Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Propriedades assintóticas das soluções de modelos de placas dissipativos com efeito de inércia rotacional em domínio exterior

Cleverson Roberto da Luz

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Propriedades assintóticas das soluções de modelos de placas dissipativos com efeito de inércia rotacional em domínio exterior

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis

Fevereiro de 2005

Propriedades assintóticas das soluções de modelos de placas dissipativos com efeito de inércia rotacional em domínio exterior

por

Cleverson Roberto da Luz

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática",

'Area de Concentração em Equações Diferenciais Parciais', e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-**Orientador**)

Profª. Drª. Vanilde Bisognin (UNIFRA-RS)

Profª. Drª. Eleni Bisognin (UNIFRA-RS)

Prof. Dr. Jauber Cavalcante de Oliveira (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2005.

À Deus

À minha esposa, Josimara

Aos meus pais, Dirceu e Margarida

Ao meu irmão Reginaldo

Agradecimentos

À Deus que não sessou de interceder por mim.

Aos meus pais e minha família pelos valores que me ensinaram, pelo apoio e compreensão.

Aos meus amigos pela seriedade que tiveram nas horas de estudo e pelas alegrias nos momentos de descontração, deixando saudades do tempo que passou e a esperança de um reencontro.

À todos os professores que estiveram presentes na minha formação, pelos ensinamentos, críticas, conselhos e incentivo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço à José Claudinei Zampier pelo auxílio na correção deste trabalho e pela amizade e companheirismo.

Ao Professor Tadeu Peyer pela forma como ensina matemática e por ter sido o primeiro a acreditar em mim.

À minha esposa Josimara, que me acompanhou em todos os passos desta caminhada, por tudo que passamos e iremos passar juntos.

Ao meu orientador e amigo Professor Ruy Coimbra Charão, pela forma como conduziu este trabalho, pelo apoio e incentivo e pela maneira como ensina e convive com seus alunos, se tornando um exemplo a ser seguido.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência e unicidade de soluções globais do problema de valor inicial e de fronteira associado a uma equação de placas semilinear com efeitos de inércia rotacional em um domínio exterior do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Consideramos os casos conservativo e dissipativo. Para o caso linear dissipativo obtemos taxas polinomiais de decaimento no tempo para a energia e a norma L^2 da solução. As taxas melhoram com a regularidade dos dados iniciais. Para o caso semilinear dissipativo é estudado primeiro a existência de soluções locais fracas. Para dados iniciais mais regulares mostramos a existência global de soluções fortes simultaneamente com o comportamento assintótico da energia.

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of global solutions of the initial boundary value problem associated to the semilinear plate equation with rotational inertia effects in a exterior domain of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. We have considered the dissipative and non dissipative cases. For the linear dissipative case we obtain polynomial decay rates in time for the energy and the L^2- norm of the solution. The decay rates are improved if the initial data are more regular. For the semilinear dissipative case we first show the existence of local weak solutions. The existence of global strong solutions is obtained simultaneously with the asymptotic behavior of the energy.

Conteúdo

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para o seguinte problema semilinear de valor inicial e de fronteira dissipativo para a equação de placas com inércia rotacional em um domínio exterior de $\mathbb{R}^n$, a saber:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \gamma \triangle u_{tt}(x,t) + \triangle^2 u(x,t) + \lambda u_t(x,t) + \beta u(x,t) = |u(x,t)|^p & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio exterior, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{O}$, $n \geq 2$, sendo $\mathcal{O}$ um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Os coeficientes da equação são tais que $\beta, \lambda \geq 0$ e $\gamma > 0$ constantes. No problema acima $u = u(x,t)$ representa o deslocamento da placa no ponto x e no instante de tempo t. O expoente p no termo não linear é constante e assumimos que $1 < p < \frac{n}{n-2}$ se $n > 2$ e $1 < p$ se $n = 2$. A notação $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,.)$ denota o valor da derivada de u na direção da normal exterior unitária η no ponto $x \in \partial\Omega$. Os dados iniciais u_o e u_1 são escolhidos de modo que $[u_0, u_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. O problema acima é um modelo opcional, para certos casos, do modelo para vibrações de placas finas dado pelo sistema completo de von Kármán que tem sido estudado por muitos autores, como pode ser visto no trabalho de J. Luyo [21] e suas referências. J. Luyo estudou a existência e unicidade de soluções do sistema completo de von Kárman em um domínio exterior e no espaço todo, mas não o comportamento assintótico. De fato, Perla-Menzala e Zuazua [19] mostraram que a equação de placas pode ser obtida como um limite singular do sistema de von Kármán. Além disso, L. Luyo [21] provou que o modelo de placas termoelásticas é limite singular do sistema de von Kármán sob efeitos térmicos.

Neste trabalho mostramos estimativas de decaimento no tempo para a energia total do sistema acima e para a norma L^2 da solução. As taxas obtidas são polinomiais, embora a dissipação considerada seja linear. Isso é devido a natureza do problema em um domínio exterior. Mesmo para o caso da equação da onda linear, em um domínio exterior, as taxas que tem sido obtidas são polinomiais, como pode ser visto em Nakao [16], Ikehata [9] [10] e suas referências.

Para estudar o problema acima, a idéia é estudar primeiro de maneira completa o caso linear para depois estudar o caso semi-linear usando as estimativas obtidas para o caso linear. Mesmo o caso linear é dividido em partes. Primeiro estuda-se o problema com $\beta > 0$ e depois o caso $\beta = 0$. O trabalho é dividido em capítulos. No capítulo 2 estudamos a existência e unicidade para o caso linear, via teoria de semigrupos , usando idéias de J. Luyo [21]. No capítulo 3 é estudado o comportamento assintótico para os dois casos lineares mencionados acima. No capítulo 4 é estudado a existência, unicidade e o comportamento assintótico do caso semi-linear. A existência local de soluções fracas para esse caso é obtida via teorema de ponto fixo usando o semigrupo obtido no estudo do caso linear. A existência global e o decaimento, em taxas polinomiais no tempo, são obtidas, simultâneamente, por argumentos análogos como em Ikehata [9] [10], Nakao [16].

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser todo $\mathbb{R}^n$.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de f, que será denotado por ∇f, é definido como o vetor do $\mathbb{R}^n$ dado por $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

5. Se $x \in \partial\Omega$ e u é diferenciável em x então $\dfrac{\partial\, u}{\partial\, \eta}(x) = \eta(x).\bigtriangledown u(x)$ é a derivada normal em x, sendo $\eta(x)$ o vetor unitário exterior a Ω em x.

6. Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o *divergente* de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, denotado por $\operatorname{div}\mathbf{F}$, como $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

7. O *laplaciano* de uma função f é definido como $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por $\triangle f$.

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, c é uma constante real e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$.

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

4. $\operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$.

5. $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \bigtriangledown f.F$.

Observação: O ponto "."em $x \,.\, y$ indica o produto interno em $\mathbb{R}^n$ do vetor x e y.

1.2 Distribuições

Seja u uma função numérica definida em Ω, u mensurável, e seja $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i\in I} K_i$. Então

$$u = 0 \quad \textit{quase sempre em } K.$$

Como conseqüência, define-se o *suporte* de u, que será denotado por *supp* u, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\ (u) = \Omega / K.$$

Definição 1.1 *Representamos por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$*, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de* Ω*. Os elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* $C_0^\infty(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*. Dizemos que* $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ *se:*

i) $\exists\ K \subset \Omega$, *$K$ compacto, tal que supp* $\varphi_k \subset K$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*;*

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \longrightarrow D^\alpha \varphi(x)$ *uniformemente em* $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com a noção de convergência definida acima é denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *O conjunto de todas as distribuições sobre* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ o valor de T aplicado ao elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que* $T_k \longrightarrow T$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se* $< T_k, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6 *Sejam* Ω *um conjunto mensurável e* $1 \leq p \leq \infty$. *Indicamos por* $L^p(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *tais que* $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ *onde:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}},\ se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ /\ med\{x \in \Omega\ /\ |f(x)| > C\} = 0\}$$

$$= \inf\{C; \quad |f| \leq C \quad \textit{quase sempre}\}.$$

Observação: As funções $\|\,.\,\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+, \;\; 1 \leq p \leq \infty,$ são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.1 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $\;1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.2 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \, \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha \dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7 *Sejam Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde χ_K é a função característica de K.*

Observação: $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.1). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [5], Kesavan [11] e Medeiros [14], [15].

Definição 1.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \quad |\alpha| \leqslant m\}.$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.

3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.11 *Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.12 *Uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito, se é infinitamente diferenciável e*

$$p_k(f) = \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |(D^\alpha f)(x)| < \infty, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito.

Considere o espaço vetorial $S(\mathbb{R}^n)$, no qual definimos a seguinte noção de convergência: uma sucessão $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ converge para zero, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sucessão $\{p_k(f_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{K}$. A sucessão $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para f em $S(\mathbb{R}^n)$ se $\{p_k(f_\nu - f)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As formas lineares definidas em $S(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $S(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições temperadas*. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sucessões será representado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.13 *Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então denotamos por $\mathbb{F}f$ a Transformada de Fourier de f dada por*

$$(\mathbb{F}f)(x) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\}^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x.y)}\, f(y)\, dy.$$

Definição 1.14 *Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u_\nu = u\mathcal{X}_{B_\nu(0)}$ onde $\mathcal{X}_{B_\nu(0)}$ é a função característica da bola de raio ν e centro na origem, e $\mathbb{F}u_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, as funções*

$$(\mathbb{F}u_\nu)(x) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\}^{\frac{n}{2}} \int_{\|y\|\leq\nu} e^{-i(x.y)}\, u_\nu(y)\, dy$$

para todo x no $\mathbb{R}^n$. Mostra-se que $\mathbb{F}u_\nu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que $\{\mathbb{F}u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. O limite em $L^2(\mathbb{R}^n)$ da sucessão $\{\mathbb{F}u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é denotado por $\mathbb{F}u$

Proposição 1.1 (Identidade de Plancherel) *Para toda função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem-se que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbb{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposição 1.2 *O espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ coincide com o conjunto*

$$\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^n);\;\; J_m\mathbb{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde J_m é a função dada por $J_m(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}},\ x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, a função $|||\ .\ |||_m : H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$|||u|||_m = \|J_m\mathbb{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

é uma norma equivalente à norma de Sobolev.

A partir dessa proposição se define:

Definição 1.15 *Para $s \in \mathbb{R}^+$, indicaremos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ o conjunto*

$$\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^n);\;\; J_s\mathbb{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $J_s(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}},\ x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.3 *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:*

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J_s\mathbb{F}u, J_s\mathbb{F}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.16 *Um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dito ser bem regular se a fronteira de Ω é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ e Ω estando localmente de um mesmo lado da fronteira.*

Observação: Seja $R > 0$. O interior de um círculo de raio R em $\mathbb{R}^2$ é um exemplo de aberto bem regular. Já o interior de um quadrado de lado R em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, porém, não um aberto bem regular.

Definição 1.17 *Sejam $s \geq 0$ e Ω um conjunto aberto limitado bem regular. O espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ é definido por*

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $v|_\Omega$ indica a restrição de v ao aberto Ω.

Para cada $u \in H^s(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ e } v\,|_\Omega = u\}$$

define uma norma em $H^s(\Omega)$.

Observações

1. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

2. $H^s(\Omega)$, $s > 0$, é um espaço de Hilbert.

3. $H^s(\Omega)$ coincide com o espaço usual de Sobolev $H^m(\Omega)$, definido anteriormente, se $s = m \in \mathbb{N}$ e se $\partial\Omega$ for regular. Tal resultado é provado usando a teoria do prolongamento (ver Adams [1], Kesavan [11] e Medeiros [14]).

4. $H_0^s(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$. Além disso, $H_0^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$.

5. $H^{-s}(\Omega)$ é definido como sendo o dual de $H_0^s(\Omega)$, $s > 0$.

Os espaços $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.18 *Seja $\bar{\Omega}$ o fecho de Ω em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_{\bar{\Omega}};\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação: $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$.

Definição 1.19 *Denotaremos por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ u \in C^\infty(\Gamma) \text{ e tem suporte compacto em } \Gamma\}$$

onde Γ denota a fronteira de Ω, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$.

Seja $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{K}$. Então $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ está bem definida como uma função de Γ em $\mathbb{K}$. Com isto tem-se que se $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ então $\gamma_0 u \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Definição 1.20 *Um sistema de cartas locais para Ω é uma família $(\varphi_i, U_i)_{i\in I}$ tal que U_i é um aberto limitado e,*

i) para todo $i \in I$:

$$\varphi_i : \bar{U}_i \longrightarrow \bar{Q},$$

onde $Q = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, ..., n-1 \text{ e } -1 < x_n < 1\}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ tal que

- $\varphi_i(U_i \cap \Omega) = Q^+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \ 0 < x_i < 1,\ \ i = 1, ..., n\}$;

- $\varphi_i(\overline{U}_i \cap \partial\Omega) = \Gamma_0 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leq x_i \leq 1,\ \ i = 1, ..., n-1$ *e* $x_n = 0\}$;

- $\varphi_i(\partial(U_i \cap \Omega)) = \partial Q^+$.

ii) $\partial\Omega \subset U = \bigcup_{i \in I} U_i$;

iii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *e se* $W_i = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ *e* $W_j = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *então* $\varphi_j(\varphi_i^{-1}) : W_i \longrightarrow W_j$ *e* $\varphi_i(\varphi_j^{-1}) : W_j \longrightarrow W_i$ *são de classe* C^∞.

Agora, sejam $(\psi_1, U_1), \cdots, (\psi_N, U_N)$ um sistema de cartas locais e $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ funções testes do $\mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i(x) = 1$ para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$ e *supp* $\sigma_i \subset U_i$ (tais funções existem pois Ω é um aberto limitado bem regular).

Para uma função w definida em $\Gamma = \partial\Omega$ sejam $w_j : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}$, $j = 1, 2, \cdots, N$ funções definidas por:

$$w_j(x') = \begin{cases} (\sigma_j w)(\psi_j^{-1}(x', 0)), & \text{se } x' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1}. \\ 0, & \text{se } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

Definição 1.21 *Denotaremos por* $H^s(\Gamma)$ *o conjunto das funções* $w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que* $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, \cdots, N$, *onde* w_j *são definidas acima. Isto é,*

$$H^s(\Gamma) = \{w : \Gamma \longrightarrow \mathbb{K};\ w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, \cdots, N\}.$$

Observações

1. Para $u, v \in H^s(\Gamma)$, a função

$$(u, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (u_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

define um produto interno sobre $H^s(\Gamma)$.

2. $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

3. $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.4 *A aplicação*

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definida por $\gamma_0 u = u|_\Gamma$*, é contínua na topologia de* $H^1(\Omega)$*, isto é, existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Como $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, em particular em $H^1(\Omega)$, segue da proposição acima que existe uma aplicação, que continuaremos denotando por γ_0, de $H^1(\Omega)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ linear e contínua que estende γ_0, isto é, tal que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ para toda $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Esta aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é chamada de função traço e seu valor em um dado $u \in H^1(\Omega)$ é chamado o traço de u sobre Γ.

Teorema 1.3 (Teorema do traço) *Seja* Ω *um conjunto aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$ *. A função traço*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é sobrejetiva e $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Observação: Quando dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ anula na fronteira de Ω, isto é, que $u = 0$ sobre $\Gamma = \partial\Omega$, na verdade significa que $\gamma_0 u = 0$ sobre Γ.

1.5 Imersões de Sobolev

Teorema 1.4 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.*

i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$;

iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

1.6 Desigualdades importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

1.7 Teorema da divergência e fórmula de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω bem regular:

i.

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})(x)\, dx = \int_\Gamma \mathbf{F}(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma, \quad \mathbf{F} \in \left[H^1(\Omega)\right]^n.$$

ii.

$$\int_\Omega v(x)\triangle u(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla u(x)\,dx, \quad v\in H_0^1(\Omega),\ u\in H^2(\Omega)$$

iii.

$$\int_\Omega v(x)\triangle u(x)\,dx = \int_\Omega \triangle v(x)u(x)\,dx,\ \ v\in H_0^2(\Omega),\ u\in H^2(\Omega)$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x\in\partial\Omega$. A função $\mathbf{F}$ integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço, isto é, $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F}(x)\cdot\eta(x)\,d\Gamma$ significa $\displaystyle\int_\Gamma (\gamma_0\mathbf{F})(x)\cdot\eta(x)\,d\Gamma$.

1.8 Teorema do valor médio para integrais

Teorema 1.5 *Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo [a,b]. Então, existe um número $c\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(s)\ ds = f(c)(b-a).$$

1.9 Operadores elípticos

Definição 1.22 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m\in\mathbb{N}$ da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha(x)D^{2\alpha}u,\ \ x\in\Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C>0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha(x)\xi^{2\alpha}\ge C|\xi|^{2m}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ e para todo $x\in\Omega$.

Teorema 1.6 (Teorema de regularidade elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2] (ver também Perla Menzala [18]).

1.10 Teorema da aplicação aberta

Definição 1.23 *Seja X e Y espaços métricos. Então $T : D(T) \longrightarrow Y$ com domínio $D(T) \subset X$ é dito uma aplicação aberta, se para todo conjunto aberto de $D(T)$ a imagem é um conjunto aberto de Y.*

Teorema 1.7 (Aplicação aberta) *Um operador linear limitado T de um espaço de Banach X em outro espaço de Banach Y é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetiva, T^{-1} é contínua.*

A demonstração do teorema da aplicação aberta pode ser encontrada em Kreyszig [12]

1.11 Forma bilinear e Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.24 *Seja H um espaço de Hilbert real. Um funcional $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado uma forma bilinear se $B(., y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x, .)$ é linear para cada $x \in H$.*

B é chamado de limitado (contínuo) se existe uma constante K tal que

$$|B(x,y)| \leq K\|x\|\ \|y\|, \qquad \forall\ x, y \in H.$$

B é chamado coercivo se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x,x) \geq \delta\|x\|^2, \qquad \forall\ x \in H.$$

Teorema 1.8 (Lax-Milgram) *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x,u) = F(x), \qquad \forall\ x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [5].

1.12 Semigrupos de operadores lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Alvercio [7], Brezis [5] e Pazy [17].

Definição 1.25 *Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

I- *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $L(X)$;*

II- *$S(t+s) = S(t)\,S(s), \qquad \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III- $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \qquad \forall\, x \in X.$

Proposição 1.5 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \longrightarrow t} S(s)x = S(t)x, \qquad \forall\, x \in X.$$

Definição 1.26 *Se $\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall\, t \geq 0$, S é dito semigrupo de contrações de classe C_0.*

Definição 1.27 *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ \; x \in X \mid \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x \quad existe \; \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x, \qquad \forall\, x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.6 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em X.*

Proposição 1.7 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A) \quad \forall\, t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)\, x = A\, S(t)\, x = S(t)\, Ax.$$

Definição 1.28 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k pondo*

$$D(A^k) = \{x \mid x \in D(A^{k-1}) \;\; e \;\; A^{k-1}x \in D(A)\}$$

$$A^k x = A(A^{k-1}x), \qquad \forall\, x \in D(A^k).$$

Proposição 1.8 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

I- *$D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X;*

II- *Se $x \in D(A^k)$ então $S(t)\,x \in D(A^k) \quad t \geq 0$ e*

$$\frac{d^k}{dt^k}\,S(t)\,x = A^k\,S(t)\,x = S(t)\,A^k\,x, \qquad \forall\ k \in \mathbb{N};$$

III- *$\bigcap_k D(A^k)$ é denso em X.*

Lema 1.2 *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\| \tag{1.1}$$

o funcional $|.|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ munido da qual $D(A^k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.29 *A norma (1.1) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A^k)$ da norma (1.1) será representado por $[D(A^k)]$.*

Teorema Lumer-Phillips

Definição 1.30 *Seja A operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, representado por $R(\lambda, A)$, é dito resolvente de A.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Ponhamos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^* | \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset \quad \forall\, x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \quad \forall\, x \in X$.

Imediatamente se vê que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.31 *Diz-se que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j,*

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0 \qquad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.9 (Lumer-Phillips) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 então:*

i- *A é dissipativo;*

ii- *$R(\lambda - A) = X, \quad \lambda > 0 \qquad (R(\lambda - A) =$ imagem de $\lambda - A \equiv \lambda I - A)$.*

Reciprocamente, se

i- *$D(A)$ é denso em X;*

ii- *A é dissipativo;*

iii- *$R(\lambda_0 - A) = X, \quad$ para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Capítulo 2

Equação Linear de Placas - Existência e Unicidade

Neste capítulo, mostramos através da teoria de semigrupos, a existência e unicidade de soluções fracas, para o seguinte problema de Cauchy associado a uma equação de placas com inércia rotacional em um domínio exterior:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - \gamma \triangle v_{tt}(x,t) + \triangle^2 v(x,t) + \lambda v_t(x,t) + \beta v(x,t) = 0 & em \;\; \Omega \times (0,\infty) \\ v(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega \\ v_t(x,0) = v_1(x) & x \in \Omega \\ v(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial \eta}(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \;\; t \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é o domínio exterior, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{O}$, $n \geq 2$, sendo $\mathcal{O}$ um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $[v_0, v_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, $\beta, \lambda \geq 0$ e $\gamma > 0$ constantes. A função $v = v(x,t)$ descreve o deslocamento transversal da placa. O termo $\lambda v_t(x,t)$, se $\lambda > 0$, representa uma dissipação friccional na placa. Assim, se $\lambda > 0$, o sistema (2.1) é dissipativo.

Finalmente, dizemos que neste trabalho o produto interno em $L^2(\Omega)$ será indicado por $(\ .\ )$ e a norma em $L^2(\Omega)$ por $\|\,.\,\|$.

2.1 Equação linear não dissipativa com $\beta > 0$

Nesta seção, mostramos a existência e unicidade de soluções fracas, do problema de valor inicial e de fronteira (2.1), com $\lambda = 0$ e $\beta > 0$, de modo que o problema (2.1) não tem uma natureza dissipativa.

Agora, queremos definir um operador A com domínio em $H_0^2(\Omega)$. Definimos seu domínio como sendo o subespaço de $H_0^2(\Omega)$ dado por:

$$
\begin{aligned}
&D(A) = \{v \in H_0^2(\Omega) \ / \ \exists\, y = y_v \in H_0^1(\Omega),\\
&(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (y, \psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega)\}
\end{aligned}
$$

Da definição de $D(A)$ é natural definir o operador A, como:

$$
\begin{gathered}
A : D(A) \longrightarrow H_0^1(\Omega)\\
Av = y_v, \qquad v \in D(A)
\end{gathered}
$$

Mostraremos no lema 2.1 que A está bem definido.

Teorema 2.1 *Seja $n \geq 2$. Para $[v_0, v_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, o problema (2.1) com $\lambda = 0$ e $\beta > 0$ admite uma única solução fraca v, tal que*

$$
v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \ ,
$$

$$
\begin{cases}
(v_{tt}(t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown \psi) + (\triangle v(t), \triangle \psi) + \beta(v(t), \psi) = 0, & \forall\ t > 0\\
v(x,0) = v_0(x) \quad e \quad v_t(x,0) = v_1(x) \qquad x \ em\ \Omega
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Demonstração:

Fazemos a demonstração usando teoria de semigrupos e seguindo idéias de Luyo [21] e nos lemas a seguir.

As idéias da prova são as seguintes.

Definir o operador:

$$B : D(B) = D(A) \times H_0^2(\Omega) \subset H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

por

$$B[v, w] = [w, -Av], \qquad [v, w] \in D(B)$$

onde A é o operador definido acima.

O trabalho será mostrar que B gera um semigrupo de contrações de classe C_0. Feito isso, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Z(t) = BZ(t), & \forall\ t > 0 \\ Z(0) = Z_0 = [v_0, v_1] \in D(B) \end{cases} \tag{2.3}$$

pela teoria de semigrupos (A. Gomes [7]), tem única solução $Z(t) = [v(t), w(t)]$ na classe

$$Z \in C([0, \infty); [D(B)]) \cap C^1([0, \infty); H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \tag{2.4}$$

onde $[D(B)]$ representa o espaço $D(B)$ munido da norma do gráfico.

Além disso, como será mostrado no lema 2.2,

$$\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C\, \|Av\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\ v \in D(A) \ \ \textit{onde}\ \ C \in \mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

Assim, pela definição de B

$$[v_t(t), w_t(t)] = [w(t), -Av(t)], \qquad t \geq 0$$

Isto é:

$$\begin{cases} w(t) = v_t(t), & \forall\ t > 0 \\ -Av(t) = w_t(t) = v_{tt}(t), & \forall\ t > 0. \end{cases}$$

Então, disso resulta de (2.4) e (2.5) que

$$v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

e além disso, da definição de A tem-se que $\forall\ \psi \in H_0^2(\Omega)$

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v,\psi) = (Av,\psi) + \gamma(\bigtriangledown(Av), \bigtriangledown\psi) = (-v_{tt},\psi) + \gamma(\bigtriangledown(-v_{tt}), \bigtriangledown\psi).$$

Isto é,

$$(v_{tt},\psi) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}, \bigtriangledown\psi) + (\triangle v, \triangle\psi) + \beta(v,\psi) = 0, \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega)$$

e também $[v(0), v_t(0)] = Z_0 = [v_0, v_1]$.

Portanto, a primeira componente $v(t)$ de $Z(t)$ é a solução do problema (2.2).

Lema 2.1 *Para qualquer $v \in H_0^2(\Omega)$ existe no máximo um $y = y_v \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$(\triangle v, \triangle\psi) + \beta(v,\psi) = (y,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega). \tag{2.6}$$

Prova:

Se $y_1, y_2 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazem a relação (2.6), tem-se

$$(y_1,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y_1, \bigtriangledown\psi) = (y_2,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y_2, \bigtriangledown\psi), \qquad \forall \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Isto é,

$$(y_1 - y_2, \psi) + \gamma(\bigtriangledown(y_1 - y_2), \bigtriangledown\psi) = 0, \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Seja $y := y_1 - y_2$. Pela densidade de $H_0^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, existe $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in H_0^2(\Omega)$ tal que $\lim\limits_{\nu\longrightarrow\infty} \psi_\nu = y$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\|\psi_\nu - y\| \leq \|\psi_\nu - y\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0, \qquad \text{se}\ \ \nu \longrightarrow \infty. \tag{2.7}$$

Em particular

$$\|\psi_\nu\| \longrightarrow \|y\|, \qquad \text{se}\ \ \nu \longrightarrow \infty. \tag{2.8}$$

Mas, por (2.7) tem-se

$$\|\psi_\nu - y\|^2 = \|y\|^2 - 2(y, \psi_\nu) + \|\psi_\nu\|^2 \longrightarrow 0, \qquad \text{se}\ \ \nu \longrightarrow \infty. \tag{2.9}$$

Logo, usando (2.8) e (2.9) conclui-se que

$$\lim_{\nu\longrightarrow\infty} (y, \psi_\nu) = \|y\|^2, \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Analogamente,

$$\lim_{\nu\longrightarrow\infty} (\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi_\nu) = \| \bigtriangledown y\|^2, \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Assim, como

$$(y, \psi_\nu) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi_\nu) = 0, \qquad \forall\ \nu \in \mathbb{N}$$

obtém-se por passagem ao limite que

$$\|y\|^2 + \gamma\| \bigtriangledown y\|^2 = 0.$$

Isso implica que

$$\|y\|^2 = 0.$$

Logo

$$y_1 = y_2$$

e portanto o lema está provado.

$\square$

Observação 2.1 *Como $v \equiv 0 \in D(A)$, segue do lema 2.1 que A está bem definido.*

Lema 2.2 *$D(A) \subseteq H^3(\Omega)$ e $\exists\, C > 0$ tal que $\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|Av\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, v \in D(A)$.*

Prova:

Dado $v \in D(A)$ pela definição de $D(A)$, $\exists\, y \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\triangle v, \triangle\psi) + \beta(v,\psi) = (y,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi), \qquad \forall\, \psi \in H_0^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Seja $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle F, \psi\rangle = (y,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi), \qquad \psi \in H_0^1(\Omega).$$

É claro que F é linear e bem definido.

Também F é contínuo. De fato,

$$|\langle F,\psi\rangle| \leq |(y,\psi)| + \gamma|(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi)| \leq \|y\|\,\|\psi\| + \gamma\|\bigtriangledown y\|\,\|\bigtriangledown\psi\| \leq$$

$$(\|y\| + \gamma\|\bigtriangledown y\|)\,\|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, $F \in H^{-1}(\Omega)$.

Então o problema variacional (2.10) toma a seguinte forma:

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = \langle F, \psi \rangle, \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega). \tag{2.11}$$

Do fato que $F \in H^{-1}(\Omega)$, da teoria de interpolação, segue do problema variacional (2.11) que $v \in H^3(\Omega)$ e

$$\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Assim, $D(A) \subset H^3(\Omega)$.

Agora, como $F \in H^{-1}(\Omega)$ está definido em termos de $y \in H_0^1(\Omega)$ por:

$$\langle F, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} = (y, \psi) + \gamma(\triangledown y, \triangledown \psi), \qquad \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Então,

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\langle F, \eta \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)}}{\|\eta\|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|y\|\ \|\eta\| + \gamma \|\ \triangledown\ y\|\ \|\ \triangledown\ \eta\|}{\|\eta\|_{H^1(\Omega)}} \leq C\|y\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo de (2.12) tem-se que

$$\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|y\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ v \in D(A).$$

Como $Av = y$ (definição de A) resulta que a estimativa do lema está também provada.

$\square$

Lema 2.3 $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \subseteq D(A)$, *ou seja, dado* $v \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ *podemos encontrar* $y \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (y, \psi) + \gamma(\triangledown y, \triangledown \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega). \tag{2.13}$$

Prova:

Vamos provar que dado $v \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $\exists\ y \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$-(\bigtriangledown(\triangle v), \bigtriangledown\psi) + \beta(v, \psi) = (y, \psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown\psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $v \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\langle F, \psi\rangle = -(\bigtriangledown(\triangle v), \bigtriangledown\psi) + \beta(v, \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Então F está bem definido, é linear pois $v \in H^3(\Omega)$. Além disso, F é contínuo pois

$$|\langle F, \psi\rangle| \leq |(\bigtriangledown(\triangle v), \bigtriangledown\psi)| + \beta|(v, \psi)| \leq \| \bigtriangledown (\triangle v)\|\ \| \bigtriangledown \psi\| + \beta\|v\|\ \|\psi\| \leq$$

$$(\| \bigtriangledown (\triangle v)\|\ + \beta\|v\|)\ \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq (1+\beta)\|v\|_{H^3(\Omega)}\ \|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim $F \in H^{-1}(\Omega)$.

Seja $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$a(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) + \gamma(\bigtriangledown\varphi, \bigtriangledown\psi), \qquad \forall\ \psi, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $a(\,.\,,\,.\,)$ bem definida e

i) $a(\,.\,,\,.\,)$ é bilinear;

ii) $a(\,.\,,\,.\,)$ é coerciva:

$$a(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 + \gamma\| \bigtriangledown \varphi\|^2 \geq \min\{1, \gamma\}\ \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

iii) $a(\,.\,,\,.\,)$ é contínua:

$$|a(\varphi, \psi)| \leq |(\varphi, \psi)| + \gamma|(\bigtriangledown\varphi, \bigtriangledown\psi)| \leq \|\varphi\|\ \|\psi\| + \gamma\| \bigtriangledown \varphi\|\ \| \bigtriangledown \psi\|$$

$$\leq \sqrt{2}\max\{1, \gamma\}\ \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, o problema variacional

$$a(y,\psi) = \langle F, \psi \rangle, \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.14}$$

tem, pelo Teorema de Lax-Milgram, uma única solução $y \in H_0^1(\Omega)$.

Em particular (2.14) vale para cada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, isto é, existe único $y \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(y,\psi) + \gamma(\bigtriangledown y, \bigtriangledown \psi) = -(\bigtriangledown(\triangle v), \bigtriangledown \psi) + \beta(v,\psi), \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.15}$$

Mas, se $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se

$$-(\bigtriangledown(\triangle v), \bigtriangledown \psi) = (\triangle v, \triangle \psi).$$

Substituindo em (2.15) e usando a densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^2(\Omega)$ segue que (2.13) é válido.

Logo, pela definição de A tem-se que $v \in D(A)$, isto é, $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \subset D(A)$.

$\square$

Agora, consideramos o operador B definido no espaço $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, cujo domínio é dado por

$$D(B) = \{(v,w) \in D(A) \times H_0^2(\Omega)\}$$

e é calculado por

$$B[v,w] = [w, -Av]\ , \qquad \forall\ (v,w) \in D(B) \tag{2.16}$$

sendo A o operador introduzido no início desta seção.

Lema 2.4 *Se* $\mu \in \rho(B)$ *e* $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|R(\mu, B)\|}$ *então* $\lambda \in \rho(B)$*, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \ R(\mu, B)^{n+1}$$

converge e

$$R(\lambda, B) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \ R(\mu, B)^{n+1}$$

A demonstração deste lema pode ser encontrado em (A. Gomes [7])

Lema 2.5 *Seja* B *um operador linear com domínio denso* $D(B)$ *em um espaço de Hilbert* H*. Se* B *é dissipativo, sobrejetivo e* $0 \in \rho(B)$*, o conjunto resolvente de* B*, então* B *é o gerador infinitesimal de um semigrupo* C_0 *de contrações em* H*.*

Prova:

Vamos mostrar primeiramente que B é fechado.

Seja $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $D(B)$ tal que

$$x_\nu \longrightarrow x \quad em \quad H$$

$$Bx_\nu \longrightarrow y \quad em \quad H.$$

Por hipótese, tem-se que B^{-1} é contínuo e definido em todo H. Assim:

$$B^{-1}Bx_\nu = x_\nu \longrightarrow B^{-1}y \quad em \quad H.$$

Pela unicidade do limite $x = B^{-1}y$. Logo $x \in D(B)$ e $Bx = y$.

Portanto B é fechado.

Seja λ tal que $0 < \lambda < \|B^{-1}\|^{-1}$, pelo lema 2.4 tem-se que $\lambda \in \rho(B)$. Sendo B fechado, $R(\lambda, B)$ é igualmente fechado, logo $R(\lambda, B)$ é um operador linear limitado e fechado em um conjunto denso em H. Seu domínio é, pois, H.

Portanto, segue do Teorema de Lumer-Phillips que B é o gerador de um semigrupo C_0 de contrações sobre H.

$\square$

Observação 2.2 *Para um operador A definido em um espaço de Hilbert, a dissipatividade é equivalente a que $(Ax, x) \leq 0, \quad \forall\, x \in D(A)$.*

Lema 2.6 *$H_0^2(\Omega)$ munido da norma*

$$\|v\|_0^2 = \|v\|^2 + \| \triangle v\|^2, \qquad v \in H_0^2(\Omega)$$

é um espaço de Hilbert.

Prova:

Seja $\{v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $(H_0^2(\Omega), \| \,.\, \|_0)$. Logo $\{v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $\{\triangle v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ são seqüências de Cauchy em $L^2(\Omega)$.

Agora definimos $\widetilde{v_\nu}$ a extensão de v_ν ao $\mathbb{R}^n$ por:

$$\widetilde{v_\nu} = \begin{cases} v_\nu \;\; em \;\; \Omega \\ 0 \;\; em \;\; \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

Como $v_\nu \in H_0^2(\Omega)$ segue que $\widetilde{v_\nu} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\triangle \widetilde{v} = \widetilde{\triangle v}$.

Assim, $\{\widetilde{v_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $\{\triangle \widetilde{v_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ são seqüências de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Seja $J_2(x) = (1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^n$.

É sabido que a função

$$|||\, u \,||| = \| J_2 \, \mathbb{F} \, u \, \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

é uma norma equivalente a norma usual de Sobolev em $H^2(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathbb{F}\, u$ é a transformada de Fourier da função u.

Sendo $\mathbb{F}$ linear e $\mathbb{F}\,(D^\alpha u)(x) = [i^{|\alpha|}\ x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}\ ...\ x_n^{\alpha_n}]\,\mathbb{F}u(x)$, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, tem-se

$$\mathbb{F}\,(\triangle u)(x) = -|x|^2 \mathbb{F}u(x), \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Assim,

$$\|\mathbb{F}(\triangle \widetilde{v_\nu})\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\ |\ .\ |^2\,\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Então pela equivalência das normas, existe $C > 0$ tal que

$$\|\widetilde{v_\nu}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|J_2\,\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\|\,(1 + |\ .\ |^2)\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\{\,\|\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$\|\ |\ .\ |^2\,\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\} = C\{\,\|\mathbb{F}\widetilde{v_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\,\mathbb{F}(\triangle\widetilde{v_\nu})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\}, \qquad \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Usando a identidade de Plancherel, obtém-se que

$$\|\widetilde{v_\nu}\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \le C\{\,\|\widetilde{v_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\,\triangle\,\widetilde{v_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\}, \qquad \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\{\widetilde{v_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $H^2(\mathbb{R}^n)$, pois como mencionado anteriormente, $\{\widetilde{v_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{\triangle\widetilde{v_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Então existe $\widetilde{v} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widetilde{v_\nu} \longrightarrow \widetilde{v}$ forte em $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Tem-se que

$$\int_\Omega |D^\alpha\widetilde{v_\nu}(x) - D^\alpha\widetilde{v}(x)|^2\ dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha\widetilde{v_\nu}(x) - D^\alpha\widetilde{v}(x)|^2\ dx, \qquad \forall\ |\alpha| \le 2.$$

Então, conclui-se que

$$D^\alpha\widetilde{v_\nu}|_\Omega \longrightarrow D^\alpha\widetilde{v}|_\Omega \ \text{ em } L^2(\Omega), \qquad \forall\ |\alpha| \le 2.$$

Seja $v = \widetilde{v}|_{\Omega}$ a restrição de $\widetilde{v}$ a Ω. Então vale que

$$D^{\alpha} v_{\nu} \longrightarrow D^{\alpha} v \text{ em } L^2(\Omega), \qquad \forall\ |\alpha| \leq 2$$

onde $v = \widetilde{v}|_{\Omega}$.

Portanto, $v_{\nu} \longrightarrow v$ *em* $H^2(\Omega)$, com $v_{\nu} \in H_0^2(\Omega)$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$. Como $H_0^2(\Omega)$ é fechado, resulta que $v \in H_0^2(\Omega)$. Mas, naturalmente que $\|\,.\,\|_0 \leq \|\,.\,\|_{H^2(\Omega)}$. Assim $v_{\nu} \longrightarrow v$ em $(H_0^2(\Omega), \|\,.\,\|_0)$.

$\square$

Lema 2.7 *Em $H_0^2(\Omega)$ as normas $\|\,.\,\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|\,.\,\|_0$, são equivalentes.*

Prova:

Pelo lema 2.6, $H_0^2(\Omega)$ munido da norma $\|\,.\,\|_0$ é um espaço de Banach. Dado $v \in H_0^2(\Omega)$, é claro que

$$\|v\|_0^2 = \|v\|^2 + \|\triangle v\|^2 \leq \|v\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Então o operador identidade I é tal que

$$I : (H_0^2(\Omega), \|\,.\,\|_{H^2(\Omega)}) \longrightarrow (H_0^2(\Omega), \|\,.\,\|_0),$$

é contínuo. Pelo teorema da aplicação aberta, segue que

$$I : (H_0^2(\Omega), \|\,.\,\|_0) \longrightarrow (H_0^2(\Omega), \|\,.\,\|_{H^2(\Omega)})$$

é também contínuo.

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|v\|_0, \quad \forall\ v \in H_0^2(\Omega).$$

Portanto as normas são equivalentes.

$\square$

Lema 2.8 *O operador $B : D(B) \longrightarrow H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, definido em (2.16), gera um semigrupo de contrações em $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

Prova:

A idéia da prova é mostrar que B atende as hipóteses do lema 2.5.

Seja $[v, w] \in D(B)$. Assim, $v \in D(A)$ e $w \in H_0^2(\Omega)$.

Calculamos o produto interno em $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, usando em $H_0^2(\Omega)$ o produto interno que define a norma $\| \,.\, \|_0$:

$$(B[v,w],[v,w])_{H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)} = ([w,-Av],[v,w])_{H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)} =$$

$$(w,v)_{H^2(\Omega)} + (-Av,w)_{H^1(\Omega)} = (w,v) + (\triangle w, \triangle v) + (\bigtriangledown(-Av), \bigtriangledown w) +$$

$$(-Av,w) \le C\{(\triangle w, \triangle v) + \beta(w,v) + \gamma(\bigtriangledown(-Av), \bigtriangledown w) + (-Av,w)\} =$$

$$C\{(\triangle w, \triangle v) + \beta(w,v) - (\triangle w, \triangle v) - \beta(w,v)\} = 0$$

pela definição de $v \in D(A)$ e de Av.

Portanto

$$(B[v,w],[v,w])_{H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)} \le 0, \qquad \forall\ (v,w) \in D(B).$$

Logo, B é dissipativo.

Vamos mostrar que $0 \in \rho(B)$.

Dado $[f,g] \in H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, primeiro devemos mostrar que existe $[v,w] \in D(B)$ tal que, $B[v,w] = [f,g]$.

Equivalentemente

$$[w, -Av] = [f, g] \ .$$

Assim, deve-se ter

$$\begin{cases} w = f \in H_0^2(\Omega) \\ \\ -Av = g, \ com \ \ g \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Seja $y = -g \in H_0^1(\Omega)$. Para ver que y está na imagem de A temos que demonstrar que existe $v \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (y, \psi) + \gamma(\triangledown y, \triangledown \psi), \qquad \forall \ \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Para isso, definimos a forma

$$a(\,.\,,\,.\,) : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$a(\eta, \psi) = (\triangle \eta, \triangle \psi) + \beta(\eta, \psi), \qquad \forall \ \eta, \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Tem-se que:

i) $a(\,.\,,\,.\,)$ está bem definida e é bilinear.

ii) $a(\,.\,,\,.\,)$ é contínua. De fato,

$$|a(\eta, \psi)| \leq |(\triangle \eta, \triangle \psi)| + \beta|(\eta, \psi)| \leq \| \triangle \eta\| \, \| \triangle \psi\| + \beta\|\eta\| \, \|\psi\|$$

$$\leq (1 + \beta)\|\eta\|_{H^2(\Omega)}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall \ \eta, \psi \in H_0^2(\Omega).$$

iii) $a(\,.\,,\,.\,)$ é coerciva, pois $\forall \, \eta \in H_0^2(\Omega)$ tem-se

$$a(\eta, \eta) = (\triangle \eta, \triangle \eta) + \beta(\eta, \eta) = \| \triangle \eta\|^2 + \beta\|\eta\|^2 \geq \min\{1, \beta\}\|\eta\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

A seguir, seja $F : H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle F, \psi\rangle = (y, \psi) + \gamma(\triangledown y, \triangledown \psi), \qquad \psi \in H_0^2(\Omega),$$

com $y = -g \in H_0^1(\Omega)$.

Tem-se que F é linear e contínuo. De fato, a linearidade é imediata e a continuidade segue do fato que:

$$|\langle F, \psi\rangle| \leq |(y, \psi)| + \gamma|(\triangledown y, \triangledown \psi)| \leq \|y\| \, \|\psi\| + \gamma \| \triangledown y\| \, \| \triangledown \psi\|$$
$$\leq (\|y\| + \gamma \| \triangledown y\|) \, \|\psi\|_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall \; \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Assim $F \in H^{-2}(\Omega)$.

Então pelo Teorema de Lax-Milgram, existe única $v \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$a(v, \psi) = \langle F, \psi\rangle, \qquad \forall \; \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Isto é, existe única $v \in H_0^2(\Omega)$ tal que:

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (y, \psi) + \gamma(\triangledown y, \triangledown \psi), \qquad \forall \; \psi \in H_0^2(\Omega)$$

onde $y = -g$.

Assim, por definição tem-se que $v \in D(A)$ e que B é um operador sobrejetivo.

Pelo lema (2.2), $\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|Av\|_{H^1(\Omega)}$. Logo B é injetivo e, sendo $v \in D(A)$ tal que $-Av = g$, obtém-se que

$$\|B^{-1}[f, g]\|_X^2 = \|[-A^{-1}g, f]\|_X^2 = \|[v, f]\|_X^2 \; = \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{H^1(\Omega)}^2$$
$$\leq \|v\|_{H^3(\Omega)}^2 + \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\| - g\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|f\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C\|[f, g]\|_X^2.$$

onde $X := H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Assim B^{-1} é contínuo e portanto $0 \in \rho(B)$.

Além disso, $D(B) = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Então, pelo lema 2.5 B é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações em $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

$\square$

Assim o problema (2.3), tem única solução $Z(t)$ na classe

$$Z \in C([0,\infty);[D(B)]) \cap C^1([0,\infty);X)$$

e portanto $v(t)$, a primeira componente de $Z(t)$ é a única solução do problema (2.2) e

$$v \in C([0,\infty);H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty);H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty);H_0^1(\Omega)).$$

$\square$

2.2 Equação linear dissipativa com $\beta > 0$

Nesta seção, vamos mostrar a existência e unicidade de solução fraca para o problema de Cauchy (2.1), para o caso $\lambda = 1$ e $\beta > 0$.

Teorema 2.2 *Seja $n \geq 2$. Para $[v_0, v_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, o problema (2.1) com $\lambda = 1$ e $\beta > 0$, admite uma única solução fraca v, tal que:*

$$v \in C([0,\infty);H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty);H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty);H_0^1(\Omega)) \qquad e,$$

$$\begin{cases} (v_{tt}(t),\psi) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown\psi) + (\triangle v(t), \triangle\psi) + (v_t(t),\psi) + \beta(v(t),\psi) = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \quad e \quad v_t(x,0) = v_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Demonstração:

Dado $z \in H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe único $\widetilde{z} \in H_0^1(\Omega)$, tal que,

$$-(\widetilde{z}, \psi) - \gamma(\bigtriangledown \widetilde{z}, \bigtriangledown \psi) = (z, \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, definimos $f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que para cada $z \in H_0^1(\Omega)$, $f(z)$ é dada pela equação:

$$-(f(z), \psi) - \gamma(\bigtriangledown f(z), \bigtriangledown \psi) = (z, \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Em particular, $\gamma \bigtriangleup f(z) - f(z) = z$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Também $\gamma \bigtriangleup -I$ é um operador elíptico de ordem 2.

Então, pela teoria de regularidade elíptica, $f(z) \in H^3(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f(z)\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|z\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ z \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, é imediato que

$$\|f(z_1) - f(z_2)\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|z_1 - z_2\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ z_1, z_2 \in H_0^1(\Omega). \tag{2.19}$$

Observação 2.3 *Notar que* $f(z) = (\gamma \bigtriangleup -I)^{-1}z$. *Assim, se* $z \in H_0^2(\Omega)$ *então* $f(z) \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. *Além disso,* $\|f(z)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|z\|_{H^2(\Omega)}$ *se* $z \in H_0^2(\Omega)$ *sendo* $C > 0$ *constante.*

Seja $V = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. Definimos para $t \geq 0$:

$$Z(t) = [v(t), w(t)], \qquad F(Z(t)) = [0, f(w(t))] \quad e \quad Z_0 = [v_0, v_1].$$

Observação 2.4 *Se* $Z \in D(B) = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) = V$ *então* $FZ \in D(B)$*. Além disso,* $\|F(Z_1) - F(Z_2)\|_V \leq C\|Z_1 - Z_2\|_V$*.*

Consideramos o seguinte problema de valor inicial no espaço $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Z(t) = BZ(t) + F(Z(t)) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

com $Z_0 \in D(B)$ e B o operador definido em (2.16).

Para mostrarmos que (2.20) admite uma única solução, vamos usar o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Seja* $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ *gerador de um semigrupo de contrações, com* X *Hilbert. Suponha que* $Z_0 \in D(B)$*. Se* $F : X \longrightarrow X$ *é Lipschitz contínua globalmente, então o problema* (2.20) *tem uma única solução clássica, isto é, existe único* $Z \in C([0,\infty); [D(B)]) \cap C^1([0,\infty); X)$*, que satisfaz* (2.20).

As idéias para a demonstração desta proposição, podem ser encontradas em Brezis-Cazenave [6] e é baseada, essencialmente, na fórmula de variação de parâmetros combinada com o Teorema do ponto fixo em um espaço métrico completo adequado ao problema.

Vamos mostrar que F, do problema (2.20), dada por $F[z, w] = [0, f(w)]$, é Lipschitz contínua globalmente. Dados

$$Z_1 = [v_1, w_1], \quad Z_2 = [v_2, w_2] \in X$$

e usando (2.19) tem-se da definição de F:

$$\|F(Z_1) - F(Z_2)\|_X = \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^3(\Omega)} \leq$$

$$C\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|Z_1 - Z_2\|_X$$

No problema (2.20) tem-se que $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é Hilbert, $Z_0 \in D(B)$. Também, mostramos que F é Lipschitz contínua globalmente. Logo as hipóteses da proposição 2.1 são verificadas.

Assim, o problema (2.20) tem uma única solução

$$Z \in C([0, \infty); [D(B)]) \cap C^1([0, \infty); X). \tag{2.21}$$

Temos que $v = v(t)$, a primeira componente de $Z = Z(t)$ é tal que

$$v \in C([0, \infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \tag{2.22}$$

e é a única solução do problema (2.17).

De fato, se $Z = [v, w]$ então do fato que Z satisfaz (2.21) e do lema 2.2 resulta que v satisfaz (2.22). Além disso, vale que

$$[v_t(t), w_t(t)] = B[v(t), w(t)] + F[v(t), w(t)] = [w(t), -Av(t)] + [0, f(w(t))].$$

Assim, $v_t = w$ e $w_t = -Av + f(w)$.

Portanto, $v_{tt} = -Av + f(v_t)$ ou $Av = -v_{tt} + f(v_t)$. Como $v(t) \in D(A), \quad \forall\, t \geq 0$, resulta da definição de $(A; D(A))$ que:

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (Av, \psi) + \gamma(\bigtriangledown(Av), \bigtriangledown\psi), \quad \forall\, \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Assim

$$(\triangle v, \triangle \psi) + \beta(v, \psi) = (-v_{tt} + f(v_t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown(-v_{tt} + f(v_t)), \bigtriangledown\psi), \quad \forall\, \psi \in H_0^2(\Omega).$$

Portanto, v satisfaz

$$(v_{tt},\psi)+\gamma(\nabla v_{tt},\nabla\psi)+(\triangle v,\triangle\psi)+\beta(v,\psi)=(f(v_t),\psi)+(\nabla f(v_t),\nabla\psi)\ \ \forall\,\psi\in H_0^2(\Omega).$$

Usando a definição de f resulta que $v=v(t)$ satisfaz:

$$(v_{tt}(t),\psi)+\gamma(\nabla v_{tt}(t),\nabla\psi)+(\triangle v(t),\triangle\psi)+\beta(v(t),\psi)=(-v_t(t),\psi)\quad\forall\ \psi\in H_0^2(\Omega).$$

Portanto, v satisfaz o problema (2.17), já que

$$[v(0),v_t(0)]=Z(0)=Z_0=[v_0,v_1].$$

□

Corolário 2.1 *Seja B o operador definido na seção 2.1. Seja $Z_0\in D(B^k),\ k\geq 1$. Então existe única função $Z=Z(t)$ tal que*

$$Z\in C([0,\infty);[D(B^k)])\cap C^1([0,\infty);[D(B^{k-1})])$$

tal que

$$\begin{cases} Z_t(t)=BZ(t)+F(Z(t)), & \forall\ t>0\\ Z(0)=Z_0 \end{cases}\tag{2.23}$$

com $F[v_1,v_2]=[0,f(v_2)]$ e f definida em (2.18)

A justificativa deste corolário segue da teoria de semigrupos e do fato que $F:[D(B^{k-1})]\longrightarrow[D(B^{k-1})]$ é Lipschitz contínua globalmente.

Lema 2.9 *Para $k\in\mathbb{N}$ tem-se que*

$$D(B^{k+1})\subset(H^{3+k}(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\times(H^{2+k}(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))$$

Prova:

Usando a definição do operador A e o teorema de regularidade elíptica, é imediato que se $A^p u \in H^j(\Omega)$ então $u \in H^{j+2p}(\Omega)$.

Seja $U = [u_1, u_2] \in D(B^{k+1})$ então:

$$U = [u_1, u_2] \in D(B^k) \subset D(B) \qquad e \qquad B^k U \in D(B).$$

Assim,

$$u_1 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \qquad e \qquad u_2 \in H_0^2(\Omega).$$

Se k é par, de $B^k U \in D(B)$ tem-se

$$A^{\frac{k}{2}} u_1 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \qquad e \qquad A^{\frac{k}{2}} u_2 \in H_0^2(\Omega).$$

Logo,

$$u_1 \in H^{k+3}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \qquad e \qquad u_2 \in H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Se k é ímpar, de $B^k U \in D(B)$ tem-se

$$A^{\frac{k-1}{2}} u_2 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \qquad e \qquad A^{\frac{k+1}{2}} u_1 \in H_0^2(\Omega).$$

Desta forma

$$u_1 \in H^{k+3}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \qquad e \qquad u_2 \in H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Portanto

$$D(B^{k+1}) \subset (H^{k+3}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times (H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)).$$

$\square$

Corolário 2.2 *Seja* $[v_0, v_1] \in D(B^{k+1})$*. Então existe única* $v = v(t)$ *tal que*

$$v \in C([0,\infty); H^{3+k}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H^{2+k}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap$$
$$C^2([0,\infty); H^{1+k}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega))$$

e v *solução de (2.17).*

A prova segue do lema 2.9 e do corolário 2.1, pois a primeira componente da solução do problema (2.23) é solução da equação (2.17).

2.3 Equação linear dissipativa com $\beta = 0$

Usando os resultados obtidos nas seções anteriores, vamos mostrar a existência e unicidade do problema linear (2.1), com $\lambda = 1$ e $\beta = 0$.

Teorema 2.3 *Seja* $n \geq 2$*. Para* $[v_0, v_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$*, o problema (2.1) com* $\lambda = 1$ *e* $\beta = 0$*, admite uma única solução fraca* v*, tal que:*

$$v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

$$\begin{cases} (v_{tt}(t), \psi) + \gamma(\nabla v_{tt}(t), \nabla\psi) + (\triangle v(t), \triangle\psi) + (v_t(t), \psi) = 0 & \forall\ t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \quad e \quad v_t(x,0) = v_1(x) \qquad x \in \Omega \end{cases} \tag{2.24}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$*.*

Demonstração:

Seja $[v(t), w(t)] \in H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad \forall\ t \geq 0$, tal que $v(0) = v_0$ e $w(0) = v_1$. Definimos

$$Z(t) = [v(t), w(t)], \qquad \widetilde{F}(Z(t)) = [0, f(w(t)) - \beta f(v(t))] \quad e \quad Z(0) = [v_0, v_1] \in V$$

sendo f definido em (2.18)

Então (2.1) com $\lambda = 1$ e $\beta = 0$ é equivalente ao seguinte problema de valor inicial no espaço $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Z(t) = BZ(t) + \widetilde{F}(Z(t)) \\ Z(0) = Z_0, \quad Z_0 \in D(B) \end{cases} \tag{2.25}$$

Para mostrarmos existência de única solução do problema (2.25), usamos novamente a proposição 2.1.

Vamos mostrar que $\widetilde{F}$ é Lipschitz contínua globalmente. Dados $Z_1 = [v_1, w_1]$ e $Z_2 = [v_2, w_2] \in X$ usando (2.19), tem-se

$$\|\widetilde{F}(Z_1) - \widetilde{F}(Z_2)\|_X = \|f(w_1) - \beta f(v_1) - f(w_2) + \beta f(v_2)\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^3(\Omega)} + \beta \|f(v_1) - f(v_2)\|_{H^3(\Omega)}$$

$$\leq C\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)} + C\|v_1 - v_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)} + \|v_1 - v_2\|_{H^2(\Omega)})$$

$$\leq 2C\|Z_1 - Z_2\|_X$$

com $C > 0$ constante.

No problema (2.25) tem-se que $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, $Z_0 \in D(B)$ e mostramos acima que $\widetilde{F}$ é Lipschitz contínua globalmente. Logo, as hipóteses da proposição 2.1 são verificadas.

Assim, o problema (2.25) tem uma única solução

$$Z \in C([0, \infty); [D(B)]) \cap C^1([0, \infty); X)$$

isto é, existe um único

$$v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

que satisfaz (2.24), onde $v = v(t)$ é a primeira componente de $Z = Z(t)$. A justificativa desse fato é análoga a que foi feita no final da seção anterior.

$\square$

Corolário 2.3 *Seja $[v_0, v_1] \in D(B^3)$. Então existe única $v = v(t)$ tal que*

$$v \in C([0,\infty); H^5(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,\infty); H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))\cap C^2([0,\infty); H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))$$

e v solução de (2.24).

As idéias para a prova deste corolário são análogas as apresentadas na seção anterior.

Capítulo 3

Comportamento Assintótico - Problema Linear

Neste capítulo, encontramos taxas de decaimento para a energia do sistema (2.1), com $\lambda = 1$ e $\beta > 0$ e também analisamos o comportamento assintótico das soluções fracas e da energia do problema (2.1) com $\lambda = 1$ e $\beta = 0$. Em ambos os casos, usamos o método de multiplicadores para realizar as estimativas.

3.1 Comportamento assintótico com $\beta > 0$

Com respeito as soluções do problema (2.1) com $\lambda = 1$ e $\beta > 0$ tem-se o seguinte resultado de comportamento assintótico das soluções.

Teorema 3.1 *Seja $n \geq 2$. Se $[v_0, v_1] \in H_0^{2+k}(\Omega) \times H_0^{1+k}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$, então existe uma única função v na classe*

$$v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

satisfazendo o seguinte problema variacional:

$$\begin{cases} (v_{tt}(t),\psi)+\gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t),\bigtriangledown\psi)+(\triangle v(t),\triangle\psi)+(v_t(t),\psi)+\beta(v(t),\psi)=0 \quad \forall\ t>0 \\ v(x,0)=v_0(x) \quad e \quad v_t(x,0)=v_1(x) \qquad x \ em\ \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Além disso,

$$(1+t)^k E_v(t) \leq C(k)\,(\|v_0\|^2_{H^{2+k}(\Omega)}+\|v_1\|^2_{H^{1+k}(\Omega)}), \qquad \forall\ k\in\mathbb{N}\ \ e\ \ k\geq 1$$

para alguma constante positiva $C(k)$ *que não depende dos dados iniciais, onde a energia* $E_v(t)$ *é dada por:*

$$E_v(t)=\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2+\frac{\gamma}{2}\|\bigtriangledown v_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\triangle v(t)\|^2+\frac{\beta}{2}\|v(t)\|^2$$

Demonstração:

Na demonstração desse teorema a letra C poderá indicar diferentes constantes positivas que não dependem dos dados iniciais.

A existência e unicidade da função v é garantida pelo Teorema 2.2.

Inicialmente vamos supor que os dados iniciais $[\varphi_0,\varphi_1]\in\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Seja φ solução do problema:

$$\begin{cases} (\varphi_{tt}(t),\psi)+\gamma(\bigtriangledown\varphi_{tt}(t),\bigtriangledown\psi)+(\triangle\varphi(t),\triangle\psi)+(\varphi_t(t),\psi)+\beta(\varphi(t),\psi)=0, \quad t>0 \\ \varphi(0,x)=\varphi_0(x), \quad \varphi_t(0,x)=\varphi_1(x) \qquad x\in\Omega \end{cases}$$

para cada $\psi\in H_0^2(\Omega)$.

Devido a regularidade dos dados iniciais, tem-se regularidade na solução, de forma que para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$ com $|\alpha|\leq k$ sejam válidas as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&(D^\alpha\varphi_{tt}(t), D^\alpha\varphi_t(t)) + \gamma(\bigtriangledown D^\alpha\varphi_{tt}(t), \bigtriangledown D^\alpha\varphi_t(t)) + (\triangle D^\alpha\varphi(t), \triangle D^\alpha\varphi_t(t)) \\
&+(D^\alpha\varphi_t(t), D^\alpha\varphi_t(t)) + \beta(D^\alpha\varphi(t), D^\alpha\varphi_t(t)) = 0
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(D^\alpha\varphi_{tt}(t), D^\alpha\varphi(t)) + \gamma(\bigtriangledown D^\alpha\varphi_{tt}(t), \bigtriangledown D^\alpha\varphi(t)) + (\triangle D^\alpha\varphi(t), \triangle D^\alpha\varphi(t)) \\
&+(D^\alpha\varphi_t(t), D^\alpha\varphi(t)) + \beta(D^\alpha\varphi(t), D^\alpha\varphi(t)) = 0
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Para provar a estimativa de decaimento enunciada, primeiro definimos:

$$I_k = \|\varphi_0\|^2_{H^{2+k}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{1+k}(\Omega)}.$$

Denotamos $D^\alpha\varphi$ por w^α. Por (3.2) tem-se

$$\frac{d}{dt}\left[\ \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|\bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\triangle w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|w^\alpha(t)\|^2\ \right] + \|w_t^\alpha(t)\|^2 = 0$$

Seja

$$E_{w^\alpha}(t) = \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|\bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\triangle w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|w^\alpha(t)\|^2$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\,E_{w^\alpha}(t) + \|w_t^\alpha(t)\|^2 = 0$$

Multiplicando essa identidade por $(1+t)^l,\ \ l \in \mathbb{N}$ e integrando em $(0,t)$ tem-se após integração por partes, que

$$(1+t)^l E_{w^\alpha}(t) + \int_0^t (1+s)^l\|w_t^\alpha(s)\|^2\ ds = E_{w^\alpha}(0) + l\int_0^t (1+s)^{l-1}E_{w^\alpha}(s)\ ds \tag{3.4}$$

Agora, por (3.3) tem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\ (w_t^\alpha(t), w^\alpha(t)) + \gamma(\bigtriangledown w_t^\alpha(t), \bigtriangledown w^\alpha(t)) + \frac{1}{2}\|w^\alpha(t)\|^2\ \right] + \beta\|w^\alpha(t)\|^2 \\
&-\|w_t^\alpha(t)\|^2 - \gamma\|\bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \|\triangle w^\alpha(t)\|^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Definimos:

$$F_\alpha(t) = (w_t^\alpha(t), w^\alpha(t)) + \gamma(\bigtriangledown w_t^\alpha(t), \bigtriangledown w^\alpha(t)) + \frac{1}{2}\|w^\alpha(t)\|^2$$

Então

$$|F_\alpha(t)| \leq \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \|w^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w^\alpha(t)\|^2 \tag{3.6}$$

Pelo Lema 2.7, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\{\|u\|^2 + \| \bigtriangleup u\|^2\}, \qquad \forall\ u \in H_0^2(\Omega)$$

Em particular

$$\| \bigtriangledown u\|^2 \leq C\{\|u\|^2 + \| \bigtriangleup u\|^2\}, \qquad \forall\ u \in H_0^2(\Omega)$$

Com isso, (3.6) implica que

$$F_\alpha(t) \leq \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{1}{2}(2 + C\gamma)\|w^\alpha(t)\|^2 + C\frac{\gamma}{2}\| \bigtriangleup w^\alpha(t)\|^2$$

Portanto, existe constante $C > 0$ tal que

$$F_\alpha(t) \leq CE_{w^\alpha}(t), \qquad \forall\ t \geq 0 \tag{3.7}$$

Multiplicando (3.5) por $(1+t)^l$ e integrando em $(0,t)$ tem-se

$$(1+t)^l F_\alpha(t) + \beta \int_0^t (1+s)^l \|w^\alpha(s)\|^2\ ds - \int_0^t (1+s)^l \|w_t^\alpha(s)\|^2\ ds$$

$$-\gamma \int_0^t (1+s)^l \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\ ds + \int_0^t (1+s)^l \| \bigtriangleup w^\alpha(s)\|^2\ ds = F_\alpha(0)$$

$$+l \int_0^t (1+s)^{l-1} F_\alpha(s)\ ds$$

Da identidade acima e de (3.7) obtém-se que

$$
\begin{aligned}
&\beta\int_0^t(1+s)^l\|w^\alpha(s)\|^2\,ds+\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangleup w^\alpha(s)\|^2\,ds=-(1+t)^lF_\alpha(t)\\
&+F_\alpha(0)+\int_0^t(1+s)^l\|w_t^\alpha(s)\|^2\,ds+\gamma\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\,ds\\
&+l\int_0^t(1+s)^{l-1}F_\alpha(s)\,ds\le C(1+t)^lE_{w^\alpha}(t)+CE_{w^\alpha}(0)+\int_0^t(1+s)^l\|w_t^\alpha(s)\|^2\,ds\\
&+C\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\,ds+lC\int_0^t(1+s)^{l-1}E_{w^\alpha}(s)\,ds
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

com $C>0$ constante positiva.

Somando $\int_0^t(1+s)^l\|w_t^\alpha(s)\|^2\,ds+\gamma\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\,ds$ em (3.8) tem-se

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t(1+s)^lE_{w^\alpha}(s)\,ds\le(1+t)^lCE_{w^\alpha}(t)+CE_{w^\alpha}(0)+C\int_0^t(1+s)^l\|w_t^\alpha(s)\|^2\,ds\\
&+C\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\,ds+lC\int_0^t(1+s)^{l-1}E_{w^\alpha}(s)\,ds
\end{aligned}
$$

com $C>0$ constante positiva.

Assim por (3.4), conclui-se que para $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tal que $0\le|\alpha|\le k$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t(1+s)^lE_{w^\alpha}(s)\,ds\le 2CE_{w^\alpha}(0)+l2C\int_0^t(1+s)^{l-1}E_{w^\alpha}(s)\,ds+\\
&C\int_0^t(1+s)^l\|\bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Tem-se para $e_i=(0,...,1,0,...,0), 1$ na posição i:

$$\int_0^t (1+s)^l \|D^{e_i} w_t^\alpha(s)\|^2 \; ds = \int_0^t (1+s)^l \|w_t^{\alpha+e_i}(s)\|^2 \; ds$$

$$\leq E_{w^{\alpha+e_i}}(0) + l \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^{\alpha+e_i}}(s) \; ds$$

Assim,

$$\int_0^t (1+s)^l \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2 \; ds \leq \sum_{i=1}^n E_{w^{\alpha+e_i}}(0) + \sum_{i=1}^n l \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^{\alpha+e_i}}(s) \; ds$$

Mas

$$E_{w^{\alpha+e_i}}(0) = \frac{1}{2}\|w_t^{\alpha+e_i}(0)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^{\alpha+e_i}(0)\|^2 + \frac{1}{2}\| \bigtriangleup w^{\alpha+e_i}(0)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|w^{\alpha+e_i}(0)\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|D^{\alpha+e_i}\varphi_1\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown D^{\alpha+e_i}\varphi_1\|^2 + \frac{1}{2}\| \bigtriangleup D^{\alpha+e_i}\varphi_0\|^2 + \frac{\beta}{2}\|D^{\alpha+e_i}\varphi_0\|^2$$

Donde se $|\alpha| \leq k-1$:

$$\sum_{i=1}^n E_{w^{\alpha+e_i}}(0) \leq C(\frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H^{|\alpha|+1}} + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown D^{\alpha+e_i}\varphi_1\|^2 + \frac{1}{2}\| \bigtriangleup D^{\alpha+e_i}\varphi_0\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\varphi_0\|^2_{H^{|\alpha|+1}})$$

$$\leq C\|\varphi_0\|^2_{H^{k+2}} + C\|\varphi_1\|^2_{H^{k+1}} = CI_k$$

Logo

$$\int_0^t (1+s)^l \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2 \; ds \leq CI_k + \sum_{i=1}^n l \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^{\alpha+e_i}}(s) \; ds$$

Assim (3.9) fica:

$$\int_0^t (1+s)^l E_{w^\alpha}(s) \; ds \leq CE_{w^\alpha}(0) + Cl \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^\alpha}(s) \; ds$$

$$+C \int_0^t (1+s)^l \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2 \; ds \leq CE_{w^\alpha}(0) + Cl \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^\alpha}(s) \; ds$$

$$+CI_k + Cl \sum_{i=1}^n \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^{\alpha+e_i}}(s) \; ds \leq CI_k + Cl \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^\alpha}(s) \; ds$$

$$+Cl \sum_{i=1}^n \int_0^t (1+s)^{l-1} E_{w^{\alpha+e_i}}(s) \; ds \tag{3.10}$$

Logo $l = k$ e $\alpha = (0, ..., 0)$ em (3.4) e considerando (3.10) tem-se

$$(1+t)^k E_\varphi(t) \le E_\varphi(0) + k \int_0^t (1+s)^{k-1} E_\varphi(s)\ ds \le E_\varphi(0) + kCI_k +$$

$$Ck(k-1) \int_0^t (1+s)^{k-2} E_\varphi(s)\ ds + Ck(k-1) \sum_{i=1}^n \int_0^t (1+s)^{k-2} E_{w^{e_i}}(s)\ ds$$

$$\le CI_k + Ck(k-1) \Bigg[\ CI_k + C(k-2) \int_0^t (1+s)^{k-3} E_\varphi(s)\ ds$$

$$+C(k-2) \sum_{i=1}^n \int_0^t (1+s)^{k-3} E_{w^{e_i}}(s)\ ds \Bigg] + C\,k\,(k-1) \sum_{i=1}^n\ \Bigg[\ CI_k$$

$$+C(k-2) \int_0^t (1+s)^{k-3} E_{w^{e_i}}(s)\ ds + C(k-2) \sum_{i=1}^n \int_0^t (1+s)^{k-3} E_{w^{2e_i}}(s)\ ds \Bigg]\ .$$

Por recorrência

$$(1+t)^k E_\varphi(t) \le C(K) I_k \tag{3.11}$$

Seja $\{[\varphi_0^\nu, \varphi_1^\nu]\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$[\varphi_0^\nu, \varphi_1^\nu] \longrightarrow [v_0, v_1] \quad em \quad H_0^{2+k}(\Omega) \times H_0^{1+k}(\Omega) \tag{3.12}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ seja φ^ν a solução do problema (3.1) para os dados iniciais $[\varphi_0^\nu, \varphi_1^\nu]$. É imediato que $\varphi^\nu - v$ é solução do problema (3.1) para os dados iniciais $[\varphi_0^\nu - v_0, \varphi_1^\nu - v_1]$ e que $E_{\varphi^\nu - v}$ definido por

$$E_{\varphi^\nu - v}(t) = \frac{1}{2}\|\varphi_t^\nu(t) - v_t(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown \varphi_t^\nu(t) - \bigtriangledown v_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle \varphi^\nu(t) - \triangle v(t)\|^2 +$$

$$\frac{\beta}{2}\|\varphi^\nu(t) - v(t)\|^2$$

satisfaz

$$E_{\varphi^\nu - v}(t) \le E_{\varphi^\nu - v}(0)$$

Mas por (3.12)

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} E_{\varphi^\nu - v}(0) = 0$$

Logo,

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} E_{\varphi^\nu}(t) = E_v(t)$$

uniformemente em t.

Por (3.11) tem-se

$$E_{\varphi^\nu}(t) \leq C(k)(\|\varphi_0^\nu\|^2_{H^{2+k}(\Omega)} + \|\varphi_1^\nu\|^2_{H^{1+k}(\Omega)})(1+t)^{-k}, \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Assim, por passagem ao limite:

$$E_v(t) \leq C(k)(\|v_0\|^2_{H^{2+k}(\Omega)} + \|v_1\|^2_{H^{1+k}(\Omega)})(1+t)^{-k}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

$\square$

3.2 Comportamento assintótico com $\beta = 0$

Seja $\widehat{I_0}$ o número positivo definido por

$$\widehat{I_0} = \|v_0\|^2_{H^4(\Omega)} + \|v_1\|^2_{H^3(\Omega)} \tag{3.13}$$

Teorema 3.2 *Seja $n \geq 2$. Se $[v_0, v_1] \in H_0^4(\Omega) \times H_0^3(\Omega)$, então a solução*

$$v \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

do problema linear

$$\begin{cases} (v_{tt}(t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown \psi) + (\triangle v(t), \triangle \psi) + (v_t(t), \psi) = 0, & \forall\, t > 0 \\ v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x) \qquad x \in \Omega, & \forall\, \psi \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.14}$$

satisfaz

$$\|v(t)\|^2 \leq C\widehat{I_0}(1+t)^{-1}$$

$$E_v(t) \leq C\widehat{I_0}(1+t)^{-2}$$

para alguma constante C que não depende dos dados iniciais.

Para fazer a demonstração precisamos de alguns lemas. Notamos que com os dados iniciais como no teorema, então $\widehat{I_0}$ dada por (3.13) está bem definida.

Lema 3.1 *Assumindo as hipóteses do teorema 3.2, tem-se*

$$(1+t)\|v(t)\|^2 + \int_0^t (1+s)\| \triangle v(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + C\int_0^t (1+s)\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \, ds +$$
$$C\int_0^t \|v(s)\|^2 \, ds$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais.

Prova:

Pelo Teorema 2.3, para os dados iniciais $[v_0, v_1]$, existe única função v satisfazendo (3.14).

Substituindo $\psi = v_t$ em (3.14) tem-se

$$(v_{tt}(t), v_t(t)) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown v_t(t)) + (\triangle v(t), \triangle v_t(t)) + (v_t(t), v_t(t)) = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown v_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle v(t)\|^2 \right] + \|v_t(t)\|^2 = 0$$

A energia associada ao problema (3.14) é definida por:

$$E_v(t) = \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown v_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle v(t)\|^2$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\, E_v(t) + \|v_t(t)\|^2 = 0 \tag{3.15}$$

Integrando em $[0, t]$, tem-se

$$E_v(t) + \int_0^t \|v_t(s)\|^2 \; ds = E_v(0) \tag{3.16}$$

Multiplicando por $(1+t)$ em (3.15) e integrando em $[0, t]$ tem-se

$$(1+t)E_v(t) + \int_0^t (1+s)\|v_t(s)\|^2 \; ds = E_v(0) + \int_0^t E_v(s) \; ds \tag{3.17}$$

Substituindo $\psi = v$ em (3.14) tem-se

$$(v_{tt}(t), v(t)) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown v(t)) + (\triangle v(t), \triangle v(t)) + (v_t(t), v(t)) = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\; (v_t(t), v(t)) + \gamma(\bigtriangledown v_t(t), \bigtriangledown v(t)) + \frac{1}{2}\|v(t)\|^2 \;\right] - \|v_t(t)\|^2 \\ &-\gamma\| \bigtriangledown v_t(t)\|^2 + \| \triangle v(t)\|^2 = 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

Multiplicando (3.18) por $(1+t)^m$ e integrando em $[0, t]$ obtém-se a seguinte identidade, válida para $m = 0$ e $m = 1$:

$$\begin{aligned}&(1+t)^m(v_t(t), v(t)) + \gamma(1+t)^m(\bigtriangledown v_t(t), \bigtriangledown v(t)) + \frac{(1+t)^m}{2}\|v(t)\|^2 \\ &- \int_0^t (1+s)^m\|v_t(s)\|^2 \; ds - \gamma \int_0^t (1+s)^m\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \; ds \\ &+ \int_0^t (1+s)^m\| \triangle v(s)\|^2 \; ds = (v_1, v_0) + \gamma(\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown v_0) + \frac{1}{2}\|v_0\|^2 \\ &+m \int_0^t (v_t(s), v(s)) \; ds + m \int_0^t \gamma(\bigtriangledown v_t(s), \bigtriangledown v(s)) \; ds + \frac{m}{2} \int_0^t \|v(s)\|^2 \; ds\end{aligned}$$

Assim, para $\varepsilon > 0$, vale que:

$$\frac{(1+t)^m}{2}\|v(t)\|^2 + \int_0^t (1+s)^m \| \triangle v(s)\|^2 \; ds \leq (v_1, v_0) + \gamma(\triangledown v_1, \triangledown v_0) + \frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

$$+ \int_0^t (1+s)^m \|v_t(s)\|^2 \; ds + \gamma \int_0^t (1+s)^m \| \triangledown v_t(s)\|^2 \; ds + \frac{(1+t)^m}{4}\|v(t)\|^2$$

$$+(1+t)^m \|v_t(t)\|^2 + \frac{\gamma}{4\varepsilon}(1+t)^m \| \triangledown v_t(t)\|^2 + \gamma\varepsilon(1+t)^m \| \triangledown v(t)\|^2$$

$$+m \int_0^t \|v(s)\|^2 \; ds + \frac{m}{2}\int_0^t \|v_t(s)\|^2 \; ds + \frac{m\gamma}{2}\int_0^t \| \triangledown v_t(s)\|^2 \; ds$$

$$+\frac{m\gamma}{2}\int_0^t \| \triangledown v(s)\|^2 \; ds \tag{3.19}$$

Lembrando que $C > 0$ poderá indicar constantes que não dependem dos dados iniciais, mas que podem ser calculadas explicitamente.

Agora, pelo lema 2.7, sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\{\|u\|^2 + \| \triangle u\|^2\}, \qquad \forall \; u \in H^2_0(\Omega) \; \cdot$$

Em particular

$$\| \triangledown u\|^2 \leq C\{\|u\|^2 + \| \triangle u\|^2\}, \qquad \forall \; u \in H^2_0(\Omega).$$

Substituindo essa estimativa em (3.19), obtém-se que

$$\frac{(1+t)^m}{4}\|v(t)\|^2+\int_0^t(1+s)^m\|\triangle v(s)\|^2\,ds\leq(v_1,v_0)+\gamma(\bigtriangledown v_1,\bigtriangledown v_0)+\frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

$$+\int_0^t(1+s)^m\|v_t(s)\|^2\,ds+\gamma\int_0^t(1+s)^m\|\bigtriangledown v_t(s)\|^2\,ds+(1+t)^m\|v_t(t)\|^2$$

$$+\frac{\gamma}{4\varepsilon}(1+t)^m\|\bigtriangledown v_t(t)\|^2+C\varepsilon(1+t)^m\|v(t)\|^2+C\varepsilon(1+t)^m\|\triangle v(t)\|^2$$

$$+m\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds+\frac{m}{2}\int_0^t\|v_t(s)\|^2\,ds+\frac{m\gamma}{2}\int_0^t\|\bigtriangledown v_t(s)\|^2\,ds$$

$$+m\,C\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds+m\,C\int_0^t\|\triangle v(s)\|^2\,ds \tag{3.20}$$

Tomando $m=0$ em (3.20), segue que

$$\frac{1}{4}\|v(t)\|^2+\int_0^t\|\triangle v(s)\|^2\,ds\leq(v_1,v_0)+\gamma(\bigtriangledown v_1,\bigtriangledown v_0)+\frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

$$+\int_0^t\|v_t(s)\|^2\,ds+\gamma\int_0^t\|\bigtriangledown v_t(s)\|^2\,ds+\|v_t(t)\|^2+\frac{\gamma}{4\varepsilon}\|\bigtriangledown v_t(t)\|^2$$

$$+C\varepsilon\|v(t)\|^2+C\varepsilon\|\triangle v(t)\|^2$$

Neste ponto, tomando $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno e usando (3.16) pode-se concluir da estimativa anterior que:

$$\|v(t)\|^2+\int_0^t\|\triangle v(s)\|^2\,ds\leq C\widehat{I_0}+C\int_0^t\|\bigtriangledown v_t(s)\|^2\,ds \tag{3.21}$$

Combinando as estimativas (3.16) e (3.21) com (3.17) conclui-se que

$$(1+t)E_v(t)+\int_0^t(1+s)\|v_t(s)\|^2\,ds\leq C\widehat{I_0}+C\int_0^t\|\bigtriangledown v_t(s)\|^2\,ds \tag{3.22}$$

Agora, tomando $m=1$ em (3.20) e ε suficientemente pequeno, resulta que

$$(1+t)\|v(t)\|^2 + \int_0^t (1+s)\| \triangle v(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + C\int_0^t (1+s)\|v_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+C\int_0^t (1+s)\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \, ds + C(1+t)\|v_t(t)\|^2 + C(1+t)\| \bigtriangledown v_t(t)\|^2$$

$$+C(1+t)\| \triangle v(t)\|^2 + C\int_0^t \|v(s)\|^2 \, ds + C\int_0^t \|v_t(s)\|^2 \, ds + C\int_0^t \| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+C\int_0^t \| \triangle v(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + C(1+t)E_v(t) + C\int_0^t E_v(s) \, ds$$

$$+C\int_0^t \|v(s)\|^2 \, ds + C\int_0^t (1+s)\|v_t(s)\|^2 \, ds + C\int_0^t (1+s)\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \, ds$$

com a última desigualdade devido a definição de $E_v(t)$.

Combinando (3.21) e (3.22) com a estimativa acima, resulta

$$(1+t)\|v(t)\|^2 + \int_0^t (1+s)\| \triangle v(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + \int_0^t (1+s)\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+C\int_0^t \|v(s)\|^2 \, ds$$

com $C > 0$ alguma constante positiva que pode ser calculada explicitamente. O lema está provado.

□

Lema 3.2 *Com as hipóteses do teorema (3.2), tem-se que a solução v do problema (3.14) satisfaz:*

$$\int_0^t \|v(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0}$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais.

Prova:

Definimos $w(t,x) = \displaystyle\int_0^t v(s,x)\,ds$ onde v é a solução do problema (3.14) para os dados iniciais $[v_0, v_1] \in H_0^4(\Omega) \times H_0^3(\Omega)$. Então

$$w \in C^1([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^3([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

e além disso:

$$\begin{cases} (v_{tt}(t),\psi) + \gamma(\bigtriangledown v_{tt}(t), \bigtriangledown\psi) + (\triangle v(t), \triangle\psi) + (v_t(t),\psi) = 0, \quad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega) \\ v(0,x) = v_0(x), \quad v_t(0,x) = v_1(x) \qquad\qquad x \in \Omega \end{cases}$$

Integrando em $(0,t)$, resulta que w satisfaz:

$$\begin{cases} (w_{tt}(t),\psi) + \gamma(\bigtriangledown w_{tt}(t), \bigtriangledown\psi) + (\triangle w(t), \triangle\psi) + (w_t(t),\psi) = (v_0 + v_1, \psi) \\ +\gamma(\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown\psi), \quad \forall\ \psi \in H_0^2(\Omega) \\ w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = v_0(x) \qquad\qquad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.23}$$

Substituindo $\psi = w_t$ em (3.23) e integrando em (0,t), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|\bigtriangledown w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\triangle w(t)\|^2 + \int_0^t \|w_t(s)\|^2\,ds = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 + \\ &\frac{\gamma}{2}\|\bigtriangledown v_0\|^2 + \int_0^t (v_0 + v_1, w_t(s))\,ds + \gamma\int_0^t (\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown w_t(s))\,ds \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para cada $w_\nu \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} &(v_0 + v_1, w_\nu) + \gamma(\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown w_\nu) = (\triangle\,\triangle^{-1}\,(v_0 + v_1), w_\nu) + \gamma(\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown w_\nu) \\ &= (\triangle^{-1}(v_0 + v_1), \triangle w_\nu) - \gamma(v_1, \triangle w_\nu) \end{aligned}$$

por causa da regularidade sobre os dados iniciais v_0 e v_1.

Então, devido a densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^2(\Omega)$ segue que

$$(\triangle\,\triangle^{-1}\,(v_0 + v_1), w(t)) + \gamma(\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown w(t)) = (\triangle^{-1}(v_0 + v_1), \triangle w(t)) - \gamma(v_1, \triangle w(t))$$

pois $w(t) \in H_0^2(\Omega)$ para cada t.

Agora, do fato que $w(0,x)=0$ e da identidade acima obtém-se

$$\int_0^t (v_0+v_1, w_t(s))\ ds + \gamma \int_0^t (\bigtriangledown v_1, \bigtriangledown w_t(s))\ ds = (w(t), v_0+v_1)$$

$$+\gamma(\bigtriangledown w(t), \bigtriangledown v_1) \leq |(\triangle w(t), \triangle^{-1}(v_0+v_1))| + \gamma|(\triangle w(t), v_1)| \leq \varepsilon \| \triangle w(t)\|^2$$

$$+\frac{\varepsilon^{-1}}{4}\| \triangle^{-1} (v_0+v_1)\|^2 + \gamma\varepsilon\| \triangle w(t)\|^2 + \gamma\frac{\varepsilon^{-1}}{4}\|v_1\|^2 \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.24) e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pode-se facilmente ver que

$$\|w_t(t)\|^2 + \| \bigtriangledown w_t(t)\|^2 + \| \triangle w(t)\|^2 + \int_0^t \|w_t(s)\|^2\ ds \leq C\|v_0\|^2 +$$

$$C\| \bigtriangledown v_0\|^2 + C\| \triangle^{-1} (v_0+v_1)\|^2 + C\|v_1\|^2 \leq C\widehat{I_0}$$

Mas, como $v = w_t$, conclui-se que

$$\int_0^t \|v(s)\|^2\ ds \leq C\widehat{I_0}$$

Assim, o lema 3.2 também está provado.

Lema 3.3 *Com as hipóteses do teorema 3.2, tem-se*

$$\int_0^t (1+s)\| \bigtriangledown v_t(s)\|^2\ ds \leq C\widehat{I_0}$$

com $C > 0$ uma constante que não depende dos dados iniciais.

Prova:

Primeiro consideramos os dados iniciais $[\varphi_0, \varphi_1] \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Seja φ solução do problema:

$$\begin{cases} (\varphi_{tt}(t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown \varphi_{tt}(t), \bigtriangledown \psi) + (\triangle \varphi(t), \triangle \psi) + (\varphi_t(t), \psi) = 0, & t > 0 \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(0,x) = \varphi_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Devido a regularidade dos dados iniciais, tem-se regularidade na solução, de forma que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq 2$ sejam válidas as igualdades:

$$\begin{aligned}&(D^\alpha \varphi_{tt}(t), D^\alpha \varphi_t(t)) + \gamma(\bigtriangledown D^\alpha \varphi_{tt}(t), \bigtriangledown D^\alpha \varphi_t(t)) + (\triangle D^\alpha \varphi(t), \triangle D^\alpha \varphi_t(t))\\&+(D^\alpha \varphi_t(t), D^\alpha \varphi_t(t)) = 0\end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned}&(D^\alpha \varphi_{tt}(t), D^\alpha \varphi(t)) + \gamma(\bigtriangledown D^\alpha \varphi_{tt}(t), \bigtriangledown D^\alpha \varphi(t)) + (\triangle D^\alpha \varphi(t), \triangle D^\alpha \varphi(t))\\&+(D^\alpha \varphi_t(t), D^\alpha \varphi(t)) = 0\end{aligned} \tag{3.27}$$

Denotamos $D^\alpha \varphi$ por w^α. Por (3.26) tem-se

$$\frac{d}{dt}\left[\ \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle w^\alpha(t)\|^2\ \right] + \|w_t^\alpha(t)\|^2 = 0$$

A energia de $w^\alpha(t,x)$ é dada por:

$$E_{w^\alpha}(t) = \frac{1}{2}\|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle w^\alpha(t)\|^2$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}E_{w^\alpha}(t) + \|w_t^\alpha(t)\|^2 = 0 \tag{3.28}$$

Integrando em $(0,t)$, obtém-se

$$E_{w^\alpha}(t) + \int_0^t \|w_t^\alpha(s)\|\ ds = E_{w^\alpha}(0) \tag{3.29}$$

Multiplicando (3.28) por $(1+t)$ e integrando em $(0,t)$ tem-se

$$(1+t)E_{w^\alpha}(t) + \int_0^t (1+s)\|w_t^\alpha(s)\|^2\ ds = E_{w^\alpha}(0) + \int_0^t E_{w^\alpha}(s)\ ds \tag{3.30}$$

Por (3.27) tem-se

$$(w_{tt}^\alpha(t), w^\alpha(t)) + \gamma(\bigtriangledown w_{tt}^\alpha(t), \bigtriangledown w^\alpha(t)) + (\triangle w^\alpha(t), \triangle w^\alpha(t)) + (w_t^\alpha(t), w^\alpha(t)) = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left[\ (w_t^\alpha(t), w^\alpha(t)) + \gamma(\bigtriangledown w_t^\alpha(t), \bigtriangledown w^\alpha(t)) + \frac{1}{2}\|w^\alpha(t)\|^2\ \right] - \|w_t^\alpha(t)\|^2$$

$$-\gamma\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \| \bigtriangleup w^\alpha(t)\|^2 = 0$$

Integrando em (0,t) resulta da desigualdade de Young que

$$\frac{1}{2}\|w^\alpha(t)\|^2 + \int_0^t \| \bigtriangleup w^\alpha(s)\|^2\ ds \leq \int_0^t \|w_t^\alpha(s)\|^2\ ds + \gamma\int_0^t \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\ ds$$

$$+\frac{1}{4}\|w^\alpha(t)\|^2 + \|w_t^\alpha(t)\|^2 + \frac{\gamma}{4\varepsilon}\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + \gamma\varepsilon\| \bigtriangledown w^\alpha(t)\|^2 + (D^\alpha\varphi_1, D^\alpha\varphi_0)$$

$$+\gamma(\bigtriangledown D^\alpha\varphi_1, \bigtriangledown D^\alpha\varphi_0) + \frac{1}{2}\|D^\alpha\varphi_0\|^2 \tag{3.31}$$

Pelo lema 2.7, sabemos que existe constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C\{\|u\|^2 + \| \bigtriangleup u\|^2\}, \qquad \forall\ u \in H_0^2(\Omega).$$

Em particular

$$\| \bigtriangledown u\|^2 \leq C\{\|u\|^2 + \| \bigtriangleup u\|^2\}, \qquad \forall\ u \in H_0^2(\Omega).$$

Assim, levando isso em conta e tomando ε suficientemente pequeno em (3.31) obtém-se que

$$\|w^\alpha(t)\|^2 + \int_0^t \| \bigtriangleup w^\alpha(s)\|^2\ ds \leq C\widehat{I}_0 + C\int_0^t \|w_t^\alpha(s)\|^2\ ds$$

$$+C\int_0^t \| \bigtriangledown w_t^\alpha(s)\|^2\ ds + C\|w_t^\alpha(t)\|^2 + C\| \bigtriangledown w_t^\alpha(t)\|^2 + C\| \bigtriangleup w^\alpha(t)\|^2$$

para alguma constante $C > 0$.

Por (3.29), obtém-se da estimativa acima que

$$\|w^{\alpha}(t)\|^2 + \int_0^t \| \triangle w^{\alpha}(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + C\int_0^t \| \bigtriangledown w_t^{\alpha}(s)\|^2 \, ds$$

Agora, usando essa estimativa e (3.29) conclui-se de (3.30) que

$$\int_0^t (1+s)\|w_t^{\alpha}(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + C\int_0^t \| \bigtriangledown w_t^{\alpha}(s)\|^2 \, ds, \quad |\alpha| = 1. \tag{3.32}$$

Isso diz que

$$\int_0^t (1+s)\|D^{e_j}\varphi_t(s)\|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0} + \int_0^t \| \bigtriangledown (D^{e_j}\varphi_t)(s)\|^2 \, ds \tag{3.33}$$

com e_j o j-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$.

Usando novamente (3.26), com $|\alpha| = 2$ tem-se que

$$\frac{d}{dt}\left[\ \frac{1}{2}\|w_t^{\alpha}(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2}\| \bigtriangledown w_t^{\alpha}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| \triangle w^{\alpha}(t)\|^2\ \right] + \|w_t^{\alpha}(t)\|^2 = 0$$

para $|\alpha| = 2$.

Integrando em (0,t), resulta

$$\int_0^t \|w_t^{\alpha}(s)\|^2 \, ds \leq E_{w^{\alpha}}(0) \leq C\widehat{I_0} \tag{3.34}$$

para $|\alpha| = 2$.

Em particular, como $w^{\alpha} = D^{\alpha}\varphi$, tem-se que

$$\int_0^t \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\varphi_t \right)(s) \right\|^2 ds \leq C\widehat{I_0}$$

Daí, somando em i obtém-se que

$$\int_0^t \left\| \left(\bigtriangledown \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_t \right)(s) \right\|^2 ds \leq C\widehat{I_0} \tag{3.35}$$

Substituindo (3.35) em (3.33), tem-se

$$\int_0^t (1+s) \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_t(s) \right\|^2 ds \leq C\widehat{I_0}$$

para $j = 1, ..., n$. Finalmente, somando em j segue

$$\int_0^t (1+s) \| \bigtriangledown \varphi_t(s) \|^2 \, ds \leq C\widehat{I_0}$$

sendo φ a solução do problema (3.14) para os dados iniciais $[\varphi_0, \varphi_1] \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Por argumento análogo ao usado no Teorema 3.1, a prova do lema segue.

□

Demonstração do Teorema 3.2

Para a prova do teorema 3.2, usamos que E_v é decrescente. Assim

$$\frac{d}{dt} \left[(1+t)^2 \, E_v(t) \right] = 2(1+t)E_v(t) + (1+t)^2 E_v'(t) \leq 2(1+t)E_v(t)$$

para $t \geq 0$.

Integrando em $(0, t)$, resulta que

$$(1+t)^2 \, E_v(t) \leq E_v(0) + 2 \int_0^t (1+s) E_v(s) \, ds \tag{3.36}$$

Agora, dos lemas (3.1), (3.2) e (3.3) obtém-se imediatamente a estimativa do Teorema para a norma L^2 da solução.

Finalmente, combinando com (3.36) os lemas (3.1), (3.2), (3.3) e a estimativa (3.22) obtém-se que

$$(1+t)^2 E_v(t) \leq C\widehat{I_0}, \quad \forall \, t \geq 0.$$

□

Capítulo 4

Equação Semi-Linear

Neste capítulo, mostramos a existência de soluções globais e taxas de decaimento das soluções e da energia associada ao seguinte problema semi-linear de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \gamma \triangle u_{tt}(x,t) + \triangle^2 u(x,t) + \lambda u_t(x,t) + \beta u(x,t) = |u(x,t)|^p & \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω é um domínio exterior.

Inicialmente, vamos mostrar que se $u(t) \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ então $|u(t)|^p \in L^2(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$.

Usaremos o seguinte resultado conhecido da teoria dos Espaços de Sobolev:

Lema 4.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular. Se* $n > m\,r$ *e* $r \le q \le \dfrac{r\,n}{n - m\,r}$ *então*

$$W^{m,r}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \textit{continuamente.}$$

Pelo lema acima, se $r = 2, m = 1, n > 2$ e $1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$ tem-se

$$H^1(\Omega) \subset L^{2p}(\Omega) \quad \textit{continuamente.}$$

Assim, se $u \in H^1(\Omega)$ e $n > 2$ tem-se

$$\|\,|u(t)|^p\,\|^2 = \|u(t)\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \le C\,\|u(t)\|^{2p}_{H^1(\Omega)} \tag{4.2}$$

para $1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$. Desse modo

$$\|\,|u(t)|^p\,\| \le C\,\|u(t)\|^{p}_{H^1(\Omega)}$$

para $1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$, onde $C > 0$ é uma constante.

Para o caso em que $n = 2$ tem-se

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \textit{continuamente} \quad \forall\, q \in [2, \infty[.$$

Assim,

$$\|\,|u(t)|^p\,\| \le C\,\|u(t)\|^{p}_{H^1(\Omega)} \tag{4.3}$$

Dessa forma, concluímos que $|u(t)|^p \in L^2(\Omega)$, se $u(t) \in H^3(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$, para $1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$ e $n \ge 2$.

Agora, definimos $g : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$ tal que para cada $z \in H^1_0(\Omega)$, $g(z)$ é dada pela equação

$$-(g(z), \psi) - \gamma(\bigtriangledown g(z), \bigtriangledown \psi) = (\,|\,z\,|^p, \psi), \qquad \forall\, \psi \in H^1_0(\Omega). \tag{4.4}$$

Pelo lema de Lax-Milgram, g está bem definida, já que se $z \in H^1_0(\Omega)$ então $|z|^p \in L^2(\Omega)$.

Por regularidade elíptica, se $|u(t)|^p \in L^2(\Omega)$, tem-se que $g(u(t)) \in H^2(\Omega)$, $\forall\, t \geq 0$. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\|g(u(t))\|_{H^2(\Omega)} \leq C \,\|\, |u(t)|^p \,\|, \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{4.5}$$

Também, usando regularidade elíptica em (4.4) obtém-se que

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\| \,|u_1|^p - |u_2|^p \,\|, \qquad \forall\, u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \tag{4.6}$$

Usando a regra da cadeia, tem-se que $g(u(t)) \in H_0^2(\Omega)$, se $u(t) \in H_0^2(\Omega)$.

De fato, $-g(u(t)) = (I - \gamma\triangle)^{-1}|u|^p$ com $(I - \gamma\triangle)^{-1}$ um operador linear limitado.

4.1 Existência de solução local

Sejam $u = u(t)$ e $w = w(t)$ funções. Definimos:

$$U(t) = [u(t), w(t)], \quad G(U(t)) = [0, g(u(t))] \;\text{ e }\; J(U(t)) = (\Phi + G)(U(t)) \quad t \geq 0$$

sendo g definida em (4.4) e Φ uma função arbitrária.

Consideremos, o seguinte problema de Cauchy, associado ao operador $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ definido no capítulo 1:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = BU(t) + J(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

com $U_0 = [u_0, u_1] \in V = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ e $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Teorema 4.1 *Seja* $n \geq 2$ *e* $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$. *Se* $\Phi : X \longrightarrow X$ *é Lipschitz contínua globalmente e* $\Phi(U) \in V$ *para cada* $U \in V$ *então, para cada* $[u_0, u_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, *existe* $T_0 > 0$ *tal que o problema (4.7) tem uma única solução* $U \in C([0, T_0]; [D(B)]) \cap C^1([0, T_0]; X)$.

Verifica-se facilmente que toda solução U de (4.7) satisfaz a seguinte equação integral (fórmula de variação de parâmetros) associada a (4.7):

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)J(U(s))\, ds \tag{4.8}$$

com $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado pelo operador B.

Teorema 4.2 *(Ponto fixo de Banach) Seja* (X, d) *espaço métrico completo e* P *uma aplicação* $P : X \longrightarrow X$ *tal que* $d(P(u), P(v)) \leq Kd(u, v)\, \forall\, u, v \in X$, *para algum* K *fixado, tal que* $0 < K < 1$. *Então* P *tem um único ponto fixo, isto é, existe um único* $u \in X$ *tal que* $P(u) = u$.

Lema 4.2 *Seja* $V = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) = D(B)$ *e* T, R *números positivos fixados. Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *o semigrupo gerado pelo operador* B *e* $U_0 \in D(B)$. *Então o conjunto*

$$\begin{aligned} X_R(T) = \{&U \in C([0,T]; V) \;/\; U(0) = U_0 \ \ e \\ &\sup_{0\leq t\leq T} \left\| U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds \right\|_V \leq R\} \end{aligned}$$

com a métrica $d(U_1, U_2) = \|U_1 - U_2\|_\infty$, *onde* $\|U\|_\infty = \sup\limits_{0\leq t\leq T} \|U(t)\|_V$, *é um espaço métrico completo. Sendo* $V = D(B)$ *consideramos* V *com a norma do gráfico de* B.

Prova:

Observamos primeiramente que o conjunto $X_R(T)$ não é vazio pois pela Proposição (2.1) existe único $U \in C([0,\infty);V) \cap C^1([0,\infty);X)$ solução do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = BU(t) + \Phi(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

pois Φ é, por hipótese, Lipschitz contínua globalmente e $U_0 \in D(B)$.

Assim, da fórmula de variação de parâmetros tem-se que U satisfaz:

$$U(t) = S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, $U \in X_R(T)$ pois

$$\left\| U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\, ds \right\|_V = 0 \leq R$$

Como $C([0,T];V;\|\,.\,\|_\infty)$ é Banach e $X_R(T) \subset C([0,T];V;\|\,.\,\|_\infty)$, basta mostrar que $X_R(T)$ é um subconjunto fechado. Para isto, consideremos uma seqüência $\{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in X_R(T)$ tal que $U_\nu \longrightarrow U$ em $(C[0,T];V;\|\,.\,\|_\infty)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $U_\nu \longrightarrow U, \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_{\nu_0}(t) - U(t)\|_V < \frac{\varepsilon}{2(1+T\,C)} \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

com C a constante Lipschitz de Φ.

Assim, para cada $t \in [0,T]$ tem-se do fato que Φ é contração sobre V:

$$\left\| \ U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s)) \ ds \ \right\|_V$$

$$\leq \left\| \ U_{\nu_0}(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U_{\nu_0}(s)) \ ds \ \right\|_V + \|U(t) - U_{\nu_0}(t)\|_V$$

$$+ \left\| \ \int_0^t S(t-s)(\Phi(U(s)) - \Phi(U_{\nu_0}(s))) \ ds \ \right\|_V \leq R + \|U(t) - U_{\nu_0}(t)\|_V$$

$$+C \int_0^t \|U(s) - U_{\nu_0}(s)\|_V \ ds \leq R + \varepsilon$$

Na estimativa acima usamos o resultado da seguinte observação.

Observação 4.1 *Como $V = D(B)$, a norma que consideramos em V é a norma do gráfico de B. Assim*

$$\|U\|_V^2 = \|U\|_X^2 + \|BU\|_X^2 \quad \text{para } U \in V.$$

Em particular, notar que para $U \in V$

$$\|S(t)U\|_V^2 = \|S(t)U\|_X^2 + \|BS(t)U\|_X^2 = \|S(t)U\|_X^2 + \|S(t)BU\|_X^2$$

$$\leq \|U\|_X^2 + \|BU\|_X^2 = \|U\|_V^2,$$

pois $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações sobre $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Assim,

$$\left\| \ U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\, ds \ \right\|_V < R + \varepsilon$$

Da arbitrariedade de ε segue que

$$\left\| \ U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))ds \ \right\|_V \leq R, \qquad \forall \ t \in [0,T].$$

Agora, como $\|U_\nu(t) - U(t)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad \forall \ t \geq 0$, obtém-se em particular que $\|U_\nu(0) - U(0)\|_V \longrightarrow 0$. Mas como $U_\nu(0) = U_0, \ \forall \ \nu \in \mathbb{N}$, concluímos que $U(0) = U_0$.

Logo $U \in X_R(T)$.

Portanto, $X_R(T)$ é fechado e consequentemente, espaço métrico completo.

$\square$

Demonstração do Teorema 4.1

Vamos provar que para $U_0 \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, existe $T_0 > 0$ e uma única função $U \in C([0, T_0]; V)$ que é solução de (4.7).

Para $T > 0$ e $R > 0$ fixados, consideramos o espaço métrico completo $X_R(T)$, conforme o lema anterior.

Agora, definimos a aplicação:

$$P : X_R(T) \longrightarrow C([0, T]; V)$$

dada por

$$(PU)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\, ds + \int_0^t S(t-s)G(U(s))\, ds, \;\; U \in X_R(T).$$

Vamos provar que P está bem definida.

Sendo $U_0 \in D(B)$, tem-se para $U \in X_R(T)$ que

$$\widetilde{U}(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\, ds \in V$$

para cada $t \geq 0$ e é uma função contínua, devido a propriedade do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ que é gerado pelo operador B e pela hipótese que $\Phi(U) \in V$ se $U \in V$.

Falta provar que a integral $\displaystyle\int_0^t S(t-s)G(U(s))\, ds \in V$ para cada $t \geq 0$ e é uma função contínua em t.

Para isso, observamos primeiro que $G(U(s)) \in V$, pois já foi provado que $g(u(s)) \in H_0^2(\Omega)$, desde que $u(s) \in H_0^2(\Omega)$.

Da teoria de semigrupos resulta que $S(t-s)G(U(s)) \in V = D(B)$ e é uma função contínua na variável t.

Segue da definição de integral que $\int_0^t S(t-s)G(U(s))\ ds \in V$ e é uma função contínua em t.

Portanto, $(PU) \in C([0,T],V)$, o que mostra que P está bem definida.

Agora, vamos mostrar que existe $T_1 > 0$ tal que $P(X_R(T_1)) \subseteq X_R(T_1)$.

Seja $R > 0$. Para $t \in (0,T], s \in [0,t]$ e $U \in X_R(T)$, tem-se pela observação 4.1 que:

$$\left\| (PU)(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(PU(s))\ ds \right\|_V =$$

$$\left\| \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)G(U(s))\ ds - \int_0^t S(t-s)\Phi(PU(s))\ ds \right\|_V$$

$$\leq \int_0^t \|\Phi(U(s)) - \Phi(PU(s))\|_V\ ds + \int_0^t \|G(U(s))\|_V\ ds$$

$$\leq C \int_0^t \|U(s) - PU(s)\|_V\ ds + \int_0^t \|G(U(s))\|_V\ ds$$

sendo $U = [u,v]$ elemento de V. Acima usamos a hipótese do Teorema 4.1 que Φ é globalmente Lipschitz.

Assim, temos obtido que

$$\left\| \ (PU)(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(PU(s))\ ds \ \right\|_V \leq \int_0^T \|G(U(s))\|_V\ ds$$

$$+C\int_0^T \|U(s) - S(s)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds - \int_0^t S(t-s)G(U(s))\ ds\|_V\ ds$$

$$\leq CTR + C\int_0^T \left\| \ \int_0^t S(t-s)G(U(s))\ ds \ \right\|_V \ ds + C\int_0^t \|g(u(s))\|_{H^2(\Omega)}\ ds$$

$$\leq C\int_0^t \|\,|u(t)|^p\,\|\ ds + CTR + C\int_0^T \int_0^T \|G(U(s))\|_V\ ds\ ds$$

$$\leq C\int_0^t \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\ ds + CTR + C\int_0^T \int_0^T \|G(U(s))\|_V\ ds\ ds$$

$$\leq CTR + C\int_0^T \|U(s)\|_V\ ds + C\int_0^T \int_0^T \|U(s)\|_V\ ds\ ds$$

Mas, como $U \in X_R(T)$:

$$\|U(t)\|_V \leq \left\| \ U(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds \ \right\|_V$$

$$+\left\| \ S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds) \ \right\|_V \leq R + \|U_0\|_V + \int_0^t \|S(t-s)\Phi U(s)\|_V\ ds$$

Então, temos que $\|U(t)\|_\infty \leq \widetilde{C}$ com $\widetilde{C}$ constante positiva. De fato,

$$\left\| \ S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds \ \right\|_V \leq \|U_0\|_V$$

$$+\int_0^t \|\Phi U(s)\|_V\ ds \leq \|U_0\|_V + C\int_0^t \|U(s)\|_V\ ds$$

para $0 \leq t \leq T$.

Assim

$$\|U(t)\|_V \leq R + \|U_0\|_V + C\int_0^t \|U(s)\|_V\ ds$$

para $0 \leq t \leq T$.

Portanto, pela desigualdade de Gronwall tem-se que

$$\|U(t)\|_V \leq (R + \|U_0\|_V)e^{CT} = \widetilde{C} \tag{4.9}$$

para $0 \leq t \leq T$, onde C constante Lipschitz de Φ.

Assim,

$$\left\| \; (PU)(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(PU(s))\; ds \; \right\|_V \leq CTR + CT\widetilde{C} + T^2\widetilde{C}C$$

$$= T[CR + (CT + C)\widetilde{C}]$$

sendo C e $\widetilde{C}$ constantes positivas.

Então, para T_1 suficientemente pequeno tem-se

$$\left\| \; (PU)(t) - S(t)U_0 - \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\; ds \; \right\|_V \leq R, \qquad \forall\; t \in [0, T_1]$$

e $(PU)(0) = U_0$.

Logo, $PU \in X_R(T_1)$. Assim mostramos que $P : X_R(T_1) \longrightarrow X_R(T_1)$, para $T_1 > 0$ suficientemente pequeno de modo que $T_1[CR + \widetilde{C}(CT_1 + C)] \leq R$.

Agora, vamos mostrar que existe T_0 com $0 < T_0$, com $T_0[CR + \widetilde{C}(CT_0 + C)] \leq R$, tal que a aplicação $P : X_R(T_0) \longrightarrow X_R(T_0)$ é contração.

Para $T_2 > 0$, sejam $U_1 = [u_1, v_1], U_2 = [u_2, v_2] \in X_R(T_2)$. Então conforme observado em (4.9) tem-se que

$$\|U_1(t)\|_V,\; \|U_2(t)\|_V \leq \widetilde{C}, \qquad \forall\; t \in [0, T_2].$$

Calculamos, para $t \in [0, T_2]$

$$\|(PU_1)(t) - (PU_2)(t)\|_V \leq \int_0^t \|S(t-s)(G(U_1(s)) - G(U_2(s)))\|_V\; ds$$

$$+ \int_0^t \|S(t-s)(\Phi(U_1(s)) - \Phi(U_2(s)))\|_V\; ds$$

Por (4.6), tem-se

$$
\begin{aligned}
&\|(PU_1)(t) - (PU_2)(t)\|_V \leq \int_0^t \|G(U_1(s)) - G(U_2(s))\|_V \ ds \\
&+ \int_0^t \|\Phi(U_1(s)) - \Phi(U_2(s))\|_V \ ds \leq C \int_0^t \|g(u_1(s)) - g(u_2(s))\|_{H^2(\Omega)} \ ds \\
&+C \int_0^t \|U_1(s) - U_2(s)\|_V \ ds \leq C \int_0^t \| \, |u_1(s)|^p - |u_2(s)|^p \, \| \ ds \\
&+ \int_0^t \|U_1(s) - U_2(s)\|_V \ ds
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Se $p > 1$, tem-se que $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $h(S) = S^p$ é uma função convexa, pois $h''(S) \geq 0, \quad \forall \ S \in \mathbb{R}^+$. Logo

$$h(lS_1 + (1-l)S_2) \leq lh(S_1) + (1-l)h(S_2), \qquad \forall \ l \in [0,1].$$

Assim, para $l = \dfrac{1}{2}$, $S_1 = a - b$ e $S_2 = b$, tem-se

$$\frac{1}{2^p} a^p - \frac{1}{2} b^p \leq \frac{1}{2}(a-b)^p$$

E, para $l = \dfrac{1}{2}$, $S_1 = b - a$ e $S_2 = a$, tem-se

$$\frac{1}{2^p} b^p - \frac{1}{2} a^p \leq \frac{1}{2}(b-a)^p$$

Seja $a = |u(t)|$ e $b = |v(t)|$. Usando as duas últimas desigualdades:

$$\int_\Omega | \, |u(s)|^p - |v(s)|^p \, |^2 \ ds \leq \int_\Omega | \, |u(s)| - |v(s)| \, |^{2p} \ ds$$

Assim

$$\| \, |u(t)|^p - |v(t)|^p \, \| \leq \|u(t) - v(t)\|^p_{L^{2p}(\Omega)}$$

Usando a última estimativa em (4.10) e considerando (4.2) resulta que

$$\|(PU_1)(t)-(PU_2)(t)\|_V \leq C\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|^p_{H^1(\Omega)}ds + \int_0^t \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds$$

$$= C\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|^{p-1}_{H^1(\Omega)} \|u_1(s)-u_2(s)\|_{H^1(\Omega)}ds + \int_0^t \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds$$

$$\leq C\int_0^t (\|u_1(s)\|^{p-1}_{H^1(\Omega)} + \|u_2(s)\|^{p-1}_{H^1(\Omega)})\|u_1(s)-u_2(s)\|_{H^1(\Omega)}ds$$

$$+ \int_0^t \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds \leq [2C\widetilde{C}^{p-1}+C]\, T\|U_1(t)-U_2(t)\|_\infty \tag{4.11}$$

Tomando $0 < T_0 < \min\left(T_1, \dfrac{1}{2C\widetilde{C}^{p-1}} + C \right)$ conclui-se que a aplicação $P : X_R(T_0) \longrightarrow X_R(T_0)$ é contração.

Do Teorema de ponto fixo de Banach, existe uma única função $U \in X_R(T_0)$ tal que $PU = U$. Assim, U é solução de (4.8).

Mostramos que o problema (4.8) tem única solução em $X_R(T_0)$.

Resta mostrar a unicidade da solução do problema em $C([0,T_0];V)$.

Sejam $U_1, U_2 \in C([0,T_0];V)$ solução da equação (4.8), com $U_1(0) = U_2(0) = U_0$ e $U_0 \in V$. Então $PU_1 = U_1$ e $PU_2 = U_2$. Daí, da mesma forma que em (4.11), para $t \in [0,T_0]$ tem-se

$$\|U_1(t)-U_2(t)\|_V \leq C\int_0^t \|U_1(s)-U_2(s)\|^{p-1}_V \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds$$

$$+ \int_0^t \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds = C\int_0^t (1+\|U_1(s)-U_2(s)\|^{p-1}_V)\, \|U_1(s)-U_2(s)\|_V \; ds$$

Neste ponto precisamos usar a desigualdade de Gronwall, cuja demonstração é bem conhecida.

Usaremos o lema de Gronwall.

Lema 4.3 *(Desigualdade de Gronwall) Sejam $g_1(t) \geq 0$ e $g_2(t) \geq 0$ funções reais tais que:*

$$g_1(t) \leq K + \int_0^t g_1(s)g_2(s)\ ds, \qquad 0 \leq t \leq T$$

sendo $K \geq 0$ uma constante e $\displaystyle\int_0^T g_2(s)\ ds < \infty$. Então:

$$g_1(t) \leq C \exp\left[\ \int_0^T g_2(s)\ ds\ \right], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Vamos usar esse lema com: $K = 0$, $g_1(t) = \|U_1(t) - U_2(t)\|_V$ e $g_2(t) = C[\|U_1(t) - U_2(t)\|_V^{p-1} + 1]$. Como $U_1, U_2 \in C([0, T_0]; V)$ estão definidas no compacto $[0, T_0]$, tem-se que

$$\int_0^T g_2(s)\ ds < \infty.$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Gronwall, para g_1 e g_2 definidas acima, conclui-se que

$$g_1(t) = \|U_1(t) - U_2(t)\|_V = 0.$$

Segue imediatamente que $U_1 = U_2$ e portanto a unicidade está provada.

Para finalizar, o estudo de existência e unicidade de soluções locais, vamos mostrar que a solução local obtida para a equação (4.8) é solução do problema de valor inicial (4.7).

Defimos $\widehat{U}(t) = \displaystyle\int_0^t S(t-s)G(U(s))\ ds$ e vamos mostrar que a função $\widehat{U}(t)$ é diferenciável em $[0, T_0)$.

Seja $t \in [0, T_0)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [0, T_0]$. Usando as propriedades de semigrupos, tem-se

$$\frac{\widehat{U}(t+h)-\widehat{U}(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-s)G(U(s))\ ds$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)G(U(s))\ ds = \frac{S(h)-1}{h}\int_0^{t} S(t-s)G(U(s))\ ds$$

$$+\frac{S(h)}{h}\int_t^{t+h} S(t-s)G(U(s))\ ds$$

Como o último integrando na igualdade anterior é contínuo, pelo Teorema do valor médio para integrais, segue que:

$$\frac{\widehat{U}(t+h)-\widehat{U}(t)}{h} = \frac{S(h)-1}{h}\int_0^{t} S(t-s)G(U(s))\ ds + S(h)S(t-t^*)G(U(t^*))$$

para algum t^* entre t e $t+h$.

Então,

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\widehat{U}(t+h)-\widehat{U}(t)}{h} = B\int_0^{t} S(t-s)G(U(s))\ ds + G(U(t))$$

pois $t^* \longrightarrow t$ quando $h \longrightarrow 0$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de classe C_0 gerado por B.

Assim $\widehat{U}$ é diferenciável em $[0,T_0)$ e

$$\frac{d}{dt}\widehat{U}(t) = B\int_0^{t} S(t-s)G(U(s))\ ds + G(U(t))$$

Além disso, a função $V(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\Phi(U(s))\ ds$ é diferenciável e $\dfrac{d}{dt}V(t) = BV(t) + \Phi(U(t))$.

Assim, do fato de que $U(t) = V(t) + \widehat{U}(t)$, resulta que

$$\frac{d}{dt}U(t) = BU(t) + J(U(t))$$

Logo, U é diferenciável e solução local em $[0,T_0)$ do problema (4.7).

$\square$

Corolário 4.1 *Seja* $n \geq 2$ *e* $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$. *Para cada* $[u_0, u_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$, *existe* $T_0 > 0$ *e uma única função*

$$u \in C([0,T_0]; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,T_0]; H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,T_0]; H_0^1(\Omega))$$

solução do problema:

$$\begin{cases} (u_{tt}(t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown u_{tt}(t), \bigtriangledown\psi) + (\triangle u(t), \triangle\psi) + (u_t(t), \psi) + \beta(u(t), \psi) = (|u(t)|^p, \psi) \\ \hfill \forall\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad e \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{4.12}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Prova:

Se $z \in H_0^1(\Omega)$, pelo Lema de Lax-Milgram, $\exists$ único $\widetilde{z} \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$-(\widetilde{z}, \psi) - \gamma(\bigtriangledown\widetilde{z}, \bigtriangledown\psi) = (z, \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, da mesma forma que na seção 2.2, definimos $f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que para cada $z \in H_0^1(\Omega)$, $f(z)$ é dada pela equação

$$-(f(z), \psi) - \gamma(\bigtriangledown f(z), \bigtriangledown\psi) = (z, \psi), \qquad \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.13}$$

Por regularidade elíptica, existe $C > 0$ tal que

$$\|f(z_1) - f(z_2)\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|z_1 - z_2\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall\ z_1, z_2 \in H_0^1(\Omega) \tag{4.14}$$

Seja u solução do problema (4.12), com $[u_0, u_1] \in V = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. Então o par $U(t) = [u(t), u_t(t)]$ é solução do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = BU(t) + F(U(t)) + G(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.15}$$

em $X = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, onde B é o operador da seção 2.1 e

$$F(U(t)) = [0, f(u_t(t))] \qquad e \qquad G(U(t)) = [0, g(u(t))]$$

onde f está definida acima e g está definida em (4.4).

Reciprocamente, se $U = U(t)$ é solução de (4.15) com $U_0 \in V$ então a primeira componente de $U(t)$ é solução de (4.12).

Vamos mostrar que F é Lipschitz contínua globalmente. De fato, dados $Z_1 = [v_1, w_1]$ e $Z_2 = [v_2, w_2] \in X$ então, usando (4.14) tem-se

$$\|F(Z_1) - F(Z_2)\|_X = \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^3(\Omega)} \leq$$

$$C\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|Z_1 - Z_2\|_X$$

Assim, pelo teorema 4.1 existe única solução do problema (4.15) com

$$U(t) = [u(t), v(t)] \in C([0, T_0]; V) \cap C^1([0, T_0]; X)$$

Assim, obrigatoriamente, $v = u_t$ e

$$u \in C([0, T_0]; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0, T_0]; H_0^1(\Omega))$$

que satisfaz (4.12).

□

Corolário 4.2 *Seja* $n \geq 2$ *e* $1 < p \leq \dfrac{n}{n-2}$. *Para cada* $[u_0, u_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega), \exists\ T_0 > 0$ *e uma única função*

$$u \in C([0, T_0]; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0, T_0]; H_0^1(\Omega))$$

solução do problema:

$$\begin{cases} (u_{tt}(t), \psi) + \gamma(\bigtriangledown u_{tt}(t), \bigtriangledown\psi) + (\triangle u(t), \triangle\psi) + (u_t(t), \psi) = (|u(t)|^p, \psi) & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & em\ \Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

para cada $\psi \in H_0^2(\Omega)$.

Prova:

Sendo $V = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. Definimos, $\forall\, t \geq 0$,

$$U(t) = [u(t), w(t)], \quad \widetilde{F}(U(t)) = [0, f(w(t)) - \beta f(u(t))] \;\; e \;\; G(Z(t)) = [0, g(w(t))]$$

onde f e g definidas em (4.13) e (4.4) respectivamente.

Então (4.16) é equivalente ao seguinte problema de valor inicial no espaço $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) = X$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U(t) = BU(t) + \widetilde{F}(U(t)) + G(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Aqui, novamente mostramos que $\widetilde{F}$ é Lipschitz contínua globalmente. Dado $Z_1 = [v_1, w_1]$ e $Z_2 = [v_2, w_2] \in X$ então, usando (4.14)

$$\|\widetilde{F}(Z_1) - \widetilde{F}(Z_2)\|_X = \|f(w_1) - \beta f(v_1) - f(w_2) + \beta f(v_2)\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C(\|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^3(\Omega)} + \beta \|f(v_1) - f(v_2)\|_{H^3(\Omega)}) \leq$$

$$C(\|w_1 - w_2\|_{H^1(\Omega)} + \|v_1 - v_2\|_{H^2(\Omega)}) \leq C_1 \|Z_1 - Z_2\|_X$$

Assim, pelo teorema 4.1 existe única solução do problema (4.17) com

$$U(t) = [u(t), v(t)] \in C([0, T_0]; V) \cap C^1([0, T_0]; X)$$

Logo, de (4.17) temos que $v = u_t$. Portanto

$$u \in C([0, T_0]; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T_0]; H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0, T_0]; H_0^1(\Omega))$$

que satisfaz (4.16).

$\square$

4.2 Existência de solução global e comportamento assintótico

Vamos encontrar estimativas de decaimento para a energia do problema (4.16) para o caso em que $n = 3$ e $p = 3$.

Teorema 4.3 *Seja $n = 3$. Existe um número real $\delta > 0$ tal que se os dados iniciais $[u_0, u_1] \in V = H_0^3(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ satisfazem $I_0 < \delta$, o problema (4.16) com $p = 3$ tem uma única solução global $u \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$ tal que*

$$E_v(t) \leq CI_0(1+t)^{-1}$$

com $C > 0$ alguma constante que não depende dos dados iniciais.

Demonstração:

Seja $S(t) : V \longrightarrow V$ dado por

$$S(t)[v_0, v_1] \longrightarrow [v(t), v_t(t)]$$

onde $v(t) \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$ é a única solução do problema linear (2.17).

i) $S(0)[v_0, v_1] = [v(0), v_t(0)] = [v_0, v_1], \qquad \forall\ [v_0, v_1] \in V$

assim $S(0) = I$, onde I é o operador identidade.

ii) Seja $[v_0, v_1] \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$

$$S(t+s)[v_0, v_1] = [v(t+s), v_t(t+s)]$$

e

$$S(t)S(s)[v_0, v_1] = S(t)[v(s), v_t(s)] = S(t)[z_0, z_1] = [z(t), z_t(t)]$$

Mas,

$$[\widetilde{z}(t), \widetilde{z}_t(t)] = [v(t+s), v_t(t+s)]$$

é tal que

$$[\widetilde{z}(0), \widetilde{z}_t(0)] = [z_0, z_1]$$

pela unicidade da solução tem-se

$$[\widetilde{z}(t), \widetilde{z}_t(t)] = [v(t+s), v_t(t+s)] = [z(t), z_t(t)]$$

isto é, $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+$.

iii) Seja $[v_0, v_1] \in V$, sendo $[v, v_t] \in C([0,\infty); V)$, tem-se

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|(S(t) - I)[v_0, v_1]\|_V = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \|[v(t), v_t(t)] - [v_0, v_1]\|_V = 0$$

Por $i), ii), iii)$ tem-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 em $(H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$.

Definimos

$$\|[u, v]\|_E = \|v\| + \| \bigtriangledown v\| + \| \triangle u\| + \|u\|$$

Como conseqüência imediata do teorema 3.2:

Lema 4.4 *Se* $[u_0, u_1] \in H_0^3(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, *tem-se*

$$\|S(t)[u_0, u_1]\|_E = \|[v(t), v_t(t)]\|_E \leq C I_0^{\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{-1}{2}}$$

onde v *é a solução do problema linear (2.17) para os dados iniciais* $[u_0, u_1]$ *e* $C > 0$ *uma constante que não depende dos dados iniciais.*

Lema 4.5 *Se $\beta > 1$, então $\exists$ uma constante $C_\beta > 0$, dependendo somente de β tal que*

$$\int_0^t (1+t-s)^{\frac{-1}{2}}(1+s)^{-\beta} ds \leq C_\beta (1+t)^{\frac{-1}{2}}$$

Usando as estimativas de decaimento obtida para a energia do problema (2.17), vamos obter taxas de decaimento para a energia do problema semi-linear (4.16).

Por propriedades conhecidas da teoria de semigrupos, o problema semi-linear (4.16) pode ser escrito como:

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))\, ds \tag{4.18}$$

onde $U(t) = [u(t), u_t(t)]$, $U_0 = [u_0, u_1]$, $G(U(s)) = [0, g(u(s))]$ sendo $g(u(s))$ definida em (4.4).

Procedemos baseados no argumento do método de Nakao [16]. O qual prova que para mostrarmos a existência global, é suficiente obter estimativas a priori para $E_u(t)$ no intervalo de existência maximal $[0, T_m)$. Neste caso, as estimativas encontradas para o problema linear, são mantidas para o problema semi-linear.

Como conseqüência imediata do lema (4.4) tem-se

Lema 4.6 *Assumindo as hipóteses do teorema (4.3), tem-se*

$$\|S(t)U_0\|_E \leq C I_0^{\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{-1}{2}} \qquad em \;\; [0, T_m)$$

Seja

$$I(s) = \|g(u(s))\|^2_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall\ s \in [0,t] \text{ com } t \in [0, T_m)$$

Pelo lema 2.7 e considerando (4.5) e (4.2) tem-se

$$\|g(u(s))\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\| \, |u(s)|^3 \, \|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u(s)\|^6_{H^1(\Omega)} = C(\|u(s)\|^2 + \| \bigtriangledown u(s)\|^2)^3$$
$$\leq C(\|u(s)\|^2 + \| \bigtriangleup u(s)\|^2)^3.$$

Logo,

$$I(s) \leq C(\|u(s)\|^2 + \| \bigtriangleup u(s)\|^2)^3 \tag{4.19}$$

Assim, pelo lema 4.6 tem-se

$$\|S(t-s)G(U(s))\|_E \leq CI(s)^{\frac{1}{2}}(1+t-s)^{\frac{-1}{2}}$$

Por (4.18) pode-se estimar $U(t)$ por:

$$\|U(t)\|_E \leq CI_0^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}} + \int_0^t (1+t-s)^{\frac{-1}{2}} I(s)^{\frac{1}{2}} \, ds \tag{4.20}$$

Sabe-se que

$$\|U(0)\|_E \leq CI_0^{\frac{1}{2}} < KI_0^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se} \ \ K > C$$

Vamos supor por absurdo que não ocorra

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|U(t)\|_E \leq KI_0^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \ t \in [0, T_m)$$

Então pela continuidade da função $t \longrightarrow (1+t)^{\frac{1}{2}}\|U(t)\|_E \ \ \exists \ T_0 \in (0, T_m)$ tal que

$$\begin{aligned} &(1+t)^{\frac{1}{2}}\|U(t)\|_E < KI_0^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \ t \in [0, T_0) \\ &(1+T_0)^{\frac{1}{2}}\|U(T_0)\|_E = KI_0^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Considerando (4.19) em (4.20) tem-se

$$\|U(t)\|_E \leq CI_0^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}} + C\int_0^t (1+t-s)^{\frac{-1}{2}}(\|u(s)\|^2 + \| \bigtriangleup u(s)\|^2)^{\frac{3}{2}} \, ds$$

Por (4.21) tem-se

$$\|U(t)\|_E \leq CI_0^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}} + 2C\int_0^t (1+t-s)^{\frac{-1}{2}}(KI_0(1+t)^{-1})^{\frac{3}{2}}, \quad \forall\ t \in [0,T_0]$$

Aplicando o lema 4.5:

$$\|U(t)\|_E \leq CI_0^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}} + 2CK^{\frac{3}{2}}I_0^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \qquad \forall\ t \in [0,T_0]$$

Definimos:

$$Q_0(I_0,K) = C + 2CK^{\frac{3}{2}}I_0$$

Assim

$$\|U(t)\|_E \leq I_0^{\frac{1}{2}}Q_0(I_0,K)(1+t)^{\frac{-1}{2}}$$

Escolhendo $K > C$ e $I_0 < \delta = \left(\dfrac{K-C}{2CK^{\frac{3}{2}}} \right)$

$$\Longrightarrow Q_0(I_0,K) = C + 2CK^{\frac{3}{2}}I_0 < K$$

$$\Longrightarrow \|U(t)\|_E < KI_0^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}}, \forall t \in [0,T_0]$$

O que contradiz (4.21).

Logo a solução local $u(t)$ existe globalmente no tempo mantendo as estimativas, $\forall\ t \geq 0$.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.

[3] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic boundary value problems.* Wiley Interscience, New York, 1972.

[4] F. Brauer, J. A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction.* Menlo Park: W. A. Benjamin, 1969.

[5] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[6] Haïm Brezis e Thierry Cazenave, *Nonlinear evolution equations.* 1994.

[7] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[8] A. Haraux, *Semigroupes Linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques.* Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[9] R. Ikehata, *Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain.* Journal of Differential Equations, Hiroshima, 2003.

[10] R. Ikehata, *Small Data Global Existence of Solutions for Dissipative Wave Equations in an Exterior Domain.* Funkcialaj Ekvacioj, Hiroshima, 2002.

[11] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[12] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley e Sons, 1978.

[13] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Springer-Verlag, 1972.

[14] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[15] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos nº9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[16] M. Nakao, *Stabilization of Local Energy in an Exterior Domain for the Wave Equation with a Localized dissipation.* Journal of Differential Equations, Japão, 1998.

[17] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[18] G. Perla Menzala, *Equações Diferenciais: Ordinárias e Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos nº14, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[19] G. Perla Menzala, E. Zuazua, *Timoshenko's plate equations as a singular limit of the dinamical von Kármán system*. J. Math. Pures et Appli. 79 pp. 73-94, 2000.

[20] J. E. M. Rivera, *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Textos Avançados, LNCC, Rio de Janeiro, 1999.

[21] J. R. L. Sánchez, *O sistema dinâmico de Von Karmán em domínios não limitados é globalmente bem posto no sentido de Hadamard: Análise do seu limite singular*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Rio de Janeiro, 2003.

[22] W. A. Strauss, *Decay asymptotics for* $\Box u = Fu$. J. Functional Analys, 1968.

[23] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966.