Universidade Federal de Santa Catarina

Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão em domínios perfurados com pequenos buracos

Jocemar de Quadros Chagas

Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis, novembro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina

Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão em domínios perfurados com pequenos buracos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais.

Jocemar de Quadros Chagas

Florianópolis, novembro de 2005

Homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão em domínios perfurados com pequenos buracos

por Jocemar de Quadros Chagas

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski
(Coordenador)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Fuentes Apolaya (UFF)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira - (UFSC)

Florianópolis, novembro de 2005

A meu Pai, Antônio

À minha Mãe, Cerenita

Agradecimentos

Agradeço...

... a meu pai, Antônio, à minha mãe, Cerenita, e a meus irmãos, Sonia, Juarez e Joelson, pelo apoio incondicional que sempre deram a tudo o que pretendi fazer; e pelos sacrifícios feitos para que eu pudesse obter mais esta conquista;

... à minha namorada Marivane, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis, e pelas alegrias dos momentos felizes;

... ao Teatro, parte integrante de minha vida assim como a Matemática, bem como a todos aqueles que estiveram em cena comigo, tanto pelo Grupo de Teatro Noscego, de Carazinho, quanto pelo Teatro Artesãos de Dioniso, da Ilha de Santa Catarina;

... ao professor Joel, pela orientação, pelo apoio e pelos conhecimentos transmitidos; e aos professores Jardel, Ricardo e Ruy Charão, integrantes da banca examinadora desta dissertação, pelas sugestões apresentadas;

... aos professores Albertina, Gustavo, Celso, Fermin, Igor, Oscar, Ruy Charão e demais professores que, de uma forma ou de outra, me ensinaram no caminho; e aos funcionários do departamento de Matemática da UFSC, sempre tão prestativos;

... aos colegas André, Angela, Carmem, Claires, Cláudio, Cleuzir, Cleverson, Everaldo, Franco, Gilberto, Lúcia, Maicon, Ronie e Vanderlei, pelo companheirismo, amizade e horas de estudos;

... à Universidade de Passo Fundo, pela minha formação inicial em Matemática, a meus professores e colegas de graduação, e à Universidade Federal de Santa Catarina, por oportunizar este curso de mestrado;

... à Capes, pelo suporte financeiro concedido nos três meses finais do curso; e

... por fim, a Deus.

Cadenciamos os gestos

conforme os dias

vão virando

minúsculas máscaras

ficamos cinzas

mas o rosto

escondido

vermelho/fogo.

Luiz Alberto Corrêa

Resumo

Esta dissertação trata da homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas em um domínio perfurado com pequenos buracos, periodicamente distribuídos na direção de cada eixo coordenado. Mostramos, para esse problema, a convergência do processo de homogeneização e resultados de correção. As demonstrações estão baseadas no quadro abstrato introduzido por Gregoire Allaire para o estudo da homogeneização das equações de Stokes estacionárias, em domínios perfurados com pequenos buracos, que é baseado no uso adequado de funções testes adaptadas à geometria do problema.

Abstract

This work is mainly devoted to the homogenization of the hyperbolic equation with a pressure term with homogeneous Dirichlet boundary conditions in domains perforated with small holes, periodically distributed in each direction of the axis. For this problem we prove the convergence of the homogenization process and corrector results. The proofs are performed in the abstract framework introduced by Gregoire Allaire for the study of the homogenization of steady-state Stokes equations in perforated domains with small holes, which is based on the use of suitable test functions adapted to the geometry of the problem.

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar a homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas em um domínio perfurado com pequenos buracos, periodicamente distribuídos na direção de cada eixo coordenado, verificando a convergência do processo de homogeneização e resultados de correção.

O método de homogeneização é uma técnica que pode ser utilizada em diversas aplicações, principalmente na modelagem de fenômenos físicos. Por exemplo, pode-se usá-la para modelar o escoamento de um fluido em um rio ou lago, com obstáculos, ou em uma região com árvores. O tratamento matemático se dá, em geral, em duas abordagens.

Um exemplo da primeira é visto em *J. Lions* [15], onde estuda-se o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon \;\; \text{satisfazendo a certas condições de fronteira,} \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω_ε denota um domínio "perfurado" do $\mathbb{R}^N$, aberto e limitado, obtido de Ω por meio da extração de buracos distribuídos periodicamente com período $\varepsilon > 0$.

É claro que, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, poderíamos resolver o problema (1) usando métodos variacionais, mas o procedimento dependeria de ε, ou melhor, o espaço onde se aplicaria os métodos dependeria de ε. Além disso, para obter-se uma solução aproximada de (1), para ε muito pequeno, despenderíamos de um esforço muito grande do ponto de vista da análise numérica e computacional. Se faz necessário, portanto, um método que nos proporcione uma solução aproximada do problema (1), e que não dependa de ε. Um método que nos proporciona isso é o método da homogeneização.

Para obter-se a homogeneização do problema (1), através de expansão assintótica, realiza-se um desenvolvimento de ordem qualquer em ε para u_ε, como segue

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + ... + \varepsilon^m u_m(x,y) + ...,$$

onde $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$, sendo x uma variável macroscópica e y uma variável microscópica, e as funções $u_0, u_1, u_2, ...$ são construídas independentes de ε, de modo que se tenha algum controle de erro, isto é,

$$\|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots + \varepsilon^m u_m)\| \leq C\varepsilon^m,$$

ou ainda, que o erro seja de ordem ε^m num espaço de Sobolev sobre Ω_ε, para todo $m \in \mathbb{N}$. A determinação das funções u_m se dá impondo-se que u_ε seja solução do problema (1) e, com isso, resolve-se problemas similares a (1) para cada potência de ε, com a vantagem destes problemas estarem agora definidos em todo domínio Ω e não apenas em Ω_ε.

Um exemplo da segunda abordagem é visto nos trabalhos [7] e [8], onde em vez de uma expansão assintótica para u_ε, utiliza-se seqüências. Em [8], *D. Cioranescu* e *F. Murat*, em 1982, consideraram o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon &= f, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

onde f é dada em $H^{-1}(\Omega)$.

Utilizando a extensão de u_ε a todo Ω, por zero nos buracos, extensão essa denotada por $\widetilde{u}_\varepsilon$, demonstra-se nesse artigo que

$$\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{fraco em } H_0^1(\Omega),$$

quando $\varepsilon \to 0$, onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema (2), para cada $\varepsilon > 0$ fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f, \quad \text{em } \Omega \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \tag{3}$$

onde μ é uma medida de Radon, não-negativa, pertencente a $H^{-1}(\Omega)$. Essa medida aparece nesse estudo e está ligada ao comportamento da capacidade do conjunto S_ε, quando $\varepsilon \to 0$. Uma condição necessária para isso é que os buracos sejam "pequenos", isto é, que o diâmetro dos buracos, denotado por $a_{S_i^\varepsilon}$, seja assintoticamente menor ou igual ao "diâmetro crítico"a_ε, dado por

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_0 \varepsilon^{(\frac{N}{(N-2)})}, & \text{para } N \geq 3, \\ \delta_\varepsilon \exp(\frac{-C_0}{\varepsilon^2}), & \text{para } N = 2, \end{cases}$$

onde $C_0 > 0$ está fixado e $\varepsilon^2 \log \delta_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Essa condição possibilita a construção de um quadro funcional de hipóteses, sobre os buracos, que é fundamental na demonstração dos resultados. No caso citado acima, μ é uma constante estritamente positiva, quando o diâmetro dos buracos for o crítico. Neste caso, aparece na equação limite o termo adicional de ordem zero μu.

Em [8] aparecem ainda resultados de correção, a saber

$$\widetilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \text{ forte em } H_0^1(\Omega),$$

ou seja, $w_\varepsilon u$ é uma boa aproximação para a solução de (2).

No artigo apresentado por *D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat* e *E. Zuazua*, [7], estudou-se a homogeneização da equação da onda

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T>0 \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \times (0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{4}$$

com $u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\ u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega_\varepsilon),\ f_\varepsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$, e

$$\begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u_0, \quad \text{fraco em } H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u_\varepsilon^1} \rightharpoonup u_1, \quad \text{fraco em } L^2(\Omega), \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Em [7], mostrou-se também que

$$\widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema (4), para cada $\varepsilon > 0$ fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f, \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ T>0 \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0, \quad \text{em } \Omega \\ u'(x,0) = u_1, \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde μ é uma medida de Radon não-negativa, sendo positiva quando o tamanho dos buracos é o crítico. Nesse artigo aparecem ainda resultados de correção, isto é,

$$r_\varepsilon \to 0, \quad \text{forte em } C^0([0,T];W_0^{1,1}(\Omega)).$$

Um outro exemplo interessante é visto em *G. Allaire*, [1], de 1989, e em [2], de 1990, onde se faz a homogeneização de problemas envolvendo escoamentos com obstáculos.

No trabalho apresentado em [2], considera-se o sistema de Stokes

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{6}$$

O sistema (6) dá a descrição do fluxo de um fluido viscoso e imcompressivel, no domínio Ω_ε, sob a ação de uma força exterior f, com condições de fronteira de Dirichlet, sem deslizamento. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ está sendo considerado um aberto regular, limitado, e $\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_i^\varepsilon$, com $S_i^\varepsilon \subset \Omega$ representando conjuntos fechados (os buracos); a velocidade do fluxo está sendo representada por u_ε, a pressão do fluido por p_ε, e a força por f_ε, com $f_\varepsilon \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N$; e ainda, a viscosidade e a densidade do fluido estão sendo consideradas iguais a 1.

Consideram-se ainda os seguintes sistemas, definidos em todo o domínio Ω:

o sistema que descreve a Lei de Brinkman:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad \text{em } \Omega \\ div\ u = 0, \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

onde M é uma matriz simétrica e positiva que depende da forma dos buracos S_i^ε, e Mu é um termo linear da velocidade, de ordem zero;

o sistema de Stokes:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p - \Delta u = f, \quad \text{em } \Omega \\ div\ u = 0, \quad \text{em } \Omega; \end{cases} \tag{8}$$

e o sistema que descreve a Lei de Darcy:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u,p) \in [L^2(\Omega)]^N \times [H^1(\Omega)/\mathbb{R}]; \\ u = M^{-1}(f - \nabla p), \quad \text{em } \Omega \\ div\ u = 0, \quad \text{em } \Omega \\ u \cdot \eta = 0, \quad \text{em } \Gamma. \end{cases} \tag{9}$$

O problema homogeneizado consiste em se tomar o limite do problema (6) quando $\varepsilon \to 0$. Levando-se em conta o tamanho dos buracos, e fazendo-se algumas hipóteses sobre eles, obtém-se os seguintes resultados:

Definindo-se a_ε como o diâmetro "crítico" dos buracos, e $a_{S_i^\varepsilon}$ como o tamanho dos buracos, teremos três situações:

1ª) O diâmetro dos buracos é da mesma ordem que o diâmetro "crítico", isto é, $a_{S_i^\varepsilon} \cong a_\varepsilon$. Neste caso, temos

$$(\widetilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \rightharpoonup (u,p), \quad \text{fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde (u,p) é a única solução de (7), P_ε é uma extensão da pressão p_ε, e $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a extensão de u_ε por zero em $\Omega - \Omega_\varepsilon$. Sintetizando, teríamos que o problema (6) converge para o problema (7) (Lei de Brinkman), quando $\varepsilon \to 0$.

2ª) O diâmetro dos buracos é assintoticamente menor que o "crítico", isto é, $a_{S_i^\varepsilon} < a_\varepsilon$ (buracos pequenos). Neste caso, temos

$$(\widetilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \to (u,p), \quad \text{forte em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde (u,p) é a única solução de (8). Sintetizando, teríamos que o problema (6) converge para o problema (8) (Stokes), quando $\varepsilon \to 0$.

3ª) O diâmetro dos buracos é assintoticamente maior que o "crítico", isto é, $a_{S_i^\varepsilon} > a_\varepsilon$

(buracos grandes), porém preservando certas proporções. Neste caso, temos

$$\left(\frac{\widetilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}, P_\varepsilon(p_\varepsilon)\right) \to (u,p), \quad \text{forte em } [L^2(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde (u,p) é a única solução de (9), e $\sigma_\varepsilon = \dfrac{a_\varepsilon}{a_{S_i^\varepsilon}}$. Sintetizando, teríamos que o problema (6) converge para o problema (9) (Lei de Darcy), quando $\varepsilon \to 0$.

O trabalho que desenvolveremos segue na direção de [8] e está fundamentalmente baseado nas referências [1], [2] e [7].

Neste trabalho, estudaremos a homogeneização de um problema de contorno com condições de fronteira de Dirichlet em domínios periodicamente perfurados com "pequenos" buracos.

O problema a ser estudado é o problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão no cilindro Q_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0, \quad \text{e} \quad u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{10}$$

onde as fronteiras Γ e Γ_ε são de Lipschitz, e os dados u_ε^0, u_ε^1 e f_ε satisfazem:

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H_0^2(\Omega_\varepsilon)]^N, \\ u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon, \\ f_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;H_\varepsilon), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco em } V \cap [H^2(\Omega)]^N, \\ \widetilde{u}_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1, \quad \text{fraco em } V, \\ \widetilde{f}_\varepsilon \rightharpoonup f, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;H), \\ \widetilde{f}_\varepsilon' \text{ e } \widetilde{f}_\varepsilon(0) \text{ uniformemente limitadas, respect., em } L^1(0,T;H) \text{ e em } H, \end{cases}$$

onde os espaços V_ε, V, H_ε e H são como definidos no capítulo 1.

Um resultado devido a *Lions* (ver [16]) garante a existência e a unicidade de solução fraca $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ da equação (10), na classe

$$u_\varepsilon \in C^0([0,T];V_\varepsilon) \cap C^1([0,T];H_\varepsilon).$$

A equação (10) aparece em *J. C. Saut*, [28], e foi estudada em [16] por *J. L. Lions*, onde se mostra a existência e a unicidade de soluções para tal equação, em [30] por *J. S. Souza*, onde se aborda a homogeneização, em [25] por *A. Rocha*, onde se estuda a controlabilidade exata em um domínio Ω, e em [5] por *M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, A. Rocha e J. A. Soriano*, onde se estuda a controlabilidade exata da equação com um termo de memória.

Equações desse tipo aparecem em modelos simples de equações de elasticidade dinâmica para materiais incompressiveis, e em problemas acoplados de termo-elasticidade, onde um dos parâmetros tende a infinito. O estudo da homogeneização desse problema é feito utilizando-se algumas técnicas estabelecidas por *Luc Tartar*, desde 1977, conforme [32].

Em todo este trabalho, supomos que os conjuntos Ω_ε satisfazem as condições do quadro funcional abstrato introduzido por *G. Allaire* em [1] e [2] (ver (1.1)), para o estudo da homogeneização dos problemas de Stokes, em domínios perfurados com "pequenos" buracos, com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

O caso modelo é provido por um domínio perfurado periodicamente por buracos de diâmetro $a_{S_i^\varepsilon}$, onde $a_{S_i^\varepsilon}$ é assintoticamente igual ao tamanho "crítico" a_ε, sendo o período de 2ε, na direção de cada eixo. Esta condição é fundamental na construção do quadro funcional de hipóteses sobre os buracos. As demonstrações que dão corpo a esse trabalho estão baseadas na existência de tal quadro funcional de hipóteses.

Este trabalho é concebido somente para condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Observamos que o caso com condições de Neumann, homogêneas, conduz a resultados completamente diferentes, com o diâmetro crítico neste caso sendo $a_\varepsilon = \varepsilon$

(ver *D. Cioranescu e P. Donato*, [6], para a homogeneização desse problema).

O presente trabalho está organizado como segue: No capítulo 1 apresentamos, na primeira seção, o quadro funcional abstrato, dado em [1] e [2], sobre a geometria dos buracos; na segunda seção, resultados preliminares para demonstrar o resultado de homogeneização e alguns resultados de compacidade.

O Capítulo 2 é dedicado a mostrar a existência e unicidade de soluções fracas, utilizando-se para isso o método de Galerkin, o Teorema 1.1 e as hipóteses iniciais; e a dar a regularidade das soluções. Esses resultados serão obtidos para um domínio Ω_ε, com $\varepsilon > 0$ fixado.

No capítulo 3 apresentamos o principal resultado deste trabalho, o Teorema 3.1, que nos dá a convergência do processo de homogeneização da equação (6). Neste capítulo é também demonstrada a semicontinuidade inferior da energia.

O capítulo 4 apresenta os resultados de correção. São feitas hipóteses adicionais sobre os dados iniciais, e apresenta-se o termo $W_\varepsilon u$, chamado de corretor, que é uma boa aproximação da solução u_ε.

O capítulo 5 é dedicado a estudar o caso onde o tamanho dos buracos é inferior ao crítico. Há uma modificação no quadro abstrato de hipóteses, os resultados dos capítulos 4 e 5 continuam verdadeiros, e a convergência forte dos dados implica agora na convergência forte das soluções.

Finalmente, o Apêndice é dedicado à apresentação de alguns resultados básicos de análise funcional e espaços de Sobolev, úteis para o estudo das EDP‘s.

Capítulo 1

Contexto geométrico

Este capítulo está dividido em duas seções. Na seção 1.1 descrevemos a geometria do problema e o quadro abstrato de hipóteses introduzido por *G. Allaire*, no qual o presente trabalho está baseado. Na seção 1.2 apresentamos resultados que serão úteis para a homogeneização da equação hiperbólica com um termo de pressão, e alguns resultados de compacidade.

1.1 Contexto geométrico

Seja Ω um conjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$, localmente localizado de um mesmo lado de sua fronteira Γ. Seja $\{\varepsilon\}$ um conjunto de números reais estritamente positivos, cuja seqüência tende a zero, enquanto $N(\varepsilon)$, um parâmetro que representa o número de buracos, tende ao infinito. Para cada $\varepsilon > 0$ fixado consideramos uma família de conjuntos fechados $(S_i^\varepsilon)_{1 \leq i \leq N(\varepsilon)}$ (os buracos), distribuídos periodicamente com período 2ε na direção de cada eixo coordenado, e definimos um conjunto perfurado Ω_ε do seguinte modo:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_i^\varepsilon.$$

Ω_ε definido dessa forma é também um conjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 2$, localmente localizado de um mesmo lado de sua fronteira Γ. A figura 1.1 nos dá uma idéia de como é o domínio Ω_ε, para $N = 2$.

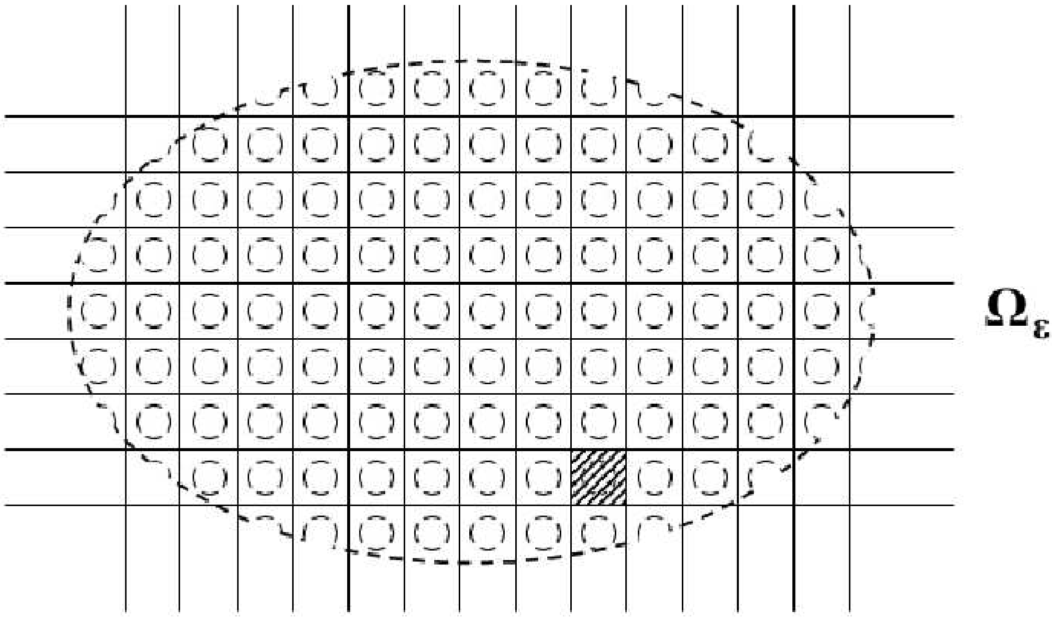

Figura 1.1: domínio Ω_ε

A área hachurada na figura 1.1 representa uma célula com dimensão $2\varepsilon \times 2\varepsilon$, e está detalhada na figura 1.2, onde S_i^ε é um buraco e $a_{S_i^\varepsilon}$ representa o tamanho dos buracos.

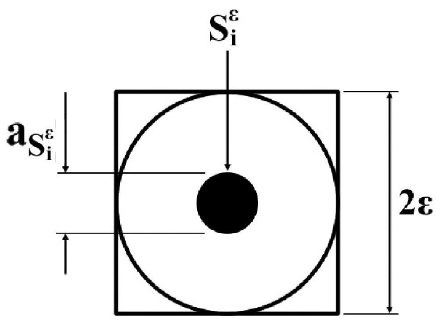

Figura 1.2: célula

Em vez de fazermos hipóteses geométricas diretas sobre os buracos S_i^ε, adotaremos aqui o quadro funcional abstrato introduzido por *G. Allaire*, onde a hipótese sobre a geometria dos buracos é feita admitindo-se a existência de uma família adequada de funções testes.

Suponha que existe uma seqüência de funções $(w_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq N}$, tais que:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
(i) & w_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)]^N,\ \|w_k^\varepsilon\|_{[L^\infty(\Omega)]^N} \leq M_0;\ q_k^\varepsilon \in L^2(\Omega), \\
(ii) & \left\{\begin{array}{l} \nabla . w_k^\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Omega \\ w_k^\varepsilon = 0, \quad \text{nos buracos } S_i^\varepsilon, \end{array}\right. \\
(iii) & \left\{\begin{array}{l} w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k, \quad \text{fraco em } [H^1(\Omega)]^N,\ \text{e q.s em } \Omega,\ \text{onde } e_k \text{ é o} \\ \qquad\qquad\qquad \text{k-ésimo vetor da base canônica do } \mathbb{R}^N, \\ q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \text{fraco em } L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \end{array}\right. \\
(iv) & \mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^N, \\
(v) & \left\{\begin{array}{l} \text{Para cada seqüência } v_\varepsilon \text{ e para cada } v \text{ tal que} \\ \quad \left\{\begin{array}{l} v_\varepsilon \rightharpoonup v,\ \text{fraco em } [H^1(\Omega)]^N, \\ v_\varepsilon = 0,\ \text{sobre os buracos } S_i^\varepsilon, \end{array}\right. \\ \text{e para cada } \phi \in \mathcal{D}(0,T),\ \text{temos} \\ \qquad \left\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi v_\varepsilon \right\rangle_\Omega \to \left\langle \mu_k, \phi v \right\rangle_\Omega, \end{array}\right. \\
(vi) & \text{Existe uma aplicação linear } R_\varepsilon \text{ tal que} \\
& \left\{\begin{array}{l} R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^N, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N), \\ u \in [H_0^1(\Omega)]^N \Rightarrow R_\varepsilon \widetilde{u} = u,\ \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \nabla . u = 0,\ \text{em } \Omega \Rightarrow \nabla .(R_\varepsilon u) = 0,\ \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \|R_\varepsilon u\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N} \leq c.\|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^N},\ \text{e } c \text{ não depende de } \varepsilon. \end{array}\right.
\end{array}
\right. \tag{1.1}
$$

Em (1.1), e daqui por diante, $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_\Omega$ denotará o par dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, enquanto que $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_{\Omega_\varepsilon}$ denotará o par dualidade entre $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ e $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

Observação: Exemplos onde as hipóteses de (1.1) são satisfeitas podem ser vistos em [1] e [2].

Observação: Nos exemplos acima, o diâmetro dos buracos a_ε é menor que ε, e satisfaz

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \, log \, a_\varepsilon \longrightarrow -\,C_0, & \text{se } N = 2, \\ a_\varepsilon \, \varepsilon^{-N/N-2} \longrightarrow C_0, & \text{se } N \geq 3, \end{cases} \tag{1.2}$$

para um dado $C_0 > 0$.

O diâmetro a_ε é crítico no seguinte sentido: quando o diâmetro dos buracos é $a_{S_i^\varepsilon}$, com $a_{S_i^\varepsilon} << a\varepsilon$, isto é, quando

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \; log \; a_{S_i^\varepsilon} \;\rightarrow\; -\,\infty, & \text{se } N = 2 \\ \dfrac{\varepsilon^{\frac{-N}{(N-2)}}}{a_{S_i^\varepsilon}} \;\rightarrow\; +\,\infty, & \text{se } N \geq 3, \end{cases} \tag{1.3}$$

a hipótese (1.1) é satisfeita, mas em $(1.1)_{(iii)}$ temos que w_k^ε converge fortemente para 0, em $[H^1(\Omega)]^N$, e que q_k^ε converge fortemente para 0, em $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Assim, em $(1.1)_{(vi)}$ $\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi v_\varepsilon \rangle_\Omega$ converge para zero, ou seja, temos $\mu_k = 0$, o que implica que $M = 0$ na equação homogeneizada.

Por outro lado, se $a_\varepsilon << a_{S_i^\varepsilon}$ (o que corresponde a substituir ∞ por 0 em (1.3)), se tornam necessárias mudanças maiores sobre todas as hipóteses de (1.1), para provar a convergência do processo de homogeneização. Neste caso, obtemos a convergência das soluções para o par (u, p) satisfazendo a Lei de Darcy (ver (9)). Um estudo sobre esse caso, para a equação de Stokes, pode ser visto em [2].

O tamanho a_ε dado por (1.2) é, portanto, o único para o qual o quadro abstrato de hipóteses (1.1) é satisfeito com convergências fracas (e não fortes) de w_k^ε e de q_k^ε para 0, na hipótese $(1.1)_{(iii)}$.

1.2 Resultados preliminares

Definição: Dadas duas matrizes A e B de ordem N, define-se o produto interno entre A e B da seguinte forma:

$$A : B = \sum_{j=1}^{N} A_j \cdot B_j,$$

onde $A_j \cdot B_j$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^N$, sendo A_j e B_j as j-ésimas colunas de A e de B, respectivamente.

Lema 1.1 *Sejam* $(w_k^\varepsilon,\, q_k^\varepsilon,\, \mu_k^\varepsilon)_{1\le k\le N}$ *funções que satisfaçam as hipóteses* $(1.1)_{(i)-(v)}$. *Seja* M *a matriz definida por suas colunas* $(\mu_k)_{1\le k\le N}$, *e com seus elementos* $(\mu_k^i)_{1\le k\le N}$ *definidos por* $\mu_k^i = \mu_k \cdot e_i$. *Então, para cada* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *temos*

$$\left\langle \mu_k^i, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \phi \nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon, \tag{1.4}$$

com cada entrada μ_k^i *sendo uma medida de Radon.*

Assim M *é uma matriz simétrica e positiva no seguinte sentido:*

$$\left\langle M\phi, \phi \right\rangle_{\Omega)} \ge 0, \quad \forall\ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N. \tag{1.5}$$

Demonstração:

Da hipótese $(1.1)_v$ obtemos

$$v_\varepsilon = w_i^\varepsilon \rightharpoonup v = e_i, \quad \text{fraco em } [H^1(\Omega)]^N.$$

Deduz-se então que

$$\left\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \right\rangle_\Omega \to \left\langle \mu_k, \varphi_i e_i \right\rangle_\Omega, \quad \forall\ \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.6}$$

mas, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\Big\langle q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \Big\rangle_\Omega = & -\int_\Omega q_k^\varepsilon w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i \\ & + \int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon : w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i + \int_\Omega \varphi_i \nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\Big\langle \nabla q_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \Big\rangle_\Omega & = -\int_\Omega q_k^\varepsilon \nabla\cdot (\varphi_i w_i^\varepsilon) \\ & = -\int_\Omega q_k^\varepsilon \Big(w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i + \varphi_i \nabla\cdot w_i^\varepsilon \Big) \\ & = -\int_\Omega q_k^\varepsilon w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i,\end{aligned}$$

já que $div\ w_i^\varepsilon = 0$ em Ω, e

$$\begin{aligned}\Big\langle \Delta w_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \Big\rangle_\Omega & = -\Big\langle \nabla w_k^\varepsilon, \nabla(\varphi_i w_i^\varepsilon) \Big\rangle_\Omega \\ & = -\Big\langle \nabla w_k^\varepsilon, \Big(w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i + \varphi_i \nabla w_i^\varepsilon \Big) \Big\rangle_\Omega \\ & = -\Big\langle \nabla w_k^\varepsilon, w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i \Big\rangle_\Omega - \Big\langle \nabla w_k^\varepsilon, \varphi_i \nabla w_i^\varepsilon \Big\rangle_\Omega \\ & = -\int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon : w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i - \int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon : \varphi_i \nabla w_i^\varepsilon.\end{aligned}$$

Agora,

$$\int_\Omega q_k^\varepsilon w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i \to 0,$$

pois $q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$, fraco em $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, e $w_i^\varepsilon \to e_i$, forte em $[L^2(\Omega)]^N$, graças ao Teorema A.5.2 (Rellich).

Também,

$$\int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon : w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i \to 0,$$

pois $w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$, fraco em $[H^1(\Omega)]^N$, e como $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, então $w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$, fraco em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^N$. D^α é um operador contínuo em $\mathcal{D}'(\Omega)$, em particular para $\alpha = 1$, $Dw_k^\varepsilon \rightharpoonup De_k$ fraco, daí $\nabla w_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$, fraco em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^{N^2}$. Como $w_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^N$, então $\nabla w_k^\varepsilon \in [L^2(\Omega)]^{N^2}$, logo, $\nabla w_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$, fraco em $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. $(*)$

Como w_k^ε converge em $[H^1(\Omega)]^N$, (w_k^ε) é limitada em $[H^1(\Omega)]^N$ e, por Rellich, é limitada em $[L^2(\Omega)]^N$, sendo (∇w_k^ε) também limitada em $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. como $L^2(\Omega)$ é reflexivo, pode-se extrair uma subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que $\nabla w_k^\varepsilon \rightharpoonup \xi$, em $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. $(**)$

De $(*)$ e de $(**)$, temos que $\xi = 0$. Isso nos diz que $\nabla w_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$, fraco em $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. Agora, como $w_i^\varepsilon \rightharpoonup e_i$, fraco em $[H^1(\Omega)]^N$, e $H^1(\Omega)$ está contido compactamente em $L^2(\Omega)$, então $w_i^\varepsilon \rightharpoonup e_i$, forte em $[L^2(\Omega)]^N$.

Assim, resulta que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_i \nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon \;\to\; \Big\langle \mu_k, \varphi_i e_i \Big\rangle_\Omega &= \Big\langle e_i^T \mu_k, \varphi_i \Big\rangle_\Omega \\ &= \Big\langle \mu_k^i, \varphi_i \Big\rangle_\Omega .\end{aligned} \tag{1.7}$$

De (1.7) deduz-se que a matriz M, definida por $Me_k = \mu_k$, é simétrica, por ser limite de uma seqüência de matrizes simétricas $(\nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon)_{1 \le i,k \le N}$.

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned}\Big\langle M\phi, \phi \Big\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^N, [\mathcal{D}(\Omega)]^N} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega \varphi_i \varphi_k \nabla w_i^\varepsilon : \nabla w_k^\varepsilon \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \Big| \sum_{k=1}^N \varphi_k \nabla w_k^\varepsilon \Big| \ge 0\end{aligned}$$

$\forall\ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$, com $\phi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$, onde M é positiva no seguinte sentido:

$$\Big\langle M\phi, \phi \Big\rangle_{[\mathcal{D}'(\Omega)]^N, [\mathcal{D}(\Omega)]^N} \ge 0,\ \forall\ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N.$$

Além disso, deduz-se de (1.7) que

$$\mu_k^i = e_i^T \mu_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon,\ \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

onde $(\nabla w_k^\varepsilon : \nabla w_i^\varepsilon)$ é uma seqüência limitada de $[L^1(\Omega)]^{N^2}$, e μ_k^i é uma medida de Radon. $\square$

Teorema 1.1 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, limitado e com fronteira regular. Suponha que f é uma forma linear e contínua em $[H_0^1(\Omega)]^N$, isto é, $f \in [H^{-1}(\Omega)]^N$, e suponha que $\langle f, v\rangle = 0$, $\forall\ v \in [H_0^1(\Omega)]^N$, $div\, v = 0$.*

Então existe $p \in L^2/\mathbb{R}$ tal que $f = -\nabla p$.

Demonstração:

A demonstração será feita por etapas.

Primeira etapa:

Seja

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx=\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v\,dx.$$

Pelo Teorema A.1.4 (Lema de Lax-Milgram), como $a(u,v)$ é uma forma bilinear, contínua, simétrica e coerciva de $[H_0^1(\Omega)]^N\times[H_0^1(\Omega)]^N\rightarrow\mathbb{R}$, tem-se que o problema

$$a(u,v)=\langle\, f,v\,\rangle$$

tem única solução $u\in[H_0^1(\Omega)]^N$, para cada $f\in[H^{-1}(\Omega)]^N$, qualquer que seja $v\in[H_0^1(\Omega)]^N$.

Como $a(u,v)=0,\ \forall\ v\in[H_0^1(\Omega)]^N$ que satisfaça $div\, v=0$, (pois por hipótese $f\in[H^{-1}(\Omega)]^N$) e $\langle\, f,v\,\rangle=0,\ \forall\ v\in[H_0^1(\Omega)]^N$, tal que $div\, v=0$, isto é, $a(u,v)$ se anula num subespaço de $[H_0^1(\Omega)]^N$), segue do Corolário A.1.2 (de Hahn-Bannach) que

$$a(u,v)=0,\quad\forall\, v\in[H_0^1(\Omega)]^N,$$

o que implica que $u\equiv 0$.

Segunda etapa:

Afirmação: Dados $\alpha>0$ e $f\in[H^{-1}(\Omega)]^N$, existe um único $u_\alpha\in[H_0^1(\Omega)]^N$ tal que

$$a(u_\alpha,v)+\frac{1}{\alpha}\,(div\, u_\alpha,div\, v)=\langle f,v\rangle,\quad\forall\, v\in[H_0^1(\Omega)]^N.\tag{1.8}$$

Para provar a afirmação, basta mostrar que a forma $a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}(\nabla.u_\alpha, \nabla.v)$ é contínua e coerciva. De fato,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\alpha}(\nabla.u_\alpha, \nabla.v)\Big| &\leq \frac{1}{\alpha}\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big|\frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial x_i}\Big|^2\Big)dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big|\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big|^2\Big)dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{c}{\alpha}\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\Big|\frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\Big|\frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&= \frac{c}{\alpha}\,\|u_\alpha\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}.\|v\|_{[H_0^1(\Omega)]^N},
\end{aligned}$$

o que prova que a forma $a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}(\nabla.u_\alpha, \nabla.v)$ é contínua.

Além disso,

$$\begin{aligned}
a(u_\alpha, u_\alpha) + \frac{1}{\alpha}(\nabla.u_\alpha, \nabla.u_\alpha) &= a(u_\alpha, u_\alpha) + \frac{1}{\alpha}|\nabla.u_\alpha|_{L^2(\Omega)^2} \\
&\geq a(u_\alpha, u_\alpha) \\
&\geq \frac{c}{\alpha}\,\|u_\alpha\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^N},
\end{aligned}$$

o que prova que a forma é coerciva.

Logo, pelo Lema de Lax-Milgram, segue a afirmação.

Terceira etapa:

Seja $p_\alpha = \frac{1}{\alpha}\, div\, u_\alpha$.

Como $u_\alpha \in [H_0^1(\Omega)]^N$, segue que $p_\alpha \in L^2(\Omega)$, e

$$\int_\Omega p_\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \nabla.u_\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_\Gamma u_\alpha.\nu\, d\Gamma = 0.$$

Isto implica que $\exists\ v_\alpha \in [H_0^1(\Omega)]^N$ (ver Tartar, [32], pg. 30) satisfazendo

$$p_\alpha = div\, v_\alpha \quad e \quad \|v_\alpha\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} \leq c\,|p_\alpha|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.9}$$

isto é, a aplicação

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) &\rightarrow [H_0^1(\Omega)]^N \\
p_\alpha &\mapsto v_\alpha
\end{aligned}$$

é linear e contínua.

Fazendo-se $v = u_\alpha$ em (1.8), obtém-se

$$\|u_\alpha\|^2_{[H^1_0(\Omega)]^N} + \frac{1}{\alpha}\,|\nabla.u_\alpha|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{[H^{-1}(\Omega)]^N}.\|u_\alpha\|_{[H^1_0(\Omega)]^N}$$

e daí

$$\frac{1}{2}\,\|u_\alpha\|^2_{[H^1_0(\Omega)]^N} + \frac{1}{\alpha}\,|\nabla.u_\alpha|^2_{L^2(\Omega)} \leq c,$$

onde c é uma constante independente de α. Logo,

$$\|u_\alpha\|_{[H^1_0(\Omega)]^N} \leq c$$

e, portanto, existe uma subsucessão de (u_α), ainda denotada por (u_α), tal que

$$u_\alpha \rightharpoonup w, \quad \text{fraco em } [H^1_0(\Omega)]^N. \tag{1.10}$$

Fazendo-se $v = v_\alpha$ em (1.8), tem-se

$$a(u_\alpha, v_\alpha) + |p_\alpha|^2 = \langle f, v_\alpha\rangle,$$

o que implica que

$$|p_\alpha|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|v_\alpha\|_{[H^1_0(\Omega)]^N}.$$

Daí e de (1.9), tem-se que

$$|p_\alpha| \leq c.$$

Logo, existe uma subsucessão de (p_α), ainda denotada por (p_α), tal que

$$p_\alpha \rightharpoonup p, \quad \text{fraco em } L^2_0(\Omega), \tag{1.11}$$

onde

$$L^2_0(\Omega) = \Big\{ g \in L^2(\Omega) \ ; \ \int_\Omega g \ dx = 0 \Big\}.$$

Por (1.10) e (1.11), e tomando-se o limite em (1.8), obtém-se

$$a(w,v) + (p, \nabla.v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in [H_0^1(\Omega)]^N,$$

sendo w e p os limites fracos das subsucessões (u_α) e (p_α).

Supondo-se $div\ v = 0$, seque que

$$a(w,v) = \langle f, v\rangle.$$

Da primeira etapa (unicidade) segue que $u = w$. Logo, tem-se que

$$a(u,v) + (p, \nabla.v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in [H_0^1(\Omega)]^N,$$

mas,

$$(p, \nabla.v) \;=\; \Big(p, \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{N} \Big(p, \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big) \;=\; -\sum_{i=1}^{N} \Big\langle \frac{\partial p}{\partial x_i}\, , v_i \Big\rangle \;=\; \langle -\nabla p, v\rangle.$$

Assim,

$$\langle -\nabla p, v\rangle \;=\; \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in [H_0^1(\Omega)]^N,$$

logo,

$$-\nabla p \;=\; f, \quad p \in L^2_{loc}(\Omega) \approx L_2(\Omega)/\mathbb{R}. \qquad \square$$

Observação: Interpretando-se o resultado acima, conclui-se que sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular, e sendo L uma forma linear e contínua sobre $[H_0^1(\Omega)]^N$ que se anula no subespaço de $[H_0^1(\Omega)]^N$ de vetores de divergência zero, então existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, tal que

$$L(v) \;=\; \int_\Omega p.div\, v\, dx \;=\; -\int_\Omega \nabla p.v\, dx.$$

Teorema 1.2 *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^N$*, limitado e com fronteira regular. Então:*

(i) Se uma distribuição p *tem todas suas primeiras derivadas* $D_i p$*,* $1 \leq i \leq N$ *em* $L^2(\Omega)$*, então* $p \in L^2(\Omega)$ *e*

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.12}$$

(ii) Se uma distribuição p *tem todas suas primeiras derivadas* $D_i p$*,* $1 \leq i \leq N$ *em* $H^{-1}(\Omega)$*, então* $p \in L^2(\Omega)$*, e*

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)\|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Nos dois casos, se Ω *é um conjunto qualquer do* $\mathbb{R}^N$*, então* $p \in L^2_{loc}(\Omega)$*.*

Demonstração:

O ítem (i) é provado em *Deny* & *Lions*, [9], para um conjunto aberto Ω limitado e estrelado. O ítem (ii) é provado em *Magenes* & *Stampacchia*, [18], se Ω é de classe C^1, e em *Nečas*, [22], se Ω é somente lipschitziano. Para um conjunto sem qualquer regularidade, aplicamos os resultados anteriores em cada bola fechada contida em Ω, e obtemos apenas que $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. $\square$

Observação: Combinando os resultados dos Teoremas 1.1 e 1.2, vemos que se $f \in H^{-1}(\Omega)$ (ou $L^2_{loc}(\Omega)$) e $(f, v) = 0$, $\forall\ v \in \mathcal{V}$, então $f = \nabla p$ com $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. Se, além disso, Ω for um conjunto aberto limitado e lipschitziano, então $p \in L^2(\Omega)$ (ou $H^1(\Omega)$).

Observação: O ítem (ii) do teorema 1.2 implica que o operador gradiente é isomorfismo de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ em $H^1(\Omega)$. Lembrar que (como Ω limitado) $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ é isomorfo ao subespaço de $L^2(\Omega)$ ortogonal às constantes, isto é,

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \Big\{ p \in L^2(\Omega)\ ;\ \int_\Omega p(x)\ dx = 0\ \Big\}.$$

Operador de extensão para a pressão

Seguindo a idéia de *L. Tartar* (ver [31]), baseados na hipótese $(1.1)_{vi}$ podemos construir um operador de extensão para a pressão.

Proposição 1.1 *Se existe um operador linear R_ε satisfazendo $(1.1)_{vi}$, então o operador P_ε definido por*

$$\Big\langle \nabla[P_\varepsilon(p_\varepsilon)], u \Big\rangle_\Omega = \Big\langle \nabla p_\varepsilon, R_\varepsilon u \Big\rangle_{\Omega_\varepsilon} \tag{1.14}$$

para cada $u \in [H_0^1(\Omega)]^N$, é um operador linear contínuo de $L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ em $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, tal que para cada $p_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ tem-se

(i) $P_\varepsilon(p_\varepsilon) = p_\varepsilon$, *em* $L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$,

(ii) $\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C\,\|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}}$,

(iii) $\|\nabla[P_\varepsilon(p_\varepsilon)]\|_{[H^{-1}(\Omega)]^N} \leq C\,\|\nabla p_\varepsilon\|_{[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N}$,

onde C é uma constante que não depende de p_ε ou de ε.

Demonstração:

Ver em *G. Allaire*, [1], proposição I.2.5, pg. 25, e [2], proposição 1.1.4, pg. 9. □

Homogeneização do Sistema de Stokes

Proposição 1.2 *Seja $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ solução do sistema de Stokes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Encontrar } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}] \textit{ tal que} \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \textit{com } f \in [L^2(\Omega)]^N \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0, \quad \textit{em } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Seja $\widetilde{u}_\varepsilon$ o prolongamento da velocidade por 0 em $\Omega \backslash \Omega_\varepsilon$.

Seja $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ o operador prolongamento da pressão, P_ε definido na Proposição 1.1.

Supondo-se que a hipótese (1.1) seja satisfeita, e notando-se que M é a matriz composta pelos vetores coluna $(\mu_k)_{k=1}^N$ (ver Lema 1.1), então

$$\Big(\widetilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)\Big) \rightharpoonup (u,p), \text{ fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde (u,p) é a única solução do sistema homogeneizado

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u,p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}] \text{ tal que} \\ \begin{cases} \nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \end{cases} \tag{1.16}$$

e

$$|\nabla \widetilde{u}_\varepsilon|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \to |\nabla u|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \langle Mu, u\rangle_\Omega. \tag{1.17}$$

Demonstração:

Ver em *G. Allaire*, [1], pg. 50, e [2], pg. 16. □

Temos o seguinte resultado sobre a semicontinuidade inferior fraca da energia:

Proposição 1.3 *Suponha que as hipóteses de* $(1.1)_i$ *a* $(1.1)_v$ *são satisfeitas. Então, para toda seqüência z_ε tal que*

$$\begin{cases} z_\varepsilon \rightharpoonup z, \quad \text{fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N, \\ \nabla \cdot z_\varepsilon \rightharpoonup \nabla \cdot z, \quad \text{forte em } L^2(\Omega), \\ z_\varepsilon = 0, \quad \text{nos buracos } (S_i)_{1 \le i \le N(\varepsilon)}, \end{cases} \tag{1.18}$$

temos

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla z_\varepsilon|^2 \geq \int_\Omega |\nabla z|^2 + \Big\langle Mz, z \Big\rangle_\Omega. \tag{1.19}$$

Demonstração:

Ver em *G. Allaire*, [1], pg. 45, e [2], pg. 16. □

Alguns resultados de compacidade

Sejam X e Y dois espaços de Banach reflexivos tais que $X \subset Y$, sendo a imersão compacta e densa. Sejam X' o espaço dual de X e Y' o espaço dual de Y.

Temos os seguintes resultados:

Teorema 1.3 *Seja (g_ε) uma seqüência tal que*

$$\begin{cases} g_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, & fraco-estrela\ em\ L^\infty(0,T;X), \\ g_\varepsilon \rightarrow g, & forte\ em\ C^0([0,T];Y). \end{cases} \tag{1.20}$$

Então, $\quad g_\varepsilon \rightarrow g, \quad$ *forte em* $C^0_s([0,T];X)$*, isto é,* $\forall\, v \in X'$*, a função*

$$h_\varepsilon : t \mapsto \langle g_\varepsilon(t), v \rangle_{X,X'} \tag{1.21}$$

pertence a $C^0([0,T])$ *e satisfaz*

$$h_\varepsilon \rightarrow h, \quad forte\ em\ C^0([0,T]) \tag{1.22}$$

onde h está definida por

$$h : t \mapsto \langle g(t), v \rangle_{X,X'}. \tag{1.23}$$

Demonstração:

De acordo com [17] (Lema 8.1, pg. 297), temos

$$L^\infty(0,T;X) \cap C^0_s(0,T;Y) = C^0_s(0,T;X).$$

Portanto, por (1.20), $g_\varepsilon \in C^0_s(0,T;X)$ e assim h_ε definida por (1.21) está em $C^0([0,T])$. Como $C^0([0,T])$ é um espaço completo, para demonstrar (1.22) basta mostrar que (h_ε) é uma seqüência de Cauchy em $C^0([0,T])$.

Para um dado $\widehat{v} \in Y'$, introduzamos a função $\quad \widehat{h}_\varepsilon : t \mapsto \langle g_\varepsilon(t), \widehat{v} \rangle_{Y,Y'}$.

Temos, portanto,

$$
\begin{aligned}
|h_\varepsilon(t)-h_{\varepsilon'}(t)| &\leq \left|h_\varepsilon(t)-\widehat{h}_\varepsilon(t)\right|+\left|\widehat{h}_\varepsilon(t)-\widehat{h}_{\varepsilon'}(t)\right|+\left|\widehat{h}_{\varepsilon'}(t)-h_{\varepsilon'}(t)\right| \\
&= \left|\langle g_\varepsilon(t), v-\widehat{v}\rangle_{X,X'}\right|+\left|\langle g_\varepsilon(t)-g_{\varepsilon'}(t), \widehat{v}\rangle_{Y,Y'}\right|+\left|\langle g_{\varepsilon'}(t), v-\widehat{v}\rangle_{X,X'}\right| \\
&\leq \Big(\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;X)}+\|g_{\varepsilon'}\|_{L^\infty(0,T;X)}\Big).\|v-\widehat{v}\|_{X'}+\|g_\varepsilon-g_{\varepsilon'}\|_{C^0([0,T];Y)}.\|\widehat{v}\|_{Y'}.
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Combinando $(1.20)_2$ e (1.24), e levando em consideração a densidade de Y' em X', deduzimos que h_ε é uma seqüência de Cauchy em $C^0([0,T])$. $\square$

Teorema 1.4 *Seja (g_ε) uma seqüência tal que*

$$
\begin{cases}
g_\varepsilon \rightharpoonup g, & \textit{fraco em } L^1(0,T;X), \\
g'_\varepsilon \rightharpoonup g', & \textit{fraco em } L^1(0,T;Y).
\end{cases}
\tag{1.25}
$$

Então, $\qquad g_\varepsilon \to g, \quad \textit{forte em } C^0([0,T];Y).$

Demonstração:

De acordo com *J. Simon* (ver [29], teorema 3), é suficiente demonstrarmos que

$$
\|g_\varepsilon(\cdot+h)-g_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty(0,T-h;Y)} \to 0, \text{ quando } h\to 0,
\tag{1.26}
$$

uniformemente em ε.

Temos que

$$
\int_t^{t+h} g'_\varepsilon(s)ds = g_\varepsilon(t+h)-g_\varepsilon(t)
$$

e

$$
\Big\|\int_t^{t+h} g'_\varepsilon(s)ds\Big\| \leq \int_t^{t-h}\|g'_\varepsilon(s)\|ds,
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
\|g_\varepsilon(t+h)-g_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(0,T-h;Y)} &= \Big\|\int_t^{t+h} g'_\varepsilon(s)ds\Big\|_Y \\
&\leq \sup_{t\in[0,T-h]}\int_t^{t-h}\|g'_\varepsilon(s)\|_Y ds.
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Por outro lado, *J. Diestel e J. J. Uhl, Jr* (ver [10], teorema 4, pg. 104) estabelece que a norma em Y de uma seqüência que converge fracamente em $L^1(0,T;Y)$ é uniformemente integrável sobre $[0,T]$. Assim, o lado direito de (1.27) converge para zero quando $h \to 0$, uniformemente em ε, o que demonstra (1.26). $\square$

Teorema 1.5 *Seja (g_ε) uma seqüência tal que*

$$\begin{cases} g_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, \quad fraco-estrela \text{ em } L^\infty(0,T;X), \\ {g_\varepsilon}' \rightharpoonup g', \quad fraco \text{ em } L^1(0,T;Y). \end{cases} \tag{1.28}$$

Então, $\quad g_\varepsilon \longrightarrow g, \quad$ *forte em* $C^0_s([0,T];X)$*, isto é,*

$$\langle g_\varepsilon(\cdot), v\rangle_{X,X'} \to \langle g(\cdot), v\rangle_{X,X'}, \quad em\ C^0([\,0,T]),\ \forall\, v \in X'. \tag{1.29}$$

Demonstração:

Do teorema 1.4, temos que $\quad g_\varepsilon \to g, \quad$ forte em $C^0([0,T];Y)$. Isso, junto com $(1.28)_1$, aplicados no Teorema 1.3, nos dá o resultado. $\square$

Observação: (1.29) implica, em particular, que

$$g_\varepsilon(t) \to g(t), \quad \text{fraco em } X,\ \forall\, t \in [\,0,T] \text{ fixado.}$$

Utilizaremos para o Lema 1.2, e no decorrer do trabalho, os espaços abaixo definidos:

Definição: Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Define-se

$$V_\varepsilon = \{v\ ;\ v \in [H^1_0(\Omega_\varepsilon)]^N,\ div\ v = 0 \text{ sobre } \Omega_\varepsilon\}, \quad \text{e}$$

$$H_\varepsilon = \{v\ ;\ v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N,\ div\ v = 0 \text{ sobre } \Omega_\varepsilon,\ \text{com } v.\nu = 0 \text{ sobre } \Gamma_\varepsilon\},$$

sendo ν o vetor unitário normal a Γ_ε, dirigido para o exterior de Ω_ε.

Os espaços V_ε e H_ε podem também ser descritos da seguinte maneira:

$$H_\varepsilon = \overline{\mathcal{V}_\varepsilon}^{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} \qquad \text{e} \qquad V_\varepsilon = \overline{\mathcal{V}_\varepsilon}^{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N},$$

onde $\mathcal{V}_\varepsilon = \{\varphi \ ; \ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)]^N, \ div\ \varphi = 0 \text{ em } \Omega_e\}$.

Analogamente, se definem os espaços $H, \ V$ e $\mathcal{V}$.

Lema 1.2 *Suponha que*

$$\begin{cases} \widetilde{v}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v, & fraco - estrela\ em\ L^\infty(0,T;V), \\ \widetilde{v}'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v', & fraco - estrela\ em\ L^\infty(0,T;H) \hookrightarrow L^1(0,T;H). \end{cases}$$

Então,

$$\langle \theta, \widetilde{v}_\varepsilon(.)\rangle_\Omega \to \langle \theta, v(.)\rangle_\Omega, \quad em\ C^0([0,T]), \ \forall\, \theta \in V'.$$

Demonstração:

Temos que $V \hookrightarrow H$ compacta e densamente; assim, fazendo $g_\varepsilon = \widetilde{v}_\varepsilon, \ X = V$ e $Y = H$, no Teorema 1.5, obtemos o resultado. $\square$

Capítulo 2

Existência, unicidade e regularidade de soluções fracas

Neste capítulo serão obtidos resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções fracas, para um domínio Ω_ε, com $\varepsilon > 0$ ficado..

O problema consiste em achar u_ε e p_ε definida a menos de uma constante aditiva, tais que se verifiquem as equações do problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão no cilindro Q_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0, \quad \text{e} \quad u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde as fronteiras Γ e Γ_ε são de Lipschitz, e $\varepsilon > 0$ está fixado.

Precisamos também saber em que sentido teremos $u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon$ igual a f_ε, em Q_ε. Em um primeiro momento, diremos que $u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon$ em um sentido fraco, a ser precisado posteriormente, em contraposição à igualdade pontual quase-sempre em Ω_ε. Também as condições $u_\varepsilon = 0$ em Σ_ε e $div\, u_\varepsilon = 0$ em Q_ε serão entendidas ao determinarmos o espaço correto onde será encontrada a solução u_ε. Finalmente, salientamos o fato de que a escolha dos dados u^0_ε, u^1_ε e f_ε vai determinar o espaço onde será encontrada a solução u_ε do problema (2.1).

Teorema 2.1 *Suponha que*

$$\begin{cases} u^0_\varepsilon \in V_\varepsilon \cap [H^2_0(\Omega_\varepsilon)]^N, \\ u^1_\varepsilon \in V_\varepsilon, \\ f_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;H_\varepsilon). \end{cases}$$

Então, existe um único par $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *satisfazendo*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon),$$

$$u'_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon),$$

$$u''_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_\varepsilon),$$

$$p_\varepsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$$

e

$$\begin{cases} u''_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \textit{em } L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N), \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0_\varepsilon(x);\ u'_\varepsilon(x,0) = u^1_\varepsilon(x), \quad \textit{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.2}$$

com a solução u_ε *satisfazendo*

$$u_\varepsilon \in C^0([0,T];V_\varepsilon) \cap C^1([0,T];H_\varepsilon).$$

Observação: Para a obtenção da existência e unicidade de soluções, seria suficiente supor que

$$\begin{cases} u^0_\varepsilon \in V_\varepsilon, \\ u^1_\varepsilon \in H_\varepsilon, \\ f_\varepsilon \in L^1(0,T;H_\varepsilon). \end{cases}$$

Supusemos uma maior regularidade sobre os dados iniciais tendo em vista que para a demonstração do Teorema 3.1 será necessário termos $u_\varepsilon^0 \in [H_0^2(\Omega_\varepsilon)]^N$.

Demonstração (do Teorema 2.1):

A demonstração consiste em aproximar a solução que se deseja encontrar por soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita. Utilizaremos, para isso, o método de Faedo-Galerkin, e realizaremos a demonstração em oito etapas:

(i) Construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;

(ii) Estimativas a priori;

(iii) Passagem ao limite;

(iv) Introdução da pressão;

(v) Verificação das condições iniciais;

(vi) Unicidade;

(vii) Regularidade da solução; e

(viii) Final da demonstração.

Etapa (i): Construção das soluções aproximadas.

Considere o espaço $\widetilde{V}_\varepsilon = V_\varepsilon \cap [H_0^2(\Omega_\varepsilon)]^N$. Notar que $\widetilde{V}_\varepsilon$ é um subespaço separável de V_ε e, portanto, existe uma subsucessão de vetores $(w_i^\varepsilon)_{i\in\mathbb{N}}$, base de $\widetilde{V}_\varepsilon$, onde para cada m fixo, os vetores $w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, ..., w_m^\varepsilon$ são linearmente independentes, e qualquer combinação linear finita dos w_i^ε é densa em $\widetilde{V}_\varepsilon$.

Considere agora o subespaço m-dimensional denotado por $\widetilde{V}_{\varepsilon m} = [w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, ..., w_m^\varepsilon]$, gerado pelos m primeiros vetores $w_i^\varepsilon,\ i = 1, 2, ..., m$.

Então, propomos o seguinte problema aproximado: Encontrar $u_{\varepsilon m} : (0, T) \longmapsto \widetilde{V}_{\varepsilon m}$

solução do problema

$$\begin{cases} \Big(u''_{\varepsilon m}(t), v\Big) + a\Big(u_{\varepsilon m}(t), v\Big) = \Big(f_\varepsilon(t), v\Big), \quad \forall\, v \in \widetilde{V}_{\varepsilon m} \\ u_{\varepsilon m}(0) = u^0_{\varepsilon m} \to u^0_\varepsilon, \quad \text{forte em } V_\varepsilon \cap [H^2_0(\Omega_\varepsilon)]^N \\ u'_{\varepsilon m}(0) = u^1_{\varepsilon m} \to u^1_\varepsilon, \quad \text{forte em } V_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $a(u,v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u . \nabla v dx$.

Substituindo v por w_i em $(2.3)_1$, $0 < i \leq m$, resulta que as funções $t \mapsto (u_{\varepsilon m}(t), w_i)$ devem satisfazer

$$\Big(u''_{\varepsilon m}(t), w_i\Big) + a\Big(u_{\varepsilon m}(t), w_i\Big) = \Big(f_\varepsilon(t), w_i\Big), \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.4}$$

Como $u^0_\varepsilon \in \widetilde{V}_\varepsilon$, temos que u^0_ε pode ser aproximada pelos w_j. Assim, existem $\alpha_{jm} \in \mathbb{R}$ tais que

$$u^0_\varepsilon = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\varepsilon jm} w_j. \tag{2.5}$$

Como $u_{\varepsilon m} \in \widetilde{V}_{\varepsilon m}$, podemos escrever

$$u_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon jm}(t) w_j, \tag{2.6}$$

de onde resulta que

$$u_{\varepsilon m}(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon jm}(0) w_j. \tag{2.7}$$

Fazendo $u^0_{\varepsilon m} = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{\varepsilon jm} w_j$ em (2.5) e comparando com (2.7), deduzimos que $(2.3)_2$ equivale a

$$g_{\varepsilon jm}(0) = \alpha_{\varepsilon jm},\ j = 1, 2, ..., m. \tag{2.8}$$

Temos que $u^1_\varepsilon \in V_\varepsilon$. Como $\widetilde{V}_\varepsilon$ é denso em V_ε, segue que u^1_ε pode também ser aproximada pelos w_j. Portanto, existem $\beta_{\varepsilon jm} \in \mathbb{R}$, com $j = 1, 2, ..., m$, tais que

$$u_\varepsilon^1 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \beta_{\varepsilon jm} w_j.$$

Assim, fazendo $u_{\varepsilon m}^1 = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{\varepsilon jm} w_j$, obtemos que a condição $(2.3)_3$ equivale a

$$g'_{\varepsilon jm}(0) = \beta_{\varepsilon jm}, \; j = 1, 2, ..., m. \tag{2.9}$$

Ainda, substituindo (2.6) em (2.4) obtemos

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} g''_{\varepsilon jm}(t) w_j, w_i\Big) + a\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon jm}(t) w_j, w_i\Big) = \Big(f_\varepsilon(t), w_i\Big), \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.10}$$

O sistema formado por (2.10), (2.8) e (2.9), isto é,

$$\begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} g''_{\varepsilon jm}(t) w_j, w_i\Big) + a\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} g_{\varepsilon jm}(t) w_j, w_i\Big) = \Big(f_\varepsilon(t), w_i\Big), \quad i = 1, 2, ..., m, \\ g_{\varepsilon jm}(0) = \alpha_{\varepsilon jm}, \; j = 1, 2, ..., m, \\ g'_{\varepsilon jm}(0) = \beta_{\varepsilon jm}, \; j = 1, 2, ..., m, \end{cases}$$

é um sistema linear de equações ordinárias. Logo, existe a solução aproximada $u_{\varepsilon m}(t)$, para $t \in [0, T)$.

Etapa (ii): Estimativas a priori.

Estimativa 1:

Fazendo $v = u'_{\varepsilon m}(t) \in \widetilde{V}_{\varepsilon m}$ em (2.3), resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2\Big) = \Big(f_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)\Big), \quad 0 < t < T.$$

Integrando de 0 a t, para $0 < t < T$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|u'_{\varepsilon m}|^2 + \|u_{\varepsilon m}\|^2 &= |u^1_{\varepsilon m}|^2 + \|u^0_{\varepsilon m}\|^2 + 2\int_0^t \Big(f_\varepsilon(s), u'_{\varepsilon m}(s)\Big) ds \\
&\leq C + 2\int_0^t |f_\varepsilon(s)|.|u'_{\varepsilon m}(s)| ds \\
&= C + 2\int_0^t |f_\varepsilon(s)|^{\frac{1}{2}}.|f_\varepsilon(s)|^{\frac{1}{2}}.|u'_{\varepsilon m}(s)| ds \\
&\leq C + \int_0^T |f_\varepsilon(s)| ds + \int_0^t |f_\varepsilon(s)|.|u'_{\varepsilon m}(s)|^2 ds,
\end{aligned}
$$

onde $|.| = |.|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}$ e $\|.\| = \|.\|_{[H^2_0(\Omega_\varepsilon)]^N}$.

Do Lema A.2.2 (Gronwall) segue que

$$
\begin{cases}
u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \text{ independente de } m, \text{ e} \\
u'_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_\varepsilon), \text{ independente de } m,
\end{cases}
$$

portanto existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que

$$
\begin{cases}
u_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\varepsilon, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \text{ e} \\
u'_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\varepsilon, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H_\varepsilon).
\end{cases} \tag{2.11}
$$

Estimativa 2:

Fazendo $t = 0$ na equação aproximada (2.3), obtemos

$$
\Big(u''_{\varepsilon m}(0), v\Big) + a\Big(u_{\varepsilon m}(0), v\Big) = \Big(f_\varepsilon(0), v\Big), \ \forall\, v \in \widetilde{V}_{\varepsilon m}. \tag{2.12}
$$

Como $f_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;H_\varepsilon)$, temos que $f_\varepsilon \in C^0([0,T];H_\varepsilon)$ e, portanto, faz sentido calcular $f_\varepsilon(0)$, e $f_\varepsilon(0) \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N$.

Tomando-se $v = u''_{\varepsilon m}(0)$ em (2.12), resulta que

$$
\begin{aligned}
|u''_{\varepsilon m}(0)|^2 &= \Big(\Delta u^0_{\varepsilon m}, u''_{\varepsilon m}(0)\Big) + \Big(f_\varepsilon(0), u''_{\varepsilon m}(0)\Big) \\
&\leq \Big(|\Delta u^0_{\varepsilon m}| + |f_\varepsilon(0)|\Big) \cdot |u''_{\varepsilon m}(0)|,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$|u''_{\varepsilon m}(0)| \leq |\Delta u^0_{\varepsilon m}| + |f_\varepsilon(0)| < C, \tag{2.13}$$

com C independente de m.

Agora, derivando em t a equação aproximada (2.3), obtemos

$$\Big(u'''_{\varepsilon m}(t), v\Big) + a\Big(u'_{\varepsilon m}(t), v\Big) = \Big(f'_\varepsilon, v\Big), \quad \forall\, v \in \widetilde{V}_{\varepsilon m}. \tag{2.14}$$

Tomando-se $v = u''_{\varepsilon m}(t)$ em (2.14), resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2\Big) = \Big(f'_\varepsilon(t), u''_{\varepsilon m}(t)\Big). \tag{2.15}$$

Integrando-se (2.15) de 0 a t, obtemos

$$|u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 = |u''_{\varepsilon m}(0)|^2 + \|u^1_{\varepsilon m}\|^2 + \int_0^T |f'_\varepsilon(s)| ds + \int_0^t |f'_\varepsilon(s)|.|u''_{\varepsilon m}(s)|^2 ds.$$

Pelo Lema A.2.2 (Gronwall), de (2.13) e de $(2.3)_3$ resulta que

$$|u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq C,$$

com C independente de m.

Portanto, $u'_{\varepsilon m}$ é limitada em $L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$, e $u''_{\varepsilon m}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_\varepsilon)$, independente de m.

Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que

$$\begin{cases} u'_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\varepsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \text{ e} \\ u''_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u''_\varepsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H_\varepsilon). \end{cases} \tag{2.16}$$

Etapa (iii): Passagem ao limite.

Conforme observação anterior, a estimativa 1 já seria suficiente para a passagem ao limite.

Mostraremos aqui que u_ε é solução da equação em (2.3), no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Fixando-se m_0, considerando $m > m_0$, multiplicando-se a equação aproximada $(2.3)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtém-se que

$$\int_0^T \Big(u''_{\varepsilon m}(t), v\Big)\theta(t)dt + \int_0^T a\Big(u_{\varepsilon m}(t), v\Big)\theta(t)dt = \int_0^T \Big(f_\varepsilon(t), v\Big)\theta(t)dt, \tag{2.17}$$

para todo $v \in \widetilde{V}_{\varepsilon m_0}$.

Integrando-se por partes a primeira integral, obtém-se que

$$-\int_0^T \Big(u'_{\varepsilon m}(t), v\Big)\theta'(t)dt + \int_0^T a\Big(u_{\varepsilon m}(t), v\Big)\theta(t)dt = \int_0^T \Big(f_\varepsilon(t), v\Big)\theta(t)dt. \tag{2.18}$$

Tomando-se o limite quando m tende para o infinito, observando-se (2.11) e a continuidade das formas bilineares utilizadas e da integral, conclui-se que

$$-\int_0^T \Big(u'_\varepsilon(t), v\Big)\theta'(t)dt + \int_0^T a\Big(u_\varepsilon(t), v\Big)\theta(t)dt = \int_0^T \Big(f_\varepsilon(t), v\Big)\theta(t)dt, \tag{2.19}$$

para todo $v \in \widetilde{V}_{\varepsilon m_0}$. Sendo os $\widetilde{V}_{\varepsilon m_0}$ densos em V_ε, conclui-se que (2.19) é válida para toda $v \in V_\varepsilon$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

De (2.19), temos ainda que

$$-\int_0^T \Big(u'_\varepsilon(t), v\Big)\theta'(t)dt + \int_0^T \Big\langle -\Delta u_\varepsilon(t), v\Big\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon}\theta(t)dt = \int_0^T \Big(f_\varepsilon(t), v\Big)\theta(t)dt, \tag{2.20}$$

para toda $v \in V_\varepsilon$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Então, definindo-se

$$g_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) + \Delta u_\varepsilon(t),\ g_\varepsilon \in V'_\varepsilon,$$

de (2.20), obtemos

$$-\int_0^T u'_\varepsilon(t)\theta'(t)dt = \int_0^T g_\varepsilon(t)\theta(t)dt,\ em\ V'_\varepsilon. \tag{2.21}$$

Visto que $u_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0,T;V_\varepsilon)$ e $f_\varepsilon \in L^1(0,T;[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)$, segue-se que u'_ε e g pertencem a $L^1(0,T;V'_\varepsilon)$ e satisfazem (2.21).

Então, pelo Lema A.2.1, resulta que

$$u'_\varepsilon(t) = \xi + \int_0^t g_\varepsilon(s)ds, \quad \xi \in V'_\varepsilon, \ constante; \quad t \in [0,T]. \tag{2.22}$$

Portanto,

$$u'_\varepsilon \in C^0([0,T];V'_\varepsilon). \tag{2.23}$$

Ainda de (2.22), obtemos que

$$\langle u''_\varepsilon, \theta\rangle = \langle g_\varepsilon, \theta\rangle, \quad \text{para todo } \theta \in \mathcal{D}(0,T), \tag{2.24}$$

o que significa que $u''_\varepsilon \in L^1(0.T;V'_\varepsilon)$ e $u''_\varepsilon = g_\varepsilon$, em $L^1(0,T;V'_\varepsilon)$, isto é,

$$u''_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad em\ L^1(0,T;V'_\varepsilon). \tag{2.25}$$

Etapa (iv): Introdução da pressão.

De (2.19) temos que

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\Big) + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v), \quad \text{para qualquer } v \in V_\varepsilon, \ q.s. \text{ em } [0,T]. \tag{2.26}$$

Definamos agora

$$U_\varepsilon(t) = \int_0^t u_\varepsilon(s)ds \quad \text{e} \quad F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s)ds.$$

Assim, $U_\varepsilon \in C^0([0,T];V_\varepsilon)$ e $F_\varepsilon \in C^0([0,T];[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)$.

Integrando (2.26) de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\Big)dt + \int_0^t a(u_\varepsilon, v)dt = \int_0^t (f_\varepsilon, v)dt.$$

Do primeiro termo, temos que

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\Big)dt = \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\Big)\Big|_0^t = \Big(\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t} - u_\varepsilon^1, v\Big),$$

do segunto termo, aplicando o Teorema A.2.9 (Fubini), temos que

$$\begin{aligned}
-\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\, \Delta v\, dx\, dt &= -\int_{\Omega_\varepsilon} \int_0^t u_\varepsilon(s) ds\, \Delta v\, dx \\
&= -\int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(t)\, \Delta v\, dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon(t)\, \nabla v\, dx \\
&= a(U_\varepsilon, v),
\end{aligned}$$

e do terceiro membro, aplicando Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\, v\, dx\, dt &= \int_{\Omega_\varepsilon} \int_0^t f_\varepsilon(s) ds\, v\, dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(t)\, v\, dx \\
&= (F_\varepsilon, v).
\end{aligned}$$

Daí, juntando os termos temos que

$$\Big(\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t} - u_\varepsilon^1, v\Big) + a(U_\varepsilon, v) = (F_\varepsilon, v),$$

para qualquer $v \in V_\varepsilon$, para qualquer $t \in [0, T]$.

Segue-se que

$$\Big\langle \frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t} - u_\varepsilon^1 - \Delta U_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t), v \Big\rangle_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} = 0,$$

para qualquer $v \in V_\varepsilon$, para qualquer $t \in [0, T]$.

Pelo Teorema 1.1, temos que para cada $t \in [0, T]$, existe $G_\varepsilon(t) \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t} - u_\varepsilon^1 - \Delta U_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t) = \nabla G_\varepsilon. \tag{2.27}$$

Pelo Teorema 1.2, temos que $G_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, pois $\frac{d}{dx_i} G_\varepsilon(t) \in H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Assim, $\nabla G_\varepsilon \in C^0([0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N])$ e, portanto,

$$G_\varepsilon \in C^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Isto nos diz que podemos diferenciar (2.27), na variável t, no sentido das distribuições em Q_ε. ao fazer isso, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial t}\Big) - \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta \int_0^t u_\varepsilon(s)ds\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\int_0^t f_\varepsilon(s)ds\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla G_\varepsilon.$$

Definindo

$$p_\varepsilon = -\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial t},$$

obtemos

$$u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;[\mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)]^N). \tag{2.28}$$

Pela regularidade dos termos que aparecem em (2.28), temos que

$$u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad em\ L^1(0,T;V_\varepsilon'). \tag{2.29}$$

Etapa (v): Verificação das condições iniciais.

Pelo Lema 1.2 e por (2.11), temos que

$$\Big\langle \theta, u_{\varepsilon m}(t)\Big\rangle_{V_\varepsilon',V_\varepsilon} \to \Big\langle \theta, u_\varepsilon(t)\Big\rangle_{V_\varepsilon',V_\varepsilon}, \quad \forall\ \theta \in V_\varepsilon',\ \forall\ t \in [0,T].$$

Em particular para $t=0$, temos que

$$\Big\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0)\Big\rangle_{V_\varepsilon',V_\varepsilon} \to \Big\langle \theta, u_\varepsilon(0)\Big\rangle_{V_\varepsilon',V_\varepsilon}, \quad \forall\ \theta \in V_\varepsilon'.$$

Mas de $(2.3)_2$,

$$u_{\varepsilon m}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon^0, \quad \text{fraco em } V_\varepsilon,\ \text{isto é,}$$

$$\left\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \to \left\langle \theta, u^0_\varepsilon \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon}, \quad \forall\, \theta \in V'_\varepsilon.$$

A unicidade do limite nos diz que $u_\varepsilon(0) = u^0_\varepsilon$.

Ainda pelo Lema 1.2, e por (2.16), temos que

$$\left\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(t) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \to \left\langle \theta, u'_\varepsilon(t) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon}, \quad \forall\, \theta \in V'_\varepsilon,\ \forall t \in [0,T].$$

Em particular para $t = 0$, temos que

$$\left\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(0) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \to \left\langle \theta, u'_\varepsilon(0) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon}, \quad \forall\, \theta \in V'_\varepsilon.$$

Mas de $(2.3)_3$,

$$u'_{\varepsilon m}(0) \rightharpoonup u^1_\varepsilon, \quad \text{fraco em } V_\varepsilon,\ \text{isto é,}$$

$$\left\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(0) \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \to \left\langle \theta, u^1_\varepsilon \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon}, \quad \forall\, \theta \in V'_\varepsilon.$$

A unicidade do limite nos diz que $u'_\varepsilon(0) = u^1_\varepsilon$.

Etapa (vi): Unicidade da solução.

Para provarmos a unicidade da solução, suponha que $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ e $(\widehat{u}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon)$ são duas soluções dadas pelo Teorema 2.1. Então, o par $(w_\varepsilon, q_\varepsilon) = (u_\varepsilon - \widehat{u}_\varepsilon, p_\varepsilon - \widehat{p}_\varepsilon)$ é uma solução de

$$\begin{cases} w''_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon = 0, \quad \text{em } L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N) \\ div\ w_\varepsilon = 0, \quad \text{em } Q_\varepsilon \\ w_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \sum_\varepsilon \\ w_\varepsilon(0) = 0 = w'_\varepsilon(0). \end{cases} \tag{2.30}$$

De $(2.16)_1$ temos que $w'_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$. Como $L^\infty(0,T;V_\varepsilon) \hookrightarrow L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega_\varepsilon)]^N)$, faz sentido compor $(2.30)_1$ com w'_ε, e assim obter

$$\left\langle w''_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon, w'_\varepsilon \right\rangle_{\Omega_\varepsilon} = 0.$$

Podemos também integrar em relação a t, assim:

$$\int_0^t \left\langle w_\varepsilon'' - \Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon, w_\varepsilon' \right\rangle_{\Omega_\varepsilon} ds = 0, \quad \text{para qualquer } t \in (0,T).$$

Resulta daí que

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|w_\varepsilon'(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|w_\varepsilon(s)\|^2 ds - \int_0^t (q_\varepsilon, \nabla w_\varepsilon') ds = 0,$$

de onde obtemos

$$|w_\varepsilon'(t)|^2 + \|w_\varepsilon(t)\|^2 = 0,$$

já que $\int_0^t (q_\varepsilon, \nabla \cdot w_\varepsilon') ds = 0$ (pois $w_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$), o que mostra que $w_\varepsilon = 0$ em $[0,T]$ e, portanto, a solução u_ε dada pelo Teorema 2.1 é única.

Também, como encontramos que $w_\varepsilon = 0$, em $(2.30)_1$ resta apenas $\nabla q_\varepsilon = 0$, isto é, $\nabla(p_\varepsilon - \widehat{p_\varepsilon}) = 0$, ou ainda, $p_\varepsilon - \widehat{p_\varepsilon} = c(t)$. Ou seja, p_ε é única a menos de adição de uma função de t.

Etapa (vii): Regularidade da solução.

Por $(2.11)_1$ e por $(2.16)_1$ temos que u_ε e $u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$, logo $u_\varepsilon \in C^0([0,T];V_\varepsilon)$.

Por (2.16) temos que $u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon'' \in L^\infty(0,T;H_\varepsilon)$, logo $u_\varepsilon' \in C^0([0,T];H_\varepsilon)$.

Assim,

$$u_\varepsilon \in C^0([0,T];V_\varepsilon) \cap C^1([0,T];H_\varepsilon). \tag{2.31}$$

Etapa (viii): Final da demonstração.

Demonstramos que é possível extrair uma subsucessão de soluções do problema aproximado (2.3), ainda denotada por (u_{em}), satisfazendo $(2.11)_1$ e $(2.16)_1$, ou seja, satisfazendo

$$u_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u_\varepsilon, \quad \text{fraco-estrela em } W^{1,\infty}(0,T;V_\varepsilon),$$

e que o limite u_ε satisfaz (2.2).

A unicidade da solução do problema (2.2) nos diz que toda a sucessão $(u_{\varepsilon m})$ satisfaz $(2.11)_1$ e $(2.16)_1$.

Isto completa a demonstração do Teorema 2.1. □

Capítulo 3

Resultado de homogeneização

O objetivo deste capítulo é mostrar a convergência do processo de homogeneização da equação hiperbólica com um termo de pressão. A semicontinuidade inferior da energia será também demonstrada.

Após termos obtido, no capítulo 2, a solução da equação hiperbólica com um termo de pressão no domínio Ω_ε, para $\varepsilon > 0$ fixado, vamos agora obter a solução desta equação em todo o domínio Ω. Vamos para isso fazer $\varepsilon \to 0$. Isto é o que chamamos de resultado de homogeneização, e que é enunciado no seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Supor que (1.1) é satisfeita. Considere uma seqüência de dados satisfazendo*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0, \quad \textit{fraco em } V \cap [H^2(\Omega)]^N, \\ \widetilde{u}_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1, \quad \textit{fraco em } V, \\ \widetilde{f}_\varepsilon \rightharpoonup f, \quad \textit{fraco em } L^1(0,T;H), \\ \textit{com } \widetilde{f}_\varepsilon' \textit{ e } \widetilde{f}_\varepsilon(0) \textit{ uniformemente limitadas,} \\ \qquad\qquad \textit{respectivamente, em } L^1(0,T;H) \textit{ e em } H. \end{cases} \tag{3.1}$$

Então, a seqüência de soluções $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *dada pelo Teorema 2.1 satisfaz*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \textit{fraco-estrela em } W^{1,\infty}(0,T;V), \\ P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \textit{fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R}), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde P_ε *é o operador prolongamento da pressão, definido na Proposição 1.1, e o par* (u,p) *é a única solução do sistema homogeneizado*

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + Mu + \nabla p = f, \quad \textit{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ div\ u = 0, \quad \textit{em } Q \\ u = 0, \quad \textit{sobre } \sum = \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \quad \textit{em } \Omega \\ u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H), \end{cases} \tag{3.3}$$

onde M *é a matriz definida no Lema 1.1.*

Demonstração:

Prodederemos a demonstração em seis etapas:

(i) Estimativas a priori;

(ii) Passagem ao limite;

(iii) Verificação das condições iniciais;

(iv) Unicidade;

(v) Regularidade da solução; e

(vi) Final da demonstração.

Etapa (i): Estimativas a priori.

Temos, de $(2.11)_1$ e de (2.16), que existe uma subsucessão $(u_{\varepsilon m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} u_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\varepsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \\ u'_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\varepsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \\ u''_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u''_\varepsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H_\varepsilon). \end{cases} \tag{3.4}$$

Então, pelo Teorema A.1.3 (Banach-Steinhaus), temos que

$$\begin{cases} \|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \|u_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} \leq C, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \\ \|\widetilde{u}'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \|u'_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} \leq C, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \\ \|\widetilde{u}''_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \|u''_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)} \leq C, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde C não depende de ε devido às condições em (3.1). Assim,temos que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;V), \text{ independente de } \varepsilon > 0, \\ \widetilde{u}'_\varepsilon & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;V), \text{ independente de } \varepsilon > 0, \\ \widetilde{u}''_\varepsilon & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N), \text{ independente de } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Logo, existe uma subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V), \\ \widetilde{u}'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V), \\ \widetilde{u}''_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u'', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N). \end{cases} \tag{3.6}$$

Do Teorema 2.1, podemos ver que

$$\nabla p_\varepsilon = -u''_\varepsilon + \Delta u_\varepsilon + f_\varepsilon, \quad \text{em } L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N).$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N)} \leq\ & c\int_0^T |u''_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}dt \\ & + c\int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N}dt + c\int_0^T |f_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}dt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Daí, aplicando o Teorema 1.2, temos que

$$\|p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})} \leq \|\nabla p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N)} \leq c. \tag{3.8}$$

Afirmação: O conjunto $K = \{P_\varepsilon(p_\varepsilon)\ ;\ \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.

Obteremos esse resultado em três etapas, utilizando o Teorema A.2.4 (Dunford):

(i) K é limitado em $L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.

De fato, da Proposição 1.1_{ii}, e de (3.8) temos

$$\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} \leq c\|p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R})} \leq c,$$

independente de ε.

(ii) $t \mapsto |P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$ é uniformemente integrável sobre $[0,T]$, isto é,

$$\int_E \Big|P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))\Big|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}dt \to 0, \quad \text{quando } \mu(E) \to 0, \quad E \subset [0,T],$$

uniformemente em K.

De fato, da Proposição 1.1_{ii}, de (3.7) e de (3.8), temos que

$$\begin{aligned}&\int_E \Big|P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))\Big|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}dt \leq c\int_E |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}} \leq c\int_E \|\nabla p_\varepsilon(t)\|_{[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N}dt \\ &\leq c\int_E |u''_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}dt + c\int_E \|u_\varepsilon(t)\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N}dt + c\int_E |f_\varepsilon(t)|_{H_\varepsilon}dt \\ &\leq c\mu(E) + c\mu(E) + c\int_E |\widetilde{f}_\varepsilon(t)|_H dt.\end{aligned}$$

Mas, de $(3.1)_3$, tem-se que o conjunto $\{\widetilde{f}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;H)$, portanto, as funções $t \mapsto |\widetilde{f}_\varepsilon(t)|_H$ são uniformemente integráveis sobre $[0,T]$ (ver Proposição A.2.2). A afirmação é assim satisfeita.

(iii) $\{\int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))dt,\ \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, para todo subconjunto $E \subset [0,T]$, mensurável.

Da Proposição 1.1_{ii}, e por (3.8), temos que

$$\begin{aligned} \Big| \int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))dt \Big|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_E \Big| P_\varepsilon(p_\varepsilon(t)) \Big|_{L^2(\Omega)} dt \leq c \int_E |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \\ &\leq c \int_0^T |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leq c, \end{aligned}$$

uniformemente em ε. Portanto, $\{\int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))dt,\ \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, $\forall\ E \subset [0,T]$, mensurável.

Agora, aplicando o Teorema de Dunford, obtemos que $K = \{P_\varepsilon(p_\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

Etapa (ii): Passagem ao limite.

Do teorema 2.1, temos que

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N) \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } Q_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.10}$$

Compondo a equação $(3.10)_1$ com $\psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e

w_k^ε é como no quadro de hipóteses (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} &\Big\langle u_\varepsilon'', \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)\Big\rangle_{Q_\varepsilon} + \Big\langle -\Delta u_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)\Big\rangle_{Q_\varepsilon} \\ &+\Big\langle \nabla p_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)\Big\rangle_{Q_\varepsilon} = \Big\langle f_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)\Big\rangle_{Q_\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\langle \cdot,\cdot\rangle_{Q_\varepsilon}$ denota, aqui e daqui em diante, o par dualidade entre $L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^N)$ e $L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N)$.

Integrando por partes, na variável x, o segundo termo de (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \Big\langle -\Delta u_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \nabla(\psi w_k^\varepsilon \varphi) dxdt \\ &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi\nabla w_k^\varepsilon\varphi dxdt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dxdt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \Big\langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \nabla(\psi u_\varepsilon \varphi) dxdt \\ &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi\nabla u_\varepsilon\varphi dxdt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dxdt. \end{aligned}$$

Daí, como o produto interno é comutativo, segue que

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi\nabla w_k^\varepsilon\varphi dxdt = \Big\langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dxdt. \tag{3.13}$$

Substituindo (3.13) em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \Big\langle -\Delta u_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} &= \Big\langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} \\ &\quad - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dxdt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dxdt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Integrando por partes, na variável x, o terceiro termo de (3.11), obtemos

$$\Big\langle \nabla p_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon\varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} = -\int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt, \tag{3.15}$$

pois $div\ w_k^\varepsilon = 0$, em Q_ε.

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}&\Big\langle u_\varepsilon'', \psi w_k^\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} + \Big\langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dxdt \\ &+ \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dxdt - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon : \nabla\varphi dxdt = \Big\langle f_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora, multiplicando $(3.10)_2$ por $\psi q_k^\varepsilon \varphi$ e integrando em Q_ε, obtemos

$$\int_{Q_\varepsilon} \psi q_k^\varepsilon \varphi \nabla\cdot u_\varepsilon dxdt = 0.$$

Integrando por partes, na variável x, obtemos

$$\Big\langle \nabla q_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} + \int_{Q_\varepsilon} \psi q_k^\varepsilon \nabla\varphi \cdot u_\varepsilon dxdt = 0. \tag{3.17}$$

Somando (3.16) e (3.17), resulta

$$\begin{aligned}&\Big\langle u_\varepsilon'', \psi w_k^\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} + \Big\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dxdt \\ &+ \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dxdt - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon : \nabla\varphi dxdt + \int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt = \Big\langle f_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Análise dos termos em (3.18):

1^o **termo:** Aplicando o Teorema A.2.9 (Fubini), obtemos

$$\begin{aligned}\Big\langle u_\varepsilon'', \psi w_k^\varepsilon \varphi\Big\rangle_{Q_\varepsilon} &= \int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon'' \cdot \psi w_k^\varepsilon \varphi dxdt \\ &= \int_\Omega w_k^\varepsilon \varphi \cdot \Big(\int_0^T \widetilde{u}_\varepsilon'' \psi dt\Big) dx.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Da hipótese $(1.1)_{(iii)_1}$ e do Teorema A.5.2 (Rellich-Kondrachoff), para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que

$$w_k^\varepsilon \to e_k, \quad \text{forte em } [L^2(\Omega)]^N, \tag{3.20}$$

e de $(3.6)_3$ temos que

$$\int_0^T \widetilde{u}_\varepsilon''\psi dt \rightharpoonup \int_0^T u''\psi dt, \quad \text{fraco em } [L^2(\Omega)]^N. \tag{3.21}$$

Assim, de (3.20) e (3.21), obtemos a seguinte convergência, em (3.19):

$$\Big\langle u_\varepsilon'', \psi w_k^\varepsilon \varphi \Big\rangle_{Q_\varepsilon} \to \int_\Omega e_k \varphi \Big(\int_0^T u''\psi dt \Big) dx. \tag{3.22}$$

2^o **termo:** Temos que

$$\Big\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \Big\rangle_{Q_\varepsilon} = \Big\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \Big(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\varepsilon dt \Big) \varphi \Big\rangle_\Omega. \tag{3.23}$$

Agora, definindo $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \int_0^T \psi \widetilde{u}_\varepsilon dt$, resulta que

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon(x) \rightharpoonup \displaystyle\int_0^T \psi u \, dt, \quad \text{fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N, \text{ e} \\ \mathcal{U}_\varepsilon(x) = 0, \quad \text{em } S_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_\varepsilon^i. \end{cases} \tag{3.24}$$

Assim, de $(3.24)_1$ e da hipótese $(1.1)_v$, obtemos a seguinte convergência em (3.23):

$$\Big\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \Big\rangle_{Q_\varepsilon} \;\to\; \Big\langle \mu_k, \Big(\int_0^T \psi u dt \Big) \varphi \Big\rangle_\Omega. \tag{3.25}$$

3^o **termo:** Aplicando Fubini, obtemos que

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon : \Big(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\varepsilon dt \Big) \nabla \varphi dx. \tag{3.26}$$

Da hipótese $(1.1)_{iii_1}$, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, segue que

$$\nabla w_k^\varepsilon \to 0, \quad \text{fraco em } [L^2(\Omega)]^{N^2},$$

e de $(3.24)_1$ e do Teorema de Rellich-Kondrachoff, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) \to \int_0^T \psi u dt, \quad \text{forte em } [L^2(\Omega)]^N. \tag{3.27}$$

Assim, obtemos a seguinte convergência em (3.26):

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon : \psi u_\varepsilon \nabla\varphi dx dt \to 0. \tag{3.28}$$

4^o **termo:** Aplicando Fubini, obtemos que

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dx dt = \int_\Omega w_k^\varepsilon \nabla\varphi : \nabla\Big(\int_0^T \widetilde{u}_\varepsilon \psi dt\Big) dx. \tag{3.29}$$

De $(3.24)_1$, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos

$$\nabla\Big(\int_0^T \psi\widetilde{u}_\varepsilon dt\Big) \rightharpoonup \nabla\Big(\int_0^T \psi u dt\Big), \quad \text{fraco em } [L^2(\Omega)]^{N^2}. \tag{3.30}$$

Assim, de (3.20) e de (3.30), obtemos a seguinte convergência em (3.29):

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon : \psi w_k^\varepsilon \nabla\varphi dx dt \to \int_\Omega e_k \nabla\varphi : \nabla\Big(\int_0^T \psi u dt\Big) dx. \tag{3.31}$$

5^o **termo:** Aplicando Fubini, obtemos

$$\int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi dx dt = \int_\Omega w_k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi \Big(\int_0^T \psi P_\varepsilon(p_\varepsilon) dt\Big) dx, \tag{3.32}$$

pois $P_\varepsilon(p_\varepsilon(t)) \equiv p_\varepsilon(t)$ em Ω_ε, q.s. em $[0,T]$, e $w_k^\varepsilon \equiv 0$ em $\Omega \backslash \Omega_\varepsilon$.

De (3.9), segue que

$$\int_0^T \psi P_\varepsilon(p_\varepsilon) dt \rightharpoonup \int_0^T \psi p\, dt, \quad \text{fraco em } L^2(\Omega). \tag{3.33}$$

Assim, de (3.20) e de (3.33), obtemos a seguinte convergência em (3.32):

$$\int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt \to \int_\Omega e_k \cdot \nabla\varphi\Big(\int_0^T \psi p dt\Big)dx. \tag{3.34}$$

6^o **termo:** Aplicando Fubini, obtemos que

$$\int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt = \int_\Omega q_k^\varepsilon \nabla\varphi \cdot \Big(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\varepsilon dt\Big)dx. \tag{3.35}$$

Da hipótese $(1.1)_{(iii)_2}$ e de (3.27), obtemos a seguinte convergência, em (3.35):

$$\int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt \to 0. \tag{3.36}$$

7^o **termo:** Mais uma vez, aplicando Fubini, obtemos

$$\int_{Q_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \varphi dxdt = \int_\Omega w_k^\varepsilon \varphi \cdot \Big(\int_0^T \psi \widetilde{f}_\varepsilon dt\Big)dx. \tag{3.37}$$

Da hipótese $(3.1)_3$, resulta que

$$\int_0^T \psi \widetilde{f}_\varepsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi f dt, \quad \text{fraco em } [L^2(\Omega)]^N. \tag{3.38}$$

Assim, de (3.20) e de (3.38), obtemos a seguinte convergência, em (3.37):

$$\int_{Q_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \varphi dxdt \to \int_\Omega e_k \varphi \cdot \Big(\int_0^T \psi f dt\Big)dx. \tag{3.39}$$

Agora, fazendo $\varphi = \varphi_k$ e somando em k, considerando $\phi = \sum\limits_{k=1}^N \varphi_k e_k$, $\phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$, passando o limite na equação (3.18) ao fazer $\varepsilon \to 0$, e aplicando Fubini, obtemos

$$\begin{gathered}\Big\langle\Big(\int_\Omega u'' \cdot \phi dx\Big), \psi\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \Big\langle\Big\langle M\phi, u\Big\rangle_\Omega, \psi\Big\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(0,T)} \\ + \Big\langle\int_\Omega \nabla u : \nabla\phi dx, \psi\Big\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(0,T)} + \Big\langle\Big\langle\nabla p, \phi\Big\rangle_\Omega, \psi\Big\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(0,T)} = \Big\langle\int_\Omega f \cdot \phi dx, \psi\Big\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(0,T)}.\end{gathered}$$

Como M é simétrica, resulta que

$$(u'', \phi) + \langle Mu, \phi \rangle_\Omega + a(u, \phi) + \langle \nabla p, \phi \rangle_\Omega = (f, \phi), \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall\, \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$(u'', v) + \langle Mu, v \rangle_\Omega + a(u, v) + \langle \nabla p, v \rangle_\Omega = (f, v), \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall\, v \in [H_0^1(\Omega)]^N.$$

Etapa (iii): Verificação das condições iniciais.

Pelo Lema 1.2 e por $(3.6)_1$, temos que

$$\left\langle \theta, \widetilde{u}_\varepsilon(t) \right\rangle_{V',V} \to \left\langle \theta, u(t) \right\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V', \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Em particular para $t = 0$, temos que

$$\left\langle \theta, \widetilde{u}_\varepsilon(0) \right\rangle_{V',V} \to \left\langle \theta, u(0) \right\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V'.$$

Mas de $(3.1)_1$,

$$\widetilde{u}_\varepsilon(0) \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco em } V, \text{ isto é,}$$

$$\left\langle \theta, \widetilde{u}_\varepsilon(0) \right\rangle_{V',V} \to \left\langle \theta, u^0 \right\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V'.$$

A unicidade do limite nos diz que $u(0) = u^0$.

Ainda pelo Lema 1.2, e por $(3.6)_2$, temos que

$$\left\langle \theta, \widetilde{u}'_\varepsilon(t) \right\rangle_{V',V} \to \left\langle \theta, u'(t) \right\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V', \; \forall\, t \in [0,T].$$

Em particular para $t = 0$, temos que

$$\left\langle \theta, \widetilde{u}'_\varepsilon(0) \right\rangle_{V',V} \to \left\langle \theta, u'(0) \right\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V'.$$

Mas de $(3.1)_2$,

$$\widetilde{u}'_\varepsilon(0) \rightharpoonup u^1, \quad \text{fraco em } V, \text{ isto é,}$$

$$\Big\langle \theta, \widetilde{u}'_\varepsilon(0) \Big\rangle_{V',V} \rightarrow \Big\langle \theta, u^1 \Big\rangle_{V',V}, \quad \forall\, \theta \in V'.$$

A unicidade do limite nos diz que $u'(0) = u^1$.

Etapa (iv): Unicidade.

Para provarmos a unicidade da solução, suponha que (u,p) e $(\widehat{u},\widehat{p})$ são duas soluções dadas pelo Teorema 3.1. Então, o par $(w,q) = (u-\widehat{u}, p-\widehat{p})$ é uma solução de

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + Mw + \nabla q = 0, \quad \text{em } L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^N) \\ div\; w = 0, \quad \text{em Q} \\ w = 0, \quad \text{sobre } \sum \\ w(0) = 0 = w'(0). \end{cases} \tag{3.40}$$

De $(3.6)_2$ temos que $w' \in L^\infty(0,T;V)$. Como $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)$, faz sentido compor $(3.40)_1$ com w', e assim obter

$$\Big\langle w'' - \Delta w + Mw + \nabla q, w' \Big\rangle_\Omega = 0.$$

Podemos também integrar em relação a t, assim

$$\int_0^t \Big\langle w'' - \Delta w + Mw + \nabla q, w' \Big\rangle_\Omega ds = 0, \quad \forall\, t \in (0,T).$$

Resulta daí que

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|w'(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|w(s)\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\Big\langle Mw(s), w(s) \Big\rangle_\Omega ds - \int_0^t \Big(q(s), \nabla . w'(s)\Big) ds = 0,$$

de onde obtemos

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \Big\langle Mw(t), w(t) \Big\rangle_\Omega = 0,$$

já que $div\, w'(s) = 0$ (pois $w'(s) \in L^\infty(0,T;V)$), o que mostra que $w = 0$ em $[0,T]$, uma vez que $\langle Mw(t), w(t)\rangle_\Omega \geq 0$. Portanto, o par solução (u,p) dado pelo Teorema 3.1 é único, com p sendo única a menos de adição de uma função relativa a t.

Etapa (v): Regularidade da solução.

De (2.31), obtemos que $\widetilde{u}_\varepsilon \in C^0([0,T];V)$ e que $\widetilde{u}'_\varepsilon \in C^0([0,T];H)$. Assim, das convergências $(3.6)_1$ e $(3.6)_2$, segue que

$$u \in C^0([0,T];V) \quad \text{e} \quad u' \in C^0([0,T];H).$$

Etapa (vi): Final da demonstração.

Demonstramos através da extração de uma subseqüência de soluções (ainda denotada por ε), que as subseqüências u_ε e $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ satisfazem (3.2), com o limite

$$(u,p) \in W^{1,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;H) \;\times\; L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$$

satisfazendo (3.3).

Pela unicidade da solução de (3.3) deduzimos que a seqüência inteira satisfaz (3.2).

Isto completa a demonstração. $\square$

O próximo passo é demonstrar um resultado de convergência pontual, no tempo, e a propriedade de semicontinuidade inferior da energia, o que é feito com o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Suponha que o quadro abstrato de hipóteses (1.1) seja satisfeito. Então para todo $t \in [0,T]$ fixado, temos*

$$\widetilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \textit{fraco em } V, \tag{3.41}$$

$$\widetilde{u}'_\varepsilon(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \textit{fraco em } H, \tag{3.42}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x,t)|^2 dx + \Big\langle Mu(x,t), u(x,t) \Big\rangle_{\Omega} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x,t)|^2 dx, \tag{3.43}$$

$$\int_{\Omega} |u'(x,t)|^2 dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x,t)|^2 dx, \tag{3.44}$$

$$E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon(t), \tag{3.45}$$

onde, $\forall\ t \in [0,T]$, temos as seguintes definições para as energias $E_\varepsilon(\cdot)$ e $E(\cdot)$:

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}|u'_\varepsilon(t)|^2{}_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} + \frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon(t)|^2{}_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}}, \tag{3.46}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'_\varepsilon(t)|^2{}_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} + \frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon(t)|^2{}_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}} + \frac{1}{2}\Big\langle Mu(t), u(t) \Big\rangle_{\Omega}.$$

Demonstração:

Temos por (3.6), que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V), \text{ e} \\ \widetilde{u}'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H). \end{cases}$$

Utilizando o Lema 1.3, resulta que

$$\widetilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco em } V,\ \forall\ t \in [0,T],$$

isto é, temos (3.41).

De (2.16) e pelo Lema 1.3, resulta que

$$u'_{\varepsilon m}(t) \rightharpoonup u'_\varepsilon(t), \quad \text{fraco em } V_\varepsilon,\ \forall\ t \in [0,T].$$

Daí, pela convexidade e semicontinuidade inferior da norma, segue-se que

$$\|\widetilde{u}'_\varepsilon(t)\|_V = \|u'_\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon} \leq \liminf_{m \to \infty} \|u'_{\varepsilon m}(t)\|_{V_\varepsilon} \leq C,$$

com C independente de ε, $\forall\ t \in [0,T]$.

Assim, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, obtemos que

$$\widetilde{u}'_\varepsilon(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \text{fraco, em } V, \ \forall\, t \in [0,T],$$

o que nos dá (3.42), uma vez que $V \hookrightarrow H$.

Para obtermos (3.43), observar que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,t) \in V, \\ \widetilde{u}_\varepsilon(x,t) = 0, \quad \text{sobre } S_\varepsilon, \text{ e} \\ \widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,t) \rightharpoonup u(\cdot,t), \quad \text{fraco em } V, \ \forall\, t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.47}$$

Logo, pela proposição 1.3, segue a desigualdade (3.43).

De (3.42) obtemos $|u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq \liminf_{\varepsilon \to\, 0} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^N}$, de onde segue que

$$|u'(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^N} \leq \Big[\liminf_{\varepsilon\to 0} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^N}\Big]^2 \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |u'_\varepsilon(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^N},$$

o que nos dá (3.44).

Agora, somando as desigualdades (3.43) e (3.44), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u'(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \Big\langle Mu(x,t), u(x,t)\Big\rangle_\Omega \\ \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\ \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \Big(\int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x,t)|^2 dx\Big), \end{aligned}$$

e assim obtemos que

$$E(t) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(t),$$

ou seja, temos (3.45).

Isto conclui a demonstração do Teorema 3.2. $\square$

Capítulo 4

Resultados de correção

Este capítulo é dedicado a enunciar e demonstrar resultados de correção para a equação hiperbólica com um termo de pressão. As demonstrações seguem na linha de *S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort* e *F. Murat* [3], e de *D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat* e *E. Zuazua* [6], que adaptaram para a equação da onda as idéias introduzidas por *L. Tartar* [32] no caso elíptico.

Precisaremos das seguintes hipóteses sobre o dado inicial u_ε^0:

$$\begin{cases} (u_\varepsilon^0, p_\varepsilon^0) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}], \\ \text{existe } f^0 \in [L^2(\Omega)]^N \text{ tal que} \\ \begin{cases} \nabla p_\varepsilon^0 - \Delta u_\varepsilon^0 = f^0, \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \nabla \cdot u_\varepsilon^0 = 0, \text{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \end{cases} \tag{4.1}$$

Como uma conseqüência da Proposição 1.2, deduzimos que

$$\left(\widetilde{u}_\varepsilon^0, P_\varepsilon(p_\varepsilon^0)\right) \rightharpoonup (u^0, p^0), \quad \text{fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}], \tag{4.2}$$

onde $(u^0(x), p^0(x))$ é a solução de

$$\begin{cases} \nabla p^0 - \Delta u^0 + M u^0 = f^0, \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot u^0 = 0, \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

e

$$|\nabla \widetilde{u}_\varepsilon^0|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \to |\nabla u|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \Big\langle Mu, u \Big\rangle_\Omega. \tag{4.4}$$

Observação: Da definição da energia $E_\varepsilon(t)$ dada em (3.46), obtém-se a seguinte identidade da energia:

$$E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x,s) u'_\varepsilon(x,s)dxds, \quad \text{q.s. em } [0,T].$$

Uma das principais etapas da demonstração do resultado de correção é a convergência da energia em $C^0([0,T])$. Assim, antes de enunciarmos tal resultado, mostraremos a convergência forte da enertia em $C^0([0,T])$.

Proposição 4.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas. Considere a seqüência de dados u_ε^0 satisfazendo a hipótese (4.1) e*

$$\widetilde{f}_\varepsilon \to f, \text{ forte em } L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N). \tag{4.5}$$

Então,

$$E_\varepsilon(t) \to E(t), \text{ forte em } C^0([0,T]). \tag{4.6}$$

Demonstração:

Temos as seguintes identidades:

$$E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x,s) u'_\varepsilon(x,s)dxds, \tag{4.7}$$

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f(x,s) u'(x,s)dxds, \tag{4.8}$$

com

$$E_\varepsilon(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx, \qquad \text{e} \tag{4.9}$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx + \frac{1}{2}\Big\langle Mu^0, u^0 \Big\rangle_\Omega. \tag{4.10}$$

Em virtude de $(3.6)_1$ e da hipótese (4.5), temos

$$\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x,s) u'_\varepsilon(x,s) dx ds \to \int_0^t \int_\Omega f(x,s) u'(x,s) dx ds. \tag{4.11}$$

Por outro lado, pela imersão compacta de V em $[L^2(\Omega)]^N$, de (4.4) e de $(3.1)_2$, temos que

$$E_\varepsilon(0) \to E(0). \tag{4.12}$$

Portanto, de (4.11) e de (4.12), temos que

$$E_\varepsilon(t) \to E(t), \quad \text{pontualmente em } [0,T]. \tag{4.13}$$

Além disso, dado qualquer $t \in [0,T]$ e $h > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \Big| E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t) \Big| &\leq \int_t^{t+h} \int_\Omega |\widetilde{f}_\varepsilon(x,s)|.|\widetilde{u}'_\varepsilon(x,s)| dx ds \\ &\leq \|\widetilde{u}'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \int_t^{t+h} |\widetilde{f}_\varepsilon(s)|_{[L^2(\Omega)]^N} ds. \end{aligned}$$

Visto que $\widetilde{u}'_\varepsilon$ é limitada em $L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ e $\widetilde{f}_\varepsilon$ converge forte em $L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$, isso implica que

$$\Big| E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t) \Big| \to 0, \quad \text{quando } h \to 0, \text{ uniformemente em } \varepsilon, \tag{4.14}$$

o que mostra que a família de funções $\{E_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ é equicontínua.

Logo, de (4.13), de (4.14) e do Teorema A.1.2 (Arzelá-Ascoli) segue (4.6). $\square$

Definição: para $v \in C^0([0,T];[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N) \cap C^1([0,T];[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)$, define-se

$$e_\varepsilon(v)(t) = \frac{1}{2}\Big| v'(t) \Big|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} + \frac{1}{2}\Big| \nabla v(t) \Big|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}}, \tag{4.15}$$

e para $v \in C^0([0,T];[H_0^1(\Omega)]^N) \cap C^1([0,T];[L^2(\Omega)]^N)$ define-se

$$e(v)(t) = \frac{1}{2}\Big|v'(t)\Big|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{1}{2}\Big|\nabla v(t)\Big|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \frac{1}{2}\Big\langle Mv(t), v(t)\Big\rangle_\Omega. \tag{4.16}$$

A partir destas definições, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 4.2 *Suponha que as hipóteses da Proposição 4.1 sejam satisfeitas. Então,*

$$e_\varepsilon(u_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi) \;\to\; e(u-\varphi), \quad \text{em } C^0([0,T]), \tag{4.17}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T;[\mathcal{D}(\Omega)]^N)$, onde a matriz W_ε é a matriz formada pelos vetores coluna w_k^ε, $1 \le k \le N$.

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned} e_\varepsilon(u_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi)(t) = \;& e_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) + e_\varepsilon(W_\varepsilon\varphi)(t) \\ & - \int_\Omega \widetilde{u}'_\varepsilon(x,t)\cdot W_\varepsilon(x)\varphi'(x,t)dx \\ & - \int_\Omega \nabla\widetilde{u}_\varepsilon(x,t) : \nabla(W_\varepsilon(x)\varphi(x,t))dx. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Passaremos ao limite cada um dos termos do lado direito de (4.18).

1^o **termo:** Como $e_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) = E_\varepsilon(t)$, temos, da Proposição 4.1, que

$$e_\varepsilon(u_\varepsilon)(\cdot) \to e_\varepsilon(u)(\cdot), \text{ em } C^0([0,T]). \tag{4.19}$$

2^o **termo:** Derivando-se no tempo, mostra-se que a função $|W_\varepsilon\varphi(\cdot)|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}$ é limitada em $W^{1,\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} C^0([0,T])$, pelo Teorema A.6.2 (Rellich-Kondrachoff).

Assim, usando $(1.1)_{iii}$, obtemos que

$$\Big|W_\varepsilon\varphi'(\cdot)\Big|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} = \Big|W_\varepsilon\varphi'(\cdot)\Big|^2_{[L^2(\Omega)]^N} \to \Big|\varphi'(\cdot)\Big|^2_{[L^2(\Omega)]^N}, \tag{4.20}$$

em $C^0([0,T])$. Também, temos que

$$\begin{aligned}\Big|\nabla(W_\varepsilon\varphi)(t)\Big|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}} &= \Big|\nabla(W_\varepsilon\varphi)(t)\Big|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} = \\ &= -\int_\Omega |W_\varepsilon|^2\varphi(t)\Delta\varphi(t)dx - 2\int_\Omega \nabla W_\varepsilon\nabla\varphi(t)\cdot W_\varepsilon\varphi(t)dx - \Big\langle \Delta W_\varepsilon\varphi(t), W_\varepsilon\varphi(t)\Big\rangle_\Omega.\end{aligned}$$

Observando que cada termo do lado direito é limitado em $W^{1,\infty}(0,T)$, podemos passar o limite em cada termo, obtendo assim

$$-\int_\Omega |W_\varepsilon|^2\varphi(t)\Delta\varphi(t)dx \ \to\ -\int_\Omega \varphi(t)\cdot\Delta\varphi(t)dx, \quad \text{em } C^0([0,T]), \tag{4.21}$$

e

$$-2\int_\Omega \nabla W_\varepsilon\nabla\varphi(t)\cdot W_\varepsilon\varphi(t)dx \ \to\ 0, \quad \text{em } C^0([0,T]), \tag{4.22}$$

sendo que as convergências (4.21) e (4.22) decorrem do quadro de hipóteses (1.1).

Para passar o limite no terceiro termo, notar que

$$\begin{aligned}-\Big\langle \Delta W_\varepsilon\varphi(t), W_\varepsilon\varphi(t)\Big\rangle_\Omega &= -\ \Big\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)\Delta w_i^\varepsilon, \sum_{j=1}^N \varphi_j(t)w_j^\varepsilon\Big\rangle_\Omega \\ &= -\sum_{i,j=1}^N \Big\langle \varphi_i(t)\Delta w_i^\varepsilon, \varphi_j(t)w_j^\varepsilon\Big\rangle_\Omega \\ &= -\sum_{i,j=1}^N \Big[\Big\langle \varphi_i(t)\Big(\nabla q_i^\varepsilon - \Delta w_i^\varepsilon\Big), \varphi_j(t)w_j^\varepsilon\Big\rangle_\Omega - \Big\langle \varphi_i(t)\nabla q_i^\varepsilon, \varphi_j(t)w_j^\varepsilon\Big\rangle_\Omega\Big].\end{aligned}$$

De $(1.1)_v$, temos que

$$\Big\langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta w_i^\varepsilon, \varphi_i\varphi_j w_j^\varepsilon\Big\rangle_\Omega \ \to\ \Big\langle \mu_i, \varphi_i\varphi_j e_j\Big\rangle_\Omega,$$

pois de $(1.1)_{iii}$, temos que $\varphi_i\varphi_j w_j^\varepsilon \to \varphi_i\varphi_j e_j$, fraco em $[H^1(\Omega)]^N$, e de $(1.1)_{ii}$, temos que $\varphi_i\varphi_j w_j^\varepsilon = 0$, nos buracos S_i^ε.

Também, por $(1.1)_{iii}$, temos a seguinte convergência:

$$\begin{aligned} -\Big\langle \nabla q_i^\varepsilon, \varphi_i\varphi_j w_j^\varepsilon \Big\rangle_\Omega &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \nabla\cdot(\varphi_i\varphi_j w_i^\varepsilon)dx \\ &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \Big[\varphi_i\varphi_j\nabla\cdot w_i^\varepsilon + w_i^\varepsilon\nabla(\varphi_i\varphi_j)\Big]dx \\ &= \int_\Omega q_i^\varepsilon w_i^\varepsilon\cdot\nabla(\varphi_i\varphi_j)dx \;\to\; 0. \end{aligned}$$

Assim, resulta que

$$-\Big\langle \Delta W_\varepsilon\varphi(t), W_\varepsilon\varphi(t)\Big\rangle_\Omega \;\to\; \Big\langle M\varphi(t), \varphi(t)\Big\rangle_\Omega, \quad \text{em } C^0([0,T]). \tag{4.23}$$

Combinando (4.20) – (4.23), deduzimos que

$$e_\varepsilon(W_\varepsilon\varphi)(\cdot) \;\to\; e(\varphi)(\cdot), \quad \text{em } C^0([0,T]). \tag{4.24}$$

3^o **termo:** Por (3.6), utilizando o Teorema 1.5, temos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon'(x)\psi(x)dx \;\to\; \int_\Omega u'(x)\psi(x)dx, \quad \text{em } C^0([0,T]),$$

para todo $\psi\in[L^\infty(\Omega)]^N$. Daí, deduzimos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{u}_\varepsilon'(x_i)\cdot W_\varepsilon(x)\psi(x)dx \;\to\; \int_\Omega u'(x_i)\cdot\psi(x)dx, \quad \text{em } C^0([0,T]), \tag{4.25}$$

visto que

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon'(x,t)\Big(W_\varepsilon(x)-I\Big)\psi(x)dx\Big| \le \\ &\qquad \le \|\widetilde{u}_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}\|\psi\|_{[L^\infty(\Omega)]^N)}\|W_\varepsilon - I\|_{[L^2(\Omega)]^N} \;\to\; 0, \end{aligned}$$

em virtude de $(1.1)_{iii}$.

Aproximando $\varphi'(x,t)$ em $C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N)$ por funções da forma $\sum_{i=1}^k \eta_i(t)\psi_i(x)$, onde η_i são funções contínuas sobre $[0,T]$ e $\psi\in[L^\infty(\Omega)]^N$, $\forall\, i\in\{1,...,k\}$, deduzimos de (4.25) e da limitação de W_ε em $[L^\infty(\Omega)]^{N^2}$ que

$$\int_\Omega \widetilde{u}'_\varepsilon(x,t)W_\varepsilon(x)\psi'(x,t)dx \;\to\; \int_\Omega u'(x,t)\psi'(x,t)dx, \quad \text{em } C^0([0,T]). \tag{4.26}$$

4^o **termo:** Considerando o último termo em (4.18), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\widetilde{u}_\varepsilon(x,t) : \nabla\Big(W_\varepsilon(x)\varphi(x,t)\Big)\,dx &= \Big\langle -\Delta W_\varepsilon\varphi(t), \widetilde{u}_\varepsilon(t)\Big\rangle_\Omega \\ -2\int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot\nabla W_\varepsilon(x)\nabla\varphi(x,t)\,dx &- \int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot W_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x,t)\,dx.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Consideremos agora a função

$$t \mapsto -2\int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot\nabla W_\varepsilon(x)\nabla\varphi(x,t)\,dx - \int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot W_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x,t)\,dx.$$

Do Teorema 3.1, $\widetilde{u}_\varepsilon$ é limitada em $W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$. Assim, a família de funções em consideração é limitada em $W^{1,\infty}(0,T)$ e, portanto, relativamente compacta em $C^0([0,T])$ devido à imersão $W^{1,\infty}(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0([0,T])$. Isto implica que

$$\begin{aligned} -2\int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot\nabla W_\varepsilon(x)\nabla\varphi(x,t)\,dx - \int_\Omega \widetilde{u}_\varepsilon(x,t)\cdot W_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x,t)\,dx \to \\ \to -\int_\Omega u(x,t)\cdot\Delta\varphi(x,t)\,dx = \\ = \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx,\end{aligned} \tag{4.28}$$

em $C^0([0,T])$.

Considere agora o termo resultante $\langle -\Delta W_\varepsilon(x)\varphi(t), \widetilde{u}_\varepsilon(t)\rangle_\Omega$. Temos que

$$\begin{aligned}\Big\langle -\Delta W_\varepsilon(x)\varphi(t),\widetilde{u}_\varepsilon(t)\Big\rangle_\Omega &= -\Big\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)\Delta w_i^\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon(t)\Big\rangle_\Omega \\ &= \sum_{i=1}^N \Big[\Big\langle \varphi_i(t)\Big(-\Delta w_i^\varepsilon + \nabla q_i^\varepsilon\Big), \widetilde{u}_\varepsilon(t)\Big\rangle_\Omega - \Big\langle \varphi_i(t)\nabla q_i^\varepsilon, \widetilde{u}_\varepsilon(t)\Big\rangle_\Omega\Big].\end{aligned} \tag{4.29}$$

De $(1.1)_v$, resulta que

$$\Big\langle \Big(-\Delta w_i^\varepsilon + \nabla q_i^\varepsilon\Big), \varphi_i(t)\widetilde{u}_\varepsilon(t) \Big\rangle_\Omega \to \Big\langle \mu_i, \varphi_i(t)u(t) \Big\rangle_\Omega, \tag{4.30}$$

pois pelo Teorema 1.5 temos que

$$\varphi_i(t)\widetilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup \varphi_i(t)u(t), \text{ fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N \hookrightarrow [H^1(\Omega)]^N, \ \forall\, t \in [0,T],$$

e também que $\varphi_i(t)\widetilde{u}_\varepsilon(t) = 0$, nos buracos S_i^ε.

Temos também que

$$\begin{aligned} \Big\langle -\nabla q_i^\varepsilon \,,\, \varphi_i(t)\; \widetilde{u}_\varepsilon(t) \Big\rangle_\Omega &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \; \nabla\cdot (\varphi_i(t)\; \widetilde{u}_\varepsilon(t))\; dx \\ &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \; \nabla\varphi_i(t)\; \widetilde{u}_\varepsilon(t)\; dx \;\to\; 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

sendo a convergência decorrente de $(1.1)_{iii}$ e do Lema 1.2, pois $V \overset{c}{\hookrightarrow} [L^2(\Omega)]^N$.

Combinando (4.29) a (4.31), deduzimos que

$$\Big\langle -\Delta W_\varepsilon\; \varphi_i \,,\, \widetilde{u}_\varepsilon(t) \Big\rangle_\Omega \to \Big\langle M\varphi \,,\, u \Big\rangle_\Omega, \text{ em } C^0([0,T]). \tag{4.32}$$

De (4.18), (4.19), (4.24), (4.26), (4.28) e (4.32), obtemos (4.17).

Isto completa a demonstração da Proposição 4.2. $\square$

Resultado de correção para a solução u_ε

Teorema 4.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 1.1 sejam satisfeitas. Se u denota a única solução da equação homogeneizada (3.3), então a seqüência de soluções (u_ε) de (2.1) satisfaz*

$$\widetilde{u}_\varepsilon' \to u', \text{ em } C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N), \tag{4.33}$$

$$\widetilde{u}_\varepsilon = W_\varepsilon u + r_\varepsilon, \text{ com} \tag{4.34}$$

$$r_\varepsilon \to 0, \text{ em } C^0([0,T];[W_0^{1,1}(\Omega)]^N). \tag{4.35}$$

Além disso, se $u \in C^0([0,T];[C^0(\overline{\Omega})]^N)$, então

$$r_\varepsilon \to 0, \ \ em\ C^0([0,T];[H_0^1(\Omega)]^N). \tag{4.36}$$

Observação: Combinando (3.43) e (3.44) com (4.6), obtemos, $\forall\ t \in [0,T]$, que

$$\begin{cases} |u_\varepsilon'(t)|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} \to |u'(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^N}, \quad \text{e} \\ |\nabla u_\varepsilon'|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}} \to |\nabla u|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \langle Mu, u\rangle_\Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

Por outro lado, de (3.42) e $(4.37)_i$, pelo Teorema de Riesz, em [23], obtemos que

$$u_\varepsilon'(t) \to u'(t), \text{ forte em } [L^2(\Omega)]^N, \tag{4.38}$$

para qualquer $t \in [0,T]$ fixado. Esta afirmação não é tão forte quanto (4.33), mas é o primeiro passo nessa direção.

Demonstração (do Teorema 4.1):

Do Teorema 3.1 sabemos que

$$u \in C^0([0,T];[H_0^1(\Omega)]^N) \cap C^1([0,T];[L^2(\Omega)]^N). \tag{4.39}$$

Considere uma seqüência φ_k em $\mathcal{D}([0,T];[\mathcal{D}(\Omega)]^N)$ tal que

$$\varphi_k \to u, \text{ forte em } C^0([0,T];[H_0^1(\Omega)]^N) \cap C^1([0,T];[L^2(\Omega)]^N), \tag{4.40}$$

quando $k \to \infty$.

Da Proposição 4.2 temos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big\{\|(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)'\|^2_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)\|^2_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})}\Big\}$$
$$\leq 2\ \|e(u-\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T)},$$

e assim

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big\{\|(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)'\|^2_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)\|^2_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})}\Big\} = 0. \tag{4.41}$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_\varepsilon - u'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} &\leq \|\widetilde{u}'_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \\ &+\|(W_\varepsilon - I)\varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \|\varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Combinando (4.40), (4.41), (4.42) e a hipótese $(1.1)_{iii}$, deduzimos que

$$\widetilde{u}'_\varepsilon \to u', \text{ em } C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N).$$

(4.33) está demonstrado.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})} \\ &\quad\leq \|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})} + \|\nabla(W_\varepsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})} \\ &\quad\leq c\|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})} + \|\nabla W_\varepsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})} \\ &\qquad+\|W_\varepsilon\nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})} \\ &\quad\leq c\|\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{N^3}}\|\varphi_k - u\|_{C([0,T];[L^2(\Omega)]^N)} \\ &\qquad+c\ \|W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}\|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];[H^1_0(\Omega)]^N)}.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Por (1.1), (4.40), (4.41) e (4.43), concluímos que

$$\nabla r_\varepsilon = \nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u) \to 0, \text{ em } C^0([0,T];[L^1(\Omega)]^{N^2}).$$

Assim, (4.35) está demonstrado.

Vamos, finalmente, considerar o caso onde $u \in C^0([0,T];[C^0(\overline{\Omega})]^N)$. Em tal caso, a seqüência aproximante φ_k pode ser escolhida de modo a satisfazer, além de (4.40), a hipótese

$$\varphi_k \to u, \text{ em } C^0([0,T];[C^0(\overline{\Omega})]^N). \tag{4.44}$$

Neste caso, podemos estimar $\nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u)$ em $L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})$, e não somente em $L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{N^2})$, como em (4.43). De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(W_\varepsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})} \\
&\quad \le \|\nabla W_\varepsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})} + \|W_\varepsilon \nabla(\varphi_\varepsilon - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \\
&\quad \le \|\nabla W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{N^3}} \|\varphi_\varepsilon - u\|_{C^0([0,T];[C(\overline{\Omega})]^N)} + \|W_\varepsilon\|_{[L^\infty(\Omega)]^{N^2}} \|\varphi_k - u\|_{L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)}.
\end{aligned}$$

Similarmente a (4.43), isto implica que

$$\nabla r_\varepsilon = \nabla(\widetilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u) \to 0, \text{ em } C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N),$$

o que dá o resultado desejado (4.36).

A demonstração do Teorema 4.1 está completa. $\square$

Observação: De (4.6), (4.33) e das definições de E_ε e E, tem-se realmente que

$$\begin{cases} |\widetilde{u}'_\varepsilon(\cdot)|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} \to |u'(\cdot)|^2_{[L^2(\Omega)]^N}, \text{ em } C^0([0,T]), \text{ e} \\ |\nabla \widetilde{u}_\varepsilon(\cdot)|^2_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{N^2}} \to |\nabla u(\cdot)|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \langle Mu(\cdot), u(\cdot)\rangle_\Omega, \text{ em } C^0([0,T]). \end{cases} \tag{4.45}$$

Resultado de correção para a pressão

Teorema 4.2 *Suponha que as hipóteses de (1.1) são satisfeitas. Suponha que a solução u do problema homogeneizado (3.3) é suave, isto é,*

$$u \in C^0([0,T];[C^0(\overline{\Omega})]^N). \tag{4.46}$$

Então, a pressão p_ε solução da equação (2.1) satisfaz

$$\int_0^T P_\varepsilon(p_\varepsilon - p - u \cdot q_\varepsilon)\psi(t)dt \to 0, \quad \textit{forte em } L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \tag{4.47}$$

para todo $\psi \in W_0^{1,1}(0,T)$, onde q_ε é o vetor definido por $q_\varepsilon \cdot e_k = q_k^\varepsilon$, (u,p) é a solução do problema homogeneizado (3.3), e P_ε é o operador de extensão da pressão introduzido pela Proposição 1.1.

Temos que (4.47) implica

$$\Big\| \int_0^T P_\varepsilon(p_\varepsilon - p - u \cdot q_\varepsilon)\psi(t)dt \Big\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \to 0. \tag{4.48}$$

Demonstração:

Basta provar que

$$\nabla\Big(\int_0^T P_\varepsilon(p_\varepsilon - p - u \cdot q_\varepsilon)\psi(t)dt\Big) \to 0, \quad \text{forte em } [H^{-1}(\Omega)]^N,\ \forall\, \psi \in W_0^{1,1}(0,T). \tag{4.49}$$

Para isso, seja (v_ε) uma seqüência limitada em $[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N$. Definimos uma seqüência real Δ_ε por

$$\Delta_\varepsilon = \Big\langle \nabla\Big[\int_0^T P_\varepsilon(p_\varepsilon - p - u \cdot q_\varepsilon)\psi(t)dt\Big], v_\varepsilon \Big\rangle_\Omega. \tag{4.50}$$

Usando Fubini e a definição do operador P_ε dada na Proposição 1.1, obtemos

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^T \Big\langle \nabla p_\varepsilon, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \Big\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt - \int_0^T \Big\langle \nabla p, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \Big\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt - \int_0^T \Big\langle \nabla(u \cdot q_\varepsilon), \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \Big\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt. \tag{4.51}$$

Para simplificar a notação, usaremos $R_\varepsilon v_\varepsilon$ para representar tanto a função em $[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N$ quanto a sua extensão por zero em $\Omega - \Omega_\varepsilon$ sobre $[H_0^1(\Omega)]^N$.

Usando as equações $(2.1)_1$ e $(3.3)_1$ para substituir ∇p_ε e ∇p em (4.51), e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon = \; & \int_0^T \left\langle u'' - \widetilde{u}''_\varepsilon, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt + \int_0^T \left\langle \widetilde{f}_\varepsilon - f, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt \\
& + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u - \nabla \widetilde{u}_\varepsilon) \cdot \psi(t) \nabla (R_\varepsilon v_\varepsilon) dx\; dt + \int_0^T \left\langle M u, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt \\
& - \int_0^T \left\langle \nabla (u \cdot q_\varepsilon), \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Agora, usando a equação (4.34) para substituir $\widetilde{u}_\varepsilon$ em (4.52), e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon = \; & \int_0^T \left\langle u'' - \widetilde{u}''_\varepsilon, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt + \int_0^T \left\langle \widetilde{f}_\varepsilon - f, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt \\
& + \int_0^T \int_\Omega (I - W_\varepsilon) \nabla u \cdot \psi(t) \nabla (R_\varepsilon v_\varepsilon) dx\; dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla r_\varepsilon \cdot \psi(t) \nabla (R_\varepsilon v_\varepsilon) dx\; dt \\
& + \int_0^T \int_\Omega \nabla W_\varepsilon \nabla u \cdot \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon dx\; dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla u q_\varepsilon \cdot \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon dx\; dt \\
& - \int_0^T \left\langle (\nabla q_\varepsilon - \Delta W_\varepsilon) u, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt + \int_0^T \left\langle M u, \psi(t) R_\varepsilon v_\varepsilon \right\rangle_\Omega dt
\end{aligned} \tag{4.53}$$

A hipótese (4.46) nos diz que (4.36) é válido, então segue de (4.53) que $\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_\varepsilon = 0$, para toda seqüência limitada $(v_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega)]^N$. Isto é equivalente a (4.49) e, portanto, a demonstração do Teorema 4.2 está completa. $\square$

Capítulo 5

O caso dos buracos menores que o tamanho crítico

Neste capítulo vamos estudar o caso particular onde os buracos são menores que o tamanho crítico, isto é,

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log a_{S_i^\varepsilon} \to -\infty, \ \text{ se } N = 2 \\ \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon^{\left(\frac{N}{N-2}\right)}}{a_{s_i^\varepsilon}} \to -\infty, \ \text{ se } N \geq 3. \end{cases} \tag{5.1}$$

Com isso, definimos as funções $(w_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon)_{1 \leq k \leq N}$ como no caso dos buracos com tamanho igual ao crítico, porém no lugar de $(1.1)_{(iii)}$ temos que

$$\begin{cases} w_k^\varepsilon \to 0, \quad \text{forte em } [H^1(\Omega)]^N, \\ q_k^\varepsilon \to 0, \quad \text{forte em } L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Assim, combinando $(1.1)_{(v)}$ com (5.2), temos que $\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi v_\varepsilon \rangle_\Omega$ converge para zero. Temos portanto $\mu_k = 0$, o que implica que $M = 0$. Neste caso, continuam válidos os resultados de homogeneização e de correção, apresentados nos capitulos 3 e 4.

Exemplos onde a hipótese (5.2) é satisfeita podem ser encontrados em [2].

Com a hipótese (5.2), além de os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 permanecerem verdadeiros, temos que a convergência forte dos dados implica agora em convergência forte das soluções, o que é visto no seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Suponha que vale o quadro abstrato de hipóteses (1.1), com (5.2) no lugar de* $(1.1)_{(iii)}$*, e considere uma seqüência de dados satisfazendo (3.1). Seja* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *a única solução do sistema (2.2). Então,*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \to u, \quad \textit{forte em } W^{1,\infty}(0,T;V), \\ P_\varepsilon(p_\varepsilon) \to p, \quad \textit{forte em } L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R}), \end{cases}$$

onde o limite (u,p) *é a única solução do sistema homogeneizado*

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \nabla p = f, \quad \textit{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \textit{em } Q \\ u = 0, \quad \textit{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \textit{em } \Omega \\ u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H). \end{cases}$$

Demonstração:

A demonstração deste teorema é feita de forma semelhante à demonstração do Teorema 4.1, porém usando-se a hipótese (5.2) no lugar de $(1.1)_{(iii)}$. $\square$

Observação: A demonstração deste resultado, para a equação de Stokes, o caso estacionário, pode ser vista em [2].

Apêndice

Apresentaremos aqui alguns resultados básicos que foram utilizados nos capítulos anteriores. As demonstrações serão omitidas por se tratarem de resultados conhecidos.

A.1 Análise funcional

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um *funcional linear* sobre X é uma aplicação $f : X \to \mathbb{K}$, linear.

Denotamos por X' o *espaço dual* de X, dado por

$$X' = \Big\{ f : X \to \mathbb{K} \ ; \ f \text{ é linear e contínua} \Big\}.$$

O espaço X' é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de soma e produto, e com norma dada por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X} \Big\{ |f(x)| \ ; \ \|x\|_X \leq 1 \Big\},$$

sendo $(X'; \|\cdot\|_{X'})$ um espaço de Banach.

Quando $f \in X'$ e $x \in X$, denota-se $\langle f, x \rangle$ no lugar de $f(x)$. Dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto escalar na dualidade X', X.

Pode-se também tomar o dual de X', denotado por X'', e denominado o *bidual* de X. A norma em X'' é dada por

$$\|\zeta\|_{X''} = \sup_{f \in X'} \Big\{ \Big\langle \zeta, f \Big\rangle \ ; \ \|f\|_{X'} \leq 1 \Big\}.$$

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Designa-se por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y, munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X} \Big\{ |T(x)|_Y \ ; \ \|x\|_X \leq 1 \Big\}.$$

Teorema A.1.1 *Se uma seqüência eqüicontínua de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset X$, então f_n converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset X$.*

Demonstração: Ver [14], p. 327. □

Teorema A.1.2 (Arzelá-Ascoli) *Se uma seqüência eqüicontínua de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset X$, então f_n converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset X$.*

Demonstração: Ver [14], p. 327. □

Teorema A.1.3 (Banach-Steinhauss) *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de X em Y. Suponha que $\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i(x)\| < \infty$, $\forall\ x \in X$. Então,*

$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \infty.$$

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que

$$\|T_i(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall\ x \in X,\ \forall\ i \in \mathbb{I}.$$

Demonstração: Ver [4] p. 16. □

Corolário A.1.1 *Seja* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$*, com* X *e* Y *espaços de Banach. Suponha que para cada* $x \in X$ *existe* $\lim_{n\to\infty} T_n(x) =: T(x)$*. Então, temos*

(i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$

(ii) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Demonstração: Ver [4] p. 17. $\square$

Definição: Diz-se que $a(u,v)$ é *coerciva*, quando $\exists\ \alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$, $\forall\ v \in V$. (Isso evita casos degenerados onde $a(u,v) = 0$, $\forall\ u,v \in V$).

Teorema A.1.4 (Lema de Lax-Milgran) *Seja* $a(u,v)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Seja* f *uma forma linear contínua em* V*. (*$f \in V'$*). Então existe* $u \in V$ *solução do problema variacional abstrato* $a(u,v) = \langle f,v\rangle$ *,* $\forall\ v \in V$*, e a aplicação*

$$\begin{aligned} \tau:\ V' &\mapsto\ V \\ f &\mapsto\ \tau f = u \end{aligned}$$

é linear e lipschitziana, com constante de Lipschitz $\frac{1}{\alpha}$*, isto é,*

$$\|\tau f\| = \|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'},$$

onde α *é a constante de coercividade de* $a(u,v)$*.*

Demonstração: Ver [12]. $\square$

Teorema A.1.5 (Hahn-Banach) *Seja X um espaço vetorial real, $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional subaditivo e homogêneo positivo, e M um subespaço vetorial de X. Seja $f_0 : M \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f_0(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in M$. Então, existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f_0(x)$, $\forall\ x \in M$, e $f(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$ (f é a extensão de f_0).*

Demonstração: Ver [12], p. 214. $\square$

Corolário A.1.2 *Seja X um espaço vetorial normado, e F um subespaço de X. Então:*

$$F \text{ é denso em } X \Longleftrightarrow [f \in X' \text{ e } f(F) = 0] \Rightarrow f = 0.$$

Demonstração: Ver [12]. $\square$

Topologias fraca e fraca-estrela

Definição: Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Suponha que

(i) $\phi, X \in \tau$,

(ii) $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha \in \tau, \quad$ se $A_\alpha \in \tau,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{I}$,

(iii) $\bigcap_{i=1}^{N} A_\alpha \in \tau, \quad$ se $A_\alpha \in \tau, i = 1, 2, \cdots, N$,

onde $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto das partes de X. Nesse caso, dizemos que τ forma uma topologia sobre X e o par (X, τ) é chamado de espaço topológico.

Definição: Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca sobre X, denotada por $\sigma(X, X')$, é a topologia menos fina sobre X, que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.

Notação: Dada uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X, denota-se a convergência de x_n para x, na topologia fraca $\sigma(X, X')$, por $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição A.1.1: *Seja* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* X*. Então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(X, X') \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle\,,\ \forall\ f \in X'$,

(ii) $x_n \to x$ *forte* $\Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(X, X')$,

(iii) $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(X, X') \Longrightarrow \|x_n\|$ *é limitada, e* $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$,

(iv) $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(X, X')$*, e* $f_n \to f$ *forte em* X' *(isto é,* $\|f - f_n\|_{X'} \to 0$*)*
$\Longrightarrow \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Definição: Seja X um espaço de Banach. Seja $x \in X$, fixado. Define-se a aplicação $J_x : X' \to \mathbb{K}$, por $\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle$. As aplicações J_x são lineares e contínuas, logo, $J_x \in X''$, $\forall\ x \in X$. Define-se a aplicação canônica $J : X \to X''$, por $J(x) = J_x$.

Dizemos que X é *reflexivo* se $J(X) = X''$. Em geral, temos $J(X) \subset X''$.

Proposição A.1.2: *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Seja* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* X*, limitada. Então, existe uma subseqüência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *convergindo na topologia fraca* $\sigma(X, X')$*.*

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Definição: A topologia fraca-estrela, denotada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X', que torna contínuas todas as aplicações J_x.

Notação: Dada uma seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X', denota-se a convergência de f_n para f, na topologia fraca-estrela $\sigma(X', X)$, por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Proposição A.1.3: *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* X'*. Então*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X) \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\,,\ \forall\ x \in X$,

(ii) $f_n \to f$ *forte* $\Longrightarrow f_n \rightharpoonup f$ *fraco em* $\sigma(X', X'')$,
$f_n \rightharpoonup f$ *fraco em* $\sigma(X', X'') \Longrightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$,

(iii) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X) \Longrightarrow \|f_n\|$ *é limitada, e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$,

(iv) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$, *e* $x_n \to x$ *forte em* X *(isto é,* $\|x - x_n\|_X \to 0$*)*

$\Longrightarrow \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4] p. 41. $\square$

Definição: Seja X um espaço métrico. Dizemos que X é *separável* se existe um subconjunto $K \subset X$, K enumerável e denso em X.

Proposição A.1.4: *Seja* X *um espaço de Banach separável. Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* X'*, limitada. Então, existe uma subseqüência* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge fraco-estrela em* X'*.*

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Teorema A.1.6 (Alaoglu-Bourbaki) *Seja* X *um espaço de Banach. Então, o conjunto* $B_{X'} = \{f \in X' \; ; \; \|f\| \leq 1\}$ *é compacto na topologia fraca-estrela* $\sigma(X', X)$*.*

Demonstração: Ver [4], p.43. $\square$

A.2 Espaços L^P

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aberto.

Definição: Define-se o espaço $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, como sendo o espaço das funções u definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, isto é

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{K} \; ; \; u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\Big\}.$$

Definição: Se $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ representa o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, isto é

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{K} \; ; \; u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq c, \text{ q.s. em } \Omega\Big\}.$$

Os espaços L^p, para $1 \leq p < \infty$, e L^∞ são espaços de Banach, com as seguintes normas, respectivamente:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ; \text{ e}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)| = \inf \Big\{ c \; ; \; |u(x)| \leq c, \text{ q.s. em } \Omega \Big\}.$$

Temos que $L^2(\Omega)$ $(p = 2)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall\, u, v \in L^2(\Omega).$$

Temos também que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo p tal que $1 < p < \infty$, e que $L^p(\Omega)$ é separável para todo p tal que $1 \leq p < \infty$.

Definição: Define-se o espaço $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como o espaço das funções pertencentes a $L^p(\Omega)$, localmente integráveis sobre cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, isto é

$$L^p_{loc}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\; u \text{ é mensurável e} \int_K |u(x)|^p dx < \infty, \; \forall\, K \subset \Omega, \text{ compacto} \Big\}.$$

O Teorema abaixo identifica o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, para p tal que $1 \leq p < \infty$:

Teorema A.2.1 (Representação de Riesz) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $1 < p < \infty$, e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então, existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\Big\langle \varphi, f \Big\rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall\, f \in L^p(\Omega), \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4] p. 61 ou [24] p. 52 □

Se $p = \infty$, temos:

Teorema A.2.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto, e $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Então, existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$, tal que*

$$\left\langle \varphi, f \right\rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall\ f \in L^1(\Omega); \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4], p. 63. $\square$

Observação: Daqui por diante, a menos de indicação contrária, estaremos considerando Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$.

Desigualdade de Hölder

Teorema A.2.3 *Supor $p_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ tais que*

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ (para $i = 1, 2, \cdots, m$), temos que $\prod_{i=1}^m f_i \in L^1(\Omega)$, e ainda

$$\int_\Omega \Big| \prod_{i=1}^m f_i \Big| dx \leq \prod_{i=1}^m \Big(|f_i(x)|^{p_i} \Big)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Demonstração: Ver [24], p. 40. $\square$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{K}$ duas funções de quadrado integrável. Então,

$$\Big|(u, v)_{L^2(\Omega)}\Big| = \Big| \int_\Omega u(x)v(x)dx \Big| \leq \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Resultados de integração

Teorema A.2.4 (Dunford) *Seja* $(\Omega, \sum, \mu)$ *um espaço medida finito, e* X *um espaço de Banach tal que* X *e* X' *tem a propriedade de Radon-Nikodim. Um subconjunto* K *de* $L^1(\mu, X)$ *é fracamente relativamente compacto se*

(i) K *é limitado (em* $L^1(\mu, X)$*),*

(ii) K *é uniformemente integrável, isto é,* $\int_E \|f\|_X d\mu \to 0$*, quando* $\mu(E) \to 0$*, uniformemente em* K*, e*

(iii) para cada $E \in \sum$*, o conjunto* $\{\int_E f d\mu, f \in K\}$ *é fracamente relativamente compacto (em* X*).*

Demonstração: Ver em *J. Diestel e J.J.Uhl, Jr*, [10], pg 101. □

Proposição A.2.1 (Phillips) *Espaços de Banach reflexivos tem a propriedade de Radon-Nikodym.*

Demonstração: Ver em [10], corolário 13, pg. 76. □

Proposição A.2.2 *Um subconjunto* $K \in L^1(\mu; X)$ *fracamente compacto é necessariamente uniformemente integrável.*

Demonstração: Ver em [10], pg. 104. □

Teorema A.2.5 *Sejam* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$*, e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Então, existe uma subseqüência* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω*,*

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad \forall\ k$*, e q.s. em* Ω*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [4], p. 58. □

Teorema A.2.6 (Lema de Fatou) *Seja* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções pertencentes a* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(i) Para cada n, $u_n(x) \geq 0$ *q.s. em* Ω, *e*

(ii) $\sup\limits_n \int_\Omega u_n(x)dx < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ *seja* $u(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. *Então,* $u \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega u(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx.$$

Demonstração: Ver [4], p. 54. □

Teorema A.2.7 (Convergência dominada de Lebesgue) *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*

(i) $f_n \to f$ *q.s. em* Ω,

(ii) existe $h \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* n, $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q.s. em* Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Demonstração: Ver [4], p. 54. □

Teorema A.2.8 (Densidade) *O espaço* $C_0(\Omega)$, *espaço das funções contínuas em* Ω *com suporte compacto em* Ω *é denso em* $L^1(\Omega)$. *Isto é,* $\forall\ u \in L^1(\Omega)$ *e* $\forall\ \varepsilon > 0$, *existe* $v \in C_0(\Omega)$ *tal que* $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Demonstração: Ver [4], p. 61. □

Teorema A.2.9 (Fubini) *Supor que* $f \in L^1((0,T)\times\Omega)$. *Então, para quase todo* $t \in (0,T)$, *temos*

$$f(t,x) \in L^1_x \quad e \quad \int_\Omega f(t,x)dx \in L^1_t((0,T)).$$

Igualmente, para quase todo $x \in \Omega$, *temos*

$$f(t,x) \in L^1_t \quad e \quad \int_0^T f(t,x)dt \in L^1_x(\Omega).$$

Portanto, se verifica

$$\int_0^T\int_\Omega f(t,x)dxdt = \int_\Omega\int_0^T f(t,x)dtdx = \int_{(0,T)\times\Omega} f(t,x)dtdx.$$

Demonstração: Ver [4], p. 55. $\square$

Os espaços $C([0,T];X)$ **e** $L^p(0,T;X)$

Sejam X um espaço de Banach, $T>0$ um número real e $1<p<\infty$.

Definição: Define-se o espaço $C^k([0,T];X)$ como sendo o conjunto das funções $u:[0,T]\rightarrow X$ tais que u e suas k primeiras derivadas são contínuas em $[0,T]$. A norma em $C([0,T];X)$ é dada por

$$\|u(t)\|_{C([0,T];X)} = \max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X.$$

Observação: O espaço $C^k([0,T])$ tem definição análoga, porém em vez de X temos $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Definição: Define-se o espaço $C_s^0(0,T;X)$, introduzido em [17], capítulo 3, como

$$C_s^0(0,T;X) = \Big\{ f\in L^\infty(0,T;X) : t\rightarrow \langle f(t),v\rangle_{X,X'} \text{ é contínua} \\ \text{de } [0,T] \text{ em } \mathbb{R}, \text{para qualquer } v\in X' \text{ fixado } \Big\}.$$

Definição: Define-se o espaço $L^p(0,T;X)$ como sendo o conjunto das funções $u:(0,T)\rightarrow X$ tais que u é mensurável, e $\|u(t)\|_X\in L^p((0,T))$. A norma em $L^p(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $L^p(0,T;X)$, munido da norma acima, constitui um espaço de Banach.

Se $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é também um espaço de

Hilbert, com produto interno e norma dados por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \Big(u(t), v(t)\Big)_X dt, \quad e \quad \|u\|^2_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \|u(t)\|^2_X dt.$$

Definição: Quando $p = \infty$, define-se o espaço $L^\infty(0,T;X)$ como sendo o conjunto das funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis e essencialmente limitadas em X, ou seja, com $\sup\text{ess}\|u(t)\|_X < \infty$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup\text{ess}\|u(t)\|_X.$$

Observação: Se $1 < p < \infty$ e X é reflexivo, então $L^p(0,T;X)$ também é reflexivo. Se X é separável, então $L^p(0,T;X)$ é também separável, para $1 \leq p < \infty$.

Observação: O espaço $L^q(0,T;X')$ é dito ser o dual topológico do espaço $L^p(0,T;X)$, onde X' é o dual de X, e q é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, para $1 \leq p < \infty$.

Lemas de Gronwall

Lema A.2.1 *Seja X um espaço de Banach, e X' seu dual. Sejam u e $g \in L^1(a,b;X)$. São equivalentes:*

(i) u é q.s. igual à primitiva da função g, isto é,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds, \quad \xi \in X,\ q.s.,\ t \in [a,b].$$

(ii) Para cada função teste $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, onde $\phi' = \dfrac{d}{dt}\phi$, temos que

$$\int_a^b u(t)\,\phi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\,\phi(t)\,dt.$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$, temos que $\dfrac{d}{dt}\langle u, \eta\rangle = \langle g, \eta\rangle$, no sentido escalar da distribuição, em (a,b).

Se $(i) - (iii)$ são satisfeitas, u, em particular, é igual a uma função contínua de $[a,b]$ em X.

Demonstração: Ver [33]. $\square$

Lema A.2.2 (Gronwall) *Suponha que m, g e φ são funções positivas satisfazendo*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t m(s)\,\varphi(s)\,ds, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Então, teremos que

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t m(s)\,g(s)\,e^{\int_s^t m(r)dr} ds.$$

Demonstração: Ver [24]. $\square$

Corolário A.2.1 *Com as mesmas hipóteses do Lema A.2.1, assumindo que g é uma função crescente, temos que*

$$\varphi(t) \leq g(t)\,e^{\int_0^t m(r)dr}.$$

Demonstração: Ver [24]. $\square$

Lema A.2.3 (Gronwall) *Seja* $\mathrm{m} \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ *tal que* $\mathrm{m} \geq 0$ *q.s. em* $]0,T[$, *e* $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^+$ *constante. Suponha que* $\mathrm{g} \in L^\infty(0,T)$, $\mathrm{g} \geq 0$ *sobre* $]0,T[$, *verificando*

$$\frac{1}{2}\mathrm{g}(t)^2 \leq 2\,\mathrm{a}^2 + 2\int_0^t \mathrm{m}(s)\mathrm{g}(s)ds,$$

para todo $t \in\,]0,T[$. *Então,*

$$\mathrm{g}(t) \geq 2\Big(\mathrm{a} + \int_0^t \mathrm{m}(s)ds\Big), \quad \textit{em } [0,T].$$

Demonstração: Ver [24]. $\square$

Observação: Se $g(t) = C$, constante, no Corolário A.2.1 teremos

$$\varphi(t) \leq C\,e^{\int_0^t m(r)dr}.$$

A.3 Medidas de Radon

Medidas

Sejam ϕ o conjunto vazio, $X \neq \phi$ um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Uma *σ-álgebra* em X é uma coleção $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$\begin{cases} (i) \quad S \in \mathcal{M} \Rightarrow X \backslash S \in \mathcal{M} \\ (ii) \quad \{S_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{M} \end{cases}$$

O par $(X, \mathcal{M})$ é chamado um *espaço mensurável.*

Para introduzir o conceito de medida, é conveniente introduzir o intervalo $[0, \infty]$. Seja então ∞ um símbolo que satisfaça as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} x < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ x + \infty = \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ ou } x = \infty, \\ x \cdot \infty = \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0, \\ 0 \cdot \infty = 0. \end{cases}$$

O intervalo $[0, \infty]$ consiste do intervalo $[0, \infty)$ acrescido do símbolo ∞ com as propriedades acima e munido da ordem usual estendida pela relação $x < \infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Definição: Uma *medida positiva* no espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, tal que

$$\begin{cases} (i) \quad \mu(\phi) = 0, \\ (ii) \quad \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(S_i), \text{ para qualquer coleção } \{S_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{tal que } S_i \cap S_j = \phi \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

A tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é dita um *espaço com medida.* Se $S \in \mathcal{M}$ e $\mu(S) = 0$, diz-se que S tem medida nula. Se a propriedade P vale para x fora de um conjunto de medida nula, diz-se que P vale *quase-sempre* e escreve-se $P\mu - q.s.$.

Medidas de Radon

Seja K um subconjunto compacto de Ω. O espaço

$$C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp } \varphi \subseteq K\},$$

munido com a norma

$$\|\varphi\|_K = \max \{|\varphi(t)| : t \in K\},$$

é um espaço de Banach.

Definição: Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $C_c(\Omega)$. Escrevemos $\varphi_n \twoheadrightarrow 0$ se:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ contendo o suporte de φ_n, para todo n,

(ii) $\varphi_n \to 0$, uniformemente, em Ω.

Dizemos então que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende para zero, em (ou no sentido de) $C_c(\Omega)$.

Definição: Uma *medida de Radon real* μ, em Ω, é uma forma linear em $C_c(\Omega)$, que é contínua no sentido em que $\{\varphi_n\}_n \subset C_c(\Omega)$ e $\varphi \twoheadrightarrow 0$, juntos, implicam $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\varphi_n) = 0$.

Analogamente define-se medidada de Radon complexa.

É fácil verificar que uma forma linear em $C_c(\Omega)$ satisfaz as condições da definição anterior, se, e somente se, a cada conjunto compacto K em Ω, corresponder um número m_K tal que

$$\|\mu(\varphi)\| \leq m_K \|\varphi\|_\infty,$$

para cada $\varphi \in C_c(\Omega)$, com suporte contido em K.

Definição: Uma medida de Radon real μ, em Ω, é *positiva* no seguinte sentido: para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$, com $\varphi(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega \varphi(x) d\mu(x) \geq 0.$$

Nesse caso

$$\mu(\varphi) = \sup\{\mu(\psi) : \psi \in C_{c+}(\Omega),\ \psi \leq \varphi\},$$

para cada φ em $C_{c+}(\Omega)$, conjunto das funções positivas em $C_c(\Omega)$.

São exemplos de medidas de Radon:

- medida de Lebesgue
- medida atômica
- densidades
- medida de Lebesgue-Stieljes .

A.4 Distribuições e espaços de Sobolev

Distribuições

Definição: Seja $f : \Omega \to \mathbb{K}$.Definimos *suporte* de f como sendo o fecho, em Ω, do conjunto $\{x \in \Omega\ ;\ f(x) \neq 0\}$. Denota-se supp f.

Definição: Chamamos de $C_0^\infty(\Omega)$ao espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{K}$ de classe C^∞ em Ω, e que possuam suporte compacto contido em Ω.

Definição: Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, e $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, representaremos por D^α o operador de derivação de ordem α, definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$.

Se $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$, definimos $D^0 u = u$.

Em $C_0^\infty(\Omega)$, introduz-se a seguinte noção de convergência:

Definição: Dizemos que uma seqüência$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_n \to 0$, se e somente se existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que:

(i) supp $\varphi_n \subset K, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to 0$, uniformemente em Ω, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N$.

Dizemos que uma subseqüência $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_n - \varphi\}$ converge para zero no sentido definido acima.

Definição: O espaço $C_0^\infty(\Omega)$,com essa noção de convergência, denomina-se *espaço das funções testes*, e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Denominamos *distribuição* sobre Ω, a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de soma de funções e produto por escalar, e é representado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição: Em $\mathcal{D}'(\Omega)$, dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, temos a seguinte noção de convergência: dizemos que uma seqüência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \ \text{ em } \mathbb{K}, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição: Definimos a derivada de ordem α de uma distribuição T sobre Ω, como sendo o funcional $D^\alpha T$, em $\mathcal{D}(\Omega)$, dado por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle\,, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que $D^\alpha T$ é também uma distribuição. Assim, temos que toda distribuição sobre Ω possui derivadas de todas as ordens, as quais são ainda distribuições sobre Ω.

Espaços de Sobolev

Definição: Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, com $|\alpha| \leq m$, sendo

$D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições sobre Ω, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ ; \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^N, \ \text{com} \ |\alpha| \leq m \Big\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de *espaço de Sobolev* de ordem m, relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição: Quando $p = 2$, escrevemos $H^m(\Omega)$ no lugar de $W^{m,2}(\Omega)$.

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$a(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v \Big)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \ u, v \in H^m(\Omega).$$

Definição: Seja X um espaço de Banach. Define-se o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ como

$$W^{m,p}(0,T;X) = \Big\{ u : (0,T) \to X \ ; \ u, \ D^\alpha u \in L^p(X), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^N, \ \text{com} \ |\alpha| \leq m \Big\}.$$

Definição: Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Definição: Sejam p e q tais que $1 \leq p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Conseqüentemente, representamos o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

Definição: Quando $m = 1$, temos o espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$, com produto interno e norma induzida dados por

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v), \quad \text{e}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq c|\nabla v|_{[L^2(\Omega)]^N},$$

onde c é uma constante que depende somente de Ω.

A demonstração dessa desigualdade pode ser vista em [4], p. 91.

Como conseqüência dessa desigualdade, consideramos como norma de $H_0^1(\Omega)$ como sendo $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$, onde as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

Teorema da divergência e fórmula de Green

Teorema A.4.1 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe C^1. Então, valem as seguintes fórmulas:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \nabla \cdot (F(x))dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \eta(x)dx, \quad F \in [H^1(\Omega)]^N,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega).$

Demonstração: Ver [12]. $\square$

A.5 Imersões em espaços de Sobolev

Definição: Sejam V e H espaços de Hilbert, tais que $V \subset H$, e seja $i : V \to H$ a injeção canônica de V em H, que associa cada $v \in V$ a $i(v)$, elemento de H. Dizemos que o operador linear i é o operador de *imersão* de V em H.

Diz-se que $i : V \to H$ é uma *imersão contínua*, e denota-se por $\hookrightarrow$, quando existe uma constante $c > 0$ tal que $\|v\|_V \leq c\|i(v)\|_H$, $\forall\, v \in V$.

São exemplos simples os casos $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$; $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$; e $V = H^m(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

Definição: Dizemos que $i : V \to H$ é uma *imersão compacta* e a denotamos por $\overset{c}{\hookrightarrow}$, quando a imagem dos limitados de V, por i, são conjuntos relativamente compactos de H, ou ainda, quando as seqüências limitadas em V são levadas por i em seqüências que possuem subseqüências convergentes, em H.

Teoremas de compacidade

Teorema A.5.1 (Sobolev) *Se* $1 \leq p < N$, *tem-se* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$.

Demonstração: Ver [24], p. 120. $\square$

Corolário A.5.1 *Seja* Ω *um aberto de classe* C^1 *com fronteira* Γ *limitada, e seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,*

$$\begin{cases} \textit{Se } 1 \leq p < N, \ \textit{tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \ \textit{onde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \textit{Se } p = N, \ \textit{tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall\, q \in [p, \infty), \\ \textit{Se } p > N, \ \textit{tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4], p. 168, ou [24], p. 117. $\square$

Teorema A.5.2 (Rellich-Kondrachoff) *Suponha* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *aberto, limitado e de classe* C^1. *Então,*

$$\begin{cases} \textit{Se } p < N, \ \textit{tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \forall\, q \in [1, p^*), \ \textit{onde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \textit{Se } p = N, \ \textit{tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \forall\, q \in [p, \infty), \\ Se\ p > N, tem - seque W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Allaire, G. - *Homogénéisation des èquations de Navier-Stokes*. Thèse, Universitè Paris VI, (1989).

[2] Allaire, G. - *Homogenization of Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes*. DEMT/DEDR/IRD-CEN, SACLAY-YVETE, Paris, (1990).

[3] Brahim,S.-Otsmane; Francfort, G. A. and Murat, F. - *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations*, J. Math. Pures et Appl., 71, n.3, pg 197-231, (1992).

[4] Brézis, H. - *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A., Madrid, (1984).

[5] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Rocha, A.; Soriano J. A. *Exact Controllability Equation with a Pressure Term.* EJQTDE, No. 9, p. 1-18. (1998).

[6] Cioranescu, D.; Donato, P. - *Exact internal controllability in perforated domains*, J. Math. Pures et Appl., 68, pg 185-213, (1989).

[7] Cioranescu, D.; Donato, P.; Murat, F.; Zuazua, E. - *Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 18, 251-293, (1991).

[8] Cioranescu, D.; Murat, F. - *Un terme étrange venu d'alleurs. Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications.* (H. Brézis and J. L. Lions, eds),

Collège de France Seminar, vol. II e III, Research Notes in Mathematics, vol. 60 e 70, Pitman, 93-138 e 154-178, (1982).

[9] Deny J.; Lions J. L. - *Les espaces du type de Beppo Levi.* Ann. Inst. Fourier, 5, 1954, p. 305-370.

[10] Diestel, J.; Uhl, J.J. - *Vector Measures.* Mathematical Surveys, 15, American Mathematical Society, Providence, (1977).

[11] Iório, R.; Iório, V. M. - *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro. IMPA, CNPq, 1988.

[12] Kreyszig, E. - *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, New York, (1989).

[13] Lesmes, J. - *Teoria das distribuições e equações diferenciais.* Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1972).

[14] Lima, E.L. - *Curso de análise* vol. 1, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1992).

[15] Lions, J.L. - *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 10:1, 125-140, (1980).

[16] Lions, J.L. - *On some hiperbolic equations with pressure term*, Collége de France, Departamente de Mathématiques, 3 rue d'Ulm, 75005, Paris, (1990).

[17] Lions, J.L.; Magenes, E. - *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, (1968).

[18] Magenes E.; Stampacchia G. - *I Problemi al contorno per le equazioni diferenziali di tipo ellittico.* Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, 12, 1958, p. 247-357, note (27), p. 320.

[19] Medeiros, L.A. - *Iniciação às equações diferenciais parciais não lineares.* Notas de aula. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).

[20] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - *Espaços de Sobolev e equações deferenciais parciais*, textos de métodos matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1975).

[21] Nečas, J. - *Equations aux diriveés partielles*, Presses de l'Université de Montréal, (1965).

[22] Nečas, J. - *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).

[23] Riesz, F. - *Sur la convergence en Moyene.* Acta Sci. Math., vol. 4, pp. 58-64, 182-185, (1928).

[24] Rivera, J.E.M. - *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.* Série: textos avançados, LNCC, Petrópolis, Rio de Janeiro. (1999).

[25] Rocha, A. - *Controlabilidade exata das equações dinâmicas da elasticidade para materiais incompressíveis.* Tese. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, (1996).

[26] Sanches-Palência, E. - *Boundary-value problems in domains containing perforated walls*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (H. Brézis and J. L. Lions) Collège de France Seminar, vol. III, Research Notes in Mathematics 70 Pitman London, 309-325,(1982).

[27] Sanches-Palência, E. - *Non-homogeneous media and vibration theory.* Lecture notes in physics, 127, Berlin end New York, Springer Verlang, (1980).

[28] Saut, J.C. - *Some remarks on the limit of viscoelastic fluids as the relaxation time tends to zero.* In Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, edited by E. Kröner and Kirchgässner, Lecture notes in Physics, vol. 249, mai 86, Springer Verlang, Berlin and New York, pp. 364-369, (1986).

[29] Simon, J. - *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. Annali di Mat. Pura ed Appl., 146 IV, p. 65-96, (1987).

[30] Souza, J.S. - *Homogeneização de alguns problemas de contorno*. Tese. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, (1995).

[31] Tartar, L. - *Convergence of the homogenization process*. Appendix of [27].

[32] Tartar, L. - *Cours Peccot au Collège de France*, mar (1977), partially written in: F. Murat, *H-Convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionelle et Numérique de l'Université d'Alger, duplicated, pp. 34, (1978).

[33] Teman, R. - *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis North-Holland*, Amsterdam, (1984).