E(s)\,ds \;&\leq C\Bigg[E(t) + E(t+T) + \triangle E + \int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2 + |u|^2)\,dxds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u| + \nabla u\big]dxds + \int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big[|\nabla u| + |u|\big]\Bigg],\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $\triangle E = E(t) - E(t+T)$.

No entanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e $(a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|\big[|u| + \nabla u\big]dxds \,\leq \\ &\leq C\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + |u|^2\big)\,dxds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\sqrt{2}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\sqrt{2}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega E(s)\,dxds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\sqrt{2}\sqrt{T}\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |a(x)u_t|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(s)} \leq C\left[\int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(s)} \\ &\leq C\left[\int_t^{t+T} E(s)\,ds\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{E(s)} \,\leq\, C\sqrt{T}E(t) \,\leq\, C\,E(t).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Logo, substituindo (3.27) em (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}\gamma\int_t^{t+T} E(s)\,ds \;&\le C\left[E(t)+E(t+T)+\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2+|u|^2)\,dxds\right.\\ &\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big(|\nabla u|+|u|\big)\right].\end{aligned} \tag{3.28}$$

Do fato que $E(t)$ é decrescente obtemos que

$$\begin{aligned}T\,E(t+T)\;&\le C\left[E(t)+E(t+T)+\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2+|u|^2)\,dxds\right.\\ &\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big(|\nabla u|+|u|\big)\right].\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tomando $T\ge 2C+1$ em (3.29), concluímos que

$$E(t)\;\le\; C\left[\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2+|u|^2)\,dxds\;+\int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\big(|\nabla u|+|u|\big)\right]. \tag{3.30}$$

Nas estimativas acima C indica diferentes constantes positivas.

□

3.4 Estimativa Fundamental

Agora, vamos enunciar a estimativa dada na próxima proposição que produzira uma estimativa para a energia $E(t)$.

Proposição 3.1 *Sejam u e θ as soluções do problema (2.1) e $T>0$ fixado pelo Lema 3.5. Então, existe uma constante $C>0$, tal que:*

$$\int_t^{t+T}\int_\omega\Big\{|u|^2\;+\;|\nabla\theta|\big[|\nabla u|+|u|\big]\Big\}\,dxds\;\le\;C\Big\{\triangle E\;+\;\int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dxds\Big\}, \tag{3.31}$$

para todo $t\ge 0$.

Demonstração:

Vamos provar esta proposição por contradição. Suponhamos que exista uma sequência de soluções $\Big\{(u^n)_{n\in\mathbb{N}},(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$ com dados iniciais $\Big\{(u_0^n),(u_1^n),(\theta_0^n)\Big\}$ e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^+$ tais que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u^n|^2+|\nabla\theta^n|\big[|u^n|+|\nabla u^n|\big]\,dxds}{\triangle E_n\;+\;\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t^n|^2\,dxds}=\infty. \tag{3.32}$$

Sejam

$$\lambda_n^2 = \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u^n|^2 + |\nabla\theta^n| \big[|u^n| + |\nabla u^n| \big] \, dxds \tag{3.33}$$

e

$$I_n(t_n) = \frac{1}{\lambda_n^2} \Big[\triangle E_n \, + \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u_t^n|^2 \, dxds \Big]. \tag{3.34}$$

Então, de (3.32), tem-se

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} I_n(t_n) \, = \, 0. \tag{3.35}$$

Seja $v^n(x,t) = \dfrac{u^n(x, t+t_n)}{\lambda_n}$ e $w^n(x,t) = \dfrac{\theta^n(x,t+t_n)}{\lambda_n}$, $\quad 0 \le t \le T$. Além disso, de (3.33), temos que

$$\frac{1}{\lambda_n^2} \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u^n|^2 + |\nabla\theta^n| \big[|u^n| + |\nabla u^n| \big] \, dxds \, = \, 1, \tag{3.36}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da estimativa do lema (3.5), de (3.35) e de (3.36), segue que

$$\begin{aligned}
E(v^n(t), w^n(t)) &= E\Big(\frac{u^n(x,t+t_n)}{\lambda_n}, \frac{\theta^n(x,t+t_n)}{\lambda_n}\Big) \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2} E(u^n(x,t+t_n), \theta^n(x,t+t_n)) \\
&\le \frac{1}{\lambda_n^2} E(u^n(t_n), \theta^n(t_n)) \\
&\le \frac{C}{\lambda_n^2} \Big\{ \triangle E_n + \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u_t^n|^2 + |u^n|^2 + |\nabla\theta^n| \big[|\nabla u^n| + |u^n| \big] dxds \big] \Big\} \\
&= \frac{C}{\lambda_n^2} \Big\{ \triangle E_n + \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u_t^n|^2 dxds \Big\} + C \\
&= C \, I_n(t_n) + C.
\end{aligned}$$

Mas, $I_n(t_n)$ é limitado devido a (3.35). Assim, obtemos que

$$E(v^n(t), w^n(t)) \le C, \quad \text{isto é} \quad \int_\Omega |v_t^n|^2 + |\nabla v^n|^2 + |\nabla w^n|^2 dx \le C,$$

para todo $0 \le t \le T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C > 0$ independe de t e n. Portanto,

$$\|v_t^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n} \le C, \quad \|\nabla v^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n} \le C \quad \text{e} \quad \|w^n(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C, \tag{3.37}$$

para todo $0 \le t \le T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas da desigualdade de Poincaré e da estimativa (3.37), segue que

$$\|v^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 = \int_\Omega |v^n(x,t)|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2} |u^n(x, t+t_n)|^2 \, dx$$

$$\leq C_1 \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2} |\nabla u^n(x,t+t_n)|^2\, dx = C_2 \int_\Omega |\nabla v^n(x,t)|^2\, dx \leq \ C,$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v_n(x,t)|^2\, dx \leq C, \tag{3.38}$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} &v^n \ \text{ é limitada em } \ W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n),\\ &w^n \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.39}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n}(a(x)u_t^n(t+t_n)) = 0 \ \text{ em } \ L^1((0,T)\times\Omega). \tag{3.40}$$

Demonstração:

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \Big| \frac{1}{\lambda_n} a(x) u_t^n(t+t_n) \Big|\, dxdt &= \int_0^T \int_\Omega a(x) \Big| \frac{u_t^n(t+t_n)}{\lambda_n} \Big|\, dxdt \\ &\leq \left[\int_0^T \int_\Omega a(x)\, dxdt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_\Omega a(x) \Big| \frac{u_t^n(t+t_n,x)}{\lambda_n} \Big|^2 dxdt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{C}{\lambda_n^2}\, T \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega a(x) \big| u_t^n(s,x) \big|^2 dxds \right]^{\frac{1}{2}} &\leq C \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \bigtriangleup E \right]^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{I_n} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Logo,

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \int_\Omega a(x) |u_t^n|\, dxds \leq C\sqrt{I_n(t_n)} \longrightarrow 0 \tag{3.42}$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

□

Afirmação 2:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n}(\nabla \theta^n(t+t_n)) = 0 \ \text{ em } \ L^1((0,T)\times\Omega). \tag{3.43}$$

Demonstração:

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \Big|\frac{\nabla\theta^n(t+t_n)}{\lambda_n}\Big|\,dxdt \;&\leq\; C_\Omega\sqrt{T}\left[\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \int_\Omega \Big|\nabla\theta^n(t+t_n,x)\Big|^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_\Omega\sqrt{T}\left[\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega \Big|\nabla\theta^n(s,x)\Big|^2 dxds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_\Omega\sqrt{T}\left[\frac{1}{\lambda_n^2}\triangle E_n\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\sqrt{I_n}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Logo,

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \int_\Omega |\nabla\theta^n(t+t_n)|\,dxds \leq C\sqrt{I_n(t_n)} \longrightarrow 0 \tag{3.45}$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

$\square$

Afirmação 3:

$$\int_0^T \int_\omega |v_t|^2\,dxds = 0.$$

Demonstração:

De fato, por (3.35) temos que $I_n(t_n) = \dfrac{1}{\lambda_n^2}\left[\triangle E_n + \displaystyle\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t^n|^2\,dxds\right] \longrightarrow 0,$ então

$$\begin{aligned}
0 \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \left|\frac{u_t^n(s)}{\lambda_n}\right|^2 dxds \;&=\; \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T\int_\omega \left|\frac{u_t^n(t+t_n)}{\lambda_n}\right|^2 dxds \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T\int_\omega |v_t^n(t)|^2\,dxdt \\
&= \int_0^T\int_\omega |v_t(t)|^2\,dxdt,
\end{aligned}$$

pois $v^n \longrightarrow v$ fraco-$\star$ em $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$.

Afirmação 4:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T\int_\omega \nabla w^n\big[|v^n(t)| + |\nabla v^n(t)|\big]\,dxdt \;=\; 0.$$

Demonstração:

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\omega \nabla w^n \big[|v^n(t)| + |\nabla v^n(t)|\big]\, dxdt \\
&\leq \left(\int_0^T \int_\omega |\nabla w^n|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\omega |\nabla v^n|^2 \,+\, |v^n|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega |\nabla \theta^n|^2\, dxds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega |\nabla u^n|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\lambda_n^2} \triangle E\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla v^n|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\sqrt{T}\sqrt{I_n} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Agora fazemos a passagem ao limite de $\Big\{(v^n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (w^n(t))_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$. De (3.39) segue que existem funções $v(t)$ e $w(t)$ e subseqüências das seqüências v^n e w^n que continuaremos denominando por v^n e w^n tais que

$$\begin{aligned}
&v^n(t) \rightharpoonup v(t) \ \text{ fraco} \star \text{ em } \ W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n) \\
&w^n(t) \rightharpoonup w(t) \ \text{ fraco} \star \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Assim, as funções $v(t)$ e $w(t)$ satisfazem:

i) $v \in W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n)$ e $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;

ii) $\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ w_t - \Delta w + div v_t = 0 \end{cases}$, pois v^n e w^n são soluções do nosso sistema.

De fato, temos que (u^n, θ^n) satisfazem

$$\begin{cases} u_{tt}^n(t+t_n) - \Delta u^n(t+t_n) + \nabla\theta^n(t+t_n) + a(x)u_t^n(t+t_n) = 0 \\ \theta_t^n(t+t_n) - \Delta\theta^n(t+t_n) + div\, u_t^n(t+t_n) = 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

Dividindo (3.46) por λ_n teremos

$$\begin{cases} v_{tt}^n(t) - \Delta v^n(t) + \dfrac{\nabla\theta^n(t+t_n)}{\lambda_n} + \dfrac{a(x)u_t^n(t+t_n)}{\lambda_n} = 0 \\ w_t^n(t) - \Delta w^n(t) + div\, v_t^n(t) = 0, \end{cases} \tag{3.47}$$

para $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando o limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos da Afirmação 1 e Afirmação 2 que

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ w_t - \Delta w + div v_t = 0 \end{cases}$$

iii) $\displaystyle\int_0^T \int_\omega |v_t|^2\, dxds = 0;$

iv) $\displaystyle\int_0^T \int_\omega |v|^2 dxds + \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \int_\omega |\nabla w^n| \big[|v^n| + |\nabla v^n|\big]\, dxds = 1.$

Agora, como $v(x,t)$ é solução de

$$v^{tt} \; - \; \Delta v \; = \; 0 \tag{3.48}$$

em $\Omega \times [0,T)$ então também v_t é solução de (3.48) em $\Omega \times [0,T)$.

Mas (iii) diz que $v_t = 0$ q.s. em $\omega \times [0,T)$. Logo, pelo Teorema de Holmgreen (continuação única) em Kim [19], Lions [14] e [23], resulta que $v_t \equiv 0$ em $\Omega \times [0,T)$.

Assim $v(x,t) = f(x)$ em $\Omega \times [0,T)$.

Portanto, voltando ao problema (3.48) temos que v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{3.49}$$

pois v é limita de v^n que é solução do nosso sistema e portanto satisfaz condição de Dirichelt sobre $\partial\Omega$. Pela unicidade do Problema de Dirichel, resulta que $v = 0$ q.s. em $(0,T) \times \Omega$. Isso contradiz o item (iv). Assim, a Proposição 3.1 é válida. □

3.5 Prova do Teorema de Estabilização

Do Lema 3.5 temos a estimativa

$$E(t) \;\leq C\Bigg\{\triangle E + \int_t^{t+T} \int_\omega \big[|u_t|^2 + |u|^2\big]\, dxds + \int_t^{t+T} \int_\omega \nabla\theta\big[|\nabla u| + |u|\big]\, dxds\Bigg\},$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$.

Usando a Proposição 3.1, do fato que $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre ω segue que

$$E(t) \;\leq\; C\Bigg\{\triangle E + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dxds\Bigg\} \leq\; C\Bigg\{\triangle E + \widetilde{C}\int_t^{t+T}\int_\Omega a(x)|u_t|^2\,dxds\Bigg\} \tag{3.50}$$

para todo $t \geq 0$, C constante positiva independe de u e θ.

Logo, por (3.3), temos

$$E(t) \;\;\leq\; C\Bigg\{\triangle E + \widetilde{C}\triangle E\Bigg\}.$$

Isto é,

$$E(t) \;\;\leq\; C\; \triangle E, \tag{3.51}$$

para todo $t \geq 0$. Aqui, C é uma constante positiva que independe de u e θ, mas depende dos dados iniciais.

Agora, como $E(t)$ é decrescente temos que

$$\sup_{t\leq s\leq t+T} E(s) \leq E(t) \leq C \triangle E = C[E(t) - E(t+T)]$$

com $T > 0$ fixado e dado pelo Lema 3.5, e $t \geq 0$ qualquer.

Portanto aplicando o Lema Nakao 3.1 obtemos que

$$E(t) \leq Ce^{-\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

para constantes positivas C e σ.

Isso completa a prova do Teorema 3.1 de estabilização exponencial da energia.

Bibliografia

[1] A. Haraux, *Semigroupes Linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques.* Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[2] C. M. Dafermos, *On the existence and the Asymptotic Stability of Solution to the Equation of Linear Thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal., V. 29 (1968), pp. 241-247.

[3] D. Carvalho Pereira, G. Perla Menzala, *Exponential Decay of Solutions to a Coupled System of Equations of Linear Thermoelasticity.* Mat. Aplic., V. 8, nº 3, pp. 193-204, 1989.

[4] D. Henry, O. Lopes, A. Perisinotto, *Linear Thermoelasticity Assynptotic Stability end Essential Spectrum.* Nonlinear Analisys, Theory and Applications, V. 21,1(1993), pp. 65-75.

[5] E. Bisognin, V. Bisognin, R. Coimbra Charão, *Decaimento exponencial das soluções do sistemas de ondas elásticas com dissipação não linear localizada.* Atas do 51º Seminário Brasileiro de Análise, UFSC, Florianópolis, 337-382, 2000.

[6] E. Bisognin, V. Bisognin, R. Coimbra Charão, *Uniform stabilization for elastic waves system with highly nonlinear localized dissipation.* Portugaliae Matemática, Vol. 60 Fasc. 1 - 2003, 99-124.

[7] F. Brauer, J. A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction.* Menlo Park: W. A. Benjamin, 1969.

[8] G. Dassios, M. Grillakis, *Dissipation Rates and Partition of Energy in Thermoelasticity* . Arch. Rational Meth. Anal., V. 87(1984), pp. 49-91.

[9] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[10] J. E. M. Rivera, *Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity.* Funkcialaj Ekvacioj, V. 35, n$^{\underline{o}}$ 1, 1992, pp. 19-30.

[11] J. E. M. Rivera, *The Contact Problem in Thermoviscoelastic Materials.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 264, 2001, pp. 522-545.

[12] J. E. M. Rivera, R. Racke, *Large Solutions and Smoothing Properties for Nonlinear Thermoelastic Systems.* Journal of Differential Equations, V. 127, n$^{\underline{o}}$ 2, 1996, pp. 454-483.

[13] J. E. M. Rivera, M. de Lacerda Oliveira, *Exponential Stability for a Contact Problem in Thermoelasticity.* Journal of Applied Mathematics, V. 58(1997), pp. 71-82.

[14] J. L. Lions, *Exact Contrôlabilé Exacte Perturbations et Stabilization De Systèmes Distribués.* Tome 1, Masson, Paris, 1988.

[15] J. L. Lions, *Exact Controllability, Stabilization and perturbations for Distributed Systems.* SIAM Rev.30, 1-68, 1988

[16] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[17] J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les equations aux de riveés partielles* . Press univ. Montreal, 1962 (ver p.51).

[18] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic boundary value problems.* Wiley Interscience, New York, 1972.

[19] J. U. Kim, *A unique continuation property of a beam equation with variable coefficients, in estimation and control of distributed parameter sustems.* (Desch,W., Kappel, F., Kunisch, K. eds.), 197-205, Birkhäuser, Basel, 1991 (Internationel Series of numerical mathematics, 100 (1991)).

[20] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966.

[21] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[22] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*. Textos de Métodos Matemáticos nº9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[23] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer.Verlag. Band 116 1969.

[24] N. Boubarki, *Intégration*. Hermann, Paris, 1966.

[25] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[26] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.

[27] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*. Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[28] W. Scott Hansen, *Exponential Energy Decay in Linear Thermoelasticity Rod*. Journal of Math. . Analysis and Applications, V. 167(1992), pp. 429-442.

[29] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method*. John Wiley & Sons - Masson, Paris, 1994.