Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Homogeneização e Corretor para a Equação da Onda em Domínios com Pequenos Buracos

Angela Sacamoto

Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis

agosto de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Homogeneização e Corretor para a Equação da Onda em Domínios com Pequenos Buracos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Angela Sacamoto

Florianópolis
agosto de 2005

Homogeneização e Corretor para a Equação da Onda em Domínios com Pequenos Buracos

por

Angela Sacamoto

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração Equações Direnciais Parciais, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Igor Mozolevski (Coordenador)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Gustavo A. T. Fernandes da Costa (UFSC)

Prof. Dr. Marcelo M. Cavalcanti (UEM)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Florianópolis, agosto de 2005.

" Porque Deus é poderoso para fazer infinitamente mais além daquilo que pedimos ou pensamos "

Efésios 3:20

ao meu esposo, Cláuber

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à *Deus* pela realização deste trabalho.

Agradeço ao meu esposo, *Cláuber*, pela compreensão, dedicação, carinho e incentivo em todos os momentos.

Agradeço à minha mãe, aos meus irmãos e amigos, pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos professores: *Joel*, pela orientação e pelos conhecimentos transmitidos; *Ruy Charão, Gustavo*, e *Marcelo*, que fizeram parte da banca examinadora desta dissertação, pela assistência e pelas sugestões apresentadas.

Agradeço aos professores *Valéria* e *Doherty*, pelo apoio e amizade.

Agradeço à secretária *Elisa* pela eficiência na resolução dos assuntos burocráticos.

Por fim, agradeço ao *CNPq*, pelo suporte financeiro concedido durante um ano e meio.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a homogeneização da equação da onda com condições de fronteira de *Dirichlet* homogêneas num domínio contendo pequenos buracos, periodicamente distribuídos na direção de cada eixo-coordenado. Para este problema, provamos a convergência do processo de homogeneização e resultados de correção. As demonstrações serão desenvolvidas de acordo com o quadro abstrato de hipóteses introduzido por *D. Cioranescu* e *F. Murat* para o estudo de problemas elípticos, o qual está baseado no uso adequado de funções testes adaptadas à geometria do problema.

Abstract

In this work we study the homogenization of the wave equation with homogeneous *Dirichlet* boundary conditions in a domain containing small holes periodically distributed in the direction of each coordinate axis. For this problem we prove the convergence of the process of homogenization and corrector results. The proofs are developed according the abstract framework of hypotheses introduced by *D. Cioranescu* and *F. Murat* for the study of elliptic problems, which is based on the use of suitable test functions adapted to the geometry of the problem.

Sumário

Introdução

O método de homogeneização é uma técnica que possibilita várias aplicações, destacando-se entre elas, a modelagem de fenômenos físicos caracterizados por problemas com múltiplas escalas, ou seja, o comportamento macroscópico é resultante da superposição de fenômenos que ocorrem em diversas escalas inferiores. A abordagem matemática destes problemas pode ser feita utilizando-se as técnicas da teoria da homogeneização. Citamos alguns exemplos onde esta situação ocorre com freqüência:

- A modelagem de escoamentos (monofásicos e multifásicos) acoplados a dispersão de contaminantes, transporte de calor e massa e deformações/tensões em formações geológicas heterogêneas são processos que envolvem múltiplas escalas. A correta descrição de processos que ocorrem na escala de campo (quilômetros) tais como a macro-dispersão em reservatórios de petróleo bem como o transporte de contaminantes em aquíferos está fortemente atrelada ao atendimento dos diversos fenômenos que ocorrem nas escalas inferiores. Exemplos: na escala do poro (mm), onde valem as equações da Mecânica do Contínuo; na escala de laboratório (cm), onde vale a lei de Darcy...

- Na Mecânica dos Materiais, vários modelos macroscópicos de plasticidade em metais são correlacionados com fenômenos microscópicos referentes ao movimento de discordâncias ocorridos na microesturtura cristalográfica do material. Analogamente, fenômenos de plasticidade em meios granulares estão fortemente ligados a fenômenos de fricção na estrutura microscópica granular.

- Na área da climatologia e metereologia, o acoplamento entre modelos de previsão climática globais macroscópicos com modelos regionais microscópicos, por exemplo, relativos à precipitação e temperaturas locais, envolve o entendimento de um processo como múltiplas escalas conhecido como *downscaling*.

- Na Mecânica de Fluidos, o fenômeno de turbulência está associado ao movimento de flutuação das partículas de fluido em torno da velocidade média da corrente fluida. A influência da perturbação relacionada com a flutuação sobre o comportamento do fluido a nível macroscópico enovlve o estabelcimeno de um modelo com múltiplas escalas.

- Na área da biologia estrutural, o processo envolvendo múltiplas escalas é bastante freqüente. Por exemplo, o correto entendimento do campo de forças que atua na estrutura e arranjo de proteínas está fortemente relacinado com os dados relativos às seqüências de DNA sendo também governado pelas forças atômicas que atuam na microfísica. Além disso, o estudo de propagação de populações e epidemias em ecossistemas envolve fenômenos com múltiplas escalas advindos do acoplamento entre interações globais e locais entre as espécies.

- Na área da farmacologia, o transporte macroscópico de drogas nos organismos vivos é fortemente determinado pela micro-físico-química resultante das complexas interações que ocorrem entre fármacos e células.

Como vimos, a teoria de homogeneização é uma técninca que permite modelar fenômenos de transporte e difusão numa escala macroscópica através de informações numa escala microscópica. Como exemplo, o escoamento de um fluido, em rum rio ou em um lago, com obstáculos, onde estes obstáculos seriam constituídos por uma região com árvores. Numa escala "microscópica", de alugns metros, as equações que descrevem um tal escoamento, são as equações de *Navier-Stokes*, numa geometria muito complicada. No entanto, fenômenos de grande interesse ocorrem numa escala de quilômetros, escala "macroscópica". As equações desse escoamento nesta escala podem ser bem mais tratáveis quando escritas em termos de grandezas médias, onde os efeitos locais de flutuação são incorporados a certos parâmetros desses novos modelos. Busca-se assim, obter exatamente o correto tratamento, na escala macroscópica, de efeitos não lineares descritos pela equação de *Navier-Stokes* numa escala microscópica.

O tratamento matemático, em geral, do método de homogeneização se dá em duas abordagens.

A primeira é exemplificada em *J. L. Lions* (cf. [16]), onde estuda-se o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f_\epsilon, \text{ em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon \text{ satisfazendo a certas condições de fonteira,} \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω_ϵ denota um domínio aberto limitado "perfurado"do $\mathbb{R}^n$, obtido de um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ pela extração de um certo número de orifícios distribuídos periodicamente com período $\epsilon > 0$. Problemas deste tipo aparecem no estudo da torsão elástica de um tronco cilíndrico com r cavidades ou furos. Obviamente que, para $\epsilon > 0$ poderíamos resolver o problema (1) usando métodos variacionais, mas tal procedimento dependeria de ϵ, ou seja, o espaço no qual se aplicariam os métodos dependeria de ϵ. Por outro lado, a obtenção de uma solução aproximada de (1), para ϵ suficientemente pequeno, demandaria muito esforço do ponto de vista da análise numérica e computacional. É necessário, portanto, um método que nos proporcione uma solução aproximada do problema (1) e que não dependa de ϵ. Para isto usamos o método de homogeneização.

Para que obtenhamos a homogeneização do problema (1) realizamos um desenvolvimento de ordem qualquer em ϵ para u_ϵ:

$$u_\epsilon(x) = u_0(x,y) + \epsilon u_1(x,y) + \epsilon^2 u_2(x,y) + \ldots + \epsilon^j u_j(x,y) + \ldots$$

onde $y = \frac{x}{\epsilon}$, x representa uma variável macroscópica e y uma variável microscópica.

As funções $u_0, u_1, u_2, \ldots$ são construídas independentes de ϵ, de tal forma que se tenha algum controle de erro, por exemplo

$$\|u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \ldots + \epsilon^m u_m)\| \leqslant C\epsilon^m,$$

com uma norma adequada, ou ainda que o erro seja de ordem ϵ^m, num espaço de *Sobolev* sobre Ω_ϵ, para todo $m \in \mathbb{N}$. Desta forma, podemos afirmar que a solução aproximada do problema (1) será:

$$u_0 + \epsilon u_1 + \ldots + \epsilon^m u_m.$$

As funções u_j da expansão assintótica se dá impondo-se a condição de que u_ϵ seja solução do problema (1) com a vantagem destes problemas, agora, estarem definidos em todo domínio Ω. Esta seria a abordagem através da expansão assintótica. Fazendo-se uso desta abordagem, relaciona-se os efeitos microscócpicos e macroscópicos de fenômenos envolvendo escoamentos de fluidos.

A segunda abordagem será exemplificada nesta dissertação no decorrer dos próximos capítulos.

Nesta dissertação, estudamos o artigo de *D. Cioranescu*, *P. Dona to*, *F. Murat* e *E. Zuazua* de 1991, mais precisamente, a homogeneização da equação da onda

$$\begin{cases} u_\epsilon'' - \Delta u_\epsilon = f_\epsilon & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ u_\epsilon(x,0) = u_\epsilon^0(x) & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon'(x,0) = u_\epsilon^1(x) & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0,T),\ \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \tag{2}$$

com os seguintes dados $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$, $u_\epsilon^1 \in L^2(\Omega_\epsilon)$, $f_\epsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega_\epsilon))$, em um domínio perfurado Ω_ϵ, obtido pela extração de subconjuntos fechados de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado, distribuídos periodicamente com período 2ϵ, $\epsilon > 0$, na direção de cada eixo coordenado.

Nosso objetivo é obter a convergência, quando $\epsilon \to 0$, da seqüência das soluções u_ϵ, do problema (2), e identificar a equação satisfeita pelo limite u, ou seja, caracterizar o limite dessa seqüência como sendo a solução definida em todo domínio Ω e obter resultados de correção, isto é, resultados de aproximação para as soluções u_ϵ quando ϵ é pequeno.

Em toda a apresentação deste trabalho, os conjuntos Ω_ϵ serão supostos satisfazerem as condições do quadro funcional abstrato introduzido por *D. Cioranescu* e *F. Murat* para o estudo da homogeneização de problemas elípticos em domínios perfurados com pequenos buracos com condições de fronteira de *Dirichlet* homogêneas, (cf. [9]).

Este trabalho é somente concebido para dados de fronteira de *Dirichlet* homogêneos, o caso de dados de *Newman* homogêneos deve ser tratado de modo diferente, (cf. [6]).

Dividimos este trabalho em seis capítulos e um apêndice:

No capítulo 1, apresentamos resultados básicos para o estudo das E.D.P.'s, resultados de análise funcional e espaços de *Sobolev*. No capítulo 2, apresentamos o contexto geométrico do problema a ser estudado, como também, resultados sobre a homogeneização de problemas elípticos. No capítulo 3, mostramos a existência e a unicidade de solução para o problema (2), para cada $\epsilon > 0$, fixado, através do método de *Faedo - Galerkin*. No capítulo 4, fazemos as seguintes hipóteses sobre os dados do problema (2):

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u_0, & \text{fracamente em} \quad H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u}_\epsilon^1 \rightharpoonup u_1, & \text{fracamente em} \quad L^2(\Omega), \\ \widetilde{f}_\epsilon \rightharpoonup f, & \text{fracamente em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}$$

onde $\widetilde{u}_\epsilon^0$, $\widetilde{u}_\epsilon^1$ e $\widetilde{f}_\epsilon$ representam, respectivamente, as extensões por zero fora de Ω_ϵ das funções u_ϵ^0, u_ϵ^1 e f_ϵ. Mostramos, com essas hipóteses, que $\widetilde{u}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$, fraco-estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, onde u , definida em todo Ω, é a solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \ T > 0 \\ u(x,0) = u_0 & \text{em} \quad \Omega \\ u'(x,0) = u_1 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,T), \ \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde μ é uma medida de *Radon* finita e não negativa.

Esse é o principal resultado deste trabalho, que é demonstrado no teorema 4.1. No capítulo 5, apresentamos o resultado de correção para a equação da onda. Para isso, fazemos novas hipóteses sobre os dados, a saber,

$$\begin{cases} u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon); \\ \exists g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega), \ \ \text{tal que} \\ \begin{cases} -\Delta u_\epsilon^0 = g_\epsilon, \ \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ g_\epsilon \to g, \ \text{fortemente em } H^{-1}(\Omega), \\ \widetilde{u'_\epsilon} \to u^1, \ \text{fortemente em } L^2(\Omega), \\ \widetilde{f_\epsilon} \to f, \ \text{fortemente em } L^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

o que permite-nos mostrar que $\widetilde{u_\epsilon}$ pode ser escrita como

$$\widetilde{u_\epsilon} = uw_\epsilon + r_\epsilon,$$

onde u é a solução de (3), w_ϵ a função dada pelo quadro abstrato de hipóteses e o resíduo r_ϵ satisfaz

$$r_\epsilon \to 0, \ \text{fortemente em } C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

O termo uw_ϵ, chamado de corretor, é então uma boa aproximação da solução u_ϵ. Temos, também, que

$$\widetilde{u'_\epsilon} \to u', \ \text{fortemente em } C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

No capítulo 6, consideramos o caso dos buracos menores do que o tamanho crítico, apresentado no capítulo 2, e finalmente, no Apêndice, demonstramos a densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu)$ quando μ é uma medida de *Radon* finita e não negativa de $H^{-1}(\Omega)$.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo enunciaremos algumas definições e alguns resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos posteriores, omitiremos as demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos. Também, neste capítulo, fixaremos as notações a serem usadas no presente trabalho.

1.1 Cálculo Vetorial

Função Escalar e Campo Vetorial

Uma função u cujo domínio é um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$, isto é, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é dita ser uma *função escalar*. Por outro lado a aplicação $U : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada x no seu domínio Ω um vetor $U(x)$, é denominada um *campo vetorial*.

Gradiente, Divergente e Laplaciano

Se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de u, denotado por ∇u, é definido como o vetor do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Se $U : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o *divergente* de U, denotado por div$U$, por

$$\text{div}U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

O *Laplaciano* é definido como

$$\text{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2,$$

e é denotado por Δu.

Identidades Úteis

Se u e v são funções escalares de classe C^1, c uma constante real, e U, V campos vetorias também de classe C^1, então as seguintes identidades podem ser demonstradas:

1. $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$
2. $\nabla(cu) = c\nabla u$
3. $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
4. $\text{div}(U + V) = \text{div}U + \text{div}V$
5. $\text{div}(uU) = u\text{div}U + U \cdot \nabla u$.

1.2 Análise Funcional

Funcionais e Operadores Lineares - Espaço Dual

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um *funcional linear* sobre X é uma aplicação $f : X \to \mathbb{K}$ linear.

Denotamos por X' o *espaço dual* de X dado por

$$X' = \{f : X \to \mathbb{K}, \text{ linear e contínua}\}.$$

O espaço X' é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X;$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in X, \ \alpha \in \mathbb{K}.$$

A norma em X' é dada por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X}\{|f(x)| \ ; \ \|x\|_X \leq 1\}.$$

Temos que $(X', \|\cdot\|_{X'})$ é um espaço de *Banach.*

Quando $f \in X'$ e $x \in X$, geralmente denotaremos $\langle f, x\rangle$ no lugar de $f(x)$. Dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto escalar na dualidade X', X.

Também podemos tomar o dual de X', denotado por X'', que também é chamado de *espaço bidual* de X.

A norma em X'' é dada por

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in X'}\{|\langle \xi, f\rangle| \ ; \ \|f\|_{X'} \leq 1\}.$$

Sejam X e Y dois espaços de *Banach.* Um *operador linear* é uma aplicação $T : X \to Y$ linear. Designaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y, munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X}\{\|T(x)\| \ ; \ \|x\|_X \leq 1\}.$$

Teorema 1.1 *Se uma seqüência eqüicontínua de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge sim-*

plesmente num subconjunto denso $D \subset X$, então f_n converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset X$.

Demonstração: Ver [12], p. 327. $\square$

Teorema 1.2 (Arzelá Áscoli) *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções $f_n : K \to \mathbb{R}$ possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

Demonstração: Ver [12], p. 329. $\square$

Teorema 1.3 (Banach-Steinhauss) *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $\{T_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de X em Y. Suponhamos que*

$$\sup_{i\in\mathbb{I}} \|T_i(x)\| < \infty, \qquad \forall\ x \in X,$$

então,

$$\sup_{i\in\mathbb{I}} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \infty.$$

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que

$$\|T_i(x)\| \leq C\|x\|, \qquad \forall\ x \in X, \quad \forall\ i \in \mathbb{I}.$$

Demonstração: Ver [2], p.16. $\square$

Corolário 1.1 *Seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, X, Y Banach. Suponhamos que para cada $x \in X$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) =: T(x)$. Então temos*

(i) $\sup\limits_{n} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$

(ii) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Demonstração: Ver [2], p. 17. □

Topologias Fraca e Fraca-Estrela

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset \rho(X)$. Suponhamos que

(i) $\varnothing, X \in \tau$

(ii) $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha \in \tau,\;$ se $\;A_\alpha \in \tau,\;\; \forall \alpha \in \mathbb{I}$

(iii) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau,\;$ se $\;A_i \in \tau, i = 1, 2, \ldots, n;$

onde $\rho(X)$ denota o conjunto das partes de X. Nesse caso, dizemos que τ forma uma topologia sobre X e o par (X, τ) é chamado de *espaço topológico.*

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca sobre X, denotada por $\sigma(X, X')$, é a topologia menos fina sobre X, que torna contínua todas as aplicações $f \in X'$.*

Notação: Dada uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X, denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$, a convergência de x_n para x, na topologia fraca $\sigma(X, X')$.

Proposição 1.1 *Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X. Então,*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \;\; \forall\, f \in X'$;

(ii) se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$;

(iii) se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \|x_n\|_X$;

(iv) se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$ e se $f_n \to f$ fortemente em X' (isto é, $\|f_n - f\|_{X'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [2], p.37. □

Seja X espaço de *Banach* e consideremos $x \in X$ fixo. Definamos a aplicação $J_x : X' \to \mathbb{K}$, por $\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$.

As aplicações J_x são lineares e contínuas. Logo, $J_x \in X''$, $\forall x \in X$.

Definamos, agora, a aplicação canônica $J : X \to X''$ dada por $J(x) = J_x$.

Dizemos que X é *reflexivo* se $J(X) = X''$. Em geral, temos $J(X) \subset X''$.

Proposição 1.2 *Seja X espaço de Banach reflexivo, consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X, limitada. Então existe uma subseqüência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo na topologia fraca $\sigma(X, X')$.*

Demonstração: Ver [2], p.50. $\square$

Definição 1.2 *A topologia fraca-estrela, denotada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X', que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Notação: Dada uma seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X', denotaremos por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, a convergência de f_n para f na topologia fraca-estrela $\sigma(X', X)$.

Proposição 1.3 *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X'. Então,*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall\, x \in X$;

(ii) *se* $f_n \to f$, *fortemente, então* $f_n \rightharpoonup f$ *fracamente em* $\sigma(X', X'')$,
se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$;

(iii) *se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$;

(iv) *se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *e se* $x_n \to x$ *fortemente em* X *(isto é,* $\|x_n - x\|_X \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [2], p.41. $\square$

Seja X espaço métrico. Dizemos que X é *separável* se ele possui um subconjunto enumerável e denso.

Proposição 1.4 *Seja X espaço de Banach separável e consideremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X', então existe uma subseqüência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fraco-estrela em X'.*

Demonstração: Ver [2], p.50. $\square$

Teorema 1.4 (Alaoglu-Bourbaki) *Seja X espaço de Banach. Então o conjunto $B_{X'} = \{f \in X' \ / \ \|f\| \leq 1\}$, é compacto na topologia fraca-estrela $\sigma(X', X)$.*

Demonstração: Ver [2], p.43. $\square$

Espaços L^p

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como sendo o conjunto das funções u definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$, mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{K} \ ; \ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Se $p = \infty$, definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{K} \ ; \ u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq C \text{ q. s. em } \Omega\}.$$

Os espaços L^p, para $1 \leq p < \infty$ e L^∞ são espaços de *Banach* com as seguintes normas, respectivamente

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Se $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < \infty$ e que $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < \infty$.

O teorema abaixo identifica o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, 1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.5 (Representação de Riesz) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega), \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [2], p.61. □

Se $p = \infty$, temos

Teorema 1.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^1(\Omega), \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [2], p.63. □

A seguir, enunciaremos alguns resultados úteis para os espaços L^p.

Observação 1.1 *Quando não especificarmos, estaremos considerando Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$.*

Desigualdade de Hölder

Suponhamos que $p_i \geq 1, \ i = 1, \dots, m$ são tais que

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, \dots, m$ então temos que $\prod_{i=1}^m f_i \in L^1(\Omega)$ e ainda

$$\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^m f_i(x) \right| dx \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{K}$ *duas funções em* $L^2(\Omega)$. *Então*

$$|(u,v)_{L^2(\Omega)}| = \left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|\|v\|.$$

Teorema 1.7 *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então existe uma subseqüência* $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω,

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)\ \forall k$ *e q.s. em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [2], p.58. □

Teorema 1.8 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$. *Suponhamos que*

(i) $\{f_n\} \to f(x)$, *q. s. em* Ω;

(ii) existe $h \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* n, $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q. s. em* Ω. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Demonstração: Ver [2], p.54. □

Teorema 1.9 (Densidade) *O espaço* $C_0(\Omega)$, *espaço das funções contínuas em* Ω *com suporte compacto em* Ω, *é denso em* $L^1(\Omega)$, *isto é, para toda* $u \in L^1(\Omega)$ *e para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $v \in C_0(\Omega)$ *tal que* $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$.

Teorema 1.10 (Fubini) *Suponhamos que* $f \in L^1((0,T)\times\Omega)$,

então para quase todo $t \in (0,T)$,

$$f(t,x) \in L^1_x(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega f(t,x)dx \in L^1_t((0,T)).$$

Igualmente, para quase todo $x \in \Omega$,

$$f(t,x) \in L^1_t((0,T)) \quad e \quad \int_0^T f(t,x)dt \in L^1_x(\Omega).$$

Portanto temos

$$\int_0^T \int_\Omega f(t,x)dxdt = \int_\Omega \int_0^T f(t,x)dtdx = \int_{(0,T)\times\Omega} f(t,x)dtdx.$$

Os Espaços $C([0,T];Y)$ e $L^p(0,T;Y)$

Sejam Y um espaços de *Banach*, $T > 0$ um número real e $1 < p < \infty$.

Definimos o espaço $C([0,T];Y)$ como sendo o conjunto das funções $u : [0,T] \to Y$, tais que $t \mapsto \|u(t)\|_Y$ é contínua em $[0,T]$.

A norma em $C([0,T];Y)$ é dada por

$$\|u(t)\|_{C([0,T];Y)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_Y.$$

Definimos o espaço $L^p(0,T;Y)$ como sendo o conjunto das funções $u : (0,T) \to Y$ tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_Y \in L^p(0,T)$.

A norma em $L^p(0,T;Y)$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;Y)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $L^p(0,T;Y)$, munido da norma acima, constitui um espaço de *Banach*.

Observemos que se $1 < p < \infty$ e Y é reflexivo, então $L^p(0,T;Y)$ também é reflexivo. E, se Y é separável, então $L^p(0,T;Y)$ é separável, para $1 \le p < \infty$.

O espaço $L^q(0,T;Y')$, sendo Y' o dual topológico de Y e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p < \infty$, é dito ser o dual topológico de $L^p(0,T;Y)$.

Se $p = 2$ e Y é um espaço de *Hilbert*, então temos que $L^2(0,T;Y)$ é um espaço de

Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;Y)} = \int_0^T (u(t),v(t))_Y dt$$

e norma

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;Y)} = \int_0^T \|u(t)\|^2_Y dt.$$

Quando $p=\infty$, definimos o espaço $L^\infty(0,T;Y)$, como sendo o conjunto das funções $u:(0,T)\to Y$ mensuráveis e essencialmente limitadas em Y, ou seja,

$$\sup \mathrm{ess} \|u(t)\|_Y < \infty.$$

A norma em $L^\infty(0,T;Y)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;Y)} = \sup \mathrm{ess} \|u(t)\|_Y.$$

1.3 Distribuições e Espaços de Sobolev

Distribuições

Seja $f:\Omega\to\mathbb{K}$. Definimos *suporte* de f e escrevemos *supp* f, como sendo o fecho do conjunto $\{x\in\Omega; f(x)\neq 0\}$ em Ω.

Designaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $f:\Omega\to\mathbb{K}$, de classe C^∞ em Ω e que possuam suporte compacto contido em Ω.

Dados $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ e $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

Se $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, definimos $D^0 u = u$.

Em $C_0^\infty(\Omega)$, introduzamos a seguinte noção de convergência:

Definição 1.3 *Dizemos que uma seqüência* $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$*, converge para zero, e denotamos* $\varphi_\nu \to 0$*, quando existe um subconjunto compacto* $K \subset \Omega$*, tal que*

(i) $supp\varphi_\nu \subset K, \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ *uniformemente em* Ω*,* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, com essa noção de convergência, denomina-se *espaço das funções testes* e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$. Denominamos *distribuição* sobre (Ω), a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de soma de funções e produto por escalar; e é representado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Em $\mathcal{D}'(\Omega)$, temos a seguinte noção de convergência: *dizemos que uma seqüência* $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$*, converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, se*

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \text{ em } \ \mathbb{K}, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definimos a derivada de ordem α de T, de uma distribuição T sobre Ω, como sendo o funcional $D^\alpha T$, em $\mathcal{D}(\Omega)$, dado por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que $D^\alpha T$ também é uma distribuição. Assim, temos que toda distribuição sobre Ω possui derivadas de todas as ordens, as quais constituem, também, distribuições sobre Ω.

Espaços de Sobolev

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \ \forall |\alpha| \leq m$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições sobre Ω, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } \ |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de *espaço de Sobolev* de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.

Quando $p = 2$, escrevemos $H^m(\Omega)$ no lugar de $W^{m,2}(\Omega)$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de *Banach*, com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* com o produto interno

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

Definamos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Sejam $1 \leq p < \infty$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Conseqüentemente, representamos o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

Quando $m = 1$, temos o espaço de *Hilbert* $H^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v),$$

e da norma induzida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (|u|^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{[L^2]^n},$$

onde C é uma constante que depende somente de Ω

Como conseqüência desta desigualdade, considera-se a norma de $H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

sendo $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ equivalentes.

Demonstração: Ver [2], p.174. $\square$

Teorema da Divergência e Fórmula de Green

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então valem as seguintes fórmulas

(i)

$$\int_\Omega div(F(x))dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \eta(x)dx, \qquad F \in [H^1(\Omega)]^n$$

(ii)

$$\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega).$$

Desigualdade de Gronwall

Suponhamos que u, v e w são funções positivas satisfazendo

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Então temos que

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)v(s)e^{\int_s^t u(r)dr}ds.$$

Demonstração: Ver [24], p.13. $\square$

Corolário 1.2 *Suponha que sejam válidas as hipóteses da Desigualdade de Gronwall, e consideremos v uma função crescente. Então temos*

$$w(t) \leq v(t)e^{\int_0^t u(s)ds}.$$

Em particular, se $v(t) = C$, temos

$$w(t) \leq Ce^{\int_0^t u(s)ds}.$$

Demonstração: Ver [24], p. 14. $\square$

1.4 Imersões em Espaços de Sobolev

Sejam V e H espaços de *Hilbert*, tais que $V \subseteq H$ e seja $\iota : V \to H$, a injeção canônica de V em H que a cada $v \in V$ associa $\iota(v) = v$ como elemento de H. Dizemos que o operador linear ι é o operador de *imersão* de V em H.

Dizemos que a imersão $\iota : V \to H$ é contínua e indicaremos por $\hookrightarrow$, quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V$.

Um exemplo simples é o caso $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, ou ainda $V = H^m(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

Dizemos que a imersão $\iota : V \to H$ é compacta e indicaremos por $\overset{c}{\hookrightarrow}$, quando a imagem dos limitados de V,por ι, são conjuntos relativamente compactos de H, isto é conjuntos cujo fecho é compacto em H, ou ainda, quando as seqüências limitadas em V são levadas por ι em seqüências que possuem subseqüências convergentes em H.

Teorema 1.11 *Seja* Ω *um aberto de classe* C^1 *com fronteira* Γ *limitada e seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,*

$$\text{se } 1 \leq p < n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$\text{se } p = n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty),$$

$$\text{se } p > n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov) *Suponhamos* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *aberto, limitado e de classe* C^1. *Então,*

$$\text{se } p < n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*) \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$\text{se } p = n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, +\infty),$$

$$\text{se } p > n, \text{ tem-se que } W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Ver [2], p.169. □

Teorema 1.13 (Sobolev) *Se* $1 \leq p \leq n$, *tem-se* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$.

Demonstração: Ver [24], p. 120.

Capítulo 2

Contexto Geométrico

Neste capítulo apresentaremos a estrutura geométrica do problema a ser estudado, a qual nos permitirá introduzir o quadro funcional abstrato de hipóteses construído por *D. Cioranescu* e *F. Murat*. Apresentaremos, alguns resultados de homogeneização de problemas elípticos, supondo satisfeitas as hipóteses de tal quadro e também resultados de compacidade nos espacos $L^p(0, T; X)$ sendo X um espaço de *Banach*. Também introduziremos o operador "quase-extensão", P_ϵ, que será de grande utilidade nos próximos resultados.

2.1 Geometria do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, domínio limitado. Consideremos Ω_ϵ o domínio obtido pela extração do conjunto fechado $S_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} S_i^\epsilon$, de Ω, ou seja,

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} S_i^\epsilon,$$

onde S_i^ϵ são "pequenos"subconjuntos fechados (buracos) de Ω, ϵ é um parâmetro que tende a zero enquanto $N(\epsilon)$, o número de buracos, é um inteiro que tende ao infinito.

Essa estrutura possibilita-nos obter o quadro funcional abstrato de hipóteses, construído por *D. Cioranescu* e *F. Murat*, no qual supõe-se a existência de uma família adequada de funções testes.

Admitiremos, então, que:

$$\begin{cases} \text{Existe uma seqüência } (w_\epsilon,\ \mu_\epsilon,\ \gamma_\epsilon) \text{ de funções testes, tais que:} \\ (i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0; \\ (ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon; \\ (iii) \quad w_\epsilon \rightharpoonup 1,\ \text{fracamente em } H^1(\Omega),\ \text{e q.s. em } \Omega; \\ (iv) \quad -\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon \text{ onde } \mu_\epsilon,\ \gamma_\epsilon \in H^{-1}(\Omega) \text{ com} \\ \qquad \mu_\epsilon \to \mu,\ \text{fortemente em } H^{-1}(\Omega), \\ \qquad \langle \gamma_\epsilon,\ v_\epsilon \rangle_\Omega = 0 \text{ para todo } v_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \qquad \text{tal que } v_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Em (2.1) estamos representando por $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_\Omega$, o par dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Daqui em diante, continuaremos adotando tal notação.

Observação 2.1 *Em algumas demonstrações que se seguem, usaremos a seguinte hipótese no lugar da hipótese* (iv) *em (2.1):*

$$(v) \begin{cases} \text{Consideremos a seqüência } v_\epsilon \text{ e a função } v \text{ tais que:} \\ \qquad v_\epsilon \rightharpoonup v,\ \text{fracamente, em } H^1(\Omega), \\ \qquad v_\epsilon = 0,\ \text{sobre } S_i^\epsilon,\ 1 \leq i \leq N(\epsilon). \\ \quad \text{Então, para toda função } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \text{temos:} \\ \qquad \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi v_\epsilon \rangle_\Omega \longrightarrow \langle \mu, \varphi v \rangle_\Omega \end{cases}$$

É de fácil verificação a implicação de (iv) em (v).

Exemplo 2.1 *Um exemplo, onde o quadro de hipóteses (2.1) é satisfeito, se dá ao considerarmos o caso em que* Ω *é periodicamente perfurado, com um período* 2ϵ *na direção de cada eixo -coordenado, por buracos* S_i^ϵ *dados por:*

$$S_i^\epsilon = a_\epsilon S + 2\epsilon \sum_{i=1}^{n} i_k e_k, \tag{2.2}$$

sendo $(i_1, i_2, ..., i_n)$ *um multi-índice de* $\mathbb{Z}^n$, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$ *e* S *um conjunto fechado contido na bola* B_1 *, de raio 1 e centro na origem, (no caso* $n = 2$*, admite-se que* S *contém uma bola centrada na origem, (cf. [14], obs 2.2), e* $a_\epsilon < \epsilon$ *satisfaz:*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \, log \, a_\epsilon \longrightarrow -C_0, & se \, n = 2 \\ a_\epsilon \, \epsilon^{-n/n-2} \longrightarrow C_0, & se \, n \geq 3 \end{cases} \tag{2.3}$$

para um dado $C_0 > 0$.

O caso modelo é dado por

$$\begin{cases} a_\epsilon = \delta_\epsilon \exp(\frac{-C_0}{\epsilon^2}), \text{ se } n = 2, \text{ com } \epsilon^2 log\delta_\epsilon \to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0, \text{ e} \\ a_\epsilon = C_o \epsilon^{\frac{n}{n-2}}, \text{ se } n \geq 3 \end{cases} \tag{2.4}$$

e S sendo escolhido como a bola unitária do $\mathbb{R}^n$.

Se a_ϵ for dado por (2.3) ou (2.4), podemos construir "explicitamente" as funções w_ϵ: sobre o cubo P_i^ϵ de tamanho 2ϵ com centro $x_i^\epsilon = 2\epsilon \sum_{i=1}^{n} i_k e_k$, consideremos a função $w_\epsilon \in H^1(P_i^\epsilon)$ definida por

$$\begin{cases} \Delta w_\epsilon = 0 \text{ em } B_i^\epsilon \setminus S_i^\epsilon \\ w_\epsilon = 0 \text{ em } S_i^\epsilon \\ w_\epsilon = 1 \text{ em } P_i^\epsilon \setminus B_i^\epsilon. \end{cases} \tag{2.5}$$

A função w_ϵ definida em (2.5), em cada P_i^ϵ, satisfaz (2.1) com

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{C_0} \frac{\pi}{2} \text{ se } n = 2 \\ \mu = \frac{C_0^{n-2}}{2^n} . Cap(S, \mathbb{R}^n), \text{ se } n \geq 3 \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $Cap(S, R^n) = \inf\limits_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi = 1 \; em \; S}} \int_{R^n} |\nabla \varphi|^2 dx$ é a capacidade em $\mathbb{R}^n$ do buraco fechado S.

Observação 2.2 *No exemplo (2.1), o tamanho* a_ϵ *definido em (2.3) é crítico no seguinte sentido: se tomarmos* r_ϵ *como sendo o tamanho dos buracos, com* $r_\epsilon << a_\epsilon$, *isto é, quando*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \, log r_\epsilon \longrightarrow -\infty, & se\, n = 2 \\ \epsilon^{n/n-2}/r_\epsilon \longrightarrow +\infty, & se\, n \geq 3, \end{cases} \tag{2.7}$$

a hipótese (2.1) é satisfeita, mas em (iii)*,* $w_\epsilon \to 1$*, fortemente em* $H^1(\Omega)$ *e, em* (iv)*,* μ_ϵ *e* γ_ϵ *convergem fortemente para zero; neste caso* $\mu = 0$*. Por outro lado, se tomarmos* $a_\epsilon << r_\epsilon$*, o que corresponde a substituir* ∞ *por 0 em (2.7), podemos demonstrar que não existe seqüência de funções* w_ϵ *satisfazendo* (i)*,* (ii)*, e* (iii) *do quadro de hipóteses (2.1).*

O tamanho a_ϵ *dado em (2.3) é portanto, o único para o qual (2.1) é satisfeito com convergência fraca, e não forte, de* w_ϵ *para 1 em* (iii)*.*

2.2 Alguns Resultados Elípticos

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre a homogeneização de problemas elípticos, supondo-se que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito.

Lema 2.1 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então a distribuição* μ *que aparece em* (iv) *é dada por*

$$\langle \mu, \varphi \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo, μ *é uma medida de Radon positiva e pertence a* $H^{-1}(\Omega)$*. Também,* μ *é finita.*

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então pelas hipóteses (*iii*) e (*iv*) em (2.1), segue que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega - \langle \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega \to \langle \mu, \varphi \rangle_\Omega$$

Por outro lado, pela fórmula de *Green*, temos

$$
\begin{aligned}
\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega &= \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\varphi w_\epsilon) dx \\
&= \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \ (\varphi \nabla w_\epsilon + w_\epsilon \nabla \varphi) dx \\
&= \int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 \varphi dx + \int_\Omega w_\epsilon \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx.
\end{aligned}
$$

Notemos que o segundo termo desta igualdade tende a zero, pois usando a hipótese (iii) de (2.1) e o teorema de *Rellich-Kondrachov*, temos que, $w_\epsilon \to 1$, fortemente em $L^2(\Omega)$, e $\nabla w_\epsilon \rightharpoonup 0$, fracamente em $[L^2(\Omega)]^n$.

Assim, obtemos

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \langle -\Delta w\epsilon, \varphi w\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu, \varphi \rangle_\Omega, \ e
$$

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \langle -\Delta w\epsilon, \varphi w\epsilon \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx
$$

Da unicidade do limite, segue que

$$
\langle \mu, \varphi \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).
$$

□

Observação 2.3 *Um resultado de J. Deny (1950) nos diz que, se Ω é um conjunto aberto do R^n e μ uma medida de Radon positiva tal que $\mu \in H^{-1}(\Omega)$, então, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, v é mensurável com relação à medida $d\mu$, v pertence a $L^1(\Omega; d\mu)$, e $\langle \mu, v \rangle_\Omega = \int_\Omega v d\mu$.*

Podemos definir, então, sem ambigüidade, o espaço

$$
V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu) \tag{2.8}
$$

que é um espaço de *Hilbert* munido do produto interno

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \ + \ \int_\Omega uv d\mu. \tag{2.9}$$

Definição 2.1 *Para qualquer $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ definimos $\widetilde{v}$ como a extensão de v por zero fora de Ω_ϵ, isto é,*

$$\widetilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & se \quad x \in \Omega_\epsilon \\ 0 & se \quad x \in S_\epsilon. \end{cases}$$

Teorema 2.1 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos a seqüência de problemas de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon = g_\epsilon, \ em \, \mathcal{D}'(\Omega_\epsilon) \\ v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega)$ é tal que

$$g_\epsilon \longrightarrow g, \ fortemente \ em \ H^{-1}(\Omega).$$

Então a seqüência $\widetilde{v}_\epsilon$, satisfaz

$$\widetilde{v}_\epsilon \rightharpoonup v, \ fracamente \ em \ H_0^1(\Omega),$$

onde $v = v(x)$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + \mu v = g, \ em \, \mathcal{D}(\Omega) \\ v \in V. \end{cases} \tag{2.11}$$

Demonstração: Multiplicando a equação em (2.10) por uma função teste $u \in H_0^1(\Omega_e)$, obtemos, por meio da integração por partes e da fórmula de *Green*, a formulação variacional do problema (2.10) dada por

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\epsilon} \nabla v_\epsilon \cdot \nabla u = \langle g_\epsilon, u \rangle_{\Omega_\epsilon} \\ v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \end{cases} \tag{2.12}$$

Pelas desigualdades de *Cauchy-Schwarz* e de *Poincaré-Friedrichs*, temos

$$\int_\Omega |\nabla \widetilde{v}_\epsilon|^2 \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\widetilde{v}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha} \|\nabla \widetilde{v}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $\alpha > 0$ é a constante dada pela desigualdade de *Poincaré-Friedrichs*

Assim, temos

$$\|\widetilde{v}_\epsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha} \|\widetilde{v}_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)},$$

o que nos dá,

$$\|\widetilde{v}_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha}.$$

Isto nos diz, que $\widetilde{v}_\epsilon$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, que é um espaço de *Hilbert* reflexivo. Assim, existe uma subseqüência $\widetilde{v}_\epsilon$ tal que

$$\widetilde{v}_\epsilon \rightharpoonup v, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega).$$

E, como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, temos que existe subseqüência $\widetilde{v}_\epsilon$ tal que

$$\widetilde{v}_\epsilon \rightarrow v, \text{ fortemente em } L^2(\Omega).$$

Agora, usando as hipóteses *(i)* e *(ii)* de (2.1), temos que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a função φw_ϵ pertence a $H_0^1(\Omega_\epsilon)$. Com isso, podemos usar a formulação (2.12) para tal função.

Assim,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla v_\epsilon \cdot \nabla(w_\epsilon \varphi) = \langle g_\epsilon, w_\epsilon \varphi \rangle_{\Omega_\epsilon}$$

o que nos dá

$$\int_\Omega \varphi \nabla \widetilde{v}_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon + \int_\Omega w_\epsilon \nabla \widetilde{v}_\epsilon \cdot \nabla \varphi = \langle g_\epsilon, w_\epsilon \varphi \rangle_\Omega. \tag{2.13}$$

Analisemos as convergências em (2.13):

Pela hipótese *(iii)* em (2.1) e pelo teorema de *Rellich-Kondrachov*, concluímos que

$$w_\epsilon \to 1, \text{ fortemente em } L^2(\Omega). \tag{2.14}$$

Analisemos, agora, a primeira parcela do primeiro membro de (2.13). Pela fórmula de *Green*, temos:

$$\int_\Omega \varphi \nabla \widetilde{v}_\epsilon \nabla w_\epsilon = \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi \widetilde{v}_\epsilon \rangle_\Omega - \int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \nabla \varphi \nabla w_\epsilon.$$

Pela hipótese *(v)* de (2.1) temos que

$$\int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \nabla \varphi \nabla w_\epsilon \to \int_\Omega \varphi \nabla \varphi \nabla 1 = 0$$

Dos resultados obtidos, passando o limite quando $\epsilon \to 0$ em (2.13) temos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi + \langle \mu v, \varphi \rangle_\Omega = \langle g, \varphi \rangle_\Omega.$$

Logo, a função v é solução de (2.11) e é única, pois μ é positiva. E ainda, a unicidade do limite, implica que a seqüência toda, $\widetilde{v}_\epsilon$, e não apenas uma subseqüência, converge para v.

$\square$

Teorema 2.2 (Semi-continuidade inferior fraca da energia) *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então, para toda seqüência v_ϵ e para toda função v tais que $v_\epsilon \rightharpoonup v$, fracamente, em $H_0^1(\Omega)$ e $v_\epsilon = 0$ em S_ϵ, temos:*

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 + \langle \mu, v^2 \rangle$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 \quad &= \int_\Omega |\nabla v_\epsilon - \varphi\nabla w_\epsilon - w_\epsilon\nabla\varphi|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 - \varphi\nabla v_\epsilon\nabla w_\epsilon - w_\epsilon\nabla v_\epsilon\nabla\varphi - \varphi\nabla w_\epsilon\nabla v_\epsilon + (\varphi\nabla w_\epsilon)^2 \\
&+\varphi w_\epsilon\nabla w_\epsilon\nabla\varphi - w_\epsilon\nabla\varphi\nabla v_\epsilon + \varphi w_\epsilon\nabla\varphi\nabla w_\epsilon + (w_\epsilon\nabla\varphi)^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 - 2\varphi\nabla v_\epsilon\nabla w_\epsilon - 2w_\epsilon\nabla v_\epsilon\nabla\varphi + 2\varphi w_\epsilon\nabla w_\epsilon\nabla\varphi \\
&+|\varphi\nabla w_\epsilon|^2 + |w_\epsilon\nabla\varphi|^2.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Agora, notemos que

$$
\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi v_\epsilon\rangle = \int_\Omega \varphi\nabla v_\epsilon\nabla w_\epsilon + \int_\Omega v_\epsilon\nabla\varphi\nabla w_\epsilon. \tag{2.16}
$$

Substituindo (2.16) em (2.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |(\nabla v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 \quad &= \int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 + \int_\Omega |w_\epsilon|^2|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega |\varphi|^2|\nabla w_\epsilon|^2 \\
&-2\int_\Omega w_\epsilon\nabla v_\epsilon\nabla\varphi + \int_\Omega \varphi w_\epsilon\nabla w_\epsilon\nabla\varphi \\
&-2\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi v_\epsilon\rangle + 2\int_\Omega v_\epsilon\nabla\varphi\nabla w_\epsilon
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Consideremos, agora, uma subseqüência $v_{\epsilon'}$ de v_ϵ, tal que $\int_\Omega |\nabla v_{\epsilon'}|^2$ seja convergente.

Assim, usando a hipótese de que $v_\epsilon \rightharpoonup v$, fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e $v_\epsilon = 0$ em S_ϵ, o teorema de *Rellich-Kondrachov*, as hipóteses *(iii)* e *(v)* de (2.1) e o Lema (2.1), conseguimos passar o limite no segundo membro de (2.17), obtendo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon'\to 0} \int_\Omega |\nabla(v_{\epsilon'} - w_{\epsilon'}\varphi)|^2 \quad &= \lim_{\epsilon'\to 0} \int_\Omega |\nabla v_{\epsilon'}|^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \langle \mu, \varphi^2\rangle \\
&-2\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi - 2\langle \mu, \varphi v\rangle.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Escolhendo $v_{\epsilon'}$ de tal forma que:

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 = \liminf_{\epsilon\to 0}\|v_\epsilon\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \lim_{\epsilon'\to 0}\|v'_\epsilon\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \lim_{\epsilon'\to 0}\int_\Omega |\nabla v_{\epsilon'}|^2,$$

temos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 &= \liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \langle\mu,\varphi^2\rangle \\ &\quad -2\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi - 2\langle\mu,\varphi v\rangle.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Observemos, agora, que o primeiro membro de (2.19) é positivo, logo, podemos concluir que

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 \geq 2\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi - \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + 2\langle\mu,\varphi v\rangle - \langle\mu,\varphi^2\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega). \tag{2.20}$$

Finalmente, tomando $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, em (2.20), temos

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 + \langle\mu, v^2\rangle.$$

□

Teorema 2.3 *Suponhamos que as hipóteses do teorema (2.2) sejam satisfeitas e que a seqüência v_ϵ satisfaça:*

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 \to \int_\Omega |\nabla v|^2 + \langle\mu, v^2\rangle. \tag{2.21}$$

Então

$$(v_\epsilon - w_\epsilon v) \to 0,\ \textit{fortemente em}\ W^{1,1}_0(\Omega). \tag{2.22}$$

Demonstração: Usando a hipótese (2.21) e a igualdade em (2.18) do teorema (2.2), temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 &= \int_\Omega |\nabla v|^2 + \langle \mu, v^2\rangle + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \langle\mu,\varphi^2\rangle \\ &-2\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi - 2\langle\mu,\varphi v\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla(v-\varphi)|^2 + \langle\mu,(v-\varphi)^2\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Assim, se $v\in\mathcal{D}(\Omega)$, tomamos $\varphi = v$ em (2.23), o que nos dá $(v_\epsilon - w_\epsilon v)\to 0$, fortemente, em $H_0^1(\Omega)$. Mas, se v não pertence a $\mathcal{D}(\Omega)$, então como $v\in H_0^1(\Omega)$, $\forall\eta>0$ e $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ fixo, existe $\varphi(\eta)$ tal que $\|v-\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}<\eta$.

Com isso, de (2.23), temos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 &\leqslant \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}\|v-\varphi\|^2_{W_0^{1,1}} \\ &= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}\int_\Omega |\nabla(v-\varphi)^2| \\ &= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}\int_\Omega 2(v-\varphi)\nabla(v-\varphi).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Em (2.24), usando as desigualdades de *Cauchy-Schwartz* e de *Poincaré-Friedrichs*, obtemos:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon\varphi)|^2 &\leqslant \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}2[\int_\Omega |\nabla(v-\varphi)|^2]^{\frac{1}{2}}[\int_\Omega |(v-\varphi)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}2\|\nabla(v-\varphi)\|_{L^2(\Omega)}\|v-\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}2C\|\nabla(v-\varphi)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &< \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}2\|v-\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &< \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}}2\eta^2 \\ &= \eta^2(1+2\|\mu\|_{W^{-1,\infty}}).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim, $\exists\ \epsilon_0>0$, tal que $\forall\epsilon<\epsilon_0$, temos

$$\|v_\epsilon - w_\epsilon\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le C_1^2\eta^2,$$

mas, sendo

$$\|v_\epsilon - w_\epsilon v\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq \|v_\epsilon - w_\epsilon \varphi\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} + \|w_\epsilon(v-\varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|v_\epsilon - w_\epsilon v\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} & \leq C_1\eta + \int_\Omega |\nabla[w_\epsilon(v-\varphi)]| \\
& = C_1\eta + \int_\Omega |\nabla w_\epsilon(v-\varphi) + w_\epsilon \nabla(v-\varphi)| \\
& \leq C_1\eta + \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\|v-\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v-\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq C_1\eta + 2C\|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\varphi - v)\|_{L^2(\Omega)} \\
& = C_1\eta + C_2\eta,
\end{aligned}$$

sempre que $\epsilon < \epsilon_0$, o que demonstra (2.22). Observemos que, na estimativa acima, novamente usamos as desigualdades de *Cauchy-Schwartz* e *Poincaré-Friedrichs*.

$\square$

O próximo resultado segue como um corolário dos teoremas anteriores.

Corolário 2.1 *Suponhamos que as hipóteses, em (2.1), sejam satisfeitas. Então, as soluções v_ϵ dos problemas de Dirichlet, em (2.10), em Ω_ϵ, verificam*

$$\widetilde{v_\epsilon} = w_\epsilon v + r_\epsilon,$$

com $r_\epsilon \to 0$, fortemente em $W_0^{1,1}(\Omega)$, sendo v a solução de (2.11).

2.3 Alguns Resultados de Compacidade

Consideremos X e Y dois espaços de Banach reflexivos tais que $X \subset Y$, com imersão contínua e densa.

Definamos o seguinte espaço

$$C_s^0(0,T;Y) := \{f \in L^\infty(0,T;Y) : t \to \langle f(t), v\rangle_{Y,Y'} \text{ contínua de } [0,T] \text{ em } \mathbb{R},$$
$$\text{para qualquer } v \in Y' \text{ fixado } \}$$

Então temos os seguintes resultados:

Lema 2.2 *Consideremos g_ϵ uma seqüência de funções tal que*

$$\begin{cases} g_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, & \textit{fraco-estrela, em } L^\infty(0,T;X) \\ g_\epsilon \to g, & \textit{fortemente em } C^0(0,T;Y). \end{cases} \tag{2.26}$$

Então

$$g_\epsilon \to g, \ \textit{fortemente em } \ C_s^0([0,T];X),$$

isto é, para todo $v \in X'$, a função $h_\epsilon : t \mapsto \langle g_\epsilon(t), v\rangle_{X,X'}$ pertence a $C^0([0,T])$ e satisfaz

$$h_\epsilon \to h, \quad \textit{forte, em} \quad C^0([0,T]), \tag{2.27}$$

onde h é definida por $h : t \mapsto \langle g(t), v\rangle_{X,X'}$.

Demonstração: Do fato de $L^\infty(0,T;X) \cap C_s^0(0,T;Y) = C_s^0(0,T;X)$, (cf. [18], lema 8.1 p.297), segue por (2.26) que g_ϵ pertence a $C_s^0(0,T;X)$ e assim, h_ϵ pertence a $C_0([0,T])$.

Afim de demonstrarmos a convergência em (2.27), mostraremos que h_ϵ é uma seqüência de *Cauchy*.

Seja $\widetilde{v} \in Y'$ e definamos a função

$$\hat{h}_\epsilon \mapsto \langle g_\epsilon(t), \hat{v}\rangle_{Y,Y'}.$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
|h_\epsilon(t) - h_{\epsilon'}(t)| &\leq |h_\epsilon(t) - \hat{h}_\epsilon(t)| + |\hat{h}_\epsilon(t) - \hat{h}_{\epsilon'}(t)| \\
&= |\langle g_\epsilon(t), v - \hat{v}\rangle_{X,X'}| + |\langle g_\epsilon(t) - g_{\epsilon'}(t), \hat{v}\rangle_{Y,Y'}| + |\langle g_{\epsilon'}(t), v - \hat{v}\rangle_{X,X'}| \\
&\leq \left(\|g_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|g_{\epsilon'}\|_{L^\infty(0,T;X)}\right) \|v - \hat{v}\|_{X'} \\
&+\|g_\epsilon - g_{\epsilon'}\|_{C^0([0,T];Y)} \|\hat{v}\|_{Y'}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Combinando (2.26), (2.28) e a densidade de Y' em X', seque que h_ϵ é uma seqüência de *Cauchy* em $C^0([0,T])$, que é completo. Logo $h_\epsilon \to h$, fortemente, em $C^0([0,T])$.

□

Proposição 2.1 *Suponhamos, agora, que a imersão $X \subset Y$ seja compacta. Consideremos g_ϵ uma seqüência tal que:*

$$
\begin{cases}
g_\epsilon \rightharpoonup g, & \textit{fracamente em } L^1(0,T;X) \textit{ e} \\
g'_\epsilon \rightharpoonup g', & \textit{fracamente em } L^1(0,T;Y).
\end{cases}
$$

Então,

$$
g_\epsilon \to g, \quad \textit{fortemente em } C^0([0,T];Y).
$$

Demonstração: Por um resultado de *J. Simon*, (cf. [25], teorema 3), para obtermos a convergência desejada, basta provarmos que

$$
\|g_\epsilon(\cdot + h) - g_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty(0,T-h;Y)} \to 0, \quad \text{quando } h \to 0, \quad \text{uniformemente em } \epsilon. \tag{2.29}
$$

Temos que

$$
\|g_\epsilon(\cdot + h) - g_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty(0,T-h;Y)} \leq \sup_{t\in[0,T-h]} \int_t^{t+h} \|g'_\epsilon(s)\|_Y ds. \tag{2.30}
$$

Mas, por outro lado, *J. Diestel* e *J.J. Uhl,*, (cf. [10], p. 104), nos diz que a norma em Y de uma seqüência que converge fracamente em $L^1(0,T;Y)$ é uniformemente integrável sobre $[0,T]$. Assim, o lado direito de (2.30) converge para zero, quando $h \to 0$, uniformemente em ϵ, o que demonstra (2.29).

$\square$

Corolário 2.2 *Suponhamos que a imersão $X \subset Y$ seja compacta. Consideremos g_ϵ uma seqüência que satisfaz*

$$\begin{cases} g_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, \ \textit{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;X) \\ g_\epsilon^{'} \rightharpoonup g^{'}, \ \textit{fracamente em } L^1(0,T;Y). \end{cases}$$

Então, g_ϵ converge fortemente para g em $C^0_s([0,T];X)$, isto é,

$$\langle g_\epsilon(\cdot), v\rangle_{X,X'} \to \langle g(\cdot), v\rangle_{X,X'}, \ \textit{fortemente em } C^0([0,T]), \ \ \forall v \in X'.$$

Demonstração: A demonstração deste corolário é uma conseqüência direta do lema 2.2 e da proposição 2.1.

$\square$

Proposição 2.2 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos uma seqüência de funções v_ϵ em $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega_\epsilon)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_\epsilon))$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \widetilde{v_\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} v, \quad \textit{fraco-estrela em} \ \ L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \\ \widetilde{v_\epsilon^{'}} \overset{*}{\rightharpoonup} v^{'}, \ \ \textit{fraco-estrela em} \ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.31}$$

Então,

$$\langle \theta, \widetilde{v}_\epsilon(\cdot)\rangle_\Omega \to \langle \theta, v(\cdot)\rangle_\Omega, \ \textit{fortemente em } C^0([0,T]), \tag{2.32}$$

para qualquer $\theta \in H^{-1}(\Omega)$, e por outro lado,

$$v \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.33}$$

Demonstração: Fazendo $X = H^1_0(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$ no corolário 2.2, obtemos a convergência em (2.32).

Notemos que (2.32) nos diz que

$$\widetilde{v}_\epsilon(t) \rightharpoonup v(t), \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \ \forall t \in [0,T] \text{ fixado.}$$

Assim, usando os teoremas (2.1) e (2.2), obtemos que, para qualquer $t \in [0,T]$ fixado,

$$v(t) \in V,$$

$$\|v(t)\|_V^2 = \left\{ \int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |v(x,t)|^2 d\mu(x) \right\} \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla \widetilde{v}_\epsilon(x,t)|^2 dx.$$

Como

$$\sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \int_\Omega |\nabla \widetilde{v}_\epsilon(x,t)|^2 dx = \|\widetilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_0,$$

para algum $C_0 < \infty$, segue que

$$v(t) \in V \ \ \forall t \in [0,T] \ \text{ e que } \sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \|v(t)\|_V^2 \leq C_0.$$

Para mostrarmos que $v \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, resta mostrar a mensurabilidade da função $v : [0,T] \to L^2(\Omega; d\mu)$, uma vez que $v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T,L^2(\Omega))$.

Para isto, sendo $L^2(\Omega; d\mu)$ separável, é suficiente demonstrar, pelo teorema de mensurabilidade de *Pettis*, cf. [10], teo 2, p.42, que v é fracamente mensurável.

Como $v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue da observação (2.3), que $v \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega;d\mu))$. Assim, a função $t \to \int_\Omega v(x,t)\psi(t)d\mu(x)$ é mensurável para alguma $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$. Aproximemos, agora, $\varphi \in L^2(\Omega; d\mu)$ por uma seqüência $\psi_n \in C^0(\overline{\Omega})$.

Como $v(t) \in L^2(\Omega; d\mu)$, $\forall t \in [0,T]$, temos

$$\int_\Omega v(x,t)\psi_n(x)d\mu(x) \to \int_\Omega v(x,t)\varphi(x)d\mu(x), \ \ \forall t \in [0,T].$$

Isso demonstra a mensurabilidade da função $t \mapsto \int_\Omega v(x,t)\varphi(x)d\mu(x)$.

□

2.4 Um Operador Quase-extensão

Vamos introduzir, agora, o operador P_ϵ, dado por

$$P_\epsilon \psi = w_\epsilon \widetilde{\psi}, \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall \psi \in L^2(\Omega_\epsilon), \tag{2.34}$$

onde $\widetilde{\psi}$ é a extensão de ψ por zero nos buracos S_ϵ.

Esse operador nos será de grande utilidade nos próximos resultados.

Observação 2.4 *Observemos que o operador P_ϵ não é um operador extensão, pois $P_\epsilon \psi$ não coincide com ψ em Ω_ϵ, pois w_ϵ não coincide com um neste conjunto.*

No entanto, para qualquer $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$, temos $P_\epsilon \varphi \to \widetilde{\varphi}$, fortemente em $L^2(\Omega)$. De fato! $\lceil$ Seja $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$, então $P_\epsilon \varphi = w_\epsilon \widetilde{\varphi}$. Por (i) e (iii) de (2.1), segue que $(P_\epsilon \varphi - \widetilde{\varphi}) \to 0$, q. s. em Ω e

$$\begin{aligned} |P_\epsilon \varphi - \widetilde{\varphi}|^2 & = |w_\epsilon \widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi}|^2 = |\widetilde{\varphi}|^2 + |1 - w_\epsilon|^2 \\ & \leq 2|\widetilde{\varphi}|^2 (1 + |w_\epsilon|^2) \leq 2|\widetilde{\varphi}|^2 (1 + \mu_0^2) = C|\widetilde{\varphi}|^2, \end{aligned}$$

isto nos diz que $(P_\epsilon \varphi - \widetilde{\varphi})$ é limitada por uma função pertencente a $L^1(\Omega)$. Logo, pelo teorema 1.8, segue que $P_\epsilon \varphi \to \widetilde{\varphi}$ em $L^1(\Omega)$, e por conseqüência em $L^2(\Omega)$. $\rfloor$

Assim, podemos dizer que P_ϵ atua como um operador "quase-extensão".

Proposição 2.3 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então,*

$$\begin{cases} P_\epsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega)), \\ \|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega))} \leq M_0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Além disso, o operador P_ϵ é estendido a um operador definido em $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$, e para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $q \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right)$, temos

$$\begin{cases} P_\epsilon \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega_\epsilon); W^{-1,q}(\Omega)), \\ \|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega_\epsilon); W^{-1,q}(\Omega))} \leq C_q. \end{cases} \tag{2.36}$$

Demonstração: Seja $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$, então $P_\epsilon\varphi = w_\epsilon\widetilde{\varphi}$. Claramente $P_\epsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega)$. Também, temos

$$\|P_\epsilon\varphi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = \|w_\epsilon\widetilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \leq M_0\|\varphi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)},$$

isto significa que $\|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon);L^2(\Omega))} \leq M_0$.

Provemos, agora, a asserção (2.36). Seja $p > n$ fixado e consideremos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$. Definamos o operador

$$R_\epsilon\varphi = \varphi w_\epsilon \mid_{\Omega_\epsilon}, \ \ \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.37}$$

Temos

$$\nabla(R_\epsilon\varphi) = w_\epsilon\nabla\varphi + \varphi\nabla w_\epsilon, \ \text{ em } \ \Omega_\epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(R_\epsilon\varphi)|^2 dx &\leq 2\int_{\Omega_\epsilon} |w_\epsilon|^2|\nabla\varphi|^2 dx + 2\int_{\Omega_\epsilon} |\varphi|^2|\nabla w_\epsilon|^2 dx \\
&\leq 2M_0\|\varphi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + 2C_p\|\varphi\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|w_\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C_p^2\|\varphi\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde C_p não depende de ϵ, uma vez que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Logo,

$$\begin{cases} R_\epsilon \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega); H_0^1(\Omega_\epsilon)), \text{ e} \\ \|R_\epsilon\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega);H_0^1(\Omega_\epsilon))} \leq C_p. \end{cases} \tag{2.38}$$

Consideremos, agora, o operador R_ϵ^* definido em $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$, por

$$\langle R_\epsilon^*\psi, \varphi\rangle_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle\psi, R_\epsilon\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega_\epsilon), H_0^1(\Omega_e)}, \ \ \forall\psi H^{-1}(\Omega_\epsilon), \ \ \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde q é dado por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A identidade

$$\langle \psi, R_\epsilon \varphi \rangle_{H-1(\Omega_\epsilon), H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_{\Omega_\epsilon} \psi \varphi w_\epsilon dx = \int_{\Omega_\epsilon} P_\epsilon \psi \varphi dx, \ \ \forall \psi L^2(\Omega_\epsilon), \ \ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

demonstra que $R_\epsilon^* = P_\epsilon$ é uma extensão de P_ϵ e (2.38) imediatamente implica (2.36).

□

Proposição 2.4 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos o operador P_ϵ definido em (2.34). Seja v_ϵ uma seqüência em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\epsilon)) \cap W^{1,1}(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ tal que*

$$\begin{cases} \widetilde{v}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v, & \textit{fraco-estrela, em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ P_\epsilon v_\epsilon' \rightharpoonup v', & \textit{fracamente, em} \quad L^1(0,T;W^{-1,q}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.39}$$

para algum $q \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right)$.

Então, para toda $\varphi \in L^2(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon(x,\cdot)\varphi(x)dx \to \int_\Omega v(x,\cdot)\varphi(x)dx, \ \ \textit{fortemente em} \ \ C^0([0,T]),$$

isto é,

$$\widetilde{v}_\epsilon \to v, \ \ \textit{fortemente em} \ \ C_s^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Demonstração: Notemos que

$$P_\epsilon v_\epsilon = w_\epsilon \widetilde{v}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v, \text{fraco-estrela em} L^\infty(0,T;L_0^2(\Omega)). \tag{2.40}$$

De fato! Temos por $(2.39)_1$ que

$$\langle \widetilde{v}_\epsilon, \psi \rangle \to \langle v, \psi \rangle, \ \ \forall \psi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Assim,

$$\int_0^T (\widetilde{v}_\epsilon, \psi)dt \to \int_0^T (v, \psi)dt,$$

integrando em Ω e aplicando *Fubini*, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \psi dxdt \to \int_0^T \int_\Omega v\psi dxdt. \tag{2.41}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \int_\Omega (P_\epsilon v_\epsilon - v)\psi dxdt\right| &= \left|\int_0^T \int_\Omega (w_\epsilon \widetilde{v}_\epsilon + w_\epsilon v - w_\epsilon v - v)\psi dxdt\right| \\ &\leq M_0 \left|\int_0^T \int_\Omega (\widetilde{v}_\epsilon - v)\psi dxdt\right| + \left|\int_0^T \int_\Omega (w_\epsilon - 1)v\psi dxdt\right|.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Logo, combinando (iii) de (2.1, (2.41) e (2.42), segue que

$$\int_0^T \int_\Omega (P_\epsilon v_\epsilon - v)\psi dxdt \to 0, \ \ \forall \psi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \ \ \text{quando} \ \ \epsilon \to 0,$$

o que demonstra (2.40).

Assim, por $(2.39)_2$ e (2.40), a seqüência $g_\epsilon = P_\epsilon v_\epsilon$ satisfaz as hipóteses do corolário (2.2) com $X = L^2(\Omega)$ e $Y = W^{-1,q}(\Omega)$.

Logo,

$$P_\epsilon v_\epsilon \to v, \ \ \text{fortemente em} \ \ C_s^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$w_\epsilon \widetilde{v}_\epsilon \to v, \ \ \text{fortemente em} \ \ C_s^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

o que nos dá,

$$\int_\Omega w_\epsilon \widetilde{v}_\epsilon \varphi dx \to \int_\Omega v\varphi dx, \ \ \text{fortemente em} \ \ C^0([0,T]), \ \ \forall \varphi \in L^2(\Omega). \tag{2.43}$$

Agora, notemos que

$$\int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \varphi dx = \int_\Omega w_\epsilon \widetilde{v}_\epsilon \varphi dx + \int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \varphi (1 - w_\epsilon) dx. \tag{2.44}$$

Mas, por (i) e (iii) de (2.1), por (2.39) e pelo $T.C.D.L.$, temos

$$\left|\int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \varphi(1-w_\epsilon)dx\right| \leq \|\widetilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\varphi(1-w_\epsilon)\|_{L^2(\Omega)} \to 0. \tag{2.45}$$

Assim, combinando (2.43), (2.44) e (2.45), segue que

$$\int_\Omega \widetilde{v}_\epsilon \varphi dx \to \int_\Omega v\varphi dx, \text{ fortemente em } C^0([0,T]).$$

$\square$

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções Fracas

Neste capítulo apresentaremos, através do método de *Faedo - Galerkin*, as condições para a existência e unicidade de solução fraca do Problema de *Cauchy* associado à equação da onda, no domínio Ω_ϵ definido no capítulo 2, para cada $\epsilon > 0$ fixado. Dividiremos este capítulo em três seções. Na seção 3.1 apresentaremos o problema, na seção 3.2 mostraremos a existência de solução fraca para o probema enunciado na seção 3.1 e na seção 3.3 mostraremos a unicidade da solução.

3.1 Apresentação do Problema

Consideremos $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um conjunto aberto, limitado e bem regular. Representaremos por Γ_ϵ a fronteira de Ω_ϵ, por Q_ϵ o cilindro $Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T)$ e por Σ_ϵ a fronteira lateral de Q_ϵ, isto é, $\Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T)$.

O problema consiste em:

Dados $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)$ e $u_0 \in L^2(\Omega_\epsilon)$, encontrar $u = u(x, t)$ definida em Q_ϵ, tal que:

$$\begin{cases} u_\epsilon'' - \Delta u_\epsilon = f_\epsilon & \text{em} \quad Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0,T), \ T > 0 \\ u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0 & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon'(0) = u_\epsilon^1 & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0,T). \end{cases} \tag{3.1}$$

Observação 3.1 *Em (3.1) estamos representando por u_ϵ' e a derivada de $u_\epsilon(x,t)$ em relação a t e por u_ϵ'' a derivada de u_ϵ' em relação a t.*

Formularemos agora, o conceito de solução fraca.

Para $u, v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$, consideremos a forma de Dirichlet

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Uma solução fraca para o problema hiperbólico (3.1), é uma função $u_\epsilon : (0,T) \to H_0^1(\Omega_\epsilon)$, tal que

$$\frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), v) + ((u_\epsilon(t), v_\epsilon)) = (f_\epsilon(t), v_\epsilon), \ \forall v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon),$$

sendo esta igualdade entendida no sentido das distribuições.

Enunciaremos então, o seguinte teorema, a ser demosntrado nas seções 3.2 e 3.3.

Teorema 3.1 *Consideremos $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega_\epsilon))$, $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_\epsilon^1 \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Então, existe uma única função $u_\epsilon : Q_\epsilon \to \mathbb{R}$, satisfazendo:*

$$\begin{cases} u_\epsilon \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_\epsilon)); \\ u_\epsilon' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\epsilon)); \\ u_\epsilon'' \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega_\epsilon)) \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), v_\epsilon) + ((u_\epsilon(t), v_\epsilon)) = (f_\epsilon(t), v_\epsilon), \ \forall v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon), \ \textit{no sentido de } \mathcal{D}'(0,T); \tag{3.3}$$

$$u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0 \; e \; u'_\epsilon(0) = u_\epsilon^1. \tag{3.4}$$

Na demonstração desse teorema usaremos o método de *Faedo - Galerkin*, o qual consiste em aproximar a solução desejada, por soluções de problemas análogos, mas em dimensão finita.

3.2 Existência de Solução

Dividiremos a demonstração da existência de solução para o problema enunciado no teorema (3.1) em quatro etapas, a saber:

(i) construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;

(ii) estimativas a priori sobre as soluções aproximadas;

(iii) passagem ao limite das soluções aproximadas;

(iv) verificação da condição inicial.

Etapa (i) - Problema Aproximado

Sendo $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ um espaço de Hilbert separável, segue que existe uma seqüência de vetores

$$w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \ldots, w_{\epsilon m}, \ldots$$

tais que:

- $w_{\epsilon j} \in H_0^1(\Omega_\epsilon), \; \forall j = 1, 2, \ldots, m, \ldots;$
- $w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \ldots, w_{\epsilon m}$ são linearmente independentes para cada m fixo;
- as combinações lineares finitas dos $w_{\epsilon j}$ são densas em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$.

Seja, então, $W_{\epsilon m} = [w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \ldots, w_{\epsilon m}]$ o subespaço m-dimensional de $H_0^1(\Omega_\epsilon)$, gerado pelos m primeiros vetores.

Queremos encontrar

$$u_{\epsilon m} : (0,T) \to W_{\epsilon m}$$

sob a forma:

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{\epsilon jm}(t) w_{\epsilon j},$$

sendo os $g_{\epsilon jm}$ determinados pelas seguintes condições:

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}(t), v) + ((u_{\epsilon m}(t), v)) = (f_\epsilon(t), v),\ \forall v \in W_{\epsilon m}, \tag{3.5}$$

$$u_{\epsilon m}(0) = u^0_{\epsilon m},\ \ \lim_{m\to\infty} u^0_{\epsilon m} = u^0_\epsilon \text{ em } H^1_0(\Omega_\epsilon), \tag{3.6}$$

$$u'_{\epsilon m}(0) = u^1_{\epsilon m},\ \ \lim_{m\to\infty} u^1_{\epsilon m} = u^1_\epsilon \ \text{ em } \ L^2(\Omega_\epsilon), \tag{3.7}$$

Substituindo v_ϵ por $w_{\epsilon j}$, $0 < j \leq m$, em (3.5), resulta que as funções $t \to (u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})$ devem satisfazer

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + ((u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})) = (f_\epsilon(t), w_{\epsilon j}),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Agora, notemos que $u^0_\epsilon \in H^1_0(\Omega_\epsilon)$, logo pode ser aproximada pelos $w_{\epsilon j}$. Assim, existem $\alpha_{jm} \in \mathbb{R}$, tais que

$$u^0_\epsilon = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_{\epsilon j}, \tag{3.8}$$

e como queremos

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{\epsilon jm}(t) w_{\epsilon j},$$

temos

$$u_{\epsilon m}(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{\epsilon jm}(0) w_{\epsilon j}. \tag{3.9}$$

Fazendo $u^0_{\epsilon m} = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_{\epsilon j}$, de (3.8) e (3.9), deduzimos que (3.6) equivale a

$$g_{\epsilon jm}(0) = \alpha_{jm},\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.10}$$

Analogamente, usando a densidade de $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ em $L^2(\Omega_\epsilon)$, concluímos que u_ϵ^1 também pode ser aproximada pelos $w_{\epsilon j}$, com isso, existem $\beta_{jm} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, tais que que

$$u_\epsilon^1 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_{\epsilon j}.$$

Assim, tomando $u_{\epsilon m} = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_{\epsilon j}$, obtemos que a condição em (3.7) equivale a

$$g'_{\epsilon jm}(0) = \beta_{jm},\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.11}$$

Obtemos então o sistema

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{m} g'_{\epsilon jm}(t)(w_{\epsilon j}, w_{\epsilon i}) + \sum_{j=1}^{m} g_{\epsilon jm}(t)((w_{\epsilon j}, w_{\epsilon i})) = (f_\epsilon(t), w_{\epsilon j}),\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{3.12}$$

$$g_{\epsilon jm}(0) = \alpha_{jm},\ j = 1, 2, \ldots, m; \tag{3.13}$$

$$g'_{\epsilon jm}(0) = \beta_{jm},\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.14}$$

Notemos que o sistema dado por (3.12), (3.13) e (3.14), constitui um sistema linear de equações ordinárias, que pode ser escrito numa forma adequada à aplicação do teorema de existência de *Caracthèodory*. Logo, existe a solução aproximada $u_{\epsilon m}(t)$, para t no intervalo $[0, T]$.

Etapa (ii) - Estimativas a priori

Fazendo $v_\epsilon = u'_{\epsilon m}(t) \in W_{\epsilon m}$ em (3.5), obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + ((u_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)))\right\} = (f_\epsilon(t), u'_{\epsilon m}(t)) \tag{3.15}$$

Vimos na etapa (i) que $u_{\epsilon m}(t)$ existe em $[0, t_m)$. Então, tomando $0 < t < t_m$ e integrando (3.15), temos

$$|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + ((u_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t))) = |u'_{\epsilon m}(0)|^2 + ((u_{\epsilon m}(0), u_{\epsilon m}(0))) + 2\int_0^t (f_\epsilon(s), u'_{\epsilon m}(s))ds \tag{3.16}$$

Notemos que de (3.6) e da desigualdade de *Poincaré-Friedricks*, podemos concluir que $((u_{\epsilon m}(0), u_{\epsilon m}(0)))$ é convergente, logo limitada. De modo análogo, de (3.7) também temos que $|u'_{\epsilon m}(0)|$ é convergente e com isso limitada.

Vamos analisar, agora, o termo $2\int_0^t (f_\epsilon(s), u'_{\epsilon m}(s))ds$.

Pela desigualdade de *Schwarz* e da desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, temos:

$$\begin{aligned} & 2\int_0^t (f_\epsilon(s), u'_{\epsilon m}(s))ds \leq 2\int_0^t |f_\epsilon(s)||u'_{\epsilon m}|ds \\ & = 2\textstyle\int_0^t |f_\epsilon(s)|^{\frac{1}{2}}|f_\epsilon(s)|^{\frac{1}{2}}|u'_{\epsilon m}|ds \\ & \leq \textstyle\int_0^T |f_\epsilon(s)|ds + \int_0^t |f_\epsilon(s)ds||u'_{\epsilon m}|^2 ds \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como $f_\epsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$, temos que a primeira integral do segundo membro, em (3.17), é um número independente de m.

Assim, das estimativas acima e de (3.16) obtemos:

$$|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2 \leq C + \int_0^t |f_\epsilon(s)||u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds. \tag{3.18}$$

Segue, agora, pela desigualdade de *Gronwall*, que $|u'_{\epsilon m}(t)|$ é limitada por uma constante em $[0, T)$, independente de m.

E, pela desigualdade de *Poincaré-Friedricks*, $\|u_{\epsilon m}(t)\|$ também é limitada por uma constante em $[0, T)$, independente de m.

Com isso,

$$\begin{aligned} & \{u_{\epsilon m}(t)\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))) \text{ independentemente de } m; \\ & \{u'_{\epsilon m}(t)\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))) \text{ independentemente de } m. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Etapa (iii) - Passagem ao limite

Pelas estimativas (3.19), segue que existem subseqüências $\{u_{\epsilon\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{\epsilon m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{u'_{\epsilon\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\{u'_{\epsilon m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, tais que:

$$u_{\epsilon\nu} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon, \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0.T; H_0^1(\Omega_\epsilon)), \tag{3.20}$$

e

$$u'_{\epsilon\nu} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\epsilon, \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0.T; L^2(\Omega_\epsilon)). \tag{3.21}$$

Isto significa que para toda $w \in L^1(0,T; H^1(\Omega_\epsilon)) \subset L^1(0,T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ tem-se:

$$\int_0^T \langle u_{\epsilon\nu}(t), w(t)\rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle\ u_\epsilon(t), w(t)\rangle dt. \tag{3.22}$$

Identificando $L^2(\Omega_\epsilon)$ ao seu dual, via teorema da representação de *Riesz*, temos que para cada $w \in L^1(0,T; L^2(\Omega_\epsilon))$, vale que:

$$\int_0^T \langle u'_{\epsilon\nu}(t), w(t)\rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle\ u'_\epsilon(t), w(t)\rangle dt. \tag{3.23}$$

Como a forma bilinear $((.,.))$ é contínua em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$, ao fixarmos uma coordenada, a forma resultante será contínua em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$. Com isso, pela convergência fraca-estrela de $u_{\epsilon m}$, temos que:

$$\int_0^t ((u_{\epsilon m}(t), w(t)))dt \rightarrow \int_0^t ((u_\epsilon(t), w(t)))dt. \tag{3.24}$$

Notemos que (3.20) e (3.21) nos diz que $u_\epsilon \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ e $u'_\epsilon \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\epsilon))$.

Mostremos, agora, que u_ϵ é solução da equação em (3.3), no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Consideremos m_0 fixo e $\nu > m_0$. Multiplicando a equação aproximada (3.5) por $\theta \in \mathcal{D}'(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt,$$

para toda $v \in W_{\epsilon m_0}$.

Integrando por partes a primeira integral, obtemos

$$-\int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt.$$

Tomando o limite quando $\nu \to \infty$, por (3.22) e (3.23), obtemos

$$-\int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt \tag{3.25}$$

para toda $v \in W_{\epsilon m_0}$.

Como $t \to (u'_\epsilon(t), v) \in L^\infty(0, T)$, esta função define uma distribuição sobre $(0, T)$.

A primeira integral em (3.25) é derivada desta distribuição, logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt \tag{3.26}$$

para toda $v \in W_{\epsilon m_0}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Pelo fato dos $W_{\epsilon m_0}$ serem densos em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$, podemos concluir de (3.26) que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Isto nos diz que u_ϵ é solução da equação em (3.3) no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Mostremos, agora, que $u''_\epsilon \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$.

Como $u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$, u'_ϵ define uma distribuição vetorial $\widetilde{u'_\epsilon}$, dada por:

$$\langle \widetilde{u'_\epsilon}, \varphi \rangle = \int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\varphi(t)dt \ \in L^2(\Omega_\epsilon) \subset H^{-1}(\Omega_\epsilon). \tag{3.27}$$

Assim, $\widetilde{u'_\epsilon} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T), H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ e possui derivada no sentido das distribuições vetoriais, daí,

$$\langle (\widetilde{u'_\epsilon})', \varphi \rangle = -\langle \widetilde{u'_\epsilon}, \varphi' \rangle = -\int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\varphi'(t)dt \ \in H^{-1}(\Omega_\epsilon),$$

o que nos dá $(\widetilde{u'_\epsilon})' \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T), H^{-1}(\Omega))$.

Então, podemos calcular $\langle (\widetilde{u'_\epsilon})', \varphi \rangle \in H^{-1}(\Omega_\epsilon)$ em $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$.

Assim,

$$\begin{aligned} (\langle (\widetilde{u'_\epsilon})', \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} &= (\langle \widetilde{u'_\epsilon}, \varphi' \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} \\ &= -(\int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\varphi'(t)dt, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} \\ &= -\int_0^T (u'_\epsilon(t)\varphi'(t), v)dt \\ &= -\int_0^T (u'_\epsilon(t)), v)\varphi'(t)dt \end{aligned}$$

Logo,

$$(\langle (\widetilde{u'_\epsilon})', \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t)), v)\varphi(t)dt. \tag{3.28}$$

Mas, $u_\epsilon \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ nos dá que $-\Delta u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_\epsilon)$.

Então,

$$(\langle \Delta u, \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T (-\Delta u, v)\varphi(t))dt \ \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \tag{3.29}$$

De modo análogo, temos $f_\epsilon \in L^1(0,T; L^2(\Omega_\epsilon))$, assim, $f_\epsilon(t) \in H^{-1}(\Omega_\epsilon)$, o que nos dá

$$(\langle \widetilde{f_\epsilon}(t), \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\varphi(t))dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \tag{3.30}$$

Agora, identificando u_ϵ com a distribuição $\widetilde{u}_\epsilon$ dada em (3.27), sendo u_ϵ solução da equação (3.3), concluímos de (3.28), (3.29) e (3.30) , que u_ϵ satisfaz a equação

$$u''_\epsilon - \Delta u = f_\epsilon$$

no sentido das distribuições vetoriais em $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$ e também $u''_\epsilon \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon))$.

Etapa (iv) - Verificação das condições iniciais

Observemos que, pelas estimativas obtidas para $u_{\epsilon m}$ e $u'_{\epsilon m}$, temos que $(u_{\epsilon m})$ é limitada em $H^1(Q_\epsilon)$. E, como $H^1(Q_\epsilon) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(Q_\epsilon)$, segue que a subseqüência $(u_{\epsilon nu})$ converge para u_ϵ, fortemente em $L^2(Q_\epsilon)$, logo, converge fracamente em $L^2(Q_\epsilon)$.

Assim, para $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$, temos:

$$\int_0^T (u_{\epsilon\nu}(t),v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u_\epsilon(t),v)\theta'(t)dt$$

Ao integrarmos por partes, como $u_\epsilon \in C^0([0,T];L^2(\Omega_\epsilon))$, segue que:

$$\left\{-\int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t),v)\theta(t)dt - (u_{\epsilon\nu}(0),v)\right\} \to \left\{-\int_0^T (u'_\epsilon(t),v)\theta(t)dt - (u_\epsilon(0),v)\right\}.$$

Usando (3.23), concluímos que:

$$(u_{\epsilon\nu}(0),v) \to (u_\epsilon(0),v), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon).$$

Assim,

$$(u_{\epsilon\nu}(0)) \rightharpoonup u_\epsilon(0), \;\; \text{fracamente em} \;\; L^2(\Omega_\epsilon).$$

Por construção temos que

$$u_{\epsilon\nu}(0) = u^0_{\epsilon\nu} \to u^0_\epsilon, \;\; \text{fortemente em} \;\; H_0^1(\Omega_\epsilon).$$

Logo,

$$u_{\epsilon\nu}(0) \rightharpoonup u^0_\epsilon, \;\; \text{fracamente em} \;\; L^2(\Omega_\epsilon).$$

Assim, pela unicidade do limite fraco, segue que $u_\epsilon(0) = u^0_\epsilon$.

Analogamente concluímos que $u'_\epsilon(0) = u^1_\epsilon$.

3.3 Unicidade da Solução Fraca

Nesta seção demonstraremos, com as hipóteses do teorema (3.1), que a solução encontrada é única.

Na seção 3.2 vimos que toda solução u_ϵ do teorema (3.1), satisfaz

$$-\int_0^T ((u'_{\epsilon\nu}(t),v)\theta'(t)dt+\int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t),v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t),v)\theta(t)dt+(u'_{\epsilon\nu}(0),v), \forall\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R}),$$

Notemos que $z(t) = \theta(t)v \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega_\epsilon)) \subset L^1(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon))$.

Assim, supomos u_ϵ e u_ϵ^* duas soluções nas condições do teorema (3.1). Temos que $w\epsilon = u_\epsilon - u_\epsilon^*$ satisfaz:

$$-\int_0^T (w'_\epsilon(t),z'(t))dt + \int_0^T ((w_\epsilon(t),z(t)))dt = 0 \ \ \forall z \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega_\epsilon)). \tag{3.31}$$

Seja $s \in (0,T)$.

Observemos que w_ϵ é solução nas condições do teorema (3.1), com $f_\epsilon = 0$, $w_\epsilon(0) = w'_\epsilon(0) = 0$.

Temos que $w_\epsilon \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon))$, assim

$$z(x) = \begin{cases} -\int_0^s w_\epsilon(\xi)d\xi, & \text{se} \quad t \leq s \\ 0 & \text{se} \quad t > s. \end{cases} \tag{3.32}$$

é uma função de $C^1([0,T];H_0^1(\Omega_\epsilon))$.

Temos $z'(t) = w_\epsilon(t)$.

Substituindo $z(t)$, dada em (3.32), em (3.31), temos que:

$$\int_0^s (w'_\epsilon(t),w_\epsilon(t))dt + \int_0^s ((z'(t),z(t)))dt = 0,$$

o que nos dá:

$$\int_0^s \frac{d}{dt}[((z(t),z(t))) - |w_\epsilon(t)|^2]dt = 0.$$

Mas, $z(s) = 0$ e $w_\epsilon(0) = 0$, logo, $((z(0)), z(0))) + |w_\epsilon(s)|^2 = 0$. Como $((z(0)), z(0))) > 0$, temos que $|w_\epsilon(s)|^2 = 0$, logo $w_\epsilon(0) = 0, \;\; \forall s \in [0, T]$.

Portanto a solução fraca do teorema (3.1) é única.

Capítulo 4

Homogeneização da Equação da Onda

Neste capítulo mostraremos o resultado de homogeneização para a equação da onda, e também, a semi-continuidade inferior da energia.

4.1 O Processo de Homogeneização

O capítulo 3 nos garante a existência e a unicidade da solução da equação da onda no domínio Ω_ϵ, para $\epsilon > 0$, fixado, vamos obter nesta seção a solução desta equação em todo o domínio Ω. Vamos, para isto, fazer $\epsilon \to 0$. Isto é o que chamamos de resultado de homogeneização, que é apresentado no seguinte Teorema.

Teorema 4.1 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos as seqüências de dados satisfazendo:*

$$\begin{cases} \widetilde{u_\epsilon^0} \rightharpoonup u^0, \ \textit{fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ \widetilde{u_\epsilon^1} \rightharpoonup u^1, \ \textit{fracamente em } L^2(\Omega) \\ \widetilde{f_\epsilon} \rightharpoonup f, \ \textit{fracamente em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.1}$$

Então, a seqüência de soluções u_ϵ de (3.1) satisfaz

$$\begin{cases} \widetilde{u_\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \textit{fraco-estrela, em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \widetilde{u'_\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \textit{fraco-estrela, em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $u = u(x,t)$ é a única solução da equação da onda homogenizada:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f, & \textit{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0, & \textit{em} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,T), \ \Gamma = \partial\Omega \\ u(0) = u^0, & \textit{em} \quad \Omega \\ u'(0) = u^1, & \textit{em} \quad \Omega \\ u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu)$ definido em (2.8)e μ é uma medida de Radon dada pelo Lema (2.1).

Observação 4.1 *Notemos que, devido ao produto escalar $a(\cdot,\cdot)$ de V, definido em (2.9), a formulação variacional da equação da onda, em $(4.3)_1$ é:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_\Omega u(x,t)v(x)dx + a(u(t),v) = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx, \\ \textit{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V \\ u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.4}$$

Notemos, também, que de acordo com o Teorema 2.2, a função u^0 (que é o limite fraco em $H_0^1(\Omega)$ das funções $\widetilde{u}_\epsilon^0$ que se anulam sobre os buracos S_ϵ) pertence a V, logo não existe contradição entre as duas condições $u(0) = u^0$ e $u \in C^0([0,T];V)$. Observemos que os resultados clássicos garantem a existência e a unicidade de soluções de (4.3). De fato, a unicidade é garantida na larga classe $L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$.

É válido, também, observarmos que $\widetilde{f_\epsilon}$ é assumida convergir fraco em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, que é uma hipótese mais forte que ser limitada neste espaço. □

Demonstração: (*do teorema (4.1)*) Procederemos a demonstração em quatro etapas:

1ª etapa - Estimativas a priori

Das estimativas obtidas em (3.19) segue-se que existe uma subseqüência $\{u_{\epsilon m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} u_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon, & \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon)) \\ u'_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\epsilon, & \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\epsilon)) \end{cases} \tag{4.5}$$

Assim, pelo teorema de *Banach-Steinhaus,* temos:

$$\begin{cases} \|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon))} \leq C, & \forall \epsilon > 0 \\ \|u'_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf\limits_{m\to\infty} \|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, & \forall \epsilon > 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

onde C não depende de ϵ devido as condições em (4.1).

Logo,

$$\begin{cases} \widetilde{u_\epsilon} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \text{ independentemente de } \epsilon > 0 \\ \widetilde{u'_\epsilon} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \text{ independentemente de } \epsilon > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Com isso, existe uma subseqüência, a qual continuaremos a denotar por $\widetilde{u_\epsilon}$, tal que:

$$\begin{cases} \widetilde{u_\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \widetilde{u'_\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.8}$$

Assim, pela proposição(2.2), segue que

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.9}$$

2º etapa - Passagem ao limite na equação $(3.1)_1$

Sejam $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e w_ϵ a seqüência de funções do quadro de hipóteses (2.1). Consideremos a função teste $\psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x)$ e vamos compô-la com a equação $(3.1)_1$.

Temos:

$$\langle u_\epsilon, \psi''(t) w_\epsilon(x)\varphi(x)\rangle_{Q_\epsilon} + \langle -\Delta u_\epsilon, \psi(t) w_\epsilon(x)\varphi(x)\rangle_{Q_\epsilon} = \langle f_\epsilon, \psi(t) w_\epsilon(x)\varphi(x)\rangle_{Q_\epsilon}. \tag{4.10}$$

Observação 4.2 *Em* (4.10) *estamos representado por* $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_{Q_\epsilon}$ *o par dualidade entre* $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ *e* $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\epsilon))$.

Integrando por partes, na variável x, o segundo termo do primeiro membro de (4.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} &= \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla(\psi w_\epsilon \varphi) dxdt = \\ &= \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dxdt + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dxdt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Mas, por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} &= \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\psi u_\epsilon \varphi) dxdt = \\ &= \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi \nabla u_\epsilon \varphi dxdt + \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dxdt, \end{aligned} \tag{4.12}$$

então segue que

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dxdt = \\ &\qquad = \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} - \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dxdt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo (4.13) em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} &= \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} - \\ &- \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dxdt + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dxdt. \end{aligned} \tag{4.14}$$

E, substituindo (4.14) em (4.10), temos

$$\begin{aligned}\langle u_\epsilon', \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} + \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} - \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \\ + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Análise dos termos de (4.15):

Antes de analisarmos, termo a termo, a equação (4.15), faremos algumas considerações.

Notemos que, em (4.8) temos a convergência

$$\widetilde{u}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \text{fraco-estrela, em} L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

que implica na convergência

$$\int_0^T \langle \widetilde{u}_\epsilon, v\rangle_\Omega dt \to \int_0^T \langle u, v\rangle_\Omega dt, \ \ \forall v \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)),$$

em particular, para $v(x,t) = \varphi(x)\psi(x)$, com $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, $\psi \in L^1(0,T)$, assim,

$$\int_0^T \langle \widetilde{u}_\epsilon, \varphi\rangle_\Omega \psi dt \to \int_0^T \langle u, \varphi\rangle_\Omega \psi dt, \ \ \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \ \ \psi \in L^1(0,T).$$

Com isso,

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon \varphi dx\right) \psi dt \to \int_0^T \left(\int_\Omega u \varphi dx\right) \psi dt, \ \ \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Pelo teorema de *Fubini*, segue que

$$\int_\Omega \left(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\right) \varphi dx \to \int_\Omega \left(\int_0^T \psi u dt\right) \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Isto significa que

$$\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi u dt \ \text{ fracamente em } \ H_0^1(\Omega), \tag{4.16}$$

logo, por *Rellich-Kondrachoff*, (inclusão compacta de $H^{-1}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$,) segue que

$$\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt \to \int_0^T \psi u dt \ \text{ fortemente em } \ L^2(\Omega).$$

E, como $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, seque que $\psi'' \in \mathcal{D}(0,T)$, logo,

$$\int_0^T \psi'' \widetilde{u}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi u dt \ \text{ fracamente em } \ H_0^1(\Omega) \ \text{ e fortemente em } \ L^2(\Omega). \tag{4.17}$$

Vamos, agora, à análise dos termos em (4.15).

1º termo:

Estendendo por zero fora de Ω_ϵ e aplicando o teorema de *Fubini* no primeiro termo, obtemos

$$\langle u_\epsilon, \psi'' w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon \psi'' w_\epsilon \varphi dx dt = \int_\Omega w_\epsilon \varphi \left(\int_0^T \psi'' \widetilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \tag{4.18}$$

Usando a hipótese (iii) de (2.1) e o teorema de *Rellich-Kondrachoff*, para uma subseqüência, ainda denotada por w_ϵ, temos que

$$w_\epsilon \to 1, \ \text{fortemente, em } L^2(\Omega). \tag{4.19}$$

Assim, de (4.16) e (4.19), temos a seguinte convergência em (4.18)

$$\langle u_\epsilon, \psi'' w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \to \int_\Omega \varphi \left(\int_0^T \psi'' u dt \right) dx. \tag{4.20}$$

2º termo:

Pela hipótese (iv) de (2.1) $(-\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon)$, e pelo teorema de *Fubini*, segue que

$$\begin{aligned}\langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} &= \langle (\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} = \\ &= \left\langle (\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \left(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\right)\varphi \right\rangle_\Omega \\ &= \left\langle \mu_\epsilon, \left(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\right)\varphi \right\rangle_\Omega,\end{aligned} \tag{4.21}$$

pois, $\langle \gamma_\epsilon, \varphi \int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\rangle_\Omega = 0$.

Logo, de (4.16) e de (iv) em (2.1), temos a seguinte convergência em (4.21)

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} \to \left\langle \mu, \left(\int_0^T \psi u dt\right)\varphi \right\rangle_\Omega. \tag{4.22}$$

3º termo:

Aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de Ω_e, temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \left(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\right) \nabla \varphi dx.$$

Pela hipótese (iii) de (2.1), para uma subseqüência, que ainda denotaremos pelo mesmo símbolo, temos que $\nabla w_\epsilon \rightharpoonup 0$, fracamente, em $L^2(\Omega)$. Daí e de (4.16), temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt \to 0. \tag{4.23}$$

4º termo:

Aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de Ω_e, temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega w_\epsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\int_0^T \psi \widetilde{u}_\epsilon dt\right) dx. \tag{4.24}$$

Por $(4.16)_1$, para uma subseqüência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que:

$$\nabla\left(\int_0^T \psi\widetilde{u}_\epsilon dt\right) \rightharpoonup \nabla\left(\int_0^T \psi u dt\right), \text{fracamente, em } [L^2(\Omega)]^n. \tag{4.25}$$

Assim, de (4.19) e (4.25) obtemos a seguinte convergência em (4.24):

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla\varphi dx dt \to \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\left(\int_0^T \psi u dt\right) dx. \tag{4.26}$$

5º termo:

Também aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de Ω_ϵ, temos que

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} = \int_\Omega w_\epsilon\varphi\left(\int_0^T \psi\widetilde{f}_\epsilon dt\right) dx, \tag{4.27}$$

e da hipótese $(4.1)_3$ temos que

$$\int_0^T \psi\widetilde{f}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi f dt, \text{fracamente, em } L^2(\Omega).$$

Assim, desta convergência e de (4.19), obtemos em (4.27) que

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi\rangle_{Q_\epsilon} \to \int_\Omega \varphi\left(\int_0^T \psi f dt\right) dx. \tag{4.28}$$

Agora, usando as convergências obtidas em (4.20), (4.22), (4.23), (4.26) e (4.28), segue de (4.15), que

$$\int_\Omega \varphi\left(\int_0^T \psi'' u dt\right) dx + \left\langle \mu, \left(\int_0^T \psi u dt\right) dx\right\rangle_\Omega \\ + \int_\Omega \nabla\varphi\nabla\left(\int_0^T \psi u dt\right) dx = \int_\Omega \varphi\left(\int_0^T \psi f dt\right) dx,$$

por *Fubini* e pelo teorema de *Deny* (ver observação (2.2)), obtemos

$$\int_0^T \psi'' \left(\int_\Omega u\varphi dx \right) dt + \int_0^T \psi \left(\int_\Omega u\varphi d\mu \right) dt$$
$$+ \int_0^T \psi \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right) dt = \int_0^T \psi \left(\int_\Omega \varphi f dx \right) dt.$$

Pela arbitrariedade de $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, segue demonstrado que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_\Omega u(x,t)\varphi(x)dx + a(u,\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.29}$$

Por (4.9) e pela densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em V (ver apêndice A), segue que (4.29) pode ser estendida para toda função $v \in V$, o que demonstra (4.4) que equivale a $(4.3)_1$ e $(4.3)_2$.

3ª etapa - Passagem ao liminte nos dados iniciais

De (4.8) e da proposição (2.2), temos que

$$\langle \varphi, \widetilde{u}_\epsilon(\cdot) \rangle_\Omega \to \langle \varphi, u(\cdot) \rangle_\Omega, \;\; \text{fortemente em } \; C^0([0,T]), \;\; \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega). \tag{4.30}$$

Com isso e de $(4.1)_2$, obtemos que $u(0) = u^0$.

Mostremos agora que $u'(0) = u^1$, para isto, aplicaremos a proposição (2.4) a $v_\epsilon = u'_\epsilon$.

Verifiquemos que $P_\epsilon u''_\epsilon \rightharpoonup u''$, fracamente em $L^1(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$. De fato! Temos

$$u''_\epsilon = \Delta u_\epsilon + f_\epsilon,$$

assim,

$$P_\epsilon u''_\epsilon = P_\epsilon \Delta u_\epsilon + P_\epsilon f_\epsilon.$$

Por $(4.8)_1$, segue que $\|\Delta u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon))} \leq C$, logo, pela proposição (2.1), temos

$$\|P_\epsilon \Delta u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T,W^{-1,q}(\Omega))} \leq C_q, \;\; \forall q \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right).$$

Analisemos o termo $P_\epsilon f_\epsilon$. Pelas hipóteses (i) de (2.1) e (4.1) temos que $w_\epsilon \widetilde{f}_\epsilon$ é limitada em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, também $\int_E w_\epsilon \widetilde{f}_\epsilon dt$ é relativamente compacta na topologia fraca de $L^2(\Omega)$ para qualquer subconjunto mensurável E de $[0,T]$, pois as funções $t \mapsto \|\widetilde{f}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$ são uniformemente integráveis sobre $[0,T]$, devido ao fato de que a sequência $\widetilde{f}_\epsilon$ ser relativamente compacta em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, cf. [10] corolário 13 p.76, podemos aplicar o teorema de *Dunford*, (cf. [10], teorema 1, p. 101).

Logo, $P_\epsilon f_\epsilon = w_\epsilon \widetilde{f}_\epsilon$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Com isso, $P_\epsilon u_\epsilon'' = P_\epsilon \Delta u_\epsilon + P_\epsilon f_\epsilon$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$.

Assim, por (2.1) e $(4.8)_2$, segue que

$$P_\epsilon u_\epsilon' = w_\epsilon \widetilde{u}_\epsilon{}' \overset{*}{\rightharpoonup} u', \text{fraco-estrela, em} L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Mas, $(P_\epsilon u_\epsilon')' = P_\epsilon u_\epsilon''$, logo,

$$P_\epsilon u_\epsilon'' \rightharpoonup u'', \;\; \text{fracamente em} \;\; L^1(0,T;W^{-1,q}(\Omega)). \tag{4.31}$$

Logo, por $(4.8)_2$, 4.31 e pela proposição 2.4, segue que

$$\int_\Omega \widetilde{u_\epsilon'}(x,\cdot)\varphi(x)dx \to \int_\Omega u'(x,\cdot)\varphi(x)dx, \;\; \text{fortemente em} \;\; C^0([0,T]), \;\; \forall \varphi \in L^2(\Omega). \tag{4.32}$$

Portanto, usando $(4.1)_2$, segue que $u'(0) = u^1$.

4ª etapa - Conclusão da demonstração

Demonstramos, pela extração de uma subseqüência (ainda denotada por (u_ϵ) que a subseqüência (u_ϵ) satisfaz (4.2) onde o limite

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$$

e satisfaz (4.3).

A unicidade da solução de (3.3), permite-nos deduzir que a seqüência inteira satisfaz (4.2).

Portanto, o teorema (4.1) está provado.

$\square$

4.2 Semi-continuidade Inferior da Energia

Nesta seção, mostraremos um resultado de convergência pontual (no tempo) e a propriedade de semi-continuidade inferior da energia.

Definamos, para qualquer $t \in [0, T]$ a energia $E - \epsilon(\cdot)$ por

$$E_\epsilon(t) = \frac{1}{2}\|u'_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{2}\|\nabla u_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}. \tag{4.33}$$

Temos a seguinte identidade da energia,

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x, s)dxds. \tag{4.34}$$

Teorema 4.2 *Suponhamos que as hipóteses do teorema (4.1) sejam satisfeitas. Então, para qualquer $t \in [0, T]$, fixado temos*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup & u(t), \quad \textit{fracamente, em} \quad H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u'_\epsilon}(t) \rightharpoonup & u'(t), \quad \textit{fracamente, em} \quad L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |u(x,t)|^2 d\mu(x) \leq \\ \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon(x,t)|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\int_\Omega |u'(x,t)|^2 dx \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} |u'_\epsilon(x,t)|^2 dx \quad e \tag{4.37}$$

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} E_\epsilon(t), \tag{4.38}$$

onde a energia $E_\epsilon(\cdot)$ é definida em (4.33) e e a energia $E(\cdot)$ é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega,d\mu)}. \tag{4.39}$$

Demonstração: Em (4.30), obtemos

$$\langle \varphi, \widetilde{u_\epsilon}(\cdot)\rangle_\Omega \longrightarrow \langle \varphi, u_\epsilon(\cdot)\rangle_\Omega, \text{ fortemente em } C^0([0,T]),\ \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega).$$

Em particular, $\forall\ t \in [0,T]$, temos

$$\langle \varphi, \widetilde{u_\epsilon}(t)\rangle_\Omega \to \langle \varphi, u_\epsilon(t)\rangle_\Omega,$$

isto é

$$\widetilde{u_\epsilon}(t) \rightharpoonup u(t), \text{ fracamente em } H^1_0(\Omega), \ \ \forall t \in [0,T],$$

o que nos dá $(4.35)_1$.

Analogamente, de (4.32) temos

$$\int_\Omega \widetilde{u_\epsilon}'(x,\cdot)\varphi(x)dx \to \int_\Omega u'(x,\cdot)\varphi(x)dx, \text{ fortemente em } C^0([0,T]),\ \ \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Em particular, $\forall t \in [0,T]$, temos

$$\langle \varphi, \widetilde{u_\epsilon}'(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} \to \langle \varphi, u_\epsilon(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)},\ \ \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$\widetilde{u_\epsilon}'(t) \rightharpoonup u(t), \text{ fracamente em } L^2(\Omega),\ \ \forall t \in [0,T],$$

o que nos dá $(4.35)_2$.

Já a asserção em (4.36) segue diretamente do teorema (2.2).

De $(4.35)_2$ segue que

$$\int_\Omega |u'(x,t)|^2 dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\epsilon} |u'(x,t)|^2 dx \le \liminf_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla u'_\epsilon(x,t)|^2 dx.$$

Agora, combinando (4.36) e (4.37) temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx + \int_\Omega |u(x,s)|^2 d\mu(x) + \int_\Omega |u'(x,s)|^2 dx] \\ &\le \liminf_{\epsilon\to 0} \{\textstyle\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon(x,t)|^2 dx + \int_{\Omega_\epsilon} |u'_\epsilon(x,t)|^2 dx\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,s)|^2 d\mu(x) + \frac{1}{2}\int_\Omega |u'(x,s)|^2 dx] \\ &\le \liminf_{\epsilon\to 0} \{\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon(x,t)|^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} |u'_\epsilon(x,t)|^2 dx\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(t) \le \liminf_{\epsilon\to 0} E_\epsilon(t),$$

o que demonstra (4.38).

$\square$

Capítulo 5

Resultados de Correção

Neste capítulo estabeleceremos e demonstraremos o resultado de correção para a equação da onda. Para isto serão necessárias hipóteses especiais sobre os dados. Uma das principais etapas da demonstração é a convergência forte da energia em $C^0([0,T])$.

5.1 Convergência Forte da Energia

Com relação à condição inicial u_ϵ^0, suporemos que

$$\begin{cases} u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon); \\ \exists g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega), \ \text{ tal que} \\ \begin{cases} -\Delta u_\epsilon^0 = g_\epsilon, \ \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ g_\epsilon \to g, \ \text{fortemente em } H^{-1}(\Omega). \end{cases} \end{cases} \tag{5.1}$$

Assim, pelo teorema (2.1), temos

$$\widetilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u^0, \ \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

onde $u^0 = u^0(x)$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^0 + \mu u^0 = g, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u^0 \in V. \end{cases}$$

Teorema 5.1 *Suponhamos que as hipóteses do teorema (4.1) sejam satisfeitas e que a seqüência de dados u_ϵ^0, u_ϵ^1, f_ϵ satisfaçam (5.1) e*

$$\begin{cases} \widetilde{f_\epsilon} \to f, \textit{ fortemente em } L^1(0,T;L^2(\Omega)), \\ \widetilde{u}_\epsilon^1 \to u^1, \textit{ fortemente em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{5.2}$$

Então,

$$E_\epsilon(t) \to E(t), \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T]), \tag{5.3}$$

onde $E_\epsilon(\cdot)$ e $E(\cdot)$ são dadas por (4.33) e (4.39), respectivamente.

Demonstração: Temos as seguintes identidades:

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x,s)u_\epsilon'(x,s)dxds \quad e$$

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_\Omega f(x,s)u'(x,s)dxds,$$

com

$$E_\epsilon(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon^0|^2 dx \quad e$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^0|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u^0| d\mu.$$

Pelo teorema (4.1) e pela hipótese $(5.2)_1$, temos

$$\int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x,s)u_\epsilon'(x,s)dxds \to \int_0^t \int_\Omega f(x,s)u'(x,s)dxds,$$

para qualquer $t \in [0,T]$.

Por outro lado, das hipóteses (5.1), $(5.2)_2$ e do teorema (2.3) resulta que

$$E_\epsilon(0) \to E(0).$$

Logo,

$$E_\epsilon(t) \to E(t), \quad \text{para qualquer } t \in [0,T], \tag{5.4}$$

o que é apenas uma convergência pontual no tempo.

Para obtermos a convergência uniforme da energia, usaremos o teorema 1.2. Mostraremos, então, que a família de energias $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$ é eqüicontínua. Com efeito, sejam $t \in [0,T]$ e $h > 0$ suficientemente pequeno. Então, temos:

$$\begin{aligned}
|E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| &= \left| \int_t^{t+h} \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x,s) u'_\epsilon(x,s)\,dxds \right| \\
&\leq \int_t^{t+h} \int_\Omega |\widetilde{f}_\epsilon(x,s)||\widetilde{u}'_\epsilon(x,s)|\,dxds \\
&\leq \|\widetilde{u}'_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \int_t^{t+h} \|\widetilde{f}_\epsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{u}'_\epsilon$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $\widetilde{f}_\epsilon \to f$, fortemente em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, temos que

$$|E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| \to 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0, \quad \text{uniformemente em } \epsilon, \tag{5.5}$$

o que nos diz que a família de funções $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$ é eqüicontínua.

Logo, de (5.4), (5.5) e do teorema 1.2, segue-se a convergência (5.3).

□

5.2 Resultado Auxiliar

Vamos definir, agora,

$$e_\epsilon(v)(t) = \frac{1}{2}|v'(t)|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{2}|\nabla v(t)|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \tag{5.6}$$

para $v \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega_\epsilon))$, e

$$e(v)(t) = \frac{1}{2}|v'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\nabla v(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|v(t)|^2_{L^2(\Omega;d\mu)}, \tag{5.7}$$

para $v \in C^0([0,T]; V) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

Temos, então, o seguinte resultado:

Proposição 5.1 *Suponhamos que as hipóteses do teorema (5.1) sejam satisfeitas, então*

$$e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(\cdot) \to e(u - \varphi)(\cdot), \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T]), \tag{5.8}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T; \mathcal{D}(\Omega))$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon\varphi)(t) = \quad & e_\epsilon(u_\epsilon)(t) + e_\epsilon(w_\epsilon\varphi)(t) - \int_\Omega \widetilde{u}'_\epsilon(x,t) w_\epsilon(x)\varphi'(x,t)dx \\ & - \int_\Omega \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x,t) \cdot \nabla(w_\epsilon(x)\varphi(x,t))dx. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Tomando o limite em cada termo do lado direito da equação (5.9), temos

1º termo. Como $e_\epsilon(u_\epsilon)(t) = E_\epsilon(t)$,do teorema 5.1, segue que

$$e_\epsilon(u_\epsilon)(\cdot) \to e(u)(\cdot), \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]). \tag{5.10}$$

2º termo. Derivando-se no tempo mostra-se que a função $|w_\epsilon\varphi(\cdot)|^2_{L^2(\Omega_e)}$ é limitada em $W^{1,\infty}(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0([0,T])$, pelo teorema $(1.12)_(iii)$.

Assim, usando (iii) de (2.1), obtemos que

$$|w_\epsilon\varphi'(\cdot)|^2_{L^2(\Omega_e)} = |w_\epsilon\varphi'(\cdot)|^2_{L^2(\Omega)} \to |\varphi'|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]), \tag{5.11}$$

e também que

$$\int_0^t |w_\epsilon \varphi(s)|^2_{L^2(\Omega_e)} ds \to \int_0^t |\varphi(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds, \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]). \tag{5.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\nabla(w_\epsilon\varphi(s))|^2_{[L^2(\Omega_\epsilon)]^n} ds &= \int_0^t |\nabla(w_\epsilon\varphi(s))|^2_{[L^2(\Omega)]^n} ds \\
&= \int_0^t (\nabla(w_\epsilon\varphi(s)), \nabla(w_\epsilon\varphi(s)))ds \\
&= \int_0^t \langle -\mathrm{div}[\nabla(w_\epsilon\varphi(s))], w_\epsilon\varphi(s)\rangle ds \\
&= \int_0^t \langle -\mathrm{div}[\nabla w_\epsilon\varphi(s) + w_\epsilon\nabla\varphi(s)], w_\epsilon\varphi(s)\rangle ds \\
&= -\int_0^t \langle \mathrm{div}(\nabla w_\epsilon)\varphi(s) + \nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s) + \mathrm{div}(\nabla\varphi(s))w_\epsilon + \nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s), w_\epsilon\varphi(s)\rangle ds \\
&= -\int_0^t \langle \Delta w_\epsilon\varphi(s) + 2\nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s) + \Delta\varphi(s)w_\epsilon, w_\epsilon\varphi(s)\rangle ds \\
&= -\int_0^t \langle \Delta w_\epsilon\varphi(s), w_\epsilon\varphi(s)\rangle ds - 2\int_0^t (\nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s), w_\epsilon\varphi(s))ds \\
&\quad - \int_0^t (\Delta\varphi(s)w_\epsilon, w_\epsilon\varphi(s))ds \\
&= -\int_0^t \langle \Delta w_\epsilon\varphi(s), w_\epsilon\varphi(s)\rangle_\Omega ds - 2\int_0^t\int_\Omega \nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s)w_\epsilon\varphi(s)dxds \\
&\quad - \int_0^t\int_\Omega \Delta\varphi(s)|w_\epsilon|^2\varphi(s)dxds
\end{aligned}$$

Por (iii) e (iv) de (2.1), podemos tomar o limite em cada termo do lado direito, e observando que cada termo é limitado em $W^{1,\infty}(0,T)$, obtemos

$$-\int_0^t\int_\Omega \Delta\varphi(s)|w_\epsilon|^2\varphi(s)dxds \to -\int_0^t\int_\Omega \Delta\varphi(s)\varphi(s)dxds, \tag{5.13}$$

fortemente em $C^0([0,T])$;

$$-\int_0^t\int_\Omega \nabla w_\epsilon\cdot\nabla\varphi(s)w_\epsilon\varphi(s)dxds \to 0, \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]); \tag{5.14}$$

e

$$\langle -\Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s)\rangle_\Omega = \langle -\Delta w_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s)\rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s)\rangle_\Omega$$
$$= \langle \mu_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s)\rangle_\Omega \longrightarrow \langle \mu, \varphi^2(s)\rangle_\Omega,$$

fortemente em $C^0([0,T])$.

Logo,

$$-\int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s)\rangle_\Omega ds \to -\int_0^t \langle \mu, \varphi^2(s)\rangle_\Omega ds, \tag{5.15}$$

fortemente em $C^0([0,T])$.

Combinando (5.11) e (5.15), obtemos que

$$e_\epsilon(w_\epsilon \varphi(\cdot)) \to e(\varphi)(\cdot), \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]). \tag{5.16}$$

3º termo. Notemos que, de (4.32), temos

$$\int_\Omega \widetilde{u'}_\epsilon(x,\cdot)\psi(x)dx \to \int_\Omega u'(x,\cdot)\psi(x)dx, \text{ fortemente em } C^0([0,T]), \ \forall\, \psi \in L^\infty(\Omega),$$

assim, como

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_\Omega \widetilde{u'}_\epsilon(x,t)(w_\epsilon(x)-1)\psi(x)dx \right| \le \|\widetilde{u'}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\|w_\epsilon - 1\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

por (iii) de (2.1), e assim

$$\int_\Omega \widetilde{u'}_\epsilon(x,t)w_\epsilon(x)\psi(x)dx \to \int_\Omega u'(x,t)\psi(x)dx, \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]). \tag{5.17}$$

Aproximando $\varphi'(x,t)$ em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ por funções da forma $\sum_{i=1}^n \eta_i(t)\psi_i(x)$, onde η_i são funções contínuas sobre $[0,T]$ e as ψ_i pertencem a $L^\infty(\Omega)$, $\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$, deduzimos, de (5.17) e por (i) de (2.1), que

$$\int_\Omega \widetilde{u'}_\epsilon(x,t)w_\epsilon(x)\varphi'(x,t)dx \to \int_\Omega u'(x,t)\varphi'(x,t)dx, \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]). \tag{5.18}$$

4º termo. Observemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x,s)\cdot\nabla(w_\epsilon(x)\varphi(x,s))dx &= \langle -\Delta w_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t)\rangle_\Omega \\ -2\int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)\nabla w_\epsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx &- \int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)w_\epsilon(x)\Delta\varphi(x,t)dx.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Consideremos a função

$$t \mapsto -2\int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)\nabla w_\epsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx - \int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)w_\epsilon\Delta\varphi(x,t)dx.$$

Agora, do teorema (4.1), temos que $\widetilde{u}_\epsilon$ é limitada em $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, logo a função é limitada em $W^{1,\infty}(0,T)$ e é relativamente compacta em $C^0([0,T])$.

Com isso,

$$\begin{aligned}&-2\int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)\nabla w_\epsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx - \int_\Omega \widetilde{u}_\epsilon(x,t)w_\epsilon\Delta\varphi(x,t)dx \\ &\longrightarrow -\int_\Omega u(x,t)\Delta\varphi(x,t)dx = \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx,\end{aligned} \tag{5.20}$$

fortemente em $C^0([0,T])$.

Analisemos, agora, o termo $\langle -\Delta w_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t)\rangle_\Omega$.

Como, $\widetilde{u}_\epsilon = 0$ em S_ϵ, segue que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t)\rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t)\rangle_\Omega.$$

Mas, como $\mu \in H^{-1}(\Omega)$, e $\overline{L^2(\Omega)} = H^{-1}(\Omega)$ existe uma sequência ν_k em $L^2(\Omega)$ tal que

$$\|\nu_\epsilon - \mu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{k}. \tag{5.21}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\langle -\Delta w_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon\varphi\rangle_\Omega - \langle \mu, u\varphi\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} &\leq \|\langle \mu_\epsilon - \mu, \widetilde{u}_\epsilon\varphi\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \\ &+\|\langle \mu - \nu_k, \varphi(\widetilde{u}_\epsilon - u)\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \\ &+\|\langle \nu_k, \varphi(\widetilde{u}_\epsilon - u)\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Por (iv) de (2.1) e por (4.2), temos

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\|\langle \mu_\epsilon - \mu, \widetilde{u}_\epsilon\varphi\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \leq \\ &\qquad \leq \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\|\widetilde{u}_\epsilon\varphi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\|\mu_\epsilon - \mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\Big) = 0,\end{aligned}$$

e, de (5.21), temos

$$\begin{aligned}&\|\langle \mu - \nu_k, \varphi(\widetilde{u}_\epsilon - u)\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \leq \\ &\qquad \leq \|\varphi(\widetilde{u}_\epsilon - u)\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\|\mu - \nu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \tfrac{c}{k}.\end{aligned}$$

Além disso, de (4.2) e da proposição (2.1), temos que

$$\widetilde{u}_\epsilon \to u, \text{ fortemente em } C^0([0,T], L^2(\Omega)), \text{ e}$$

portanto, para k fixado,

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\|\langle \nu_k, \varphi(\widetilde{u}_\epsilon - u)\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \leq \\ &\qquad \leq \lim_{\epsilon\to 0}\big(\|\nu_k\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{u}_\epsilon - u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\big) = 0.\end{aligned} \tag{5.23}$$

De (5.22) e (5.23), segue que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \widetilde{u}_\epsilon\varphi\rangle_\Omega \to \langle \mu, u\varphi\rangle_\Omega, \text{ fortemente em } C^0([0,T]).$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x,t)\cdot\nabla w_\epsilon(x)\varphi(x,t)dx \to \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)dx + \langle \mu, u\varphi\rangle_\Omega, \tag{5.24}$$

fortemente, em $C^0([0,T])$.

Portanto, por (5.10), (5.15), (5.18) e (5.24), segue que

$$e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon\varphi)(\cdot) \longrightarrow e(u-\varphi)(\cdot), \quad \text{fortemente em} \quad C^0([0,T]), \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T;\mathcal{D}(\Omega)).$$

$\square$

5.3 Corretor para a Equação da Onda

Nesta seção apresentaremos o resultado de correção para a equação da onda, em um domínio com pequenos buracos. Para isto usaremos a convergência forte da energia, demonstrada na seção 5.1 e o resultado auxiliar visto na seção 5.2.

Teorema 5.2 *Suponhamos que as hipóteses do teorema (5.1) sejam satisfeitas. Se u denota a única solução do problema homogeneizado (4.3), então a seqüência de soluções $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ do problema (3.1) satisfaz:*

$$\widetilde{u'}_\epsilon \to u', \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T];L^2(\Omega)), \tag{5.25}$$

$$\widetilde{u}_\epsilon = w_\epsilon u + r_\epsilon, \quad \textit{com} \tag{5.26}$$

$$r_\epsilon \to 0, \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T];W_0^{1,1}(\Omega)). \tag{5.27}$$

Além disso, se $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$, então

$$r_\epsilon \to 0, \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{5.28}$$

Antes da demonstração do teorema 5.2, faremos a seguinte observação:

Observação 5.1 *Se $u \in \mathcal{D}(Q)$, o teorema 5.2 é uma conseqüência direta da proposição 5.1. De fato, (5.26), e (5.28) seguem imediatamente de (5.8) e (5.25) é também uma* *conseqüência de (5.8), observando que*

$$u'_\epsilon - u' = u'_\epsilon - w_\epsilon u' + (w_\epsilon - 1)u'.$$

Mas, se u não pertence a $\mathcal{D}(Q)$, o teorema 5.2 não pode ser obtido tão facilmente. Nesse caso, a solução u deverá ser aproximada por uma seqüência de funções regulares φ para deduzirmos (5.25), (5.26) e (5.27) de (5.8). É o que faremos na demonstração abaixo.

Demonstração: (*do teorema 5.2*) Pelo teorema 4.1, temos que

$$u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Seja (φ_k) uma seqüência em $\mathcal{D}(Q)$ tal que

$$\varphi_k \to u, \text{ em } C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \tag{5.29}$$

quando $k \to \infty$.

Pela proposição (5.1), temos

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \left\{ \|(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)'\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right\} \leq$$
$$\leq 2\|e(u - \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T)},$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \limsup_{\epsilon \to 0} \Big\{ & \|(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)'\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \\ & + \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \Big\} = 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u'}_\epsilon - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &= \|\widetilde{u'}_\epsilon + w_\epsilon\varphi'_k - w_\epsilon\varphi'_k + \varphi'_k - \varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leq \|\widetilde{u'}_\epsilon - w_\epsilon\varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varphi'_k(w_\epsilon - 1)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &+\|\varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Por (5.29), (5.30), (5.31) e (2.1), deduzimos que

$$\widetilde{u'}_\epsilon \to u', \text{ fortemente em } C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Logo, (5.25) está demonstrada.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} =\\ &= \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) - \nabla(w_\epsilon\varphi_k) + \nabla(w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &= \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k) + \nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &\leq \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &\leq C\|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &\quad +\|w_\epsilon\nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &\leq C\|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + C\|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N}\cdot\|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\\ &\quad +C\|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Assim, combinando (2.1), (5.29), (5.30) e (5.32), segue que

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \to 0, \quad \text{fortemente, em } \ \mathbb{C}^0([0,T];[L^1(\Omega)]^n).$$

o que demonstra (5.27).

Consideremos, agora, o caso em que $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$. Neste caso, a seqüência (φ_k) pode ser escolhida de maneira que satisfaça, além de (5.29), a seguinte hipótese

$$\varphi_k \to u, \quad \text{fortemente, em} \quad C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])).$$

Com isso, podemos estimar $\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e não apenas em $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, como fizemos em (5.32). Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \\
&\qquad \leq \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|w_\epsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\qquad \leq C\|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])} + C\|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\varphi_k - u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Analogamente a (5.32), isso nos dá

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \to 0, \quad \text{fortemente, em } C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^n),$$

o que demonstra (5.28).

□

Capítulo 6

O Caso dos Buracos Menores que o Tamanho Crítico

Neste capítulo estudaremos o caso partidular onde os buracos são menores que o tamanho crítico. Neste caso, a sequência w_ϵ, do quadro de hipóteses (2.1), converge fortemente em $H^1(\Omega)$, o que resulta $\mu = 0$. Os resultados de homogenização e correção, apresentados nos capítulos 4 e 5, continuam válidos neste caso, podendo ser melhorado o resultado de correção, substituindo-se w_ϵ por 1, e assim a convergência forte dos dados agora implicará na convergência forte das soluções.

Admitiremos que:

$$\begin{cases} \text{Existe uma seqüência de funções testes } w_\epsilon \text{ que satisfaz} \\ (i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega), \ \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \\ (ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon \\ (iii) \quad w_\epsilon \to 1, \text{ fortemente em } H^1(\Omega). \end{cases} \tag{6.1}$$

Observação 6.1 *Notemos que a hipótese principal não é feita diretamente sobre a forma e o tamanho dos buracos, mas em termos da família de funções testes w_ϵ. As hipóteses (6.1) dizem que o tamanho dos buracos r_ϵ é menor que o tamanho crítico dado em (2.4), ou seja, r_ϵ é tomado satisfazendo*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \log r_\epsilon \to -\infty, & se\ n = 2 \\ \dfrac{\epsilon^{n/(n-2)}}{r_\epsilon} \to +\infty, & se\ n \geq 3. \end{cases} \tag{6.2}$$

A principal diferença entre as hipóteses (2.1) e (6.1) é que, em (iii) *de (6.1), admitimos a convergência forte de* w_ϵ*. Neste caso, a hipótese* (iv) *de (2.1) é claramente satisfeita com* $\gamma_\epsilon = 0$, $\mu_\epsilon = -\Delta w_\epsilon$ *e* $\mu = 0$.

Notemos, também, que se admitirmos que (2.1) é satisfeita com $\mu = 0$*, o uso de* $v_\epsilon = \varphi w_\epsilon$ *com* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *em* (iv) *de (2.1), implica que*

$$w_\epsilon \to 1, \text{ fortemente em } H^1_{Loc}(\Omega),$$

isto nos diz que a condição $\mu = 0$ *em (2.1) pode ser entendida como uma " versão local" de (6.1), onde* $H^1(\Omega)$ *é substituída por* $H^1_{Loc}(\Omega)$.

Exemplo 6.1 *Um exemplo em que o quadro de hipóteses (6.1) é satisfeito, se dá quando* Ω *é periodicamente perfurado por buracos* S_ϵ *da forma* S *dada no exemplo (2.1) e tamanho como em (6.2) (ver observação (2.2)).*

Outro exemplo que satisfaz (6.1) é o caso onde S_ϵ *é a união de um número finito* N *(fixo) de buracos que se dissipam, ou seja,*

$$S_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N} S_i^\epsilon,$$

com S_i^ϵ *conjuntos fechados tais que* $S_i^\epsilon \subset K$ *para algum* K *tal que* $\overline{K} \subset \Omega$ *e*

$$diam(S_i^\epsilon) \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

Teorema 6.1 *Suponhamos que o quadro de hipóteses (6.1) seja satisfeito e consideremos uma seqüência de dados que satisfazem (4.1). Então, a sequência* u_ϵ *de soluções de (3.1) satisfaz:*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \textit{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \widetilde{u}_\epsilon{}' \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \textit{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t), & \textit{fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ \widetilde{u}_\epsilon{}' \rightharpoonup u'(t), & \textit{fracamente em } L^2(\Omega), \end{cases}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde o limite u é a única solução de:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f, & \textit{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0, & \textit{em} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1, & \textit{em} \quad \Omega \\ u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{6.3}$$

Além disso, se os dados satisfazem

$$\begin{cases} \widetilde{f}_\epsilon \rightarrow & f, \quad \textit{fortemente em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)) \\ \widetilde{u}_\epsilon^0 \rightarrow & u^0, \quad \textit{fortemente em} \quad H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u}_\epsilon^1 \rightarrow & u^1, \quad \textit{fortemente em} \quad L^2(\Omega), \end{cases} \tag{6.4}$$

então,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon \rightarrow & u, \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \\ \widetilde{u}_\epsilon' \rightarrow & u', \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T];L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{6.5}$$

Observação 6.2 *Notemos que a substituição da hipótese (2.1) pela hipótese (6.1) implica que a condição (6.4) equivale à hipótese do teorema (5.1).$\lceil$ Com efeito, quando (5.1) e (6.1) são satisfeitas, o teorema (2.1) nos dá a convergência forte de $\widetilde{u}_\epsilon^0$ para u^0, em $H_0^1(\Omega)$, pois $\mu = 0$ em (2.10). Reciprocamente, $g_\epsilon = -\Delta\widetilde{u}_0^\epsilon$ e $g = -\Delta u^0$ claramente satisfazem (5.1)$\rfloor$.*

Demonstração: (do teorema (6.1)) A demonstração da primeira parte do teorema (6.1) (passagem ao limite em (3.1)) é uma mera reformulação dos teoremas (4.1) e

(4.2). Por outro lado, as hipóteses em (5.3) implicam que as hipóteses do teorema (5.2) sobre os dados u_ϵ^0, u_ϵ^1 e f_ϵ são satisfeitas, então $(6.5)_2$ é dada por (5.25).

Para demonstrarmos $(6.5)_1$, procederemos como na demonstração do teorema (5.2). Seja $\varphi_k \in \mathcal{D}(Q)$ uma seqüência satisfazendo (5.29).

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} &\leq \|\nabla(\widetilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+\|\nabla((1-w_\epsilon)\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+\|\nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Raciocinando como na demostração do teorema (5.2), e usando agora a convergência forte de w_ϵ para 1, em $H^1(\Omega)$, no segundo termo após a desigualdade (6.6) (esta é a novidade importante aqui), obtemos facilmente $(6.5)_1$.

$\square$

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos a definição e enunciaremos alguns resultados sobre medidas de *Radon* e provaremos a densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ no espaço V, definido em (2.8).

A.1 Medidas de Radon (ou medidas de ordem zero)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e K um subconjunto compacto de Ω. O espaço

$$C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp } \varphi \subseteq K\},$$

munido da norma

$$\|\varphi\|_K = \max \{|\varphi(t)| : t \in K\},$$

é um espaço de Banach.

Definição A.1 *Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $C_c(\Omega)$, escreveremos $\varphi_n \twoheadrightarrow 0$ se, e somente se, existir um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tal que*

(i) supp $\varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\varphi_n \to 0$, uniformemente em Ω.

Dizemos, então, que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, em (ou no sentido de) $C_c(\Omega)$.

Definição A.2 *Uma medida de Radon real μ, em Ω, é uma forma linear em $C_c(\Omega)$, que é contínua no sentido em que $\{\varphi_n\}_n \subset C_c(\Omega)$ e $\varphi_n \twoheadrightarrow 0$, juntos, implicam $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\varphi_n) = 0$.*

Analogamente define-se medida de Radon complexa.

Proposição A.1 *Uma forma linear μ em $C_c(\Omega)$ é uma medida de Radon, se, e somente se, para todo conjunto $k \subset \Omega$, existir $m_k > 0$ tal que*

$$\|\mu(\varphi)\| \leq m_k \|\varphi\|_K, \ \forall\, \varphi \in C_c(\Omega),$$

com supp f contido em K.

Definição A.3 *Uma medida de Radon real μ, em Ω, é positiva no seguinte sentido: para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$, com $\varphi(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$,*

$$\int_\Omega \varphi(x) d\mu(x) \geq 0.$$

Nesse caso

$$\mu(\varphi) = \sup\{\mu(\psi) : \psi \in C_{c+}(\Omega),\ \psi \leq \varphi\},$$

para cada φ em $C_{c+}(\Omega)$, conjunto das funções positivas em $C_c(\Omega)$.

Exemplo A.1 *São exemplos de medidas de Radon: medida de Lebesgue, medida atômica, densidades, medida de Lebesgue-Stiltjes.*

A.2 Um Resultado de Densidade

Teorema A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado. Consideremos $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ uma medida de Radon finita e positiva sobre Ω. Então $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu)$.*

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três etapas:

1ª etapa - Densidade de $V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$ em V

Sejam $v \in V$ e $r \geq 0$. Definamos

$$T_r v = \begin{cases} r, & \text{se} \quad v \geq r \\ v, & \text{se} \quad |v| \leq r \\ -r, & \text{se} \quad v \leq -r. \end{cases}$$

Temos que $T_r v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \ \forall r \geq 0$ e que

$$T_r v \to v, \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega), \text{ quando } r \to \infty.$$

Também, $|T_r(x)| \leq r, \ \forall x \in \Omega$, exceto sobre um conjunto de capacidade zero.

Sendo μ uma medida de *Radon* pertencente a $H^{-1}(\Omega)$, e como todo conjunto de capacidade zero é μ - medida zero, temos que $|T_r v(x)| \leq r, \ \forall x \in \Omega$, exceto sobre um conjunto de medida zero.

Logo, $T_r v \in L^\infty(\Omega; d\mu) \subset L^2(\Omega; d\mu)$. Com isso, $T_r v \in V$.

Da convergência forte de $T_r v$ para v, em $H_0^1(\Omega)$, existe uma subseqüência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que $T_r v(x) \to v(x), \ \forall x \in \Omega$, exceto sobre um conjunto de capacidade zero.

Assim, $T_r v(x) \to v(x), \ \forall x \in \Omega$, exceto sobre um conjunto de μ - medida zero.

Aplicando o teorema de *Lebesgue*, temos $T_r v \to v$, fortemente em $L^2(\Omega; d\mu)$, quando $r \to \infty$.

Portanto, $V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$ é denso em V.

2ª etapa - Densidade de $V \cap C_c^0(\Omega)$ em V

Consideremos $v \in V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$ e v_r uma seqüência tal que

$$\begin{cases} v_r \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ para cada } r \text{ fixo}, \\ v_r \to v, \text{ fortemente em } \ H_0^1(\Omega), \text{ se } r \to \infty. \end{cases}$$

Seja $M = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v\|_{L^\infty(\Omega;d\mu)}$ e consideremos a seqüência $w_r = T_{M+1}v_r$. Temos que $w_r \in C_c^0(\Omega)$.

Sendo a aplicação $T_{M+1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, contínua, segue que

$$w_r = T_{M+1}v_r \to T_{M+1}v = v, \ \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega), \ \text{ se } r \to \infty.$$

Para uma subseqüência adequada, temos que $w_r(x) \to v(x), \ \forall x \in \Omega$, exceto sobre um conjunto de μ - medida zero.

Como $|w_r(x)| \leq M+1$, exceto sobre um conjunto de μ - medida zero, pelo teorema de *Lebesgue*, $w_r \to v$, fortemente em $L^2(\Omega; d\mu)$, se $r \to \infty$.

Logo, para $v \in V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$, temos

$$\begin{cases} w_r \in V \cap C_c^0(\Omega) \\ w_r \to v, \ \text{fortemente em } \ V, \ \text{quando } r \to \infty, \end{cases}$$

usando a 1ª etapa, segue que $V \cap C_c^0(\Omega)$ é denso em V.

3ª etapa - Aproximação de funções de $V \cap C_c^0(\Omega)$ por funções de $\mathcal{D}(\Omega)$

Seja $v \in V \cap C_c^0(\Omega)$ e definamos $v_\epsilon = \rho * v$, com $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\rho(\frac{x}{3})$, onde $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é uma função não-negativa com suporte compacto contido na bola unitária do $\mathbb{R}^n$ e satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.

Temos que, para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, $v_\epsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Também,

$$v_\epsilon \to v, \ \text{fortemente em } H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \ \text{quando } \epsilon \to 0.$$

Sendo μ uma medida de *Radon* finita, temos $C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega; d\mu)$.

Logo,

$$v_\epsilon \to v, \ \text{fortemente em } L^2(\Omega; d\mu), \ \text{quando } \epsilon \to 0.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Brahim,S.-Otsmane; Francfort, G. A. and Murat, F. - Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures et Appl.* **71:3**, p. 197-231, (1992).

[2] Brézis, H. - Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, S.A., Madrid, (1984).

[3] Brézis, H.; Browder, F.E. - Some properties of higher order Sobolev spaces, *J. Math. Pures et Appl.* **61**, p. 242-259, (1982.)

[4] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N. - Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, **Vol I e II**, DMA/UEM, Maringá - (2000).

[5] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Soriano, J. A. and Souza, J. S. - Homogenization and uniform stabilization for a nonlinear hyperbolic equation in domains with holes of small capacity, *Eletronic Journal of Differential Equation*, USA, v. 2004,**55**, p. 1-19, (2004).

[6] Cioranescu, D.; Donato, P. - Exact internal controllability in perforated domains *J. Math. Pures et Appl.* **68**, p. 185-213, (1989).

[7] Cioranescu, D.; Donato, P.; Murat, F.; Zuazua, E. - Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **18**, p. 251-293, (1991).

[8] Cioranescu, D.; Donato, P.; Zuazua, E. - Exact bondary controllability for the wave equation in domains with small holes, *J. Math. Pures et Appl.*, **71**, p. 343-377, (1992).

[9] Cioranescu, D.; Murat, F. - Un terme étrange venu d'alleurs. Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (H. Brézis and J. L. Lions, eds), *Collége de France Seminar*, **vol. II e III**, *Research Notes in Mathematics*, **vol. 60 e 70**, p. 93-138 e 154-178, (1982).

[10] Diestel, J.; Uhl, J.J. - Vector Measures. Mathematical Surveys, **15**, American Mathematical Society, Providence, (1977).

[11] Edwards, R.E. - Functional analysis: theory and applications. Dover Publications, INC. New York, (1995).

[12] Lima, E.L. -Curso de análise vol. 1, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1992)

[13] Kacimi, H. - Homogénéisation de problémes de Dirichlet avec des petitstrous Thése de 3éme cycle, Université Paris VI, (1987).

[14] Kacimi, H.; Murat, F. - Estimation de l'erreur dans des problémes de Dirichlet où apparaît un terme e'trange, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (F. Colombini, A. Marino, L. Modica and S. Spagnolo), vol.II, Essays in Honor of Ennio de Giorgi, Birkhäuser, Boston, p. 612-693, (1989).

[15] Lesmes, J.- Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais - Conselho Nacional de Pesquisas - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro.

[16] Lions, J.L. - Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **10:1**, 125-140, (1980).

[17] Lions, J.L. - Problèmes auxs limites dans les équations aux derivées partielles. Press de l'Université de Montreal, Montreal, (1965).

[18] Lions, J.L.; Magenes, E. - Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, (1968).

[19] Medeiros, L.A. - Exact controllability for the wave equations - HUM. 37^o Seminário Brasileiro de Análise, Maio, (1993).

[20] Medeiros, L.A.; Miranda, M.M. - Iniciação aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

[21] Medeiros, L.A.; Mello, E.A. - Teoria da integração. IM - UFRJ, Rio de Janeiro, (1979).

[22] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Iniciação aos espaços de Sobolev. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).

[23] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Espaços de Sobolev e equações deferenciais parciais - Textos de métodos matemáticos. . IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1975).

[24] Rivera, J.E.M. - Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. Série: textos avançados, LNCC, Petrópolis, Rio de Janeiro, (1999).

[25] Simon, J. - Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, **146 IV**, p. 65-96, (1987).

[26] Souza, J.S. - Homogenization of the heat equation in open sets perforated with tiny holes, *Computational and applied Mathematics*, Rio de Janeiro, Brasil, **21,** n^o **2**, p. 461-484, (2002).

[27] Souza, J.S.; Kist, C.; Cavalcanti, M. - Homogenization for a nonlinear parabolic equation in domains with small holes,54^o *Seminário Brasileiro de Análise* - IBIILCE-UNESP, São José do Rio Preto, p. 515-530, (2001).

[28] Tartar, L. - Cours Peccot au Collège de France mar (1977), partially written in: F. Murat, *H*-Convergence, Séminaire d'Analyse Fonctionelle et Numérique de l'Université d'Alger, duplicated, p. 34, (1978).