Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Método de Landweber Sem Derivadas para Identificação de Parâmetros em Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Maicon Marques Alves
Orientador: Prof. Dr. Antonio Leitão

Florianópolis
Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Método de Landweber Sem Derivadas para Identificação de Parâmetros em Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de Concentração em Matemática Aplicada.

Maicon Marques Alves
Florianópolis
Fevereiro de 2005

Método de Landweber Sem Derivadas para Identificação de Parâmetros em Equações Diferenciais Parciais Elípticas

por

Maicon Marques Alves

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antonio Leitão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Celso Melchíades Dória (UFSC)

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

Prof. Dr. Jorge P. Zubelli (IMPA)

Florianópolis, fevereiro de 2005.

Ao Espírito de Verdade.

Agradecimentos

Agradeço a minha família que mesmo a distância sempre esteve presente em todos os momentos desta jornada.
Agradeço a todos os colegas pela amizade e carinho recebidos neste período e desde os tempos de graduação. Infelizmente não foi possível citar nomes , pois (felizmente) vocês formam uma lista quase não enumerável. Amigos, vocês são especiais. Em especial agradeço também a aqueles que em momentos de extrema dificuldade nos reanimaram com exercícios de levantamento de copo.
Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina pela acolhida desde os tempos de Escola de Verão e principalmente aos Professores Eliezer Batista, Fermin Bazán, Gustavo Costa, Ruy Charão, Mário Zambaldi e Michael Dokuchaev.
Agradeço ao Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal do Rio Grande pelos incentivos recebidos durante a graduação e de maneira especial aos Professores José Carlos Pinto Leivas, Leandro Bellicanta e Mario Rocha Retamoso.
Agradeço aos Professores Celso Dória, Igor Mozolevski e Jorge Zubelli por participarem da comissão examinadora e pelas valiosas sugestões.
Agradeço a Daiane Farias pelo carinho e amor dedicados desde muito tempo, pela paciência e pelo companheirismo prestados em todos os momentos.
Agradeço ao amigo Dirlei Ruscheinsky pelo apoio em Latex.
Finalmente agradeço ao Professor Antonio Leitão por todos os ensinamentos trasmintidos neste período, pela paciência e dedicação, pela amizade e pela forma reponsável com que conduziu este trabalho. Por tudo isso, pode acreditar que ficou aqui muito além de um ex-orientando, mas sim um grande amigo. Muito Obrigado.
Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro e a Elisa Amaral pela forma simpática e prestativa com que sempre nos tratou na secretaria da PG.

Resumo

Neste trabalho tratamos problemas de identificação de parâmetros em equações diferenciais parciais elípticas no caso em que conhecemos a sua respectiva solução. Este problema inverso é tipicamente mal posto no sentido de Hadamard (a solução não depende continuamente dos dados). Nesse sentido, alguma técnica de regularização deve ser usada para obter uma solução aproximada que seja ao mesmo tempo estável e convergente. Os métodos tipo Landweber que são usados como métodos de regularização exigem fortes hipóteses de regularidade sobre a equação diferencial, mais especificamente, sobre a derivada de Fréchet do operador F, que modela o problema inverso. Para contornar estas dificuldades, introduzimos um método iterativo do tipo Landweber que não envolve derivadas de F, mas converge sob hipóteses de Lipschitz continuidade e monotonia na equação diferencial parcial que representa o modelo direto. Apresentamos resultados de taxas de convergência para a regularização de Tikhonov e para o método sem derivadas sob uma fraca condição de fonte. O significado desta última é discutido para equações em que o parâmetro depende somente da variável de estado.

Abstract

This work is concerned with the identification of parameters in elliptic partial differential equations from knowledge of the corresponding solutions on certain regions. This inverse problem is typically ill-posed in the sense of Hadamard (the solution does not depend continuously on the data). In this sense, some regularization techique should be used in order to obtain a sequence of aproximate solutions that is both stable and convergent. Standard methods of Landweber type that are used as regularization methods pose restritive constraints in the partial differential equation, more specifically, in the Fréchet derivative of the operator F that models the inverse problem. In order to avoid such difficulties, we introduce an iterative method of Landweber type that does not involve the derivative of the operator F. Moreover, it converge only under conditions of Lipschitz continuity and monotonicity in the partial differential equation that models the direct problem. We also present convergence rate results for Tikhonov regularization and for the derivative free iteration method under a weak source condition. The meaning of the latter is investigated for the identification of state dependent parameters.

Conteúdo

Introdução

Muitos problemas que aparecem nas ciências aplicadas são modelados por equações diferenciais parciais. Entre estas equações, existem casos em que conhecemos os dados e procuramos informações sobre os parâmetros que governam as leis físicas do sistema como, por exemplo, condutividade térmica, disperssão populacional, etc. Tais situações ocorrem em problemas de condução de calor na produção industrial de aço (veja [6]), dinâmica populacional, processamento de imagens, medicina, geofísica, finanças, otimização, etc. Estes problemas são conhecidos atualmente na literatura como problemas de identificação, estimação ou reconstrução de parâmetros. Por uma questão de gosto pessoal, adotamos a primeira das três terminologias citadas acima.

Neste trabalho, tratamos os problemas de identificação de parâmetros que são descritos por equações diferenciais parciais elípticas. Estas equações podem conter parâmetros que dependem das variáveis de espaço e/ou estado. No entanto, consideraremos que somente um destes parâmetros é desconhecido, ou seja, precisa ser determinado. Existem duas técnicas básicas para tratar problemas de identificação de parâmetros. Pode-se tentar minimizar o resíduo entre a solução calculada da equação diferencial e os dados por um processo iterativo ou considerar a equação de estado como uma equação em que a variável é justamente o parâmetro a ser determinado. Como somente a primeira das duas abordagens acima pode ser usada para implementações numéricas (isto é, pode funcionar na prática), questões teóricas relacionadas com a mesma despertam um grande interesse em matemáticos e engenheiros. A segunda abordagem, conhecida como *abordagem direta* não é tratada neste trabalho, podendo maiores detalhes ser encontrados em [14].

Por exemplo, considerando o problema de condução de calor em um determinado material, no intervalo $[0,1]$, cuja temperatura é mantida nula nos extremos, a distribuição de temperatura após um intervalo de tempo suficientemente grande pode ser modelada pela seguinte equação

$$\begin{aligned} -(q(x)u_x)_x &= f \quad \text{em} \quad (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

aonde f denota a fonte interna de calor e q a condutividade térmica. A questão que se coloca é determinar q através de medidas da temperatura u ou informações parciais sobre a mesma como, por exemplo, o fluxo de calor $q\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ na fronteira de $(0,1)$. Em geral, existência de solução para o problema acima não pode ser garantida e mesmo que tal solução exista, esta pode não ser única, uma vez que, obviamente, em regiões do domínio onde u é constante, q pode arbitrária. Se u_x é não nula em $(0,1)$, $q(x)$ pode ser dada por

$$q(x) = \frac{1}{u_x(x)}\left[q(0)u_x(0) - \int_0^x f(s)ds\right] \tag{2}$$

e, portanto, é unicamente determinada. Entretanto, na determinação de q, tivemos que diferenciar os dados u, sendo que diferenciação é uma operação instável. Existe ainda, um outro efeito de instabilidade causado pela divisão por u_x em (2): em regiões onde u_x é pequena, erros, por exemplo em f, são amplificados, o que não é surpreza pois se $u_x(x_0)$ é igual a zero, $q(x_0)$ não pode ser determinado por (2). No entanto, diretamente de (1) vemos que o valor de q em x_0 pode ser dado por

$$q(x_0) = \frac{f(x_0)}{u_{xx}(x_0)},$$

se $u_{xx}(x_0) \neq 0$. Podemos notar que o mesmo efeito de instabilidade ocorre pela divisão por $u_{xx}(x_0)$.

O que fizemos acima foi usar uma abordagem direta para resolver o problema (1) e, neste caso, vimos que a determinação de q pode ser um processo instável. Interrompemos aqui esta discussão, para retoma-la no Capítulo final deste trabalho. No que segue, procuramos tratar métodos estáveis para determinação de parâmetros. Assim são os métodos iterativos, os quais investigamos ao longo deste trabalho.

Por intermédio do problema (1) temos uma breve idéia do tipo de problema que iremos abordar neste texto. No Capítulo 1, apresentamos os problemas de identificação de parâmetros no contexto dos conhecidos problemas inversos assim como as regularizações de Tikhonov e por métodos iterativos com ênfase na iteração de Landweber e algumas de suas variantes sugeridas na literatura. Exemplos concretos são apresentados no Capítulo 2, onde também formulamos, num contexto abstrato, os problemas direto e inverso relacionados com os problemas de identificação. No Capítulo 3, aplicamos a teoria clássica, desenvolvida no Capítulo 1, para o problema abstrato formulado no Capítulo 2. Neste caso, fica evidente a fragilidade da teoria clássica quando aplicada a este tipo de problema e a necessidade de métodos de regularização mais eficazes, que aproveitem melhor a estrutura do problema direto. No Capítulo 4, introduzimos o método de Landweber sem derivadas, intimamente relacionado com a estrutura da equação diferencial que modela o problema direto, descartando assim a condição de diferenciabilidade no operador de iteração que aparece no método clássico. Com tais hipóteses, provamos a convergência do método e ainda que o mesmo é, de fato, um método de regularização. A unicidade de solução do problema direto é garantida por hipóteses de Lipschitz continuidade e monotonia no operador diferencial. Taxas de convergência são estabelecidas no Capítulo 5. Primeiro, apresentamos uma nova *condição de fonte*, necessária para estabelecer taxas, que aplica-se a regularização de Tikhonov, assim como para o método sem derivadas. Além disso, fizemos uma discussão desta nova condição de fonte, construindo até mesmo, uma *função fonte*.

Pretendemos que o texto seja uma porta aberta para a vasta e crescente área de problemas inversos, tendo em mente como leitor, pessoas interessadas em matemática aplicada, mas não só matemáticos, como também engenheiros, físicos, etc. Por uma questão de objetividade e também para não prejudicar o propósito abstrato do texto, omitimos alguns detalhes técnicos assim como as demonstrações relativas a teoria clássica. Entretanto, procuramos apontar os resultados que assumimos como pré-requisitos e dar referências.

A lista de referências e eclética e heterogênea, incluindo textos de análise funcional, equações diferenciais parciais, problemas inversos e artigos especializados. Por uma questão de tempo, não realizamos experiências numéricas, porém deixamos aqui nosso pesar e a certeza de que trataremos este importante assunto em futuras investigações.

Capítulo 1

Regularização de Problemas Inversos

Neste capítulo apresentamos a regularização de Tikhonov e alguns métodos iterativos do tipo Landweber como opções de estratégias de regularização para problemas inversos. Condições suficientes são impostas no operador F para que tenhamos uma aproximação estável e convergente, em ambos os métodos, para a solução exata do problema. Em particular é dada maior ênfase à análise das fortes condições impostas na derivada de F afim de obter tais propriedades.

1.1 Problemas inversos e mal postos

Nas últimas duas décadas, problemas inversos enquadram-se em uma das áreas de maior crescimento em matemática aplicada. Isto deve-se certamente ao grande número de aplicações em outras áreas, como engenharia, geofísica, medicina e na ciência em geral. Entre estas aplicações, chamamos atenção aos problemas de identificação paramétrica em equações diferenciais, que apresentamos na introdução. De acordo com Engl [5], entendemos como problemas inversos aqueles que aparecem na tentativa de determinar causas através de efeitos observados. Mas quando usamos o termo *problema inverso*, somos tentados a perguntar:" inverso do quê ? ". Segundo J.B. Keller [8], dois problemas são inversos um do outro se a formulação de cada um envolve a solução do outro. Entre estes dois problemas escolhemos um para ser o *problema direto.* Por exempo, resolver uma equação diferencial parcial pelo conhecimento de seus parâmetros; o problema inverso, consiste na identificação dos parâmetros pelo conhecimento da respectiva solução. Para mais exemplos, veja [5]. Geralmente, problemas inversos correspondem a modelos matemáticos que não são bem postos. Segundo Hadamard, um problema matemático é bem posto se para todos os dados admissíveis, existe uma solução, a qual é única e depende continuamente dos dados. Se uma destas propriedades é violada, o problema é chamado mal posto.

Problemas inversos são frequentemente descritos por uma equação do tipo

$$F(q) = z, \tag{1.1}$$

em que F é um operador definido entre os espaços de Hilbert X e Y. Existem problemas relevantes em que F é linear, por exemplo, quando o modelo é descrito explicitamente por uma equação integral de primeira espécie (veja [2]), porém isso não acontece no caso geral. No contexto de identificação de parâmetros em equações diferenciais, o operador F associa a cada parâmetro q uma solução u_q da equação diferencial. Neste sentido, o problema inverso consiste na determinação de q pelo conhecimento de uma solução $z \in Y$. Em termos de (1.1), o critério de Hadamard pode ser reformulado afirmando que (1.1) é bem posto se o operador F é uma bijeção com inversa contínua.

Em aplicações práticas não conhecemos precisamente os dados, mas somente uma aproximação z^δ (não necessariamente pertencente a imagem de F) com

$$\|z - z^\delta\| \leq \delta, \tag{1.2}$$

onde $\delta > 0$ é chamado o *nível de ruído*, que pode ser interpretado como erros de modelagem, imprecisões nos aparelhos de medida, incertezas do modelo, etc. Muito frequentemente, temos que o problema (1.1) é mal posto, ou mal condicionado, e. g., quando o operador F é compacto (e não degenerado), não podendo assim ter inversa contínua. No caso de problemas não lineares, este mal condicionamento é dado localmente, veja [5] para detalhes. Existência e unicidade de solução para (1.1) não podem (em geral) ser garantidos no caso não linear. No caso em que existe solução para (1.1), a violação do terceiro critério de Hadamard é de especial importância, desde que dependência descontínua dos dados, associada com o mal condicionamento do problema, pode causar sérias dificuldades numéricas. Para contornar estas instabilidades, faz-se necessário o uso de algum método de regularização, afim de obter uma aproximação estável e convergente para a solução do problema inverso.

Em termos gerais, regularização é a aproximação de um problema mal posto por uma família de problemas bem postos. A maior dificuldade é que o cálculo de uma solução q_* de (1.1), sendo disponíveis somente dados com ruído z^δ, via F^{-1}, pode produzir soluções inadequadas devido a instabilidade do problema. Nesse sentido, procuramos por uma aproximação, digamos q_β^δ, de q_*, que possa ser calculada de maneira estável, isto é, que dependa continuamente dos dados perturbados z^δ, e por outro lado tenda para q_*, se o nível de ruído tende para zero e o parâmetro de regularização β é escolhido de maneira adequada. Veja [5] para escolhas a-priori ($\beta = \beta(\delta)$) e a-posteriori ($\beta = \beta(\delta, z^\delta)$) do parâmetro de regularização. Portanto, a escolha de β requer um balanço entre estabilidade e precisão para a solução regularizada q_β^δ. Nesse sentido, é indispensável para qualquer método de regularização um conhecimento da “qualidade” dos dados, isto é, de um limitante para (1.2). De outro modo, aproximações adequadas para a solução de (1.1) não podem ser construídas (veja [5]).

Uma vez provado que um método de aproximação é de fato um método de regularização, isto é, estabilidade $q_\beta^\delta \to q_\beta$ para $\delta \to 0$, e convergência $q_\beta^\delta \to q_*$ para $\beta, \delta \to 0$ são assegurados, existe uma outra dificuldade a ser contornada. Em geral, a convergência de um método de regularização para resolver o problema mal posto (1.1) pode ser arbitrariamente lenta. Portanto, taxas de convergência podem somente ser obtidas em subconjuntos de X, determinadas por informações a-priori sobre a solução exata q_*, ou equivalentemente sobre os dados z. Estas informações a-priori são formuladas em termos das chamadas *condições de fonte* (source condition). Quando falamos em taxas de convergência para um método de regularização, temos em mente a taxa que

$$\|q_\beta^\delta - q_*\| \to 0, \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.$$

Uma vez que tais taxas são interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto prático, é muito frequente a busca de um enfraquecimento destas condicões de fonte.

Na próxima Secção, tratamos de dois métodos de regularização muito bem sucedidos: 1) a regularização de Tikhonov, certamente uma das mais conhecidas estratégias de regularização, é abordada com ênfase nos problemas não lineares; 2) os métodos iterativos, que tem por si propriedades de regularização. Uma atenção especial é dada a iteração de Landweber, devido sua importância neste trabalho.

1.2 Regularização de Tikhonov

Seja $F : Q \subseteq X \to Y$ um operador, onde X e Y são espaços de Hilbert e $Q \subseteq X$ um conjunto de parâmetros admissíveis. Suponha que

- F é contínuo;
- F é fracamente fechado.

Para um fixo lado direito $z \in Y$, nosso objetivo é encontrar uma q_0-solução de norma mínima, denota-se por $q^\dagger$, da equação (1.1). Por definição, $q^\dagger$ satisfaz

$$F(q^\dagger) = z$$

e

$$\|q^\dagger - q_0\| = \min\{\|q_* - q_0\| \ ; \ F(q_*) = z\}$$

Aqui, q_0 é uma aproximação conhecida para a solução $q^\dagger$. Assumimos ainda que existe pelo menos uma q_0-solução de norma mínima, isto é, que z pertence a imagem de F. No caso de múltiplas soluções $q^\dagger$, q_0 pode ser usado como critério de seleção. Esta escolha geralmente depende de alguma(s) informação(ões) a-priori a respeito das soluções $q^\dagger$, se disponíveis. Na situação em que conhecemos somente dados com ruído z^δ satisfazendo,

$$\|z - z^\delta\| \leq \delta,$$

procuramos por uma aproximação q_β^δ, de $q^\dagger$, como o mínimo do funcional de Tikhonov

$$\|F(q) - z^\delta\|^2 + \beta\|q - q_0\|^2, \tag{1.3}$$

sendo $\beta > 0$ e $q \in Q$. As hipóteses estabelecidas em F garantem a existência de pelo menos um mínimo para (1.3). Além disso, com estas hipóteses temos:

- Estabilidade para um β fixo:
  Para seqüências z_k e q_k, onde $z_k \to z^\delta$ e q_k é um mínimo de (1.3) com z^δ substituido por z_k, existe uma subseqüência convergente de q_k, e o limite de qualquer subseqüência convergente é um mínimo de (1.3).

- Convergência:
  Para $\beta(\delta) \to 0$ com $\frac{\delta^2}{\beta(\delta)} \to 0$, $\delta \to 0$, qualquer seqüência $\{q_{\beta_k}^{\delta_k}\}$, em que $\delta_k \to 0$, $\beta_k = \beta(\delta_k) \to 0$, e $\{q_{\beta_k}^{\delta_k}\}$ é uma solução de (1.3), tem uma subseqüência convergente, e o limite de qualquer subseqüência convergente é uma q_0-solução de norma mínima.

De acordo com [5], para provar a taxa de convergência

$$\|q_\beta^\delta - q^\dagger\| = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}), \ \nu \in [1/2, 1], \tag{1.4}$$

para a solução regularizada q_β^δ obtida pela regularização de Tikhonov, com a escolha $\beta \sim \delta^{\frac{2}{2\nu+1}}$, hipóteses adicionais no operador F são necessárias, a saber:

- F é Fréchet diferenciável;

- existe $\gamma \geq 0$ tal que $\|F'(q^\dagger) - F'(q)\| \leq \gamma\|q^\dagger - q\|, \quad \forall q \in Q$ em uma bola de raio suficientemente grande centrada em $q^\dagger$;

- $\exists w \in Y$ satisfazendo a condição de fonte

$$q^\dagger - q_0 = (F'(q^\dagger)^* F'(q^\dagger))^\nu w; \tag{1.5}$$

- e a condição de suavidade

$$\gamma\|w\| < 1.$$

Aqui, $F'(q^\dagger)^*$ denota o operador adjunto Hilbertiano da derivada de Fréchet de F. Geralmente a condição de fonte (1.5) pode ser entendida como uma condição de suavidade em $q^\dagger - q_0$.

A teoria relativa a regularização de Tikhonov para problemas lineares está bem desenvolvida e detalhes podem ser encontrados em [5]. Para problemas não lineares, nos quais temos interesse especial, num primeiro instante a desvantagem da regularização de Tikhonov é a existência de mínimos locais, isto é, não temos unicidade de solução para o problema (1.3). Isto é acarretado devido a perda de convexidade do funcional de Tikhonov. Em vista disso, métodos iterativos podem ser uma interessante alternativa.

1.3 Regularização por métodos iterativos

Um primeiro candidato para resolver (1.1) de maneira iterativa é o *método de Newton*

$$q_{k+1} = q_k + F'(q_k)^{-1}(z - F(q_k)), \tag{1.6}$$

partindo de uma aproximação inicial q_0. Mesmo se tal iteração é bem definida e $F'(\cdot)$ é invertível para qualquer $q \in Q$, sua inversa é geralmente ilimitada para problemas mal postos (por exemplo, se F é contínuo e compacto). Nesse sentido, (1.6) é inapropriado pois em cada passo da iteração estariamos resolvendo um problema (linear) mal posto e então alguma técnica de regularização deveria ser usada. Por exemplo, aplicando a regularização de Tikhonov na linearização de (1.1) temos o *método de Levenberg-Marquardt* (veja [1])

$$q_{k+1} = q_k + (F'(q_k)^*F'(q_k) + \beta_k I)^{-1}F'(q_k)^*(z - F(q_k)), \tag{1.7}$$

sendo β_k números positivos. Adicionando em (1.7) o termo

$$-(\beta_k I + F'(q_k)^*F'(q_k))^{-1}\beta_k(q_k - \xi)$$

para adicional estabilização temos o *método de Gauss-Newton iterativamente regularizado* (veja [5])

$$q_{k+1} = q_k + (F'(q_k)^*F'(q_k) + \beta_k I)^{-1}[F'(q_k)^*(z - F(q_k)) - \beta_k(q_k - \xi)]. \tag{1.8}$$

Geralmente ξ é tomado como q_0, mas isto não é necessário. Assim como (1.7) e (1.8), muitos métodos iterativos para resolver (1.1) são baseados na solução da equação normal

$$F'(q)^*F(q) = F'(q)^*z \tag{1.9}$$

via sucessivas iteraçoẽs partindo de q_0. A equação (1.9) é uma condição de otimalidade (de primeira ordem) para o problema de mínimos quadrados não linear

$$\frac{1}{2}\|F(q) - z\|^2 \to \min, \quad q \in Q. \tag{1.10}$$

Uma outra maneira de resolver (1.10) é considerar o *método de descida máxima*

$$q_{k+1} = q_k + \alpha_k F'(q_k)^*(z - F(q_k)) \quad , k = 0, 1, 2, ... \tag{1.11}$$

em que α_k é escolhido adequadamente. Denotando as iterações por q_k^δ, no caso de dados com ruído z^δ, finalmente introduzimos a *iteração de Landweber*

$$q_{k+1}^\delta = q_k^\delta + F'(q_k^\delta)^*(z^\delta - F(q_k^\delta)), \tag{1.12}$$

a qual origina a discussão deste trabalho. Da mesma forma que anteriormente, a iteração começa com uma aproximação inicial q_0 (no caso de dados com ruído temos $q_0^\delta = q_0$) que pode ser incorporada a alguma informação a-priori em uma solução exata q_*. Podemos considerar ainda (1.12), em sua versão sem ruídos, como uma iteração de ponto fixo

$$q_{k+1} = \Phi(q_k)$$

para o operador

$$\Phi(q) = q + F'(q)^*(z - F(q)). \tag{1.13}$$

No entanto, Φ não é em geral, contrativo: por exemplo, se F é compacto com segunda derivada de Fréchet e X tem dimensão infinita, então $\lambda = 1$ pertence ao espectro de $\Phi'(q_*)$. Métodos iterativos para aproximação de pontos fixos de operadores não expansivos Φ, isto é,

$$\|\Phi(q) - \Phi(\widetilde{q})\| \le \|q - \widetilde{q}\|, \quad q, \widetilde{q} \in D(\Phi)$$

tem sido considerados atualmente. Neste caso, maior enfase é dada numa prova construtiva de pontos fixos para Φ (veja [11]). Em muitos exemplos práticos (e até mesmo teóricos) é quase impossível verificar analiticamente quando o operador Φ é não-expansivo ou não. No contexto de problemas não lineares esta dificuldade é ainda mais agravada (veja [12]).

Portanto, de acordo com [11], analizamos a convergência da iteração de Landweber (1.12) sob uma diferente hipótese: para alguma bola $B_\rho(q_0)$ de raio ρ e centrada em q_0 com

$$B_\rho(q_0) \subseteq Q \tag{1.14}$$

a derivada de Fréchet de F deve satisfazer

$$\|F(\widetilde{q}) - F(q) - F'(q)(\widetilde{q} - q))\| \leq \eta \|F(\widetilde{q}) - F(q)\|, \quad q, \widetilde{q} \in B_\rho(q_0), \quad \text{sendo} \quad \eta < \frac{1}{2}. \quad (1.15)$$

Além disso, se a derivada de Fréchet de F é (localmente) uniformemente limitada por um, isto é,

$$\|F'(q)\| \leq 1, \quad q \in B_\rho(q_0), \quad (1.16)$$

pelo menos convergência local de q_k (se $\delta = 0$) em (1.12) para uma solução q_* de (1.1) em $B_{\frac{\rho}{2}}(q_0)$ pode ser garantida.

Juntamente com (1.14) estas hipóteses também garantem que as iterações q_k permanecem no domínio Q, o que torna a iteração bem definida. No caso de dados com ruído z^δ, enfatizamos que, para um número finito de iterações, (1.12) é um algortimo estável mesmo se z^δ não pertence a imagem de F. No entanto, neste caso a iteração q_k^δ pode não convergir. Porém, (1.15) força novamente a iteração q_k^δ a permanecer em Q, dando assim uma aproximação estável e convergente se a iteração é parada no momento certo. Neste ponto chegamos a uma característica comum a todos o métodos iterativos que são usados como possíveis métodos de regularização. Um método iterativo pode somente ser um método de regularização (estabilidade e convergência) se temos um critério de parada para o mesmo, isto é, somente para um certo índice k_*, $q_{k_*}^\delta$ é uma aproximação estável e precisa para uma solução q_*, de (1.1). Critérios para garantir convergência para $q^\dagger$, no caso de ser única, podem ser encontrados em [11]. Existem dois tipos de critério de parada para a determinação de k_*: um a-priori, em que k_* depende somente do nível de ruído, isto é, $k_* = k_*(\delta)$; outro a-posteriori, onde k_* também depende dos dados, isto é, $k_* = k_*(\delta, z^\delta)$.

Uma escolha a-posteriori muito usada é o princípio de discrepância de Morozov, que determina k_* como

$$\|z^\delta - F(q_{k_*}^\delta)\| \leq \tau\delta < \|z^\delta - F(q_k^\delta)\|, \quad 0 \leq k < k_*, \quad (1.17)$$

sendo τ um número positivo dependendo de η (em (1.15)), isto é,

$$\tau > 2\frac{1 + 2\eta}{1 - 2\eta} > 2. \quad (1.18)$$

Em outras palavras, k_* é o primeiro índice para o qual a norma do resíduo $\|z^\delta - F(q_k^\delta)\|$ é da ordem de δ. Escolhas a-priori podem ser encontradas em [5].

Para satisfazer (1.16), eventualmente temos que reescrever o problema (1.1) na forma

$$\lambda F(q) = \lambda z. \quad (1.19)$$

Se λ é escolhido apropriadamente, então (1.16) é satisfeita, enquanto a condição (1.15) é invariante por mudança de escala no problema original, isto é, a exigência $\eta < \frac{1}{2}$ não pode ser enfraquecida. Mais adiante, veremos que a condição (1.15) pode ser interpretada como uma hipótese de aproximação (veja na Secção 3.1 quando estabelecemos (1.15) para equações lineares). Em [11] esta condição é comparada à estimativa

$$\|F(\widetilde{q}) - F(q) - F'(q)(\widetilde{q} - q)\| \leq C\|\widetilde{q} - q\|^2,$$

dada naturalmente pela expansão em série de taylor de F em torno de q, para F' lipschitz contínua. Em [12] uma interpretação geométrica para (1.15) é dada. Resumindo, a condição (1.15) pode ser vista como uma imposição na não linearidade de F, significando que a mesma não pode ser muito forte.

Conforme mencionamos na Secção anterior, em geral, a convergência $q_k \to q_*$ (no caso de dados exatos) ou $q^\delta_{k_*} \to q_*$, $\delta \to 0$, pode ser arbitrariamente lenta (veja [5]). Sendo assim, taxas de convergência para métodos iterativos de regularização podem somente ser obtidas por intermédio da seguinte condição de fonte

$$\exists w \in Y \;\; ; \;\; q_* - q_0 = (F'(q_*)^* F'(q_*))^\nu w \;\; \nu > 0, \tag{1.20}$$

com $\|w\|$ suficientemente pequeno. De forma análoga à regularização de Tikhonov, a condição (1.20) não é o bastante para provar taxas de convergência do tipo (1.4), com $0 < \nu \leq 1/2$, para a iteração de Landweber (1.12). Além disso, F deve satisfazer

$$F'(q) = R_q F'(q_*), \quad q \in B_\rho(q_0), \tag{1.21}$$

onde $\{R_q; q \in B_\rho(q_0)\}$ é uma família de operadores lineares limitados $R_q : Y \to Y$ com

$$\|R_q - I\| \leq C\|q - q_*\|, \quad q \in B_\rho(q_0) \tag{1.22}$$

para uma constante positiva C. Para um operador linear teriamos que $R_q = I$ e, portanto, (1.21) pode ser considerado como uma restrição adicional à não linearidade de F. Na demonstração de taxas de convergência dadas em [11], (1.21) e (1.22), bem como a Fréchet diferenciabilidade de F, são usadas para estimar o lado esquerdo de (1.15) para $\widetilde{q} = q_*$ como

$$\|F(q_*) - F(q) - F'(q)(q_* - q)\| \leq \frac{3}{2}C\|F'(q_*)(q - q_*)\|\|q - q_*\|, \tag{1.23}$$

o que mostra por outro lado que (1.23) implica (1.15) para ρ sufientemente pequeno. Neste sentido, (1.21) é mais forte que (1.15). Pode-se considerar ainda taxas de convergência para $q^\dagger$ (veja [11]).

As fortes restrições impostas pela teoria clássica de regularização para operadores não lineares exigiram recentemente a busca de novas alternativas. Entre elas, Scherzer propõe em [12], o uso de um operador $G(\cdot)$ no lugar de $F'(\cdot)$ e considera a seguinte *iteração de Landweber modificada*

$$q_{k+1}^{\delta} = q_k^{\delta} + G(q_k^{\delta})^*(z^{\delta} - F(q_k^{\delta})). \tag{1.24}$$

Assumindo (1.14),

$$\|G(q)\| \leq 1, \quad q \in B_{\rho}(q_0) \tag{1.25}$$

e uma condição de não linearidade modificada do tipo

$$\|F(\tilde{q}) - F(q) - G(q)(\tilde{q} - q)\| \leq \eta \|F(\tilde{q}) - F(q)\|, \quad q, \tilde{q} \in B_{\rho}(q_0), \tag{1.26}$$

com $\eta < 1/2$, foi provado que a iteração (1.24) juntamente com uma escolha de parâmetros de acordo com o princípio de discrepância (1.17) é um método de regularização.

Taxas de convergência para (1.24) foram obtidas sob a condição

$$G(\tilde{q}) = R_{\tilde{q}} G(q_*), \quad \tilde{q} \in B_{\rho}(q_0), \tag{1.27}$$

com (1.22), a condição de fonte (1.20) e a hipótese adicional

$$\|F'(q_*) - G(q_*)\| = \mathcal{O}(\delta), \tag{1.28}$$

sendo δ o nível de ruído nos dados.

Uma outra variante da iteração de Landweber, proposta também por Scherzer, em [13], é a seguinte iteração

$$q_{k+1}^{\delta} = q_k^{\delta} + F'(q_k^{\delta})^*(z^{\delta} - F(q_k^{\delta})) - \beta_k(q_k^{\delta} - \xi). \tag{1.29}$$

Resultados de convergência para (1.29) foram obtidos sob as condições de não linearidade (1.15) e limitação da derivada (1.16), enquanto que taxas de convergência foram provadas com base na condição de fonte (1.20) e em uma hipótese de Lipschitz continuidade na derivada do operador F. Para um certo comportamento de decaimento dos (estritamente positivos) parâmetros de regularização β_k, a taxa

$$\|q_{k_*(\delta)}^{\delta} - q_*\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta_{k_*}}\right) \tag{1.30}$$

foi obtida com o princípio de discrepância como critério de parada. Adotanto ainda um critério de parada a-priori (veja Secção 4.1) pode-se obter o seguinte resultado

$$\|q_{N_0(\delta)+1}^{\delta} - q_*\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right), \tag{1.31}$$

donde N_0 é o respectivo índice de parada.

O termo adicional de estabilização $-\beta_k(q_k^\delta - \xi)$ será adotado no estudo de taxas de convergência para o método sem derivadas que apresentamos no Capítulo 5.

Capítulo 2

Formulação dos Problemas Direto e Inverso

Neste Capítulo apresentamos uma formulação matemática para os problemas de identificação paramétrica em determinadas Equações Difenciais Parcias (EDP'S) Elípticas. Alguns exemplos de tais equações são apresentados.

Ao longo deste trabalho, X e Y denotam espaços de Hilbert e $Y_0 \subseteq Y$ um subespaço fechado de Y. Denotamos ainda por $(.,.)$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e norma, respectivamente, para X e Y. Considere também Y_0^* o dual (topológico) de Y_0, equipado com a dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e a aplicação de dualidade $J : Y_0^* \to Y_0$.

Uma vez dado um parâmetro $p \in X$, o problema direto consiste em resolver a EDP elíptica cuja formulação fraca é dada por

$$C(p)u = f \quad \text{em} \quad Y_0^*, \tag{2.1}$$

com $C(p) : Y_0 \to Y_0^*$ e o lado direito $f \in Y_0^*$. Supomos ainda que para cada $q \in Q$ o operador diferencial $C(q)$ é estritamente monótono e Lipschitz contínuo, isto é, existem constantes positivas α_1 e α_2 tais que

$$\alpha_1\|v-w\|^2 \leq \langle C(q)v - C(q)w, v-w\rangle, \quad v,w \in Y_0 \tag{2.2}$$

$$\langle C(q)v - C(q)w, y\rangle \leq \alpha_2\|v-w\|\|y\|, \quad v,w,y \in Y \tag{2.3}$$

sendo $Q \subseteq X$ um conjunto de parâmetros admissíveis.

Teorema 2.1 *Seja $q \in Q$ e $f \in Y_0^*$. Sob as condições* (2.2) *e* (2.3) *o problema* (2.1) *admite única solução u_q em Y_0, que denotamos por*

$$u_q = C(q)^{-1}f. \tag{2.4}$$

Demonstração. Veja [3].

□

Podemos então definir $F : Q \subseteq X \to Y$, como o operador que associa a cada $q \in Q$ a única solução u_q do problema direto (2.1). Como problema inverso, consideramos a identificação do parâmetro q em (2.1) pelo conhecimento de uma correspondente solução $z \in Y_0$. Sendo assim, temos um operador

$$F : Q \subseteq X \to Y, \quad q \mapsto u_q, \tag{2.5}$$

e formulamos o problema de identificação de parâmetros

$$F(q) = z, \tag{2.6}$$

isto é, para uma dada solução z de (2.1) queremos determinar um parâmetro q_* de tal modo que $u_{q_*} = z$. Neste caso, o problema inverso (2.6) é não linear, ou seja, F é um operador não linear, mesmo o problema direto (2.1) sendo linear. Embora ambos os operadores, $C(q)$ e F, estejam associados ao problema (2.1) seu significado não é o mesmo. Enquanto $C(q)$ simplesmente descreve o problema direto, $F(q)$ representa sua solução. Como consequência, propriedades como invertibilidade, monotonia e Lipschitz continuidade de $C(q)$ não valem para F.

No que segue, assumimos que z pertence a imagem de F, isto é, que existe um parâmetro $q_* \in Q$ tal que u_{q_*} é igual a z. Levando também em consideração dados perturbados, supomos que $z^\delta \in Y_0$ (não necessariamente na imagem de F) satisfaz

$$\|z^\delta - z\| \leq \delta. \tag{2.7}$$

Com respeito ao problema de indentificação de parâmetros assumimos ainda que: para todo $p \in X$ e $u \in Y_0$ o operador $C(p)$ satisfaz

$$C(p) = B + A(p)$$

com

$$A(\cdot)u \in \mathcal{L}(X, Y_0^*) \tag{2.8}$$

em que o operador B, possivelmente não linear, atua de Y_0 em Y_0^*.

Abaixo apresentamos alguns problemas modelos que enquadram-se no contexto abstrato exposto acima, em que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, com d igual a 1,2 ou 3, é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular. Com excessão do Exemplo 3, em que $Y = Y_0 = H^1(\Omega)$, nos demais Exemplos temos $Y_0 = H_0^1(\Omega)$ e $Y = H^1(\Omega)$.

Exemplo 1

$$\begin{aligned} -\nabla.(q(x)\nabla u) &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

com $B = 0$ *e*

$$\langle A(q)u, v\rangle = \int_\Omega q(x)\nabla u \nabla v dx, \tag{2.9}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} -\Delta u + q(x)u &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

com

$$\langle A(q)u, v\rangle = \int_\Omega q(x)uvdx,$$

e

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} -\nabla.(q(x)\nabla u) + bu &= f \quad em \quad \Omega \\ q\frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

em que A *é como em* (2.9) *e*

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega b(x)uvdx,$$

sendo η o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Exemplo 4

$$\begin{aligned} -\Delta u + q(u) &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

onde

$$\langle A(q)u, v\rangle = \int_\Omega q(u)vdx, \tag{2.10}$$

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx. \tag{2.11}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} -\nabla.(q(u)\nabla u) &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

com $B = 0$ *e*

$$\langle A(q)u, v\rangle = \int_\Omega q(u)\nabla u \nabla v dx. \tag{2.12}$$

Exemplo 6

$$\begin{aligned} -\nabla.(q(x)\nabla u) + b(u) &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \langle A(q)u, v\rangle &= \int_\Omega q(x)\nabla u \nabla v dx, \\ \langle Bu, v\rangle &= \int_\Omega b(u) v dx. \end{aligned}$$

Na Secção 4.2 apresentamos uma discussão detalhada dos Exemplos expostos acima, bem como os espaços de parâmetros adequados para que a teoria desenvolvida ao longo do texto fique bem posta. Veremos que a condição (2.8) é particularmente uma imposição de regularidade no espaço X. Para certos Exemplos, e.g., Exemplo 1 em altas dimensões, (2.8) requer um espaço de Hilbert X mais regular que o necessário para satisfazer (2.2) e (2.3). No próximo Capítulo, aplicamos os resultados relativos a teoria de regularização da Secção 1.3 para o problema inverso (2.6).

Capítulo 3

Identificação de Parâmetros pelos Métodos Clássico e Modificado de Landweber

Aplicamos a iteração de Landweber (1.12) para identificação de parâmetros em equações elípticas lineares e não lineares. Nossa discussão mostra que a teoria desenvolvida na Secção 1.3 parece restrita quando aplicada a identificação de parâmetros em tais equações. No que diz respeito a equações não lineares, mostramos que as modificações sugeridas na literatura parecem ainda não ser adequadas para tratar tais problemas num sentido mais amplo.

3.1 Método clássico para equações lineares elípticas

Supomos que o operador diferencial $C(p)$ dado em (2.1) é linear (Exemplos 1, 2 e 3). Neste caso, as condições (2.2) e (2.3) equivalem as seguintes hipóteses de Y_0-elípticidade e Y-contínuidade,

$$\alpha_1 \|u\|^2 \leq \langle C(q)u, u \rangle, \quad u \in Y_0 \tag{3.1}$$

$$\langle C(q)v, w \rangle \leq \alpha_2 \|v\| \|w\|, \quad v, w \in Y \tag{3.2}$$

$\forall q \in Q \subseteq X$.

No que segue, aplicamos os resultados relativos a teoria de regularização da Secção 1.3 para o problema inverso (2.6). Os resultados da Secção 1.3 bem como a iteração de Landweber são formulados em termos da derivada de Fréchet do operador F, nesse sentido precisamos de uma expressão para a mesma. Dado $q \in Q$, através de uma linearização formal do problema (2.1) na direção $p \in X$, temos que

$$C(q)u_q'p = -A(p)u_q, \tag{3.3}$$

em que o lado direito é devido linearidade de A$(\cdot)$ com respeito aos parâmetros. Por (2.8) temos que

$$A(p)u_q \in Y_0^*, \quad p \in X, \tag{3.4}$$

e, portanto, podemos definir a derivada de Fréchet de F em q por

$$F'(q) : X \to Y, \quad p \mapsto u_q' p,$$

sendo $u_q' p \in Y_0$ a única solução de (3.3), isto é,

$$u_q' p = -C(q)^{-1} A(p) u_q. \tag{3.5}$$

Dada a derivada de Fréchet de F, aplicamos formalmente a iteração de Landweber. Fazendo o produto interno de (1.12) com uma arbitrária função teste $p \in X$, temos a k-ésima iteração de Landweber como (no momento é suficiente considerar o caso sem ruídos, $\delta = 0$, pois a condição de não linearidade (1.15) não envolve δ.)

$$\begin{aligned} (q_{k+1}, p) &= (q_k, p) + (F'(q_k)^*(z - u_{q_k}), p) \\ &= (q_k, p) + (z - u_{q_k}, F'(q_k)p) \\ &= (q_k, p) - (z - u_{q_k}, C(q_k)^{-1} A(p) u_{q_k}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Visto que a segunda parcela do lado direito de (3.6) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (z - u_{q_k}, C(q_k)^{-1} A(p) u_{q_k}) &= (z - u_{q_k}, (JC(q_k))^{-1} JA(p) u_{q_k}) \\ &= ((JC(q_k))^{-1*}(z - u_{q_k}), JA(p) u_{q_k}) \\ &= \langle (JC(q_k))^{-1*}(z - u_{q_k}), JA(p) u_{q_k} \rangle \end{aligned}$$

a iteração de Landweber (na forma fraca) é dada por

$$(q_{k+1}, p) = (q_k, p) - \langle (JC(q_k))^{-1*}(z - u_{q_k}), JA(p) u_{q_k} \rangle. \tag{3.7}$$

Portanto, cada passo da iteração o método de Landweber requer não somente a solução do problema direto (2.1) mas também a solução do problema adjunto

$$C(q_k)^* \tilde{w} = z - u_{q_k}. \tag{3.8}$$

De acordo com a Secção 1.3 uma das condições suficientes para a convergência do método (3.7) é a limitação (local) uniforme da derivada de Fréchet do operador F, isto é,

$$\|F'(q)p\| \leq \hat{L} \|p\|, \quad q \in B_\rho(q_0), \quad p \in X. \tag{3.9}$$

Seja $w = F'(q)p$. Por (3.5) e (3.1) temos que

$$\alpha_1 \|F'(q)p\|^2 = \alpha_1 \|w\|^2 \leq \langle C(q)w, w \rangle = \langle -A(p)u_q, w \rangle = \langle -A(p)u_q, F'(q)p \rangle.$$

Portanto, uma condição suficiente para (3.9) é

$$|\langle A(p)\tilde{u}, \tilde{w} \rangle| \leq \|p\| \|\tilde{u}\| \|\tilde{w}\|, \quad p \in X, \quad \tilde{u}, \tilde{w} \in Y_0. \tag{3.10}$$

No entanto, se u_q é (localmente) limitada, isto é,

$$\|u_q\| \leq U, \quad q \in B_\rho(q_0)$$

temos por (3.10) que

$$\alpha_1 \|F'(q)p\|^2 \leq \langle -A(p)u_q, F'(q)p \rangle \leq \|p\| \|u_q\| \|F'(q)p\|$$

e, portanto,

$$\|F'(q)p\| \leq \frac{U}{\alpha_1} \|p\|, \quad q \in B_\rho(q_0),$$

isto é, F' é uniformemente limitada com constante de limitação $\hat{L} = \frac{U}{\alpha_1}$. A exigência original $\hat{L} < 1$ (veja (1.16)) pode ser suprida por uma mudança de escala no problema (2.6)(veja (1.19)).

Para garantir a convergência do método (3.7), precisamos ainda da condição de não linearidade (1.15). Consideremos

$$v = F(\tilde{q}) - F(q) - F'(q)(\tilde{q} - q),$$

para arbitrários, mas fixos $q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0)$. Então, usando as representações (2.4) e (3.5) bem como a linearidade de $C(q)^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} v &= C(\tilde{q})^{-1}f - C(q)^{-1}f + C(q)^{-1}A(\tilde{q})C(q)^{-1}f - C(q)^{-1}A(q)C(q)^{-1}f \\ &= C(q)^{-1}[C(q)(C(\tilde{q})^{-1}f - C(q)^{-1}f) + A(\tilde{q} - q)C(q)^{-1}f]. \end{aligned}$$

Devido ao fato que

$$A(q)u_q = A(\tilde{q})u_{\tilde{q}} + Bu_{\tilde{q}} - Bu_q$$

e a linearidade de $A(\cdot)$ com respeito aos parâmetros, temos

$$\begin{aligned} & C(q)(C(\tilde{q})^{-1}f - C(q)^{-1}f) + A(\tilde{q}-q)C(q)^{-1}f \\ = \; & [B + A(q)](u_{\tilde{q}} - u_q) + A(\tilde{q})u_q - A(q)u_q \\ = \; & A(q-\tilde{q})(u_{\tilde{q}} - u_q), \end{aligned}$$

e portanto,

$$v = C(q)^{-1}A(q-\tilde{q})[F(\tilde{q}) - F(q)]. \tag{3.11}$$

Por (3.1) e (3.10), obtemos

$$\alpha_1\|v\|^2 \leq \langle C(q)v, v\rangle = \langle A(q-\tilde{q})(u_{\tilde{q}} - u_q), v\rangle \leq \|q-\tilde{q}\|\|u_{\tilde{q}} - u_q\|\|v\|.$$

Isto é,

$$\|v\| = \|F(\tilde{q}) - F(q) - F'(q)(\tilde{q}-q)\| \leq \frac{\|q-\tilde{q}\|}{\alpha_1}\|F(\tilde{q}) - F(q)\|.$$

Como a condição de não linearidade (1.15) deve ser satisfeita para todo $q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0)$, devemos impor que

$$\rho < \frac{\alpha_1}{4}.$$

É importante observar que esta condição de suavidade no raio ρ é invariante por mudança de escala no problema inverso $F(q) = z$. Como a prova de convergência do método (3.7) requer que a solução (do problema inverso) pertença a $B_{\frac{\rho}{2}}(q_0)$, neste caso esta condição de não linearidade pode ser entendida como uma forte exigência (de suavidade) na aproximação inicial q_0.

No que diz respeito a taxas de convergência para a iteração (3.7), precisamos das condições (1.20) e (1.21) na derivada de Fréchet de F. Embora estas condições tenham sido verificadas em [11] para identificação de q (no caso unidimensional) no Exemplo 2, em [5] foi mostrado explicitamente que a imagem de $F'(q)^*$ não é invariante em q para a versão unidimensional do exemplo 1. Isto mostra que os resultados obtidos em [11] não podem, em geral, ser aplicados para a identificação de parâmetros em problemas lineares da forma (2.1). No que segue, abordamos alguns aspectos relativos a convergência para equações não lineares.

3.2 Método clássico para equações não lineares elípticas

Nesta Secção abordamos a identificação de parâmetros em equações não lineares elípticas cuja formulação fraca é da forma (2.1). Ilustramos esta situação com os Exemplos 4, 5 e 6. O interessante neste caso é que a linearidade de $A(\cdot)$ não contradiz a não linearidade de (2.1). Os exemplos acima mostram que a não linearidade do problema direto (2.1) pode ser devido ao parâmetro q e/ou ao operador B e que podemos ter problemas em que o parâmetro a ser identificado depende da variável de estado (Exemplos 4 e 5) ou somente da variável espacial (Exemplo 6).

Para resolver o problema inverso (2.6) pela iteração de Landweber (1.12), assim como no caso linear, precisamos da derivada de Fréchet do operador F. Por uma linearização formal de (2.1) na direção de $p \in X$ temos

$$\tilde{C}(q)u_q'p = -A(p)u_q, \tag{3.12}$$

em que o operador linear $\tilde{C}(q)$ pode conter expressões em $q(x)$, $q(u_q)$, $q'(u_q)$ e $b'(u_q)$. Aplicando (3.4) e supondo que $\tilde{C}(q)$ é um operador invertível definido em Y_0 e tomando valores em Y_0^*, isto é, $\tilde{C}(q) : Y_0 \to Y_0^*$, temos que a derivada de Fréchet de F é dada por

$$F'(q) : X \to Y, \quad p \mapsto u_q'p,$$

em que $u_q'p \in Y_0$ denota a única solução de (3.12), isto é,

$$u_q'p = -\tilde{C}(q)^{-1}A(p)u_q. \tag{3.13}$$

Portanto, de foma similar a (3.7), temos a k-ésima iteração de Landweber para equações não lineares dada por

$$(q_{k+1}, p) = (q_k, p) - \langle (J\tilde{C}(q_k))^{-1*}(z - u_{q_k}), JA(p)u_{q_k}\rangle. \tag{3.14}$$

Analogamente ao caso linear, cada passo da iteração, (3.14) requer a solução do problema (direto) não linear (2.1) bem como a solução de um problema linear adjunto

$$\tilde{C}(q_k)^*w = z - u_{q_k}. \tag{3.15}$$

Em relação à convergência de (3.14), deixamos de lado a questão da limitação da derivada de Fréchet de F e somente mencionamos que a condição (3.10) é imprescindível. Neste sentido, concentraremos nossos esforços para estabelecer a condição de não linearidade (1.15). Para $q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0)$, seja

$$v = F(\tilde{q}) - F(q) - F'(q)(\tilde{q} - q).$$

Usando as representações (2.4) e (3.13) temos

$$v = C(\tilde{q})^{-1}f - C(q)^{-1}f + \tilde{C}(q)^{-1}A(\tilde{q} - q)C(q)^{-1}f. \tag{3.16}$$

Daqui em diante gostariamos de proceder como no caso das equações lineares, o que fica impossível devido a não linearidade da equação que modela o problema direto. Embora ainda tenhamos

$$C(q)C(q)^{-1}f = f,$$

neste caso não temos a linearidade de $C(q)^{-1}$. Uma outra dificuldade na análise de (3.16) é o aparecimento de dois tipos de operadores, a saber, $C(\cdot)$ e $\tilde{C}(\cdot)$. Ao contrário do caso linear, quando trabalhamos com equações não lineares, até mesmo a verificação da condição de não linearidade (1.15) fica comprometida. Em relação a taxas de convergência, as condições impostas pela teoria tornaram-se tão restritivas que não podem nem mesmo ser aplicadas para equações lineares. Esta situação é ainda mais agravada no caso de equações não lineares.

Na próxima Secção aplicamos a iteração de Landweber modificada (1.24) para identificação de parâmetros em equações não lineares.

3.3 Método modificado para equações não lineares

Recentemente, em [12], foram consideradas sugestões para a escolha de $G(\cdot)$, em (1.24), para a versão unidimensional do Exemplo 1. No entanto, ainda não está claro como estender estas idéias para o caso de equações não lineares.

Motivados por (3.14), formulamos a iteração

$$(q_{k+1}, p) = (q_k, p) - \langle (JS(q_k))^{-1*}(z - u_{q_k}), JA(p)u_{q_k} \rangle \tag{3.17}$$

em que $S(\cdot) : Y_0 \to Y_0^*$ é um operador linear e invertível, ainda a ser definido. Considerando o operador linear $\tilde{L}(q) : X \to Y_0^*$ dado por

$$\tilde{L}(q)p = -A(p)u_q, \tag{3.18}$$

o qual é bem definido devido a (2.8), vemos que a iteração (3.17) corresponde a iteração de Landweber modificada (1.24) com a escolha especial de

$$G(q) = S(q)^{-1}\tilde{L}(q) \tag{3.19}$$

como operador de iteração.

Em relação a convergência de (3.17), simplesmente relacionamos a limitação de $G(\cdot)$ com a condição (3.10) ((1.25) pode novamente ser obtida por mudança de escala em (2.6)) e nos concentramos afim de estabelecer a condição de não linearidade (1.26). Para isso, defina

$$v = F(\tilde{q}) - F(q) - S(q)^{-1}\tilde{L}(q)(\tilde{q} - q),$$

para arbitrários mas fixos $q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0)$. Então

$$\begin{aligned} v &= S(q)^{-1}S(q)(u_{\tilde{q}} - u_q) - S(q)^{-1}\tilde{L}(q)(\tilde{q} - q) \\ &= S(q)^{-1}S(q)(u_{\tilde{q}} - u_q) - S(q)^{-1}[C(\tilde{q})u_{\tilde{q}} - C(\tilde{q})u_q)]. \end{aligned}$$

Sob a hipótese adicional (bastante restritiva)

$$C(q_0) \in \mathfrak{L}(Y_0, Y_0^*), \tag{3.20}$$

isto é, que (2.1) descreve um problema linear para $q = q_0$, e com a escolha especial

$$S(q) = C(q_0), \quad q \in B_\rho(q_0) \tag{3.21}$$

temos que

$$\begin{aligned} v &= C(q_0)^{-1}[(C(q_0)u_{\tilde{q}} - C(q_0)u_q + C(\tilde{q})u_q - C(\tilde{q})u_{\tilde{q}}] \\ &= C(q_0)^{-1}[A(q_0 - \tilde{q})u_{\tilde{q}} - A(q_0 - \tilde{q})u_q]. \end{aligned}$$

Considerando a hipótese (3.10) , uma condição de Lipschitz no parâmetro $\tilde{q}$ e uma forte condição de suavidade no raio ρ, a condição de não linearidade (1.26) pode ser pelo menos verificada para os Exemplos que satisfazem (3.20). No entanto, (3.20) pode somente ser válida para problemas não lineares da forma (2.1) com um operador linear B e/ou uma aproximação inicial q_0 constante. De fato, o Exemplo 6 não pode satisfazer (3.20). Os Exemplos 4 e 5 podem somente ser tratados se q_0 é uma função constante (no exemplo 4, $q_0 = 0$). Neste sentido, vemos que a escolha (3.19) não é adequada para garantir a convergência da iteração de Landweber modificada (1.24) quando aplicada para identificação de parâmetros em EDP'S elípticas não lineares.

Pensando em estabelecer taxas de convergência, sem falar na condição de fonte (1.20), vemos por (1.28), com $\delta = 0$, que a teoria de taxas de convergência relativa ao método modificado (veja (1.27) e (1.28)), juntamente com a escolha (3.21) não pode nem mesmo ser aplicada para identificação de parâmetros em equações não lineares satisfazendo (3.20). É claro que a discussão feita acima não exclui a possibilidade de existência de um operador de iteração $G(\cdot)$ adequado para a identificação de parâmetros em EDP'S elípticas da forma (2.1) e satisfazendo a condição de não linearidade (1.26) bem como (1.27) e (1.28). No entanto, embora a iteração (1.24) não exija a existência da derivada de F, sua existência e necessária para estabelecer (1.28) e (1.20).

Mesmo existindo outros método iterativos de regularização, diferentes do método de Landweber, uma análise completa de convergência, incluindo taxas, é somente disponível para poucos. Por exemplo, em [5], o método de Gauss-Newton iterativamente regularizado (1.8) é discutido. Neste caso, a condição de fonte (1.20) já é necessária para obter a convergência de (1.8). Enquanto a Lipschitz continuidade da derivada de Fréchet de F é o bastante (pelo menos para $\nu \in [1/2, 1]$) se a iteração é parada com uma escolha a-priori de parâmetros, o princípio de discrepância (1.17) somente garante convergência (taxas) se $\nu \in [0, 1/2]$ e F satisfaz

$$\begin{aligned} &F'(\tilde{q}) = R(\tilde{q}, q)F'(q) + Q(\tilde{q}, q) \\ &\|I - R(\tilde{q}, q)\| \leq C_R \qquad \tilde{q}, q \in B_{2\rho}(q_0) \\ &\|Q(\tilde{q}, q)\| \leq C_Q \|F'(q_*)(\tilde{q} - q)\| \end{aligned} \tag{3.22}$$

com ρ, C_R e C_Q suficientemente pequenos. Portanto, (1.8) parece não trazer vantagens em relação a (1.12), em termos de convergência e taxas, quando comparadas as condições impostas em ambos os casos.

Até aqui, procuramos colocar os limites da teoria clássica para a iteração de Landweber e suas variantes existentes na literatura. No entanto, ressaltamos que esta teoria tem sido bem desenvolvida para uma ampla classe de problemas inversos que consideramos neste trabalho. Tratando somente de uma subclasse de problemas de identificação de parâmetros em EDP'S elípticas lineares e não lineares, como fizemos acima, não é surpreza que a teoria clássica pareça restrita. Baseados nesta teoria, apresentamos no próximo Capítulo um método iterativo de regularização, proposto recentemente por Kügler (veja [14], [15] e [16]), que aproveita melhor a estrutura do problema direto em questão, sendo possível provar a convergência sob hipóteses mais fracas que aquelas exigidas anteriormente.

Capítulo 4

Identificação de Parâmetros pelo Método de Landweber Sem Derivadas

Neste capítulo apresentamos o método de Landweber sem derivadas para identificação de parâmetros em EDP'S elípticas que são descritas por operadores diferenciais estritamente monótonos e Lipschitz contínuos. Somente usando tais propriedades do operador diferencial, provamos a convergência do método para dados exatos e dados com ruídos, em combinação com o princípio de discrepância de Morozov assim como para uma escolha de parâmetros a-priori. Com excessão do Exemplo 5, que precisa de algumas modificações (veja Secção 4.4), os demais Exemplos poderão ser tratados naturalmente.

4.1 Análise de convergência

Para resolver o problema de identificação de parâmetros (2.6) de maneira estável, sugerimos o seguinte processo iterativo

$$(q_{k+1}^{\delta}, p) = (q_k^{\delta}, p) - \langle z^{\delta} - u_{q_k^{\delta}}, A(p)u_{q_k^{\delta}} \rangle \quad \forall p \in X, \tag{4.1}$$

partindo de uma aproximação inicial q_0, o qual é bem definido pois $z^{\delta} \in Y_0$. Comparando (4.1) com (3.14), vemos que simplesmente omitimos o problema adjunto (3.15), o que é equivalente a escolha $S = J^{-1}$ em (3.17).

Introduzindo o operador linear limitado $L(q) : X \to Y_0$, definido por

$$L(q)p = -JA(p)u_q, \tag{4.2}$$

o qual é bem definido devido a (2.8) e, portando, admite adjunto Hilbertiano $L(q)^*$, a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$q_{k+1}^{\delta} = q_k^{\delta} + L(q_k^{\delta})^*(z^{\delta} - u_{q_k^{\delta}}). \tag{4.3}$$

Já pensando em estudar taxas de convergência para o algorítmo (4.3), introduzimos uma seqüência de parâmetros de regularização β_k tais que

$$0 \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k \leq 1 \;\text{ e }\; \beta_k \to 0 \;\text{ se }\; k \to \infty, \tag{4.4}$$

e consideremos (momentaneamente) a iteração

$$q_{k+1}^{\delta} = q_k^{\delta} + \lambda L(q_k^{\delta})^*(z^{\delta} - u_{q_k^{\delta}}) - \beta_k(q_k^{\delta} - \xi). \tag{4.5}$$

Aqui, λ é um parâmetro de mudança de escala. O termo adicional de estabilização $-\beta_k(q_k^{\delta} - \xi)$, onde $\xi \in X$ é geralmente escolhido como q_0, é motivado pelo método de Gauss-Newton iterativamente regularizado (1.8) e foi também usado em [13] para a versão (1.29) da iteração de Landweber.

No que diz respeito às demonstrações feitas ao longo deste Capítulo, os parâmetros $\beta_k's$ poderiam ser de fato omitidos. Levando em consideração a importância dos mesmos no estabelecimento de taxas de convergência (veja Capítulo 5) admitimos desde já a presença dos mesmos. Como no caso do método clássico de Landweber, a iteração (4.5) convergirá somente se o operador de iteração $L(\cdot)^*$ é localmente (uniformemente) limitado e o parâmetro de mudança de escala λ é escolhido adequadamente. Sendo assim, assumimos que

$$\|L(q)\| \leq \hat{L}, \quad q \in B_\rho(q_0) \tag{4.6}$$

donde a bola $B_\rho(q_0)$ satisfaz

$$B_\rho(q_0) \subseteq Q. \tag{4.7}$$

Assumindo (2.2), (2.3) e (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|u_q - u_{\tilde{q}}\|^2 &\leq \langle C(\tilde{q})u_q - C(\tilde{q})u_{\tilde{q}}, u_q - u_{\tilde{q}} \rangle \\ &= \langle A(\tilde{q})u_q - A(q)u_q, u_q - u_{\tilde{q}} \rangle \\ &= (L(q)(q - \tilde{q}), u_q - u_{\tilde{q}}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

para $q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0)$. Portanto, a equação (4.6) pode ser entendida como uma condição suficiente para a Lipschitz continuidade (local) do operador F com constante de Lipschitz $\hat{L}/\alpha_1$, isto é,

$$\|F(q) - F(\tilde{q})\| \leq \frac{\hat{L}}{\alpha_1}\|q - \tilde{q}\| \quad q, \tilde{q} \in B_\rho(q_0). \tag{4.9}$$

Como critério de parada (necessário para tratar o método na presença de ruídos nos dados) para (4.5), consideremos o princípio de discrepância

$$\|z^\delta - u_{q^\delta_{k_*}}\| \leq \tau\delta < \|z^\delta - u_{q^\delta_k}\|, \quad 0 \leq k < k_*, \tag{4.10}$$

em que τ pode depender de $\lambda, \hat{L}, \beta_0$ e das constantes α_1 e α_2, assim como um critério de parada a-priori (veja (4.16)) .

Em geral, a análise de um método iterativo de regularização segue um esquema básico. Primeiro, prova-se que as iterações permanecem no domínio de definição do operador F, contanto que um determinado critério de parada seja obedecido. Em seguida, mostramos a convergência da iteração q_k ,no caso sem ruídos, baseado no comportamento do resíduo para os dados calculados. Na presença de ruídos nos dados, o critério de parada é usado para obter as propriedades de regularização para o método iterativo.

Na análise de convergência para (4.5), embora a abordagem usada seja a mesma que em [13], os resultados não requerem a diferenciabilidade do operador F nem a condição de não linearidade (1.15) ou (1.26).

Começamos com um Lema auxiliar, com respeito aos parâmetros de regularização β_k.

Lema 4.1.1 *Sejam $l, k \in \mathbb{N}_0, l < k$. Se $\{\beta_s\}$ satisfaz (4.4), então*

$$1 - \prod_{s=l}^{k}(1-\beta_s) = \sum_{j=l}^{k}\beta_j \prod_{s=j+1}^{k}(1-\beta_s) \leq 1.$$

Além disso, se

$$\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k < \infty, \tag{4.11}$$

então $\prod_{k=0}^{\infty}(1-\beta_k)$ é convergente e, portanto,

$$\prod_{k=l}^{\infty}(1-\beta_k) \to 1 \quad se \quad l \to \infty. \tag{4.12}$$

No que segue, mostramos que a iteração de Landweber (4.5) é bem definida, isto é, que as iterações permanecem no dominio de definição do operador. Por simplicidade, denotamos a solução do problema direto (2.1) correspondente a k-ésima iteração q_k^δ simplismente por u_k.

Proposição 4.1.1 (Monotonia) *Assuma (2.2), (2.3) e (2.8). Sejam L satisfazendo (4.6) e $\{\beta_k\}$ satisfazendo (4.4) e (4.11). Suponha que q_* é uma solução de (2.6) em $B_{\rho/8}(q_0) \cap B_{\rho/8}(\xi)$, onde q_0 e ξ são definidos como em (4.5). Além disso, escolha os* *parâmetros λ e τ tais que*

$$(1-\beta_0)(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\tau}) - \lambda \hat{L}^2 \geq D \tag{4.13}$$

onde D é uma constante positiva e fixa.

- *Critério de parada a-posteriori: Seja k_* o índice de parada para a iteração* (4.5) *escolhido de acordo com* (4.10) *em que τ satisfaz* (4.13). *Então, para qualquer* $0 \leq k < k_*$, *temos*

$$q_{k+1}^\delta \in B_\rho(q_0) \tag{4.14}$$

e

$$\|q_* - q_{k+1}^\delta\| \leq \|q_* - q_k^\delta\|(1-\beta_k) + \frac{\rho}{4}\beta_k \leq \frac{\rho}{2}. \tag{4.15}$$

- *Critério de parada a-priori: Se*

$$\frac{\delta}{\beta_k} \leq \tilde{C}, \quad 0 \leq k \leq N_0, \quad e \quad \frac{\delta}{\beta_k} > \tilde{C} \;\; para \;\; k = N_0 + 1, \tag{4.16}$$

com $\tilde{C} \leq \frac{\rho}{8}\frac{\tilde{L}}{\alpha_2}$ e se

$$\alpha_1(1-\beta_0) - \lambda \hat{L}^2 \geq \tilde{E}, \tag{4.17}$$

em que $\tilde{E}$ é uma constante positiva e fixa, então para qualquer $0 \leq k \leq N_0$, *obtemos* (4.14) *assim como* (4.15).

Demonstração. A hipótese de aproximação $q_* \in B_{\rho/8}(q_0) \cap B_{\rho/8}(\xi)$ implica $B_{\rho/2}(q_*) \subseteq B_\rho(q_0)$ e, em particular,

$$\|q_0 - q_*\| \leq \rho/2.$$

Por indução, supomos que

$$\|q_k^\delta - q_*\| \leq \rho/2 \tag{4.18}$$

para $k < k_*(\delta)$. Então, no k-ésimo passo a iteração (4.5) é bem definida e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 = (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 + \beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 + \lambda^2\|L(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_k)\|^2 \\
-2\beta_k(1-\beta_k)(q_k^\delta - q_*, q_* - \xi) \\
-2(1-\beta_k)\lambda(z^\delta - u_k, L(q_k^\delta)(q_* - q_k^\delta)) \\
+2\beta_k\lambda(\xi - q_*, L(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_k)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

As seguintes considerações tem um papel decisivo na nossa análise e são possíveis devido à estrutura especial do operador (4.2). Por (4.2), (2.8) e

$$A(q_*)z + Bz = A(q_k^\delta)u_k + Bu_k \;\; \text{em} \;\; Y_0^*,$$

temos

$$
\begin{aligned}
&-(z^\delta - u_k, L(q_k^\delta)(q_* - q_k^\delta)) \\
&= \langle z^\delta - u_k, A(q_* - q_k^\delta)u_k\rangle \\
&= \langle z^\delta - u_k, A(q_*)u_k - A(q_*)z\rangle + \langle z^\delta - u_k, Bu_k - Bz\rangle \\
&= \langle z^\delta - u_k, C(q_*)u_k - C(q_*)z\rangle \\
&= -\langle z^\delta - u_k, C(q_*)z^\delta - C(q_*)u_k\rangle + \langle z^\delta - u_k, C(q_*)z^\delta - C(q_*)z\rangle \\
&\leq -\alpha_1\|z^\delta - u_k\|^2 + \alpha_2\|z^\delta - u_k\|\|z^\delta - z\|,
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

em que a desigualdade é dada por (2.2) e (2.3). A estimativa (4.20) faz a condição de não linearidade (1.26), usada no método clássico (veja [13]) desnecessária. Por (4.6) e (2.7) temos ainda que

$$
\begin{aligned}
\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 \leq (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 &+ 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 \\
&-2\beta_k(1-\beta_k)\|q_k^\delta - q_*\|\|q_* - \xi)\| \\
&+2\|z^\delta - u_k\|^2\lambda(\lambda\hat{L}^2 - \alpha_1(1-\beta_k)) \\
&+2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\lambda\|z^\delta - u_k\|.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Parando a iteração de acordo com (4.10), para $k < k_* = k_*(\delta)$ temos

$$
\begin{aligned}
&\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 - 2\lambda\Big(\lambda\hat{L}^2 - (1-\beta_k)(\alpha_1 - \frac{\alpha}{\tau})\Big)\|z^\delta - u_k\|^2 \\
&\leq (\|q_k^\delta - q_*\|(1-\beta_k) + \sqrt{2}\beta_k\|q_* - \xi\|)^2.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Devido a (4.13), finalmente chegamos ao seguinte resultado

$$
\|q_{k+1}^\delta - q_*\| \leq \|q_k^\delta - q_*\|(1-\beta_k) + \frac{\sqrt{2}\rho}{8}\beta_k \leq \|q_k^\delta - q_*\|(1-\beta_k) + \frac{\rho}{4}\beta_k. \tag{4.23}
$$

Indutivamente, para $0 \leq k < k_*$, segue que

$$
\|q_{k+1}^\delta - q_*\| \leq \|q_0 - q_*\|\prod_{j=0}^{k}(1-\beta_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k}\beta_j\prod_{i=j+1}^{k}(1-\beta_i), \tag{4.24}
$$

e portanto (veja Lema 4.1.1)

$$
\|q_{k+1}^\delta - q_*\| \leq \frac{\rho}{2},
$$

completando assim a indução iniciada em (4.18). Com

$$
\|q_{k+1}^\delta - q_0\| \leq \|q_{k+1}^\delta - q_*\| + \|q_* - q_0\| < \rho,
$$

finalmente temos também que $q_{k+1}^\delta \in B_\rho(q_0)$. Juntamente com (4.7), esta estimativa mostra particularmente que o método (4.5) é bem definido, ou seja, que todas iterações q_k^δ, para $0 \le k < k_*$, permanecem no domínio de definição do operador F.

Consideremos agora o caso em que tomamos a escolha a-priori (4.16): De (4.9) obtemos

$$\|z^\delta - u_k\| \le \delta + \|z - u_k\| \le \delta + \frac{\hat{L}}{\alpha_1}\|q_k^\delta - q_*\|.$$

Então, com (4.16), podemos estimar o último termo em (4.21) por

$$2\beta_k\alpha_2\tilde{C}(1-\beta_k)\lambda\left(\tilde{C}\beta_k + \frac{\hat{L}}{\alpha_1}\|q_k^\delta - q_*\|\right),$$

implicando que

$$\begin{aligned}\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 \le{}& (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 && (4.25)\\ &+2\beta_k^2\left(\|q_* - \xi\|^2 + (1-\beta_k)\lambda\tilde{C}^2\alpha_2\right)\\ &+2\beta_k(1-\beta_k)\|q_k^\delta - q_*\|\left(\|q_* - \xi\| + \lambda\frac{\hat{L}}{\alpha_1}\tilde{C}\alpha_2\right)\\ &+2\|z^\delta - u_k\|^2\lambda(\lambda\hat{L}^2 - \alpha_1(1-\beta_k)). && (4.26)\end{aligned}$$

Com $\lambda\hat{L}^2 \le \alpha_1$(veja (4.17)), o limitante $\tilde{C}$, $\alpha_1 < \alpha_2$ e a hipótese que $q_* \in B_{\frac{\rho}{8}}(q_0) \cap B_{\frac{\rho}{8}}(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned}&\|q_* - \xi\| + \lambda\frac{\hat{L}}{\alpha_1}\tilde{C}\alpha_2 = \|q_* - \xi\| + \lambda\frac{\hat{L}^2}{\alpha_1}\frac{\tilde{C}}{\hat{L}}\alpha_2 \le \frac{\rho}{8} + \frac{\rho}{8} = \frac{\rho}{4},\\ &\sqrt{2\big(\|q_* - \xi\|2 + \lambda\tilde{C}\alpha_2\big)} < \frac{\rho}{4}. && (4.27)\end{aligned}$$

Portanto, (4.26) e (4.17) implicam que

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\| \le \|q_k^\delta - q_*\|(1-\beta_k) + \frac{\rho}{4}\beta_k,$$

para a qual podemos continuar como anteriormente.

A condição (4.13) pode ser satisfeita escolhendo parâmetros β_0, λ suficientemente pequenos e τ suficientemente grande. O uso de um τ "grande"no princípio de discrepância (4.10) pode tornar o término da iteração um tanto prematuro. Entretanto, este "problema"aparece também no método clássico (por exemplo, considere $\eta \to 1/2$ em (1.18)). Em [14] esta situação foi remediada medindo o erro nos dados em uma norma fraca e considerando assim, um princípio de discrepância modificado. Em contrapartida, (4.10) não requer (em situações práticas) o uso de constantes desconhecidas η, mas sim depende de quantidades associadas ao problema direto. O próximo Lema é um resultado preliminar para a convergência de (4.5).

Lema 4.1.2 *Considere as hipóteses da Proposição 4.1.1.*

- *Se a iteração* (4.5) *é parada de acordo com a escolha de parâmetros a-posteriori* (4.10)*, onde* τ *e* D *satisfazem* (4.13)*, então*

$$\sum_{k=0}^{k_*-1} \|z^\delta - u_k\| \leq \frac{\rho^2}{128\lambda D\tau\delta}\Big(1 + (8\sqrt{2}+2)\sum_{k=0}^{k_*-1}\beta_k\Big). \tag{4.28}$$

- *Se a iteração* (4.5) *é parada de acordo com a escolha de parâmetros a-priori* (4.16)*, onde* $\hat{L}$ *e* α_1 *satisfazem* (4.17)*, então*

$$\sum_{k=0}^{N_0} \|z^\delta - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{2\lambda\tilde{E}}\Big(\frac{1}{64} + \sum_{k=0}^{N_0}\beta_k\Big). \tag{4.29}$$

- *No caso de dados sem ruídos, assumindo* (4.11) *e* (4.17) *, temos que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|z - u_k\|^2 < \infty. \tag{4.30}$$

Demonstração. Pela Proposição 4.1.1 sabemos que $\|q_k^\delta - q_*\| \leq \rho/2$ para $0 \leq k < k_*$. Usando o fato de $\beta_k \leq 1$ temos

$$\beta_k(1-\beta_k)\|q_k^\delta - q_*\|\|q_* - \xi\| \leq \beta_k\frac{\rho^2}{16} \quad \text{e} \quad \beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 \leq \beta_k\frac{\rho^2}{16}.$$

Usando estas estimativas em (4.22) segue que

$$\begin{aligned}
&\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 + 2\lambda D\|z^\delta - u_k\|^2 \\
&\leq \|q_k^\delta - q_*\|^2(1-\beta_k)^2 + 2\sqrt{2}\beta_k(1-\beta_k)\|q_k^\delta - q_*\|\|q_* - \xi\| + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 \\
&\leq \|q_k^\delta - q_*\|^2 + \rho^2\big(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\big)\beta_k
\end{aligned}$$

e assim podemos concluir que

$$2\lambda D\sum_{k=0}^{k_*-1}\|z^\delta - u_k\|^2 \leq \sum_{k=0}^{k_*-1}\big(\|q_k^\delta - q_*\|^2 - \|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2\big) + \rho^2\big(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\big)\sum_{k=0}^{k_*-1}\beta_k.$$

Logo, pelo principio de discrepância (4.10) e a hipótese de aproximação (4.18) em q_0 temos

$$\tau\delta\sum_{k=0}^{k_*-1}\|z^\delta - u_k\| \leq \sum_{k=0}^{k_*-1}\|z^\delta - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{128\lambda D}\Big(1 + (8\sqrt{2}+2)\sum_{k=0}^{k_*-1}\beta_k\Big).$$

No que diz repeito a (4.29), segue de (4.26) e (4.27) que

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 + 2\lambda\tilde{E}\|z^\delta - u_k\|^2 \leq (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 + \beta_k\rho^2$$

para $0 \leq k \leq N_0(\delta)$, o implica

$$\sum_{k=0}^{N_0} \|z^\delta - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{2\lambda\tilde{E}}\Big(\frac{1}{64} + \sum_{k=0}^{N_0}\beta_k\Big)$$

No caso de dados sem ruídos, isto é $\delta = 0$, por (4.21) e (4.17) temos

$$\|q_{k+1} - q_*\|^2 + 2\lambda E\|z - u_k\|^2$$

$$\leq \|q_k - q_*\|^2(1-\beta_k)^2 + 2\sqrt{2}\beta_k(1-\beta_k)\|q_k - q_*\|\|q_* - \xi\| + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2.$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, as iterações q_k permanecem em $B_\rho(q_0)$ de forma que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|z - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{128\lambda\tilde{E}}\left(1 + (8\sqrt{2}+2)\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\right).$$

□

A estimativa (4.30) mostra que, no caso de dados sem ruídos, a norma do resíduo ao longo das iterações tende para zero quando $k \to \infty$. Portanto, se a iteração converge, o limite é certamente uma solução do problema (2.6). Se tivermos ruídos nos dados, (4.28) garante a existência de um único índice k_* tal que $\|z^\delta - u_k\| > \tau\delta$ para $k < k_*$, mas é violado para $k = k_*$. Para a escolha especial $\beta_k = 0$, com a estimativa (4.28) e o princípio de discrepância (4.10) temos seguinte relação

$$k_*(\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$$

entre o índice de parada k_* e o nível de ruído δ.

Teorema 4.1.1 (Convergência) *Seja $\delta = 0$ em* (2.7) *e $\{\beta_k\}$ satisfazendo* (4.4) *e* (4.11). *Além disso, assuma* (4.17), (4.6) *e as hipóteses* (2.2), (2.3) *e* (2.8). *Se* (2.6) *admite solução q_* em $B_{\rho/8}(q_0) \cap B_{\rho/8}(\xi)$, então q_k converge para $q_* \in B_\rho(q_0)$.*

Demonstração. Seja $\tilde{q}$ uma solução de (2.6) em $B_{\rho/8}(q_0) \cap B_{\rho/8}(\xi)$, isto é, $u_{\tilde{q}} = z$, e considere

$$e_k = q_k - \tilde{q}.$$

Então, para cada $n \geq m$,

$$e_{n+1} = e_m \prod_{j=m}^{n}(1-\beta_j) + \lambda \sum_{j=m}^{n}\left(\prod_{s=j+1}^{n}(1-\beta_s)\right)L(q_j)^*(z-u_j)$$

$$-\left(1-\prod_{j=m}^{n}(1-\beta_j)\right)(\tilde{q}-\xi). \tag{4.31}$$

Primeiramente, verificaremos que $\|e_k\|_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente: Como $\|e_k\|_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada (veja Proposição 4.1.1), $\|e_k\|_{k\in\mathbb{N}}$ têm uma subseqüência convergente $\|e_{n(k)}\|_{k\in\mathbb{N}}$, para algum $\varepsilon \geq 0$. Seja $\|e_{s(l)}\|_{l\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência qualquer de $\|e_k\|_{k\in\mathbb{N}}$. Dado $l \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, denotamos por $\hat{k}(l)$ o maior índice para o qual ainda temos $s(l) > n(k)$. Usando esta notação, segue de (4.24) que

$$\|e_{s(l)}\| \leq \|e_{n(\hat{k}(l))}\| \prod_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}\alpha_j \prod_{r=j+1}^{s(l)-1}(1-\alpha_r).$$

Portanto, pelo Lema 4.1.1 temos

$$\left|\|e_{s(l)}\| - \|e_{n(\hat{k}(l))}\|\right| \to 0, \quad \text{se} \ \ l \to \infty. \tag{4.32}$$

Como $\|e_{n(\hat{k}(l))}\| \to \varepsilon$, se $l \to \infty$, segue de (4.32) que

$$\|e_{s(l)}\| \to \varepsilon, \quad \text{se} \ \ l \to \infty.$$

Isto mostra que

$$\|e_k\| \to \varepsilon, \quad \text{se} \ \ k \to \infty, \tag{4.33}$$

sendo ε uma constante não negativa. O próximo passo e mostrar que $\{e_k\}$ é uma seqüência de Cauchy. Para $j \geq k$, escolhemos l com $j \geq l \geq k$ tal que

$$\|z-u_l\| \leq \|z-u_i\|, \quad k \leq i \leq j. \tag{4.34}$$

Temos ainda que

$$\|e_j - e_k\| \leq \|e_j - e_l\| + \|e_l - e_k\| \tag{4.35}$$

e

$$\|e_j - e_l\|^2 = 2(e_l - e_j, e_l) + \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2,$$

$$\|e_l - e_k\|^2 = 2(e_l - e_k, e_l) + \|e_k\|^2 - \|e_l\|^2. \tag{4.36}$$

Por (4.33) temos que os dois últimos termos de cada lado direito de (4.36) convergem para 0 se $k \to \infty$. De (4.31) segue que

$$
\begin{aligned}
|(e_l - e_j, e_l)| \le \|e_l\|^2 & \left(1 - \prod_{s=l}^{j-1}(1-\beta_s)\right) \\
& + \lambda \left| \sum_{s=l}^{j-1} \left(\prod_{r=s+1}^{j-1} (1-\beta_r) \right) (z - u_s, L(q_s)(\tilde{q} - q_l)) \right| \\
& + \left(1 - \prod_{s=l}^{j-1}(1-\beta_s)\right) |(\tilde{q} - \xi, q_l - \tilde{q})| \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Para $k \to \infty$, $\prod_{s=l}^{\infty}(1-\beta_s) \to 1$ e, portanto,

$$
1 \ge \prod_{s=l}^{j-1}(1-\beta_s) \ge \prod_{s=l}^{\infty}(1-\beta_s) \to 1.
$$

Como $\|e_k\|$ é limitada, o primeiro termo no lado direito de (4.37) tende para zero. De forma similar mostra-se que o terceiro termo também desaparece quando $k \to \infty$. Para estimar o segundo termo em (4.37) seguimos as mesmas idéias de [13]. Porém, evitamos o uso das condições de não linearidade e/ou diferenciabilidade em F. Por (4.2), (2.8) e

$$
A(q_r)u_r + Bu_r = A(\tilde{q})z + Bz \quad \text{em} \quad Y_0^*,
$$

$$
A(q_r)u_r + Bu_r = A(q_l)u_l + Bu_l \quad \text{em} \quad Y_0^*
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
(z - u_r, L(q_r)(\tilde{q} - q_l)) &= -\langle A(\tilde{q} - q_l)u_r, z - u_r\rangle \\
&= -\langle A(\tilde{q} - q_r)u_r, z - u_r\rangle \\
&\quad -\langle A(q_r - q_l)u_r, z - u_r\rangle \\
&= \langle A(\tilde{q})z - A(\tilde{q})u_r, z - u_r\rangle \\
&\quad +\langle Bz - Bu_r, z - u_r\rangle \\
&\quad -\langle A(q_l)u_l - A(q_l)u_r, z - u_r\rangle \\
&\quad -\langle Bu_l - Bu_r, z - u_r\rangle. \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Desta relação, (4.34) e (2.3) segue que

$$
\lambda \left| \sum_{s=l}^{j-1} \left(\prod_{r=s+1}^{j-1} (1-\beta_r) \right) (z - u_s, L(q_s)(\tilde{q} - q_l)) \right|
$$

$$\leq \lambda\alpha_2 \sum_{s=l}^{j-1} \|z - u_s\|(2\|z - u_s\| + \|z - u_l\|)$$

$$\leq 3\lambda\alpha_2 \sum_{s=l}^{j-1} \|z - u_s\|^2.$$

Portanto, a Proposição 4.1.1 garante também que o segundo termo do lado direito de (4.37) tende para zero, quando $k \to \infty$. Sendo assim, temos

$$|(e_l - e_j, e_l)| \to 0$$

e, analogamente,

$$|(e_l - e_k, e_l)| \to 0.$$

Usando (4.33), temos (j e l dependem de k)

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|e_j - e_l\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} (2(e_l - e_j, e_l) + \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2) = 0$$

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|e_l - e_k\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} (2(e_l - e_k, e_l) + \|e_k\|^2 - \|e_l\|^2) = 0$$

Portanto, o lado direito de (4.36) tende para zero quando $k \to \infty$ e, assim, podemos concluir com (4.35) que e_k, e portanto q_k, são seqüências de Cauchy. Denotanto o limite de q_k por q_*, concluimos que q_* é uma solução de (2.6), pois o resíduo $z - u_k$ converge para zero quando $k \to \infty$, veja Lema 4.1.2.

□

Em presença de ruídos nos dados, o próximo Teorema mostra que o princípio de discrepância (4.10), assim como a escolha de parâmetros a-priori (4.16), fazem do método de Landweber sem derivadas (4.5) um método de regularização. De fato, esta demonstração independe do operador de iteração e, portanto, é idêntica aquela apresentada em [11] e [13].

Teorema 4.1.2 (Regularização) *Seja* $\{\beta_k\}$ *satisfazendo* (4.4) *e* (4.11)*. Suponha* (2.7), (4.6), (4.17) *assim como* (2.2), (2.3) *e* (2.8)*. Além disso, assumimos que* (2.6) *admite solução em* $B_{\rho/8}(q_0) \cap B_{\rho/8}(\xi)$*.*

- *Se a iteração* (4.5) *é parada em* $k_*(\delta)$ *de acordo com o princípio de discrepância* (4.10), (4.13), *então*
$$q^\delta_{k_*(\delta)} \to q_*, \quad \delta \to 0.$$
- *Se a iteração* (4.5) *é parada em* $N_0(\delta)$ *de acordo com* (4.16), *e se* $\{\beta_k\}$ *é estritamente monotonicamente decrescente com* $\beta_k > 0$, *temos que*
$$q^\delta_{N_0(\delta)} \to q_*, \quad \delta \to 0.$$

Demonstração. Seja $\delta_n, n = 1, 2, ...,$ uma seqüência de ruídos convergindo para zero quando $n \to \infty$ e $z^n := z^{\delta_n}$ a correspondente seqüência de dados. Para cada par (δ_n, z^n) denotamos por $k_n = k_*(\delta_n)$ o correspondente índice de parada escolhido de acordo com o princípio de discrepância (4.10), (4.13). Assumimos inicialmente que k é um ponto de acumulação finito de k_n. Sem perda de generalidade supomos que $k_n = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela definição de k_n segue que

$$\|z^n - u_k^n\| \leq \tau\delta_n. \tag{4.39}$$

Usando a dependência contínua de q_k^δ em relação a z^δ, para um fixo k, temos que

$$q_k^{\delta_n} \to q_k, \quad u_k^n \to u_k, \quad n \to \infty. \tag{4.40}$$

Passando o limite em (4.39) temos $u_k = z$. Portanto, de acordo com o Teorema 4.1.1, $q_k = q_*$ e

$$q_k^{\delta_n} \to q_*, \quad n \to \infty$$

por (4.40). Consideremos também o caso em que $k_n \to \infty$ para $n \to \infty$. Sem perda de generalidade tomamos k_n monotonicamente crescente em n. Então, para $n > m$, a Proposição 4.1.1 implica

$$\begin{aligned} \|q_{k_n}^{\delta_n} - q_*\| &\leq \|q_{k_m}^{\delta_n} - q_*\| + \frac{\rho}{4} \sum_{j=k_m}^{k_n-1} \beta_j \\ &\leq \|q_{k_m}^{\delta_n} - q_{k_m}\| + \|q_{k_m} - q_*\| + \frac{\rho}{4} \sum_{j=k_m}^{\infty} \beta_j. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Pelo Teorema 4.1.1 e por (4.11) existe um m fixo tal que os dois últimos termos de (4.41) são suficientemente pequenos. Como k_m agora é fixo, novamente usando a estabilidade da iteração de Landweber chegamos que o lado direito de (4.41) tende para zero se $n \to \infty$. Com respeito a escolha a-priori (4.16), para cada par (δ_n, z^n), onde δ_n é agora estritamente decrescente, denotamos por $N_0(\delta_n)$ o índice de parada escolhido de acordo com (4.16), isto é

$$\delta_n > \tilde{C}\beta_{N_0(\delta_n)+1} \ \ e \ \ \delta_n \leq \tilde{C}\beta_k \ \text{ para } \ k \leq N_0(\delta_n).$$

Como β_k e δ_n são estritamente decrescentes em k e n respectivamente, $N_0(\delta_n)$ é estritamente crescente em n e $N_0(\delta_n) \to \infty$. Então, para $n > m$, pela Proposição 4.1.1 temos que

$$\|q_{N_0(\delta_n)}^{\delta_n} - q_*\| \leq \|q_{N_0(\delta_m)}^{\delta_n} - q_*\| + \frac{\rho}{4} \sum_{j=N_0(\delta_m)}^{N_0(\delta_n)-1} \beta_j$$

$$\leq \|q_{N_0(\delta_m)}^{\delta_n} - q_{N_0(\delta_m)}\| + \|q_{N_0(\delta_m)} - q_*\| + \frac{\rho}{4} \sum_{j=N_0(\delta_m)}^{\infty} \beta_j. \tag{4.42}$$

O resto da demonstração segue como em (4.41).

□

Na próxima Secção, verificamos as condições (2.2), (2.3) e (2.8) para os Exemplos 1-6 apresentados no Capítulo 2.

4.2 Discussão dos exemplos

Exemplo 1: Seja $X = H^s(\Omega)$ com $s > d/2$, tal que $X \subseteq L^\infty(\Omega)$, isto é, $\|p\|_\infty \leq c\|p\|$ para uma constante fixa c e uma arbitrária função $p \in X$. Definindo o espaço de parâmetros admissíveis como

$$Q = \{q \in X; \quad \gamma_1 \leq q \leq \gamma_2, \quad q.s.\}, \tag{4.43}$$

com constantes positivas γ_1 e γ_2, e usando a desigualdade de Poincaré (com constante de Poincaré C_P) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1}{(1+C_P)}\|v-w\|^2 &\leq \gamma_1 \int_\Omega \nabla(v-w).\nabla(v-w)dx \\ &\leq \langle A(q)(v-w), v-w\rangle \\ &\leq \langle C(q)v - C(q)w, v-w\rangle \end{aligned}$$

para $q \in Q, v, w \in Y_0 = H_0^1(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} \langle C(q)v - C(q)w, y\rangle &= \langle A(q)(v-w), y\rangle \\ &\leq \gamma_2\|v-w\|\|y\| \end{aligned}$$

para $q \in Q, v, w, y \in Y = H^1(\Omega)$. Portanto, as condições (2.2) e (2.3) são satisfeitas com $\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{(1+C_P)}$ e $\alpha_2 = \gamma_2$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \langle A(p+\tilde{p})v, w\rangle &= \langle A(p)v, w\rangle + \langle A(\tilde{p})v, w\rangle, \\ \langle A(\mu p)v, w\rangle &= \mu\langle A(p)v, w\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle A(p)v, w\rangle &\leq \|p\|_\infty\|v\|\|w\| \\ &\leq c\|p\|\|v\|\|w\| \end{aligned} \tag{4.44}$$

para $\mu \in \mathbb{R}, p, \tilde{p} \in X, v, w, \in Y_0$. Como $B = 0$, a condição (2.8) é também satisfeita. Para verificar a condição (4.6), consideramos o problema (2.1) para $q \in B_\rho(q_0)$, para o qual temos

$$\langle A(q)(u_q - u_{q_0}), v\rangle = \langle A(q_0 - q)u_{q_0}, v\rangle. \tag{4.45}$$

Devido a (2.2) ($B = 0$) e (4.44) obtemos

$$\alpha_1 \|u_q - u_{q_0}\| \leq c\|q_0 - q\| \|u_{q_0}\| \tag{4.46}$$

de (4.45) com $v = u_q - u_{q_0}$. Como

$$\|u_q\| \leq \|u_q - u_{q_0}\| + \|u_{q_0}\| \leq \frac{c\|q_0 - q\|}{\alpha_1}\|u_{q_0}\| + \|u_{q_0}\| \leq \left(\frac{c\rho}{\alpha_1} + 1\right)\|u_{q_0}\|, \tag{4.47}$$

a definição de L, veja (4.2), e (4.44) implicam (4.6) com $\hat{L} = c(\frac{c\rho}{\alpha_1} + 1)\|u_{q_0}\|$. Em vez de (4.47), poderiamos considerar

$$\|u_q\| \leq \frac{\|f\|}{\alpha_1},$$

o qual segue de (2.1) e (2.2), obtendo assim $\hat{L} = c\frac{\|f\|}{\alpha_1}$.

Exemplo 2: Escolhendo $X = H^s(\Omega)$ com $s > d/2$ e Q como em (4.43), vemos que (2.2) e (2.3) são satisfeitas com $\alpha_1 = \frac{1}{1+C_P}$ (ou até mesmo $\alpha_1 = 1$ para $\gamma_1 \geq 1$) e $\alpha_2 = 1 + \gamma_2$ (ou $\alpha_2 = 1$ para $\gamma_2 \leq 1$). Além disso, $X \subseteq L^\infty(\Omega)$ implica que (2.8) é satisfeita. Como

$$|(L(q)p, v)| = |\langle A(p)u_q, v\rangle| \leq c\|p\|\|u_q\|\|v\|$$

para $q \in Q, p \in X$ e $v \in Y$, e (4.47) também é válida para o Exemplo 2, temos a condição de limitação (4.6) para $L(\cdot)$ com $\hat{L} = c(\frac{c\rho}{\alpha_1} + 1)\|u_{q_0}\|$.

Exemplo 3: Escolhendo X e Q como acima, (2.2), (2.3) e (2.8) são satisfeitas com $\alpha_1 = \min(\gamma_1, b_1)$ e $\alpha_2 = \max(\gamma_2, b_2)$, se $b \in L^\infty(\Omega)$ é positivamente limitada, isto é, $0 < b_1 \leq b(x) \leq b_2$, quase sempre. A condição (4.6) é satisfeita como no Exemplo 1 com $\hat{L} = c(\frac{c\rho}{\alpha_1} + 1)\|u_{q_0}\|$.

Exemplo 4: Seja $X = H^1(I)$ e $Q = \{q \in X, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq q' \leq \gamma_2 \quad q.s.\}$, em que I é um apropriado intervalo unidimensional. Sendo q uma função estritamente monótona e Lipschitz contínua, o que é garantido exigindo que $\gamma_1 \leq q' \leq \gamma_2$,quase sempre, para constantes positivas γ_1 e γ_2, estas propriedades também continuam válidas para o operador de Nemyckii

$$N_q : \tilde{Y} \to \tilde{Y}, \quad v \to q(v) \tag{4.48}$$

com $\tilde{Y} = L^2(\Omega)$. Por (2.10) e (2.11) temos que

$$\alpha_1\|v - w\|^2 \leq \alpha_1\|v - w\|^2 + \gamma_2 \int_\Omega (v - w)^2 dx$$

$$\leq \langle B(v-w), v-w\rangle + \int_\Omega (q(v)-q(w))(v-w)dx$$
$$= \langle C(q)v - C(q)w, v-w\rangle$$

com $\alpha_1 = 1/(1+C_p)$, onde C_p denota a constante de Poincaré. Por outro lado, temos

$$\langle C(q)u - C(q)w, y\rangle = \langle B(v-w), y\rangle + \langle A(q)u - A(q)w, y\rangle$$

$$\leq \|v-w\|\|y\| + \|q(v)-q(w)\|_{\tilde{Y}}\|y\|_{\tilde{Y}}$$
$$\leq \alpha_2\|v-w\|\|y\|.$$

com $\alpha_2 = 1+\gamma_2$. Então, se γ_2 é um limitante uniforme para a devivada dos elementos de Q, (2.2) e (2.3) podem ser verificadas.
Como X pode ser imerso em $C_b(I)$ (espaço das funções contínuas e limitadas definidas em I), $X = H^1(I)$, temos que cada $p \in X$ é limitada. Então, podemos concluir facilmente que $A(p)u \in Y_0^*$ para todo $u \in Y_0$. Sendo assim, (2.8) é satisfeita pois,

$$\int_\Omega (p+\tilde{p})(u)vdx = \int_\Omega p(u)vdx + \int_\Omega \tilde{p}(u)vdx \quad \text{e}$$

$$\lambda \int_\Omega p(u)vdx = \int_\Omega \lambda.p(u)vdx$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, existe uma constante $\tilde{c}$ tal que $\|p\|_\infty \leq \tilde{c}\|p\|$ para $p \in X$. Portanto, temos

$$|(L(q)p, v)| \leq \|p\|_\infty\|v\| \leq \tilde{c}\|p\|\|v\|.$$

Sendo assim, a condição (4.6) é satisfeita com $\hat{L} = \tilde{c}$.

Exemplo 5: veja Secção 4.4.

Exemplo 6: Supondo que $b \in H^1(I)$ com $0 < b_1 \leq b'(\tau) \leq b_2$ e escolhendo X e Q como no Exemplo 1, então (2.2), (2.3) são satisfeitas com $\alpha_1 = \min(\gamma_1, b_1)$ e $\alpha_2 = \max(\gamma_2, b_2)$. Como b é limitada, a condição (2.8) pode ser facilmente verificada. Em relação a condição (4.6),

$$\langle C(q)u_q - C(q)u_{q_0}, v\rangle = \langle A(q_0)u_{q_0} - A(q)u_{q_0}, v\rangle$$

implica (4.46) e, portanto, (4.47). Sendo assim, (4.6) é válida com $\hat{L} = c(\frac{c\rho}{\alpha_1}+1)\|u_{q_0}\|$.

4.3 O método sem o termo adicional de estabilização

Em nossas demostrações, até agora, assumimos que a aproximação inicial q_0 (e também ξ) estavam a uma distância menor que $\rho/8$ da solução do problema inverso. Esta exigência pode ser enfraquecida considerando a iteração

$$q_{k+1}^\delta = q_k^\delta + \lambda L(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_k), \tag{4.49}$$

com a escolha especial $\beta_k = 0$ em (4.5).

Proposição 4.3.1 *Assuma* (2.2), (2.3) *e* (2.8), *e seja* $L(\cdot)$ *satisfazendo* (4.6). *Suponha que* q_* *é uma solução de* (2.6) *em* $B_{\rho/2}(q_0)$. *Além disso, escolha os parâmetros* λ *e* τ *tais que*

$$2\Big(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\tau}\Big) - \lambda \hat{L}^2 \geq D, \tag{4.50}$$

onde D *é uma constante positiva e fixa. Seja* k_* *o índice de parada para a iteração* (4.49) *escolhido de acordo com* (4.10) *em que* τ *satisfaz* (4.50). *Então, para qualquer* $0 \leq k < k_*$, *temos*

$$\|q_* - q_{k+1}^\delta\| \leq \|q_* - q_k^\delta\|. \tag{4.51}$$

e

$$\sum_{k=0}^{k_*-1} \|z^\delta - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{4\lambda D}. \tag{4.52}$$

Para $\delta = 0$ *(com* $\tau = \infty$ *em* (4.50)*), temos*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|z - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{4\lambda D}. \tag{4.53}$$

Demonstração.
Tomando $\beta_k = 0$ em (4.19) obtemos

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 - \|q_k^\delta - q_*\|^2 = -2\lambda(z^\delta - u_k, L(q_k^\delta)(q_* - q_k^\delta)) + \lambda^2 \|L(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_k)\|^2.$$

Então por (4.20) segue que

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 - \|q_k^\delta - q_*\|^2 \leq \|z^\delta - u_k\|\lambda\big(2\alpha_2\delta - 2\alpha_1\|z^\delta - u_k\| + \lambda\hat{L}^2\|z^\delta - u_k\|\big).$$

Com a escolha a-posteriori (4.10) e por (4.50) temos a seguinte desigualdade

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 + \lambda D\|z^\delta - u_k\|^2 \leq \|q_k^\delta - q_*\|^2$$

para $0 \leq k < k_* = k_*(\delta)$, a qual implica (4.51) e $q_{k+1}^\delta \in B_\rho(q_0)$. Além disso, obtemos facilmente a desigualdade

$$k_*\tau^2\delta^2 \leq \sum_{k=0}^{k_*-1} \|z^\delta - u_k\|^2 \leq \frac{\rho^2}{4\lambda D}$$

e portanto (4.53).

□

Teorema 4.3.1 (Convergência) *Seja* $\delta = 0$ *em* (2.7). *Considere* (2.2), (2.3), (2.8) *e* (4.6). *Se* (2.6) *admite solução em* $B_{\rho/2}(q_0)$, *então* q_k *converge para uma solução* $q_* \in B_{\rho/2}(q_0)$ *de* (2.6).
No caso de dados com ruído z^δ *satisfazendo* (2.7), *seja* k_* *o índice de parada para a iteração* (4.49) *escolhido pelo princípio de discrepância* (4.10), (4.50). *Então*

$$q_{k_*(\delta)}^\delta \rightarrow q_*, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Demonstração.
Idêntica a demostração dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2 com a escolha $\beta_k = 0$.

□

4.4 Operadores não monótonos

O Exemplo 5 é o único Exemplo apresentado neste trabalho que não pode ser tratado pela teoria desenvolvida anteriormente, pois a condição (2.2) não é satisfeita. Nesse sentido, substituimos as condições (2.2) e (2.3) por

$$\alpha_1\|v - w\|_{\tilde{Y}}^2 \leq \langle C(q)v - C(q)w, S(v - w)\rangle \quad v, w \in Y_0, \tag{4.54}$$

$$\langle C(q)v - C(q)w, Sy\rangle \leq \alpha_2\|v - w\|_{\tilde{Y}}\|y\|_{\tilde{Y}} \quad v, w, y \in Y \tag{4.55}$$

para todo $q \in Q$, sendo Y um subsespaço do espaço de Hilbert $\tilde{Y}$. Além disso, S denota um operador linear definido em $\tilde{Y}$ e tomando valores em Y_0.
Embora continuemos assumindo que os dados pertencem a Y_0, agora medimos as perturbações na norma de $\tilde{Y}$, isto é,

$$\|z - z^\delta\|_{\tilde{Y}} \leq \delta. \tag{4.56}$$

Então, usando o princípio de discrepância

$$\|z^\delta - u_{k_*}\|_{\tilde{Y}} \leq \tau\delta < \|z^\delta - u_k\|_{\tilde{Y}}, \quad 0 \leq k \leq k_* \tag{4.57}$$

como critério de parada, podemos provar a convergência da iteração

$$q_{k+1}^{\delta} = q_k^{\delta} + \lambda L(q_k^{\delta})^* S(z^{\delta} - u_{q_k^{\delta}}) - \beta_k(q_k - \xi) \tag{4.58}$$

para identificação de parâmetros em problemas elípticos satisfazendo (4.54) e (4.55). Neste caso, em vez de (4.20) temos

$$\begin{aligned}
&-(S(z^{\delta} - u_k), L(q_k^{\delta})(q_* - q_k^{\delta})) \\
&= \langle S(z^{\delta} - u_k), A(q_* - q_k^{\delta})u_k \rangle \\
&= \langle S(z^{\delta} - u_k), A(q_*)u_k - A(q_*)z \rangle + \langle S(z^{\delta} - u_k), Bu_k - Bz \rangle \\
&= \langle S(z^{\delta} - u_k), C(q_*)u_k - C(q_*)z \rangle \\
&= -\langle S(z^{\delta} - u_k), C(q_*)z^{\delta} - C(q_*)u_k \rangle + \langle S(z^{\delta} - u_k), C(q_*)z^{\delta} - C(q_*)z \rangle \\
&\leq -\alpha_1 \|z^{\delta} - u_k\|_{\tilde{Y}}^2 + \alpha_2 \|z^{\delta} - u_k\|_{\tilde{Y}} \delta.
\end{aligned}$$

Portanto os resultados de convergência da Secção 4.1 continuam válidos se

$$\|S^* L(q)\| \leq \hat{L}, \quad q \in B_{\rho}(q_0). \tag{4.59}$$

No entanto, permanece a questão de encontrar um apropriado operador S em (4.54) e (4.55). No que segue, tratamos o Exemplo 5. Mesmo para uma parâmetro q pertencente a

$$Q = \{q \in H^1(I); \gamma_1 \leq q \leq \gamma_2\} \tag{4.60}$$

com um apropriado intervalo I e constantes positivas γ_1, γ_2, o operador (2.12) não satisfaz a condição de monotonia (2.2). Por outro lado, a teoria de operadores quase monótonos garante a existência de única solução $u_q \in Y_0$ para todo $q \in Q$, desde que $A(q)$ seja do tipo M, limitado e coercivo (veja [19]).
Para a escolha especial $S = -\Delta^{-1}$, com condição de contorno de Dirichlet homongênea, podemos verificar (4.54) e (4.55). Por esta razão introduzimos o conjunto

$$\Sigma = \{\sigma \in H^2(I); \quad \sigma' \in Q \quad \text{e} \quad \sigma(0) = 0\}, \tag{4.61}$$

isto é, Σ é o conjunto das integrais indefinidas dos elementos $q \in Q$, fixadas por $\sigma(0) = 0$. Em nossas considerações posteriores, será significativo o fato que $H^2(I)$ pode ser imerso em $C^1(I)$. Pela definição de Q, existe uma constante de Lipschitz, a saber γ_2, para as funções $\sigma \in \Sigma$, isto é,

$$|\sigma(\tau_1) - \sigma(\tau_2)| \leq \gamma_2 |\tau_1 - \tau_2|, \quad \tau_1, \tau_2 \in I \tag{4.62}$$

para todo $\sigma \in \Sigma$. Então, obtemos (4.55) com $\alpha_2 = \gamma_2$, pois a Lipschitz continuidade (4.62) pode ser estendida para o operador de Nemyckii

$$N_\sigma : \tilde{Y} \to \tilde{Y}, \quad y \to \sigma(y), \tag{4.63}$$

e ainda temos

$$\begin{aligned}
\langle C(q)v - C(q)w, Sy\rangle &= -\int_\Omega (q(v)\nabla v - q(w)\nabla w).\nabla(\Delta^{-1}y)dx \\
&= -\int_\Omega \nabla(\sigma(v) - \sigma(w)).\nabla(\Delta^{-1}y)dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} (\sigma(0) - \sigma(0))\frac{\partial(\Delta^{-1}y)}{\partial\eta}ds + \int_\Omega (\sigma(v) - \sigma(w))\Delta(\Delta^{-1}y)dx \\
&= \int_\Omega (\sigma(v) - \sigma(w))ydx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\langle C(q)v - C(q)w, S(v - w)\rangle &= \int_\Omega (\sigma(v) - \sigma(w))(v - w)dx \\
&\geq \gamma_1\|v - w\|^2_{\tilde{Y}},
\end{aligned}$$

em que usamos a monotonia do operador de Nemyckii (4.63) dada pelo limitante inferior γ_1 para a derivada de σ em I. Portanto, (4.54) também é satisfeita com $\alpha_1 = \gamma_1$. Finalmente, $\|Sw\| \leq (1 + C_P)\|w\|_{\tilde{Y}}$, sendo C_P a constante de Poincaré, e $\|p\|_\infty \leq \tilde{c}\|p\|$ para $p \in X$ implicam que

$$|(S^*L(q)p, w)| = |(L(q)p, Sw)| \leq \tilde{c}\|p\|\|u_q\|(1 + C_P)\|w\|_{\tilde{Y}}.$$

Como

$$\frac{\gamma_1}{1 + C_P}\|u_q\|^2 \leq \langle C(q)u_q, u_q\rangle \leq \|f\|\|u_q\|,$$

a condição (4.59) é satisfeita com $\hat{L} = \tilde{c}(1 + C_P)^2\frac{\|f\|}{\gamma_1}$. Portanto, temos a convergência da iteração (4.58) aplicada ao Exemplo 5.

Capítulo 5

Taxas de Convergência

Neste capítulo provamos taxas de convergência para a regularização de Tikhonov e especialmente para o método sem derivadas (4.5) usando uma nova condição de fonte envolvendo somente o operador de iteração $L(\cdot)$. Enfatizamos que a diferenciabilidade do operador F não é necessária para nossos resultados, mas sim as hipóteses de monotonia e Lipschitz continuidade no operador diferencial $C(q)$. Sendo assim, concluimos a análise (teórica) do método (4.5), desde que estabilidade, convergência e taxas de convergência podem ser obtidas.

5.1 Uma nova condição de fonte para a regularização de Tikhonov

As idéias de enfraquecimento das fortes condições impostas no operador F, necessárias para estabelecer a condição de fonte (1.5), apresentada na Secção 1.2, surgiram em [4], onde foi apresentada uma análise de taxas de convergência para a regularização de Tikhonov aplicada a identificação de q na versão parabólica do Exemplo 1. Neste caso, tal condição de fonte é formulada em termos de uma semi-norma, na qual são medidos os parâmetros no funcional de Tikhonov (veja [4]), e a diferenciabilidade de F não é necessária. Com este espírito (veja [14], [17]) apresentamos a seguinte condição de fonte (fraca)

$$\exists w \in Y_0; \quad \forall p \in X \quad (q_* - q_0, p) = -\langle A(p)u_{q_*}, w\rangle, \tag{5.1}$$

que não envolve a derivada de $F(q_*)$ mas sim a estrutura do operador diferencial $C(q)$ que modela o problema direto.

O próximo Teorema mostra que (5.1) é suficiente para obter os resultados clássicos relativos a taxas de convergência para a regularização de Tikhonov.

Teorema 5.1.1 *Consideremos as condições* (2.2), (2.3) *e* (2.8). *Além disso, supomos* *que $z^\delta \in Y_0$ satisfaz* (2.7)*. Se* (2.6) *admite uma solução q_* e a condição de fonte* (5.1) *é satisfeita, então, com $\beta \sim \delta$, obtemos*

$$\|q_\beta^\delta - q_*\| = \mathcal{O}\big(\sqrt{\delta}\big) \qquad e \qquad \|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\| = \mathcal{O}(\delta), \tag{5.2}$$

onde q_β^δ é um mínimo do funcional de Tikhonov, dado em (1.3)*.*

Demonstração. O fato de q_β^δ ser um mínimo de (1.3), $u_{q_*} = z$ e (2.7) implicam que

$$\|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|^2 + \beta\|q_\beta^\delta - q_0\|^2 \leq \delta^2 + \beta\|q_* - q_0\|^2.$$

Como consequência, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|^2 + \beta\|q_\beta^\delta - q_*\|^2 &\leq \delta^2 + \beta(\|q_* - q_0\|^2 + \|q_\beta^\delta - q_*\|^2 - \|q_\beta^\delta - q_0\|^2) \\ &= \delta^2 + 2\beta\left(q_* - q_0, q_* - q_\beta^\delta\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Devido a (2.8) e

$$[B + A(q_*)]u_{q_*} = [B + A(q_\beta^\delta)]u_{q_\beta^\delta} \quad \text{em} \quad Y_0^*,$$

a condição de fonte (5.1) com $p = q_* - q_\beta^\delta$ implica que

$$\begin{aligned} (q_* - q_0, q_* - q_\beta^\delta) &= -\langle A(q_* - q_\beta^\delta)u_{q_*}, w\rangle \\ &= \langle A(q_\beta^\delta)u_{q_*} - A(q_\beta^\delta)u_{q_\beta^\delta}, w\rangle + \langle Bu_{q_*} - Bu_{q_\beta^\delta}, w\rangle \\ &= \langle C(q_\beta^\delta)u_{q_*} - C(q_\beta^\delta)u_{q_\beta^\delta}, w\rangle. \end{aligned}$$

Então, usando (2.3) e a desigualdade de Young

$$a.b \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon},$$

com (por hora arbitrário) $\epsilon \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \beta\left|(q_* - q_0, q_* - q_\beta^\delta)\right| &\leq \beta\alpha_2\|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|\|w\| + \beta\alpha_2\delta\|w\| \\ &\leq \alpha_2\epsilon\|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|^2 + \alpha_2\frac{\beta^2}{2\epsilon}\|w\|^2 + \alpha_2\epsilon\delta^2. \end{aligned}$$

Combinando este resultado com (5.3), temos

$$\begin{aligned} \|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|^2 + \beta\|q_\beta^\delta - q_*\|^2 &\leq \delta^2 + 2\alpha_2\epsilon\|u_{q_\beta^\delta} - z^\delta\|^2 \\ &\quad +\alpha_2\frac{\beta^2}{\epsilon}\|w\|^2 + 2\alpha_2\epsilon\delta^2 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$(1-2\alpha_2\epsilon)\|u_{q^\delta_\beta}-z^\delta\|^2+\beta\|q^\delta_\beta-q_*\|^2\le(1+2\alpha_2\epsilon)\delta^2+\alpha_2\frac{\beta^2}{\epsilon}\|w\|^2.$$

Agora, com $\epsilon<\frac{1}{2\alpha_2}$ e $\beta\sim\delta$, finalmente obtemos

$$\|u_{q^\delta_\beta}-z^\delta\|=\mathcal{O}(\delta)\quad\text{e}\quad\|q^\delta_\beta-q_*\|=\mathcal{O}\big(\sqrt{\delta}\big).$$

□

É importante observar que esta nova abordagem para estabelecer de taxas de convergência para a regularização de Tikhonov não somente enfraquece as exigências de regularidade no operador F como também remove a restrição de suavidade $\gamma\|w\|<1$ (veja Secção 1.2) imposta anteriormente na função fonte w.

Na próxima Secção, tratamos resultados relativos a taxas de convergência, do tipo (1.30) e (1.31), para o método sem derivadas (4.5) somente usando a condição de fonte (5.1) e as condições (2.2), (2.3) e (2.8) do problema direto. Para isso, vejamos que usando o operador de iteração (4.2), a condição de fonte (5.1), com q_0 substituido por ξ, pode ser reformulada como

$$\exists w\in Y_0;\quad q_*-\xi=\lambda L(q_*)^*w, \tag{5.4}$$

em que λ continua sendo um parâmetro de mudança de escala.

5.2 Taxas de convergência para o método sem derivadas

Teorema 5.2.1 (Taxas de convergência) *Seja q_* uma solução de* (2.6) *em $B_{\rho/2}(q_0)$. Supomos que as condições* (2.2), (2.3), (2.8) *e* (4.6) *sejam satisfeitas. Consideremos uma seqüência decrescente de parâmetros de regularização β_k tal que*

$$\beta_0\le 1/8 \tag{5.5}$$

e

$$a_k:=2-\beta_k-\frac{1}{\beta_k}+\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k^2}\ge\eta>0, \tag{5.6}$$

para todo $k\in\mathbb{N}_0$, sendo η uma constante fixa.

- *Critério de parada a-posteriori: Escolha os parâmetros λ e τ tais que*

$$\left(\alpha_1+2\lambda\hat{L}^2-\frac{7}{4}\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2}{\tau}\right)+\frac{\alpha_1}{\tau^2}\right)\le E<0, \tag{5.7}$$

sendo E uma constante fixa. Supomos que a condição de fonte (5.4) *é satisfeita. Se o princípio de discrepância* (4.10) *é adotado como critério de parada para* (4.5) *com τ satisfazendo* (5.7) *e se*

$$2\|q_* - \xi\|^2 + 2\lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2 \leq \eta\frac{\rho^2}{4\beta_0}, \tag{5.8}$$

então

$$\|q^\delta_{k_*} - q_*\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta_{k_*}}\right). \tag{5.9}$$

- *Dados exatos, isto é, $\delta = 0$: Neste caso, fazendo $\tau = \infty$ em* (5.7) *e substituindo* (5.8) *por*

$$2\|q_* - \xi\|^2 + \lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2 \leq \eta\frac{\rho^2}{4\beta_0} \tag{5.10}$$

obtemos

$$\|q_k - q_*\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta_k}\right)$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

- *Critério de parada a-priori: Seja λ tal que*

$$2\lambda\hat{L}^2 - \frac{11}{16}\alpha_1 \leq 0. \tag{5.11}$$

Considere também a condição de fonte (5.4)*. Usando o critério de parada*

$$\frac{\delta}{\beta_k} \leq \tilde{C}, \quad 0 \leq k \leq N_0, \quad \frac{\delta}{\beta_{N_0+1}} > \tilde{C} \tag{5.12}$$

para a iteração (4.5)*, em que $\tilde{C}$ é uma constante positiva, e se*

$$2\|q_* - \xi\|^2 + \frac{\lambda}{\alpha_1}\alpha_2^2\left(16\tilde{C}^2 + \|w\|^2\right) + 2\lambda\tilde{C}\alpha_2\|w\| \leq \eta\frac{\rho^2}{4\beta_0}, \tag{5.13}$$

então

$$\|q^\delta_{N_0+1} - q_*\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right). \tag{5.14}$$

Demonstração. Consideremos primeiramente a escolha a-posteriori de parâmetros. De (4.19) e (5.4) segue que

$$\begin{aligned}\|q^\delta_{k+1} - q_*\|^2 \;\leq\; & (1-\beta_k)^2\|q^\delta_k - q_*\|^2 + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 + 2\lambda^2\|L(q^\delta_k)^*(z^\delta - u_k)\|^2 \\ & -2\beta_k(1-\beta_k)\lambda(L(q_*)(q^\delta_k - q_*), w) \\ & -2(1-\beta_k)\lambda(z^\delta - u_k, L(q^\delta_k)(q_* - q^\delta_k)).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Devido ao fato que

$$A(q^\delta_k)u_k + Bu_k = A(q_*)z + Bz \quad \text{em} \quad Y_0^* \tag{5.16}$$

e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}|(L(q_*)(q_k^\delta - q_*), w)| &= |\langle A(q_k^\delta - q_*)z, w\rangle| \\ &= |\langle C(q_k^\delta)z - C(q_k^\delta)u_k, w\rangle| \\ &\leq \alpha_2\|z - u_k\|\|w\| \\ &\leq \alpha_2(\|z^\delta - u_k\| + \delta)\|w\|. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Então, juntamente com (4.20), temos

$$\begin{aligned}\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 \leq\ & (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 + 2\lambda^2\|L(q_k^\delta)^*(z^\delta - u_k)\|^2 \\ & +2\beta_k(1-\beta_k)\alpha_2\lambda\|z^\delta - u_k\|\|w\| - 2\alpha_1(1-\beta_k)\lambda\|z^\delta - u_k\|^2 \\ & +2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\lambda(\|z^\delta - u_k\| + \beta_k\|w\|). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Seguimos a demostração por indução. Como $q_* \in B_{\rho/2}(q_0)$, então

$$\frac{\|q_* - q_0\|^2}{\beta_0} \leq \frac{\rho^2}{4\beta_0}.$$

Agora, assumimos que

$$\frac{\|q_k^\delta - q_*\|^2}{\beta_k} \leq \frac{\rho^2}{4\beta_0}$$

para algum $k < k_*(\delta)$, em que $k_*(\delta)$ denota o índice de parada escolhido de acordo com o princípio de discrepância (4.10). Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} 2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\|z^\delta - u_k\| &\leq \frac{2\alpha_2}{\tau}(1-\beta_k)\|z^\delta - u_k\|^2, \\ 2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\beta_k\|w\| &\leq \frac{\alpha_1}{\tau^2}\|z^\delta - u_k\|^2 + (1-\beta_k)^2\beta_k^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2. \end{aligned}$$

Usando estas estimativa e

$$2\beta_k(1-\beta_k)\alpha_2\|z^\delta - u_k\|\|w\| \leq \alpha_1\|z^\delta - u_k\|^2 + \beta_k^2(1-\beta_k)^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2$$

em (5.18) temos

$$\begin{aligned}\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 \leq\ & (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 \\ & +\lambda(\alpha_1 + 2\lambda\hat{L}^2 - 2(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\tau})(1-\beta_k) + \frac{\alpha_1}{\tau^2})\|(z^\delta - u_k)\|^2 \\ & 2\beta_k^2(1-\beta_k)^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\lambda\|w\|^2. \end{aligned} \tag{5.19}$$

De (5.7) obtemos ainda

$$\lambda(\alpha_1 + 2\lambda\hat{L}^2 - 2(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\tau})(1-\beta_k) + \frac{\alpha_1}{\tau^2}) \leq \lambda E < 0.$$

Portanto, usando as abreviações

$$\gamma_k := \frac{\|q_k^\delta - q_*\|^2}{\beta_k} \quad \text{e} \quad A := 2\|q_* - \xi\|^2 + 2\lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2,$$

obtemos de (5.19)

$$\gamma_{k+1} \leq (1-\beta_k)^2\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\gamma_k + \frac{\beta_k^2}{\beta_{k+1}}A =: I(\gamma_k). \tag{5.20}$$

Por (5.8) e (5.6) temos

$$A \leq \eta\frac{\rho^2}{4\beta_0} \leq a_k\frac{\rho^2}{4\beta_0}$$

e, portanto,

$$I(\frac{\rho^2}{4\beta_0}) \leq \frac{\rho^2}{4\beta_0}\left((1-\beta_k)^2\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} + \frac{\beta_k^2}{\beta_{k+1}}a_k\right).$$

Como $I(\gamma_k)$ é monotono crescente (como uma função de γ_k) e devido a definição de a_k, em (5.6), obtemos finalmente

$$\gamma_{k+1} \leq I(\gamma_k) \leq I(\frac{\rho^2}{4\beta_0}) \leq \frac{\rho^2}{4\beta_0}.$$

Sendo assim, a indução está completa, a qual mostra particularmente que $q_{k+1}^\delta \in B_\rho(q_0)$ e

$$\|q_{k+1}^\delta - q_*\| \leq \sqrt{\frac{\rho^2}{4\beta_0}\beta_{k+1}} \tag{5.21}$$

para todo $0 \leq k < k_*$.

No caso de dados exatos, isto é, $\delta = 0$, por (5.18) segue que

$$\begin{aligned}
\|q_{k+1} - q_*\|^2 \leq\ & (1-\beta_k)^2\|q_k - q_*\|^2 + 2\beta_k^2\|q_* - \xi\|^2 + 2\lambda^2\|L(q_k)^*(z - u_k)\|^2 \\
& + 2\beta_k(1-\beta_k)\alpha_2\lambda\|z - u_k\|\|w\| - 2\alpha_1(1-\beta_k)\lambda\|z - u_k\|^2 \\
\leq\ & (1-\beta_k)^2\|q_k - q_*\|^2 + \beta_k^2\Big((2\|q_* - \xi\|^2 + (1-\beta_k)^2\lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2) \\
& + \|z - u_k\|^2\lambda\Big(\alpha_1 + 2\lambda\hat{L}^2 - 2\alpha_1(1-\beta_k)\Big).
\end{aligned}$$

Usando (5.10), o restante da demonstração é semelhante ao caso de dados com ruído.

No que segue, tratamos o caso em que temos a escolha de parâmetros a-priori. Partindo de (5.18), novamente agimos por indução. Seja $k \leq N_0$ e supomos que $\|q_k^\delta - q_*\|^2/\beta_k \leq \frac{\rho^2}{4\beta_0}$. De (5.12) segue que

$$\begin{aligned}
2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\|z^\delta - u_k\| &\leq 2\tilde{C}\alpha_2\beta_k(1-\beta_k)\|z^\delta - u_k\| \\
&\leq 16\tilde{C}^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\beta_k^2(1-\beta_k)^2 + \alpha_1\frac{\|z^\delta - u_k\|^2}{16}, \\
2(1-\beta_k)\alpha_2\delta\beta_k\|w\| &\leq 2\tilde{C}(1-\beta_k)\beta_k^2\alpha_2\|w\|.
\end{aligned}$$

Usando estas estimativas e

$$2\beta_k(1-\beta_k)\alpha_2\|z^\delta - u_k\|\|w\| \leq \alpha_1\|z^\delta - u_k\|^2 + \beta_k^2(1-\beta_k)^2\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\|w\|^2$$

em (5.18) temos

$$\begin{aligned}
\|q_{k+1}^\delta - q_*\|^2 \leq\ & (1-\beta_k)^2\|q_k^\delta - q_*\|^2 + 2\lambda\tilde{C}(1-\beta_k)\beta_k^2\alpha_2\|w\| \\
& +\beta_k^2\left(2\|q_* - \xi\|^2 + (1-\beta_k)^2\lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}(16\tilde{C}^2 + \|w\|^2)\right) \\
& +\lambda(\alpha_1 + 2\lambda\hat{L}^2 - 2\alpha_1(1-\beta_k) + \frac{\alpha_1}{16})\|z^\delta - u_k\|^2.
\end{aligned}$$

De (5.11) e (5.5) segue que

$$(\alpha_1 + 2\lambda\hat{L}^2 - 2\alpha_1(1-\beta_k) + \frac{\alpha_1}{16}) \leq 0.$$

Portanto, usando as abreviações

$$\gamma_k := \frac{\|q_k^\delta - q_*\|^2}{\beta_k} \quad \text{e} \quad A := 2\|q_* - \xi\|^2 + \lambda\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}(16\tilde{C}^2 + \|w\|^2) + 2\lambda\tilde{C}\alpha_2\|w\|,$$

podemos continuar de forma análoga ao caso da escolha a-posteriori.

$\square$

Em relação a variante de (4.5) discutida na Secção 4.4, ressaltamos que a condição de fonte

$$\exists w \in \tilde{Y};\quad q_* - \xi = \lambda L(q_*)^* S w \tag{5.22}$$

garante taxas de convergência para (4.58) correspondentes ao Teorema 5.2.1. Isto segue facilmente do fato que

$$\begin{aligned}
|(L(q_*)(q_k^\delta - q_*), Sw)| &= |\langle A(q_k^\delta - q_*)z, Sw\rangle| \\
&= |\langle C(q_k^\delta)z - C(q_k^\delta)u_k, Sw\rangle| \\
&\leq \alpha_2 \|z - u_k\|_{\tilde{Y}} \|w\|_{\tilde{Y}} \\
&\leq \alpha_2 (\|z^\delta - u_k\|_{\tilde{Y}} + \delta) \|w\|_{\tilde{Y}}.
\end{aligned}$$

Compare com (5.17).

5.3 A construção de uma função fonte

Nesta Secção, construimos uma função fonte para a condição de fonte (5.1), no caso em que o parâmetro a ser identificado depende da variável de estado (Exemplos 4 e 5). De outro modo, pode-se obter uma relação com a chamada abordagem direta, para tratar problemas de idêntificação do tipo (2.6). A abordagem direta resume-se ao seguinte: dada uma solução z da equação (2.1), podemos considerar a última (em sua formulação clássica) como uma equação do parâmetro q, a ser determinado. Por exemplo considerando o Exemplo 1, temos

$$\nabla z.\nabla q + \Delta z.q = -f \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{5.23}$$

Em nossa introdução, já mostramos o quanto pode ser complicado este tipo de técnica. Em [14], a equação (5.23) é discutida através do *método das características*. Sendo assim, retornamos aos problemas em que o parâmetro depende da variável de estado.

Neste caso, procuramos por uma função q_* definida num intervalo unidimensional. Para implementações numéricas a escolha deste intervalo pode ser complicada, pois precisamos determinar q_* definida na imagem de $z = u_{q_*}$, que denotamos por $I^* = [I^*_{min}, I^*_{max}]$, mas o que conhecemos é um intervalo I^δ, determinado por z^δ, que pode não corresponder ao anterior. Além disso, ao longo das iterações, as q_k's podem estar definidas em domínios diferentes de I^* (veja [17]). Para fins teóricos e sem perda de generalidade, escolhemos um intervalo $I = [I_{min}, I_{max}]$, $I^* \subseteq I$, tal que

$$I_{min} \leq u_q(x) \leq I_{max}$$

para todo q pertencente ao espaço de parâmetros admissíveis. Podemos notar ainda que em $I \setminus I^*$ a idenfiticação de q_* é impraticável. Portanto, assumimos já conhecido o parâmetro q_* em $I \setminus I^*$, isto é, para $\rho := q_* - \xi$ temos

$$\rho(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau \in I \setminus I^*. \tag{5.24}$$

Então, a condição de fonte (5.4) torna-se

$$\exists w \in Y_0; \forall p \in X \quad (\rho, p)_{I^*} = -\lambda \langle A(p)u_{q_*}, w\rangle,$$

em que $(\cdot,\cdot)_{I^*}$ denota o produto interno em X, sendo agora a integração feita somente em I^*.

Consideremos então a condição de fonte acima para o Exemplo 4, com $Y_0 = H_0^1(\Omega)$ e $X = H^1(I)$, isto é,

$$\exists w \in Y_0; \forall p \in X \quad (\rho, p)_{I^*} = -\lambda \int_\Omega p(u_{q_*}) w dx, \tag{5.25}$$

para a qual construimos explicitamente uma função fonte w. Para isso, usamos a *Co-área Formula.*

Teorema 5.3.1 (Co-área Formula) *Seja $t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua. Por $\mathcal{L}^d$, denotamos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, por $\mathcal{H}^{d-1}$, denotamos a medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional. Então para cada função $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^d$-somável, temos*

$$g|_{t^{-1}\{\tau\}} \quad \text{é} \quad \mathcal{H}^{d-1}\text{-somável para} \quad \mathcal{L}, \quad \text{quase sempre,} \quad \text{em} \quad \tau \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) Dt(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t^{-1}\{\tau\}} g d\mathcal{H}^{d-1} \right] d\tau. \tag{5.26}$$

Demonstração. Veja [10]

□

Nosso objetivo é aplicar a Co-área Formula para a função $t = u_{q_*}$. Nesse sentido, precisamos garantir a Lipschitz continuidade da aplicação

$$u_{q_*} : \Omega \to I^*.$$

Supondo $f \in H^1(\Omega)$ (no Exemplo 4), obtemos que o lado direito

$$\hat{f}(x) = f(x) - q_*(u_{q_*}(x)) \in H^1(\Omega), \tag{5.27}$$

pois $q_* \in H^1(I) \subseteq C(I)$. Portanto, u_{q_*} pode ser considerada como a solução fraca do seguinte problema de Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \hat{f} \ \text{ em } \ \Omega, \\ v &= 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Assumindo que a fronteira de Ω é suficientemente suave, pelo Teorema de imersão de Sobolev (veja [9]) temos que

$$u_{q_*} \in H^3(\Omega) \subseteq C^1(\overline{\Omega}), \tag{5.28}$$

obtendo assim a desejada condição de Lipschitz em u_{q_*}, como uma função da variável de espaço.

O próximo passo é encontrar uma função w adequada para os nossos propósitos. Supomos então que

$$\rho := q_* - \xi \in H^3(I). \tag{5.29}$$

Devido a imersão compacta $H^3(I^*) \subseteq C^2(I^*)$ e (5.24) temos

$$\rho^{(i)}(I^*_{min}) = \rho^{(i)}(I^*_{max}) = 0 \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2. \tag{5.30}$$

Sendo assim, definimos por m, a medida de Hausdorff $(d-1)$ dimensional dos conjuntos de nível de u_{q_*}, isto é,

$$m(\tau) := \int_{u_{q_*}^{-1}\{\tau\}} d\mathcal{H}^{d-1}, \quad \text{para} \quad \tau \in I^*,$$

e assumimos que u_{q_*} é tal que

$$(\rho''(u_{q_*}) - \rho(u_{q_*}))\frac{1}{m(u_{q_*})} Du_{q_*} \in Y_0. \tag{5.31}$$

O próximo Teorema mostra que a função definida em (5.31) satisfaz a condição de fonte (5.25).

Teorema 5.3.2 *Supomos* (5.24), (5.29) *e* (5.31). *Então*

$$w = \frac{1}{\lambda}(\rho''(u_{q_*}) - \rho(u_{q_*}))\frac{1}{m(u_{q_*})} Du_{q_*} \tag{5.32}$$

satisfaz (5.25).

Demonstração. Partindo do lado direito de (5.25) temos

$$-\lambda \int_\Omega p(u_{q_*}) w dx = \int_\Omega p(u_{q_*})(\rho(u_{q_*}) - \rho''(u_{q_*}))\frac{1}{m(u_{q_*})} Du_{q_*} dx.$$

Usando a Co-área Formula (5.26) com

$$g(x) = p(u_{q_*}(x))(\rho(u_{q_*}(x)) - \rho''(u_{q_*}(x)))\frac{1}{m(u_{q_*}(x))},$$

a qual é $\mathcal{L}^d$-somável devido a (5.31) e $p \in H^1(I) \subseteq C(I)$, resulta que (como g é constante em qualquer conjunto de nível $u_{q_*}^{-1}(\tau))$

$$\begin{aligned} -\lambda \int_\Omega p(u_{q_*}) w dx &= \int_{I^*} p(\tau)(\rho(\tau) - \rho''(\tau)) \frac{1}{m(\tau)} m(\tau) d\tau \\ &= \int_{I^*} p(\rho - \rho'') d\tau. \end{aligned}$$

Finalmente, integrando por partes com respeito a τ, temos

$$\int_{I^*} p(\rho - \rho'') d\tau = -p\rho|_{I^*_{min}}^{I^*_{max}} + \int_{I^*} (p\rho + p'\rho') d\tau. \tag{5.33}$$

Como os termos de fronteira em (5.33) desaparecem devido a (5.30), obtemos

$$-\lambda \int_\Omega p(u_{q_*}) w dx = (\rho, p)_{I^*}.$$

□

No final deste Capítulo, comparamos a condição de fonte fraca (5.4) com a condição clássica

$$\exists w \in Y; \quad q_* - \xi = F'(q_*)^* w. \tag{5.34}$$

Podemos notar que (5.34) equivale a (1.5), com $\nu = 1/2$. Levando em consideração um parâmetro λ de mudança de escala, podemos escrever (5.34) como

$$\exists w \in Y; \forall p \in X \quad (q_* - \xi, p) = -\lambda \langle A(p) u_{q_*}, (J\tilde{C}(q_*))^{-1*} w \rangle,$$

com $\tilde{C}$ definido como em (3.12). Usando a abreviação

$$\tilde{w} = \left[(J\tilde{C}(q_*))^{-1} \right]^* w, \tag{5.35}$$

o qual é um elemento de Y_0, pode-se observar que: para um operador F, Fréchet diferenciável, as demonstrações de taxas de convergência dos Teoremas 5.1.1 e 5.2.1 ainda continuam válidas com a condição de fonte clássica (5.34).

Bibliografia

[1] C. W . Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg Mathematics for Scientists and Engineers. Wieweg, Braunschweig, 1993.

[2] C. W . Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm equations of the first Kind*, Pitman, Boston, 1984.

[3] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/b*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[4] H. W. Engl, J. Zou, *A new approach to convergence rate analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction*, Inverse Problems, 16 (2000), 1907-1923.

[5] H. W. Engl, M. Hanke e A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[6] H. W. Engl, T. Langthaler, P. Manselli, *On an inverse problem for a nonlinear heat equation connected with continuous casting of stell*, in: K. H. Hoffmann, W. Krabs (eds.), Optimal Control with Partial Differential Equations II, ISNM 78, Birkhäuser 1987, 67-89

[7] J. Baumeister, *Stable Solution of Inverse Problems*, Vieweg, Braunschweig, 1987.

[8] J.B. Keller, *Inverse Problems*, Am. Math. Mon., 83(1976),107-118.

[9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[10] L. C. Evans, R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.

[11] M. Hanke, A. Neubauer e O. Scherzer, *A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems*, Numerische Mathematik, 72(1995), 21-37.

[12] O. Scherzer, *Convergence criteria of iterative methods based on Landweber iteration for solving nonlinear problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 194(1995), 911-933.

[13] O. Scherzer, *A modified Landweber iteration for solving parameter estimation problems*, Applied Mathematics and Optimization 38(1998), 579-600.

[14] P. Kügler, *A Derivative Free Landweber Method for Parameter Identification in Elliptic Partial Differential Equations with Applications to the Manufacture of Car Windshields*, PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz, Austria, 2003.

[15] P. Kügler, *A derivative free Landweber iteration for parameter identification in certain elliptic PDEs*, Inverse Problems, 19(2003), 1407-1426.

[16] P. Kügler, *A parameter identification problem of mixed type related to the manufacture of car windshields*, Siam Journal of Applied Mathematics, 64(2004), 858-877.

[17] P. Kügler, H. W. Engl, *Identification of a temperature dependent heat conductivity by Tikhonov regularization*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 10 (2002), 67-90.

[18] R. Dautray, J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, ,Vol. II, Springer-Velarg, Berlin, 1980.

[19] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.