Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Existência e unicidade de soluções globais de equações de evolução semilineares via teoria de semigrupos

Lucia Menoncini

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis
Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Existência e unicidade de soluções globais de equações de evolução semilineares via teoria de semigrupos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Lucia Menoncini

Florianópolis

Fevereiro de 2005

Existência e unicidade de soluções globais de equações de evolução semilineares via teoria de semigrupos

por

Lucia Menoncini

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre" em Matemática , Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (LNCC/UFRJ)

Prof. Dr. Jaime Muñoz Rivera (LNCC/UFRJ)

Prof. Dr. Jauber Cavalcante de Oliveira (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2005.

A Deus.

A meu noivo Altamir.

A meus pais Idanir e Deomira.

A meus irmãos Paulo e Janice.

A meu orientador Prof. Ruy Coimbra Charão.

Agradecimentos

Agradeço de forma especial a meu noivo e a minha família que me apoiaram nestes anos de estudo e que não mediram esforços para que se concluisse esta importante fase de minha vida.

Meus agradecimentos sinceros ao professor Dr. Ruy Coimbra Charão que não somente orientou este trabalho, mas se mostrou um excelente profissional e uma pessoa de grande índole.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSC, os quais tive a oportunidade de convívio e em especial aos professores, a secretária e ao coordenador da Pós-Graduação desse Departamento.

Também não poderia esquecer dos amigos do Bacharelado em Matemática e dos colegas do mestrado e do doutorado, que muitas alegrias e horas de estudos compartilhamos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o período de 2003 e 2004.

Resumo

Neste trabalho fazemos uma introdução à teoria de semigrupos de operadores lineares e estudamos dois resultados de caracterização de quando um dado operador é gerador de um semigrupo de classe C_0 ou de um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Banach. São desenvolvidas algumas aplicações da teoria de semigrupos para a análise da existência e unicidade de soluções globais para uma equação linear abstrata e em seguida se estudam as equações lineares do calor e da onda. Também analisamos um problema abstrato semilinear envolvendo um operador linear não limitado que é gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0. Os casos semilineares para as equações do calor e da onda também são tratados.

Abstract

In this work we study an introduction to the theory of semigroups of linear operators and we describe two results about the characterization of when a given operator is the generator of a C_0 semigroup, or of a semigroup of contractions, in a Banach space. We have applied the theory of semigroups for the analysis of the existence and uniqueness of solutions for an abstract linear equation and the linear heat equation and the linear wave equation. We also analyse a semilinear abstract problem involving a linear unbounded operator which is the generator of a semigroup of contractions. The global existence for the semilinear heat equation and the semilinear wave equation are also studied in this work.

Sumário

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar uma introdução à teoria de semigrupos lineares e mostrar algumas aplicações a problemas de existência e unicidade de equações diferenciais parciais lineares e semilineares. Mais especificamente, nos detemos nas equações do calor e da onda, mas muitas equações podem ser tratadas de modo análogo. No primeiro capítulo são apresentadas algumas propriedades dos semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach. No segundo capítulo são estudadas as equações do calor e da onda, nos casos linear e semilinear, como exemplos de aplicações da teoria de semigrupos.

Entende-se por um semigrupo de classe C_0, em um espaço de Banach X, uma família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de $B(X)$, onde $B(X)$ representa a álgebra dos operadores lineares limitados de X, que satisfaz:

i) $S(0) = I$, com I operador identidade;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$;

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Um exemplo de semigrupo é obtido através da função exponencial $E : \mathbb{R}^+ \to B(X)$ definida por $E(t) = e^{tA} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(tA)^n}{n!}$, com $A \in B(X)$. Assim, a família $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz as condições da definição de semigrupo de classe C_0. Neste sentido, a definição de semigrupo generaliza a definição da função exponencial.

De fato, a importância disso está em que a função $u(t) = S(t)u_0 = e^{tA}u_0$ é solução do seguinte problema de valor inicial para um operador $A \in B(X)$:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

sendo u_0 um elemento dado em X.

A idéia da teoria de semigrupos é que a solução de um problema de valor inicial, como o problema (1), para um operador linear não limitado A sobre um espaço de Banach X, seja dada por $S(t)u_0$ se o operador A gera um semigrupo.

A teoria de semigrupos é tratada no capítulo 1. São tratadas importantes propriedades de semigrupos como, por exemplo, a diferenciabilidade associada com o gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0. É estudado o teorema Hille-Yosida que caracteriza quando um dado operador, sobre um espaço de Banach, é gerador de um semigrupo de classe C_0. Também é estudado o teorema Lumer-Phillips que caracteriza geradores de semigrupos de contrações de classe C_0.

No capítulo 2 apresentamos inicialmente alguns resultados teóricos necessários no desenvolvimento do trabalho, como por exemplo, a definição de operador maximal monótono, a definição de espaços de Sobolev, um teorema de regularidade para operadores elípticos e o teorema Lax-Milgram.

Posteriormente se faz uma introdução ao estudo de uma equação linear abstrata, e como casos particulares, fazemos o estudo das equações do calor e da onda. Mais especificamente, são analisadas a existência e unicidade de soluções de tais equações, usando como ferramenta a teoria de semigrupos.

Também no capítulo 2 realizamos, seguindo Brezis-Cazenave [6], um estudo de soluções fracas no caso geral de uma equação semilinear em um espaço de Banach, considerando o termo da semilinearidade nos casos em que é uma aplicação globalmente Lipschitz contínua ou localmente Lipschitz contínua.

Em particular, para o estudo da equação do calor semilinear, toma-se a função semilinear localmente Lipschitz contínua e mostra-se, via método de semigrupos, a existência e unicidade da solução fraca local e sob certa condição de crescimento da não linearidade, é analisada a existência e unicidade da solução global.

Ainda, na seção (2.4.3) realizamos um estudo direto da existência e unicidade de soluções locais fortes da equação do calor semilinear, usando propriedades de semigrupos e o teorema de contração sobre um determinado espaço métrico compacto. Esse espaço tem uma definição diferente do espaço que foi utilizado na seção (2.4.1) para o problema abstrato semilinear.

O caso da equação da onda semilinear é apresentado no final do capítulo 2, sem muitos detalhes visto que seu tratamento fica análogo ao caso da equação do calor semilinear e do problema abstrato semilinear.

Na seção (2.4.4) é apresentado um problema de valor inicial e de contorno para uma equação do calor semilinear sem existência de solução global.

Capítulo 1

Teoria de Semigrupos

Vamos iniciar este capítulo definindo operador linear limitado e função exponencial. Tais operadores são definidos em um espaço de Banach X e representados por $B(X, X)$. Já a função exponencial e^{tA} é estudada considerando A real, A matriz $p \times p$ e posteriormente, generalizando o caso para A operador linear limitado. No caso em que A é um operador linear não limitado, mas com certas propriedades boas, pode-se também definir e^{tA}. Isto é feito pela teoria de semigrupos (Gomes[1], Pazy[2]).

1.1 Operadores lineares limitados

Definição 1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \to Y$, com $D(A)$ o domínio de A. Diz-se que o operador linear é limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Neste caso, se o domínio de A é denso em X então A pode ser estendido a todo X.

Representa-se por $B(X, Y)$ a família $A : X \to Y$ dos operadores lineares limitados de X em Y. A função real $\|.\|$ definida por

$$\|A\|_{B(X,Y)} = \sup_{\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}} \|Ax\|_Y < \infty,$$

é uma norma sobre $B(X, Y)$.

Tem-se que $B(X, Y)$ com a norma acima é um espaço de Banach e $B(X)$ representa os operadores lineares limitados de X em X.

Seja A_n uma seqüência em $B(X, Y)$ com n=1,2,...Diz-se que A_n é convergente se existir $A \in B(X, Y)$ tal que $\|A_n - A\| \to 0$ quando $n \to \infty$ e escreve-se $A_n \to A$.

Vamos considerar $A_n \in B(X, Y)$. A série dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.1}$$

converge para algum elemento $A \in B(X, Y)$ se a seqüência das somas parciais $S_p = \sum_{n=1}^{p} A_n$, $p = 1, 2, ...$ for convergente para A. Quando a série real $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ for convergente, diz-se que (1.1) é absolutamente convergente.

1.2 Função exponencial

Definição 1.2. *Seja A número real e t variável real. A função exponencial e^{tA} é escrita por*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{1.2}$$

A série em (1.2) é convergente para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, se A é uma matriz $p \times p$, então a definição 1.2 também representa a função exponencial matricial. Isto diz que se $A = (a_{ij})$ e $A^n = (a_{ij}^{(n)})$, com $i, j = 1, 2, ...p$ e $n = 1, 2, ...$, então a série

$$1 + ta_{ij} + \frac{t^2 a_{ij}^{(2)}}{2!} + ...$$

é convergente e $e^{tA} = (b_{ij})$, sendo

$$b_{ij} = 1 + ta_{ij} + \frac{t^2 a_{ij}^{(2)}}{2!} + ...$$

Assim, as propriedades da função exponencial para um número real A são válidas quando A é uma matriz.

Da mesma forma, para X espaço de Banach e $A \in B(X)$, a série

$$I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + ... + \frac{(tA)^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

com I operador identidade de X é absolutamente convergente e conseqüentemente convergente, para todo t real, desde que X é Banach. Logo, considerando A operador linear limitado de X, pode-se definir a exponencial e^{tA} pela série

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Então e^{tA} é um operador linear limitado de X e $\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{|t| \|A\|}$.

A função exponencial está diretamente associada às equações diferenciais. Isto porque, ela é solução do seguinte problema de Cauchy: seja A um operador linear limitado em um espaço de Banach X. Então, uma função $u(t) = e^{tA} u_0$ definida em R^+ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

sendo u_0 um elemento dado em X.

A idéia da teoria de semigrupos é estudar tal problema para o caso em que A é um operador linear não limitado.

Quando $A \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, a exponencial E é a única função definida em $\mathbb{R}^+$ a valores em $\mathbb{R}$ (como será mostrado no teorema 1.4 abaixo) que satisfaz as propriedades:

a) $E(0) = 1$;

b) $E(t + s) = E(t)E(s), \quad t, s \geq 0$;

c) $\lim_{t \to 0^+} E(t) = 1$.

Isto também é válido para o caso em que A é uma matriz $p \times p$ e também em um espaço de dimensão infinita, onde E toma seus valores na álgebra dos operadores lineares limitados. Desta forma, o número 1 que aparece em a) e c) é interpretado como o operador identidade de X e a multiplicação em b), a composição de operadores.

Observação 1.3. *Diz-se que I é o limite uniforme de $E(t) \in B(X)$ se $\|E(t) - I\| \to 0$ quando $t \to 0^+$. Também, I é o limite forte de $E(t)$ se para cada $x \in X$, $\|[E(t) - I]x\| \to 0$ quando $t \to 0^+$.*

Teorema 1.4. *Uma função $E : R^+ \to B(X)$ satisfaz as condições*

a) $E(0) = I$;

b) $E(t+s) = E(t)E(s)$;

c) $\|E(t) - I\| \to 0, \quad$ quando $t \to 0^+$;

se e somente se $E(t) = e^{tA}$, para algum $A \in B(X)$ com e^{tA} definida por (1.2).

Demonstração:

Supor $A \in B(X)$ e $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$. Como para todo $t \geq 0$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge em norma, então e^{tA} é um operador linear limitado de X. Isto diz que e^{tA} está definida em $\mathbb{R}^+$ a valores em $B(X)$.

Também pode-se observar que e^{tA} satisfaz a condição a).

Usando a fórmula $\frac{(t+s)^p}{p!} = \sum_{m+n=p} \frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}$, para $t, s \in \mathbb{R}^+$ e a fórmula para produto de somatórios, obtemos

$$E(t)E(s) = e^{tA}e^{sA} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m s^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} A^p \left(\sum_{m+n=k} \frac{s^m t^n}{m!n!}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} A^p \frac{(t+s)^p}{p!}$$

$$= e^{A(t+s)} = E(t+s).$$

Logo, a condição b) está satisfeita.

Do fato que $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ resulta

$$\left\|e^{tA} - I\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{(n+1)!}\right)$$

$$\leq t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}\right) = t\|A\| e^{t\|A\|}.$$

Portanto, $\left\|e^{tA} - I\right\| \leq t\,\|A\|\,e^{t\|A\|}$ para todo $t \geq 0$.

Como por hipótese $A \in B(X)$, tomando o limite quando $t \to 0^+$ na desigualdade acima temos que $\left\|e^{tA} - I\right\| \to 0$, o que prova a condição c).

Reciprocamente, supor que a função $E : R^+ \to B(X)$ satisfaz as condições a), b), c).

Vamos mostrar que $\|E(t)\|$ é limitada em todo intervalo limitado.

Da hipótese c), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|E(t) - I\| \leq \epsilon$, para todo $t \in [0, \delta]$. Como $|\|E(t)\| - \|I\|| \leq \|E(t) - I\|$ então $\|E(t)\| \leq \epsilon + 1 = M$, $\forall t \in [0, \delta]$.

Para cada $t \geq 0$ real, existe um número inteiro não negativo n tal que $t = n\delta + r$, sendo r número real pertencente ao intervalo $[0, \delta)$. Usando *b)* e o fato que $n < \dfrac{t}{\delta}$ segue que

$$\begin{aligned}\|E(t)\| &= \|E(n\delta + r)\| = \|E(\delta)^n E(r)\| \leq \|E(\delta)\|^n \|E(r)\| \\ &\leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\delta}} M = Me^{\omega t}\end{aligned}$$

sendo $\omega = \delta^{-1} log M \geq 0$. Portanto, se $t \in [0, T]$, $\|E(t)\|$ é limitada em $[0, T]$ por Me^{wT}.

Vamos provar que E é uma função contínua na topologia uniforme de $B(X)$.

Para $h > 0$ temos que

$$\|E(t + h) - E(t)\| = \|E(t)[E(h) - I]\| \leq \|E(t)\|\,\|E(h) - I\| \to 0$$

quando $h \to 0$, pois $\|E(t)\|$ é limitada em intervalo limitado e $\|E(h) - I\| \to 0$.

Agora, para os valores de h tais que $0 < h \leq t$ resulta

$$\begin{aligned}\|E(t - h) - E(t)\| &= \|E(t - h)[I - E(h)]\| \\ &\leq \|E(t - h)\|\,\|E(h) - I\| \to 0\end{aligned}$$

quando $h \to 0$, pois $\|E(t - h)\|$ é limitada em $[0, t]$ e vale c). Logo, E é uma função contínua na topologia uniforme de $B(X)$. Neste sentido, podemos integrar à Riemann, relativamente à topologia uniforme de $B(X)$. Pelo teorema do Valor Médio para Integrais e usando a continuidade de $E(t)$ obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h E(t)dt = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} (E(\xi_h)h) = E\left(\lim_{h \to 0^+} \xi_h\right) = E(0) = I \tag{1.4}$$

em norma, com $0 < \xi_h < h$. Assim, existe $\rho > 0$, tal que

$$\left\|\frac{1}{\rho} \int_0^\rho E(t)dt - I\right\| < 1.$$

Isso implica que $\displaystyle\int_0^\rho E(t)dt$ é inversível em $B(X)$.

Além disso, tomando $s = t + h$ segue da continuidade de $E(t)$ que

$$\begin{aligned}\frac{E(h) - I}{h}\int_o^\rho E(t)dt &= \frac{1}{h}\int_o^\rho E(t+h)dt - \frac{1}{h}\int_o^\rho E(t)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} E(t)dt - \frac{1}{h}\int_o^h E(t)dt.\end{aligned}$$

Da mesma forma como foi calculada a integral (1.4), o último membro da igualdade acima converge em norma para $E(\rho) - I$.

Agora, considerando

$$A = \lim_{h\to 0^+}\frac{E(h) - I}{h} \tag{1.5}$$

temos que $A\displaystyle\int_o^\rho E(t)dt = E(\rho) - I$. Isto implica que

$$A = (E(\rho) - I)\left(\int_o^\rho E(t)dt\right)^{-1} \in B(X)$$

já que por hipótese $E(t) \in B(X)$ para $t \in \mathbb{R}^+$. Então, $E(t)$ é derivável à direita do ponto 0 relativamente à topologia uniforme de $B(X)$ e $\dfrac{d^+}{dt}E(0) = A$.

Usando a hipótese que $E(t + h) = E(t)E(h)$, para todo $t \geq 0$ e $h > 0$, resulta que

$$\frac{E(t+h) - E(t)}{h} = E(t)\left(\frac{E(h) - I}{h}\right) \to E(t)A$$

quando $h \to 0$, em norma. Logo, E é derivável à direita em todo $t \geq 0$ relativamente à topologia uniforme de $B(X)$ e $\dfrac{d^+}{dt}E(t) = E(t)A$. Analogamente, para todo $t > 0$

$$\frac{d^+}{dt}E(t) = AE(t) \quad \text{ e } \quad \frac{d^-}{dt}E(t) = \frac{d^+}{dt}E(t).$$

Para concluir a prova, vamos considerar a função $\phi(t) = E(t)e^{(u-t)A}$, para cada $t \geq 0$. Derivando ϕ em relação a t e usando que $\dfrac{dE(t)}{dt} = E(t)A$ obtemos

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt}e^{(u-t)A} - E(t)Ae^{(u-t)A} = E(t)Ae^{(u-t)A} - E(t)Ae^{(u-t)A} = 0.$$

Logo, ϕ é constante. Isto é, para todo $t \geq 0$, $\phi(0) = e^{uA} = E(t)e^{(u-t)A} = \phi(t)$. Isso diz que $E(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$, com A dado por (1.5). O teorema está provado.

1.3 Semigrupos de classe C_0

O teorema (1.4) motiva a seguinte definição:

Definição 1.5. *Seja X um espaço de Banach e $B(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um Semigrupo de operadores lineares e limitados de X se:*

a) $S(0) = I$, com I operador identidade de X;

b) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Além disso, diz-se que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de Classe C_0 se

c) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Assim, a definição de semigrupo generaliza a definição de função exponencial.

Para iniciarmos o estudo das propriedades dos semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach X, precisamos do teorema abaixo, bem conhecido da Análise Funcional.

Teorema 1.6 (Teorema da Limitação Uniforme). *Sejam X espaço de Banach e Y espaço vetorial normado. Seja $(T_n)_{n\in I}$ família em $B(X,Y)$, com I conjunto de índices qualquer. Supor que para cada $x \in X$, o conjunto $\{T_n x\}_{n\in I}$ é limitado em Y. Então, $\{T_n\}_{n\in I}$ é limitada em $B(X,Y)$, isto é, $\exists M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in I$, com M independente de n.*

O teorema acima pode ser usado para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.7 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam X e Y espaços de Banach e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(X,Y)$. Então, T_n converge pontualmente para um operador linear limitado, para cada $x \in X$, se e somente se $T_n x$ converge pontualmente sobre um conjunto D denso em X e $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e para alguma constante $M > 0$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Groetsch [3], pg.51.

Agora podemos provar um resultado inicial sobre semigrupos.

Proposição 1.8. *Se* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de classe* C_0 *então* $\|S(t)\|$ *é uma função limitada em qualquer intervalo limitado* $[0,T]$.

Demonstração:

Afirmação: Existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$, tais que $\|S(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,\delta]$. Se isso não acontecesse, existiria uma seqüência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \to 0^+$ tal que $\|S(t_n)\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, pelo teorema 1.6 acima, $\|S(t_n)x\|$ não seria limitado para algum $x \in X$, o que entraria em contradição com o item c) da definição 1.5.

Além disso temos que $M \geq 1$, pois pela condição a) da definição de semigrupo de classe C_0, $\|S(0)\| = 1$.

Seja $t \in [0,T]$. Então, para algum inteiro não negativo n e algum $r \in \mathbb{R}$, com $0 \leq r < \delta$ temos que $t = n\delta + r$. Logo,

$$\begin{aligned}\|S(t)\| = \|S(n\delta + r)\| = \|S(\delta)^n S(r)\| &\leq \|S(\delta)^n\|\,\|S(r)\| \\ &\leq M^n M = M^{n+1}.\end{aligned}$$

Isso mostra que $\|S(t)\|$ é uma função limitada em $[0,T]$.

Corolário 1.9. *Todo semigrupo de classe* C_0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$, *ou seja, se* $t \in \mathbb{R}^+$ *então* $\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x$, $\forall x \in X$.

Demonstração:

Vamos considerar $t \geq 0$. Para cada $x \in X$ e $h > 0$ segue que

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| = \|S(t)[S(h) - I]x\| \leq \|S(t)\|\,\|[S(h) - I]x\| \to 0$$

quando $h \to 0$, pois $\|S(t)\|$ é limitada e $\lim_{h\to 0} \|[S(h) - I]x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Também para $x \in X$ e para os valores de h tais que $0 < h < t$ resulta

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| = \|S(t-h)[I - S(h)]x\| \leq \|S(t-h)\|\,\|[I - S(h)]x\| \to 0$$

quando $h \to 0$. Logo, $\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x$, $\forall x \in X$.

Observação 1.10. *Os semigrupos de classe C_0 são conhecidos também por Semigrupos Fortemente Contínuos, o que se justifica pelo corolário 1.9.*

Se A é um operador linear e limitado de X, então

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}, \quad t \geq 0.$$

No caso da função exponencial, se $w \geq \|A\|$, então $\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{tw}$, para todo $t \geq 0$. Uma propriedade semelhante a esta é válida para os semigrupos, como será mostrado na proposição 1.12. Para isso, vamos precisar do lema abaixo sobre funções subaditivas. Isto é, uma função $p : X \to \mathbb{R}$, X espaço vetorial real é subaditiva se satisfaz $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$, $\forall t, s \in X$ e $p(\lambda t) = \lambda p(t)$, $\forall t \in X$ e $\lambda > 0$.

Lema 1.11. *Seja p uma função subaditiva em $\mathbb{R}^+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então, $\dfrac{p(t)}{t}$ tem limite quando $t \to \infty$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}. \tag{1.6}$$

Demonstração:
Vamos definir $w_0 = \inf_{t>0} \dfrac{p(t)}{t}$, sendo $-\infty \leq w_0 < \infty$. A demonstração é dividida em casos.

Caso 1: $w_0 > -\infty$.

Seja $\epsilon > 0$. Da definição de ínfimo, existe $T > 0$ tal que $\dfrac{p(T)}{T} \leq w_0 + \epsilon$.

Sejam $t > T$, $n \in \mathbb{N}$ e r real com $0 \leq r < T$ tais que $t = nT + r$. Usando que p é subaditiva, resulta da definição de w_0 que

$$w_0 \leq \frac{p(t)}{t} \leq \frac{np(T) + p(r)}{t} = \frac{nTp(T)}{Tt} + \frac{p(r)}{t} \leq \frac{nT(w_0 + \epsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t}.$$

Também do fato que p é limitada superiormente em $[0, T)$, passando limite quando $t \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$w_0 \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq w_0 + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, está provado (1.6) para $w_0 > -\infty$.

Caso 2: $w_0 = -\infty$.

Aqui, para cada real w existe $T > 0$ tal que $\dfrac{p(T)}{T} \leq w$. Análogo ao caso anterior, obtém-se $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{p(t)}{t} \leq w$.

Assim, da arbitrariedade de w segue que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{p(t)}{t} = -\infty$.

Isto conclui a prova do lema.

Proposição 1.12. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = w_0 \tag{1.7}$$

e para cada $w > w_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.8}$$

Demonstração:

A função $\log \|S(t)\|$ é subaditiva. De fato,

$$\log \|S(t+s)\| = \log \|S(t)S(s)\| \leq \log \left(\|S(t)\| \, \|S(s)\|\right) = \log \|S(t)\| + \log \|S(s)\| .$$

Pela proposição 1.8, a função $\|S(t)\|$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Assim, $\log \|S(t)\|$ é uma função limitada superiormente em intervalos limitados e pelo lema 1.11, tomando $p(t) = \log \|S(t)\|$ resulta que (1.7) é válida.

Da definição de limite e de (1.7), se $w > w_0$, existe t_0 tal que para $t > t_0$ vale a desigualdade

$$\frac{\log \|S(t)\|}{t} < w. \tag{1.9}$$

Do fato que $\|S(t)\| \leq M_0$, $\forall t \in [0, t_0]$ e $\|S(0)\| = 1$, concluimos que $M_0 \geq 1$.

Agora, tomando $w \geq 0$ em (1.9) obtemos

$\log \|S(t)\| \leq wt + \log M_0, \quad \forall t \geq 0.$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da desigualdade acima, segue que

$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{\log M_0} = M_0 e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$

Tomando $M = M_0$, verifica-se (1.8).

De modo análogo, se $w < 0$ em (1.9) resulta

$\log \|S(t)\| \leq wt - wt_0 + \log M_0, \quad \forall t \geq 0.$

Da mesma forma que o procedimento anterior

$$\|S(t)\| \leq e^{wt}e^{-wt_0}e^{\log M_0} = M_0 e^{-wt_0}e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando $M = M_0 e^{-wt_0}$, obtemos (1.8).

Para concluir a prova, podemos observar que $M \geq 1$ em ambos os casos, pois $M_0 \geq 1$.

Observação 1.13. *Quando $w_0 < 0$ e tomar $w = 0$, a proposição 1.12 afirma que existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito Semigrupo Uniformemente Limitado de classe C_0.*

Também diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é Semigrupo de Contrações de classe C_0, se para $w_0 < 0$ tivermos $M = 1$. Isto é, $\|S(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Definição 1.14. *Seja X espaço de Banach e seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de classe C_0. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h}x \quad \textit{existe} \right\} \;\; e \;\; Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h}x, \, \forall x \in D(A)$$

é chamado Gerador Infinitesimal ou simplesmente Gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

A notação A_h, com $h > 0$, representa o operador linear limitado dado por $\dfrac{S(h)-I}{h}$.

A próxima proposição é muito importante no estudo dos semigrupos de classe C_0. Ela trata da diferenciabilidade de um semigrupo associado a seu gerador infinitesimal.

Proposição 1.15. *Seja A o gerador do semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Temos que*

i) Se $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, então $S(t)x \in D(A)$ e a função $\mathbb{R}^+ \to X$, com $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável e

$$\frac{dS(t)}{dt}x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad x \in D(A). \tag{1.10}$$

ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x\,d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax\,d\tau. \tag{1.11}$$

iii) Se $x \in X$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *com* $t \geq 0$, *então*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau) x d\tau = S(t)x.$$

iv) Para $x \in X$, *tem-se* $\int_0^t S(\tau) x d\tau \in D(A)$ *e além disso,*

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau) x d\tau. \tag{1.12}$$

Demonstração:

i) Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupo de classe C_0 e A seu gerador. Para $t > 0$ e $h > 0$, vale a identidade

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = \frac{S(h) - I}{h} S(t)x = A_h S(t)x = S(t) A_h x.$$

Assim, para $x \in D(A)$, o termo $S(t)A_h x$ tem um limite quando $h \to 0$, isto é,

$$S(t) \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x = S(t) A_h x \to S(t) A x,$$

pela definição de A ser gerador infinitesimal.

Logo, $S(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.13}$$

Também para $0 < h < t$ e $x \in D(A)$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{S(t-h) - S(t)}{-h} x &= S(t-h) A_h x \\ &= S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax \to S(t)Ax \end{aligned}$$

quando $h \to 0$. Isto se justifica pois $A_h x \to Ax$, quando $h \to 0$ e pela proposição 1.8, $\|S(t)\|$ é limitada para $0 < h < t$. Assim, o termo $S(t-h)(A_h x - Ax) \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, da continuidade forte do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ temos que $S(t-h)Ax \to S(t)Ax$. Portanto

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax. \tag{1.14}$$

De (1.13) e (1.14) temos (1.10).

ii) Vamos considerar $x \in D(A)$ e t, s números positivos. Integrando (1.10) de s a t, obtemos (1.11), ou seja

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau.$$

iii) Pelo corolário 1.9, $\lim_{\tau \to t} S(\tau)x = S(t)x$, $\forall x \in X$ e $t \geq 0$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|\tau - t| < \delta$ resulta $\|S(\tau)x - S(t)x\| < \epsilon$. Conseqüentemente, para $x \in X$ e $0 < |h| \leq \delta$ resulta

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\tau)x - S(t)x)d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)x - S(t)x\| \, d\tau < \epsilon.$$

iv) Agora para $x \in X$ e $h > 0$ obtemos

$$A_h \int_0^t S(\tau)xd(\tau) = \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau = \frac{1}{h} \int_0^t S(h+\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)xd\tau.$$

Tomando limite quando $h \to 0$, resulta do item iii) anterior que

$$A \int_0^t S(\tau)xd(\tau) = S(t)x - x.$$

Proposição 1.16. *O gerador de um semigrupo de classe C_0 é um operador fechado com domínio denso em X.*

Demonstração:

Sejam $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Seja $x \in X$. Para $h > 0$ vamos definir

$$x_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)xdt.$$

Da proposição 1.15 resulta que $x_h \in D(A)$, $\forall h > 0$ e $x_h \to x$ quando $h \to 0$. Isso diz que $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $D(A)$ é denso em X.

Vamos mostrar que A é fechado.

Tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência no domínio de A tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$, resulta da proposição 1.15 que

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_n dt. \tag{1.15}$$

Para os valores de t tais que $0 \leq t \leq h$, temos da proposição 1.8 que existe $M > 0$ tal que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\| \, \|Ax_n - y\| \leq M \, \|Ax_n - y\|.$$

Como $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$, concluimos que $S(t)Ax_n \to S(t)y$ uniformemente em $[0, h]$. Assim, passando limite quando $n \to \infty$ em (1.15) segue que

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)ydt.$$

Da proposição 1.15 obtemos

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)ydt \to y$$

quando $h \to 0$. Isto diz que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S(h) - I}{h}x$ existe. Assim, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Portanto, A é um operador fechado.

1.4 Caracterização dos geradores de semigrupos de classe C_0

Nesta seção vamos estudar os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, os quais caracterizam geradores de semigrupos de classe C_0. Aqui, o teorema de Lumer-Phillips estuda o caso específico dos semigrupos lineares de contrações de classe C_0. Antes de apresentar tais teoremas, precisamos de alguns resultados preliminares, como os que seguem.

Definição 1.17. *Seja A um operador linear em X, sendo X um espaço de Banach. O conjunto $\lambda \in \mathbb{C}$, para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X é chamado Conjunto Resolvente de A e é representado por $\rho(A)$. O operador linear $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito Resolvente de A.*

NOTA: Usaremos a notação $\lambda - A$ em lugar de $\lambda I - A$, por simplicidade de escrita. Também $R(\lambda - A)$ será a imagem de $\lambda - A$.

Proposição 1.18. *Se A é um operador linear fechado, então o resolvente $R(\lambda, A)$ é também fechado.*

Demonstração:
Vamos definir $R_\lambda = R(\lambda, A)$ e $D(R_\lambda)$ o domínio de R_λ. Tomando $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $D(R_\lambda)$ tal que $y_n \to y$ e $R_\lambda y_n \to z$, vamos mostrar que $y \in D(R_\lambda)$ e $R_\lambda y = z$.

Como $y_n \in D(R_\lambda)$ então $y_n \in R(\lambda - A)$, ou seja, y_n é da forma
$y_n = (\lambda - A)x_n$, com $x_n \in D(A)$. Usando que $y_n \to y$ e $R_\lambda y_n \to z$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\begin{cases} (\lambda - A)x_n \to y \\ R_\lambda y_n = R_\lambda(\lambda - A)x_n \to z. \end{cases}$$

Mas como por hipótese A é fechado, então $\lambda - A$ é fechado. Logo, $y \in R(\lambda - A) = D(R_\lambda)$ e $R_\lambda y = z$.

Teorema 1.19. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador. Considerando $\mathbb{R}e\lambda$ a parte real do número complexo λ, então, se $\mathbb{R}e\lambda > w_0$, sendo $w_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log \|S(t)\|}{t}$, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \forall x \in X. \tag{1.16}$$

Demonstração:

Seja λ tal que $\mathbb{R}e\lambda > w_0$. Seja w tal que $\mathbb{R}e\lambda > w > w_0$. Da proposição 1.12 existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Vamos considerar $x \in X$. Como $e^{-\lambda t}S(t)x$ é uma função contínua, então para λ tal que $\mathbb{R}e\lambda > w$ segue que

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

está bem definida. Ou seja, a integral acima existe como integral imprópria no sentido de Riemann, estando $B(X)$ munido da topologia forte. Também R_λ é linear e limitado pois $\|R_\lambda\| \leq \dfrac{M}{\mathbb{R}e\lambda - w}$. De fato

$$\|R_\lambda(x)\| \leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|S(t)(x)\| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\mathbb{R}e\lambda t} \|S(t)\| \, \|x\| \, dt$$

$$\leq M \|x\| \int_0^\infty e^{-\mathbb{R}e\lambda t}e^{wt}dt = M \|x\| \int_0^\infty e^{-t(\mathbb{R}e\lambda - w)}dt = M \|x\| \frac{1}{(\mathbb{R}e\lambda - w)}.$$

Isto é,

$$\|R_\lambda\| \leq M\frac{1}{(\mathbb{R}e\lambda - w)}, \qquad \mathbb{R}e\lambda > w.$$

Considerando a mudança de variável $s = t + h$, obtemos

$$A_hR_\lambda x = \frac{S(h) - I}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[S(t+h) - S(t)]xdt$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}S(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}e^{\lambda h}S(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)xdt.$$

Logo, para todo $x \in X$ resulta que $\lim_{h\to 0^+} A_hR_\lambda(x) = \lambda R_\lambda(x) - x$. Logo,

$$R_\lambda(x) \in D(A) \quad e \quad (\lambda - A)R_\lambda(x) = x. \tag{1.17}$$

Do fato que $x \in D(A)$ e A é um operador fechado (proposição 1.16) temos

$$R_\lambda(Ax) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Axdt = \int_0^\infty Ae^{-\lambda t}S(t)xdt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt = AR_\lambda(x).$$

Portanto, da identidade acima e de (1.17) concluimos que para cada $x \in D(A)$, $R_\lambda(\lambda - A)x = x$. Conseqüentemente, $\lambda \in \rho(A)$ e $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A)$.

Lema 1.20. *(Identidade do Resolvente). Seja X um espaço de Banach e A um operador fechado em X. Então, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$ tem-se que*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

onde $R(\lambda, A)$ e $R(\mu, A)$ comutam.

Este lema é bem conhecido e sua demonstração pode ser encontrada em Goldstein [7], pg. 13 ou em algum livro de análise funcional, como Yosida [8].

Corolário 1.21. *Nas condições do teorema anterior, podemos concluir que*

$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \\ \\ \dfrac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n S(t)xdt, \quad \forall x \in X. \end{cases} \tag{1.18}$$

Demonstração:

De (1.16) resulta que $\lim\limits_{\mu \to \lambda} R(\mu, A) = R(\lambda, A), \forall x \in X$.

Passando limite quando $\mu \to \lambda$ na identidade do resolvente conforme lema 1.20, obtemos

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{(\lambda - \mu)} = -\lim_{\mu \to \lambda} R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

isto é,

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Por indução, verifica-se a primeira fórmula de (1.18).

Vamos considerar $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A. Como $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$ e $\mathbb{R}e\lambda > w > w_0$, então

$$\left\| e^{-\lambda t} t^{n+1} S(t)x \right\| \leq M \left\| x \right\| t^{n+1} e^{t(w - \mathbb{R}e\lambda)}.$$

Assim, a função do segundo membro desta desigualdade é contínua e sua integral em relação a t converge em $[0, \infty)$. Logo, pelo teste de Weierstrass, a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n+1} S(t)x dt$$

converge uniformemente para $\mathbb{R}e\lambda > w_0$. Também, como o integrando é uma função contínua, podemos aplicar a diferenciação sob o sinal de integração em

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n S(t)x dt.$$

Então, segue que

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n S(t)x dt = - \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n+1} S(t)x dt, \qquad \mathbb{R}e\lambda > w_0.$$

Por indução, tem-se a segunda fórmula de (1.18), o que completa a demonstração do corolário.

Agora que já conhecemos alguns resultados, inclusive a respeito do resolvente de um operador linear A em um espaço de Banach X, vamos estudar o teorema de Hille-Yosida.

1.4.1 Teorema de Hille-Yosida

Teorema 1.22 (Hille-Yosida). *Seja X um espaço de Banach. Para que um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X seja gerador de um semigrupo de classe C_0, é necessário e suficiente que*

i) A seja operador fechado com domínio denso em X;

ii) Existam M e w reais tais que, para cada real $\lambda > w$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

Neste caso, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Demonstração:

A necessidade de i) segue diretamente da proposição 1.16.

Vamos provar a necessidade de ii).

Consideremos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado pelo operador A. Da proposição 1.12, para cada $w > w_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log \|S(t)\|}{t}$, existe $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$. Do teorema 1.19, como $\lambda > w$ então $\lambda \in \rho(A)$.

Falta mostrar que

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do corolário 1.21, para cada $x \in X$ resulta que

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t) x dt. \tag{1.19}$$

De fato, igualando as duas equações em (1.18) temos

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

$$R(\lambda, A)^{n+1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} S(t) x dt.$$

Agora, usando que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$ segue de (1.19) que

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda - w)t} dt = \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a necessidade de ii) está satisfeita.

Agora precisamos mostrar a suficiência. Ou seja, vamos provar, definindo $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$, $\lambda > w$, que o semigrupo e^{tB_λ} tem para limite forte quando $\lambda \to \infty$, um semigrupo de classe C_0 gerado pelo operador A.

Para isto, vamos dividir a demonstração da suficiência em 5 etapas.

Etapa 1: Mostrar que para $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax. \tag{1.20}$$

Da definição de $R(\lambda, A)$, $\lambda > 0$, temos que $R(\lambda, A)(\lambda - A) = I$. Isto é, $\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A$. Para cada $x \in D(A)$ resulta que

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)} \|Ax\| \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$. Assim, $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$, $\forall x \in D(A)$.

Como por hipótese $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M\lambda}{(\lambda - w)}$, então $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 2M$ para λ suficientemente grande.

Da hipótese de que $D(A)$ é denso em X, temos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X.$$

Agora, escrevendo B_λ da forma $B_\lambda = \lambda R(\lambda, A)A$ resulta que

$$\lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Etapa 2: Mostrar que dado $\Upsilon > w$, existe $\lambda(\Upsilon)$ tal que $\left\|e^{tB_\lambda}\right\| \leq Me^{t\Upsilon}, \forall \lambda > \lambda(\Upsilon)$.

Da definição de B_λ e das hipóteses obtemos

$$\left\|e^{tB_\lambda}\right\| = \left\|e^{t[\lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda]}\right\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n \|R(\lambda, A)^n\|}{n!}$$

$$\leq Me^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda - w}\right)^n \frac{1}{n!} = Me^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t(\lambda - w)^{-1}} = Me^{tw\lambda(\lambda - w)^{-1}}.$$

Como $\lim_{\lambda \to \infty} \dfrac{w\lambda}{\lambda - w} = w$, se $\Upsilon > w$, existe $\lambda(\Upsilon)$ tal que $w\lambda(\lambda - w)^{-1} < \Upsilon$, para todo $\lambda > \lambda(\Upsilon)$ e portanto temos

$$\left\|e^{tB_\lambda}\right\| \leq Me^{t\Upsilon}, \quad \forall \lambda > \lambda(\Upsilon). \tag{1.21}$$

Em particular, podemos supor $\lambda(\Upsilon) \geq 0$.

Etapa 3: Mostrar que o semigrupo e^{tB_λ} tende fortemente para um operador linear limitado quando $\lambda \to \infty$. Por simplicidade, usaremos a notação $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$.

Como para cada $\lambda > 0$ e cada $\mu > 0$, $R(\lambda, A)$ comuta com $R(\mu, A)$, então $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$. Da definição de função exponencial dada por

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB_\lambda)^n}{n!}$$

segue que $B_\lambda S_\mu = S_\mu B_\lambda$.

Assim, para cada $x \in D(A)$ obtemos via proposição 1.15 (i)

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = e^{tB_\lambda}x - e^{tB_\mu}x = \int_0^t \frac{d}{ds}[e^{(t-s)B_\mu}e^{sB_\lambda}x]ds$$

$$= \int_0^t e^{tB_\mu}(B_\lambda - B_\mu)e^{-sB_\mu + sB_\lambda}xds$$

$$= \int_0^t e^{(t-s)B_\mu}e^{sB_\lambda}(B_\lambda - B_\mu)xds$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(B_\lambda - B_\mu)xds.$$

Isto é, para $x \in D(A)$ e $\lambda, \mu > \lambda(\Upsilon)$ (portanto $\lambda\mu \in \rho(A)$ pela hipótese (ii)), resulta de (1.21) que

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq \int_0^t \|S_\mu(t-s)\| \, \|S_\lambda(s)\| \, \|(B_\lambda - B_\mu)x\| \, ds$$

$$\leq \int_0^t Me^{(t-s)\Upsilon}Me^{s\Upsilon} \, \|(B_\lambda - B_\mu)x\| \, ds$$

$$= M^2 \, \|B_\lambda x - B_\mu x\| \int_0^t e^{t\Upsilon}ds = M^2te^{t\Upsilon} \, \|B_\lambda x - B_\mu x\|.$$

De (1.20), $\|B_\lambda x - B_\mu x\| \to 0$ quando $\lambda, \mu \to \infty$, $\forall x \in D(A)$. Portanto, para todo $x \in D(A)$, $S_\lambda(t)x$ converge uniformemente em relação a t, em cada intervalo finito $[0, T]$. De (1.21) segue do teorema de Banach-Steinhaus que existe um operador linear limitado $S(t)$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x, \, \forall x \in D(A).$$

Mas como $D(A)$ é denso em X, temos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x, \, \forall x \in X.$$

Etapa 4: Mostrar que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0.

Como para cada $\lambda > w$, $\{S_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo, então para cada $x \in X$ resulta que

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(0)x = x$$

e para cada $x \in X$ e $t, s \geq 0$

$$S(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = S(t)S(s)x.$$

Além disso, $S(t)x$ é o limite uniforme de $S_\lambda(t)x$. Como conseqüência, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0.

Novamente de (1.21) podemos concluir que $\|S(t)\| \leq Me^{t\Upsilon}$, $\forall \Upsilon > w$ e portanto

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}. \tag{1.22}$$

Etapa 5: Mostrar que A é gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Para $\lambda > \lambda(\Upsilon)$ e $x \in D(A)$ temos que

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(t)B_\lambda(x) - S(t)Ax\| &\leq \|S_\lambda(t)B_\lambda(x) - S_\lambda(t)Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)\| \, \|B_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq Me^{t\Upsilon} \, \|B_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\|.\end{aligned}$$

Da etapa 1, para cada $x \in D(A)$, resulta que $B_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$. Da etapa 3, $S_\lambda(t)Ax \to S(t)Ax$ uniformemente em relação a t em todo intervalo limitado. Portanto, quando $\lambda \to \infty$, $S_\lambda(t)B_\lambda x$ converge para $S(t)Ax$ uniformemente em relação a t, em todo intervalo $[0, T]$, para todo $x \in D(A)$.

Logo, passando limite quando $\lambda \to \infty$ em ambos os membros da equação

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(\tau)B_\lambda x d\tau$$

obtemos que

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Axd\tau.$$

Portanto, se B é o gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ vale a igualdade

$$Bx = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)Axd\tau = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Conseqüentemente, $A \subset B$. Por hipótese, $\lambda \in \rho(A)$, $\forall \lambda > w$. Também, como

B é gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, resulta do teorema 1.19 que $\lambda \in \rho(B)$, para cada λ suficientemente grande. Assim, para $\lambda > 0$ suficientemente grande, $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Logo, existem $(\lambda - A)^{-1}$ e $(\lambda - B)^{-1}$ com domínios densos em X. Também, $R(\lambda - B) = D(R(\lambda, B)) = X$ e $R(\lambda - A) = X$. Isto é, $(\lambda - A)D(A) = X$ e $(\lambda - B)D(B) = X$.

Como $A \subset B$, segue que $(\lambda - B)D(A) \supset (\lambda - A)D(A) = X$. Logo, $D(A) \supset (\lambda - B)^{-1}X = D(B)$ e portanto, $A = B$.

Corolário 1.23. *Para que o operador A seja gerador de um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que para $t \geq 0$ se tenha $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, é suficiente que A seja fechado, seu domínio seja denso e exista um número real w, tal que se $\lambda > w$, então $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$.*

Demonstração:
Como $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \leq \dfrac{1}{(\lambda - w)^n}$, então o operador A satisfaz as condições do teorema 1.22 com $M = 1$.

Corolário 1.24. *Para que um operador A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio denso em X, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0$, $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$.*

Este corolário caracteriza gerador de semigrupos de contrações de classe C_0 e sua demonstração é um caso particular do corolário anterior, tomando $w = 0$.

Observação 1.25. *Para facilitar a linguagem, usaremos a expressão $A \in G(M, w)$ para indicar que A é gerador de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0, digamos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.*

Uma outra caracterização dos geradores de semigrupos de contrações lineares de classe C_0 é devida a Lumer e Phillips e será estudada a partir de agora.

Seja X um espaço de Banach, X' o dual de X e $(.)$ a dualidade entre X e X'. Para cada $x \in X$, define-se o conjunto dualidade $J(x) \subseteq X'$ por

$J(x) = \{x' \in X' |\, (x, x') = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$

Pelo teorema de Hahn-Banach (Brezis [5], pg. 03), $J(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$.

Uma aplicação **dualidade** é uma aplicação $j : X \to X'$ tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$. Da definição de j resulta que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.26. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é* **dissipativo** *relativamente a uma aplicação dualidade j, se*

$$\mathbb{R}e\,(Ax, j(x)) \leq 0, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.23}$$

Proposição 1.27. *Se A for dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade, então*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|\,, \quad \forall \lambda > 0 \quad e \quad \forall x \in D(A). \tag{1.24}$$

Demonstração:

Seja $\lambda > 0$. Como A é dissipativo relativamente a uma aplicação dualidade j, então $\mathbb{R}e\,(Ax, j(x)) \leq 0$, $\forall x \in D(A)$.

Da identidade

$$((\lambda - A)x, j(x)) = \lambda\,(x, j(x)) - (Ax, j(x)) = \lambda \|x\|^2 - (Ax, j(x))$$

resulta que

$$\begin{aligned}\lambda \|x\|^2 &\leq \mathbb{R}e\,((\lambda - A)x, j(x)) \leq |((\lambda - A)x, j(x))| \\ &\leq \|(\lambda - A)x\|\,\|j(x)\| = \|(\lambda - A)x\|\,\|x\|, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Portanto, $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in D(A)\ \{0\}$. O caso $x = 0$ é trivial.

Lema 1.28. *Seja A operador dissipativo e $\lambda > 0$. Se A é fechado então $R(\lambda - A)$ é fechado.*

Demonstração:

Vamos tomar uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no domínio de A tal que $(\lambda - A)f_n \to h$.

Da hipótese de A ser dissipativo segue via proposição 1.27 que

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\lambda}\,\|\lambda(f_n - f_m) - A(f_n - f_m)\| = \frac{1}{\lambda}\,\|(\lambda - A)f_n - (\lambda - A)f_m\| \to 0.$$

Assim, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Então, existe $f \in X$ tal que $f_n \to f$ e $Af_n \to \lambda f - h$. Como A é fechado, $f \in D(A)$ e $h = (\lambda - A)f$, isto é, $R(\lambda - A)$ é fechado.

Lema 1.29. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $A : D(A) \subset X \to Y$ linear e contínuo. Assim,*
(a) se $D(A)$ é fechado em X, então A é fechado;
(b) se A é fechado e Y completo, então $D(A)$ é fechado em X.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Kreyszig [4], pg.295.

Lema 1.30. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A : D(A) \subset X \to Y$ operador linear inversível. Então A é fechado se e somente se A^{-1} é fechado.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Kreyszig [4], pg.296.

1.4.2 Teorema de Lumer-Phillips

Teorema 1.31 (Lumer-Phillips). *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se $A \in G(1, 0)$ então*
(i) A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade;
(ii) $R(\lambda - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.
Reciprocamente, se
(iii) $D(A)$ é denso em X;
(iv) A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade;
(v) $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$;
então $A \in G(1, 0)$.

Demonstração:
Primeiro mostraremos a condição (i).

Como por hipótese $A \in G(1, 0)$, então vamos considerar $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado por A. Para cada aplicação dualidade j, temos

$$|(S(t)x, j(x))| \leq \|S(t)x\| \, \|j(x)\| \leq \|x\|^2$$

pois por hipótese $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações.

Assim, para todo $x \in X$ resulta

$$\mathbb{R}e\,(S(t)x - x, j(x)) = \mathbb{R}e\,(S(t)x, j(x)) - \|x\|^2 \leq 0.$$

Dividindo a equação acima por $t > 0$ e passando limite quando $t \to 0$, então

$$\mathbb{R}e\,(Ax, j(x)) \leq 0, \, \forall x \in D(A).$$

Isso mostra que

A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade.

Vamos mostrar agora a condição (ii).

Como $A \in G(1,0)$, então pelo corolário 1.24 resulta que $(0,\infty) \subset \rho(A)$. Assim, para $\lambda > 0$, $D(R(\lambda, A))$ é denso em X, isto é, $X = \overline{D(R(\lambda, A))} = \overline{D((A-\lambda)^{-1})} = \overline{R(\lambda - A)}$. Como A fechado (corolário 1.24), podemos concluir que $R(\lambda - A)$ é fechado, para $\lambda > 0$, pelo lema 1.28. Portanto, $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)} = X$, $\forall \lambda > 0$.

Reciprocamente, supor válidos (iii), (iv) e (v).

Usando a hipótese de que $R(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$ obtemos que $(\lambda_0 - A)$ é sobrejetiva. Segue da proposição 1.27 que $\lambda_0 - A$ é injetivo. Logo, $(\lambda_0 - A)^{-1}$ existe. Novamente da proposição 1.27, para todo $x \in D(A)$

$$\|x\| = \|(\lambda_0 - A)(\lambda_0 - A)^{-1}x\| \geq \lambda_0 \, \|(\lambda_0 - A)^{-1}x\|.$$

Isto é, $(\lambda_0 - A)^{-1}$ é um operador linear, limitado. Logo, $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Além disso, como $(\lambda_0 - A)^{-1} \in B(X)$, $(\lambda_0 - A)^{-1}$ é fechado (lema 1.29, (a)). Então, pelo lema 1.30, $\lambda_0 - A$ é fechado e portanto A é fechado.

Do fato que $\lambda_0 \in \rho(A)$ segue que $\Lambda = \rho(A) \cap (0,\infty)$ é não vazio. E como $\rho(A)$ é aberto, Λ é aberto em $(0,\infty)$.

Vamos provar que Λ é fechado em $(0,\infty)$.

Para isto consideremos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em Λ tal que $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in$

$(0, \infty)$. Do fato que $\lambda_n \in \Lambda$ segue que $\overline{R(\lambda_n - A)} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como A é fechado, então pelo lema 1.28, $R(\lambda_n - A)$ é fechado. Portanto $R(\lambda_n - A) = \overline{R(\lambda_n - A)} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, para $y \in X$, existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $(\lambda_n - A)x_n = y$.

Novamente por (1.24) temos

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n - A)x_n\| = \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C, \quad \text{algum} \quad C > 0 \tag{1.25}$$

e

$$\lambda_n \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| . \tag{1.26}$$

Da definição de x_n resulta que

$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0.$

Somando e subtraindo o termo $\lambda_n x_m$ na igualdade acima, obtemos

$$\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) = (\lambda_m - \lambda_n)x_m. \tag{1.27}$$

De (1.26) e (1.27) segue que

$$\lambda_n \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda_m - \lambda_n)x_m\| \leq |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\| \leq C |\lambda_m - \lambda_n|.$$

Como $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda > 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $D(A)$. Isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Do fato que $(\lambda_n - A)x_n = y$, $x_n \to x$ e $\lambda_n \to \lambda$, podemos concluir que $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Logo, $Ax_n \to \lambda x - y$. Como A é fechado, $Ax = \lambda x - y$, ou seja, $(\lambda - A)x = y$. Da arbitrariedade de y, temos que $R(\lambda - A) = X$. Também, sabendo que $\lambda - A$ é injetivo, resulta que $\lambda \in \rho(A)$.

Portanto, $\lambda \in \Lambda$ e assim, Λ é fechado em $(0, \infty)$. Logo, concluimos que $\Lambda = (0, \infty)$ e conseqüentemente $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

De (1.24) vale a desigualdade

$$\|x\| = \|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\| \geq \lambda \|(\lambda - A)^{-1}x\|, \quad \forall \lambda > 0$$

isto é,

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|, \forall x \in X, \quad \lambda > 0.$$

Do corolário 1.24 temos que $A \in G(1, 0)$, o que prova o teorema.

Capítulo 2

Aplicações

Neste capítulo são estudadas algumas aplicações da teoria de semigrupos. Podem ser encontrados aqui, um estudo referente às equações do calor e da onda, nos casos linear e semilinear.

2.1 Operadores lineares não limitados - Problema de Cauchy

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados que antecedem as aplicações. No que segue, o espaço de Hilbert H será sempre um espaço real.

Definição 2.1. *Seja H espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado. Diz-se que A é* **monótono** *se*

$$(Av, v) \geq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

Assim, devido ao teorema da representação de Riesz, a definição de A operador monótono equivale à definição de $-A$ dissipativo (definição 1.26).

Então, o problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A) \end{cases}$$

que foi a motivação para se estudar semigrupos, será estudado a partir de agora, substituindo-se A por $-A$. Ou seja, será considerado o seguinte problema de valor inicial para um operador monótono A:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.2. *O operador A é dito* **maximal monótono***, se A é monótono e ainda $R(I + A) = H$. Isto é, $\forall f \in H, \exists u \in D(A)$ tal que $(I + A)u = f$.*

Proposição 2.3. *Seja A um operador maximal monótono e H um espaço de Hilbert. Então,*

(a) $D(A)$ é denso em H;

(b) A é um operador fechado.

Demonstração:

(a) Vamos usar um corolário do teorema de Hahn-Banach (Brezis [5], pg. 07), para mostrar que $D(A)$ é denso em H. Para isto, vamos tomar $f \in H$ tal que $(f, v) = 0$, $\forall v \in D(A)$. Como A é maximal monótono, $\exists v_0 \in D(A)$ tal que $v_0 + Av_0 = f$. Assim,

$$0 = (f, v_0) = (v_0 + Av_0, v_0) = \|v_0\|^2 + (Av_0, v_0) \geq \|v_0\|^2,$$

pois A é operador monótono. Logo, $v_0 = 0$ o que implica $f = 0$. Pelo corolário do teorema de Hahn-Banach, $D(A)$ é denso em H.

(b) Para provar esta condição faremos o seguinte: **Afirmação:** para todo $f \in H$, existe **único** $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$. A existência é conseqüência do fato que A é maximal monótono.

Agora, considerando $\overline{u}$ outra solução de $u + Au = f$, obtemos que

$(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0.$

Assim, $A(u - \overline{u}) = -(u - \overline{u})$. Como A é operador monótono, segue que

$(A(u - \overline{u}), u - \overline{u}) = (-(u - \overline{u}), (u - \overline{u})) = -\|u - \overline{u}\|^2 \geq 0.$

Isto implica que

$$\|u-\overline{u}\|^2 = 0.$$

Assim, $u = \overline{u}$. Logo, existe único $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$.

Portanto, $I + A$ é bijetivo, ou seja, existe $(I + A)^{-1}$.

Vamos mostrar que $(I + A)^{-1}$ é contínuo (limitado).

De fato, como A é monótono tem-se que

$$(u + Au, u) = (u, u) + (Au, u) \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Isto é,

$$((I + A)u, u) \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Do fato que $I + A$ é bijetivo segue que

$$(v, (I + A)^{-1}v) \geq \|(I + A)^{-1}v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Da desigualdade de Schwarz conclui-se que

$$\|(I + A)^{-1}v\| \leq \|v\|, \forall v \in H.$$

Isto diz que $(I + A)^{-1}$ é operador limitado (contínuo).

Provaremos agora que A é um operador fechado.

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência no domínio de A tal que $u_n \to u$ e $Au_n \to f$. Vamos mostrar que $u \in D(A)$ e $Au = f$. Claro que

$$u_n + Au_n \to u + f.$$

Agora, sendo $(I + A)u_n = u_n + Au_n$, do fato que $(I + A)^{-1}$ é contínuo, temos

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + f).$$

Conseqüentemente, $u = (I+A)^{-1}(u + f)$, o que implica que $u \in D(A)$ e $u+Au = u+f$. Assim, mostramos que $u \in D(A)$ e $Au = f$. Logo, A é operador fechado. A proposição está provada.

O próximo teorema estabelece uma relação entre gerador de semigupo de contrações de classe C_0 e a função $u \in C^1([0, \infty); H) \cap C([0, \infty); D(A))$ que é solução do problema de valor inicial (2.1).

Teorema 2.4. *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Então, para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Também,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad e \quad \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

Como A é operador maximal monótono, então pela proposição 2.3 temos que A possui domínio denso em H. Assim, $-A$ satisfaz as condições do teorema 1.31 (Lumer-Phillips) e então $-A$ é gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Sejam $u_0 \in D(A)$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações de classe C_0 gerado pelo operador $-A$. Da proposição 1.15 segue que

a) $u(t) = S(t)u_0 \in D(-A) = D(A)$;
b) $\dfrac{du(t)}{dt} = \dfrac{dS(t)}{dt}u_0 = -AS(t)u_0 = -Au(t), t \geq 0$;
c) $u(0) = S(0)u_0 = u_0$, pois $S(0) = I$.

De b) resulta que a função u é diferenciável em $t \geq 0$ e satisfaz o problema de valor inicial (2.2).

Como para $u_0 \in D(A)$ obtemos da proposição 1.15 que $u(t) = S(t)u_0 \in D(A)$ e do fato que $S(t)$ é contínua, então $u \in C([0,\infty); D(A))$.

Também segue da proposição 1.15 que

$$u'(t) = -Au(t) = -AS(t)u_0 = -S(t)Au_0 \in H.$$

Do fato $S(t)Au_0$ é função contínua resulta que $u \in C^1([0,\infty); H)$.

Logo, $u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$ e satisfaz o problema de valor inicial (2.2).

Para mostrar a unicidade de u, vamos considerar v uma outra solução de (2.2).

Como A é operador monótono resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t)\right)$$

$$= -\big(A(u(t) - v(t)), u(t) - v(t)\big) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, para todo $t \geq 0$ a derivada da função $\phi(t) = \|u(t) - v(t)\|^2$ é negativa. Também, $\|u(0) - v(0)\| = 0$. Logo, a função $t \mapsto \|u(t) - v(t)\|^2$ é decrescente e se anula em $t = 0$. Isso implica que

$$\|u(t) - v(t)\| = 0, \quad \forall t \geq 0$$

e portanto, $u(t) = v(t)$ para todo $t \geq 0$. Assim, a unicidade também está provada.

Da definição de semigrupo de contrações de classe C_0 resulta que

$$\|u(t)\| = \|S(t)u_0\| \leq \|u_0\|, \quad \forall t \geq 0$$

e também

$$\|u'(t)\| = \|Au(t)\| = \|AS(t)u_0\| = \|S(t)Au_0\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, para todo $t \geq 0$,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{e} \quad \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|.$$

A prova do teorema está concluída.

Vamos intoduzir os conceitos de operador simétrico e operador autoadjunto que serão utilizados nos próximos teoremas.

Seja H espaço de Hilbert. Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ operador linear com domínio denso em H. Vamos definir o conjunto

$$D(A^*) = \{v \in H : \exists y_v \in H \text{ com } (Au, v) = (u, y_v), \forall u \in D(A)\}$$

sendo que (.) indica o produto interno em H.

Definição 2.5. *O operador $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$ definido por $A^*v = y_v$, $\forall v \in D(A^*)$ é dito* **adjunto** *de A.*

Do fato que $D(A)$ é denso em H tem-se que o operador A^* está bem definido, pois se $(Au, v) = (u, \tilde{y}_v)$, então devemos ter $y_v = \tilde{y}_v$.

Definição 2.6. *Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ operador com $D(A)$ denso em H. O operador A é dito* **simétrico** *se*

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \quad \forall u, v \in D(A).$$

Dizemos que A é **autoadjunto** se $A = A^*$.

Da definição de operador simétrico, podemos concluir que A é simétrico se e somente se $A \subseteq A^*$, isto é, $D(A) \subset D(A^*)$ e $Au = A^*u$, $\forall u \in D(A)$.

Observação 2.7. *Pode-se verificar que se A é um operador maximal monótono então A é simétrico se e somente se A é autoadjunto (Brezis [5], pg.113).*

Definição 2.8. *Seja A um operador maximal monótono e $\lambda > 0$. Então definem-se*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad e \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda),$$

com J_λ o **resolvente** *de A e A_λ a* **regularização de Yosida** *do operador A.*

Vamos enunciar algumas propriedades de J_λ e de A_λ que serão necessárias para a demonstração de um teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy (2.1), mas com $u_0 \in H$.

Propriedades 2.9. *São válidas as seguintes propriedades para J_λ e A_λ.*

a) $\|J_\lambda\|_{B(H)} \leq 1$;

b) Se A é operador monótono então:

b.1) $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \quad \forall v \in H,\ \lambda > 0$;

b.2) $A_\lambda v = J_\lambda(Av), \quad \forall v \in D(A),\ \lambda > 0$;

b.3) $(A_\lambda v, v) \geq 0, \quad \forall v \in H,\ \lambda > 0$;

b.4) $\|A_\lambda v\| \leq \dfrac{1}{\lambda}\|v\|, \quad \forall v \in H,\ \lambda > 0$.

As demonstrações destas propriedades não são difíceis e encontram-se em Brezis [5], pg.102.

Destas propriedades é importante observar que $\{A_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ é uma família de operadores limitados que 'aproximam' A quando $\lambda \to 0$.

Teorema 2.10 (Cauchy, Lipschitz, Picard). *Seja X um espaço de Banach e seja $F : X \to X$ uma aplicação tal que*

$$\|Fu - Fv\| \leq L\,\|u - v\|, \quad \forall u, v \in X \quad e \quad L \geq 0.$$

Então, para cada valor inicial $u_0 \in X$, existe único $u \in C^1([0,\infty), X)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Fu & em\ [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

A demonstração é standard como na teoria de EDO's e usa o teorema do ponto fixo sobre o espaço $X = \{\, u \in C([0,\infty), X) : \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u(t)\| < \infty \,\}$ com $k > 0$ fixo, $k > L$ (Brezis [5], pg.104).

Lema 2.11. *Seja A operador maximal monótono e $\lambda > 0$. Sejam A_λ a regularização de Yosida e $w \in C^1([0,\infty), H)$ uma função que satisfaz*

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = A_\lambda w, \ em\ [0,\infty). \end{cases} \tag{2.3}$$

Então, as funções $t \mapsto \|w(t)\|$ e $t \mapsto \left\|\dfrac{dw}{dt}(t)\right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ são decrescentes em $[0,\infty)$.

A demonstração é simples e é feita tomando produto interno de w com a equação (2.3) e usando propriedades 2.9 para A_λ (Brezis [5], pg.106).

Teorema 2.12. *Seja A um operador maximal monótono e autoadjunto. Então, para cada $u_0 \in H$, existe uma única função*

$$u \in C([0,\infty); H) \cap C^1((0,\infty); H) \cap C((0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, & t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Ainda, para $t > 0$ valem as desigualdades

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad e \quad \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| = \|Au(t)\| \leq \frac{1}{t}\,\|u_0\|.$$

Demonstração:
A prova da unicidade de soluções é análoga à prova feita na demonstração do teorema 2.4.

A existência de soluções será mostrada em etapas.

Parte I: Vamos supor $u_0 \in D(A^2)$, isto é, $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 \in D(A)$.

Etapa 1: Seja $u(t) \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$ a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

dada pelo teorema 2.4, já que A é operador maximal monótono e $u_0 \in D(A)$.

Precisamos comprovar a estimativa

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\|, \quad t > 0. \tag{2.4}$$

Agora, considando o resolvente do operador maximal monótono A como sendo o operador $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ e $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$, com $\lambda > 0$, vamos provar que J_λ e A_λ são autoadjuntos.

Para isto, vamos tomar $\lambda = 1$. Assim, $J_1 = (I + A)^{-1}$. Como $J_1 \in B(H)$, para mostrar que J_1 é autoadjunto, é suficiente mostrar que J_1 é operador simétrico sobre H, isto é,

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v), \quad \forall u, v \in H.$$

Chamando $u_1 = J_1 u$ e $v_1 = J_1 v$ resulta da definição de J_1 que $u_1, v_1 \in D(A)$ e

$$\begin{cases} u_1 + Au_1 = u \\ v_1 + Av_1 = v \end{cases}$$

Da hipótese que A é autoadjunto segue que A é um operador simétrico. Então, $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$.

Substituindo $Au_1 = u - u_1$ e $Av_1 = v - v_1$ na identidade acima, chega-se ao resultado

$$(u_1, v) = (u, v_1)$$

isto é,

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v), \quad \forall u, v \in H.$$

Logo, J_1 é operador autoadjunto. Conseqüentemente, J_λ também é autoadjunto, pois $\lambda > 0$ ($J_\lambda = \lambda^{-1}\left(I + \lambda^{-1}A\right)^{-1} = J_1 = J_1(\widetilde{A})$, com $\widetilde{A} = \lambda^{-1}A$ e $\widetilde{A}$ autoadjunto pois A é autoadjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$).

De forma semelhante, considerando as hipóteses sobre A e a identidade $A_\lambda u = A(J_\lambda u)$, $\forall u \in H$, com $\lambda > 0$, verifica-se que $A_\lambda = A_\lambda^*$, pois é composição de dois operadores autoadjuntos.

Seja agora u_λ a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda = 0, \quad t \geq 0 \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

A existência de u_λ é conseqüência do teorema 2.10 tomando $F = -A_\lambda$ e usando a propriedade b.4 para A_λ.

Tomando o produto interno da equação em (2.5) por u_λ resulta

$$\left(\frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda\right) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0.$$

Integrando em $[0, T]$ a igualdade acima, temos

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\lambda(t)\right\|^2 dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\, dt = 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left\|u_\lambda(T)\right\|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\, dt = \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2. \tag{2.6}$$

Fazendo o produto interno da equação em (2.5) por $t\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ e integrando em $[0, T]$ segue que

$$\int_0^T \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 tdt + \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) tdt = 0. \tag{2.7}$$

Como A_λ é autoadjunto e estamos trabalhando com H espaço de Hilbert real, então vale a identidade abaixo

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = \left(A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda\right) + \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) = 2\left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right).$$

Assim, o segundo termo de (2.7) pode ser reescrito como

$$\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) tdt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\right] tdt.$$

Agora, integrando por partes a identidade acima, obtemos

$$\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) tdt = \frac{1}{2}\left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right) T - \frac{1}{2}\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\right) dt \tag{2.8}$$

Como u_λ verifica as hipóteses do lema 2.11, então sabemos que $t \mapsto \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|$ é decrescente e por isso, vale o resultado

$$\int_0^T \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 tdt \geq \int_0^T \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 tdt = \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 \int_0^T tdt = \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 \frac{T^2}{2} \tag{2.9}$$

Substituindo (2.8) em (2.7) obtemos

$$\int_0^T \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 dt = \frac{-1}{2}\left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right) T + \frac{1}{2}\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\right) dt.$$

Isolando o segundo termo de (2.6) e substituindo na equação acima, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 dt &= \frac{-1}{2}\left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right) T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|u_\lambda(T)\right\|^2\right) \\ &= \frac{-1}{2}\left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right) T + \frac{1}{4}\left\|u_0\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|u_\lambda(T)\right\|^2.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Agora, multiplicando a equação (2.10) pelo escalar 2 e usando a estimativa (2.9) resulta

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 T^2 + \left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right) T + \frac{1}{2}\left\|u_\lambda(T)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2.$$

Em particular, como A_λ é operador positivo (propriedade 2.9 b.3) segue que

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 T^2 \leq \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2.$$

Assim vale que,

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\| \leq \frac{1}{2T}\left\|u_0\right\|^2 \leq \frac{1}{T}\left\|u_0\right\|^2, \text{ para cada } T > 0.$$

Etapa 2: Vamos mostrar que para $t \in [0,T]$, $u_\lambda(t)$ converge uniformemente para $u(t)$ quando $\lambda \to 0$.

Sejam $\lambda, \mu > 0$. Temos então

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0.$$

Fazendo o produto escalar entre $u_\lambda - u_\mu$ e a equação acima resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\lambda - u_\mu\right\|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0. \tag{2.11}$$

Desenvolvendo o segundo termo da equação acima, encontramos a inequação

$$\begin{aligned}(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu)\\ &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)\\ &\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu).\end{aligned}$$

Agora, substituindo em (2.11) a estimativa do teorema 2.4 $\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|Au_0\|$ e o produto interno acima, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\lambda - u_\mu\right\|^2 &\leq -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right)\\ &\leq \lambda\left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\|^2 + \mu\left\|A_\mu u_\mu(t)\right\|^2 + \lambda\left\|A_\lambda u_\lambda\right\|\left\|A_\mu u_\mu\right\| + \mu\left\|A_\lambda u_\lambda\right\|\left\|A_\mu u_\mu\right\|\\ &= 2(\lambda+\mu)\left\|Au_0\right\|^2.\end{aligned}$$

Integrando em $(0,t)$ resulta

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\,\|Au_0\|. \tag{2.12}$$

A estimativa (2.12) diz que para cada $t \geq 0$, $(u_\lambda(t))$ é uma seqüência de Cauchy. Portanto, existe uma função $w(t)$ tal que $u_\lambda(t) \to w(t)$, quando $\lambda \to 0$, para cada $t \in [0,T]$. A convergência é uniforme em $[0,T]$.

Passando o limite em (2.12) quando $\mu \to 0$ obtemos

$$\|u_\lambda(t) - w(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda t}\,\|Au_0\|.$$

Por conseqüência, $w \in C([0,\infty), H)$. Pela unicidade e o fato que para $w \in D(A)$, $A_\lambda w \to Aw$, quando $\lambda \to 0$, resulta que $w(t) = u(t)$.

Etapa 3: Mostrar que $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quando $\lambda \to 0$, para $t \geq 0$ e converge uniformemente em $t \in [0, T]$, para então concluirmos a estimativa (2.4).

Considerando $v_\lambda = \dfrac{du_\lambda}{dt}$, temos que $\dfrac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.

De modo análogo à etapa 2 obtemos a estimativa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\right\|^2 \leq \left(\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|\right)\left(\lambda \|A_\lambda v_\lambda\| + \mu \|A_\mu v_\mu\|\right). \tag{2.13}$$

Do lema 2.11 segue que

$\|A_\lambda v_\lambda\| \leq \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A_\lambda A_\lambda u_0\|$,

o mesmo valendo para $A_\mu v_\mu$.

Como $Au_0 \in D(A)$ então das propriedades de A_λ e J_λ temos que

$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$

e também,

$\|A_\lambda A_\lambda u_0\| \leq \|A^2 u_0\| \quad$ e $\quad \|A_\mu A_\mu u_0\| \leq \|A^2 u_0\|$.

Das estimativas acima, pode-se concluir que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\right\|^2 \leq 2(\lambda + \mu)\left\|A^2 u_0\right\|^2.$$

Integrando em $[0, t]$ como na etapa anterior, concluimos que para $t \geq 0$, $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge para alguma função quando $\lambda \to 0$, e para $t \in [0, T]$, a convergência é uniforme.

Parte II: Seja $u_0 \in H$.

Seja (u_{0n}) uma seqüência em $D(A^2)$ tal que $u_{0n} \to u_0$, pois $D(A)$ é denso em H. Pode-se notar que $D(A^2)$ é denso em H pois $D(A^2)$ é denso em $D(A)$, na norma do gráfico.

Vamos considerar u_n a solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0, \quad [0, \infty) \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Do teorema (2.4) temos que

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\|, \quad \forall m, n \text{ e } t \geq 0.$$

Da etapa 1 temos que

$$\left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right\| \leq \frac{1}{t} \|u_{0n} - u_{0m}\|, \quad \forall m, n \text{ e } t > 0.$$

Estas desigualdades dizem que $u_n(t)$ converge para $u(t)$ uniformemente em $[0, \infty)$ e que $\frac{du_n}{dt}$ converge para $\frac{du}{dt}$ uniformemente em $[\delta, \infty)$, com $\delta > 0$, por causa da unicidade de soluções. Assim,

$$u \in C([0, \infty), H) \cap C^1((0, \infty), H).$$

Também, pode-se concluir que $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e $u(t)$ satisfaz a equação $\frac{du}{dt} + Au = 0$ em $(0, \infty)$, usando o fato de que A é operador maximal monótono e portanto, fechado.

Assim, $u \in C([0, \infty), H) \cap C^1((0, \infty), H) \cap C((0, \infty), D(A))$.

As estimativas afirmadas no teorema são conseqüências da passagem ao limite com $\lambda \to 0$, das estimativas análogas para $u_\lambda(t)$ e dados em $D(A^2)$ e em seguida por passagem ao limite em $u_n(t)$, solução com dado $u_{0n} \in D(A^2)$.

Logo, o teorema está provado.

2.2 Espaços de Sobolev

Aqui, apresentamos alguns resultados da teoria dos espaços de Sobolev que são necessários neste trabalho, como as fórmulas de Green, a desigualdade de Poincaré, o teorema de Lax-Milgram e um teorema de regularidade elíptica.

Definição 2.13. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O Espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

sendo D^α a derivada no sentido distribucional.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A notação $H^m(\Omega)$ é usada para representar o espaço $W^{m,p}(\Omega)$, quando $p = 2$. Este espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 2.14. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Analogamente, $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.*

Resultados da teoria dos espaços de Sobolev podem ser encontrados em [9], [11] ou [13].

Proposição 2.15 (Identidades de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^2. Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ funções reais. Então valem as identidades*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\Gamma \tag{2.15}$$

com η a normal unitária externa e $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada direcional na direção η.

Observação 2.16 (Fórmulas de Green generalizadas). *Em particular, para as funções $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ que se anulam na fronteira de Ω, (2.14) e (2.15) equivalem às equações*

$$\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla v \nabla u dx \tag{2.16}$$

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega u\Delta v dx. \tag{2.17}$$

A equação (2.14) vale para $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, enquanto que (2.15) vale para $u, v \in H^2(\Omega)$. Pelo teorema do Traço, (2.16) vale para $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ e (2.17) vale para $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Corolário 2.17 (Desigualdade de Poincaré). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma constante C, dependente de Ω e p, tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o traço de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ anular sobre apenas uma parte de Γ. Também é válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$, mas com Ω limitado apenas em alguma direção.

A norma de Sobolev $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. Isto é, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, para $u \in H_0^1(\Omega)$. Isso é conseqüência imediata da desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.18 (Lax-Milgram). *Seja H espaço de Hilbert e $a(u,v)$ forma bilinear contínua e coerciva sobre H. Seja $f \in H'$. Então, existe único $u \in H$ tal que $a(u,v) = (f,v)$, $\forall v \in H$.*

A demonstração pode ser encontrada em Brezis [5], pg. 84.

Teorema 2.19 (Regularidade Elíptica). *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in D'(\Omega)$, sendo $D'(\Omega)$ o espaço das distribuições. Seja u solução de $Lu = f$, no sentido distribucional, com $f \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

Este teorema é bem conhecido e sua demonstração pode ser vista na referência [12].

2.3 Equações lineares

Vamos estudar um pouco o caso geral das equações lineares não homogêneas. Para isto, consideremos o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

onde A gera um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, $f : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma função contínua, X é um espaço de Banach e $u_0 \in X$.

Definição 2.20. *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma Solução Forte do problema de valor inicial acima, se u for contínua para todo $t \geq 0$ e continuamente diferenciável para $t > 0$. Mais, para todo $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ e satisfaz o problema de valor inicial (2.18).*

Seja u uma solução forte de (2.18) e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A. Então, a função $g(s) = S(t-s)u(s)$ é diferenciável para $0 \leq s \leq t$ e por (2.18), temos que

$$\begin{aligned}\frac{dg(s)}{ds} &= AS(t-s)u(s) + S(t-s)\frac{du(s)}{ds}\\ &= AS(t-s)u(s) + S(t-s)\left(-Au(s) + f(s)\right)\\ &= AS(t-s)u(s) - AS(t-s)u(s) + S(t-s)f(s)\\ &= S(t-s)f(s).\end{aligned}$$

Como f e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ são funções contínuas, podemos integrar de 0 a t. Assim,

$$\int_0^t \frac{dg(s)}{ds}ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Agora, usando a definição de $g(s)$ concluimos que

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Esta é uma condição necessária para que u seja solução forte do problema de valor inicial (2.18).

2.3.1 Equação do calor

A equação do calor é o exemplo mais simples de uma equação parabólica. Esta equação representa a distribuição da temperatura u numa determinada região Ω, no instante t.

Vamos considerar Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ, $Q = \Omega \times (0, \infty)$ e $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$.

Estudar a equação do calor com condição de fronteira de Dirichlet é estudar o seguinte problema de valor inicial: encontrar $u(x,t)$ função real definida em $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ que satisfaça

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{em } Q \tag{2.19}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \tag{2.20}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega \tag{2.21}$$

sendo Δ o operador de Laplace e u_0 uma função dada no domínio de Δ.

A equação (2.19) é chamada Equação do Calor. A equação (2.20) é a condição de Dirichlet e ela exige que a temperatura se mantenha nula na fronteira de Ω. Já a equação (2.21) é a condição inicial ou também conhecida como dado inicial de Cauchy.

Para a resolução do problema (2.19) (2.20) (2.21), vamos considerar Ω uma região limitada de classe C^∞.

Observação 2.21. *A solução de (2.19), (2.20), (2.21) é analítica em t (para $t > 0$). Logo, na realidade, é muito melhor do que no teorema 2.22.*

Teorema 2.22 (Existência e Unicidade). *Seja $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe única função $u(t)$ que verifica (2.19) (2.20) (2.21) e*

$$u \in C\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.22}$$

$$u \in C^1\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right). \tag{2.23}$$

Também vale a identidade

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad t > 0. \tag{2.24}$$

Demonstração:
Vamos mostrar que para o operador $A = -\Delta$ definido no espaço de Hilbert $H = L^2(\Omega)$, valem as hipóteses do teorema 1.31(Lumer-Phillips) e portanto, A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Vamos começar mostrando que A é maximal monótono e autoadjunto.

Consideremos o operador não limitado $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Podemos notar que $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset L^2(\Omega)$. Logo, $D(A)$ é denso em $H = L^2(\Omega)$.

1) Mostrar que A é operador monótono. Tomando $u \in D(A)$, então da observação 2.16 tem-se que

$$(Au, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

2) Mostrar que A é maximal monótono. Basta verificar que $R(I + A) = H = L^2(\Omega)$, isto é, para todo $f \in L^2(\Omega)$, existe único $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $u - \Delta u = f$. Para isto, vamos definir a forma bilinear $a(u, v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + (u, v)$$

onde $(.,.)$ indica o produto interno em $L^2(\Omega)$. Vamos mostrar que $a(u, v)$ é coerciva e contínua.

a) Coercividade de $a(u, v)$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$a(u, u) = (\nabla u, \nabla u) + (u, u) = \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \geq \|\nabla u\|^2 = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Assim, $a(u, u) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ e com $C = 1$. Logo, $a(u, v)$ é coerciva.

b) Continuidade de $a(u, v)$. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então, usando que $\|u\| \leq C \|\nabla u\|$, segue que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= |(\nabla u, \nabla v) + (u, v)| \leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| + \|u\| \|v\| \\ &\leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| + C \|\nabla u\| C \|\nabla v\| = (1 + C^2) \|\nabla u\| \|\nabla v\| \\ &= C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos $|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Isto mostra a continuidade de $a(u, v)$.

c) Dado $f \in L^2(\Omega)$, vamos mostrar que o funcional $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $v \mapsto L(v) = (f, v)$ é linear e contínuo sobre $H_0^1(\Omega)$.

i) L é linear. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Então, por Holder, $uf \in L^1(\Omega)$ e $vf \in L^1(\Omega)$. Assim, podemos calcular

$$L(u+v) = (f, u+v) = \int_\Omega f(u+v) = \int_\Omega fu + \int_\Omega fv$$

$$= (f,u) + (f,v) = L(u) + L(v).$$

Isto implica a linearidade do funcional L.

ii) L é contínuo. Sejam $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Por Holder segue que

$$|L(v)| = |(f,v)| \leq \int_\Omega |fv| \leq \|f\| \, \|v\|.$$

De i) e ii) concluimos que $L \in (H_0^1(\Omega))'$.

Agora, aplicando o teorema 2.18(Lax-Milgram) segue que existe único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = (f,v)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Isto é,

$$(\nabla u, \nabla v) + (u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$(\nabla u, \nabla \phi) + (u,\phi) = (f,\phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

onde $D(\Omega)$ é o espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$. Usando a definição de derivada distribucional (Kesavan [13], pg. 10) temos que

$$(-\Delta u, \phi) + (u,\phi) = (f,\phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Isto diz que

$$-\Delta u + u = f$$

no sentido distribucional, ou seja, no sentido de $D'(\Omega)$.

Como $f \in L^2(\Omega)$, usando o teorema 2.19 (Regularidade Elíptica) para o operador elíptico de ordem 2, $I - \Delta$, resulta que $u \in H^2(\Omega)$. Mas como $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(A)$.

Portanto, para o espaço de Hilbert $H = L^2(\Omega)$, existe único $u \in D(A)$ tal que $(I - \Delta)u = f$. Logo, A é operador maximal monótono.

3) Mostrar que A é autoadjunto. Basta verificar que A é simétrico, pois em Brezis [5], pg.113 encontramos o resultado de que se A é um operador maximal monótono e simétrico, então A é autoadjunto.

Sejam $u, v \in D(A)$. Então, pela observação 2.16 segue que

$$(Au, v) = \int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \quad \text{e} \quad (u, Av) = \int_\Omega (u(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Logo, A é simétrico e conseqüentemente, autoadjunto.

4) Vamos mostrar o item (2.22) e (2.23). Como A é maximal monótono autoadjunto e por hipótese $u_0 \in L^2(\Omega)$, então pelo teorema 2.12 segue que

$$u \in C\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left((0, \infty); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0, \infty); D(A)\right)$$

e u satisfaz as equações (2.19) (2.20) (2.21).

5) Vamos provar a identidade (2.24). Multiplicando (2.19) por u e integrando em $\Omega \times (0, t)$ resulta

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial u(s)}{\partial s} u(s) ds dz - \int_0^t \int_\Omega \Delta u(s) u(s) ds dz = 0.$$

Observando que $\dfrac{\partial u}{\partial s} u = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial u^2}{\partial s}$ e usando a primeira fórmula de Green da observação 2.16 obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial u^2(s)}{\partial s} ds dz + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 \, ds dz = 0, \quad \forall t > 0.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds = 0, \quad \forall t > 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds = \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t > 0.$$

Considerações sobre equação do calor: Do teorema 2.22 acima, para cada $t > 0$, mostramos que existe única $u(t) \in D(A) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ tal que $u_t - \Delta u = 0$.

Então, da equação (2.24) podemos concluir que

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = C, \quad \forall t \geq 0$$

sendo C uma constante. Isso nos diz que $u \in L^\infty(0, \infty, L^2(\Omega))$.

Também de (2.24) resulta que

$$\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t > 0$$

isto é,

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq C.$$

Portanto, $u \in L^2(0,\infty, H^1_0(\Omega))$.

2.3.2 Equação da onda

Será estudado agora, via método de semigrupos, um exemplo de equação hiperbólica denominada equação da onda. Vamos considerar as regiões Ω, Q, Γ e Σ como definidas na seção da equação do calor.

Seja $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{em } Q \tag{2.25}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \tag{2.26}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega \tag{2.28}$$

com Δ operador de Laplace e u_0, v_0 funções dadas que pertencem a adequados espaços de Sobolev.

A equação (2.25) é chamada Equação da Onda. A equação (2.26) é a condição de fronteira de Dirichlet e (2.27) (2.28) são as condições iniciais.

Vamos considerar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado de classe C^∞ com fronteira Γ.

Teorema 2.23 (Existência e Unicidade). *Supor $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $v_0 \in H^1_0(\Omega)$. Então existe única solução do problema de valor inicial (2.25) (2.26) (2.27) (2.28) tal que*

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H^1_0(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right). \tag{2.29}$$

Também vale a expressão

$$\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.30}$$

Observação 2.24. *Na realidade, com essas condições em u_0, v_0, a solução u é definida em todo $\mathbb{R}$. Isto é, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é na realidade um grupo (unitário) (teorema de Stone).*

Demonstração:

Vamos definir o espaço de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ munido do produto escalar

$$(U_1, U_2)_H = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx$$

sendo $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Tomando $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, podemos reescrever a equação (2.25) na forma de um sistema de primeira ordem dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{em } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{em } Q. \end{cases} \tag{2.31}$$

Escrevendo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e considerando A o operador definido por

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

então o sistema (2.31) pode ser representado pela equação

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0. \tag{2.33}$$

Vamos considerar o operador não limitado $A : D(A) \subset H \to H$ dado por (2.32) com domínio

$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Notamos que $D(A)$ é denso em $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Agora vamos mostrar que $A + I$ é operador maximal monótono em H, para então, aplicarmos o teorema 2.4.

i) $A + I$ é operador monótono. Tomando $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ e usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ temos da definição de produto interno em H que

$$
\begin{aligned}
((A+I)U,U) &= (AU,U)_H + \|U\|_H^2 \\
&= -\int \nabla v \nabla u - \int uv + \int (-\Delta u)v + \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int v^2 \\
&= -\int uv + \int u^2 + \int v^2 + \int |\nabla u|^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

onde foi usada a primeira fórmula de Green.

ii) $A+I$ é maximal monótono. Basta mostrar que para todo $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, existe único $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que $(A+2I)U = F$. Das definições de A, U e F, a equação $(A+2I)U = F$ pode ser transformada no sistema

$$
\begin{cases} -v + 2u = f & \text{em } \Omega \\ -\Delta u + 2v = g & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.34}
$$

Precisamos mostrar que o sistema (2.34) tem solução (u,v) tal que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Resolvendo o sistema (2.34), isto é, tomando $v = 2u - f$ resulta que u deve satisfazer

$$
-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{2.35}
$$

Vamos mostrar agora que (2.35) admite única solução $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para isto, vamos definir a forma bilinear $a(u,v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$
a(u,v) = (\nabla u, \nabla v) + 4\,(u,v)
$$

onde $(.,.)$ indica o produto interno em $L^2(\Omega)$. Vamos mostrar que $a(u,v)$ é coerciva e contínua.

a) Coercividade de $a(u,v)$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$
a(u,u) = (\nabla u, \nabla u) + 4\,(u,u) = \|\nabla u\|^2 + 4\,\|u\|^2 \geq \|\nabla u\|^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
$$

Assim, $a(u,v)$ é coerciva.

b) Continuidade de $a(u,v)$. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então, usando que $\|u\| \leq C\,\|\nabla u\|$ (desigualdade de Hölder), segue que

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |(\nabla u, \nabla v) + 4(u,v)| \leq \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| + 4 \, \|u\| \, \|v\| \\
&\leq \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| + K \, \|\nabla u\| \, K \, \|\nabla v\| = (1+K^2) \, \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| \\
&= K_1 \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \, \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Assim, para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ temos que $|a(u,v)| \leq K_1 \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \, \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.

c) Dado $f \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$, vamos mostrar que o funcional $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $v \mapsto L(v) = (2f+g, v)$ é linear e contínuo sobre $H_0^1(\Omega)$.

1) L é linear. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Como $f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$, resulta que $2f + g \in L^2(\Omega)$. Então podemos calcular

$$
\begin{aligned}
L(u+v) = (2f+g, u+v) &= \int_\Omega (2f+g)(u+v) = \int_\Omega (2f+g)u + \int_\Omega (2f+g)v \\
&= (2f+g, u) + (2f+g, v) = L(u) + L(v).
\end{aligned}
$$

Isto implica a linearidade de L.

2) L é contínuo. Tomando $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e usando Holder segue que

$$
|L(v)| = |(2f+g, v)| \leq \int_\Omega |(2f+g)v| \leq \|2f+g\| \, \|v\|.
$$

De 1) e 2) concluimos que $L \in (H_0^1(\Omega))'$.

Agora, pelo teorema 2.18 (Lax-Milgran), existe único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = L(v) = (2f+g, v)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Isto é,

$$
(\nabla u, \nabla v) + 4(u,v) = (2f+g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).
$$

Em particular, temos

$$
(\nabla u, \nabla \phi) + 4(u, \phi) = (2f+g, \phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega)
$$

sendo $D(\Omega)$ o espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$.

Isto diz que

$$
-\Delta u + 4u = 2f + g
$$

no sentido de $D'(\Omega)$.

Também para $f \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$, aplicando o teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico $4I - \Delta$ resulta que $u \in H^2(\Omega)$. Mas como $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(A)$.

Portanto, para o espaço de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe único $u \in D(A)$ tal que $(4I - \Delta)u = 2f + g$. Agora, tomando $v = 2u - f$, tem-se que $v \in H_0^1(\Omega)$.

Assim, o par $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ é solução da equação $(A + 2I)U = F$. Logo, $A + I$ é maximal monótono.

Sob as condições acima de $A + I$ e H podemos aplicar o teorema 2.4. Assim, para $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

tem única solução $U = U(t)$ e esta solução é tal que

$$U \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A)). \tag{2.36}$$

Vamos interpretar (2.36) para obter (2.29).

Resulta do sistema (2.31) que $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t$. Então (2.36) pode ser reescrito como

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C^1\big([0,\infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\big) \cap C\big([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\big).$$

Isto diz que

$u \in C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega))$;

$u_t \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$, ou seja, $u \in C^2([0,\infty); L^2(\Omega))$;

$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$;

$u_t \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$, ou seja, $u \in C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega))$.

Portanto, (2.29) está satisfeito.

Para concluir a demonstração falta mostrar (2.30). Vamos usar as identidades

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \tag{2.37}$$

e

$$\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_\Omega \nabla u \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{2.38}$$

onde $u = u(t)$ é a solução satisfazendo (2.29).
Então, multiplicando (2.25) por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, integrando em Ω e usando (2.37) e (2.38) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right|^2 dzdx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dzdx = 0 \quad \forall t > 0.$$

Integrando em t no intervalo $(0, t)$ segue que

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(0)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Isto é,

$$\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t > 0.$$

2.4 Equações semilineares

2.4.1 Problema abstrato

Nesta seção, X é um espaço de Banach com norma $\|.\|$ e A é um operador linear fechado não limitado com domínio denso em X e para $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ é bijeção de $D(A)$ em X tal que $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{B(X)} \leq 1$.

Com essas condições, o corolário 1.24 do teorema de Hille-Yosida diz que A gera um semigrupo de contrações de classe C_0, já que $\lambda^{-1}R(\lambda^{-1}, -A) = (I + \lambda A)^{-1}$ e $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Agora, vamos considerar o problema de valor inicial abstrato dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.39}$$

sendo F uma aplicação não linear e $u_0 \in X$ um valor inicial dado.

O problema (2.39) será estudado primeiramente para o caso em que F é uma aplicação de X em X globalmente Lipschitz contínua. Neste caso, veremos que (2.39) tem solução definida em todo $t \geq 0$ (solução global fraca).

Posteriormente, consideraremos F uma aplicação Lipschitz contínua em conjuntos limitados (localmente Lipschitz) e mostraremos que (2.39) tem solução fraca definida num intervalo maximal $[0, T_m)$ e se $T_m < \infty$, então $\lim\limits_{t \nearrow T_m} \|u(t)\| = +\infty$.

Vamos precisar dos seguintes resultados:

Teorema 2.25 (Ponto Fixo de Banach). *Seja (X, d) espaço métrico completo e $P : X \to X$ uma aplicação tal que*

$$d(P(u), P(v)) \leq Kd(u, v),\ \forall u, v \in X,$$

para algum K fixado tal que $0 < K < 1$.

Então P tem único ponto fixo, isto é, existe único $u \in X$ tal que $Pu = u$.

Este teorema de ponto fixo é bem conhecido e por isso sua demonstração aqui não se faz necessária.

Proposição 2.26 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $g(t) \geq 0$ e $h(t) \geq 0$ funções reais tais que*

$$g(t) \leq C + \int_0^t g(s)h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

sendo $C \geq 0$ uma constante e $h(t)$ satisfaz $\int_0^T h(t)dt < \infty$. Então,

$$g(t) \leq Cexp\left[\int_0^T h(t)dt\right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração:
Vamos considerar a função real $\phi(t) = C + \int_0^t g(s)h(s)ds$, com $t \in [0, T]$. Assim,

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = g(t)h(t) \leq \phi(t)h(t)$$

isto é

$$\frac{d\phi(t)}{dt} - \phi(t)h(t) \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Observando que

$$exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]\left(\frac{d\phi(t)}{dt}-\phi(t)h(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]\right)\leq 0$$

e integrando essa desigualdade de 0 a t resulta

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\left(\phi(r)exp\left[-\int_0^r h(s)ds\right]\right)dr=\phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]-\phi(0)\leq 0.$$

Logo,

$$\phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]\leq\phi(0)=C$$

e portanto

$$\phi(t)\leq Cexp\left[\int_0^t h(s)ds\right]\leq Cexp\left[\int_0^T h(t)dt\right],\quad t\in[0,T].$$

Definição 2.27. *Seja (X,d) um espaço métrico. Uma aplicação $F:X\rightarrow X$ é dita globalmente Lipschitz contínua se existe uma constante positiva L tal que*

$$d(F(v),F(u))\leq Ld(v,u),\quad \forall u,v\in X.$$

Agora temos o seguinte resultado:

Teorema 2.28. *Seja X espaço de Banach. Seja F globalmente Lipschitz contínua e seja $u_0\in X$. Então, existe uma única solução global fraca $u=u(t)$ de (2.39) no sentido que $u\in C([0,\infty),X)$ e*

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \tag{2.40}$$

para todo $t\geq 0$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de constrações gerado pelo operador A.

Mais, existe a dependência contínua de u em relação a u_0, isto é,

$$\|v(t)-u(t)\|\leq e^{Lt}\|v_0-u_0\|$$

para todo $t\geq 0$, com v a solução da equação (2.40) com valor inicial v_0.

Demonstração:

Vamos provar a unicidade de soluções.

Sejam u e v soluções de (2.40). Como F é globalmente Lipschitz e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações, então

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\| \, ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = 0$, $h(t) = L$ e $g(t) = \|u(t) - v(t)\|$ segue que $u = v$.

Vamos mostrar a existência de soluções.

Para isto, consideramos o espaço

$$E = \{u \in C\left([0, \infty), X\right); \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| < \infty\},$$

com $k > 0$ constante a ser escolhida convenientemente. O espaço E com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|$$

é um espaço de Banach.

Agora, vamos definir a aplicação $\phi : E \to C\left([0, \infty), X\right)$ dada por

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad u \in E \text{ e } t \geq 0.$$

Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações, facilmente vê-se que $\phi(u) \in C\left([0, \infty), X\right)$, para todo $u \in E$. Assim, ϕ está bem definida.

Agora vamos mostrar que $\phi(u) \in E$, para cada $u \in E$.

Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações, então

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| \, ds.$$

Como F é Lipschitz contínua com constante $L > 0$, então

$\|F(u(s))\| \leq L \|u(s)\| + \|F(0)\|$.

Assim,

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + t\,\|F(0)\| + L\,\|u\|_E \int_0^t e^{ks}ds = \|u_0\| + t\,\|F(0)\| + L\frac{e^{kt}-1}{k}\,\|u\|_E.$$

Portanto, para $u \in E$ resulta que $\phi(u) \in E$ e

$$\|\phi(u)\|_E \leq \|u_0\| + \frac{1}{ke}\,\|F(0)\| + \frac{L}{k}\,\|u\|_E,$$

pois $te^{-kt} \leq \dfrac{1}{ke}$, $\forall t \geq 0$.

Agora vamos mostrar que ϕ é contração sobre E se $k > L$.

Da definição de ϕ, do fato que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações e F é Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &\leq L\int_0^t \|u(s)-v(s)\|\,ds \\
&\leq L\,\|u-v\|_E \int_0^t e^{ks}ds = L\frac{e^{kt}-1}{k}\,\|u-v\|_E \\
&\leq \frac{Le^{kt}}{k}\,\|u-v\|_E, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_E \leq \frac{L}{k}\,\|u-v\|_E.$$

Assim, escolhendo algum $k > L$, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe única função $u \in E$ tal que $\phi(u) = u$. Assim, u é solução da equação integral (2.40) e $u \in C\left([0,\infty), X\right)$. Isto é, u é solução fraca do problema (2.39).

Para concluir a prova, vamos mostrar a dependência contínua.

Considerando u e v soluções de (2.40) associadas aos valores iniciais u_0 e v_0 respectivamente, obtemos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| + L\int_0^t \|u(s)-v(s)\|\,ds.$$

Da desigualdade de Gronwall segue que $\|u(t)-v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\|\,e^{Lt}$, o que conclui a prova do teorema.

Lema 2.29. *Seja $T > 0$, $x \in X$, $f \in L^1\left((0,T), X\right)$ e seja $u \in C\left([0,T], X\right)$ dada por $u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$, para $t \in [0,T]$, onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador A descrito no início desta seção. Então, para todo $0 \leq s < T$ temos*

$$u(t+s) = S(t)u(s) + \int_0^t S(t-\sigma)f(s+\sigma)d\sigma, \quad \forall t \in [0, T-s]. \tag{2.41}$$

Equivalentemente,

$$u(t) = S(t-s)u(s) + \int_s^t S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma, \quad \forall t \in [s,T].$$

Demonstração:

A equivalência é demonstrada mediante mudança de variável. A prova de (2.41) segue da unicidade. Maiores detalhes podem ser encontrados em Cazenave [6], pg. 96.

Definição 2.30. *Seja X espaço normado. Uma aplicação $F : X \to X$ é dita Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, se para cada constante positiva M existe um constante positiva L_M tal que*

$$\|F(v) - F(u)\| \leq L_M \|v-u\|$$

para todo $u, v \in X$ tal que $\|u\| \leq M$ e $\|v\| \leq M$.

Para a aplicação F definida acima, isto é, F uma aplicação Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, são válidos os resultados abaixo.

Teorema 2.31. *Para cada $u_0 \in X$, existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca u de (2.39) definida em $[0,T]$. Isto é, $u \in C([0,T], X)$ e (2.40) é válida para todo $t \in [0,T]$.*

Demonstração:

Seja $E = C([0,T], X)$ com a norma usual e $T > 0$ a ser escolhido convenientemente. Vamos definir o conjunto

$$K = \{u \in E; \|u(t)\| \leq \|u_0\| + 1 \text{ para todo } t \in [0,T]\}.$$

Assim, K é um subconjunto fechado do espaço de Banach E.

Agora, para $u \in K$, podemos facilmente concluir que $\phi(u) \in E$ sendo $\phi(u)$ dada por

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad t \in [0,T]$$

com $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado pelo operador A definido no início desta seção.

Também da definição 2.30 temos que

$$\|\phi(v) - \phi(u)\|_E \leq LT \|v - u\|_E \,, \tag{2.42}$$

para todo $u, v \in K$, sendo $L = L_M$ com $M = \|u_0\| + 1$. De fato, sendo $u, v \in K$, então

$$\begin{aligned}
\|\phi(v) - \phi(u)\|_E &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds \right\| \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| \, ds \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t L_M \|u(s) - v(s)\| \, ds \\
&\leq \int_0^T L_M \|u(s) - v(s)\| \, ds \leq T L_M \|u - v\|_E,
\end{aligned}$$

onde temos usado o fato que F é localmente Lipschitz com $M = \|u_0\| + 1$.

Vamos provar que $\phi(K) \subseteq K$ se $T\Big(\ \|F(0)\| + L\,(\|u_0\| + 1) \ \Big) \leq 1$.

Com efeito,

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| \, ds, \quad t \in [0, T].$$

Usando o fato de que se $u \in K$, a desigualdade abaixo é válida

$$\|F(u(s)) - F(0)\| \leq L \|u(s)\| \leq L\,(\|u_0\| + 1),$$

para $s \in [0, T]$, $L = L_M$ e $M = \|u_0\| + 1$. Então obtemos

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + T\Big(\ \|F(0)\| + L\,(\|u_0\| + 1) \ \Big), \quad t \in [0, T].$$

Assim, tomando T suficientemente pequeno tal que

$$T\Big(\ \|F(0)\| + L\,(\|u_0\| + 1) \ \Big) < 1 \tag{2.43}$$

resulta que $\phi(u) \in K$. Assim, com a condição (2.43) sobre T, ϕ atua de K em K. A condição (2.43) sobre T implica que $TL < 1$. Então, a estimativa (2.42) diz que $\phi : K \to K$ é contração. Portanto ϕ tem um único ponto fixo $u \in K$. Este u é uma solução fraca do problema (2.39).

A unicidade de u segue da definição 2.30 e da desigualdade de Gronwall, como na demonstração do teorema 2.28.

Observação 2.32. *O teorema 2.31 diz que existe uma solução fraca u do problema (2.39) em $[0, T]$, com valor inicial u_0. Agora, seja $T_1 = T$. Conforme demonstração do teorema 2.31, temos uma solução fraca v de (2.39) com valor inicial $u(T_1)$ e definida em $[0, \delta_1]$ tal que*

$$\delta_1 \left(\|F(0)\| + C_1 \left(\|u(T_1)\| + 1\right)\right) < 1,$$

sendo $C_1 = L_M$ com L_M uma constante que depende de M e $M = \|u(T_1)\| + 1$.

Do lema 2.29 obtém-se uma solução fraca v de (2.39) definida em $[0, T_2]$ com $T_2 = T_1 + \delta_1$. De fato, a função dada por

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & se\ t \in [0, T_1] \\ v(t - T_1), & se\ t \in [T_1, T_1 + \delta_1] \end{cases}$$

é contínua pois $\widetilde{u}(T_1^+) = v(0) = u(T_1)$ e $\widetilde{u}(T_1^-) = u(T_1)$ e também é solução em $[0, T_1 + \delta_1]$.

Agora, começando com o dado inicial $u(T_2)$ se obtém uma solução fraca no intervalo $[0, T_2 + \delta_2]$, com $\delta_2 > 0$. Por indução obtém-se seqüência crescente $(T_n)_{n \geq 1}$ e seqüência de soluções $(u_n)_{n \geq 1}$. Notamos que T_1, δ_1, δ_2,... podem não ter a mesma magnitude pois os dados iniciais $u(0)$, $u(T_1)$, $u(T_2)$,... podem ter normas diferentes.

Existência de intervalo maximal: Sejam $T_1 < T_2$ e u_1, u_2 soluções fracas de (2.39) em $[0, T_1]$ e $[0, T_2]$ respectivamente. Da unicidade de solução, segue que $u_1 = u_2$ em $[0, T_1]$. Seja I conjunto de índices qualquer. Vamos considerar agora a família $(u_i(t))_{i \in I}$ de todas as soluções fracas de (2.39) e definidas em uma família de intervalos $([0, T_i])_{i \in I}$.

Seja $T_m = \sup_{i \in I} T_i$. Assim, T_m pode ser $+\infty$.

Vamos definir a função $u(t)$ em $[0, T_m)$ por

$u(t) = u_i(t)$, se $t \in [0, T_i]$, $i \in I$.

Da unicidade, resulta que $u(t)$ está bem definida. Também pode-se observar que $u \in C([0, T_m), X)$ e que u satisfaz (2.40) para todo $t \in [0, T_m)$. Esta solução é chamada **solução maximal** de (2.39).

Teorema 2.33. *Seja F uma função de X em X Lipschitz contínua em conjuntos limitados e u solução maximal do problema (2.39). Então, valem as alternativas:*

ou $T_m = +\infty$

ou $T_m < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \nearrow T_m} \|u(t)\| = +\infty$.

No primeiro caso, u é dita solução Global e no segundo caso dizemos que u explode ou que tem 'blow up' quando t se aproxima do tempo finito T_m.

Demonstração:

Por contradição. Supor $T_m < \infty$ e $\lim\limits_{t \nearrow T_m} \|u(t)\|$ não é infinito. Assim, existe uma seqüência $t_j \nearrow T_m$ tal que $\|u(t_j)\| \leq C < \infty$. Agora vamos fixar $\delta > 0$ satisfazendo

$$\delta\left(\|F(0)\| + L\left(C+1\right)\right) < 1,$$

sendo $L = L_M$ com $M = C + 1$.

Para o valor inicial $u(t_j)$ temos uma solução fraca v_j de (2.39) definida em $[0, \delta]$. Colando u com v_j conforme lema 2.29 onde

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [0, t_j] \\ v(t - t_j), & \text{se } t \in [t_j, t_j + \delta], \end{cases}$$

obtemos uma solução fraca do problema (2.39) definida em $[0, t_j + \delta]$. Assim, tomando j suficientemente grande, segue que $t_j + \delta > T_m$ pois $t_j \nearrow T_m$. Assim, $\widetilde{u}$ é solução em um intervalo maior que o intervalo $[0, T_m]$. Isto contradiz o fato de que u é solução maximal.

2.4.2 Equação do calor

Seja Ω uma região com fronteira suave e limitada do $\mathbb{R}^n$. Consideremos o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u), \ \text{t} \ \geq 0 \\ u = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega \\ u(0) = u_0, \ \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.44}$$

sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz contínua.

Existência de solução local: Vamos mostrar agora a existência e unicidade de soluções locais para o problema não linear (2.44).

Teorema 2.34. *Dado $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe única solução fraca u de (2.44), definida sobre um intervalo maximal $[0, T_m)$. Isto é, $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ para todo $T < T_m$ e*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)g(u(s))ds, \tag{2.45}$$

para todo $t \in [0, T_m)$ sendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado pelo operador $A = -\Delta$.

Também temos a alternativa de que

ou $T_m = +\infty$

ou $T_m < \infty$ e $\lim\limits_{t \nearrow T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$.

Mais, u depende continuamente de u_0. A aplicação $u_0 \mapsto T_m$ é semicontínua inferiormente e para todo $T < T_m$, existe $\epsilon > 0$ e $C < \infty$ tal que se $\|v_0 - u_0\|_{L^\infty} \leq \epsilon$, então $\|v - u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C\|v_0 - u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, com v a solução de (2.45) com valor inicial v_0.

Demonstração:

Vamos provar a unicidade. Sejam u_1 e u_2 soluções da equação integral (2.45) em $[0, T]$. Então,

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_0^t S(t-s)\Big(g(u_1(s)) - g(u_2(s))\Big)ds.$$

Tomando a norma L^∞ em ambos os membros da identidade acima e usando o fato

$$\|S(t)\phi\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{L^\infty}$$

resulta que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^\infty} \leq \int_0^t \|g(u_1(s)) - g(u_2(s))\|_{L^\infty} ds \leq K \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^\infty} ds$$

para todo $t \in [0,T]$, com $K = K_A$ a constante de Lipschitz de g em $[-A, A]$, sendo

$$A = max\{ \ \|u_1\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}, \|u_2\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \ \}.$$

Da desigualdade de Gronwall segue que $u_1(t) = u_2(t)$, para $t \in [0,T]$.

Vamos mostrar a existência.

Sejam $M = \|u_0\|_{L^\infty} + 1$ e $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função definida por

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} g(M), & \text{se } u > M \\ g(u), & \text{se } |u| \leq M \\ g(-M), & \text{se } u < -M. \end{cases}$$

Assim, a função $\widetilde{g}$ é globalmente Lipschitz contínua.

Aplicando o teorema 2.28 com $X = L^2(\Omega)$, obtemos uma solução global fraca $\widetilde{u} \in C\left([0,\infty), L^2(\Omega)\right)$ satisfazendo

$$\widetilde{u}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))ds. \tag{2.46}$$

De fato, isso ocorre pois sendo $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, então $u_0 \in L^2(\Omega) = X$, já que Ω é limitado.

Tomando a norma L^∞ em ambos os lados da equação integral acima obtemos

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty} &\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^T \|\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty} + T \sup_{0\leq s\leq T} \|\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + TK_M.\end{aligned}$$

sendo $K_M = \|g\|_{L^\infty(-M,M)}$.

Escolhendo T suficientemente pequeno resulta que $K_M T \leq 1$. Logo,

$$\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + 1 = M, \quad \forall t \in [0,T].$$

Assim, $\widetilde{u}$ satisfaz a equação integral (2.45) em $[0,T]$, com $T > 0$ tal que $K_M T < 1$, já que sendo $\|\widetilde{u}(t)\| < M$ então $\widetilde{g}(\widetilde{u}) = g(u)$.

A unicidade da solução implica a existência de uma solução maximal definida num intervalo maximal $[0, T_m)$.

Vamos mostrar agora a alternativa de que

$$T_m = +\infty \quad \text{ou} \quad T_m < \infty \text{ e } \lim_{t \nearrow T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty.$$

Faremos por argumento de contradição. Para isto, vamos supor $T_m < \infty$ e assumir que existe uma seqüência $t_j \nearrow T_m$ tal que $\|u(t_j)\|_{L^\infty} \leq A < \infty$, com $A > 0$ alguma constante fixa. Fixemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta K_{A+1} \leq 1,$$

com K_{A+1} a constante de Lipschitz local de g em $[-A-1, A+1]$.

Considerando o valor inicial $u(t_j)$, temos uma solução fraca v_j do problema (2.44) definida em $[0,\delta]$. Colando u com v_j, obtemos uma solução fraca de (2.44) definida no intervalo $[0, t_j + \delta]$. Para j suficientemente grande, segue que $t_j + \delta > T_m$. Assim, obtém-se solução em um intervalo maior que $[0, T_m]$. Isto contradiz o fato de T_m ser maximal.

Para concluir a demonstração do teorema, vamos mostrar a dependência contínua.

Sejam $T < T_m$ e $M_T = \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} + 1$. Vamos considerar $\widetilde{g}$ como definida anteriormente, mas com $M = M_T$ e L_T a constante de Lipschitz da função $\widetilde{g}$.

Seja $\widetilde{u}$ a solução de (2.46) e seja $\widetilde{v}$ a solução de (2.46) associada ao valor inicial $v_0 \in L^\infty(\Omega)$. Então vale a desigualdade

$$\|\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + L_T \int_0^t \|\widetilde{u}(s) - \widetilde{v}(s)\|_{L^\infty}.$$

Novamente usando Gronwall obtemos

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{v}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \, e^{TL_T}.$$

Dessa estimativa segue imediatamente a dependência contínua de solução sobre o dado inicial.

Com isto, concluimos a prova do teorema.

Existência de solução global: Agora vamos analisar a existência e unicidade de soluções globais para o problema de valor inicial (2.44). A existência de solução global depende do comportamento da função g. Sendo assim, vamos utilizar para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a condição adicional que:

$$ug(u) \leq Cu^2 + C, \tag{2.47}$$

para cada $u \in \mathbb{R}$ e com C uma constante positiva fixa.

Teorema 2.35. *Seja g satisfazendo (2.47). Para cada $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, a solução u do problema de valor inicial (2.44) é globalmente definida.*

Demonstração:

Do teorema 2.34 já sabemos que o problema (2.44) possui uma solução definida em um intervalo maximal $[0, T_m)$. Queremos mostrar que $T_m = \infty$.

Vamos multiplicar a equação do calor semilinear por $|u|^{p-2} u$, considerando $p > 2$. Assim obtemos a equação

$$\frac{du}{dt}\left(|u|^{p-2} u\right) - \Delta u \left(|u|^{p-2} u\right) = g(u)\left(|u|^{p-2} u\right), \tag{2.48}$$

válida para $0 \leq t < T_m$.

Podemos observar que:

a) $\dfrac{du}{dt}|u|^{p-2} u = \dfrac{1}{p}\dfrac{d|u|^p}{dt}$.

De fato, $\dfrac{1}{p}\dfrac{d|u|^p}{dt} = |u|^{p-1}\dfrac{d|u|}{dt} = |u|^{p-1}\dfrac{d(u^2)^{1/2}}{dt} = |u|^{p-2} u\dfrac{du}{dt}$.

b)$-\Delta u \left(|u|^{p-2} u\right) = -div\left(|u|^{p-2} u \nabla u\right) + (p-1)|u|^{p-2}|\nabla u|^2$.

De fato, usando a formúla $div(h\vec{F}) = hdiv\vec{F} + \vec{F}\nabla h$ temos

$$div\left(|u|^{p-2} u\nabla u\right) = \Delta u \left(|u|^{p-2} u\right) + \nabla u \nabla \left(|u|^{p-2} u\right).$$

Isto é,

$$\Delta u \left(|u|^{p-2} u\right) = div\left(|u|^{p-2} u\nabla u\right) - \nabla u \nabla \left(|u|^{p-2} u\right).$$

Vamos estudar o termo $\nabla\left(|u|^{p-2} u\right)$.

$$\nabla\left(|u|^{p-2}u\right) = |u|^{p-2}\nabla u + u\nabla\left(|u|^{p-2}\right)$$

$$= |u|^{p-2}\nabla u + u\left[(p-2)\,|u|^{p-3}\frac{u}{|u|}\nabla u\right]$$

$$= |u|^{p-2}\nabla u + u\left[(p-2)\,|u|^{p-4}u\nabla u\right]$$

$$= |u|^{p-2}\nabla u + (p-2)\,|u|^{p-2}\nabla u = (p-1)\,|u|^{p-2}\nabla u.$$

Logo, temos a identidade

$$\Delta u\left(|u|^{p-2}u\right) = div\left(|u|^{p-2}u\nabla u\right) - (p-1)\,|u|^{p-2}\,|\nabla u|^2.$$

c) Usando a condição $ug(u) \leq Cu^2 + C$ temos que

$$g(u)\left(|u|^{p-2}u\right) = ug(u)\,|u|^{p-2} \leq C\,|u|^p + C\,|u|^{p-2}.$$

Agora, usando as observações a), b) e c) e integrando a expressão (2.48) em Ω, resulta que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p\,dx - \int_\Omega div\left(|u|^{p-2}u\nabla u\right)dx + (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}\,|\nabla u|^2\,dx \leq$$

$$\leq C\int_\Omega |u|^p\,dx + C\int_\Omega |u|^{p-2}\,dx,$$

sendo $u = u(t)$ a solução no intervalo maximal $[0, T_m)$.

Usando o teorema da Divergência de Gauss (Brezis-Cazenave [6]) e o fato de que $u(t,x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$, segue que

$$\int_\Omega div\left(|u|^{p-2}u\nabla u\right)dx = 0.$$

Portanto, chegamos que a solução $u(t)$ satisfaz a inequação integral

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p \leq C\int_\Omega |u|^p + C\int_\Omega |u|^{p-2}.$$

Agora vamos aplicar a desigualdade de Young $ab \leq \dfrac{a^q}{q} + \dfrac{b^{q'}}{q'}$, que é válida para q e q' positivos tais que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Também vamos tomar $q = \dfrac{p}{p-2}$, $a = |u|^{p-2}$ e $b = 1$. Obtemos então que $q > 0$ pois $p > 2$. Logo,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p \leq C\int_\Omega |u|^p + C\int_\Omega \left(\frac{|u|^{p-2}}{q}\right)^q + C\int_\Omega \frac{1^{q'}}{q'}$$

sendo $q' = \dfrac{p}{2}$.

Então, como foi escolhido $q = \dfrac{p}{p-2}$ segue que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p \leq C\int_\Omega |u|^p + C\int_\Omega \frac{|u|^p}{q} + C\int_\Omega \frac{2}{p} = C\int_\Omega |u|^p + \frac{C}{q}\int_\Omega |u|^p + \frac{2C}{p}|\Omega|.$$

Como $p > 2$, então obtemos que $0 < \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-2}{p} < 1$. Logo,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p \leq C\int_\Omega |u|^p + C\int_\Omega |u|^p + C|\Omega| = 2C\int_\Omega |u|^p + C|\Omega|.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p \leq 2Cp\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + C|\Omega|. \tag{2.49}$$

Vamos considerar agora

$$\phi(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p.$$

Então, a desigualdade (2.49) pode ser reescrita como

$$\phi'(t) - 2Cp\phi(t) \leq C|\Omega|.$$

Multiplicado a desigualdade acima pelo fator e^{-2Cpt} resulta que

$$\phi'(t)e^{-2Cpt} - 2Cp\phi(t)e^{-2Cpt} \leq C|\Omega|e^{-2Cpt},$$

isto é,

$$\left(\phi(t)e^{-2Cpt}\right)' \leq C|\Omega|e^{-2Cpt}.$$

Integrando de s a t temos

$$\phi(t)e^{-2Cpt} - \phi(s)e^{-2Cps} \leq C\,|\Omega| \int_s^t e^{-2Cpr}dr$$

e portanto,

$$\phi(t) \leq \left(\phi(s)e^{-2Cps} + C\,|\Omega| \int_s^t e^{-2Cpr}dr\right)e^{2Cpt}. \tag{2.50}$$

Usando o fato que

$$\int_s^t e^{-2Cpr}dr = -\frac{e^{-2Cpt}}{2Cp} + \frac{e^{-2Cps}}{2Cp} \leq \frac{e^{-2Cps}}{2Cp}$$

e substituindo na inequação (2.50), resulta

$$\phi(t) \leq \left[\phi(s) + C\,|\Omega|\,\frac{1}{2Cp}\right]e^{2Cp(t-s)} = \left[\phi(s) + |\Omega|\,\frac{1}{2p}\right]e^{2Cp(t-s)}.$$

Portanto, da definição que $\phi(t) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |u|^p$, encontramos a expressão

$$\int_\Omega |u(t)|^p \leq \left(\int_\Omega |u(s)|^p + \frac{1}{2}\,|\Omega|\right)e^{2Cp(t-s)},$$

para todo $0 < s < t < T_m$.

Passando limite quando $s \downarrow 0$ (lembrando que $u \in C\left([0,T_m), L^p(\Omega)\right)$, para todo $p < \infty$, pois $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ e Ω é limitado) segue que

$$\int_\Omega |u|^p \leq \left(\int_\Omega |u_0|^p + \frac{1}{2}\,|\Omega|\right)e^{2Cpt},$$

para todo $t \in (0, T_m)$.

Elevando na potência $\frac{1}{p}$ a desigualdade acima e usando o fato que $(a+b)^r \leq 2^r(a^r + b^r)$ obtemos

$$\|u(t)\|_{L^p} \leq \left(\int_\Omega |u_0|^p + \frac{1}{2}\,|\Omega|\right)^{\frac{1}{p}} e^{2Ct} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\|u_0\|_{L^p} + \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\,|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right)e^{2Ct}$$

$$\leq 2\left(\|u_0\|_{L^p} + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\right)e^{2Ct}.$$

Isto vale para cada $p > 2$.

Tomando $p \to \infty$ resulta que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq 2\left(\|u_0\|_{L^\infty} + 1\right) e^{2Ct} \leq C_{u_0} e^{2CT_m} < \infty$$

se $T_m < \infty$ sendo C_{u_0} uma constante positiva que depende da norma $\|u_0\|_{L^\infty}$.

Da alternativa do teorema 2.34 podemos concluir que $T_m = +\infty$, o que prova o teorema.

2.4.3 Equação do calor com termo semilinear $-u^3$.

Vamos mostrar agora, de uma forma direta, a existência e unicidade de soluções locais fortes para o problema de valor inicial (2.44), com $g(u) = -u^3$, usando teoria de semigrupos e o teorema do ponto fixo.

Para isto, vamos precisar dos seguintes lemas:

Lema 2.36. *Sejam $X = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e T, R números positivos fixados. Vamos considerar $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado pelo operador $-A$ e $u_0 \in D(A) = V$. Então o conjunto*

$$X_R(T) = \left\{ v \in C\left([0,T], V\right) : \sup_{0\leq t\leq T} \|v(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq R \text{ e } v(0) = u_0 \right\}$$

com a métrica $d(u,v) = \|u - v\|_\infty$ sendo $\|v\|_\infty = \sup\limits_{0\leq t\leq T} \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}$, é um espaço métrico completo.

Demonstração:
Inicialmente vamos observar que o conjunto $X_R(T)$ não é vazio, pois $u(t) = S(t)u_0 \in X_R(T)$, visto que $u_0 \in V$.
Como $X_R(T)$ é um subconjunto do espaço de Banach $\left(C\left([0,T], V\right), \|.\|_\infty\right)$, basta mostrar que $X_R(T)$ é um conjunto fechado. Para isto, consideremos uma seqüência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_R(T)$ tal que $v_n \to v$ e $v \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$. Vamos mostrar que $v \in X_R(T)$.

Seja $\epsilon > 0$. Como $v_n \to v$, existe n_0 tal que $\|v_{n_0} - v\|_{H^2(\Omega)} < \epsilon$. Assim, como $v_{n_0} \in X_R(T)$ então $\|v_{n_0}(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq R$, $\forall t \in [0,T]$. Isto é, para cada $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned}\|v - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} - \|v - v_{n_0}\|_{H^2(\Omega)} &\leq \|v - S(t)u_0 - (v - v_{n_0})\|_{H^2(\Omega)} \\ &= \|v_{n_0} - S(t)u_0\| \leq R.\end{aligned}$$

Então, $\|v - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} < R + \epsilon$.

Da arbitrariedade de ϵ segue que $\|v - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq R$, $\forall t \in [0,T]$.

Agora, como $\|v_n - v\|_\infty \to 0$, em particular, $\|v_n(0) - v(0)\|_{H^2(\Omega)} \to 0$. Mas como $v_n(0) = u_0$, então concluimos que $v(0) = u_0$ em $H^2(\Omega)$. Logo, $v \in X_R(T)$.

Portanto, $X_R(T)$ é fechado e consequentemente, espaço métrico completo.

Lema 2.37. *Sejam $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações de classe C_0 gerado por A. Então, para $t \geq 0$, $\|S(t)v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}$.*

Demonstração:

Do fato que $\|v(t)\|_{H^2(\Omega)}$ é equivalente a $\|(I - \Delta)v(t)\|_{L^2(\Omega)}$ (conseqüência da desigualdade de Hölder) e usando as propriedades do semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, com $t \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}\|S(t)v(t)\|_{H^2(\Omega)} &= \|(I - \Delta)S(t)v(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|S(t)v(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta S(t)v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|S(t)\Delta v(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta v(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, está provado o lema.

Observação 2.38. *No estudo da equação do calor semilinear considerando $g(u) = -u^3$, vamos trabalhar em $\mathbb{R}^n$, com $n \leq 3$ para podermos utilizar imersões de Sobolev. No caso $n \geq 4$, deve-se considerar uma não linearidade $|u|^p u$ em vez de u^3, com $0 \leq p \leq \frac{2}{n-2}$.*

Vamos estudar a partir de agora o seguinte problema de valor inicial semilinear:

determinar $u(x,t)$ função real definida em $\overline{\Omega} \times [0,T]$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -u^3, \text{ em } Q \\ u = 0, \text{ sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0, \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.51}$$

sendo Δ o operador de Laplace e u_0 função dada no domínio de $A = -\Delta$. Para este problema vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq n \leq 3$, um aberto limitado com fronteira regular Γ, $Q = \Omega \times (0,\infty)$ e $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$ é a fronteira lateral.

Uma solução forte do problema de valor inicial (2.51) é uma função $u \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ que satisfaz a equação em (2.51) no sentido de $L^2(\Omega)$, para cada $t \in [0,T]$.

Vamos relembrar da seção (2.3.1), que o problema de valor inicial linear

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \text{ em } Q \\ u = 0, \text{ sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0, \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.52}$$

pode ser tratado via teoria de semigrupos. Isto é, o operador não limitado A tal que $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

é gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $L^2(\Omega)$, digamos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Também vimos que para $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, a função u dada por $u(t) = S(t)u_0$ satisfaz o problema (2.52) e $u(t) \in C\left([0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty), L^2(\Omega)\right)$.

Vamos mostrar agora a existência e a unicidade de soluções locais para o problema não linear (2.51).

De modo análogo ao caso linear (desenvolvimento abaixo da definição 2.20), pode-se verificar que se $u(t)$ é solução forte do problema (2.51), então $u(t)$ satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds. \tag{2.53}$$

Vamos provar que para $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, existe $T_0 > 0$ e uma única função $u \in C\left([0,T_0], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$ que é solução de (2.53).

Para $T > 0$ e $R > 0$ fixados, consideremos o espaço métrico completo $X_R(T)$ conforme o lema 2.36.

Agora, definimos a aplicação

$P : X_R(T) \to C\left([0,T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$

dada por

$$(Pv)(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)v^3(s)ds, \quad v \in X_R(T).$$

Vamos provar que P está bem definida.

Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações de classe C_0 gerado pelo operador $A = -\Delta$ conforme seção (2.3.1). Para $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(A)$, resulta da proposição 1.15 que $w(t) = S(t)u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ para cada $t > 0$ e é uma função contínua.

Falta provar que a integral

$$\int_0^t S(t-s)v^3(s)ds \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

para $v \in X_R(T)$ e para $t > 0$, é uma função contínua em t.

Para isto, vamos mostrar que $v^3 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ se $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Da imersão de Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, $1 \leq n \leq 3$ que pode ser encontrada em Kesavan [13], pg.79, resulta que $v^3 \in L^2(\Omega)$ se $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, pois Ω é limitado.

Também do fato que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, $n \leq 3$, para $v \in H^2(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\|D_i v^3\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left|D_i v^3(x)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|3v^2(x)\right|^2 |D_i v(x)|^2 dx \leq 3\,\|v\|_{L^\infty}^4 \int_\Omega |D_i v(x)|^2 dx \\ &\leq C\,\|v\|_{H^2(\Omega)}^4 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = C\,\|v\|_{H^2(\Omega)}^6 < \infty\end{aligned}$$

onde C é uma constante que depende de Ω e D_i indica a derivada distribucional $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$, com $1 \leq i \leq n$. Da estimativa acima, concluimos que $D_i v^3 \in L^2(\Omega)$ se $1 \leq i \leq n$, $n \leq 3$.

Agora, considerando $D_j D_i$ operador diferencial de segunda ordem e usando Holder, temos para $v \in H^2(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\|D_jD_iv^3\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left|D_jD_iv^3(x)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|6v(x)D_jv(x)D_iv(x) + 3v^2(x)D_jD_iv(x)\right|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega |6v(x)D_jv(x)D_iv(x)|^2 dx + \int_\Omega \left|3v^2(x)D_jD_iv(x)\right|^2 dx \\
&\leq 6\|v\|^2_{L^\infty} \left(\int_\Omega |D_jv(x)|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D_iv(x)|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+3\|v\|^4_{L^\infty} \int_\Omega |D_jD_iv(x)|^2 dx \\
&\leq C_1 \|v\|^2_{H^2(\Omega)} \|D_jv\|^2_{L^4(\Omega)} \|D_iv\|^2_{L^4(\Omega)} + C_2 \|v\|^4_{H^2(\Omega)} \|v\|^2_{H^2(\Omega)} \\
&\leq C_3 \|v\|^2_{H^2(\Omega)} \|D_jv\|^2_{H^1(\Omega)} \|D_iv\|^2_{H^1(\Omega)} + C_2\|v\|^6_{H^2(\Omega)} \leq C\|v\|^6_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

pois sendo $v \in H^2(\Omega)$, então $D_jv \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$

As constantes C_1, C_2 e C_3 dependem de Ω.

Assim, mostramos que v^3 e todas as suas derivadas até ordem 2 estão em $L^2(\Omega)$. Essas estimativas nos dizem que $v^3 \in H^2(\Omega)$.

Em particular, também podemos concluir que $\|v^3(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v(t)\|^3_{H^2(\Omega)}$ com C_Ω uma constante que depende de Ω.

Como $v \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ segue da continuidade da função traço γ_0 que $\gamma_0(v^3) = 0$. Então concluimos que $v^3 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Aplicando a proposição 1.15 resulta que $S(t-s)v^3(t) \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e é uma função contínua na variável t.

Da definição de integral segue que $\displaystyle\int_0^t S(t-s)v^3(s)ds \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e é uma função contínua.

Portanto, $(Pv)(t) \in C\left([0,T], H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$.

Agora queremos mostrar que existe $T_0 > 0$ tal que $P\left(X_R(T_0)\right) \subseteq X_R(T_0)$. Considerando $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de contrações de classe C_0, então conforme lema 2.37, para $t \in (0,T)$ obtemos

$$
\|Pv(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\|S(t-s)v^3(s)\right\|_{H^2(\Omega)} ds \leq \int_0^T \left\|v^3(s)\right\|_{H^2(\Omega)} ds.
$$

Mas, para $v \in X_R(T)$ temos que

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|v(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq R + \|u_0\|_{H^2(\Omega)} = K \tag{2.54}$$

sendo $K > 0$ uma constante independente de t.
Assim, do fato que $\|v^3(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|^3_{H^2(\Omega)}$ resulta

$$\|Pv(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega T K^3.$$

Então, para $T < \frac{R}{C_\Omega K^3}$ temos que

$$\|Pv(t) - S(t)u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq R, \quad \forall t \in [0, T].$$

Também é imediato que $(Pv)(0) = u_0$.

Logo, para $0 < T \leq \frac{R}{C_\Omega K^3}$, $Pv \in X_R(T)$. Assim, mostramos que $P : X_R(T) \to X_R(T)$ para $0 < T \leq \frac{R}{C_\Omega K^3}$.

Agora vamos mostrar que existe T_0 com $0 < T_0 \leq \frac{R}{C_\Omega K^3}$ tal que a aplicação $P : X_R(T_0) \to X_R(T_0)$ é contração.

Sejam $v, w \in X_R(T_0)$ com $0 < T_0 < \frac{R}{C_\Omega K^3}$. De (2.54) temos que

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)}, \|w(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq K, \quad \forall t \in [0, T_0], \text{ com } K = R + \|u_0\|_{H^2(\Omega)}.$$

Vamos utilizar a identidade $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

Como $v, w \in X_R(T_0)$ então $v(t)$ e $w(t)$ estão em $H^2(\Omega)$ para $t \in [0, T_0]$. Logo,

$$\begin{aligned}\|v^3(t) - w^3(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_\Omega \|v(t) - w(t)\|_{H^2(\Omega)} \|v^2(t) + w^2(t) + v(t)w(t)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega, K) \|v(t) - w(t)\|_{H^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.55}$$

com $C(\Omega, K)$ uma constante positiva que depende da constante positiva K, a qual depende de R e da norma $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$. C_Ω é uma constante positiva que depende de Ω e é devida a imersões de Sobolev.

A primeira desigualdade em (2.55) é justificada de modo análogo ao caso que $\|v^3\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|^3_{H^2(\Omega)}$.

Usando novamente o lema 2.37 obtemos

$$
\begin{aligned}
\|Pv - Pw\|_{X_R(T_0)} &= \sup_{0\le t\le T_0} \|Pv(t) - Pw(t)\|_{H^2(\Omega)} \\
&\le \sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t \left\| S(t-s)[v^3(s) - w^3(s)] \right\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\le \int_0^{T_0} \left\| v^3(s) - w^3(s) \right\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\le C(\Omega, K) \int_0^{T_0} \|v(s) - w(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\le C(\Omega, K) T_0 \sup_{0\le t\le T_0} \|v(t) - w(t)\|_{H^2(\Omega)} \\
&= C(\Omega, K) T_0 \|v - w\|_{X_R(T_0)}.
\end{aligned}
$$

Tomando $T_0 < \min\left(\frac{R}{C_\Omega K^3}, \frac{1}{C(\Omega,K)}\right)$ concluimos que a aplicação $P : X_R(T_0) \to X_R(T_0)$ é contração.

Do teorema 2.25 (Ponto Fixo de Banach), existe uma única função $u \in X_R(T_0)$ tal que $Pu = u$. Assim, u é solução da integral (2.53).

Mostramos que o problema (2.51) tem única solução em $X_R(T_0)$.

Agora falta provar a unicidade da solução em $C\left([0, T_0], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$.

Sejam $u, v \in C\left([0, T_0], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$ soluções da equação (2.53) tais que $u(0) = v(0) = u_0$ com $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então, para $t \in [0, T_0]$ vale a desigualdade

$$
\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{H^2(\Omega)} &= \left\| \int_0^t S(t-s)[u^3(s) - v^3(s)] ds \right\|_{H^2(\Omega)} \\
&\le \int_0^t \left\| u^3(s) - v^3(s) \right\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\le C_\Omega \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{H^2(\Omega)} \Big(\left\| u^2(s) \right\|_{H^2(\Omega)} + \\
&+ \|v^2(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|u(s)v(s)\|_{H^2(\Omega)} \Big) ds, \ \forall t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Vamos considerar a função $h(t) \ge 0$ dada por

$$
h(t) = C_\Omega \Big(\|u^2(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|v^2(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|u(s)v(s)\|_{H^2(\Omega)} \Big).
$$

Como u, v são funções contínuas definidas no compacto $[0, T_0]$ a valores em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então

$$\int_0^{T_0} h(t) < \infty.$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Gronwall para $h(t)$ definida acima e $g(t) = \|u(t) - v(t)\|_{H^2(\Omega)}$, segue imediato que $u = v$.

Para concluir nosso estudo de existência e unicidade de solução local, precisamos mostrar que a solução local obtida para a equação (2.53) é solução do problema de valor inicial (2.51).

Para cada $t > 0$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(A) = D(-\Delta)$, resulta da proposição 1.15 que $\dfrac{dS(t)}{dt} u_0 = -AS(t)u_0$.

Considerando $v(t) = \displaystyle\int_0^t S(t-s)u^3(s)ds$, vamos mostrar que a função v é derivável para todo $t \in (0, T_0)$.

Seja $h > 0$ tal que $t + h \in [0, T_0]$. Usando as propriedades do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e a definição de $v(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-s)u^3(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^t S(t+h-s)u^3(s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)u^3(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds \\
&= \frac{S(h)}{h} \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds + \frac{S(h)}{h} \int_t^{t+h} S(t-s)u^3(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds \\
&= \frac{S(h) - 1}{h} \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds + \frac{S(h)}{h} \int_t^{t+h} S(t-s)u^3(s)ds.
\end{aligned}$$

Como o integrando na última integral acima é contínuo, pelo teorema do Valor Médio para Integrais segue que

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{S(h)-1}{h}\int_0^t S(t-s)u^3(s)ds + S(h)S(t-t^*)u^3(t^*)$$

para algum $t^* \in (t, t+h)$.

Então,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = -A\int_0^t S(t-s)u^3(s)ds + u^3(t)$$

pois $t^* \to t$ quando $h \to 0$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de classe C_0.

Isso diz que v é derivável à direita em $t \in (0, T_0)$ e

$$\frac{dv}{dt^+} = -A\int_0^t S(t-s)u^3(s)ds + u^3(t).$$

De modo semelhante vê-se que v é derivável à esquerda em $t \in (0, T_0)$ e que $\dfrac{dv}{dt^-} = \dfrac{dv}{dt^+}$.

Do fato que $u(t) = S(t)u_0 - v(t)$, então

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} = \frac{dS(t)u_0}{dt} - \frac{dv(t)}{dt} &= -AS(t)u_0 + A\int_0^t S(t-s)u^3(s)ds - u^3(t)\\ &= -A\left(S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)u^3(s)ds\right) - u^3(t)\\ &= -Au(t) - u^3(t)\end{aligned}$$

sendo A operador tal que $A = -\Delta$.

Em particular, $\dfrac{du}{dt} \in L^2(\Omega)$ para cada $t \in [0, T_0]$.

Logo, u é diferenciável e é solução local em $[0, T_0]$ do problema (2.53) na classe $C^1\left([0,T_0], L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T_0], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$.

A análise da existência de solução global para a equação (2.51) será omitida neste trabalho. Pode-se observar que a função $g(u) = -u^3$ satisfaz a condição dada por (2.47) e portanto o problema (2.51) admite solução global.

2.4.4 Exemplo de problema de valor inicial para a equação do calor que não admite solução global

Lema 2.39. *Sejam $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e u solução do problema (2.44) definida num intervalo maximal $[0, T_m)$. Então*

$$u \in C\left([0, T_m), H_0^1(\Omega)\right) \quad e \quad E(u(t)) \leq E(u_0), \quad t \in [0, T_m).$$

onde $E(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u)$, *com* $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(s)ds.$

A prova deste resultado pode ser encontrada em Brezis-Cazenave [6], pg.135.

Vamos considerar o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{p-1} u, \text{ em } (0, T) \times \Omega \\ u = 0, \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0, \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.56}$$

sendo u_0 um valor inicial suficientemente grande.

Para tal u_0 vamos provar que (2.56) não tem solução global se $p > 1$.

Notar que se $g(u) = |u|^{p-1} u$ então $G(u) = \frac{1}{p+1} |u|^{p+1}$.

Teorema 2.40. *Consideremos $p > 1$. Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$E(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_0|^{p+1} dx \leq 0 \tag{2.57}$$

e $u_0 \neq 0$. Se u é solução de (2.56) então $T_m < \infty$. Isto é, para dados iniciais satisfazendo (2.57), o problema (2.56) não possui solução global. De fato, neste caso tem-se que

$$T_m \leq \frac{2}{\alpha(p-1)}\phi(0)^{-\frac{p-1}{2}}$$

onde $\phi(0) = \int_\Omega u_0^2(x)dx$ e $\alpha = \frac{2(p-1)}{p+1} |\Omega|^{\frac{p-1}{2}}$. Assim, a solução explode, isto é, sofre "blow up" em tempo finito.

Demonstração:
Seja $u(x,t)$ solução de (2.56) em $(0,T_m)$. Vamos supor $T_m=\infty$ e considerar

$$\phi(t)=\int_\Omega u(t,x)^2dx. \tag{2.58}$$

Vamos encontrar uma inequação diferencial para ϕ a qual não é válida para todo $t\geq 0$. Assim, devido a fórmula de Green e o fato que $u=0$ sobre $\partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 2\int_\Omega uu_t = 2\int_\Omega u\left(\Delta u+|u|^{p-1}u\right) = 2\int_\Omega |u|^{p+1}-2\int_\Omega |\nabla u|^2\\ &= -4E(u)+\frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \geq -4E(u_0)+\frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\end{aligned}$$

devido ao lema 2.39.

Da hipótese (2.57) sobre u_0 e usando a desigualdade de Holder segue que

$$\phi'(t)\geq \frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\geq \frac{2(p-1)}{p+1}|\Omega|^{\frac{p-1}{2}}\left(\int_\Omega u^2\right)^{\frac{p+1}{2}}=\alpha\phi(t)^{\frac{p+1}{2}}$$

com $\alpha>0$. Em particular, ϕ é não decrescente. Como $\phi(0)>0$, já que $u_0\neq 0$, resulta que $\phi(t)>0$ para todo $t\geq 0$.

Logo, obtemos a inequação

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{p-1}\phi(t)^{-\frac{p-1}{2}}\right)=\frac{\phi'(t)}{\phi(t)^{\frac{p+1}{2}}}\geq\alpha.$$

Assim, podemos concluir que

$$0\leq \frac{2}{p-1}\phi(t)^{-\frac{p-1}{2}}\leq \frac{2}{p-1}\phi(0)^{-\frac{p-1}{2}}-\alpha t,$$

para todo $t\geq 0$. Como isto é impossível, então resulta que $T_m<\infty$ e de fato, T_m deve ser limitado como no enunciado do teorema.

2.4.5 Equação da onda

Seja $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $1\leq n\leq 3$ um aberto limitado com fronteira regular Γ. Sejam $Q=\Omega\times(0,\infty)$ e $\Sigma=\Gamma\times(0,\infty)$.

Queremos determinar uma função $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^3 = 0, \quad \text{em } Q \\ u = 0, \ \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0, \ \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.59}$$

sendo Δ o operador de Laplace e u_0, v_0 são funções dadas em um certo espaço de Sobolev que estão relacionadas com o domínio de $-\Delta$.

Na seção (2.3.2) em que estudamos a equação da onda linear, aplicamos a teoria de semigrupos no espaço de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ munido do produto escalar

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx$$

com $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e mostramos a existência e unicidade de soluções fortes do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \ \text{em } Q \\ u = 0, \ \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0, \ \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.60}$$

Para isto, provamos que o operador não limitado $A : D(A) \subset H \to H$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \\ AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} \end{cases}$$

é gerador de um semigrupo de contrações, digamos $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Também, se $u_0, v_0 \in D(A)$, a função u dada pela primeira componente de $U(t) = S(t)U_0$ satisfaz (2.60) e

$$u \in C^1\left([0,\infty), H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left([0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right).$$

Vamos agora mostrar um esquema da prova da existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial semilinear (2.59).

De modo semelhante ao caso linear da equação da onda visto na seção (2.3.2), pode-se transformar o problema (2.59) no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.61}$$

com $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -u^3 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$.

Assim, (2.61) é um problema semilinear abstrato em que a função $F : H \to H$, $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é localmente Lipschitz contínua. Portanto, da teoria já estudada na seção (2.4.1), segue que (2.61) admite única solução local definida em um intervalo maximal $[0, T_m)$ e ainda, se $T_m < \infty$, então $\lim\limits_{t \nearrow T_m} \|U(t)\|_H = \infty$.

Agora, mostraremos que $T_m = \infty$ e assim (2.59) possui solução global.

Para isto, basta provar que $\|(u(t), u_t(t))\|_H \leq C$, $t \in [0, T_m]$, com $C > 0$ uma constante.

Multiplicando equação de (2.59) por u_t, integrando em Ω e usando a primeira fórmula de Green e a condição de contorno, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \left[\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{4} u^4 \right] dx = 0.$$

Integrando em $(0, t)$, resulta

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left[u_t^2 + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^4 \right] dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[v_0^2 + |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2} u_0^4 \right] dx = C$$

para todo $T \in [0, T_m)$.

Isto diz que $\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{\frac{1}{2}}$, $\forall t \in [0, T_m)$.

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ então, por Poincaré, a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente à norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Assim, $\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ são limitadas em $[0, T_m)$. Portanto,

$$\|((u(t), u_t(t))\|_H = \|((u(t), u_t(t))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

são limitadas em $[0, T_m)$. Logo, a solução $u(t)$ está definida globalmente em $(0, \infty)$.

Referências Bibliográficas

[1] Alvercio Moreira Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[2] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] C. W. Groetsch, *Elements of applicable functional analysis.* Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[4] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley e Sons, 1978.

[5] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle: theórie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[6] Haïm Brezis e Thierry Cazenave, *Nonlinear evolution equations.* 1994.

[7] Jerome A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications.* Oxford Mathematical Monographs, Copyright, New York, 1985.

[8] K. Yosida, *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlim-Heildelberg, New York, 1966.

[9] L. A. Medeiros, P.H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos número 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[10] L. Zhang, *Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burger equations in n-space dimensions. Nonlinear analysis, theory, methods and applications.* Volume 25, 1995.

[11] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[12] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[13] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Copyright, Bangalore, India, 1989.