

**Análise Viscoelástica Não-Linear
de Componentes Poliméricos
com Elementos Finitos**

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Análise Viscoelástica Não-Linear de Componentes
Poliméricos com Elementos Finitos**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa
Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do
grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Fábio Luiz Crema

Florianópolis, Julho de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Análise Viscoelástica Não-Linear de Componentes Poliméricos
com Elementos Finitos**

Fábio Luiz Crema

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Orientador

Prof. Fernando Cabral, Ph.D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora

José Carlos Pereira, Dr.
Presidente da banca examinadora

Prof. Hazim Ali Al Qureshi, PH.D.
Membro da banca examinadora – Relator

Prof. Guilherme Maris de Oliveira Barra, Ph.D.
Membro da banca examinadora

Prof. Pablo Andrés Munõz-Rojas, Dr.Eng.
Membro da banca examinadora

Dedicatória

à minha esposa
e ao meu filho

Agradecimentos

Ao professor, orientador e grande amigo Marcelo pelo suporte técnico e pelo excelente convívio, sem os quais o sucesso deste trabalho não seria possível;

Ao CNPq pelo apoio financeiro nestes dois anos de trabalho;

Aos meus colegas e amigos de laboratório Wesley, Darlan, André, Maura e Fernanda pelo excelente convívio e camaradagem;

Aos meus irmãos Evandro e Osvaldo, minha mãe Marli e meu padrasto Cláudio pelo incentivo e apoio constante;

E em especial à minha esposa Dinéia e meu filho Matheus pelo apoio, carinho e cumplicidade durante esta fase em nossas vidas.

Conteúdo

Nomenclatura	vi
Resumo	x
Abstract	xi
Apresentação do Trabalho	xii
1 Fundamentos de Polímeros	1
1.1 Introdução	1
1.2 Classificação	1
1.3 Estrutura Molecular	2
1.3.1 Modelos de Morfologia de Polímeros Semicristalinos	3
1.3.2 Estrutura Cristalizada Esferulitizada	4
1.3.3 Ligações Interlamelares	6
1.3.4 Fatores que Afetam a Cristalinidade	6
1.4 Temperaturas Aplicadas em Engenharia	7
1.4.1 Temperaturas de Transição	8
1.4.2 Temperatura de Distorção ao Calor HDT	10
1.4.3 Temperatura de Amolecimento VICAT	11
1.5 Características	11
1.6 Propriedades Mecânicas	14
1.6.1 Fatores que Afetam as Propriedades dos Polímeros	17
1.7 Ensaios Utilizados para Polímeros	17
1.7.1 Ensaio de Tração	17
1.7.2 Ensaio de Impacto	19
1.7.3 Ensaio de Fluência	19
1.7.4 Ensaio de Relaxação	20
1.7.5 Ensaio Dinâmico-mecânico	20
1.8 Conclusões Parciais	20
2 Viscoelasticidade Linear	22
2.1 Introdução	22
2.2 Teoria da Viscoelasticidade Linear	23

2.3	Leis Constitutivas Viscoelásticas	24
2.3.1	Modelos Viscoelásticos Mola-Amortecedor	26
2.3.2	Princípio da Superposição de Boltzmann	31
2.3.3	Generalização da Representação Integro-diferencial para Três Dimensões	34
2.4	Inclusão do Efeito da Temperatura	37
2.4.1	Modelo de Taxa Quase-estático com Efeito de temperatura	39
2.5	Algoritmo do Modelo de Taxa Quase-estático	41
2.5.1	Forma Forte do Problema	41
2.5.2	Forma Fraca do Problema	42
2.5.3	Discretização Temporal	42
2.6	Discretização da Formulação Fraca do Problema com Temperatura	50
2.6.1	Discretização por Elementos Finitos	50
2.6.2	Montagem do problema global	57
2.7	Conclusões Parciais	58
3	Viscoelasticidade Finita	60
3.1	Introdução	60
3.2	Deformações Finitas	61
3.2.1	Movimento e Deformação de um Corpo \mathcal{B}	61
3.2.2	Leis de Conservação	65
3.2.3	Definição do 1º Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff	66
3.2.4	Equação de Equilíbrio na configuração de Referência	67
3.3	Formulação Lagrangeana do Modelo de Deformação Finita	68
3.3.1	Formulação Forte do Problema	69
3.3.2	Formulação Fraca do Problema	70
3.4	Formulação Incremental	70
3.4.1	Método de Newton	71
3.4.2	Determinação do Módulo Tangente Global \mathbb{A}	72
3.5	Modelo Viscoelástico	73
3.5.1	Medidas de Tensão	73
3.5.2	Modelo Visco-hipoelástico Finito	75
3.5.3	Determinação do Tensor Tensão de Kirchhoff Rotacionado	78
3.6	Derivada da Relação Constitutiva	82
3.7	Discretização Espacial do Problema	84
3.7.1	Discretização por Elementos Finitos de Galerkin	85
3.7.2	Montagem do Problema Global	87
3.8	Conclusões Parciais	88
4	Resultados	89
4.1	Introdução	89
4.2	Viscoelasticidade Linear	89
4.2.1	Validação do Modelo Viscoelástico Linear	90

4.2.2	Outros Problemas	93
4.3	Viscoelasticidade Não-Linear	97
4.3.1	Validação do Modelo Viscoelástico Não-Linear	98
4.3.2	Outros Problemas	99
4.4	Conclusões Parciais	103
5	Conclusão	105

Lista de Figuras

1.1	Modelo da Miscela Frangeada, [6].	3
1.2	Modelo da Teoria das Lamelas [6].	4
1.3	Microscopia óptica mostrando a Cruz de Malta [6].	4
1.4	Modelo da Teoria do Esferulito [8].	5
1.5	Modelo da Teoria do Shish Kebab [6].	5
1.6	Ligações Interlamelares [6].	6
1.7	Definição do comportamento conforme temperatura [8].	7
1.8	Comportamento dos polímeros conforme o tipo [8].	8
1.9	Temperaturas de transição [8].	9
1.10	Ensaio para determinação da HDT [6].	10
1.11	Ensaio para determinação da VICAT [6].	11
1.12	Localização da tensão de escoamento [24].	15
1.13	Comportamentos de polímeros no ensaio de tração [8].	18
1.14	Estricção em um polímero semicristalino [8].	18
1.15	Ensaio de impacto do tipo IZOD/CHARPY [8].	19
2.1	Curvas tensão-deformação isocrônicas para o nylon 66 Maranyl [23].	24
2.2	Esquema da relaxação de tensão.	25
2.3	Esquema da fluência.	26
2.4	Mola linear.	26
2.5	Amortecedor viscoso linear.	27
2.6	Modelo de Maxwell.	27
2.7	Modelo de Kelvin.	28
2.8	Modelo sólido de Maxwell.	29
2.9	Modelo sólido de Maxwell generalizado.	30
2.10	História de deformação e aproximação por passos.	32
2.11	Módulo de relaxação do Poliestireno: Temperatura de referência 135°C [35].	33
2.12	Módulo de fluência do Poliestireno atático: temperatura de referência 100°C [35].	34
2.13	Variação do módulo de relaxação com o tempo e a temperatura [12].	38
2.14	Curva mestre do módulo de relaxação em a 70° F [12].	38
2.15	Fator de deslocamento, $A_T(T(t))$, variando com a temperatura [12].	39
2.16	Partição do tempo.	43

2.17	Discretização do domínio.	51
3.1	Definições das configurações inicial e final e dos sistemas de coordenadas utilizados.	61
3.2	Definição da configuração inicial.	62
3.3	Definição da função deformação.	63
3.4	Aplicação do vetor tração nas configurações de referência e atual.	67
3.5	Definição dos contornos do problema.	69
3.6	Definição do campo de deslocamento.	69
3.7	Corpo nos instantes t_n e t_{n+1}	71
3.8	Discretização do domínio.	85
4.1	Problema usado para validar o programa.	90
4.2	Malha utilizada para o problema usado para validar o programa.	90
4.3	Validação da parte deviatórica do modelo.	91
4.4	Validação da parte volumétrica do modelo.	92
4.5	Validação das partes deviatórica e volumétrica juntas.	93
4.6	Anel submetido à pressão interna.	94
4.7	Evolução do deslocamento no anel.	94
4.8	Fluência em alguns pontos do anel.	95
4.9	Modelo geométrico e malha da polia.	96
4.10	Polia deformada.	96
4.11	Evolução do deslocamento na polia.	97
4.12	Fluência em alguns pontos da polia.	97
4.13	Comparação entre os programas linear e não-linear.	98
4.14	Relaxação do problema usado para validação do modelo não-linear.	99
4.15	Fluência do problema usado para validação do modelo não-linear.	99
4.16	Corpo de prova usado em um ensaio de tração ou compressão e sua malha.	100
4.17	Simulação de um ensaio de tração e compressão.	101
4.18	Modelo geométrico e malha da polia II.	101
4.19	Polia II deformada.	102
4.20	Variação do campo de tensões ao longo do tempo.	102
4.21	Relaxação em alguns pontos da polia II.	103

Nomenclatura

σ	tensão de Cauchy
ε	tensão infinitesimal
E	módulo de elasticidade
E^*	módulo de elasticidade complexo
E'	módulo de armazenamento
E''	módulo de perda
$\tan \delta$	tangente de perda
t	tempo
u	deslocamento
η	coeficiente de viscosidade
τ	tempo de relaxação
ε_S	deformação na mola
ε_D	deformação no amortecedor
(\cdot)	derivada em relação ao tempo
σ_S	tensão na mola
σ_D	tensão no amortecedor
φ	função de relaxação genérica
α	constante material genérica
\mathbb{D}	tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem
ξ, s, \bar{s}	variáveis de integração relacionadas ao tempo
\mathbf{I}	tensor identidade de segunda ordem
\mathbb{I}	tensor identidade de quarta ordem
$(\cdot)_{dev}, (\cdot)^d$	parcela deviatórica de \cdot
G	módulo de cisalhamento
K	"bulk modulus"
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor tensão de Cauchy
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor deformação infinitesimal
\mathbf{u}	vetor de deslocamentos
e	parcela volumétrica da deformação
\mathbf{S}	parcela deviatórica da tensão
p	parcela volumétrica da tensão
G_∞	módulo de cisalhamento para o tempo tendendo ao infinito

K_∞	"bulk módulos" para o tempo tendendo ao infinito
G_0	módulo de cisalhamento para o instante $t = 0$
K_0	"bulk modulus" para o instante $t = 0$
G_i	i-ésimo termo da série de Prony relacionado ao módulo de cisalhamento
K_i	i-ésimo termo da série de Prony relacionado ao "bulk modulus"
τ_i^G	i-ésimo tempo de relaxação da série de Prony relacionado ao módulo de cisalhamento
τ_i^K	i-ésimo tempo de relaxação da série de Prony relacionado ao "bulk modulus"
n_g	número de termos da série de Prony relacionados ao módulo de cisalhamento
n_k	número de termos da série de Prony relacionados ao "bulk modulus"
α^G	módulo de cisalhamento relativo
α^K	"bulk modulus" relativo
ν	coeficiente de Poisson
k	módulo volumétrico
T	temperatura
ϱ	tempo de redução relacionado com a temperatura
A_T	fator de deslocamento relacionado com a temperatura
T_g	temperatura de transição vítrea.
C_1^g, C_2^g	constante materiais relacionados a T_g
T_0	temperatura de referência
C_1, C_2	constantes materiais na temperatura de referência
\mathbf{x}	vetor posição
\mathbf{b}	vetor de forças de corpo
$\bar{\mathbf{b}}$	vetor das forças de corpo prescrito
\mathbf{n}	vetor normal
t_f	tempo final
Ω	domínio do problema
$\partial\Omega$	contorno do problema
$\bar{\Omega}$	união do domínio com o contorno do problema
Γ_u	contorno do problema com condições de deslocamento prescrito
Γ_t	contorno do problema com condições de trações prescritas
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamentos prescritos
\mathbf{t}	vetor de trações superficiais
$\bar{\mathbf{t}}$	vetor de trações prescritas
$\mathcal{K}, \mathcal{K}_t$	espaço dos deslocamentos admissíveis
\mathcal{V}	espaço dos deslocamentos virtuais
$\hat{\mathbf{v}}$	vetor de deslocamento virtual
$(\cdot)_{n+1}, (\cdot)_n$	valor avaliado no instante $n + 1$ e n de \cdot
$\Delta(\cdot)$	variação entre os instantes $n + 1$ e n de \cdot
$\vec{(\cdot)}$	forma vetorial de \cdot
\mathbf{q}^e	forma vetorial do vetor de deslocamentos
$\hat{\mathbf{q}}^e$	forma vetorial do vetor de deslocamentos virtuais

- N** matriz de funções de interpolação construídas pelo FEM
- B** matriz que relaciona as componentes do tensor de deformação com o vetor de deslocamentos nodais do elemento.
- Ω_e domínio do elemento
- w** vetor auxiliar constante
- H** matriz auxiliar constante
- $\mathbf{K}_e^{G0}, \mathbf{K}_e^G$ matrizes de rigidez do elemento relacionados a parte cisalhante
- $\mathbf{F}_e^{S(i)}, \mathbf{F}_e^S, \mathbf{F}_e^{\varepsilon d}, \mathbf{F}_e^{\varepsilon d0}$ vetores de força do elemento relacionados a parte cisalhante
- $\mathbf{K}_e^{K0}, \mathbf{K}_e^K$ matrizes de rigidez do elemento relacionados a parte volumétrica
- $\mathbf{F}_e^{p(i)}, \mathbf{F}_e^p, \mathbf{F}_e^{ev}, \mathbf{F}_e^{ev0}$ vetores de força do elemento relacionados a parte volumétrica
- $\mathbf{F}_e^{\bar{b}}$ vetor de força do elemento relacionados a força de corpo
- $\mathbf{F}_e^{\bar{t}}$ vetor de força do elemento relacionado a tração
- U, A, \check{A}_e operadores de montagem do FEM
- \check{U}_e vetor de deslocamentos global
- \hat{U} vetor de deslocamentos virtuais global
- \mathbf{K}^G matriz rigidez global relacionada a parte cisalhante
- \mathbf{K}^K matriz rigidez global relacionada a parte volumétrica
- $\mathbf{F}^{\bar{t}}$ vetor de forças trativas global
- $\mathbf{F}^{\bar{b}}$ vetor de forças de corpo global
- $\mathbf{F}^S, \mathbf{F}^{\varepsilon d}, \mathbf{F}^{\varepsilon d0}$ vetores de força globais relacionados a parte cisalhante
- $\mathbf{F}^p, \mathbf{F}^{ev}, \mathbf{F}^{ev0}$ vetores de força globais relacionados a parte volumétrica
- K** matriz de rigidez global
- R** vetor de resíduos global
- \mathcal{B} corpo no espaço
- \mathcal{P}, \mathcal{Q} partículas no espaço
- $(\cdot)_o$ definição na configuração de referência de \cdot
- $(\cdot)_t$ definição na configuração atual de \cdot
- φ função deformação da teoria de grandes deformações
- v** vetor de velocidades
- $\mathcal{O}\left(dx_{o_j}^2\right)$ derivadas de ordem superior
- F** tensor gradiente de deformações
- $\nabla(\cdot)$ gradiente de \cdot na configuração atual
- $grad(\cdot)$ gradiente de \cdot na configuração de referência
- $div(\cdot)$ divergente de \cdot na configuração de referência
- R** tensor rotação
- U** tensor alongamento direito
- V** tensor alongamento esquerdo
- C** tensor de Cauchy-Green direito
- B** tensor de Cauchy-Green esquerdo
- m massa
- J determinante do tensor gradiente de deformação

- P** primeiro tensor tensão de Piola Kirchhoff
 $d\mathbf{f}$ diferencial de força
 dA diferencial de área
 \mathcal{F} trabalho virtual do problema de grandes deformações
 $(\cdot)^k$ valor da k-ésima iteração do método de Newton
 $(\cdot)^{k+1}$ valor da k-ésima mais uma iteração do método de Newton
 \mathbb{A} módulo tangente global
 $\boldsymbol{\tau}$ tensor tensão de Kirchhoff
 $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ tensor tensão de Kirchhoff rotacionado
 $(\cdot)_m$ definição material de \cdot
 $\tilde{\mathbb{D}}$ derivada da relação constitutiva em relação ao gradiente de deformações
 \mathbb{H} derivada do tensor de Cauchy-Green direito em relação ao gradiente de deformação
 δ_{ij} delta de Kronecker
 \dot{W} taxa de trabalho por unidade de massa
 \mathbf{D} tensor taxa de deformação
 ρ densidade de massa
 \mathbf{E} tensor deformação logarítmica Lagrangiana
 $\bar{(\cdot)}$ forma rotacionada de \cdot
 $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Omega}$ tensores rotação
 $\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}}$ taxa de Green-Naghdi do tensor tensão de Kirchhoff
 \mathbf{G} matriz que relaciona as componentes do tensor deformação com o vetor de deslocamentos nodais do elemento para o problema não-linear
 \mathbf{A} tensor de segunda ordem de mapeamento do módulo tangente global
 \mathbf{F}_e^{int} vetor de força interna do elemento
 \mathbf{F}^{int} vetor de força interna global
 \mathbf{F}^{ext} vetor de forças externas globais
 \mathbf{K}_T matriz rigidez tangente global para o problema não-linear
 \mathbf{E}_R vetor erro do problema não-linear

Resumo

Neste trabalho foi apresentado um modelo viscoelástico para grandes deformações, o qual foi discretizado pelo método dos elementos finitos. Para isso foi estudado o comportamento e as características dos polímeros, que podem ou não apresentar comportamento viscoelástico. Vários fatores afetam o comportamento viscoelástico dos polímeros, mas os principais são o tempo e a temperatura. Para tratar o efeito destes parâmetros nestes materiais será considerado que eles afetam apenas o módulo de elasticidade na relação constitutiva. Para isso será usada uma série de Prony para descrever a dependência do tempo e o princípio da superposição tempo-temperatura para descrever a dependência da temperatura.

Antes de propor o modelo viscoelástico para grandes deformações será apresentado um modelo viscoelástico para pequenas deformações. Este modelo será desenvolvido com base no modelo viscoelástico linear encontrado no software comercial ANSYS. A intenção neste modelo é dar maior compreensão sobre o fenômeno viscoelástico e determinar uma relação constitutiva viscoelástica base para que seja expandida para o modelo de grandes deformações. Esta relação constitutiva usará como base os modelos do tipo mola amortecedor e o modelo encontrado pelo princípio de superposição de Boltzmann. Todos esses modelos são unidimensionais e têm a mesma forma construtiva, formados por uma parte instantânea, ou elástica, e uma parte dependente do tempo, ou viscosa. Assim, propõe-se que a relação constitutiva tridimensional deve ter a mesma forma, onde são trocados apenas as medidas de tensão e deformação, que são escalares, por tensores de segunda ordem e o módulo de elasticidade, que também é um escalar, por um tensor de quarta ordem. Então este modelo será dividido em tensão deviatória e volumétrica e discretizado por elementos finitos de Galerkin.

Para o modelo viscoelástico não-linear são utilizadas diversas definições da mecânica do contínuo para grandes deformações. O modelo é baseado na hipoelasticidade. Portanto, para este modelo são apenas trocados as medidas de tensão e deformação lineares pelo tensor tensão de Kirchhoff rotacionado e pelo tensor deformação logarítmica Lagrangeana. Estes dois tensores formam um par conjugado e satisfazem o princípio da invariância de observador. Com isso, como o problema é não linear, é usado o método de Newton como método iterativo para solução do problema. Assim, cabe salientar que um dos principais fatores que se deve ter mais cuidado é o cálculo da chamada matriz rigidez tangente. Isso porque, essa matriz é responsável pelas correções de cada iteração, e se for mal condicionada ou mal calculada, pode causar muita demora ou até mesmo fazer com que o algoritmo venha a não convergir.

Abstract

In this work, it will be presented a viscoelastic model for large deformations, which will be discretized by the finite element method. In order to present this model, it will be performed a detailed study on polymer behavior and characteristics, which can either present viscoelastic behavior or not. Many factors affect the viscoelastic behavior of polymers, but the main ones are time and temperature. To deal with the effect of these parameters, it will be considered that they only affect the elasticity modulus in the constitutive relationship. For this, it will be used a Prony series for describing the time dependence and the time-temperature superposition principle for describing the temperature dependence.

Before proposing the viscoelastic model for large deformations, it will be presented a viscoelastic model for small deformations. This model will be developed based on the linear viscoelastic model used by the commercial software ANSYS. The purpose of this linear model is to get a better understanding about the viscoelastic phenomenon and to establish a constitutive viscoelastic relation, so that it can be used in the modelling of the large deformations model. This constitutive relationship will be based on the spring-dashpot models, like Maxwell and Kelvin-Voigt, and the model obtained by the Boltzmann superposition principle. All these models are one-dimensional and have the same constructive form, i.e., they are composed by two parts: an instantaneous (elastic) and another one which is time dependent, also known as viscous. Thus, one proposes that the three-dimensional constitutive relationship must have the same form, in which it is only changed the stress and strain measures. The scalar values are turned into a second-rank tensor and the elasticity modulus, which is also a scalar value, is turned into a fourth-rank tensor. Then, this model will be divided into deviatoric and volumetric parts and discretized by the Galerkin finite element method.

For the non-linear viscoelastic model, it is used many definitions of the continuum mechanics for large deformations. The model is based on hyperelasticity theory. Therefore, for this model, the linear stress and strain measures are, respectively, turned into the rotated Kirchhoff stress tensor and the Lagrangean logarithmic strain tensor. These two tensors form a conjugated pair and satisfy the frame invariance principle. As the problem is non-linear, it is used the Newton method as the iterative method for solving the problem. Thus, one may emphasize that one of the main factors which must be concerned about is the calculation of the well-known tangent stiffness matrix, because this matrix is responsible for correcting every iteration and if it is bad conditioned or evaluated, the processing time can increase and the algorithm will not converge.

Apresentação do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é propor e validar um modelo viscoelástico para grandes deformações. Contudo, foi visto que para chegar-se a tal modelo seria necessário um estudo aprofundado sobre o comportamento de polímeros e sobre o fenômeno da viscoelasticidade. A grande maioria dos polímeros possui comportamento viscoelástico, porém diversos fatores são responsáveis para a existência ou não deste comportamento. Existem várias classificações para polímeros. Por essas classificações, com raras exceções, pode-se dizer se ele irá ou não comportar-se como um material viscoelástico. Mesmo assim, outros fatores podem afetar em muito neste comportamento. A temperatura, por exemplo, é um fator dos mais importantes para estes materiais. Todo este estudo visa determinar a aplicabilidade do modelo e quais as condições necessárias para o mesmo. Com isso, pode-se analisar as várias teorias viscoelásticas e determinar qual seria usada. Foram encontradas na literatura várias teorias sobre viscoelasticidade, cada qual com suas peculiaridades. Os principais fenômenos que caracterizam a viscoelasticidade são a relaxação de tensão, a fluência e a dependência da taxa de deformação. Todos estes fenômenos são caracterizados por propriedades que variam com o tempo. Isto acontece porque com o passar do tempo existe um rearranjo molecular do material, alterando assim suas propriedades. Então será desenvolvido um modelo viscoelástico linear, que será usado como base para o modelo de grandes deformações. Neste modelo será proposta uma teoria para descrever esta mudança das propriedades ao longo do tempo. Usando como base o modelo do software ANSYS será determinada uma relação constitutiva, a qual será empregada em um problema de valor de contorno e aproximada pelo método de elementos finitos. Finalmente, após um domínio da viscoelasticidade linear, será proposto um modelo viscoelástico para grandes deformações. Este modelo será baseado na teoria hipoeelástica e terá como base a mesma relação constitutiva do modelo viscoelástico linear. Para uma maior descrição deste trabalho, a seguir será feito um pequeno resumo de cada um dos capítulos desta dissertação.

O **Capítulo 1** faz um estudo sobre polímeros, mostrando todas as suas principais características. Existem vários autores que os classificam de várias formas diferentes, mas a mais comum é classificá-los em termoplásticos, termofixos, elastômeros e fibras. Cada um destes materiais possui características, quanto a sua estrutura molecular, bem peculiares. Várias idealizações destas estruturas serão apresentadas, mostrando o quando elas podem afetar em seu comportamento. A formação destas estruturas é afetada por vários fatores, desde a velocidade de solidificação até a presença ou não de inclusões. Então, como a temperatura é um destes principais fatores, foram definidas temperaturas características para os polímeros que podem ajudar a descrever seu comportamento. No entanto, o que torna o uso de polímeros tão atrativo são as suas car-

acterísticas, tais como o baixo peso específico, sua alta processabilidade, baixa condutividade térmica, etc. Existem várias aplicações que levam estas características em conta. Por exemplo, se todas as peças feitas de polímeros em um carro fossem substituídas por aço, esse caso teria um peso bem maior. No entanto, a parte mais importante deste capítulo trata das propriedades dos polímeros e os ensaios utilizados para suas caracterização. Estas propriedades podem ser definidas em propriedades de curta duração e de longa duração. Para a determinação das variáveis de curta duração são utilizados os mesmos ensaios usados para o aço. Já para as variáveis de longa duração, que podem ser chamadas também de variáveis viscoelásticas, existem ensaios específicos para polímeros.

No **Capítulo 2** será desenvolvido um modelo viscoelástico linear baseado no modelo encontrado no software ANSYS. Na viscoelasticidade linear as curvas tensão deformação devem ser linhas retas, da mesma forma que no aço, mas, alterando a taxa de deformação devem ter inclinações diferentes. Esta teoria dá origem aos chamados modelos mola-amortecedor, que são muito difundidos na literatura. O modelo baseado no princípio de superposição de Boltzmann também é baseado na viscoelasticidade linear. Todos esses modelos dão origem a relações constitutivas muito parecidas, compostas de uma parte instantânea, ou elástica, e outra dependente do tempo, ou viscoelástica. Contudo, todas essas relações são unidimensionais. Assim, é proposta uma relação constitutiva tridimensional semelhante, mudando-se apenas as medidas de tensão e deformação, que são escalares, por tensores de segunda ordem, e o módulo de elasticidade por um tensor de quarta ordem. Dois parâmetros relevantes para este modelo são o tempo e a temperatura, onde estes serão considerados apenas influenciando o módulo de elasticidade. Para descrever a dependência do tempo serão usadas séries de Prony e para a temperatura o princípio de superposição tempo-temperatura. Como o modelo possui dependência do tempo será feita sua discretização temporal e posteriormente sua discretização espacial, esta última pelo método dos elementos finitos. Cabe lembrar que o resultado final será um sistema linear de solução direta.

O modelo Viscoelástico para grandes deformações será apresentado no **Capítulo 3**. Este modelo será fundamentado na teoria hipoeelástica e na teoria de deformações finitas da mecânica do contínuo. Dentro da teoria de deformações finitas serão definidos uma partícula, um corpo, movimento, etc. As leis de conservação também serão muito úteis. A configuração utilizada para o desenvolvimento do modelo será a configuração Lagrangeana. Portanto, o tensor tensão usado na equação de equilíbrio será o 1º tensor tensão de Piola-Kirchhoff. No entanto, o par conjugado formado por esse tensor não satisfaz o princípio da invariância de observador. Para resolver este problema serão utilizados como medidas de tensão deformação o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado e a tensão logarítmica Lagrangeana, que são determinados em uma pseudo configuração de referência não-rotacionada. A relação constitutiva utilizada neste modelo será a mesma utilizada no modelo linear, mudando-se apenas as medidas de tensão e deformação por medidas não-lineares. Os efeitos da temperatura e do tempo serão tratados da mesma forma que no capítulo anterior. Porém, como trata-se de um problema não linear, além da discretização temporal e espacial, deverá ser utilizado o método de Newton para solução do sistema de equações. Como este é um processo iterativo, é feita uma correção do valor anterior

através da chamada matriz tangente global, a qual deve ser avaliada com muito cuidado, pois um mal condicionamento da mesma pode fazer com que o problema demore ou até mesmo não consiga convergir.

Finalizando, no **Capítulo 4**, serão testados e validados os modelos viscoelásticos linear e viscoelásticos não-linear. Os modelos serão programados em linguagem "Fortran" e serão utilizados problemas encontrados em nosso cotidiano para as comparações. Primeiramente será avaliado o programa linear, onde seu primeiro teste será uma comparação com o software ANSYS, onde espera-se resultados idênticos nesta comparação, pois, como já foi dito, os modelos são os mesmos. Em seguida serão feitos outros testes visando verificar sua robustez quanto à malha, a pontos de concentração de tensão, etc. Após, será testado o modelo viscoelástico não-linear, o qual será avaliado mais qualitativamente do que quantitativamente. Isto acontece devido à dificuldade de conseguir resultados confiáveis para comparação. Ele será comparado com o programa linear, onde espera-se que para pequenos valores de deformação eles tenham os mesmos resultados e com o aumento das deformações comecem a divergir, onde o programa para grandes deformações começa a demonstrar sua não-linearidade. Outras questões testadas serão comportamentais, como a fluência e a relaxação do material. Também será testada a robustez do modelo quanto à sua malha e à existência de pontos de concentração de tensão.

Capítulo 1

Fundamentos de Polímeros

1.1 Introdução

Quais são os tipos de materiais aos quais pode-se aplicar a teoria de viscoelasticidade? Quais teorias viscoelásticas são aplicáveis a quais tipos de polímeros? Quais os limites de sua aplicabilidade? Por estas e outras perguntas buscou-se conhecer um pouco mais sobre polímeros: sua classificação, estrutura, propriedades, características, etc. Um vasto e amplo ramo científico abriu-se, com diversas teorias, diversos autores, diversas literaturas, etc. Neste capítulo buscou-se conhecer o comportamento geral dos polímeros.

Polímeros são materiais que costumam apresentar comportamento variado. Vários tipos de classificação, por exemplo, são apresentados nas literaturas, como pode ser visto em [9], [8], [24] e [38]. Possuem vários tipos de estruturas, podendo ser totalmente desordenados como em elastômeros ou possuem cadeias que se arranjam de forma cristalina, semelhante aos metais. Além disso, são muito sensíveis a temperatura, pressão, taxa de deformação, dentre outros fatores. Por tudo isso, uma caracterização de polímeros se torna muito difícil. Existem parâmetros que não fazem sentido para certos tipos de polímeros, como pode ser visto em [22]. Apesar disso, polímeros possuem vantagens em certas aplicações. Características como baixo peso específico, alta produtividade, etc, tornam-os muito atraentes em várias situações.

Existem propriedades mecânicas que são comuns para polímeros e metais. Algumas têm exatamente o mesmo significado, enquanto outras diferem muito. Vários tipos de ensaios para avaliação destas propriedades serão apresentados, pois para o correto funcionamento do modelo matemático subsequente estes valores têm que ser adequadamente identificados. Para tal, normas foram estudadas em [34] e [14]. Foram encontrados ensaios de curta e longa duração, que são apresentados em [9].

1.2 Classificação

Conforme [9], o desenvolvimento científico gerou um grande número de polímeros para atender as mais diversas áreas de aplicações e necessidades. Existem várias formas de se classificar um polímero. Quanto à sua estrutura química, às suas características tecnológicas, ao seu desempenho mecânico, etc. Para o presente estudo a classificação relevante é quanto ao comportamento

mecânico do polímero.

Os polímeros podem ser classificados, quanto ao comportamento mecânico, em:

1. **Plásticos** : polímeros sólidos na temperatura ambiente. Podem ser divididos em:

Termoplásticos: são polímeros que, sob o efeito da temperatura e pressão, amolecem e fluem.

Quando retornam às condições iniciais de temperatura e pressão se solidificam. Todavia, se for novamente aplicada uma elevada temperatura e pressão tornam a amolecer e fluir, podendo assim ser remoldados e reutilizados, o que os caracteriza como recicláveis. São solúveis e possuem cadeia linear. Exemplos: PE, PP, PVC, etc.

Termofixos: em sua forma inicial, quando submetidos a alta temperatura e pressão, amolecem e fluem, reagindo quimicamente formando ligações cruzadas entre as cadeias e se solidificando. Após isto, qualquer outro aumento de temperatura ou pressão não tem mais influência, pois estes polímeros são insolúveis, infusíveis e não-recicláveis. Os termofixos, antes da cura, são encontrados na forma de pré-polímero, ou seja, sem ligações cruzadas. Exemplos: baquelite, epóxi, etc.

2. **Elastômeros:** quando submetido a um carregamento em temperatura ambiente, um elastômero pode ser deformado no mínimo duas vezes o seu comprimento original, retornando ao seu comprimento original após removido o carregamento. São polímeros que possuem cadeias flexíveis, amarradas umas às outras, e baixa densidade de ligações cruzadas. Devido ao fato de possuírem ligações cruzadas, como os termofixos, também são insolúveis, infusíveis e não-recicláveis. Exemplo: borracha natural (termo genérico utilizado para qualquer elastômero ou mistura de elastômeros após a formação de ligações cruzadas, ou seja, vulcanizada).
3. **Fibras:** termoplástico que difere dos demais por suas características geométricas, possuindo uma razão entre comprimento e diâmetro maior ou igual a 100. Como estes polímeros devem possuir orientação de suas cadeias e cristais, que é feita de modo forçado durante a fiação, acontece um aumento de sua resistência mecânica, tornando possível seu uso na forma de fios finos. Exemplos: fibras de Nylon, poliéster (PET), poliácridonitrila (PAN), etc.

1.3 Estrutura Molecular

Assim como nos metais, a estrutura molecular dos polímeros é importante para definir suas características e propriedades. No entanto, nos polímeros o processo de cristalização difere dos sólidos cristalinos convencionais por possuírem longas cadeias poliméricas. Eles podem possuir uma fase desordenada, chamada de fase amorfa, e/ou uma fase ordenada, onde existe regularidade e repetitividade, chamada de fase cristalina. Na fase cristalina são encontrados os cristalitos, que são muito menores que cristais normais, os quais contêm muitas imperfeições e são interligados por regiões cristalinas e amorfas. Outro fato é que apenas uma fase completamente

crystalina é impossível, pois devido ao seu tamanho, normalmente apenas uma parte da molécula consegue adotar a conformação ordenada necessária.

Muitos são os fatores que podem ajudar ou atrapalhar na cristalização de um polímero. Dependendo da estrutura química, presença de impurezas, condições de cristalização, regularidade das cadeias, forças intermoleculares, etc, um polímero vai ser mais ou menos cristalino. Grupos laterais, por exemplo, devem ser suficientemente pequenos e dispostos regularmente e simetricamente nas cadeias para proporcionarem um alto grau de cristalização.

1.3.1 Modelos de Morfologia de Polímeros Semicristalinos

Teoria Miscela Frangeada

Uma das primeiras teorias apresentadas para descrever a morfologia dos cristais poliméricos foi a teoria da miscela frangeada. Este modelo surgiu na década de 1920, era um tanto quanto simples e foi aceito durante muitos anos. Segundo este modelo, os polímeros são formados por uma fase cristalina e uma fase amorfa. A fase cristalina é formada por pequenos cristalitos, de aproximadamente 10Å , que são dispersos em uma matriz amorfa. Cada cristalito é formado por mais de uma cadeia, pois devido ao tamanho das cadeias, elas participam da formação de diversos cristalitos. Na formação dos cristalitos estas cadeias se alinham paralelamente umas às outras numa ordem tridimensional. A Fig.1.1 faz uma representação esquemática do modelo

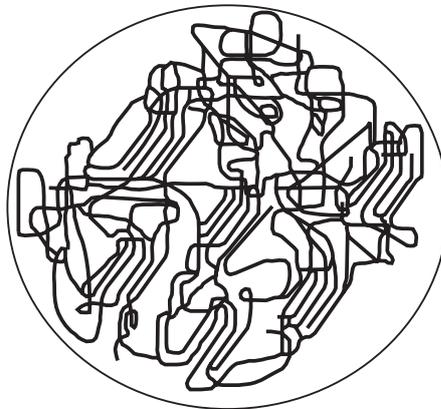


Figura 1.1: Modelo da Miscela Frangeada, [6].

Neste modelo considera-se que durante a cristalização nas regiões amorfas, as cadeias poliméricas ficam tencionadas, não podendo se cristalizar posteriormente. Por isso, conclui-se que, segundo este modelo, um polímero nunca poderá se tornar 100% cristalino. Com o passar dos tempos e o desenvolvimento tecnológico, este modelo começou a ser abandonado. Isto porque este modelo vai contra certas evidências como o dobramento de cadeias, a existência de monocristais poliméricos, além de não explicar a ocorrência de cristalitos maiores, chamados de esferulitos. Mesmo assim, este modelo ainda é usado para descrever a morfologia de polímeros que possuem um baixo nível de cristalização.

Teoria das Cadeias Dobradas, Lamelas ou Cristal Único

Na década de 1950 surgiu a teoria das cadeias dobradas, lamelas ou cristal único, quando pela primeira vez se obteve monocristais poliméricos, crescidos a partir do resfriamento de soluções diluídas. Nesses cristais são formadas placas finas, chamadas lamelas, de espessura entre 100 e 200 Å e vários microns de dimensões laterais. As cadeias poliméricas se dispõem dentro dos cristais de forma normal à superfície das lamelas. Cada cadeia dobra dentro da lamela até que um segmento fique paralelo ao outro. O tamanho do dobramento é regular e forma um plano de dobramento com espessura l como pode ser visto na Fig.1.2.

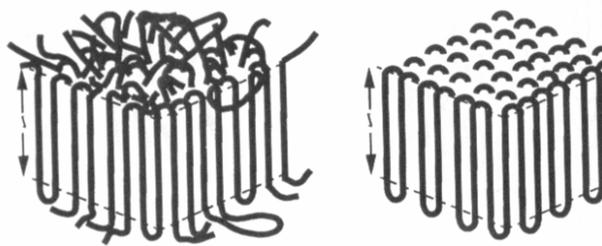


Figura 1.2: Modelo da Teoria das Lamelas [6].

A espessura do cristal é chamada de período de dobramento e corresponde à altura do plano de dobramento. Este dobramento ocorre porque a ordem de grandeza das cadeias poliméricas é muito maior que a das lamelas, cerca de 10 a 1000 vezes maiores.

1.3.2 Estrutura Cristalizada Esferulitizada

Uma das estruturas mais importantes na morfologia de materiais poliméricos são os esferulitos. Sua distribuição e morfologia interferem diretamente nas propriedades dos materiais poliméricos. São encontrados em polímeros que são cristalizados a partir do estado fundido. Formam-se quando o polímero no estado fundido é resfriado, originando-se de pequenos núcleos e se desenvolvendo radialmente, podendo ter diferentes tamanhos e graus de perfeição. Quando visualizados em microscópicos ópticos através de luz polarizada parecem com uma cruz de malta, conforme pode ser visto na Fig.1.3.

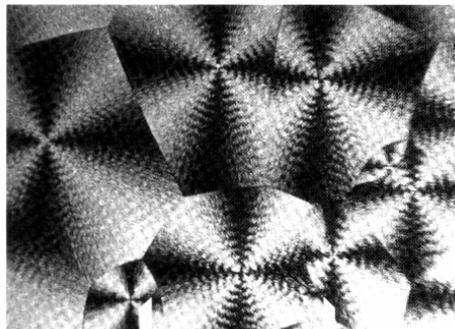


Figura 1.3: Microscopia óptica mostrando a Cruz de Malta [6].

Os esferulitos são formados por lamelas que partem radialmente do núcleo do esferulito na forma de feixes. No início estas lamelas são paralelas uma às outras, mas conforme vão crescendo elas divergem, torcem e se ramificam, dando assim um formato esferulizado radialmente simétrico aos esferulitos, o que pode ser observado na Fig.1.4. Portanto, os esferulitos são considerados como morfologias esféricas formadas por milhares de monocristais lamelares que são interligados por uma fase amorfa do material.

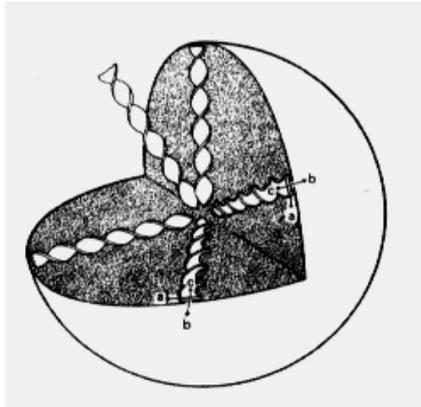


Figura 1.4: Modelo da Teoria do Esferulito [8].

Outra morfologia encontrada em polímeros semicristalinos é o "Shish Kebab", que vem do árabe e significa "espeto com pedaços de carne", como pode ser visto na figura 1.5. Esta morfologia se forma quando um polímero é cristalizado a partir de uma solução diluída, sob agitação e em temperaturas próximas à sua temperatura de fusão. Esta morfologia é composta de cadeias poliméricas estendidas em um tronco central, tendo em alguns pontos o crescimento de lamelas laterais.



Figura 1.5: Modelo da Teoria do Shish Kebab [6].

1.3.3 Ligações Interlamelares

Algumas moléculas de uma determinada lamela podem participar do crescimento de uma outra lamela adjacente. Estas ligações interlamelares reforçam a estrutura polimérica. Estas ligações acontecem porque durante a cristalização algumas moléculas começam a se cristalizar em lamelas diferentes em diferentes pontos da cadeia. Outras cadeias as usam como núcleo e se cristalizam sobre elas, formando estruturas finas e altamente orientadas, chamadas de fibrilas, conforme mostra a Fig.1.6. Estas fibrilas são responsáveis pelas ligações interlamelares, conectando as lamelas individuais entre si e amarrando-as e proporcionando aos materiais poliméricos uma maior resistência mecânica do que a esperada para um empacotamento unicamente de lamelas.

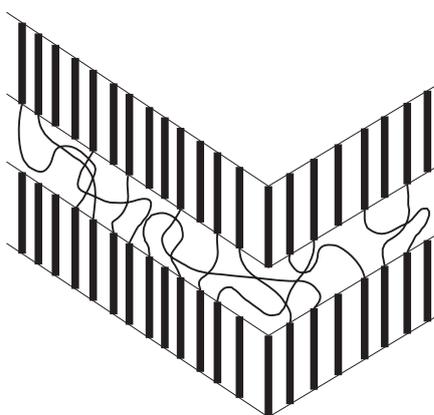


Figura 1.6: Ligações Interlamelares [6].

1.3.4 Fatores que Afetam a Cristalinidade

Existem fatores que podem aumentar ou diminuir a cristalinidade de um polímero. Esta cristalinidade está ligada à ordem ou regularidade espacial das moléculas, que facilitam ou atrapalham o empacotamento molecular, influenciando na formação de cristalitos e conseqüentemente na cristalinidade. São três os principais fatores que influenciam na cristalinidade dos polímeros: fatores estruturais, presença de uma segunda molécula (ou fase) e das condições de processamento.

Fatores Estruturais

Os fatores estruturais dizem respeito à estrutura química molecular, ou seja, quantos e como estão ligados os meros. Estes fatores são:

1. Linearidade da cadeia;
2. Taticidade;
3. Grupo lateral;
4. Configuração em torno das dupla ligações;

5. Polaridade;
6. Copolimerização.

Fatores Externos

Fatores externos podem ser moléculas diferentes, impurezas, aditivos, outras cadeias poliméricas de uma segunda fase ou ainda a superfície de outro cristal que entrem em contato com as cadeias de um determinado polímero. Estes fatores afetam a cristalização do polímero, aumentando ou diminuindo. O que define ou não se haverá uma maior cristalização é se há interação entre as cadeias poliméricas e o meio externo. Podem ser classificados em:

1. Impurezas ou aditivos;
2. Segunda fase.

1.4 Temperaturas Aplicadas em Engenharia

Quando da seleção de um material polimérico deve-se saber qual será seu comportamento na temperatura de trabalho. Se este terá um comportamento rígido, borrachoso, viscoelástico ou viscoso, conforme mostra a figura 1.7. Além disso, outro fator relevante é o processo de fabricação do componente polimérico. Conforme a necessidade, pode-se fazer o polímero atingir determinada faixa para dar-se o processamento.

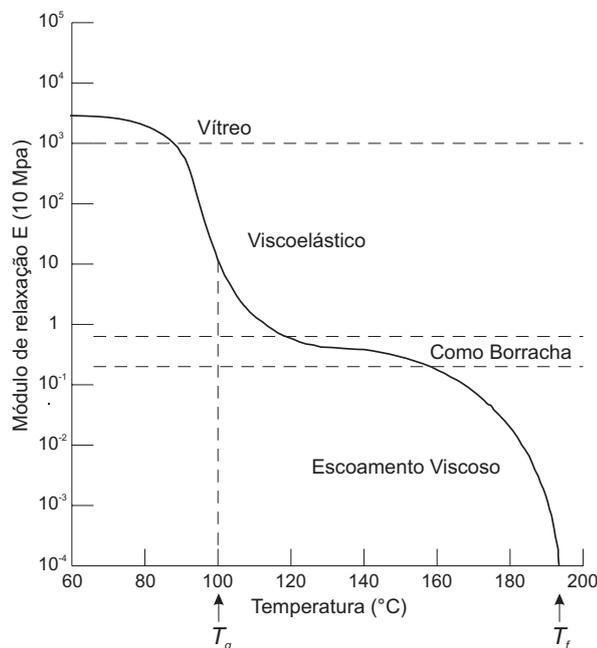


Figura 1.7: Definição do comportamento conforme temperatura [8].

Estas fases existem porque conforme a temperatura haverá uma determinada mobilidade da cadeia polimérica que determinará suas características físicas e propriedades. Outro ponto

relevante é que dependendo do tipo do polímero este apresentará ou não determinada fase, como pode ser visto na figura 1.8. Vários fatores implicam para que um polímero tenha ou não determinada fase. Nos polímeros com ligações cruzadas, por exemplo, como este não volta mais a ser fluido, não existe a fase de fluido viscoso.

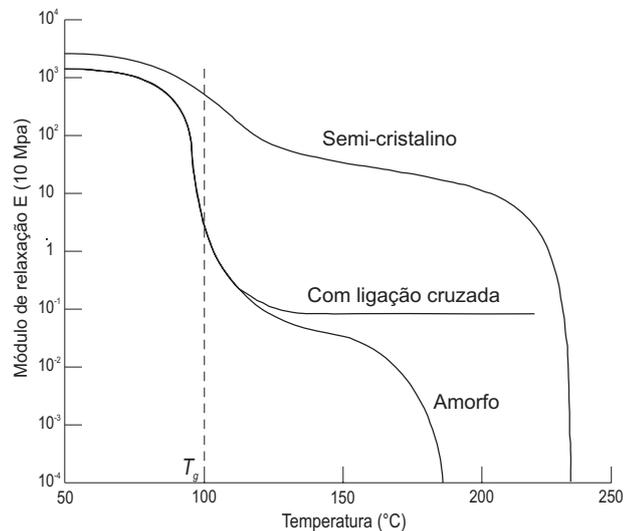


Figura 1.8: Comportamento dos polímeros conforme o tipo [8].

1.4.1 Temperaturas de Transição

Como pode ser visto na figura 1.9, os sólidos cristalinos, como os metais, costumam apresentar uma temperatura de transição chamada de temperatura de fusão, onde este passa direto do estado sólido para o líquido. Em materiais como o vidro, existe apenas uma temperatura de transição, chamada temperatura de transição vítrea, onde este muda da fase amorfa para a cristalina. Para materiais denominados sólidos semicristalinos, pode-se verificar a existência das duas temperaturas de transição, havendo, portanto, uma mudança da fase amorfa para a cristalina e outra para a fase líquida. Polímeros com ligações cruzadas possuem apenas a temperatura de transição cristalina. No entanto, nos polímeros semicristalinos as duas temperaturas são encontradas. Essas temperaturas de transição são importantes pois podem definir seu comportamento, característica e propriedades mecânicas.

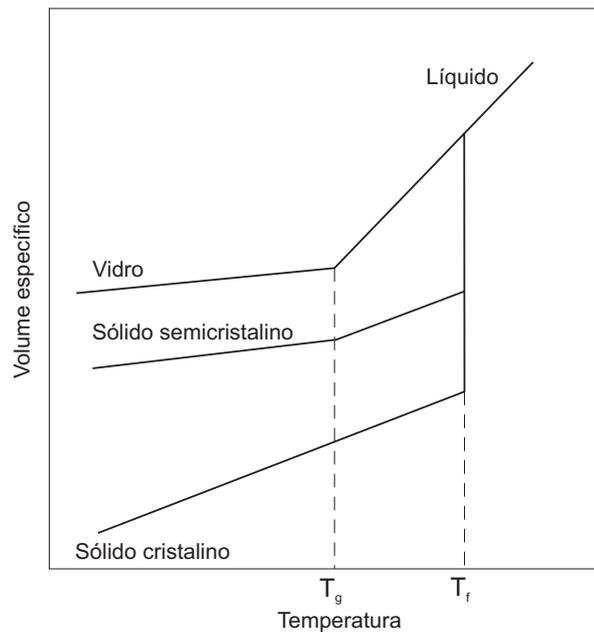


Figura 1.9: Temperaturas de transição [8].

Temperatura de Transição Vítrea T_g

O valor médio da faixa de temperatura em que, durante o aquecimento, um material polimérico permite que as cadeias poliméricas da fase amorfa adquiram mobilidade é chamada de temperatura de transição vítrea, ou simplesmente T_g , onde o g vem do inglês "glass". Abaixo da T_g o polímero comporta-se como um material vítreo, sendo duro, rígido e quebradiço. Isto acontece porque o polímero, abaixo da T_g , não possui energia interna suficiente para permitir o deslocamento relativo entre as cadeias poliméricas. A T_g refere-se de uma temperatura de transição de segunda ordem, isto é, afeta variáveis termodinâmicas secundárias. Algumas propriedades como o módulo de elasticidade, coeficiente de expansão térmica e índice de refração mudam acentuadamente com a T_g . Com isso podem-se usar estas propriedades para determinar a T_g .

Temperatura de Fusão Cristalina T_m

Nesta temperatura o material polimérico se funde, passando do estado borrachoso para o viscoso (líquido). Esta temperatura é na verdade o valor médio em que ocorre a fusão, desaparecendo as regiões cristalinas com a fusão dos cristalitos. Neste ponto a energia do sistema atinge o nível necessário para vencer as forças intermoleculares secundárias entre as cadeias da fase cristalina, destruindo a estrutura regular de empacotamento. O m vem do inglês "melt" e esta é uma temperatura de transição de primeira ordem, afetando assim as variáveis primárias tais como volume específico, entalpia, entropia. Portanto, como visto para a T_g , pode ser determinada pelo comportamento destas variáveis, quando ocorrerem mudanças bruscas. Esta transição ocorre somente na fase cristalina dos materiais, portanto só tem sentido para materiais cristalinos ou semicristalinos.

Fatores que Afetam as Tg e Tm

Estas temperaturas de transição estão relacionadas à superação de forças intermoleculares dando assim mobilidade às cadeias poliméricas. Existem vários fatores que influenciam esta mobilidade, dentre as quais podem-se listar:

1. Rigidez/flexibilidade da cadeia principal;
2. Polaridade;
3. Grupo lateral;
4. Simetria;
5. Copolimerização;
6. Massa molecular;
7. Ramificações;
8. Plastificantes;
9. Segunda fase.

1.4.2 Temperatura de Distorção ao Calor HDT

É a Temperatura que um corpo de prova padronizado deflexiona 0,254 mm sob uma tensão aplicada de 1829 KPa, conforme mostra a Fig.1.10. Define a faixa de temperatura na qual os materiais poliméricos podem ser aplicado a um determinado esforço mecânico. Usado também em controle de qualidade. Através desta temperatura pode-se determinar qual o material mais adequado para a aplicação de uma carga de flexão a alta temperatura. Conforme [24], através desta temperatura pode-se distinguir quais materiais perdem mais a rigidez com o aumento da temperatura e quais perdem menos.

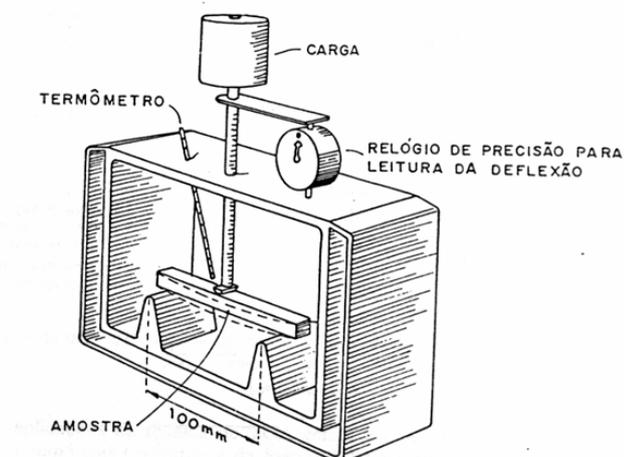


Figura 1.10: Ensaio para determinação da HDT [6].

1.4.3 Temperatura de Amolecimento VICAT

Temperatura em que uma agulha de 1 mm^2 de área de secção reta circular irá penetrar no material polimérico a uma profundidade de 1 mm, sob peso e velocidade determinada, conforme pode ser visto na Fig. 1.11. Segundo [24], este ensaio indica o quanto um material polimérico pode suportar uma carga de curta duração mesmo sob alta temperatura.

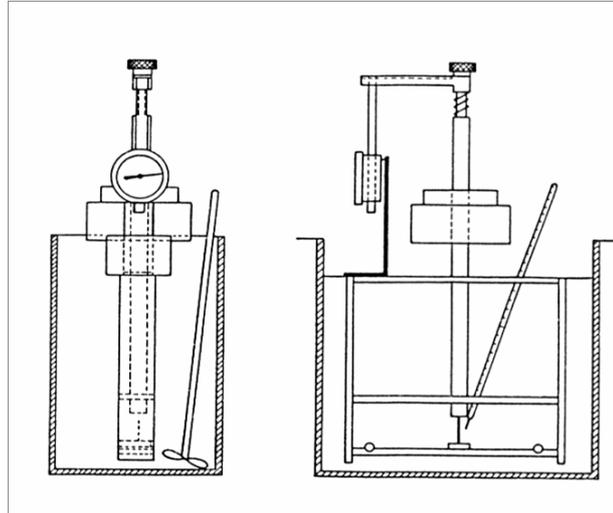


Figura 1.11: Ensaio para determinação da VICAT [6].

1.5 Características

Pode ser observado em [25] que materiais poliméricos possuem características que tornam seu uso e aplicação muito interessantes. Essas características, dependendo da necessidade, se sobressaem muito quando comparados com materiais como metais e cerâmicas.

Baixa Densidade

Polímeros são adequados quando há necessidade de materiais de baixa densidade para construção, geralmente mais leves que metais e cerâmicas. Muitos Polímeros são mais leves que a água e por isso podem flutuar. São usados em componentes que necessitam ser leves na construção de aviões, indústria automobilística, embalagens e esportes. Por exemplo, o alumínio é três vezes mais pesado do que o PE (polietileno), enquanto que o aço é oito vezes mais pesado que o PE.

Um exemplo de aplicação de polímero que necessita de baixo peso é o CD. O CD gira a uma rotação de 200 a 500 revoluções por minuto. Afim de que o motor do CD player inicie rapidamente e ainda seja pequeno, é importante que o CD seja leve.

Facilidade de Processamento

A temperatura de processamento da maioria dos polímeros é de aproximadamente 250°C, em alguns casos especiais pode chegar no máximo a 400 °C, como pode ser visto em [25]. Comparando com a temperatura de processamento do aço, que é maior que 1400 °C, pode-se ver uma grande diferença. Estas baixas temperaturas tornam o processamento fácil e requerem relativamente pouca energia. Por isto, mesmo para peças complicadas, se tem um baixo custo de produção.

Propriedades de Polímeros Podem Ser Otimizadas

A baixa temperatura de processamento também torna possível incorporar aos polímeros vários tipos de aditivos, tais como pigmentos, cargas de preenchimento (pó mineral ou farinha de madeira), cargas de reforço (fibras de vidro ou carbono) e agentes "blowing" para produção de espumas poliméricas.

Corante e pigmentos podem ser usados para alterar a cor de um polímero. Isto torna desnecessário um subsequente processo de pintura das peças, tornando sua produção mais rápida e barata.

Cargas de preenchimento inorgânicas em forma de pó ou areia podem ser usadas em grandes proporções, acima de 50%. Estas cargas aumentam o módulo de elasticidade e a resistência a compressão e ajudam a tornar o polímero mais barato. Cargas de preenchimento orgânicas tais como tecidos de fibras têxteis ou telas de celulose aumentam a tenacidade. Pó de carbono (negro de fumo) é incorporado em pneus, por exemplo. Ele aumenta a resistência à abrasão, à condutividade térmica e à degradação pelos raios UV. A incorporação de plastificantes pode alterar as características mecânicas de um polímero rígido a tal ponto deste apresentar características de um elastômero.

Fibras de vidro, carbono e aramida (Kevlar) são exemplos de materiais usados como cargas de reforço. Eles são usados de várias formas, como fibras curtas ou longas, tecidos ou esteiras. A incorporação destas fibras em polímeros proporciona um grande aumento em sua resistência e rigidez.

Agentes "blowing" são usados para produção de espumas poliméricas sintéticas, as quais podem ter uma densidade final cem vezes menores que a do material original. Espumas poliméricas possuem boas características de isolamento e podem ser transformados em componentes com baixíssimo peso.

Baixa Condutividade

Polímeros são bons isolantes de corrente elétrica e de calor e frio. Como exemplos podem-se citar revestimento para cabos elétricos, isolamento para refrigeradores, etc. A condutividade térmica dos polímeros chega a ser 100 vezes menor que a dos metais.

A razão pela baixa condutividade térmica dos polímeros, quando comparados a dos metais, se deve ao fato de que polímeros praticamente não possuem elétrons livres. Estes elétrons são responsáveis por conduzir o calor e a corrente elétrica nos metais. Todavia, hoje em dia é possível a produção de polímeros condutores com a adição de pós metálicos em sua composição.

Materiais poliméricos são, portanto, usados como materiais isolantes. No entanto, a sua baixa condutividade térmica causa problemas em seu processamento. Existe uma maior dificuldade em atingir a temperatura de fusão no interior do material.

Resistência Química

O mecanismo que preenche o contorno do átomo em um polímero é muito diferente do correspondente mecanismo em metais. Por isso, polímeros não são tão vulneráveis a corrosão como os metais. Alguns polímeros são muito resistentes a ácidos, bases, ou soluções aquosas salinas. Em muitos casos, no entanto, são solúveis em solventes orgânicos tais como gasolina e álcool. Alguns exemplos de aplicação desta característica são recipientes para armazenamento de ácidos dentre outros produtos químicos.

Impermeabilidade

A penetração de uma substância, como um gás, por exemplo, em outra é chamada de difusão. A permeabilidade de um polímero varia com relação a outro polímero. Alguns possuem boa permeabilidade e outros são impermeáveis. É possível modificar um polímero, tornando-o aplicável em determinada situação, alterando apenas o seu processo de produção, por exemplo. Esta característica é usada em muitas aplicações, tais como membranas para desalinação de água salgada, certos filmes plásticos, recipientes orgânicos, etc.

Frequentemente Recicláveis

Polímeros podem ser reutilizados ou reciclados por vários métodos. É possível também a obtenção de energia pela incineração de vários plásticos que não podem ser reciclados. No entanto, alguns materiais não podem ser incinerados sem problemas. Isto aplica-se especialmente à polímeros que contém cloro (tais como PVC) ou flúor (tais como PTFE, mais conhecido como Teflon). A incineração destes polímeros libera gases venenosos.

Cada componente polimérico possui um símbolo que identifica como deve ser sua reutilização. Isto torna possível que cada material de cada componente polimérico possa ser identificado e se ele pode ser incinerado ou separado por classe de reciclagem.

Outras Características de Polímeros

Alguns polímeros são muito flexíveis. Resistência e módulo de elasticidade variam amplamente entre os polímeros. Estas propriedades são geralmente muito menores que a dos metais. Em muitas situações este alto grau de flexibilidade é vantajoso para a sua produção e aplicação.

Vários polímeros apresentam melhor resistência ao impacto que muitos vidros, sem perder suas propriedades ópticas. Por esta razão, alguns polímeros vêm substituindo os vidros em algumas aplicações tais como produção automobilística, nas construções, lentes para óculos, etc.

1.6 Propriedades Mecânicas

As propriedades fundamentais dos metais, segundo [22], podem ser avaliadas por meio de ensaios que indicam diversas dependências tensão-deformação. No entanto, para polímeros, estes mesmos ensaios são insuficientes para descrever suas propriedades mecânicas. Assim, para quantificar as propriedades mecânicas dos polímeros são usados métodos empíricos contrabalanceados pelo rigor de condições estabelecidas por normas técnicas.

Muitas propriedades mecânicas dos polímeros possuem dependência da temperatura e do tempo. A dependência da temperatura se deve ao fato de que uma pequena mudança de temperatura pode acarretar em um rearranjo molecular que mudará o comportamento macroscópico do polímero. Já a dependência do tempo é causada por uma relaxação molecular, em que ocorre uma redistribuição de tensões ao longo do componente polimérico.

[10] faz uma classificação das propriedades em propriedades de curta e longa duração. As propriedades de curta duração são aquelas avaliadas em testes convencionais como o ensaio de tração, por exemplo. Estes valores são relevantes para comparações entre materiais poliméricos e outros tipos tais como metais, cerâmicas, etc. Quando há necessidade de projeto de um componente plástico, devem ser utilizadas as propriedades de longa duração, também chamadas de propriedades viscoelásticas. Propriedades viscoelásticas são aquelas propriedades, tais como o módulo de elasticidade, o alongamento na ruptura, a ductilidade, entre outras, que são sensíveis à taxa de deformação, à história de carregamento, à temperatura, etc.

Resistência à Tração

A resistência à tração é avaliada pela carga aplicada no material no momento da ruptura. Os materiais poliméricos costumam ter valores de resistência à tração bem menores do que os metais.

Alongamento na Ruptura

O alongamento na ruptura representa o aumento percentual do comprimento da peça sob tração no momento da ruptura. Para a maioria dos polímeros são encontrados grandes valores para o alongamento na ruptura, especialmente nos elastômeros. Em [22] pode-se ver que o alongamento pode chegar a 900%.

Módulo de Elasticidade

O módulo de elasticidade é medido pela razão entre a tensão e a deformação, dentro do limite elástico. Para metais, o módulo de elasticidade é normalmente expresso em GPa, enquanto que, para polímeros este módulo é geralmente expresso em MPa, como pode ser visto em [38]. Os polímeros de alto grau de cristalinidade são os que apresentam os maiores valores. Para elastômeros o alongamento atingido na região elástica é muito alto, e assim a palavra "módulo" tem outro significado para estes materiais. Como exemplificado em [22], é a tensão necessária para alcançar determinado valor de alongamento.

Tensão de Escoamento

Representa a tensão máxima que um material pode resistir sem que ocorram deformações permanentes. Diferentemente do que ocorre nos metais este valor não é fácil de ser avaliado. Existem dois métodos para determinar o seu valor, como pode ser visto em [24]. O primeiro, ilustrado na Fig 1.12 (a), consiste em traçar uma reta paralela à reta tangente a curva tensão-deformação no seu ponto inicial partindo de 0,2% de deformação. O valor da tensão no ponto de interseção da reta com a curva tensão-deformação é considerado como sendo a tensão de escoamento. O outro método consiste em traçar uma reta partindo do ponto inicial da curva tensão-deformação com uma inclinação de 70% da inclinação da reta tangente, conforme mostra a Fig 1.12 (b). Novamente o ponto de interseção fornecerá a tensão de escoamento.

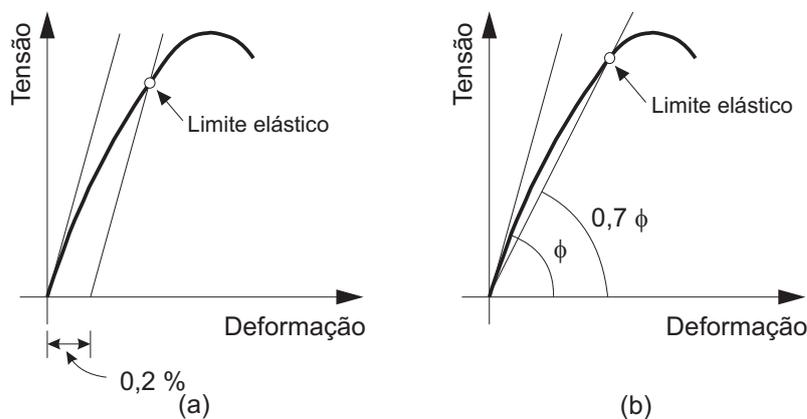


Figura 1.12: Localização da tensão de escoamento [24].

Coefficiente de Poisson

Este coeficiente representa a razão entre as deformações transversal e longitudinal. Pode ser avaliado em um ensaio de tração ou compressão. Em [38] e [5] podem ser encontrados valores sugeridos para o coeficiente de Poisson. É interessante notar que para borrachas este valor se aproxima muito de 0.5, o que significa incompressibilidade do material, sendo esta uma hipótese muito útil em algumas aplicações. Em espumas poliméricas, como pode ser visto em [19], o coeficiente de Poisson pode ser negativo, um fato muito raro na natureza.

Resistência à Compressão

A resistência à compressão é a tensão máxima que um material suporta sob compressão antes que o material colapse. Os materiais termofixos costumam possuir valores mais elevados para a resistência à compressão do que os termoplásticos, porém ainda muito menores que os valores dos metais. Este fato é importante pois muitos polímeros possuem maior resistência em compressão do que em tração.

Resistência à Flexão

A resistência à flexão representa a tensão máxima desenvolvida na superfície de uma barra quando sujeita a dobramento. Aplica-se a materiais mais rígidos. Em [22] pode-se verificar a equivalência entre os valores para os polímeros e as cerâmicas. Para os elastômeros o valor da resistência à flexão não é significativo.

Resistência à Fadiga

A resistência à fadiga representa a capacidade do material resistir carregamentos variáveis sem que ocorra falha por ruptura. Os mecanismos de falha por fadiga podem ser o rompimento de cadeias, mudança de cristalinidade e de nucleação e propagação de microtrincas ou micovazios. Em polímeros os mecanismos característicos são o microfibrilamento e a formação de bandas de cisalhamento.

Resistência ao Impacto

A resistência ao impacto representa a tenacidade ou a resistência de um material rígido à deformação a uma alta velocidade. Pode-se ver em [22] que o polietileno de baixa densidade possui alta resistência, deforma-se, porém não quebra. Vê-se também, que o policarbonato, cuja resistência é maior do que a da cerâmica e do alumínio, é empregado como proteção de balas de metralhadora. O valor da resistência ao impacto é fortemente afetado pelo peso molecular, pela temperatura e pela taxa de carregamento. O aumento do peso molecular faz com que a resistência ao impacto também aumente. Para valores de temperatura abaixo da temperatura de transição vítrea o material tem um comportamento frágil. Um material muito dúctil quando submetido a uma taxa de carregamento muito elevada pode se comportar como um material frágil.

Dureza

A dureza mede a resistência à penetração ou ao risco. As ligações cruzadas aumentam a dureza enquanto os plastificantes reduzem. Os polímeros em geral são menos duros do que os metais. Para polímeros a dureza utilizada geralmente é a dureza Shore.

Resistência à Fricção

A resistência à fricção, ou resistência ao deslizamento, é uma propriedade importante para os materiais. Para a maioria dos polímeros o valor do coeficiente de fricção fica entre 0,2 e 0,8. O politetraflúor-etileno é um dos únicos que possuem um valor muito baixo, sendo usado como material de lubrificação em muitas aplicações. Os elastômeros, especialmente as borrachas macias, possuem um coeficiente de fricção muito elevado, por isso costumam ser aplacados em situações onde se deseja uma boa aderência.

1.6.1 Fatores que Afetam as Propriedades dos Polímeros

As propriedades dos polímeros, como visto em [21], dependem principalmente de três fatores:

- da natureza química dos monômeros e suas implicações na estrutura molecular formada, tanto no que se refere à constituição quanto à configuração, ao peso molecular e à conformação;
- do processo de preparação empregado, devido ao mecanismo envolvido e, portanto, suas repercussões na estrutura macromolecular;
- da técnica escolhida para a preparação, com a conseqüente adequação maior ou menor do polímero formado por um determinado processo.

Para [24] existem ainda fatores como:

- condições de processamento. Se irão surgir linhas de solda, tensões residuais e qual a orientação molecular da peça pronta;
- o reaproveitamento de material. Mesmo a maioria dos polímeros sendo recicláveis eles não mantêm suas propriedades totalmente inalteradas;
- a absorção de água. Dependendo do ambiente de trabalho e das propriedades hidrocópias pode haver uma alteração das forças intermoleculares;
- exposição a luz solar, causando um envelhecimento do material danificando a estrutura molecular do polímero;
- exposição química, onde moléculas como maior afinidade reagem entre si mudando as características do polímero.

1.7 Ensaios Utilizados para Polímeros

Como pode ser visto em [14], por polímeros serem materiais que diferem de diversas formas dos metais e outros materiais, foram desenvolvidos testes especiais para descrever seu comportamento. Alguns são similares aos testes aplicáveis aos metais. Já outros foram criados especialmente para os materiais poliméricos. Em [34] e [14] podem ser encontradas normas que regem alguns dos diversos ensaios aplicáveis a polímeros tais como ensaio de tração, fluência, impacto, dureza, compressão, etc.

1.7.1 Ensaio de Tração

Usa-se o ensaio de tração para medir propriedades de curta duração onde o carregamento é quase-estático. Os principais parâmetros que são quantificados neste ensaio são o módulo de elasticidade, tensão de escoamento, tensão máxima, tensão e deformação de ruptura e a tenacidade. A Fig 1.13 mostra um diagrama tensão deformação adquirido de um ensaio de

tração. Pode-se ver os diagramas para os diversos tipos de polímeros. Este ensaio é similar ao realizado para metais, onde as propriedades são avaliadas da mesma forma.

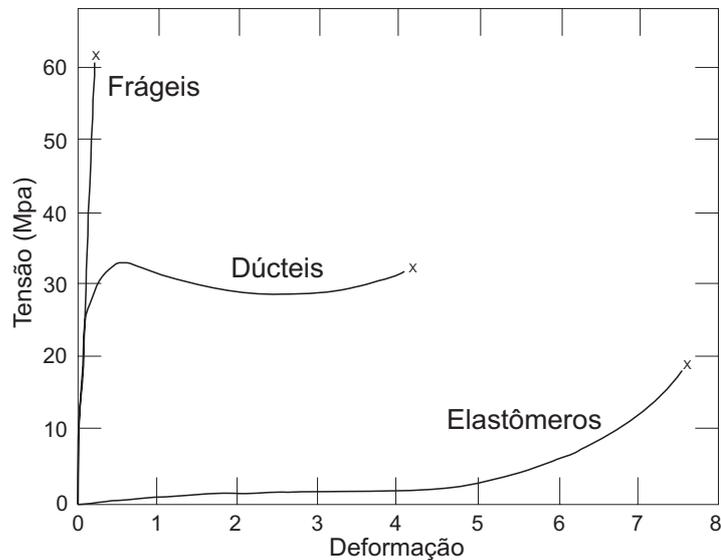


Figura 1.13: Comportamentos de polímeros no ensaio de tração [8].

Na Fig 1.14 pode-se ver uma característica interessante em polímeros semicristalinos. Após o início do escoamento ocorre um amolecimento e uma queda da tensão, mantendo-se um patamar na tensão até que esta volte a crescer. Neste patamar há um rearranjo molecular redistribuindo a tensão uniformemente, não permitindo assim um aumento da tensão. No corpo de prova nota-se um aumento do comprimento da estrição, podendo, dependendo do polímero, chegar a algumas vezes o comprimento do corpo de prova.

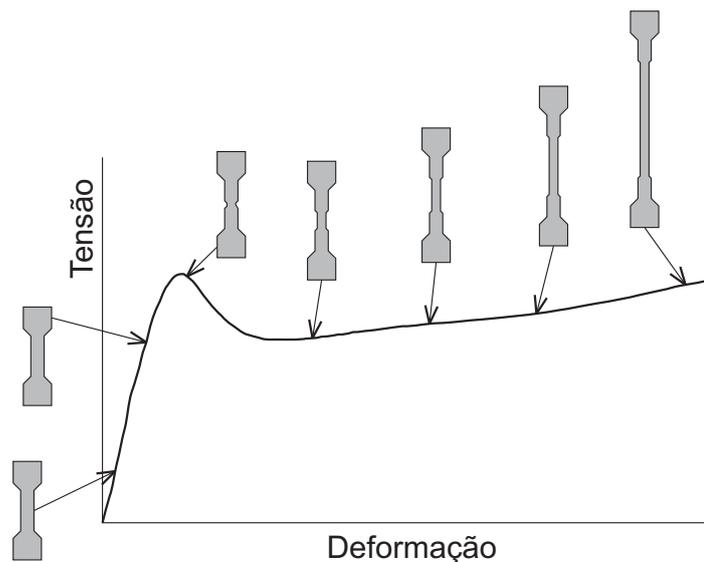


Figura 1.14: Estrição em um polímero semicristalino [8].

1.7.2 Ensaio de Impacto

O ensaio de impacto mais utilizado em polímeros é o tipo IZOD/CHARPY, mostrado na Fig. 1.15. Similarmente ao que é feito para metais, neste ensaio um pêndulo é liberado de uma determinada altura para quebrar um corpo de prova padrão localizado no ponto mais baixo de sua oscilação. Em seguida é medida a altura que o pêndulo alcança logo após o impacto. Com isso pode-se quantificar a energia de impacto que corresponde à resistência ao impacto de um dado polímero.

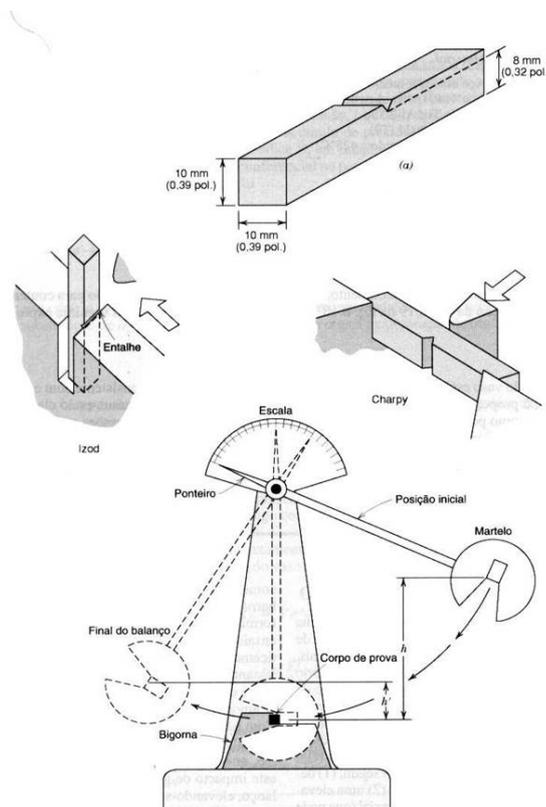


Figura 1.15: Ensaio de impacto do tipo IZOD/CHARPY [8].

A resistência ao impacto é frequentemente utilizado como fator de decisão na seleção de um material. Isto acontece porque grande número de aplicações práticas para polímeros estão sujeitas a solicitações de impacto, tais como choques mecânicos, quedas, batidas, etc. Muitos polímeros considerados satisfatórios para algumas aplicações são considerados ruins em outras devido ao fato de terem uma tendência à fratura frágil sob impacto. Esses materiais geralmente são considerados dúcteis, mas quando possuem um agente concentrador de tensão apresentam fratura frágil.

1.7.3 Ensaio de Fluência

Este ensaio é usado para medir propriedades de longa duração. Neste ensaio um corpo de prova é submetido a uma tensão constante e sua deformação é medida ao longo do tempo.

Ele pode ser realizado com diversos tipos de solitação mecânica, como por exemplo tração, compressão, cisalhamento, etc. A propriedade mais importante deste ensaio é o módulo de fluência, que corresponde ao inverso do módulo de elasticidade, variando no tempo com um carregamento constante, ou seja

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma}.$$

A fluência ocorre nos polímeros devido a um escorregamento das cadeias poliméricas umas sobre as outras. Pelo fato destes movimentos serem permanentes apenas uma porção da deformação total pode ser recuperada quando a carga for removida

1.7.4 Ensaio de Relaxação

Similarmente ao ensaio de fluência é um ensaio de longa duração. Neste ensaio um corpo de prova é submetido, agora, a uma deformação constante e sua tensão é medida ao longo do tempo. A propriedade a ser avaliada é o módulo de relaxação, que é equivalente ao módulo de elasticidade avaliado no tempo com uma deformação constante, ou seja

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon}$$

Este fenômeno ocorre nos polímeros devido a um rearranjo molecular das cadeias poliméricas. Com isso ocorre uma redistribuição de tensões no material, carregando as cadeias menos solicitadas e aliviando as mais solicitadas.

1.7.5 Ensaio Dinâmico-mecânico

Neste ensaio um corpo de prova padrão é submetido a uma tensão ou deformação oscilatória, normalmente senoidal. Com isto este ensaio é capaz de fornecer informações a respeito do comportamento viscoelástico do sistema, desmembrando o módulo em dois componentes, a contribuição elástica e viscosa. Normalmente, a propriedade diretamente medida neste ensaio é o módulo de elasticidade complexo

$$E^* = E' + iE''$$

que corresponde à soma do módulo de armazenamento, E' , com o módulo de perda, E'' . O módulo de armazenamento representa a contribuição elástica e o módulo de perda a contribuição viscosa. Outro tipo de relação que é muito utilizada é a chamada tangente de perda

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'}$$

que representa o quanto de energia é perdida e o quanto é armazenada.

1.8 Conclusões Parciais

Para um perfeito funcionamento dos modelos matemáticos viscoelásticos apresentados a seguir as propriedades relevantes foram identificadas como as propriedades de longa duração.

As propriedades de curta duração também ajudarão a uma maior compreensão do fenômeno viscoelástico. Mas como visto, todas estas propriedades são muito influenciadas por diversos fatores relevantes nos polímeros. Informações como qual o tipo do polímero, qual a sua temperatura de transição vítrea, onde este será aplicado, etc, ajudam a definir qual será o seu comportamento. O conhecimento de sua estrutura química, a qual julgava-se irrelevante, também tem sua parcela de contribuição na definição das propriedades. Dependendo do tipo de polímeros a forma de produção será mais ou menos importante na definição no seu comportamento. Outro ponto relevante é quanto à total fidelidade às normas que regem os ensaios mecânicos utilizados para caracterização das propriedades dos polímeros. Como os polímeros costumam ter uma baixa repetibilidade nos ensaios, uma análise criteriosa e precisa se faz necessária. Todavia, como já era imaginado, confirmou-se que polímeros possuem características que os tornam cada vez mais atraentes em certas aplicações. Por isso os polímeros vêm dominando o mercado, substituindo componentes que antes eram de metais, vidro, cerâmica, etc. Conclui-se assim que um estudo mais preciso de seu comportamento se faz muito necessário.

Capítulo 2

Viscoelasticidade Linear

2.1 Introdução

Polímeros, em geral, possuem comportamento viscoelástico. Como foi visto no capítulo anterior, dependendo da temperatura e do tempo pode-se considerar que um polímero irá se comportar viscoelasticamente. Vários modelos são propostos para descrever este comportamento. O modelo que será usado neste trabalho será desenvolvido a partir dos modelos encontrados em [1], [35], [12], [33] e [36].

O modelo apresentado a seguir é um modelo viscoelástico linear, ou seja, serve apenas para pequenas deformações e pequenos deslocamentos e é desenvolvido usando como base a teoria da mecânica do contínuo, que pode ser encontrada em [20] e [13]. Para se chegar ao modelo final foram, inicialmente, analisados modelos unidimensionais do tipo mola amortecedor e o modelo desenvolvido pelo princípio de superposição de Boltzmann. Todos estes modelos unidimensionais levam a um resultado muito similar, onde este resultado é composto por uma parcela elástica e por uma parcela viscosa, compondo assim um modelo viscoelástico. A parcela elástica é a mesma encontrada nos modelos elásticos apresentados em [18], [39] e [35]. Já a parcela viscosa é representada por uma integral hereditária, ou seja, dependente do caminho. Nesta integral, para definir o comportamento do módulo de elasticidade será usada uma série de Prony. Finalmente será proposta uma relação constitutiva tridimensional a partir das relações constitutivas encontradas para os modelos unidimensionais. Este modelo também será composto de uma parcela elástica e de uma parcela viscosa, em que a parcela viscosa será responsável pela dependência da história do modelo.

A inclusão da temperatura é uma das partes mais críticas para o desenvolvimento do modelo. Dependendo do método usado para descrever a dependência da temperatura, o modelo pode ficar um tanto quanto oneroso, onde várias constantes materiais devem ser determinadas. No presente trabalho foi usada o princípio da superposição tempo-temperatura encontrada em [12]. Esta metodologia considera que o material deve ser termoreologicamente simples e não deve possuir grandes gradientes de temperatura.

Em [16], [4] e [42] podem ser encontradas a formulação fraca, a formulação forte e a discretização temporal utilizada para o problema de um corpo sólido sujeito a forças de corpo prescrita por unidade de volume e de tração e deslocamento prescritos na fronteira. Neste problema será

aplicado nosso modelo constitutivo. Além disso, estas literaturas serão utilizadas para todo o desenvolvimento do algoritmo do elemento finito viscoelástico linear, o qual será o resultado final deste capítulo. Este elemento finito será programado em linguagem Fortran utilizando técnicas de programação orientada em objetos. Com isso serão gerados resultados que poderão ser comparados com outros resultados, dando assim validade ao modelo proposto.

2.2 Teoria da Viscoelasticidade Linear

Segundo [35], a lei de Hooke, que descreve o relacionamento entre tensão e deformação de um corpo sólido, não envolve tempo. Isto implica que se uma força constante é aplicada em um corpo, o campo de tensões resultante determina o campo de deformações resultantes e vice-versa, portanto, com exceção de carregamentos transientes, a resposta é independente do tempo. Isto é apropriado para metais dentro do regime elástico.

Nossa preocupação aqui será com relações constitutivas de natureza viscoelástica. Por exemplo, considere uma barra na qual uma deformação axial instantânea é imposta no tempo $t = 0$. Aparecerá na barra uma tensão axial e se o material for linear nada mais acontecerá. No entanto, se a resposta da barra for de natureza viscoelástica, a tensão será dependente do tempo, enquanto que a deformação será constante com o tempo e pode-se escrever que $\sigma = \sigma(t)$.

Suponha agora uma seqüência de deformações $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^k$, resultando em tensões $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^k$ nos tempos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_s$, resultando em diferentes conjuntos de dados como segue:

$$\{(\varepsilon^i(t_1), \sigma^i(t_1)) \mid i = 1, \dots, k\}, \{(\varepsilon^i(t_2), \sigma^i(t_2)) \mid i = 1, \dots, k\}, \dots, \{(\varepsilon^i(t_s), \sigma^i(t_s)) \mid i = 1, \dots, k\}$$

Estes dados podem ser plotados em um gráfico de σ por ε e uma curva desenhada entre cada par $\{(\varepsilon^i(t_j), \sigma^i(t_j)) \mid i = 1, \dots, k\}$ com j fixo para cada curva. O resultado é um conjunto de curvas, uma para cada j , que são chamadas curvas *tensão-deformação isocrônicas*. Para um material elástico linear estas curvas, obtidas para diferentes t_j , poderiam todas ser coincidentes, mas para materiais viscoelásticos elas são distintas e, em geral, para $t_i > t_j$ as curvas de t_i estarão "abaixo" das curvas de t_j . O material é dito viscoelástico linear se estas curvas são todas linhas retas com inclinação dada por uma função decrescente monotonicamente não-negativa no tempo. A Fig.2.1 mostra algumas curvas tensão-deformação isocrônicas para um Nylon 66. Estes dados são encontrados em [23] e através deles pode-se julgar a aplicabilidade, ou não, da aproximação linear.

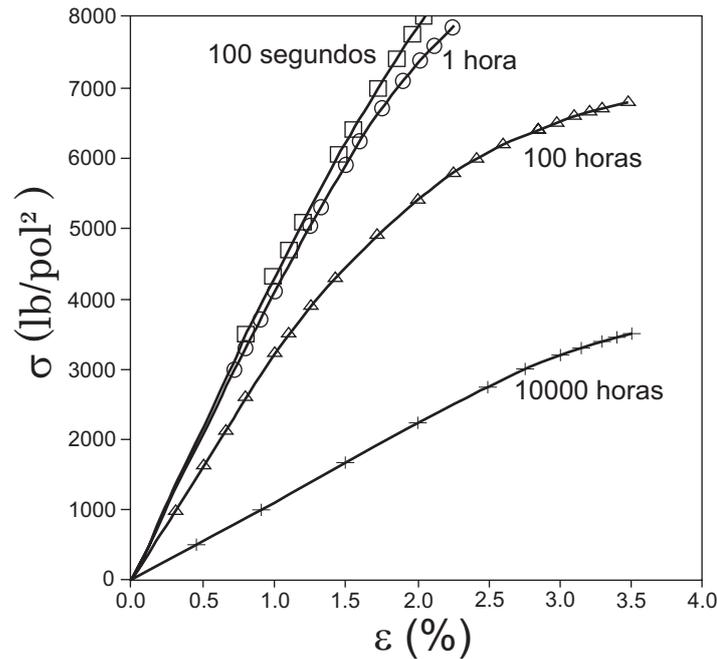


Figura 2.1: Curvas tensão-deformação isocrônicas para o nylon 66 Maranyl [23].

2.3 Leis Constitutivas Viscoelásticas

Como visto em [35], os comportamentos descritos nas Figs.2.2 e 2.3 ilustram as relações constitutivas para um material viscoelástico, onde u representa o deslocamento e F a força. Observando-se estas figuras pode-se descrever dois fenômenos que caracterizam o comportamento viscoelástico de um material.

Primeiramente imagina-se uma barra fixa rigidamente em uma de suas extremidades e, em um tempo $t = 0$, um deslocamento instantâneo, u , é aplicado na outra extremidade como é mostrado esquematicamente na Fig.2.2. Em resposta, uma tensão longitudinal, σ , aparece na barra no instante $t = 0+$, a qual é dada pela lei de Hooke e, portanto, a resposta instantânea do material é linear elástica. Com o passar do tempo a tensão começa a decrescer monotonicamente para um valor constante diferente de zero, σ_o , ou para zero. No caso em que o valor final da tensão é σ_o , o material é denominado um *sólido viscoelástico*. Por outro lado, se a tensão final é igual a zero o material é denominado *fluido viscoelástico*. Este fenômeno, também ilustrado na Fig.2.2, é conhecido como relaxação de tensão.

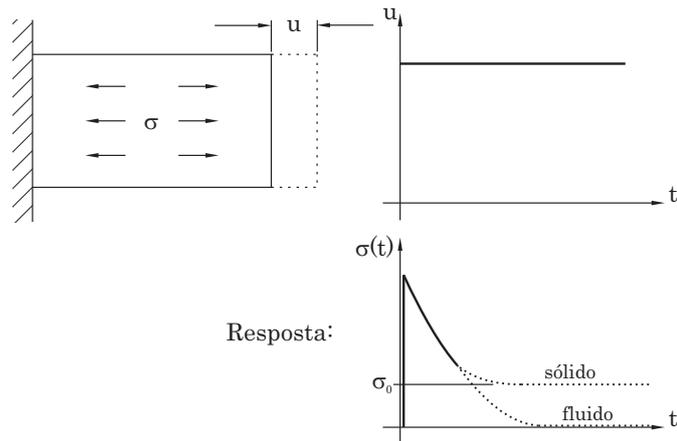


Figura 2.2: Esquema da relaxação de tensão.

Agora, imagine a mesma barra do exemplo anterior, novamente fixada em uma das extremidades, na qual um carregamento axial hipoteticamente instantâneo é aplicado na sua outra extremidade. Isto é, em $t = 0$ o carregamento aumenta instantaneamente para o valor constante F e em $\tau > t_0$, F é removido como ilustrado na Fig.2.3. A barra agora responde pela extensão de seu comprimento denotado por $u(t)$, como pode ser observado na Fig.2.3. No instante t_0^+ há novamente um comportamento linear elástico e $u(0^+)$ é portanto dado pela lei de Hooke. Mas agora, no intervalo $t \in (t_0, \tau)$, a barra continua estendendo-se. Este comportamento é denominado de Fluência. Se para um arbitrário instante τ suficientemente grande, o fenômeno da fluência continua indefinidamente, então o material é denominado um fluido viscoelástico. Por outro lado, se $u(t)$ aproxima-se de um valor constante então ele é dito ser um sólido viscoelástico. Após a remoção da força F em $t = \tau$ o material novamente demonstra um comportamento elástico, ou seja, há uma recuperação elástica onde u , instantaneamente, "salta" para um valor menor. Após isto há outra fase de fluência, durante a qual o material tenta retornar para sua configuração inicial. Novamente pode-se fazer a distinção entre um sólido e um fluido viscoelástico. Se, com $t \rightarrow \infty$ tem-se $u \rightarrow 0$, então o material é denominado ser um sólido viscoelástico. Mas se $u \rightarrow \text{constante} \neq 0$ então há uma *configuração fixa* dentro da barra causada por um escoamento molecular irreversível durante a fase de fluência inicial e o material é denominado ser um fluido viscoelástico.

A habilidade de um material viscoelástico tentar retornar para sua configuração inicial mesmo depois de se deformar inelasticamente deve-se ao fato de que este possui gravado internamente seu estado inicial. Se este é o caso, então parece plausível dizer que o material também mantenha gravado todos os seus estados anteriores no instante atual. Por esta razão materiais viscoelásticos são ditos *materiais com memória*.

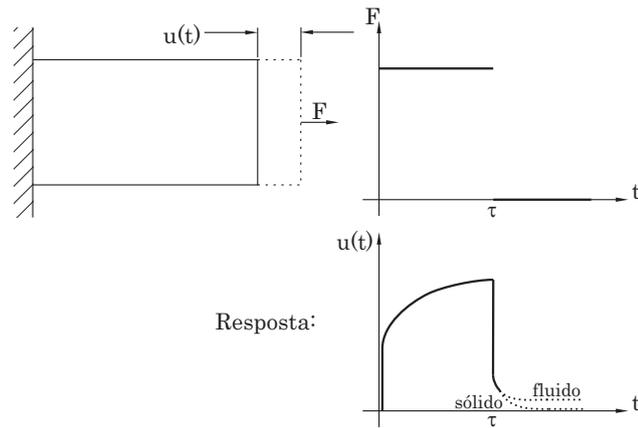


Figura 2.3: Esquema da fluência.

2.3.1 Modelos Viscoelásticos Mola-Amortecedor

Os modelos viscoelásticos mola-amortecedor são descritos usando dois componentes básicos, como pode ser visto em [12], [33] e [36]:

- *Mola linear*
- *Amortecedor viscoso linear*

Obs: Os efeitos inerciais não serão levados em conta para estes componentes.

A mola linear, mostrada na Fig.2.4, representa a elasticidade instantânea do material no carregamento e no descarregamento. Sua relação constitutiva pode ser representada pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2.1}$$

em que σ e ε representam a tensão e a deformação no corpo, respectivamente, e E o módulo de Young do material.

O amortecedor viscoso linear, mostrado na Fig.2.5, representa a dependência no tempo do material, tanto no carregamento quanto no descarregamento. A relação constitutiva deste componente é representada da seguinte forma:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

sendo η o coeficiente de viscosidade.



Figura 2.4: Mola linear.

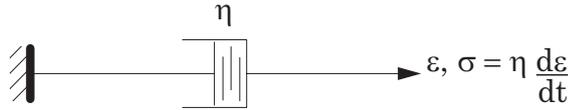


Figura 2.5: Amortecedor viscoso linear.

Combinando estes componentes básicos, vários modelos foram propostos na literatura. Alguns destes modelos serão discutidos a seguir.

Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell, conforme [36], possui dois componentes básicos. Uma mola e um amortecedor, colocados em série conforme mostrado na Fig.2.6. Portanto, a deformação total pode ser calculada apenas somando-se as deformações dos dois componentes do sistema:

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D, \tag{2.3}$$

usando ε_S e ε_D para representar as deformações da mola e do amortecedor respectivamente. Pode-se também reescrever esta equação na forma de taxa:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_S}{dt} + \frac{d\varepsilon_D}{dt}. \tag{2.4}$$

Inserindo as Eqs.(2.1) e (2.2) na equação acima, pode-se então chegar à relação constitutiva para o modelo de Maxwell:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_S + \dot{\varepsilon}_D, \\ &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

a qual pode ser expressa como

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau}, \tag{2.6}$$

com $\tau := \eta/E$, definido como *tempo de relaxação*.

Usando $\sigma(0) = E\varepsilon(0)$ esta EDO é facilmente resolvida, obtendo-se a seguinte equação hereditária:

$$\sigma(t) = Ee^{-t/\tau}\varepsilon(0) + E \int_0^t e^{-(t-s)/\tau} \varepsilon'(s) ds. \tag{2.7}$$

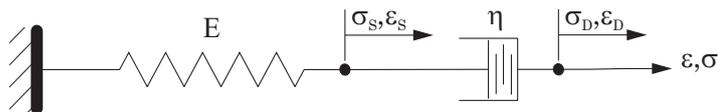


Figura 2.6: Modelo de Maxwell.

Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin, encontrado em [36], consiste em montar uma mola linear e um amortecedor viscoso linear em paralelo, conforme Fig.2.7. Pode-se calcular a tensão total no sistema como a soma das tensões aplicadas em cada um de seus componentes:

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D, \quad (2.8)$$

novamente, inserindo as Eqs.(2.1) e (2.2) na Eq.(2.8) e sabendo-se que

$$\varepsilon_S = \varepsilon_D = \varepsilon, \quad (2.9)$$

tem-se a seguinte relação constitutiva para o modelo de Kelvin:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_S + \sigma_D, \\ &= E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

a qual pode ser expressa como

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2.11)$$

Resolvendo a equação acima tem-se a seguinte relação constitutiva na forma hereditária

$$\varepsilon(t) = e^{-t/\tau}\varepsilon(0) + \frac{1}{\eta}\int_0^t e^{-(t-s)/\tau}\sigma(s)ds. \quad (2.12)$$

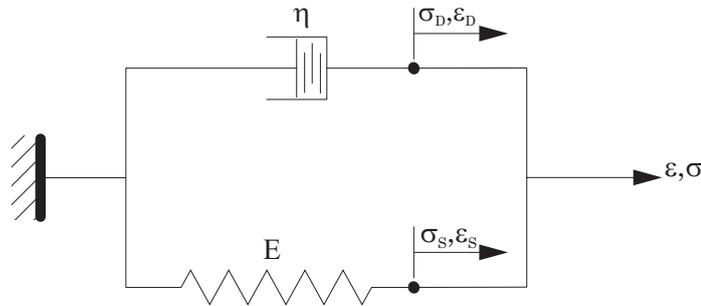


Figura 2.7: Modelo de Kelvin.

Modelo Sólido de Maxwell

O modelo de Maxwell, por si só, não representa bem um sólido, conforme visto em [12]. Isto porque se for aplicado um carregamento no corpo e este carregamento for retirado, o mesmo não retorna para a configuração inicial. Visando resolver isto, foi idealizado o modelo sólido de Maxwell, encontrado em [36]. Conforme visto na Fig.2.8, este modelo possui uma mola em paralelo com um braço de Maxwell. Com isto podemos garantir que após a retirada do carregamento, o material retornará ao seu estado inicial. Todavia, devido ao amortecedor, este retorno será lento, caracterizando assim a parte viscosa do material.

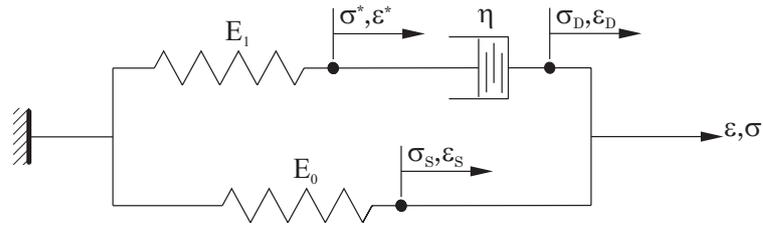


Figura 2.8: Modelo sólido de Maxwell.

A tensão total, neste modelo, pode ser calculada pela soma das tensões em cada braço. A tensão no braço de Maxwell é igual para os dois componentes que o compõem, portanto pode-se escrever a seguinte relação:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma^*, \quad (2.13)$$

onde observamos

$$\sigma^* = \sigma_D \quad (2.14)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_D + \varepsilon^*. \quad (2.15)$$

Considerando as Eqs.(2.14) e (2.15), pode-se reescrever a Eq.(2.13) como

$$\sigma = E_0\varepsilon + E_1\varepsilon^*. \quad (2.16)$$

Usando o fato de que as tensões são iguais para cada componente do braço de Maxwell, Eq.(2.13), e sabendo que a deformação do amortecedor é a deformação ε menos a ε^* , Eq.(2.15), pode-se chegar à seguinte relação:

$$E_1\varepsilon^* = \eta \frac{d}{dt}(\varepsilon - \varepsilon^*), \quad (2.17)$$

ou

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} + \frac{\varepsilon^*}{\tau} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.18)$$

com $\tau := \eta/E_1$. Resolvendo a equação acima:

$$\varepsilon^*(t) = e^{-t/\tau}\varepsilon(0) + \int_0^t e^{-(t-s)/\tau} \frac{d\varepsilon}{ds} ds. \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq.(2.19) na Eq.(2.16), obtém-se:

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + E_1e^{-t/\tau}\varepsilon(0) + \int_0^t E_1e^{-(t-s)/\tau} \frac{d\varepsilon}{ds} ds. \quad (2.20)$$

Pode-se também definir uma função de relaxação da tensão:

$$E(t) := E_0 + E_1e^{-t/\tau}. \quad (2.21)$$

Reescrevendo a Eq.(2.20), obtém-se a seguinte forma final da relação constitutiva de um

modelo sólido de Maxwell:

$$\sigma(t) = E(0)\varepsilon(t) - \int_0^t E_s(t-s)\varepsilon(s)ds. \quad (2.22)$$

Modelo Sólido de Maxwell Generalizado

O modelo sólido de Maxwell generalizado, encontrado em [36], é apresentado na Fig.2.9. Este modelo consiste em colocar vários braços de Maxwell em paralelo junto com uma mola, como se fosse uma expansão do modelo sólido de Maxwell. Esta mola será responsável pelo comportamento sólido do material e os braços de Maxwell pelo comportamento viscoso.

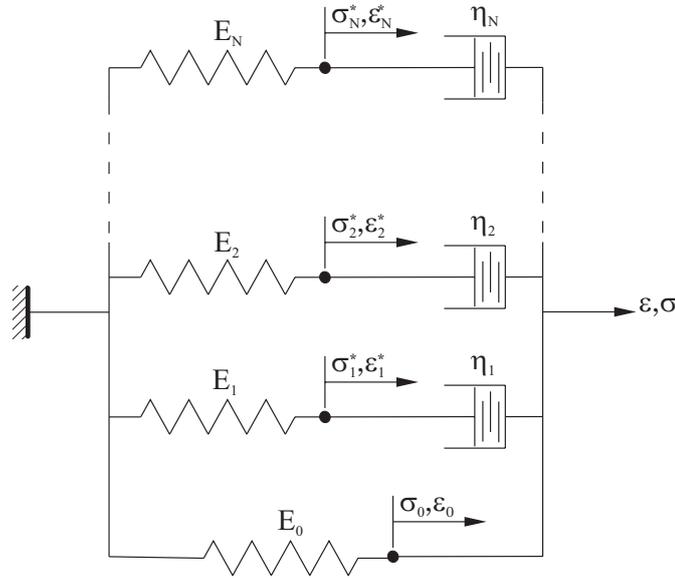


Figura 2.9: Modelo sólido de Maxwell generalizado.

Semelhante ao que foi feito para o modelo sólido de Maxwell, pode-se dizer que a tensão no i -ésimo braço de Maxwell é igual tanto na mola como no amortecedor do mesmo. Além disto, a deformação no amortecedor é a deformação total menos a deformação da mola. Então, após algum algebrismo, chega-se à seguinte relação:

$$\frac{d\varepsilon_i^*}{dt} + \frac{\varepsilon_i^*}{\tau_i} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.23)$$

com $\tau_i := E_i/\eta_i$. Resolvendo a equação acima temos:

$$\varepsilon_i^*(t) = e^{-t/\tau} \varepsilon(0) + \int_0^t e^{-(t-s)/\tau_i} \frac{d\varepsilon}{ds} ds. \quad (2.24)$$

Sabe-se que, como todos os componentes estão em paralelo, a tensão total será a soma das tensões atuando em cada um dos componentes:

$$\sigma = \sigma_S + \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.25)$$

ou

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^N E_i\varepsilon_i^*(t). \quad (2.26)$$

Substituindo a Eq.(2.24) na Eq.(2.26), tem-se:

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^N \left(E_i e^{-t/\tau_i} \varepsilon(0) + \int_0^t E_i e^{-(t-s)/\tau_i} \frac{d\varepsilon}{ds} ds \right). \quad (2.27)$$

Definindo a função de relaxação como sendo:

$$E(t) := E_0 + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i}, \quad (2.28)$$

encontra-se o seguinte formato para a relação constitutiva de um sólido de Maxwell generalizado:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-s) \frac{d\varepsilon}{ds} ds. \quad (2.29)$$

Um ponto importante neste modelo é o número de braços que o mesmo vai possuir. Conforme este número aumenta, o número de constantes a serem identificadas também aumenta. Para a determinação destes parâmetros materiais, vários experimentos são necessários. Se este número for muito alto, pode tornar muito oneroso o uso deste modelo.

2.3.2 Princípio da Superposição de Boltzmann

Conforme [35], assumindo linearidade, a observação empírica de que passos descontínuos de deformação são governados, no instante do passo, pela lei de Hooke implica que, pode-se aproximar a história da deformação, esta sendo suave, com funções passo constantes, empregando-se o princípio de superposição de Boltzmann com reposta Hookeana para derivar a lei constitutiva do material.

Para ser mais específico, inicialmente será permitida dependência no tempo das constantes de Lamé na lei de Hooke resultando, para um x fixo,

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t), \quad (2.30)$$

e será assumido uma história de deformação suave $\varepsilon(t)$ para $t \in [t_0, t_N]$. Cada componente da deformação será agora aproximado por funções passo continua tomando o valor $\varepsilon(t_{i-1})$ sobre o intervalo (t_{i-1}, t) para $1 \leq i \leq N$. Isto esta esquematicamente ilustrado para um arbitrário componente de $\varepsilon(t)$ na Fig.2.10.

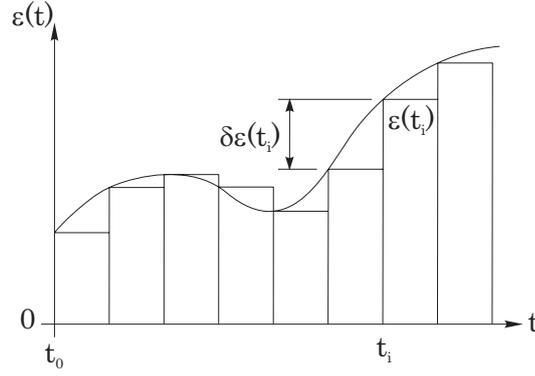


Figura 2.10: História de deformação e aproximação por passos.

Se agora for descartada a história contínua e trabalhado apenas com a função discretizada pode-se escrever a deformação como

$$\varepsilon(t) \equiv 0 \quad \forall \quad t < t_0, \quad (2.31)$$

e

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_i) \quad \text{para } t \in [t_i, t_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (2.32)$$

Agora, usando a Eq. (2.30) pode-se ver que no tempo $t \in [t_0, t_N]$, a tensão devido a $\varepsilon(t_0)$ apenas é

$$\sigma_0(t) = E(t - t_0)\varepsilon(t_0), \quad (2.33)$$

$$\implies E'(t) < 0 \quad \forall \quad t \geq t_0, \quad (2.34)$$

onde E é esperado ser uma função monotonicamente decrescente em t afim de modelar a relaxação de tensão. Isto é então chamado “*fading memory hypothesis*”.

No tempo t_i , $i \geq 1$, existe um incremento de deformação

$$\delta\varepsilon(t_i) = \varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.35)$$

o qual, novamente pela Eq.(2.30), induz a um incremento de tensão no tempo $t \geq t_i$ que é dado por

$$\begin{aligned} \delta\sigma_i(t) &= E(t - t_i)\delta\varepsilon(t_i), \\ &= E(t - t_i)\{\varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1})\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Agora, devido à linearidade que esta sendo assumida, obtém-se a tensão no tempo $t \in (t_{N-1}, t_N)$ por superposição. Assim tem-se para $\sigma_{N-1}(t)$

$$\begin{aligned} \sigma_{N-1}(t) &= \sigma_0(t) + \delta\sigma_1(t) + \dots + \delta\sigma_{N-1}(t), \\ &= E(t - t_0)\varepsilon(t_0) + \sum_{j=1}^{N-1} E(t - t_j)\delta\varepsilon(t_j), \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou

$$\sigma_{N-1}(t) = E(t - t_{N-1})\varepsilon(t) - \sum_{j=1}^{N-1} \{E(t - t_j) - E(t - t_{j-1})\}\varepsilon(t_{j-1}), \quad (2.38)$$

uma vez que $\varepsilon(t_{N-1}) \equiv \varepsilon(t)$. Agora faz-se $N \rightarrow \infty$ permitindo que, uniformemente em i , $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$. Então $\sigma_{N-1}(t) \rightarrow \sigma(t)$ e das Eqs.(2.38) e (2.37) respectivamente obtêm-se a seguintes formas

$$\sigma(t) = E(t - t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t E(t - s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}(s) ds, \quad (2.39)$$

$$= E(t_0)\varepsilon(t - t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial E}{\partial s}(t - s)\varepsilon(s) ds, \quad (2.40)$$

onde a equivalência pode-se ser vista por integração parcial.

Para realizar cálculos usando estas relações constitutivas é necessário descrever formas específicas para as funções de relaxação. Tipos de relações são sugeridos por dados experimentais a seguir. Uma escolha popular é o *sólido linear original* dado por

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \exp(-\alpha t), \quad \varphi_0, \quad \varphi_0 + \varphi_1 > 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.41)$$

Aqui usa-se φ para denotar uma função genérica, sem dano, de relaxação isotérmica; φ_0 , φ_1 e α sendo constantes materiais em que α^{-1} é usualmente denominado termo de decaimento. Esta é uma escolha conveniente para cálculos analíticos, desde que esta seja claramente a forma correta como indicado pelas Figs.2.11 e 2.12. Mas elas podem não capturar o comportamento abrupto em $t = 0$. Para resolver isto, a seguinte série de Dirichlet truncada é proposta como uma generalização

$$\varphi(t) = \sum_i \varphi_i \exp(-\alpha_i t), \quad \sum_i \varphi_i > 0, \quad \alpha_0, \alpha_1, \dots \geq 0. \quad (2.42)$$

Para simular um sólido é usual escolher $\alpha_0 \equiv 0$ dando um componente invariante na soma. Se $\alpha_i > 0$, para cada i , então esta série de Dirichlet modela um fluido já que $\lim \varphi(t) = 0$.

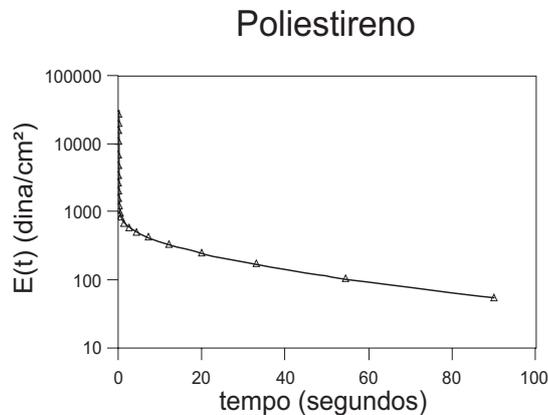


Figura 2.11: Módulo de relaxação do Poliestireno: Temperatura de referência 135°C [35].

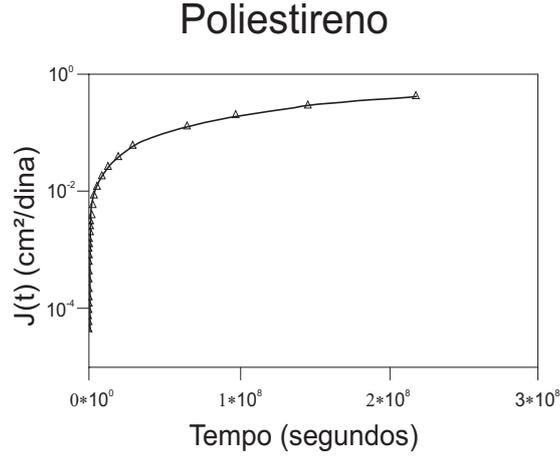


Figura 2.12: Módulo de fluência do Poliestireno atático: temperatura de referência 100°C [35].

2.3.3 Generalização da Representação Integro-diferencial para Três Dimensões

Uma proposta de generalização do modelo unidimensional para um modelo tridimensional é apresentada em [12] e [33]. A generalização da relação constitutiva em três dimensões consiste apenas em uma simples substituição das tensões e das deformações unidimensionais, que são tensores de ordem zero, por tensores de ordem dois. O módulo de correspondência também deve ser substituído pelo tensor constitutivo de quarta ordem. Então, pode-se representar a maioria dos materiais viscoelásticos pela seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{D}_{ijkl}(t - t_0)\varepsilon_{kl}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi)\dot{\varepsilon}_{kl}(\xi)d\xi, \quad (2.43)$$

$$= \mathbb{D}_{ijkl}(t_0)\varepsilon_{kl}(t - t_0) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t - \xi)\varepsilon_{kl}(\xi)d\xi. \quad (2.44)$$

Supondo isotropia do material temos

$$\mathbb{D} = 2G\mathbb{I}_{dev} + K(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (2.45)$$

em que

$$\mathbb{I}_{dev} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right\} \quad (2.46)$$

sendo \mathbf{I} o tensor de identidade de segunda ordem e \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem.

Modelo de Deslocamento Quase-estático

A relação constitutiva Eq.(2.44), para $t_0 = 0$, pode ser expressa na forma compacta como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbb{D}(0)\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \int_0^t \dot{\mathbb{D}}(t - \xi)\boldsymbol{\varepsilon}(\xi)d\xi. \quad (2.47)$$

Definido

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d(t) = \mathbb{I}_{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (2.48)$$

e

$$e(t) = tr [\boldsymbol{\varepsilon}(t)] = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (2.49)$$

na qual $\boldsymbol{\varepsilon}^d(t)$ representa a parte deviatória e $e(t)$ a parte volumétrica do tensor deformação, pode-se derivar

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = 2G(0)\boldsymbol{\varepsilon}^d(t) - \int_0^t 2\dot{G}(t-\xi)\boldsymbol{\varepsilon}^d(t)d\xi + \left(K(0)e(t) - \int_0^t \dot{K}(t-\xi)e(t)d\xi \right) \mathbf{I}. \quad (2.50)$$

É conveniente a separação das partes deviatória e volumétrica da tensão e deformação, i.e.,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{S}(t) + p(t)\mathbf{I} \quad (2.51)$$

em que

$$\mathbf{S}(t) = 2G(0)\boldsymbol{\varepsilon}^d(t) - \int_0^t 2\dot{G}(t-\xi)\boldsymbol{\varepsilon}^d(t)d\xi, \quad (2.52)$$

e

$$p(t) = K(0)e(t) - \int_0^t \dot{K}(t-\xi)e(t)d\xi. \quad (2.53)$$

na qual

$$\mathbf{S}(t) = \mathbb{I}_{dev} \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (2.54)$$

representa a parte deviatória do tensor tensão e

$$p(t) = \frac{1}{3} tr [\boldsymbol{\sigma}(t)] = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (2.55)$$

a pressão hidrostática.

Modelo de Taxa Quase-estático

Agora, substituindo as definições Eq.(2.48) e (2.49) na relação constitutiva Eq.(2.43) e tomando $t_o = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbb{D}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t-\xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi)d\xi, \\ &= 2G(t)\boldsymbol{\varepsilon}^d(0) + \int_0^t 2G(t-\xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\xi)d\xi + \left\{ K(t)e(0) + \int_0^t K(t-\xi)\dot{e}(\xi)d\xi \right\} \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

A qual também pode ser expressa como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{S}(t) + p(t)\mathbf{I} \quad (2.57)$$

com

$$\mathbf{S}(t) = 2G(t)\boldsymbol{\varepsilon}^d(0) + \int_0^t 2G(t-\xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\xi)d\xi, \quad (2.58)$$

e

$$p(t) = K(t)e(0) + \int_0^t K(t-\xi)\dot{e}(\xi)d\xi. \quad (2.59)$$

Séries de Prony

Para os dois modelos apresentados anteriormente, pode-se usar a mesma expansão em série de Prony para o módulo de cisalhamento G e para o “*bulk modulus*” K

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_g} G_i \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^G}\right), \quad (2.60)$$

e

$$K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_k} K_i \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^K}\right), \quad (2.61)$$

em que G_∞ é o módulo de cisalhamento para o tempo tendendo ao infinito, G_i é módulo de cisalhamento para o instante t_i , K_∞ é o “*bulk modulus*” para o tempo tendendo ao infinito, K_i é o “*bulk modulus*” para o instante t_i e τ_i^G e τ_i^K são os tempos de relaxação para cada componente da série de Prony. Introduzindo a definição de módulo relativo

$$\alpha_i^G = G_i/G_0, \quad (2.62)$$

e

$$\alpha_i^K = K_i/K_0, \quad (2.63)$$

com

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \quad (2.64)$$

e

$$K_0 = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (2.65)$$

pode-se reescrever as Eqs.(2.60) e (2.61) de forma equivalente como

$$G(\xi) = G_0 \left[\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^G}\right) \right] \quad (2.66)$$

e

$$K(\xi) = K_0 \left[\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^K}\right) \right]. \quad (2.67)$$

As constantes elásticas G e K se relacionam com os módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν da seguinte forma:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad (2.68)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}, \quad (2.69)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.70)$$

$$e \quad (2.71)$$

$$k = K - \frac{2}{3}G,$$

em que k é o módulo volumétrico.

O Modelo do Ansys

A Eq.(2.56) define o mesmo modelo viscoelástico empregado no Ansys, visto em [3], a qual é dada por

$$\sigma(t) = \int_0^t 2G(t - \xi) \dot{\varepsilon}^d(\xi) d\xi + \mathbf{I} \int_0^t K(t - \xi) \dot{\varepsilon}(t) d\xi, \quad (2.72)$$

em que verifica-se que o modelo do Ansys assume a hipótese de que $\varepsilon(0) = 0$. No entanto, esta não é uma hipótese muito boa, pois se considerarmos carregamentos aplicados instantâneos, teremos como resultado deformações instantâneas, que é justamente esta que representa a deformação puramente elástica no instante inicial.

2.4 Inclusão do Efeito da Temperatura

Em [35] é sugerido que para uma grande classe de materiais a dependência da temperatura cresce por um fator comum para todas as constantes que decaem. Tais materiais são conhecidos como *termoreologicamente simples*. Para estes materiais pode ser empregado o *princípio da superposição tempo-temperatura*. Este princípio diz que as funções de relaxação podem ser escritas como funções de apenas uma variável $\varrho = \varrho(t, T)$, a qual incorpora ambas, o tempo e a variação da temperatura. Isto implica que uma mudança de T em t fixo e uma mudança de t em T fixo resultará no mesmo valor para ϱ . Portanto $\varrho(t + t_1, T) = \varrho(t, T + T_1)$, podem ser considerados equivalentes. Assim uma mudança na temperatura ambiente causa uma mudança na escala do tempo da resposta viscoelástica.

A Fig.2.13 mostra algumas curvas do módulo de relaxação de tensão em várias temperaturas entre $-97^\circ F$ e $174^\circ F$, para o Polibutadieno-ácido acrílico (PBAA).

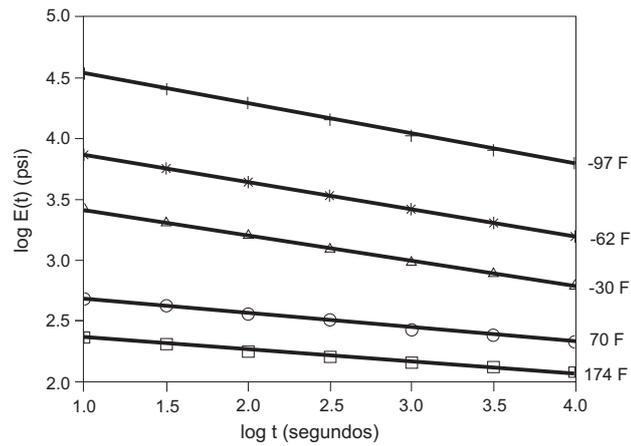


Figura 2.13: Variação do módulo de relaxação com o tempo e a temperatura [12].

Pegando a curva de $70^{\circ}F$ como base e deslizando, ou movendo, as curvas restantes horizontalmente é verificado que elas formam uma mesma curva, conforme pode ser visto na Fig.2.14. O eixo horizontal é agora o logaritmo do tempo de redução para a temperatura de $70^{\circ}F$.

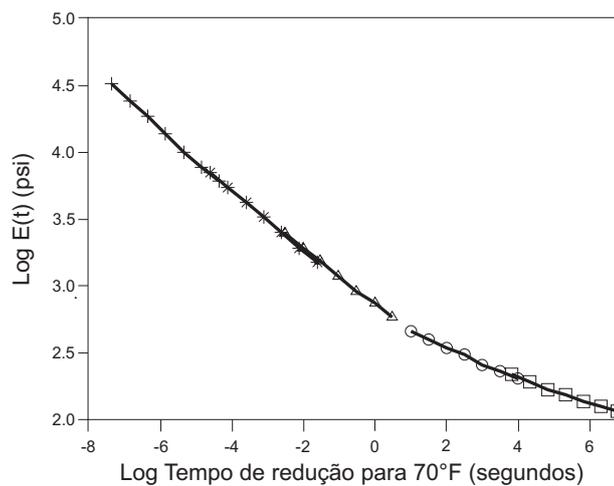


Figura 2.14: Curva mestre do módulo de relaxação em a $70^{\circ} F$ [12].

A quantidade de deslocamento horizontal que cada curva sofreu, definido como $A_T(T(t))$, gera um novo gráfico do $\log A_T(T(t))$ por T , Fig.2.15. Usando um procedimento de ajuste de curva apropriado uma forma explícita para $A_T(T(t))$ é encontrada.

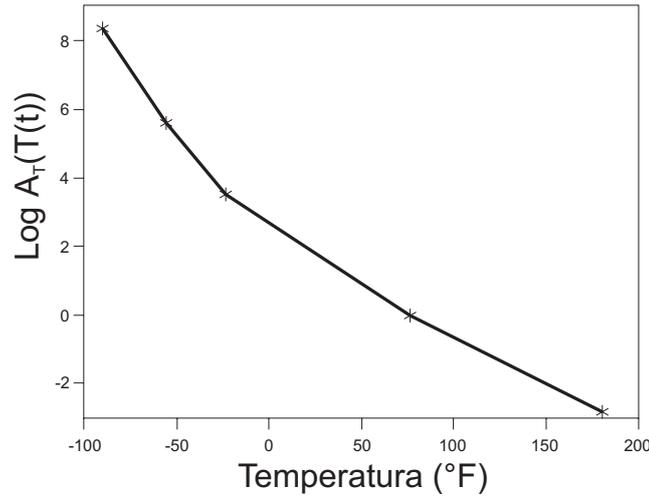


Figura 2.15: Fator de deslocamento, $A_T(T(t))$, variando com a temperatura [12].

Inicialmente, denota-se $\varphi((t, T))$ como uma função de relaxação genérica na temperatura ambiente T . Então, de acordo com o que foi visto anteriormente, pode-se determinar o valor de $\log \varphi((t, T))$ movendo-se a curva de referência $\log \varphi((t, T_0))$ através de uma quantidade determinada por $A_T(T(t))$, ou seja,

$$(t/A_T(T(t)), T_0) = (t, T). \quad (2.73)$$

Note que deve-se ter $\log A_T(T_0) = 0$ resultando $(t/A_T(T(t)), T_0) = (t, T_0)$. Segue então que

$$\varrho(t) = t/A_T(T(t)), \quad (2.74)$$

na qual ϱ é o tempo de redução. Pode-se escrever ϱ como função somente de t já que se considera conhecida a variação da temperatura $T(t)$. A função de relaxação é dada então por

$$\varphi((t, T)) = \varphi(\varrho(t)). \quad (2.75)$$

2.4.1 Modelo de Taxa Quase-estático com Efeito de temperatura

A forma integral hereditária básica para modelo de taxa quase-estático, Eq.(2.56), incluindo o efeito da temperatura fica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & 2G(\varrho(t))\boldsymbol{\varepsilon}^d(0) + \int_0^t 2G(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\xi)d\xi \\ & + \left\{ K(\varrho(t))e(0) + \int_0^t K(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{e}(\xi)d\xi \right\} \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

na qual $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ e e são as deformações deviatórica e volumétrica respectivamente, K é o “bulk modulus” e G é o módulo de cisalhamento, os quais são funções do tempo de redução $\varrho(\cdot)$.

O tempo de redução é relacionado com o tempo atual através da equação diferencial integral,

como pode ser visto em [12]

$$\varrho(t) = \int_0^t \frac{1}{A_T(T(\bar{s}))} d\bar{s}. \quad (2.77)$$

Assim, deriva-se

$$\frac{d\varrho(t)}{dt} = \frac{1}{A_T(T(t))}, \quad (2.78)$$

em que $T(t)$ descreve a variação da temperatura com relação ao tempo, considerada conhecida, e $A_T(\circ)$ é a função deslocamento. Portanto, se $A_T = 1$ e $\varrho(t) = t$, retorna-se à forma anterior.

Uma função deslocamento comumente usada é a equação de Williams-Landell-Ferry (WLF), a qual tem a seguinte forma

$$-\log [A_T(T(t))] = \frac{C_1^g (T(t) - T_g)}{C_2^g + (T(t) - T_g)}, \quad (2.79)$$

com C_1^g e C_2^g sendo constante materiais e T_g a temperatura de transição vítrea. Esta temperatura é a qual, a princípio, o comportamento do material muda do estado vítreo para o borrachoso. C_1^g e C_2^g foram imaginados serem constantes “universais”, as quais eram obtidas na T_g , mas estas constantes têm uma ligeira variação de polímero para polímero.

Pode-se, ainda, usar a equação de WLF com alguma temperatura conveniente, que não a temperatura de transição vítrea, sendo esta chamada de temperatura de referência. A forma da equação permanece a mesma, mas as constantes são diferentes. Portanto,

$$-\log [A_T(T(t))] = \frac{C_1 (T(t) - T_0)}{C_2 + (T(t) - T_0)}, \quad (2.80)$$

em que T_0 é a temperatura de referência na qual os dados de relaxação são dados, e C_1 e C_2 são as constantes de calibração na temperatura de referência. As constantes “universais” C_1^g e C_2^g são relacionadas com C_1 e C_2 da seguinte forma

$$C_1 = \frac{C_1^g}{1 + (T_0 - T_g)/C_2^g}, \quad (2.81)$$

e

$$C_2 = C_2^g + (T_0 - T_g). \quad (2.82)$$

Finalmente, as funções de relaxação $K(t)$ e $G(t)$ podem ser reescritas, incluindo o efeito da temperatura

$$G(\varrho(t)) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^G}\right), \quad (2.83)$$

e

$$K(\varrho(t)) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^K}\right). \quad (2.84)$$

2.5 Algoritmo do Modelo de Taxa Quase-estático

Nesta seção, a equação usada será

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = & 2G(\varrho(t))\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t 2G(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{x}, \xi)d\xi \\ & + \left\{ K(\varrho(t))e(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t K(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{e}(\mathbf{x}, \xi)d\xi \right\} \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

em que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}, \quad (2.86)$$

com

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = 2G(\varrho(t))\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t 2G(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{x}, \xi)d\xi, \quad (2.87)$$

e

$$p(\mathbf{x}, t) = K(\varrho(t))e(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t K(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{e}(\mathbf{x}, \xi)d\xi. \quad (2.88)$$

- Desenvolvimento da parte deviatórica

Considerando a expansão para o módulo de cisalhamento G dado pela Eq.(2.83) pode-se derivar a seguinte expressão

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = 2G_\infty\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t) + 2G_s\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0) + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^G}\right) \right\} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{x}, \xi)d\xi, \quad (2.89)$$

em que

$$G_s = \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^G}\right). \quad (2.90)$$

- Desenvolvimento da parte hidrostática

Usando, agora, a Eq.(2.84) que descreve o “bulk modulus” K encontra-se a seguinte expressão

$$p(\mathbf{x}, t) = K_\infty e(\mathbf{x}, t) + K_s e(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^K}\right) \right\} \dot{e}(\mathbf{x}, \xi)d\xi, \quad (2.91)$$

em que

$$K_s = \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^K}\right). \quad (2.92)$$

2.5.1 Forma Forte do Problema

O problema na forma forte, segundo [16], para cada $t \in [0, t_f]$, tem a seguinte equação de equilíbrio, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$,

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, t_f), \quad (2.93)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ em } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times (0, t_f), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \text{ em } (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, t_f).\end{aligned}$$

2.5.2 Forma Fraca do Problema

A formulação na forma fraca do problema, conforme [16], para cada $t \in [0, t_f]$, pode ser expresso como:

Determinar $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{K}$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Gamma_t \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}. \quad (2.94)$$

Os conjuntos \mathcal{K} e \mathcal{V} , são definidos como:

Para cada t fixo, $t \in [0, t_f]$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \mathcal{K}_t = \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mid u_i(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega) \text{ e } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_u \}, \\ &\text{e} \\ \mathcal{V} &= \{ \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \mid \hat{v}_i(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \text{ e } \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u \}.\end{aligned}$$

Usando as definições de tensão e deformação deviatórica e volumétrica pode-se calcular o seguinte produto

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) = p(\mathbf{x}, t)e(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}). \quad (2.95)$$

Substituindo a Eq.(2.95) na Eq.(2.94), pode-se reformular o problema fraco como:

Para cada $t \in [0, t_f]$, determinar $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{K}$, tal que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t)e(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Omega \\ + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Gamma_t &\quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V},\end{aligned} \quad (2.96)$$

em que

$$p(\mathbf{x}, t) = K_{\infty}e(\mathbf{x}, t) + K_s e(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^K}\right) \right\} \dot{e}(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad (2.97)$$

e

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = 2G_{\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t) + 2G_s\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0) + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^G}\right) \right\} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (2.98)$$

2.5.3 Discretização Temporal

O problema de viscoelasticidade é dependente do caminho. Neste caso o tensor tensão depende da história de deformação que o corpo está sujeito. O tensor tensão é obtido da solução

de um problema de valor inicial. Para problemas mecânicos de deformação infinitesimal, tem-se:

Considere o incremento de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ e considere que todas as variáveis são totalmente conhecidas em t_n . Então, o tensor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, no tempo t_{n+1} , deve determinar a tensão $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, unicamente através do algoritmo de integração. Tal algoritmo define uma função constitutiva de aproximação incremental, $\boldsymbol{\sigma}(\bullet)$, para o tensor tensão

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}). \quad (2.99)$$

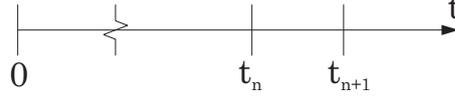


Figura 2.16: Partição do tempo.

Aqui, dentro de cada incremento, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ é função de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ apenas. O argumento $\boldsymbol{\alpha}_n$, que representa a condição inicial do problema de valor inicial constitutivo, dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, é constante.

Consequentemente, se a equação de equilíbrio na forma fraca é válida para qualquer tempo $t \in [0, t_f]$, é válida também para o tempo t_{n+1} . Logo,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma_t \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \quad (2.100)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \mathbf{u}_{n+1} & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n) &= \mathbf{u}_n \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_n) &= \boldsymbol{\sigma}_n \\ \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \bar{\mathbf{b}}_{n+1} & \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t_n) &= \bar{\mathbf{b}}_n \\ \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \bar{\mathbf{t}}_{n+1} & \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t_n) &= \bar{\mathbf{t}}_n \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \mathbf{S}_{n+1} & \mathbf{S}(\mathbf{x}, t_n) &= \mathbf{S}_n \\ p(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= P_{n+1} & p(\mathbf{x}, t_n) &= P_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_n) &= \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^d & \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t_n) &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^d \\ e(\mathbf{x}, t_{n+1}) &= e_{n+1} & e(\mathbf{x}, t_n) &= e_n \end{aligned}$$

a equação de equilíbrio fica

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma_t \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \quad (2.101)$$

Para a parte esquerda da equação acima tem-se

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega + \int_{\Omega} p_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega. \quad (2.102)$$

Com isso será necessário calcular \mathbf{S}_{n+1} e p_{n+1} . Para avaliar as tensões no instante t_{n+1} será usada uma regra de integração trapezoidal visando realizar a integração temporal.

- Determinação da parte deviatórica da tensão.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= 2G_\infty \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t) + 2G_s \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0) \\ &+ 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^G}\right) \right\} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Neste ponto, pode-se definir

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(\infty)} = 2G_\infty \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, t), \quad (2.104)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(0)} = 2G_s \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{x}, 0), \quad (2.105)$$

e

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(i)} = \int_0^t \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \bar{s}}(\mathbf{x}, \bar{s}) d\bar{s}. \quad (2.106)$$

Como consequência

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(\infty)} + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^{(i)}. \quad (2.107)$$

Portanto, no instante t_{n+1}

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{(\infty)} + \mathbf{S}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \mathbf{S}_{n+1}^{(i)}, \quad (2.108)$$

em que

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(\infty)} = 2G_\infty \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^d, \quad (2.109)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = 2G_s \boldsymbol{\varepsilon}_0^d, \quad (2.110)$$

e

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t_{n+1}) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \bar{s}}(\mathbf{x}, \bar{s}) d\bar{s}. \quad (2.111)$$

Agora, realizando uma mudança de variáveis dada por

$$\varrho = \varrho(\bar{s}) \quad \text{ou} \quad \bar{s} = \bar{s}(\varrho), \quad (2.112)$$

tem-se

$$\begin{aligned} d\varrho &= \frac{d\varrho(\bar{s})}{d\bar{s}} d\bar{s}, \\ &= \frac{1}{A_T(T(\bar{s}))} d\bar{s}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Também

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{d\bar{s}}, \quad (2.114)$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \bar{s}} d\bar{s} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{d\bar{s}} d\bar{s}, \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho} d\varrho.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Alem disso, para $\bar{s} = 0$,

$$\varrho(\bar{s} = 0) = 0, \quad (2.116)$$

e, em $\bar{s} = t$,

$$\varrho(\bar{s} = t) = \varrho(t). \quad (2.117)$$

Conseqüentemente, como resultado da mudança de variável e definindo $\varrho_{n+1} = \varrho(t_{n+1})$, deriva-se

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \quad (2.118)$$

Note que, por sua vez que $\mathbf{S}_{n+1}^{(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} &= \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &\quad + \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho.\end{aligned}\quad (2.119)$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, tem-se

$$\varrho_{n+1} = \varrho_n + \Delta \varrho_n, \quad (2.120)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} &= \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &\quad + \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho.\end{aligned}\quad (2.121)$$

Usando a Eq.(2.120), pode-se computar o valor de $\Delta \varrho_n$ pela simples realização da integração, resultando

$$\Delta \varrho_n = \varrho_{n+1} - \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt, \quad (2.122)$$

Sendo $\Delta \varrho_n$ e τ_i^G independentes de ϱ , obtêm-se

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho.\end{aligned}\quad (2.123)$$

Na equação acima pode-se notar que

$$\mathbf{S}_n^{(i)} = \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho, \quad (2.124)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^{(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{S}_n^{(i)} + \\ &\exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \end{aligned} \quad (2.125)$$

A determinação da integral na Eq.(2.125) pode ser feita aproximadamente pela aplicação de uma regra trapezoidal usando o ponto médio como referência. Neste caso, tem-se

$$\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \simeq 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^d, \quad (2.126)$$

em que

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_n^d. \quad (2.127)$$

Novamente, usando a Eq.(2.120), e sabendo que

$$\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho_n + \Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.128)$$

pode-se concluir que

$$\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho_{n+\frac{1}{2}} - \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt. \quad (2.129)$$

Substituindo a Eq.(2.128) na Eq.(2.126) deriva-se

$$\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \simeq 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^d. \quad (2.130)$$

Finalmente, usando as Eqs.(2.125) e (2.130) obtêm-se

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{S}_n^{(i)} + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^d. \quad (2.131)$$

Os resultados acima podem ser resumidos no seguinte quadro

$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{S}_n^{(i)} + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^d$
em que
$\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$
e
$\Delta\varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$

- Determinação da parte hidrostática da tensão.

$$p(\mathbf{x}, t) = K_\infty e(\mathbf{x}, t) + K_s e(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^K}\right) \right\} \dot{e}(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (2.132)$$

Definindo

$$p(\mathbf{x}, t)^{(\infty)} = K_\infty e(\mathbf{x}, t), \quad (2.133)$$

$$p(\mathbf{x}, t)^{(0)} = K_s e(\mathbf{x}, 0), \quad (2.134)$$

e

$$p(\mathbf{x}, t)^{(i)} = \int_0^t \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\mathbf{x}, \bar{s}) d\bar{s}. \quad (2.135)$$

pode-se reescrever a Eq.(2.132)

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)^{(\infty)} + p(\mathbf{x}, t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_K} p(\mathbf{x}, t)^{(i)}. \quad (2.136)$$

Com isso, no instante t_{n+1} ,

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{(\infty)} + p_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_K} p_{n+1}^{(i)}, \quad (2.137)$$

com

$$p_{n+1}^{(\infty)} = K_\infty e_{n+1}, \quad (2.138)$$

$$p_{n+1}^{(0)} = K_s e_0, \quad (2.139)$$

e

$$p_{n+1}^{(i)} = \int_0^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t_{n+1}) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\mathbf{x}, \bar{s}) d\bar{s}. \quad (2.140)$$

Usando a mesma mudança de variável usada anteriormente, dada por

$$\varrho = \varrho(\bar{s}) \quad \text{ou} \quad \bar{s} = \bar{s}(\varrho), \quad (2.141)$$

e a definição $\varrho_{n+1} = \varrho(t_{n+1})$, tem-se

$$p_{n+1}^{(i)} = \int_0^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \quad (2.142)$$

Com isso, $p_{n+1}^{(i)}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{(i)} &= \int_0^{\varrho_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &\quad + \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Usando também a definição de que $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, que leva a

$$\varrho_{n+1} = \varrho_n + \Delta \varrho_n, \quad (2.144)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{(i)} &= \int_0^{\varrho_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^K}\right) \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &+ \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Novamente, como $\Delta \varrho_n$ e τ_i^K são independentes de ϱ , deriva-se

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \int_0^{\varrho_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \\ &+ \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho, \end{aligned} \quad (2.146)$$

na qual, pode-se verificar que

$$p_n^{(i)} = \int_0^{\varrho_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho, \quad (2.147)$$

resultando em

$$p_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) p_n^{(i)} + \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho. \quad (2.148)$$

A integral na Eq.(2.148) é calculada, analogamente, por meio de uma regra de integração trapezoidal usando o ponto médio como referência. Neste caso, obtêm-se

$$\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \simeq K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n, \quad (2.149)$$

em que

$$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n. \quad (2.150)$$

Sabendo que

$$\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho_{n+1} - \Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.151)$$

na qual

$$\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt, \quad (2.152)$$

pode-se derivar a seguinte equação

$$\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\mathbf{x}, \varrho) d\varrho \simeq K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n. \quad (2.153)$$

Substituindo a Eq.(2.153) na Eq.(2.148) obtêm-se

$$p_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^K}\right) p_n^{(i)} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n. \quad (2.154)$$

Os resultados acima estão resumidos no quadro a seguir:

$p_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^K}\right) p_n^{(i)} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n$
em que
$\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$
e
$\Delta\varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$

2.6 Discretização da Formulação Fraca do Problema com Temperatura

O quadro a seguir apresenta um resumo do problema na forma fraca.

Dados $\left(\left\{ p_n^{(i)} \right\}_{i=1}^{n_K}, \left\{ \mathbf{S}_n^{(i)} \right\}_{i=1}^{n_G}, \mathbf{u}_n \right)$, determine $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{K}$ tal que
$\int_{\Omega} \{ p_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{S}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) \} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma_t \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$
com
$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{(\infty)} + \mathbf{S}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \mathbf{S}_{n+1}^{(i)}$
e
$p_{n+1} = p_{n+1}^{(\infty)} + p_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_K} p_{n+1}^{(i)}$
em que
$\mathbf{S}_{n+1}^{(\infty)} = 2G_{\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^d$
$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = 2G_s \boldsymbol{\varepsilon}_0^d$
$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{S}_n^{(i)} + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^d$
com
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_n^d$
e
$p_{n+1}^{(\infty)} = K_{\infty} e_{n+1}$
$p_{n+1}^{(0)} = K_s e_0$
$p_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) p_n^{(i)} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n$
onde
$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n$
sendo
$\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$
e
$\Delta \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt$

2.6.1 Discretização por Elementos Finitos

A fim de aplicar o método de elementos finitos, é feita uma partição do domínio Ω , em elementos finitos Ω_e .

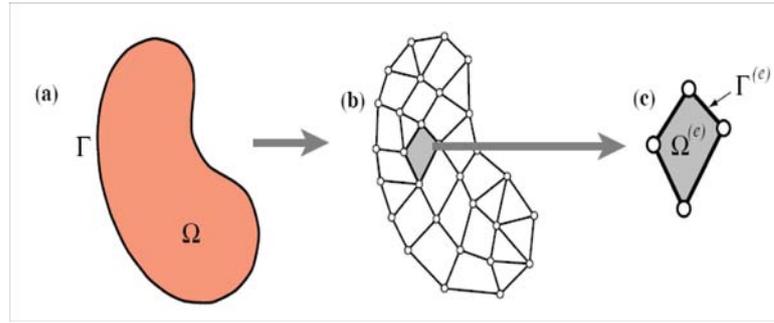


Figura 2.17: Discretização do domínio.

Como resultado,

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e, \quad (2.155)$$

$$\int_{\Omega} p_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} p_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e, \quad (2.156)$$

$$\int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_e, \quad (2.157)$$

$$\int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma_t = \sum_e \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma_t. \quad (2.158)$$

Adicionalmente, é feita uma aproximação dos campos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ no interior de cada elemento finito Ω_e , da seguinte forma

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}(\mathbf{x})] \mathbf{q}_{n+1}^e, \quad (2.159)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (2.160)$$

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})) = [\mathbf{B}(\mathbf{x})] \mathbf{q}_{n+1}^e, \quad (2.161)$$

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = [\mathbf{B}(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (2.162)$$

em que

$$(\mathbf{q}_{n+1}^e)^T = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_s, v_s, w_s\}, \quad (2.163)$$

representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento, s o número de nós do elemento e $\{u_i, v_i, w_i, i = 1..s\}$ as componentes nodais do campo de deslocamento. $[\mathbf{N}(\mathbf{x})]$ é a matriz de funções de interpolação construídas pelo FEM, que relaciona as componentes do vetor deslocamento com o vetor dos deslocamentos nodais do elemento e $[\mathbf{B}(\mathbf{x})]$ é a matriz que relaciona as componentes do tensor deformação com o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Antes de continuar, alguns itens terão que ser redefinidos. O tensor deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ será

representado por um vetor

$$\vec{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}. \quad (2.164)$$

Consequentemente o tensor tensão de Cauchy também será redefinido, de forma vetorial como

$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{array} \right\}. \quad (2.165)$$

Para a parte volumétrica será definido um novo operador de forma que

$$e = \langle \mathbf{w}, \vec{\varepsilon} \rangle, \quad (2.166)$$

em que

$$\mathbf{w} = (1, 1, 1, 0, 0, 0). \quad (2.167)$$

O tensor ε^d pode ser expresso como

$$\vec{\varepsilon}^d = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^d \\ \varepsilon_{yy}^d \\ \varepsilon_{zz}^d \\ \gamma_{xy}^d \\ \gamma_{xz}^d \\ \gamma_{yz}^d \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}, \quad (2.168)$$

em que é definido

$$[\mathbf{H}] = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.169)$$

Portanto

$$\vec{\varepsilon}^d = [\mathbf{H}]\vec{\varepsilon}, \quad (2.170)$$

o que consiste em uma representação vetorial para a parte deviatória do tensor deformação.

De forma análoga, tem-se

$$\vec{S} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^d \\ \sigma_{yy}^d \\ \sigma_{zz}^d \\ \sigma_{xy}^d \\ \sigma_{xz}^d \\ \sigma_{yz}^d \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}] \vec{\sigma}, \quad (2.171)$$

sendo \vec{S} a representação vetorial do tensor tensão deviatórico e

$$p = \frac{1}{3} \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{3} \langle \mathbf{w}, \vec{\sigma} \rangle. \quad (2.172)$$

- Determinação de (A1) $\equiv \int_{\Omega_e} \vec{S}_{n+1} \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e$

Usando as aproximações e definições feitas sobre a parte deviatórica da tensão tem-se

$$\begin{aligned} (A1) &= \int_{\Omega_e} 2G_\infty \vec{\varepsilon}_{n+1}^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\ &+ \int_{\Omega_e} 2G_s \vec{\varepsilon}_0^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\ &+ \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}_{n+1}^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta \rho_n}{\tau_i^G}\right) \int_{\Omega_e} \vec{S}_n^{(i)} \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\ &- \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}_n^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\}. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Avaliando cada um dos produtos individualmente obtêm-se

$$\vec{\varepsilon}_{n+1}^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) = \left([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] \right) \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (2.174)$$

$$\vec{\varepsilon}_0^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) = \left([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] \right) \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (2.175)$$

$$\vec{S}_n^{(i)} \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T \vec{S}_n^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (2.176)$$

$$\vec{\varepsilon}_n^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) = \left([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] \right) \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (2.177)$$

Note que a Eq.(2.173) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
(A1) &= \left\{ 2G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}_{n+1}^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\
&+ 2G_s \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}_0^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\
&+ \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \int_{\Omega_e} \vec{S}_n^{(i)} \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\
&- \left\{ \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}_n^d \cdot \vec{\varepsilon}^d(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e. \tag{2.178}
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs.(2.174-2.177) na equação acima

$$\begin{aligned}
(A1) &= \left\{ 2G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}]) d\Omega_e \right] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ 2G_s \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}]) d\Omega_e \right] \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T \vec{S}_n^{(i)} d\Omega_e \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&- \left\{ \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \right] \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \tag{2.179}
\end{aligned}$$

Denominando

$$[\mathbf{K}_e^{G0}] = \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{B}]) d\Omega_e \right], \tag{2.180}$$

$$\mathbf{F}_e^{S(i)} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{H}]^T \vec{S}_n^{(i)} d\Omega_e, \tag{2.181}$$

obtêm-se

$$\begin{aligned}
(A1) &= \left\{ 2G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{G0}] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ 2G_s [\mathbf{K}_e^{G0}] \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{F}_e^{S(i)} \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&- \left\{ \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{G0}] \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \tag{2.182}
\end{aligned}$$

a qual pode ser expressa de forma compacta como

$$(A1) = [\mathbf{K}_e^G] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \mathbf{F}_e^{\varepsilon d_0} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \mathbf{F}_e^S \cdot \hat{\mathbf{q}}^e - \mathbf{F}_e^{\varepsilon d} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \tag{2.183}$$

em que

$$[\mathbf{K}_e^G] = \left\{ 2G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{G0}], \quad (2.184)$$

$$\mathbf{F}_e^{\varepsilon d_0} = 2G_s [\mathbf{K}_e^{G0}] \mathbf{q}_0^e, \quad (2.185)$$

$$\mathbf{F}_e^S = \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta\rho_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{F}_e^{S(i)} \right\}, \quad (2.186)$$

$$\mathbf{F}_e^{\varepsilon d} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta\rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{G0}] \mathbf{q}_n^e. \quad (2.187)$$

- Determinação de (A2) $\equiv \int_{\Omega} p_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega$

Agora, usando as aproximações e definições feitas sobre a parte hidrostática da tensão tem-se

$$\begin{aligned} (A2) &= \int_{\Omega_e} K_\infty e_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e + \int_{\Omega_e} K_s e_0 e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\Delta\rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \int_{\Omega_e} e_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta\rho_n}{\tau_i^K}\right) \int_{\Omega_e} p_n^{(i)} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\Delta\rho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \int_{\Omega_e} e_n e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\}. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Trabalhando os produtos acima obtêm-se

$$e_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) = \left[[\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \right] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (2.189)$$

$$e_0 e(\hat{\mathbf{v}}) = \left[[\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \right] \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (2.190)$$

$$p_n^{(i)} e(\hat{\mathbf{v}}) = p_n^{(i)} \left\{ [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (2.191)$$

$$e_n e(\hat{\mathbf{v}}) = \left[[\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \right] \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (2.192)$$

A Eq.(2.188) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
(A2) &= \left\{ K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} \int_{\Omega_e} e_{n+1} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\
&+ K_s \int_{\Omega_e} e_0 e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \\
&+ \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \int_{\Omega_e} p_n^{(i)} e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e \right\} \\
&- \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} \int_{\Omega_e} e_n e(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega_e. \tag{2.193}
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs.(2.189-2.192) na equação acima

$$\begin{aligned}
(A2) &= \left\{ K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w}) d\Omega_e \right] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ K_s \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w}) d\Omega_e \right] \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \int_{\Omega_e} p_n^{(i)} [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} d\Omega_e \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&- \left\{ \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} \left\{ \int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w}) d\Omega_e \right\} \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \tag{2.194}
\end{aligned}$$

Denominando

$$[\mathbf{K}_e^{K0}] = \left[\int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{w} \otimes [\mathbf{B}]^T \mathbf{w}) d\Omega_e \right], \tag{2.195}$$

$$\mathbf{F}_e^{p(i)} = \int_{\Omega_e} p_n^{(i)} [\mathbf{B}]^T \mathbf{w} d\Omega_e, \tag{2.196}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
(A2) &= \left\{ K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{K0}] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + K_s [\mathbf{K}_e^{K0}] \mathbf{q}_0^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\
&+ \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \mathbf{F}_e^{p(i)} \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e - \left\{ \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{K0}] \mathbf{q}_n^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \tag{2.197}
\end{aligned}$$

a qual fica na forma compacta como

$$(A2) = [\mathbf{K}_e^K] \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \mathbf{F}_e^{ev0} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \mathbf{F}_e^p \cdot \hat{\mathbf{q}}^e - \mathbf{F}_e^{ev} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \tag{2.198}$$

com

$$[\mathbf{K}_e^K] = \left\{ K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{K0}], \quad (2.199)$$

$$\mathbf{F}_e^{evo} = K_s [\mathbf{K}_e^{K0}] \mathbf{q}_0^e, \quad (2.200)$$

$$\mathbf{F}_e^p = \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \mathbf{F}_e^{p(i)} \right\}, \quad (2.201)$$

$$\mathbf{F}_e^{ev} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \right\} [\mathbf{K}_e^{K0}] \mathbf{q}_n^e. \quad (2.202)$$

- Determinação de (A3) = $\int_{\Omega_e} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_e$

Neste caso tem-se

$$\begin{aligned} (A3) &= \int_{\Omega_e} \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot [\mathbf{N}] \hat{\mathbf{q}}^e \, d\Omega_e \\ &= \left\{ \int_{\Omega_e} \rho [\mathbf{N}]^T \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \, d\Omega_e \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\ &= \mathbf{F}_e^{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \end{aligned} \quad (2.203)$$

- Determinação de (A4) = $\int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Gamma_t$

Aqui obtêm-se

$$\begin{aligned} (A4) &= \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot [\mathbf{N}] \hat{\mathbf{q}}^e \, d\Gamma_t \\ &= \left\{ \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} [\mathbf{N}]^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \, d\Gamma_t \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\ &= \mathbf{F}_e^{\bar{\mathbf{t}}} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \end{aligned} \quad (2.204)$$

2.6.2 Montagem do problema global

Introduzindo os operadores união $U_e(\circ)$ e montagem $A_e(\circ)$ e $\check{A}_e(\circ)$, associados à obtenção de matrizes e vetores globais, pela adição da contribuição de cada elemento finito, pode-se definir

as seguintes matrizes e vetores globais

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{U}_{n+1}\} &= U_e \{\mathbf{q}_{n+1}^e\} \quad \text{e} \quad \{\hat{\mathbf{U}}\} = U_e \{\hat{\mathbf{q}}^e\}, \\
[\mathbf{K}^K] &= A_e [\mathbf{K}_e^K] \quad \text{e} \quad [\mathbf{K}^G] = A_e [\mathbf{K}_e^G], \\
\{\mathbf{F}^{\bar{t}}\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\bar{t}}\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{\bar{b}}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\bar{b}}\}, \\
\{\mathbf{F}^{\varepsilon d_0}\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\varepsilon d_0}\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{ev_0}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{ev_0}\}, \\
\{\mathbf{F}^p\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^p\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{ev}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{ev}\}, \\
\{\mathbf{F}^S\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^S\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{\varepsilon d}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\varepsilon d}\},
\end{aligned}$$

os quais possibilitam a definição do problema discretizado global

$$[\mathbf{K}^K + \mathbf{K}^G] \mathbf{U}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \{\mathbf{F}^{\varepsilon d_0} + \mathbf{F}^p - \mathbf{F}^{ev}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \{\mathbf{F}^{ev_0} + \mathbf{F}^S - \mathbf{F}^{\varepsilon d}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \{\mathbf{F}^{\bar{t}} + \mathbf{F}^{\bar{b}}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \quad (2.205)$$

implicando no seguinte sistema de equações

$$[\mathbf{K}^K + \mathbf{K}^G] \mathbf{U}_{n+1} = -\mathbf{F}^{\varepsilon d_0} - \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^{ev} - \mathbf{F}^{ev_0} - \mathbf{F}^S + \mathbf{F}^{\varepsilon d} + \mathbf{F}^{\bar{t}} + \mathbf{F}^{\bar{b}} \quad (2.206)$$

com isso pode-se finalmente expressar o problema como

$$[\mathbf{K}] \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{R} \quad (2.207)$$

em que

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}^K] + [\mathbf{K}^G] \quad (2.208)$$

e

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}^{ev_0} - \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^{ev} - \mathbf{F}^{\varepsilon d_0} - \mathbf{F}^S + \mathbf{F}^{\varepsilon d} + \mathbf{F}^{\bar{t}} + \mathbf{F}^{\bar{b}} \quad (2.209)$$

2.7 Conclusões Parciais

Existem várias teorias para descrever o comportamento de um material viscoelástico. Cada uma destas teorias possui certas particularidades. Procura-se, quase sempre, encontrar uma teoria que possa descrever o material por completo, independente de suas peculiaridades. Todavia, o que se observa é que não existe uma teoria capaz de abranger configurações as mais diversas possíveis.

Parâmetros relevantes na escolha de uma determinada teoria podem ser a sua robustez, flexibilidade, precisão, facilidade de implementação, custo computacional, etc. Conforme as características do problema a ser resolvido, se deseja melhorar determinado item. Geralmente o que acontece é que se ganha em um parâmetro e, por outro lado, se perde em outro.

No modelo utilizado a principal dúvida é o número de termos da série de Prony a serem utilizados. Poucos parâmetros podem não representar bem o fenômeno viscoelástico. Muitos parâmetros podem tornar a análise muito onerosa, podendo causar problemas de condiciona-

mento numérico na solução do modelo. Por isso conclui-se que um estudo mais aprofundado sobre esse tema pode ser muito interessante.

Capítulo 3

Viscoelasticidade Finita

3.1 Introdução

Os polímeros são materiais que muitas vezes sofrem grandes deformações em suas aplicações, principalmente os elastômeros. Todos os dias surgem novas teorias que tentam descrever este comportamento. Cada uma destas novas teorias visam melhorar ainda mais a representatividade do comportamento de polímeros para grandes deformações. No entanto, dependendo do polímero esta teoria pode ser aplicável ou não. Exemplos de modelos podem ser encontrados em [17], [2], [28], [41] e [26]. Neste capítulo será apresentado um novo modelo matemático que não leva em conta qual o polímero que se está analisando.

O ponto de partida para desenvolvimento será a mecânica do contínuo para grandes deformações, que pode ser encontrada em [29], [30], [7] e [11], onde serão feitas definições relevantes ao nosso estudo, tais como definição de movimento, de um corpo, das configurações de referência e atual, etc. Com essas definições e através das teorias de deformação homogênea e decomposição polar poderão ser apresentados alguns tensores que serão relevantes no modelo. As leis de conservação serão aplicadas em seguida. Feito isto, será apresentado o 1º tensor tensão de Piola Kirchhoff, o qual é a medida de tensão usada na configuração de referência, na qual será formulada a equação de equilíbrio.

A equação de equilíbrio na configuração de referência, também é chamada de formulação Lagrangiana Total da equação do equilíbrio. Neste ponto serão definidos a forma forte, que é a representação diferencial, e a forma fraca, que é a representação integral, do problema. É relevante ressaltar que todas estas teorias citadas e as demais serão desenvolvidas dentro do escopo de grandes deformações. Em seguida será apresentada a forma incremental do problema, resultante da discretização temporal do problema.

Como o modelo apresentado trata-se de um modelo não-linear, será utilizado como método de solução o método de Newton, que pode ser encontrado em [31]. Como o método de Newton é um método iterativo, será necessário determinar o módulo tangente global do modelo. Através deste módulo determina-se o valor das correções para os passos iterativos.

Finalmente, poderá ser proposto o modelo viscoelástico para grandes deformações. Neste modelo serão utilizados o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado e o tensor deformação logarítmica lagrangeana, que formam um par conjugado e podem ser vistos em [40]. Uma vez apresentado o

modelo constitutivo, será feita a inclusão do efeito da temperatura, usando a mesma teoria apresentada no modelo de pequenas deformações. Este modelo será então discretizado espacialmente por elementos finitos de Galerkin.

Posteriormente este modelo será programado em linguagem Fortran, podendo-se assim comparar seus resultados a outros resultados. Neste ponto será testada a eficiência do modelo, verificando sua robustez e aplicabilidade.

3.2 Deformações Finitas

Um corpo é considerado como sendo um conjunto de partículas, o qual somente poderá ser visualizado através de sua configuração, isto é, a região do espaço tridimensional ocupado em diferentes instantes.

Serão denotados \mathcal{B} como um corpo, Ω_o como a região do espaço ocupada pelo corpo no instante $t = 0$ e Ω como a região ocupada pelo corpo em um instante t , como mostra a Fig.3.1.

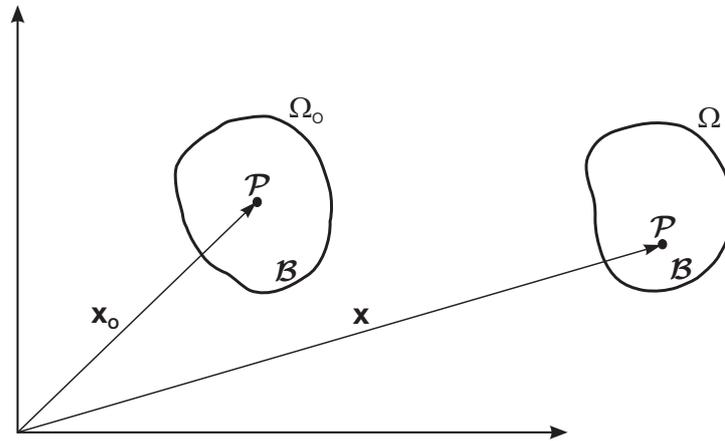


Figura 3.1: Definições das configurações inicial e final e dos sistemas de coordenadas utilizados.

Note que, cada ponto no espaço de uma configuração é ocupado por uma partícula. Um corpo consiste sempre das mesmas partículas, a configuração destas partículas é que varia com o tempo.

3.2.1 Movimento e Deformação de um Corpo \mathcal{B}

Para a determinação do movimento de um corpo é necessário seguir a trajetória de cada partícula de \mathcal{B} , a qual será denotada por \mathcal{P} . Como o objetivo é identificar cada partícula \mathcal{P} de \mathcal{B} , será utilizada a configuração de referência, a qual associa a cada partícula a posição que ela ocupa na configuração de referência, conforme pode ser visto na Fig.3.2.

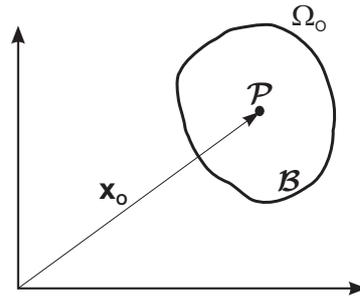


Figura 3.2: Definição da configuração inicial.

O movimento de um corpo \mathcal{B} é descrito pelo vetor posição $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t)$ de um ponto \mathbf{x}_o , descrevendo a posição de cada partícula \mathcal{P} de \mathcal{B} , em cada instante t

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t) = \varphi_t(\mathbf{x}_o). \quad (3.1)$$

Se a função vetorial φ descreve como um corpo \mathcal{B} muda ou deforma de uma configuração para outra, esta é denotada como função deformação.

Considere um dado instante t fixo. Se a posição \mathbf{x}_o da partícula \mathcal{P} na configuração de referência Ω_o é especificada, então a Eq. 3.1 dá a posição \mathbf{x} da partícula \mathcal{P} na configuração atual. Assim,

$$\Omega = \varphi(\Omega_o, t) = \varphi_t(\Omega_o). \quad (3.2)$$

Descrição Material ou Lagrangeana

A descrição do movimento no qual a posição \mathbf{x}_o , de uma partícula \mathcal{P} em Ω_o é a variável independente é denominada descrição material. Assume-se, ainda, que o mapeamento $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_o)$, para cada t , possui um mapeamento inverso e é denotado por $\varphi_t^{-1}(\cdot)$. Portanto

$$\mathbf{x}_o = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Descrição Espacial ou Euleriana

É a descrição do movimento no qual o vetor posição \mathbf{x} , de uma partícula \mathcal{P} em Ω , é a variável independente. Estas descrições são relacionadas pelas seguintes expressões

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{v}_o(\mathbf{x}_o, t), \quad (3.4)$$

ou

$$\mathbf{v}_o(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{v}_o(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.5)$$

Deformação Não-homogênea

Considere o movimento genérico, ilustrado na Fig.3.3, e o conjunto de partículas \mathcal{P} e \mathcal{Q} do corpo \mathcal{B} .

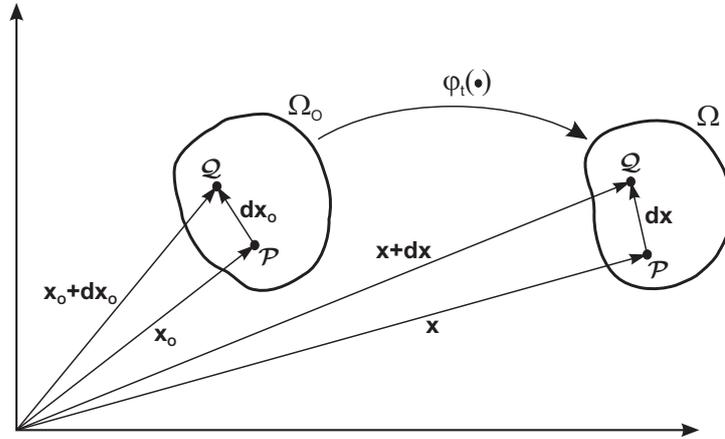


Figura 3.3: Definição da função deformação.

Tem-se \mathbf{x}_o e $\mathbf{x}_o + d\mathbf{x}_o$ como sendo os vetores posição de \mathcal{P} e \mathcal{Q} respectivamente, na configuração de referência. Na configuração atual \mathcal{P} e \mathcal{Q} ocupam as posições \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ respectivamente. Agora, para as partículas \mathcal{P} e \mathcal{Q} , tem-se

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t), \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o + d\mathbf{x}_o, t). \quad (3.7)$$

Considerando que, para cada t , o mapeamento $\varphi_t(\cdot)$ é suave, pode-se expandir a Eq.3.7 em uma série de Taylor, obtendo-se

$$x_i + dx_i = \varphi_i(\mathbf{x}_o, t) + \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{o_j}} dx_{o_j} + \mathcal{O}(dx_{o_j}^2), \quad (3.8)$$

na qual

$$\lim_{dx_{o_j} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(dx_{o_j}^2)}{dx_{o_j}} = 0. \quad (3.9)$$

Subtraindo 3.6 da 3.8, e negligenciando-se os termos de ordem superior, deriva-se

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{o_j}} dx_{o_j}, \quad (3.10)$$

a qual pode ser escrita na forma compacta como

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t) d\mathbf{x}_o, \quad (3.11)$$

com

$$F(\mathbf{x}_o, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{o_j}}, \quad (3.12)$$

ou

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}_o), \quad (3.13)$$

com \mathbf{F} sendo denotado como gradiente da função deformação.

Além disso, desde que $\varphi_t(\cdot)$ seja invertível e suave, tem-se

$$d\mathbf{x}_o = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)^{-1} d\mathbf{x}, \quad (3.14)$$

na qual

$$F^{-1}(\mathbf{x}, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}, \quad (3.15)$$

ou, na forma compacta,

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \text{grad} [\varphi_t^{-1}(\mathbf{x})]. \quad (3.16)$$

Decomposição Polar da Deformação

Uma deformação genérica pode ser decomposta em:

a) uma deformação/estiramento puro seguida de uma rotação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (3.17)$$

b) uma rotação pura seguida de uma deformação/estiramento puro:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (3.18)$$

sendo:

\mathbf{R} - tensor rotação;

\mathbf{U} e \mathbf{V} - tensores alongações (estiramentos) direito e esquerdo respectivamente.

Em pequenas deformações (escopo inicial do presente trabalho), as deformações são combinadas por adição, i.e., tem-se uma decomposição aditiva. Já em grandes deformações, duas deformações devem ser combinadas sequencialmente por composição, i.e., tem-se uma decomposição multiplicativa.

Do teorema da decomposição polar no qual os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são calculados a partir dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} chamados tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo, tem-se

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (3.20)$$

3.2.2 Leis de Conservação

Conservação da Massa

A massa de um corpo \mathcal{B} é dada, na configuração inicial, como

$$m = \int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o, \quad (3.21)$$

e, na configuração atual, como

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (3.22)$$

Usando a lei de conservação de massa que diz que a massa de um corpo é conservada, obtêm-se

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (3.23)$$

No entanto, do cálculo integral, usando a mudança de variável $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, obtêm-se

$$d\Omega = \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o. \quad (3.24)$$

Como resultado a Eq.3.22 fica

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega_o} \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o. \quad (3.25)$$

Substituindo a Eq.3.25 na Eq.3.23, têm-se

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o, \quad (3.26)$$

ou

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) - \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o = 0. \quad (3.27)$$

Desde que Ω_o seja arbitrário

$$\rho_o(\mathbf{x}_o) = \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)], \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ e tempo } t. \quad (3.28)$$

Denotando

$$J = \det[\mathbf{F}], \quad (3.29)$$

pode-se reescrever a Eq.3.28 como

$$\rho_o(\mathbf{x}_o) = \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) J(\mathbf{x}_o, t). \quad (3.30)$$

Conservação do Momento Linear

As forças que agem sobre um corpo são:

- Forças de corpo $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, força por unidade de massa

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (3.31)$$

- Forças de superfície $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, devido às trações externas prescritas e às reações nos vínculos

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (3.32)$$

com

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dA = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA. \quad (3.33)$$

A lei de conservação do momento linear diz que as forças que agem sobre um corpo em um instante são iguais à taxa do momento linear do corpo, no mesmo instante t . Fazendo uso dessa lei e das definições feitas nas Eqs.3.31-3.33, chega-se à seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (3.34)$$

Usando o teorema da divergência, obtêm-se

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)] d\Omega. \quad (3.35)$$

Além disso, sabe-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{x}} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} d\Omega. \quad (3.36)$$

Então, substituindo as Eqs.3.35 e 3.36 na Eq.3.34, deriva-se

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)] d\Omega = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (3.37)$$

como conseqüência

$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\mathbf{x}}] d\Omega = 0. \quad (3.38)$$

Agora, desde que Ω seja arbitrário, tem-se que

$$\rho \mathbf{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{for } \forall \quad \vec{x} \in \Omega \text{ e tempo } t. \quad (3.39)$$

que é denominada como equação de equilíbrio.

3.2.3 Definição do 1º Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff

A equação de equilíbrio do movimento, Eq.3.39, é definido na configuração atual, i.e., em Ω . Esta equação pode ser descrita de forma análoga na configuração de referência pelo uso do 1º tensor tensão de Piola Kirchhoff, denotado como \mathbf{P} .

O 1º tensor tensão de Piola Kirchhoff \mathbf{P} dá a força atual $d\mathbf{f}$ sobre um elemento de área deformada dA . Mas este é calculado por unidade de área de um elemento de área indeformada

dA_o e expressa a força em termos da normal \mathbf{n}_o para dA_o em \mathbf{x}_o , como mostra a Fig.3.4. Assim,

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA. \quad (3.40)$$

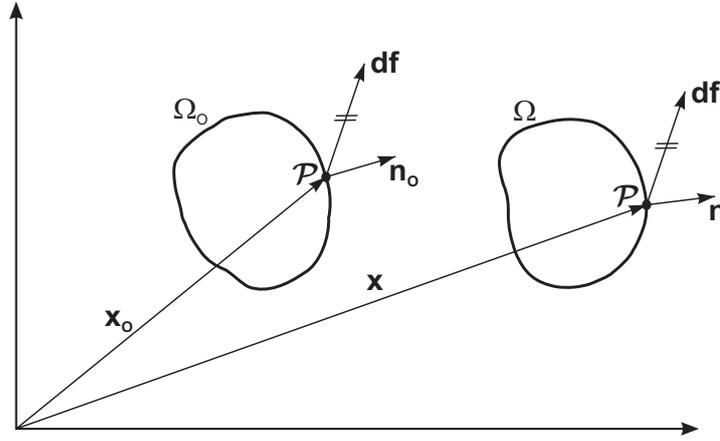


Figura 3.4: Aplicação do vetor tração nas configurações de referência e atual.

Usando a relação entre os vetores normais na configuração de referência e atual, dada por

$$\mathbf{n} dA = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o, \quad (3.41)$$

tem-se

$$\mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o, \quad (3.42)$$

ou

$$[\mathbf{P} - \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{n}_o dA_o = 0, \quad (3.43)$$

sendo que esta relação é válida para qualquer elemento de área, implicando em

$$\mathbf{P} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.44)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (3.45)$$

3.2.4 Equação de Equilíbrio na configuração de Referência

A equação de movimento definida na configuração de referência é derivada da condição de que a soma das forças agindo sobre um corpo na configuração atual Ω , a qual inicialmente ocupa Ω_o em $t = 0$, é igual à taxa de momento linear no instante t . Assim, na configuração atual Ω , tem-se

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dA = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (3.46)$$

em que $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ é a tração aplicada no contorno $\partial\Omega$.

Pode-se notar que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dA, \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o, \\ &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o.\end{aligned}\quad (3.47)$$

e que

$$\rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o. \quad (3.48)$$

Além disso, a força de corpo, por unidade de massa, pode ser expressa, na configuração de referência, como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t). \quad (3.49)$$

Considerando a mudança de variável $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, a equação do momento linear pode ser reescrita na configuração de referência como

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o + \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o = \int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o. \quad (3.50)$$

Agora, aplicando o teorema da divergência, tem-se

$$\int_{\Omega_o} \{ \rho_o(\mathbf{x}_o) \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t) + \text{div} [\mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t)] - \rho_o(\mathbf{x}_o) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_o, t) \} d\Omega_o = 0. \quad (3.51)$$

Desde que este resultado valha para qualquer corpo e sabendo-se que $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}$, deriva-se

$$\text{div} [\mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t)] + \rho_o(\mathbf{x}_o) \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t) = \rho_o(\mathbf{x}_o) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_o, t), \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ e tempo } t. \quad (3.52)$$

A representação em componentes da equação de equilíbrio é dada por

$$\frac{\partial P_{IJ}}{\partial \mathbf{x}_{o,J}} + \rho_o b_{oI} = \rho_o \ddot{u}_I, \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ e tempo } t. \quad (3.53)$$

Neste ponto é importante notar que, apesar do tensor tensão de Cauchy ser simétrico, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, o 1º tensor tensão de Piola-Kirchhoff não é simétrico, i.e. $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$.

3.3 Formulação Lagrangeana do Modelo de Deformação Finita

Considerando a configuração Ω_o , no instante t_o , pode-se definir o contorno do domínio como $\partial\Omega_o$ contendo uma região sujeita a uma tração prescrita, denominada como Γ_o^t , e uma região submetida a um deslocamento prescrita, denominada definida como Γ_o^u , em que $\partial\Omega_o = \Gamma_o^u \cup \Gamma_o^t$ e $\Gamma_o^u \cap \Gamma_o^t = \emptyset$, como ilustrado na Fig.3.5. Define-se também que

$$\Gamma^u = \boldsymbol{\varphi}_t(\Gamma_o^u) \quad \text{e} \quad \Gamma^t = \boldsymbol{\varphi}_t(\Gamma_o^t). \quad (3.54)$$

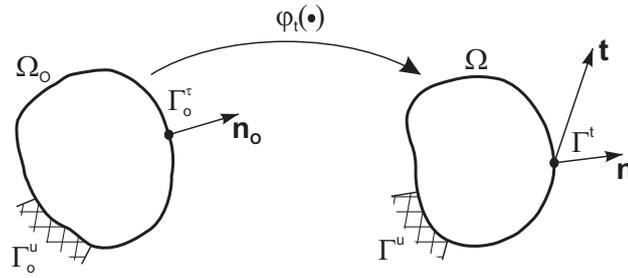


Figura 3.5: Definição dos contornos do problema.

A função de deformação $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t) = \varphi_t(\mathbf{x}_o) \quad \therefore \quad \mathbf{x}_o = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), \quad (3.55)$$

assim, com o auxílio da Fig.3.6, pode-se definir o campo de deslocamento como

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) + \mathbf{x}_o \quad \therefore \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o = \varphi_t(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o. \quad (3.56)$$

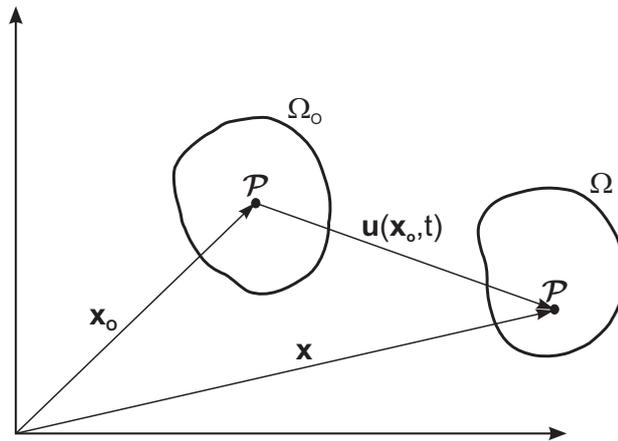


Figura 3.6: Definição do campo de deslocamento.

Agora, para cada instante $t \in [0, t_f]$, pode-se definir os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_o &= \{ \mathbf{u}_o : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid u_{o_i} \in W_s^1, \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o) \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \}, \\ \mathcal{V}_o &= \{ \hat{\mathbf{v}} : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{v}_i \in W_s^1, \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o) = 0 \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \}, \end{aligned}$$

para s suficientemente grande e com $\mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o)$ em $\mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$.

3.3.1 Formulação Forte do Problema

A forma forte do problema na configuração de referência, usando as Eqs.3.52 e 3.47 e considerando um problema quase estático, pode ser formulada como:

Para cada $t \in [0, t_f]$ determinar $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t)$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t) = 0 \quad \text{em } \Omega_o, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) \quad \text{em } \Gamma_o^t, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o) \quad \text{em } \Gamma_o^u. \quad (3.59)$$

Nota-se que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t)$ em $\mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$.

3.3.2 Formulação Fraca do Problema

Perturbando a Eq.3.57 de um valor de $\hat{\mathbf{v}}$ e realizando algum algebrismo tem-se a seguinte forma fraca para o problema na configuração de referência:

Determinar $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \mathcal{K}_o$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_o. \quad (3.60)$$

Pode-se fazer ainda, para cada $t \in [0, t_f]$, a seguinte definição

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o. \quad (3.61)$$

Então, o problema pode ser colocado na seguinte forma:

Determinar $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \mathcal{K}_o$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_o.} \quad (3.62)$$

3.4 Formulação Incremental

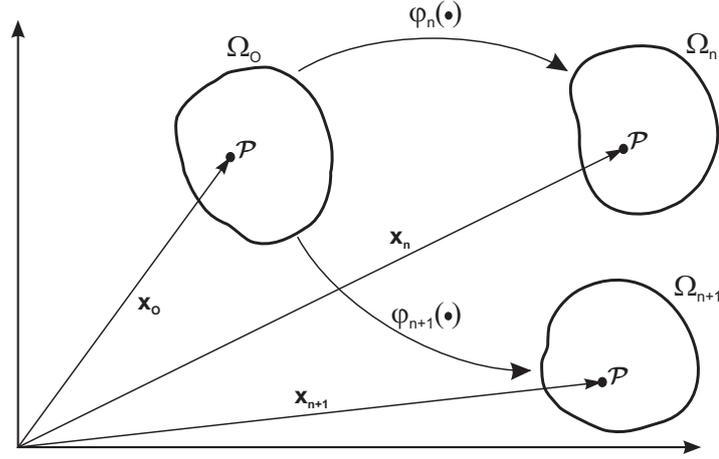
Na formulação incremental é feita uma partição do tempo e os campos de deslocamento são avaliados nos instantes t_n e t_{n+1} , conforme mostra a Fig.3.7, no qual será avaliado o problema. Portanto é conveniente representar os campos de deslocamento pelas seguintes formas

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n) &= \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_o & \rightarrow & \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n), \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}) &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_o & \rightarrow & \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}), \end{aligned}$$

assim, tomando as derivadas dos campos de deslocamento e redefinindo os termos, tem-se

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_n. \quad (3.64)$$


 Figura 3.7: Corpo nos instantes t_n e t_{n+1} .

Considera-se que a configuração e as variáveis de estado são conhecidas em Ω_n . Portanto, para um procedimento implícito, as equações de equilíbrio são impostas em Ω_{n+1} . Assim, em t_{n+1} , a forma fraca incremental do problema pode ser colocada como:

Encontrar $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{K}_o$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_o, \quad (3.65)$$

com

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o. \quad (3.66)$$

3.4.1 Método de Newton

O problema acima é não-linear, portanto, o método de Newton será usado para resolvê-lo. Como o método de Newton é um método iterativo, é necessário a especificação de um valor inicial. O valor inicial, a ser utilizado para a determinação de \mathbf{u}_{n+1} , será considerado como sendo o último valor incremental convergido de \mathbf{u} , i.e., \mathbf{u}_n . Assim

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad k = 0, \quad (3.67)$$

em que k denota a iteração do processo no método de Newton. Continuando, a atualização de \mathbf{u} , na k -ésima iteração, será

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k. \quad (3.68)$$

Com o objetivo de determinar $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ impõe-se que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_o. \quad (3.69)$$

Agora, considerando $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$ como sendo suficientemente suave

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3.70)$$

pode-se expandir $\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}})$ em série de Taylor em \mathbf{u}_{n+1}^k

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) \simeq \mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) + D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] \quad (3.71)$$

em que os termos de ordem superior são desprezados. Finalmente, usando as Eqs.3.69 e 3.71, chega-se ao seguinte resultado

$$\boxed{D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = -\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}})}. \quad (3.72)$$

Usando a definição tem-se

$$D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) \right] \right|_{\epsilon=0}. \quad (3.73)$$

Resolvendo a Eq. 3.73 obtêm-se, finalmente, a seguinte expressão

$$D\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \nabla(\Delta\mathbf{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla\hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o \quad (3.74)$$

com

$$\left[\mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k}. \quad (3.75)$$

3.4.2 Determinação do Módulo Tangente Global \mathbb{A}

Inicialmente define-se $\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}_o, t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t)$, que é a representação material do tensor de Cauchy, que é definido essencialmente na configuração espacial e $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_o, t) = J(\mathbf{x}_o, t)\boldsymbol{\sigma}_m$ que é o chamado tensor tensão de Kirchhoff. Assim

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) = J(\mathbf{x}_o, t)\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}_o, t)\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}_o, t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_o, t)\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}_o, t),$$

o que resulta em

$$\left[\mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \right]_{ijkl} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (\tau_{ip} F_{jp}^{-1}) = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} + \tau_{ip} \frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}}. \quad (3.76)$$

Como

$$\frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}} = -F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}, \quad (3.77)$$

o módulo tangente global fica

$$\left[\mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \right]_{ijkl} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (3.78)$$

A determinação do módulo tangente global \mathbb{A} requer a avaliação da derivada do tensor tensão de Kirchhoff com relação ao tensor gradiente de deformação. Para isso deve-se usar o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, que é definido como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R})^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}, \quad (3.79)$$

ou, de forma inversa

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{R})^T. \quad (3.80)$$

Como resultado, usando a regra da cadeia, obtêm-se

$$\frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial R_{im}}{\partial F_{kl}} \bar{\tau}_{ms} R_{ps} + R_{im} \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} R_{ps} + R_{im} \bar{\tau}_{ms} \frac{\partial R_{ps}}{\partial F_{kl}}, \quad (3.81)$$

ou, em forma compacta

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.82)$$

Definido-se

$$\tilde{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}}, \quad (3.83)$$

tem-se

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \tilde{\mathbb{D}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.84)$$

A determinação de $\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{F}}$ é finalmente obtida pela utilização da decomposição polar de \mathbf{F} .

3.5 Modelo Viscoelástico

3.5.1 Medidas de Tensão

O teorema do trabalho conjugado, colocado por [15], diz que a taxa de trabalho por unidade de massa é invariante. Assim

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2\rho_o} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}}) \quad (3.85)$$

em que cada um dos pares de tensão e deformação usados para calcular a taxa de trabalho por unidade de massa são chamados de pares conjugados. Na equação acima foram usadas as seguintes definições

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t), \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t) \\ &\text{e} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}_m = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t). \end{aligned}$$

Usando a Eq.3.80, obtêm-se

$$\frac{1}{\rho_o} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}), \quad (3.86)$$

com

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}. \quad (3.87)$$

e

$$\mathbf{E} = \ln(\mathbf{U}). \quad (3.88)$$

Forma Não-Rotacionada do Modelo Constitutivo

Para encontrar a forma não-rotacionada do modelo constitutivo, na qual define-se o tensor rotação $\mathbf{\Lambda}(t)$, deve-se resolver o seguinte problema de valor inicial:

Dado $\mathbf{\Omega}(t)$, encontrar $\mathbf{\Lambda}(t)$, solução de:

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}(t) \mathbf{\Lambda}(t)^T = \mathbf{\Omega}(t), \quad (3.89)$$

ou

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}(t) = \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{\Lambda}(t), \quad (3.90)$$

com

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{I}. \quad (3.91)$$

Neste modelo proposto, considera-se que

$$\mathbf{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}(t)^T, \quad (\text{tensor anti-simétrico}) \quad (3.92)$$

o que permite, por simples observação, verificar que a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{R}(t). \quad (3.93)$$

Define-se, então, a forma não rotacionada de um vetor \mathbf{v} , de um tensor \mathbf{A} , e de um tensor de quarta ordem \mathbb{D} como

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{v}(t), \quad (3.94)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{A}(t) \mathbf{\Lambda}(t), \quad (3.95)$$

$$\bar{\mathbb{D}}(t) = \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbb{D}(t) \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{\Lambda}(t), \quad (3.96)$$

e, da mecânica do contínuo obtêm-se que

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{F}(t), \quad (3.97)$$

$$\bar{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{D}(t) \mathbf{\Lambda}(t). \quad (3.98)$$

A forma não-rotacionada, a qual usa a quantidade $\mathbf{\Lambda}(t)$, é usada para definir um sistema de trabalho conveniente para realizar a integração do modelo constitutivo.

Agora, como

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}, \quad (3.99)$$

e

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}, \quad (3.100)$$

pode-se concluir que

$$\bar{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.101)$$

Seguindo as definições anteriores, a forma não rotacionada do tensor tensão de Kirchhoff fica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t)^T \boldsymbol{\tau}(t) \boldsymbol{\Lambda}(t), \quad (3.102)$$

e, pode-se mostrar que

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t)^T \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}}(t) \boldsymbol{\Lambda}(t), \quad (3.103)$$

em que $\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}}$ denota a taxa de Green-Naghdi do tensor tensão de Kirchhoff, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{R} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}) \right\} \mathbf{R}^T, \\ &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

com

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T. \quad (\text{tensor anti-simétrico}) \quad (3.105)$$

A equação constitutiva hipoeelástica, para um material elástico na forma não-rotacionada, pode ser escrita como

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbb{D}} \bar{\mathbf{D}}, \quad (3.106)$$

a qual, usando a Eq.3.101, pode ser reescrita

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbb{D}} \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.107)$$

Agora, com as Eqs.3.103 e 3.106, chega-se a

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Lambda} \{ \bar{\mathbb{D}} \bar{\mathbf{D}} \} \boldsymbol{\Lambda}^T,$$

o que leva, assumido material isotrópico $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D}$, ao seguinte resultado

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D} \mathbf{D}, \quad (3.108)$$

o que prova que as relações das Eqs.3.107 e 3.108, que são equivalentes, são invariantes ao observador.

3.5.2 Modelo Visco-hipoeelástico Finito

Neste trabalho as medidas usadas para definição do modelo serão: o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ e o tensor deformação logarítmica Lagrangiana \mathbf{E} , as quais são definidas na configuração de referência Ω_o e formam um par conjugado, como pode ser visto em Eq.3.86.

A relação constitutiva linear, como pode ser visto no capítulo anterior, é

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbb{D}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t - \xi) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi) d\xi.$$

A fim de gerar um modelo viscoelástico não linear será usada a equação acima trocando as medidas de tensão e deformação e passando a mesma para a configuração não-rotacionada, a qual foi definida anteriormente. Portanto, o modelo, adequado para problemas com grandes deslocamentos, fica definido por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \bar{\mathbb{D}}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \bar{\mathbb{D}}(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi, \quad (3.109)$$

a qual, considerando um material isotrópico, em que $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D}$, pode ser reescrita como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi. \quad (3.110)$$

Como foi usada a hipótese de isotropia, pode-se dividir a equação acima

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = 2G(t)\mathbf{E}^d(0) + \int_0^t 2G(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}^d(\xi) d\xi + \left\{ K(t)e(0) + \int_0^t K(t - \xi)\dot{e}(\xi) d\xi \right\} \mathbf{I}, \quad (3.111)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^d(\cdot) &\equiv \mathbb{I}_{dev}\mathbf{E}(\cdot), \\ \dot{\mathbf{E}}^d(\cdot) &\equiv \mathbb{I}_{dev}\dot{\mathbf{E}}(\cdot), \\ &e \\ e(\cdot) &\equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}(\cdot) = tr[\mathbf{E}(\cdot)], \\ \dot{e}(\cdot) &\equiv \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{E}}(\cdot) = tr[\dot{\mathbf{E}}(\cdot)]. \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{E}^d(t)$ e $e(t)$ as partes deviatória e volumétrica, respectivamente, do tensor de deformação logarítmica \mathbf{E} e $\dot{\mathbf{E}}^d(t)$ e $\dot{e}(t)$ as partes deviatória e volumétrica do tensor taxa de deformação logarítmica $\dot{\mathbf{E}}$.

Denotando

$$\bar{p}(t) = K(t)e(0) + \int_0^t K(t - \xi)\dot{e}(\xi)d\xi, \quad (3.112)$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = 2G(t)\mathbf{E}^d(0) + \int_0^t 2G(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}^d(\xi)d\xi, \quad (3.113)$$

o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado pode ser reescrito como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \bar{p}(t)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{S}}(t), \quad (3.114)$$

em que $\bar{p}(t)$ denota a parte hidrostática do tensor tensão e $\bar{\mathbf{S}}(t)$ a parte deviatória, e são dados por

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{3}tr[\bar{\boldsymbol{\tau}}(t)], \quad (3.115)$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = \mathbb{I}_{dev}\bar{\boldsymbol{\tau}}(t). \quad (3.116)$$

Serão utilizadas novamente as séries de Prony para definir o comportamento dos módulos de cisalhamento e do "bulk modulus", os quais são definidos como

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^G}\right), \quad (3.117)$$

$$K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_i^K}\right), \quad (3.118)$$

sendo G_∞ e G_i referentes ao módulo de cisalhamento, K_∞ e K_i ao "bulk modulus" e τ_i^G e τ_i^K os tempos de relaxação para cada termo da série de Prony.

Inclusão do Efeito da Temperatura

Analogamente ao que foi feito no capítulo anterior será usado o princípio da superposição do tempo-temperatura para descrever a dependência da temperatura no modelo, o qual, lembrando, para usá-lo o material deve ser termoreologicamente simples e não devem existir grandes gradientes de temperatura. Assim, a Eq. 3.111, com efeito da temperatura, fica

$$\bar{\tau}(t) = 2G(\varrho(t))\mathbf{E}^d(0) + \int_0^t 2G(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{\mathbf{E}}^d d\xi \quad (3.119)$$

$$+ \left\{ K(\varrho(t))e(0) + \int_0^t K(\varrho(t) - \varrho(\xi))\dot{e}(\xi) d\xi \right\} \mathbf{I}, \quad (3.120)$$

sendo que $\varrho(\cdot)$ é o tempo de redução e é definido como

$$\varrho(t) = \int_0^t \frac{1}{A_T(\varrho(s))} ds, \quad (3.121)$$

em que $A_T(\cdot)$ é a função deslocamento. A forma usada para função deslocamento, chamada função WLF, é

$$-\log [A_T(T(t))] = \frac{C_1(T(t) - T_0)}{C_2 + (T(t) - T_0)}, \quad (3.122)$$

sendo C_1 e C_2 são constantes materiais e T_0 a temperatura na qual foram avaliadas as constantes.

As funções de relaxação $K(t)$ e $G(t)$, definidas nas Eqs.3.117 e 3.118, podem ser reescritas, obtendo-se

$$G(\varrho(t) - \varrho(\xi)) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^G}\right), \quad (3.123)$$

e

$$K(\varrho(t) - \varrho(\xi)) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^K}\right). \quad (3.124)$$

Introduzindo as Eqs.3.123 e 3.124 na Eq.3.119, onde novamente foram usadas as definições

feitas anteriormente para $\bar{p}(t)$ e $\bar{\mathbf{S}}(t)$, tem-se

$$\bar{p}(t) = K_\infty e(t) + K_s e(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^K}\right) \right\} \dot{e}(\xi) d\xi, \quad (3.125)$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = 2G_\infty \mathbf{E}^d(t) + 2G_s \mathbf{E}^d(0) + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\xi)}{\tau_i^G}\right) \right\} \dot{\mathbf{E}}^d(\xi) d\xi, \quad (3.126)$$

com

$$K_s = \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^K}\right), \quad (3.127)$$

$$G_s = \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t)}{\tau_i^G}\right). \quad (3.128)$$

3.5.3 Determinação do Tensor Tensão de Kirchhoff Rotacionado

O tensor tensão de Kirchhoff rotacionado $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ no instante $n+1$, pode ser representado como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{p}_{n+1} \mathbf{I} + \bar{\mathbf{S}}_{n+1}, \quad (3.129)$$

Determinação da parte deviatórica da tensão

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = 2G_\infty \mathbf{E}^d(t) + 2G_s \mathbf{E}^d(0) + \sum_{i=1}^{n_G} \int_0^t \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (3.130)$$

Inicialmente, pode-se definir

$$\bar{\mathbf{S}}(t)^{(\infty)} = 2G_\infty \mathbf{E}^d(t), \quad (3.131)$$

$$\bar{\mathbf{S}}(t)^{(0)} = 2G_s \mathbf{E}^d(0), \quad (3.132)$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}(t)^{(i)} = \int_0^t \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (3.133)$$

assim

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = \bar{\mathbf{S}}(t)^{(\infty)} + \bar{\mathbf{S}}(t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{\mathbf{S}}(t)^{(i)}. \quad (3.134)$$

Deste modo, no instante t_{n+1} ,

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1} = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(\infty)} + \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)}, \quad (3.135)$$

em que

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(\infty)} = 2G_{\infty} \mathbf{E}_{n+1}^d, \quad (3.136)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(0)} = 2G_s \mathbf{E}_0^d, \quad (3.137)$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho(t_{n+1}) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (3.138)$$

Realizando uma mudança de variável dada por

$$\varrho = \varrho(\bar{s}) \quad \text{or} \quad \bar{s} = \bar{s}(\varrho), \quad (3.139)$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \bar{s}} d\bar{s} = \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{d\bar{s}} d\bar{s}, \quad (3.140)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho} d\varrho, \quad (3.141)$$

pode-se reescrever a Eq.3.138 da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho. \quad (3.142)$$

Pode-se expressar $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)}$ como

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho \quad (3.143)$$

$$+ \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho. \quad (3.144)$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ e $\varrho_{n+1} = \varrho(t_{n+1})$, tem-se

$$\varrho_{n+1} = \varrho_n + \Delta \varrho_n, \quad (3.145)$$

assim, pode-se computar o valor de $\Delta \varrho_n$ pela integração da equação acima, obtendo-se

$$\Delta \varrho_n = \varrho_{n+1} - \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt. \quad (3.146)$$

Usando a Eq.3.145, pode-se chegar a

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} &= \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G} \right) \int_0^{\varrho_n} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho \\ &+ \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G} \right) \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^d}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho. \end{aligned} \quad (3.147)$$

ou, reconhecendo o primeiro termo da equação anterior

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)\bar{\mathbf{S}}_n^{(i)} + \\ &\exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}}\left\{2G_i\exp\left(-\frac{\varrho_n-\varrho}{\tau_i^G}\right)\right\}\frac{\partial\mathbf{E}^d}{\partial\varrho}(\varrho)d\varrho.\end{aligned}\quad (3.148)$$

A determinação da integral Eq.3.148 pode ser feita aproximadamente pela aplicação da regra do ponto médio. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}}\left\{2G_i\exp\left(-\frac{\varrho_n-\varrho}{\tau_i^G}\right)\right\}\frac{\partial\mathbf{E}^d}{\partial\varrho}(\varrho)d\varrho &\simeq 2G_i\exp\left(-\frac{\varrho_n-\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}}\frac{\partial\mathbf{E}^d}{\partial\varrho}(\varrho)d\varrho \\ &= 2G_i\exp\left(-\frac{\varrho_n-\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\Delta\mathbf{E}_n^d,\end{aligned}\quad (3.149)$$

em que

$$\Delta\mathbf{E}_n^d = \mathbf{E}_{n+1}^d - \mathbf{E}_n^d. \quad (3.150)$$

Definindo $\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho(t_{n+\frac{1}{2}})$, tem-se

$$\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho_n + \Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.151)$$

concluindo-se que

$$\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \varrho_{n+\frac{1}{2}} - \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}}\frac{1}{A_T(T(t))}dt. \quad (3.152)$$

- Substituindo 3.149 em 3.148 obtêm-se

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)\bar{\mathbf{S}}_n^{(i)} + \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)2G_i\exp\left(\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\Delta\mathbf{E}_n^d. \quad (3.153)$$

ou, rearranjando o segundo termo

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)\bar{\mathbf{S}}_n^{(i)} + 2G_i\exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\Delta\mathbf{E}_n^d. \quad (3.154)$$

Os resultados acima podem ser resumidos no seguinte quadro

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta\varrho_n}{\tau_i^G}\right)\bar{\mathbf{S}}_n^{(i)} + 2G_i\exp\left(-\frac{\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\Delta\mathbf{E}_n^d,$$

com

$$\Delta\varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}}\frac{1}{A_T(T(t))}dt,$$

e

$$\Delta\varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{1}{A_T(T(t))}dt.$$

Determinação da parte hidrostática da tensão.

$$\bar{p}(t) = K_\infty e(t) + K_s e(0) + \sum_{i=1}^{n_K} \int_0^t \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (3.155)$$

Definindo

$$\bar{p}(t)^{(\infty)} = K_\infty e(t), \quad (3.156)$$

$$\bar{p}(t)^{(0)} = K_s e(0), \quad (3.157)$$

e

$$\bar{p}(t)^{(i)} = \int_0^t \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (3.158)$$

obtêm-se a seguinte relação

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(t)^{(\infty)} + \bar{p}(t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_K} \bar{p}(t)^{(i)}. \quad (3.159)$$

Deste modo, no instante t_{n+1}

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_{n+1}^{(\infty)} + \bar{p}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_K} \bar{p}_{n+1}^{(i)}, \quad (3.160)$$

em que

$$\bar{p}_{n+1}^{(\infty)} = K_\infty e_{n+1}, \quad (3.161)$$

$$\bar{p}_{n+1}^{(0)} = K_s e_0, \quad (3.162)$$

e

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = \int_0^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (3.163)$$

Nota-se que $\bar{p}_{n+1}^{(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1}^{(i)} &= \int_0^{t_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s} \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho(t) - \varrho(\bar{s})}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \bar{s}}(\bar{s}) d\bar{s}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Usando a Eq.3.145, tem-se

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) p_n^{(i)} + \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho, \quad (3.165)$$

com

$$p_n^{(i)} = \int_0^{\varrho_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{\varrho_n - \varrho}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho. \quad (3.166)$$

A determinação da integral na Eq.3.165 pode ser feita aproximadamente pela aplicação da regra do ponto médio. Neste caso, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K} \right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho &\simeq K_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K} \right) \int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi, \\ &= K_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K} \right) \Delta e_n. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Usando a Eq.3.151 deriva-se

$$\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n+1}} \left\{ K_i \exp \left(-\frac{\varrho_{n+1} - \varrho}{\tau_i^K} \right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \varrho}(\varrho) d\varrho \simeq K_i \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K} \right) \Delta e_n. \quad (3.168)$$

Substituindo a Eq.3.168 na Eq.3.165 obtêm-se

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K} \right) \bar{p}_n^{(i)} + K_i \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K} \right) \Delta e_n. \quad (3.169)$$

Os resultados acima podem ser resumidos no seguinte quadro

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K} \right) \bar{p}_n^{(i)} + K_i \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K} \right) \Delta e_n,$$

com

$$\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}} = \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt,$$

e

$$\Delta \varrho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{A_T(T(t))} dt.$$

3.6 Derivada da Relação Constitutiva

A derivada da relação constitutiva em relação ao tensor gradiente de deformação $\tilde{\mathbb{D}}$, conforme Eq.3.83, no instante t_{n+1} é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{n+1} &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}, \\ &\text{ou} \\ \tilde{\mathbb{D}}_{mskl} &= \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}}, \end{aligned} \quad (3.170)$$

em que o tensor tensão de Kirchhoff rotacionado, conforme Eq.3.129, é definido como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \mathbf{I} \bar{\mathbf{p}}_{n+1} + \bar{\mathbf{S}}_{n+1}. \quad (3.171)$$

Então, aplicando a regra da cadeia na Eq.3.170, obtêm-se

$$\tilde{\mathbb{D}}_{n+1} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}. \quad (3.172)$$

Para $\frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}$ deriva-se

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = \mathbf{I} \frac{\partial \bar{p}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}. \quad (3.173)$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1} = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(\infty)} + \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)},$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(\infty)} = 2G_\infty \mathbf{E}_{n+1}^d,$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(0)} = 2G_s \mathbf{E}_0^d,$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^G}\right) \bar{\mathbf{S}}_n^{(i)} + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \Delta \mathbf{E}_n^d.$$

e

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_{n+1}^{(\infty)} + \bar{p}_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{p}_{n+1}^{(i)},$$

com

$$\bar{p}_{n+1}^{(\infty)} = K_\infty e_{n+1},$$

$$\bar{p}_{n+1}^{(0)} = K_s e_0,$$

e

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_n}{\tau_i^K}\right) \bar{p}_n^{(i)} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n.$$

A derivada da parte deviatórica da tensão fica

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = 2G_\infty \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^d}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \frac{\partial \Delta \mathbf{E}_n^d}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}, \quad (3.174)$$

com

$$\Delta \mathbf{E}_n^d = \mathbf{E}_{n+1}^d - \mathbf{E}_n^d, \quad (3.175)$$

portanto

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = \left(2G_\infty + 2G_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right)\right) \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^d}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}. \quad (3.176)$$

Agora, relembro que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^d(t) &= \mathbb{I}_{dev} \mathbf{E}(t), \\ &= \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right] \mathbf{E}(t), \end{aligned} \quad (3.177)$$

conclui-se que

$$\frac{\partial E_{ms}^d}{\partial E_{kl}} = \delta_{mk} \delta_{sl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ms} \quad (3.178)$$

Já para a derivada da parte volumétrica tem-se

$$\frac{\partial \bar{p}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = K_\infty \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G}\right) \frac{\partial \Delta e_n}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}, \quad (3.179)$$

com

$$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n, \quad (3.180)$$

então

$$\frac{\partial \bar{p}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = \left(K_\infty + K_i \exp \left(-\frac{\Delta \varrho_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G} \right) \right) \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}. \quad (3.181)$$

Relembrado que

$$\begin{aligned} e(t) &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}(t), \\ &= \text{tr} [\mathbf{E}(t)], \end{aligned} \quad (3.182)$$

chega-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial E_{kl}} &= \frac{\partial E_{rr}}{\partial E_{kl}}, \\ &= \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Para a $\frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}}$ tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \ln(\mathbf{U}_{n+1}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \ln(\mathbf{C}_{n+1}). \quad (3.184)$$

A determinação da derivada acima requer a determinação de uma derivada do tipo $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$. Este tipo de derivada pode ser generalizada e ser vista como uma derivada de uma função isotrópica. A classe de derivadas de funções isotrópicas foi investigada em detalhes por [37] e [27]. Neste trabalho será implementada a proposição apresentada em [27]

3.7 Discretização Espacial do Problema

Resumindo o problema tem-se

Encontrar $\mathbf{u}_{n+1} \in \text{Kin}_o^u$ tal que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_o^u,$$

com

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o.$$

Para resolver o problema aplica-se o método de Newton

O valor inicial é o valor anteriormente convergido

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad k = 0$$

este valor é atualizado

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k.$$

O valor de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ é encontrado resolvendo a equação

$$\int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = -\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}).$$

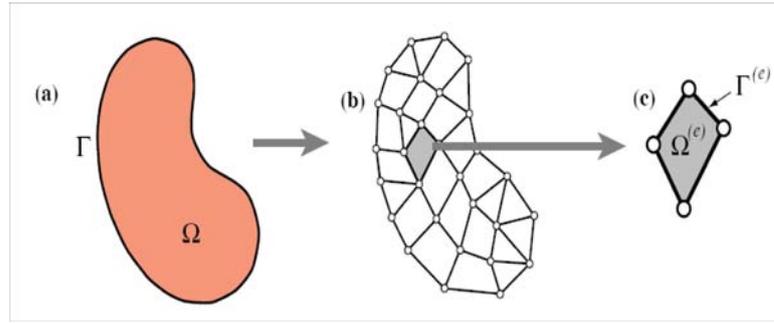


Figura 3.8: Discretização do domínio.

3.7.1 Discretização por Elementos Finitos de Galerkin

A fim de aplicar o método de elementos finitos, é feita uma partição do domínio Ω , em elementos finitos Ω_e .

Como resultado obtém-se

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{oe}, \quad (3.185)$$

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{oe}, \quad (3.186)$$

$$\int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o = \sum_e \int_{\partial\Omega_{oe} \cap \Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_{oe}, \quad (3.187)$$

$$\int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{oe}. \quad (3.188)$$

Adicionalmente, é feita uma interpolação dos campos $\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t)$ e $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o)$ no interior de cada elemento finito Ω_e , da seguinte forma

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t_{n+1}) = [\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)] \mathbf{q}_{n+1}^e, \quad (3.189)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o) = [\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)] \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (3.190)$$

em que

$$(\mathbf{q}_{n+1}^e)^T = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_s, v_s, w_s\}. \quad (3.191)$$

em que \mathbf{q}_{n+1}^e representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento, s o número de nós do elemento e $\{u_i, v_i, w_i, i = 1..s\}$ as componentes nodais do campo de deslocamento. $[\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)]$ é a matriz, de funções de interpolação construídas pelo FEM, que relaciona as componentes do vetor deslocamento com o vetor dos deslocamentos nodais do elemento.

O gradiente de \mathbf{u} , dada a sua discretização espacial, é escrito como

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^s \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} u_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} u_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} u_i \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} v_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} v_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} v_i \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} w_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} w_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} w_i \end{bmatrix}. \quad (3.192)$$

Entretanto, a implementação de tal procedimento é inadequado. Deste modo, é proposto um mapeamento entre a forma matricial de $\nabla \mathbf{u}$ em uma forma vetorial adequada. Este mapeamento é tal que

$$\begin{bmatrix} (\nabla \mathbf{u})_{11} \\ (\nabla \mathbf{u})_{12} \\ (\nabla \mathbf{u})_{13} \\ (\nabla \mathbf{u})_{21} \\ (\nabla \mathbf{u})_{22} \\ (\nabla \mathbf{u})_{23} \\ (\nabla \mathbf{u})_{31} \\ (\nabla \mathbf{u})_{32} \\ (\nabla \mathbf{u})_{33} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^s \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (3.193)$$

Denotando agora

$$\mathbf{G}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3.194)$$

e definindo também

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 | \cdots | \mathbf{G}_s],$$

tem-se

$$\nabla \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{q}_{n+1}^e, \quad (3.195)$$

$$\text{e} \quad (3.196)$$

$$\nabla \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{G} \hat{\mathbf{q}}^e. \quad (3.197)$$

Da mesma forma pode-se escrever o vetor das componentes do 1º tensor tensão de Piola Kirchhoff como

$$\vec{\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.198)$$

Aplicando-se as definições acima na equação 3.185, chega-se à

$$\int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{o_e} = \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_{n+1}^e) d\Omega_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (3.199)$$

em que pode-se definir

$$\mathbf{F}_e^{int} = \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_{n+1}^e) d\Omega_{o_e}. \quad (3.200)$$

Para a equação 3.186, correspondente ao termo de força de corpo, tem-se

$$\int_{\Omega_{o_e}} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{o_e} = \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o \mathbf{N}^T \vec{\mathbf{b}} d\Omega_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (3.201)$$

em que \vec{b} é o vetor correspondente a matriz \mathbf{b} e pode-se definir

$$\mathbf{F}_e^b = \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o \mathbf{N}^T \vec{b} d\Omega_{o_e}. \quad (3.202)$$

Para o termo de carga, equação 3.187, obtêm-se

$$\int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_{o_e} = \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_o^t} \mathbf{N}^T \vec{t} dA_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (3.203)$$

em que \vec{t} corresponde a forma vetorial do matriz \mathbf{t} e pode-se definir

$$\mathbf{F}_e^{\vec{t}} = \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_o^t} \mathbf{N}^T \vec{t} dA_{o_e}. \quad (3.204)$$

Fazendo o mesmo com a equação 3.188, na qual o tensor de quarta ordem \mathbb{A} será mapeado para um tensor de segunda ordem \mathbf{A} , produz-se o seguinte resultado

$$\int_{\Omega_{o_e}} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}) \nabla(\Delta \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_{o_e} = \int_{\Omega_o} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} d\Omega_o \Delta \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \quad (3.205)$$

o qual pode ser definido por

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{\Omega_o} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} d\Omega_o. \quad (3.206)$$

3.7.2 Montagem do Problema Global

Introduzindo o operador união $U_e(\circ)$ e os operadores montagem $A_e(\circ)$ e $\check{A}_e(\circ)$, associados à obtenção de matrizes e vetores globais, pela adição da contribuição de cada elemento finito, pode-se definir as seguintes matrizes e vetores globais:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_{n+1}\} &= U_e \{\mathbf{q}_{n+1}^e\} \quad \text{e} \quad \{\hat{\mathbf{U}}\} = U_e \{\hat{\mathbf{q}}^e\}, \\ \{\mathbf{F}^{int}\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{int}\} \quad \text{e} \quad [\mathbf{K}_T] = A_e [\mathbf{K}_T^e], \\ \{\mathbf{F}^b\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^b\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{\vec{t}}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\vec{t}}\}, \end{aligned} \quad (3.207)$$

o que possibilita o rearranjo discretizado global das equações de equilíbrio

$$[\mathbf{F}^{int}] \cdot \hat{\mathbf{U}} - \{\mathbf{F}^b\} \cdot \hat{\mathbf{U}} - \{\mathbf{F}^{\vec{t}}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{U}}$$

e do método de newton

$$[\mathbf{K}_T] \Delta \mathbf{U}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{U}} = -\{\mathbf{R}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad \forall \hat{\mathbf{U}},$$

podendo-se definir

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{F}^{int}\} - \{\mathbf{F}^{ext}\},$$

com

$$\{\mathbf{F}^{ext}\} = \{\mathbf{F}^b\} + \{\mathbf{F}^{\vec{t}}\}.$$

Portanto, o problema discretizado global fica

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mathbf{U}_{n+1} \in \text{Kin}_o^u, \text{ tal que} \\ &\{\mathbf{F}^{int}\} - \{\mathbf{F}^{ext}\} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in \text{Var}_o^u, \end{aligned}$$

e para o Método de Newton

O valor inicial usado é o valor anterior

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad k = 0$$

este valor é atualizado

$$\mathbf{U}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{U}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^k,$$

O valor de $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^k$ é encontrado resolvendo a equação

$$[\mathbf{K}_T] \Delta \mathbf{U}_{n+1}^k = -\{\mathbf{R}\}.$$

3.8 Conclusões Parciais

Modelos não lineares costumam ser muito mais onerosos computacionalmente do que os lineares. Como a maioria destes problemas é resolvida por métodos numéricos iterativos, o ponto crítico geralmente é o cálculo do valor da correção. No método de Newton o cálculo desta correção leva ao cálculo de uma derivada de um tensor de segunda ordem, obtendo como resultado um tensor de quarta ordem. Quando isto acontece a manipulação dos índices destes tensores exige um maior cuidado, além de que, o número de operações de uma iteração aumenta quase que exponencialmente. Além disso, um mal condicionamento do módulo tangente global pode causar diversos problemas, como o aumento do número de iterações até a convergência ou, até mesmo, a não convergência do problema. Com isso, várias simplificações se fazem necessárias, todas elas visando ganhos computacionais. A teoria usada para descrever a temperatura é um exemplo. No entanto pode-se perder em precisão e no campo de aplicação do modelo. Entretanto, ganha-se em velocidade. Dependendo da situação, quando não se possui muito tempo, isto é totalmente aceitável. Assim, deve-se saber definir qual a necessidade e quais as simplificações que podem ser feitas, para que o modelo não fique muito demorado para analisar e também não perca a precisão.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Introdução

Modelos matemáticos devem ter uma validação para comprovar sua aplicabilidade. Por isso faz-se necessário uma comparação entre seus resultados e outros resultados, estes sendo teóricos, experimentais, numéricos, etc. Para realizar tal tarefa foram implementados os modelos, propostos nos capítulos anteriores, em um código fonte de elementos finitos em linguagem Fortran. Com isso foram gerados resultados que puderam ser comparados. A estratégia usada foi uma comparação de modelos simples evoluindo-se para modelos mais complexos.

O modelo viscoelástico linear foi o primeiro a ser validado. Seus resultados foram comparados aos resultados do software comercial ANSYS. Em seguida, foi testado com problemas mais complexos, visando verificar sua robustez. Para o modelo viscoelástico não-linear, como não se possuía nenhum dado para sua comparação, usou-se os resultados do modelo linear. Foi considerado que se seus resultados deveriam ser iguais para pequenas deformações e divergiram com o aumento das deformações. Continuando, foram testados sua robustez, capacidade de reproduzir fenômenos viscoelásticos e outros aspectos relevantes.

Os valores utilizados para os parâmetros viscoelásticos foram arbitrariamente escolhidos. Isto se deve ao fato de que existe uma dificuldade muito grande em conseguí-los, tanto na literatura quanto experimentalmente. Também, como a principal estratégia foi a comparação entre modelos numéricos, os valores destes parâmetros não foram relevantes.

4.2 Viscoelasticidade Linear

A fim de validar o modelo viscoelástico linear, este foi programado em Fortran e foi comparado com a solução do ANSYS. O programa foi feito usando a hipótese de axisimetria e foi usado um elemento triangular de segunda ordem. Nestes resultados será analisada apenas a fluência do material, que é um fenômeno viscoelástico. Por isso cabe salientar que as forças aplicadas ao longo do tempo são todas constantes.

Inicialmente foi usado um problema simples, apenas para validar o modelo. Quando a solução do modelo convergiu para a solução do ANSYS, passou-se para problemas um pouco

mais sofisticados, com malhas maiores, pontos de concentração de tensão, tipos de carregamentos e vínculos diferentes, etc.

4.2.1 Validação do Modelo Viscoelástico Linear

A estratégia usada para validar o modelo foi, como dito anteriormente, comparar a solução do programa com a solução do ANSYS. Procurou-se um problema o mais simples possível para que se pudesse ter uma noção exata do que estava acontecendo e uma maior facilidade em encontrar e corrigir erros. A Fig.4.1 mostra o problema que foi utilizado.

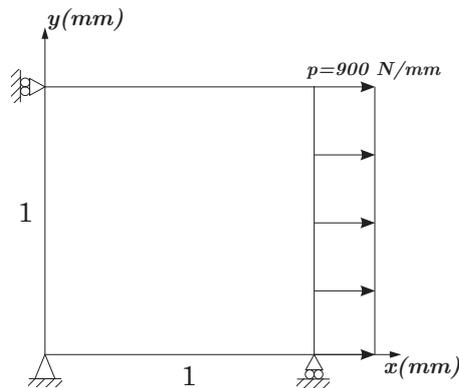


Figura 4.1: Problema usado para validar o programa.

A malha utilizada foi a mais simples possível. A Fig.4.2 mostra a malha e a disposição dos nós. O deslocamento do nó 9 ao longo do tempo será utilizado como variável de comparação na validação.

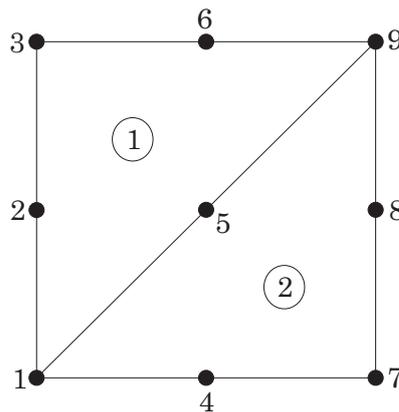


Figura 4.2: Malha utilizada para o problema usado para validar o programa.

As constantes referentes à temperatura foram as seguintes

$$T_0 = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$C_1 = 6,3$$

$$C_2 = 67 \text{ } ^\circ\text{C}$$

A validação foi dividida em três etapas:

- Validação da parte deviatória
- Validação da parte volumétrica
- Validação das partes deviatória e volumétrica

Validação da Parte Deviatória

Primeiramente, fez-se a validação somente da parte deviatória do problema, fazendo a parte volumétrica constante. Para tal, foram utilizados os seguintes dados para o problema

$$\begin{aligned}
 G_{\infty} &= 498 \text{ MPa} & K_{\infty} &= 3365 \text{ MPa} \\
 G_1 &= 565,52 \text{ MPa} & \tau_1^G &= 3837 \text{ s} \\
 G_2 &= 0,05 \text{ MPa} & \tau_2^G &= 6161 \text{ s} \\
 G_3 &= 232,21 \text{ MPa} & \tau_3^G &= 36073 \text{ s} \\
 G_4 &= 146,13 \text{ MPa} & \tau_4^G &= 258970 \text{ s} \\
 G_5 &= 0,08 \text{ MPa} & \tau_5^G &= 342264 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Foram analisados problemas com temperaturas igual, maior e menor que a temperatura de referência. A Fig 4.3 mostra os resultados encontrados. Pode-se verificar que a fluência do material pode ser bem observada, onde tem-se um aumento do deslocamento ao longo do tempo, resultante da aplicação de uma força na forma de degrau em $t = 0 \text{ s}$, a qual foi mantida fixa. Verifica-se que após um certo tempo característico o deslocamento atinge um valor constante.

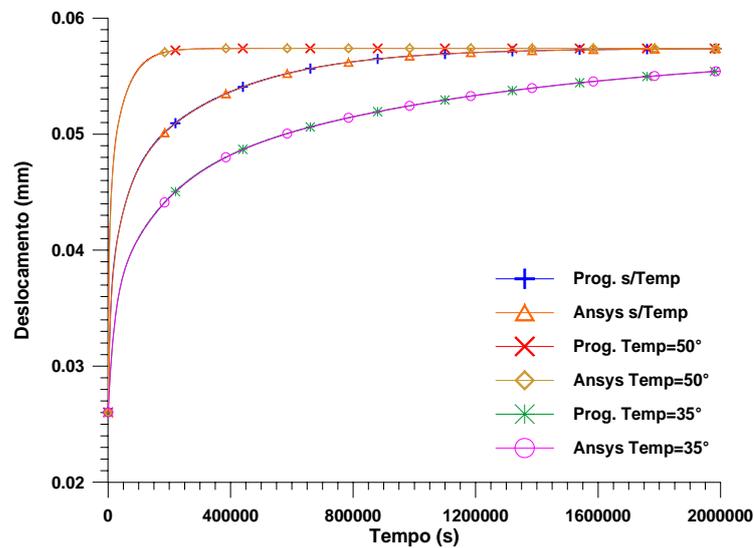


Figura 4.3: Validação da parte deviatória do modelo.

Validação da Parte Volumétrica

Em seguida, houve uma inversão de valores. Agora somente a parte volumétrica foi levada em conta, considerando a parte deviatória constante. A seguir são apresentados os dados utilizados no problema

$$\begin{aligned}
 G_{\infty} &= 498 \text{ MPa} & K_{\infty} &= 3365 \text{ MPa} \\
 K_1 &= 466,25 \text{ MPa} & \tau_1^K &= 40000 \text{ s} \\
 K_2 &= 746 \text{ MPa} & \tau_2^K &= 120000 \text{ s} \\
 K_3 &= 279,75 \text{ MPa} & \tau_3^K &= 100000 \text{ s} \\
 K_4 &= 373 \text{ MPa} & \tau_4^K &= 50000 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Novamente, analisou-se o modelo para temperaturas igual, maior e menor que a temperatura de referência. Os resultados encontrados são demonstrados na Fig. 4.4. Novamente é notada claramente a fluência do material e a tendência a um valor característico.

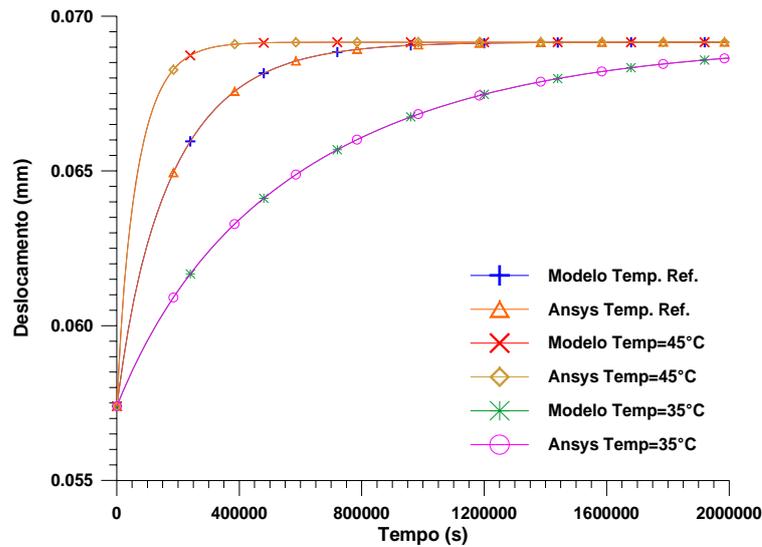


Figura 4.4: Validação da parte volumétrica do modelo.

Validação das Partes Deviatórica e Volumétrica

Finalmente, o modelo foi validado com as duas partes, deviatórica e volumétrica, sendo utilizadas juntas. Os dados deste problema são apresentados a seguir

$$\begin{aligned}
 G_{\infty} &= 498 \text{ MPa} & K_{\infty} &= 3365 \text{ MPa} \\
 G_1 &= 197,61 \text{ MPa} & \tau_1^G &= 36073 \text{ s} \\
 G_2 &= 357,58 \text{ MPa} & \tau_2^G &= 258970 \text{ s} \\
 G_3 &= 385,81 \text{ MPa} & \tau_3^G &= 342264 \text{ s} \\
 K_1 &= 652,75 \text{ MPa} & \tau_1^K &= 400000 \text{ s} \\
 K_2 &= 1212,25 \text{ MPa} & \tau_2^K &= 300000 \text{ s}
 \end{aligned}$$

A Fig. 4.5 mostra os resultados encontrados. Cabe lembrar que foram analisados casos com a temperaturas igual, maior e menor que a temperatura de referência. Neste exemplo os valores encontrados referem-se à combinação das partes deviatórica e volumétrica, ficando óbvio que se a fluência ficou bem caracterizada nas partes deviatórica e volumétrica, individualmente, também devem ser assim quando combinadas, o que pode ser observado.

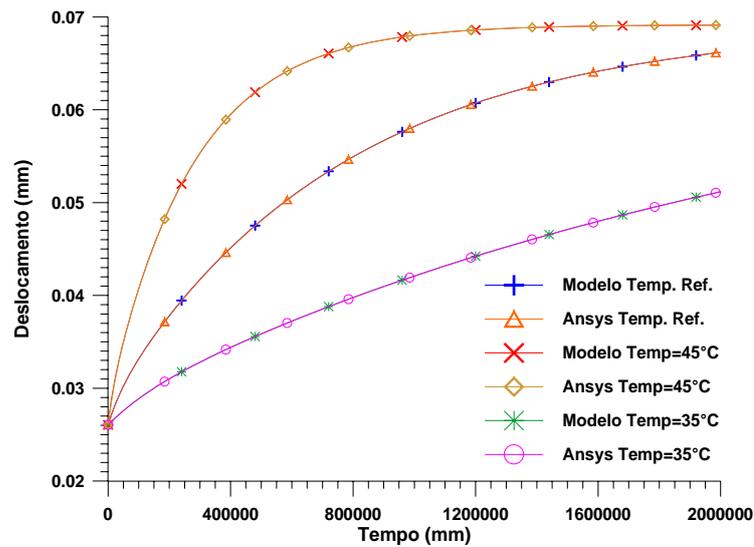


Figura 4.5: Validação das partes de viatória e volumétrica juntas.

4.2.2 Outros Problemas

Com o modelo validado passou-se para testes um pouco mais sofisticados. Estes problemas visam testar a robustez, versatilidade, confiabilidade, dentre outros aspectos do modelo. Os problemas apresentados a seguir buscam representar problemas encontrados em nosso cotidiano, buscando demonstrar assim a utilidade do modelo.

Anel Submetido à Pressão Interna

Considere um anel de seção retangular submetido a uma pressão interna como mostrado na Fig. 4.6. Este anel foi analisado para verificação de sua fluência, portanto o carregamento ilustrado é na forma de degrau. Também, na mesma figura pode-se visualizar a malha utilizada. Neste problema o que se procura verificar é como o modelo funcionaria quando uma malha maior é utilizada. Portanto a geometria ainda continua a ser simples, aumentado-se apenas o número de elementos.

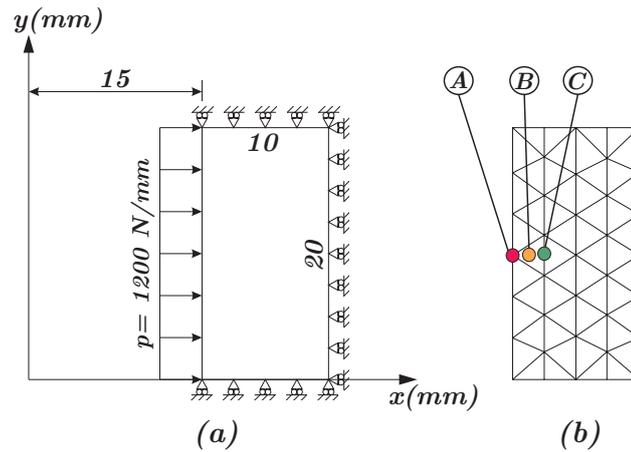


Figura 4.6: Anel submetido à pressão interna.

As constantes referentes à temperatura são as mesmas utilizadas no problema anterior. Quanto aos valores do módulo de cisalhamento e do "bulk modulus", foram os mesmos utilizados para a validação da parte deviatórica do problema.

Como resultado, na Fig. 4.7, pode-se ver como o deslocamento evoluiu no tempo. No tempo $t = +0$ s há uma deformação instantânea, o que já era esperado. Nos instantes iniciais acontece uma maior evolução do deslocamento, enquanto que, já na metade do tempo da análise, praticamente já existe uma convergência de valores, i.e., ocorre a saturação da fluência, ficando o campo de deslocamento estabilizado.

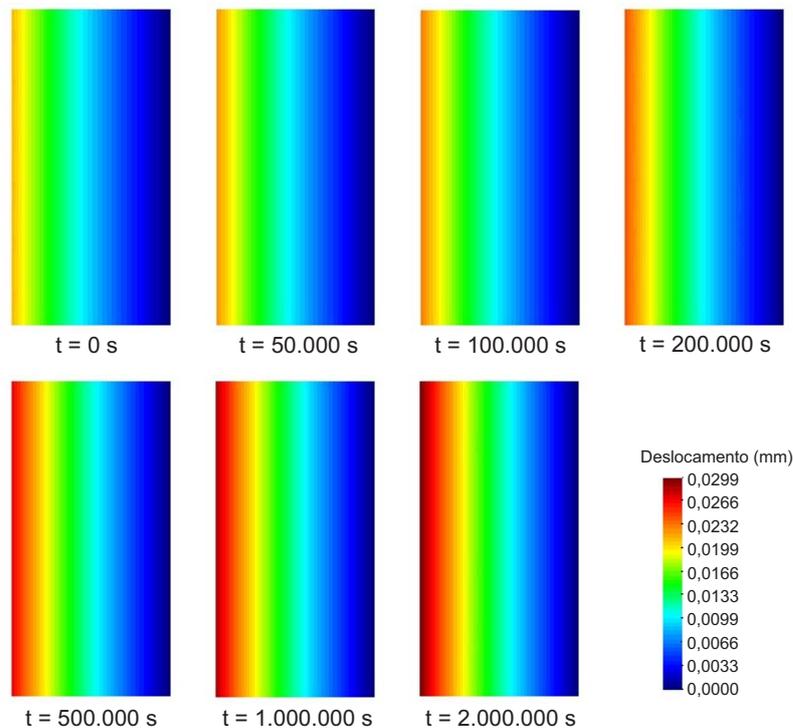


Figura 4.7: Evolução do deslocamento no anel.

O fenômeno apresentado na Fig.4.7 pode ser melhor entendido com a ajuda da Fig. 4.8. Nesta figura são apresentados os deslocamentos referentes aos pontos marcados na malha do anel, conforme pode ser observado na Fig. 4.6. Como na Fig.4.7, pode-se ver um maior crescimento dos valores do deslocamento nos instante iniciais e uma tendência a um certo valor estabilizado no final da análise. Verifica-se também, como esperado, que o campo de deslocamento é homogêneo com relação ao eixo y de axisimetria.

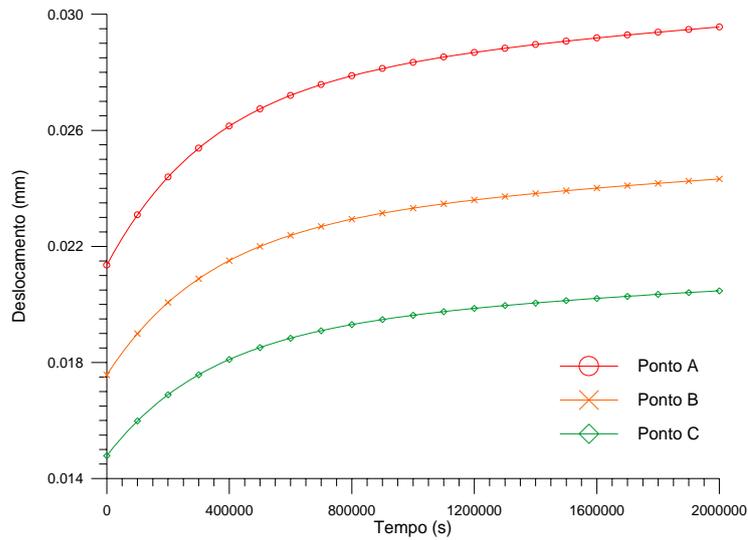


Figura 4.8: Fluência em alguns pontos do anel.

Polia

Este exemplo visa analisar a confiabilidade do modelo quanto a uma geometria mais complexa e a existência de pontos concentradores de tensão. Para tal foram utilizados o modelo e a malha apresentados na Fig. 4.9. Novamente a força ilustrada é na forma de degrau. As constantes referentes à temperatura e aos módulos de cisalhamento e "*bulk modulus*" continuam sendo as mesmas utilizadas no problema anterior.

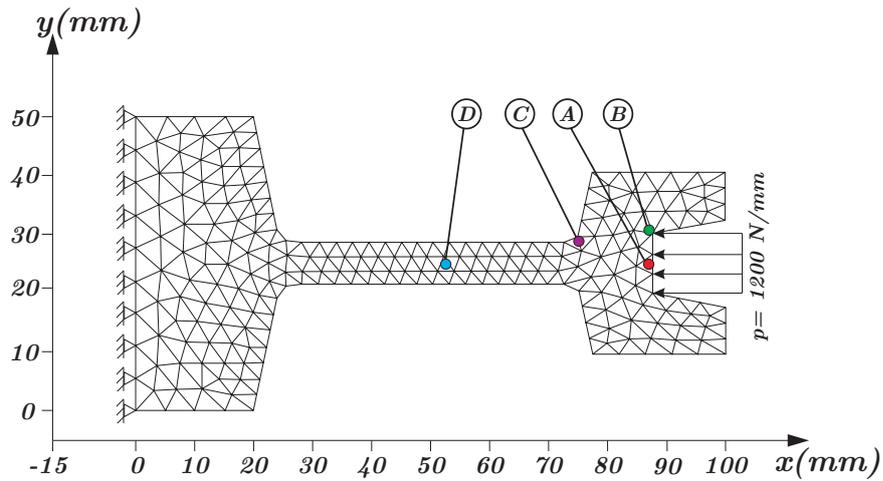


Figura 4.9: Modelo geométrico e malha da polia.

A Fig. 4.10 mostra como fica a polia deformada no instante final da análise. Cabe lembrar que a deformação ilustrada é a do final da análise, sendo que, se retirado o carregamento, pelo modelo matemático utilizado, este tende a retornar à sua configuração inicial.

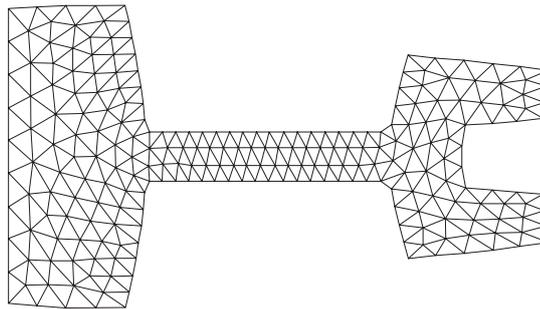


Figura 4.10: Polia deformada.

A mesmas considerações realizadas no problema no anel são pertinentes neste problema. Ocorre uma deformação instantânea no instante $t = +0$ s, seguido de uma deformação ao longo do tempo, que é maior nos instantes iniciais e vai diminuindo seu incremento com o passar do tempo, tendendo a um valor constante, como pode ser observado na Fig. 4.11. Um fato importante é que a partir de instante $t = 1.000.000$ s o valor do deslocamento começa a convergir.

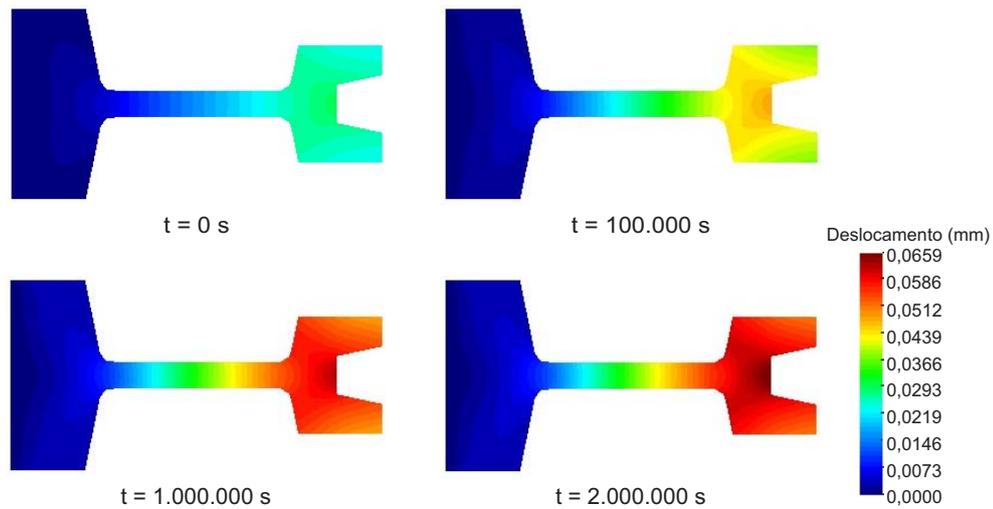


Figura 4.11: Evolução do deslocamento na polia.

Os pontos de concentração de tensão eram os mais preocupantes deste problema. A Fig. 4.12 mostra a fluência nos pontos identificados na Fig. 4.9. Os pontos B e C são pontos localizados onde ocorrem concentrações de tensão. Verifica-se que seu comportamento não é distorcido pela concentração de tensão destas regiões.

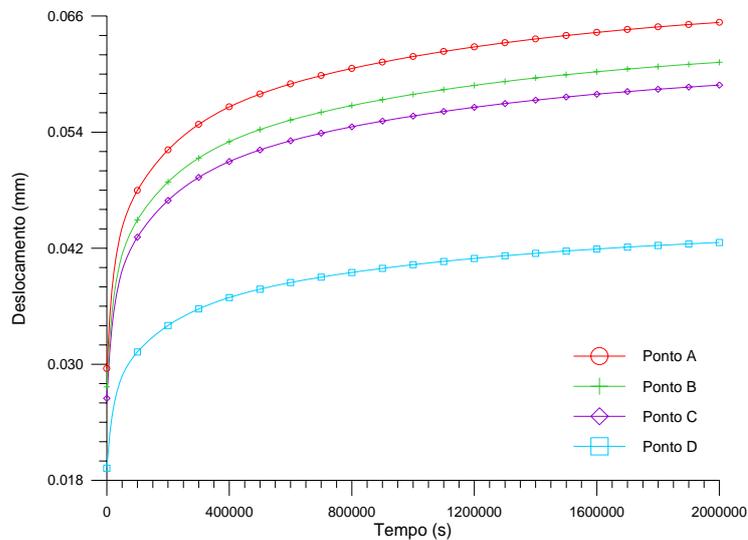


Figura 4.12: Fluência em alguns pontos da polia.

4.3 Viscoelasticidade Não-Linear

Analogamente ao que foi feito para o modelo viscoelástico linear, foi programado em FORTRAN o modelo viscoelástico não-linear. Foram usadas, também, a hipótese de axisimetria e o elemento triangular de segunda ordem. Os carregamentos usados foram configurados de várias formas diferentes, conforme o caso analisado. Os parâmetros viscoelásticos usados foram

$$\begin{aligned} G_{\infty} &= 100 \text{ MPa} & K_{\infty} &= 500 \text{ MPa} \\ G_1 &= 130 \text{ MPa} & \tau_1^G &= 6,3 \text{ s} \end{aligned}$$

4.3.1 Validação do Modelo Viscoelástico Não-Linear

A validação foi realizada usando o mesmo problema e a malha usados para validar o modelo linear, que podem ser vistos nas Fig. 4.1 e 4.2 respectivamente.

Inicialmente foram comparados os resultados do modelo linear, que considerou-se como certo, e o resultado do modelo não-linear. Para este caso foi usado um carregamento na forma de deslocamento prescrito em forma de rampa. Este deslocamento foi aplicado nos nós 3,6 e 9 e na direção de y negativo. O valor deste deslocamento prescrito variou de 0 a 0,3 mm. Gerou-se então um gráfico de tensão por tempo, conforme pode ser visto na figura 4.13. Nesta figura pode-se verificar que nos instantes iniciais os resultados se confundem. Com o passar do tempo estes começam a divergir, como era esperado. Isso acontece porque o modelo não-linear, a partir de um certo ponto, começa a assumir a sua não-linearidade.

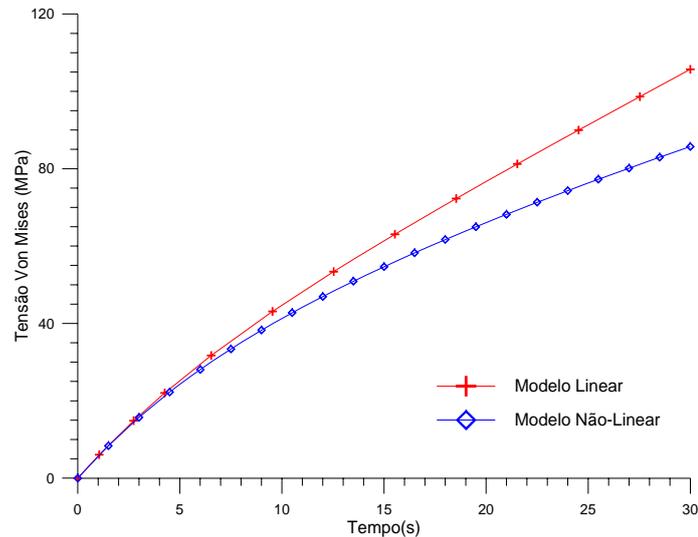


Figura 4.13: Comparação entre os programas linear e não-linear.

O próximo teste realizado foi a verificação da existência da relaxação no modelo. Novamente foi usado um carregamento na forma de deslocamento prescrito com a configuração do teste anterior. No entanto o deslocamento, agora, é na forma de escada, com o valor de 3 mm. Na Fig.4.14 pode-se verificar a relaxação. Este comportamento é caracterizado por um valor inicial de tensão, onde este valor vai decrescendo com o tempo, tendendo a um valor constante, como pode ser observado.

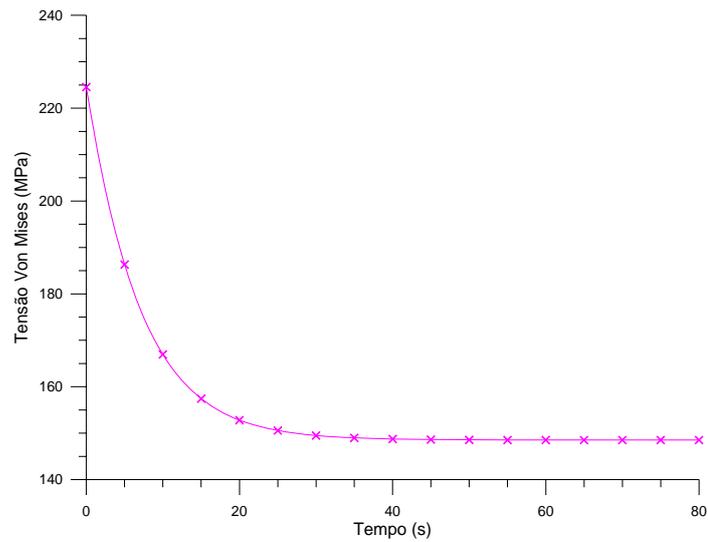


Figura 4.14: Relaxação do problema usado para validação do modelo não-linear.

Finalmente, foi realizado um teste de fluência. Neste teste foi usado o mesmo carregamento que o do problema linear, ou seja, um carregamento constante na direção de x positivo, como pode ser visto na Fig.4.1. A Fig 4.15 mostra o resultado encontrado. Como era esperado tem-se uma deformação instantânea, que com o passar do tempo aumenta até um determinado valor tornando-se constante.

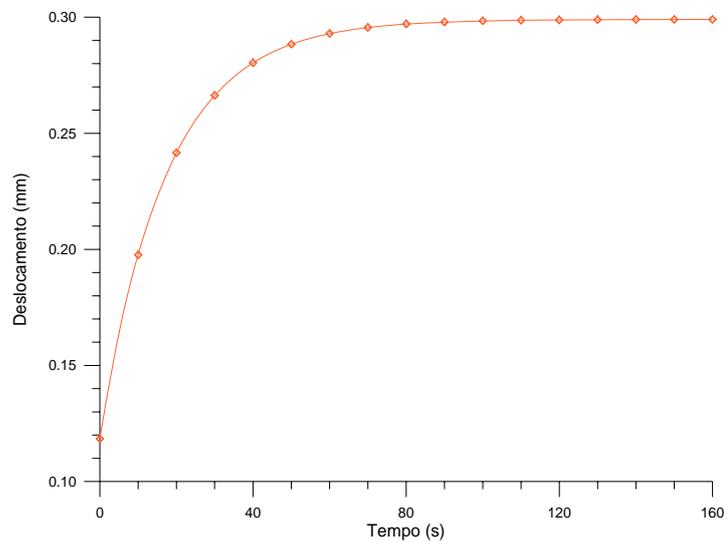


Figura 4.15: Fluência do problema usado para validação do modelo não-linear.

4.3.2 Outros Problemas

Os resultados encontrados anteriormente para o modelo não-linear foram considerados satisfatórios, onde o modelo comportou-se conforme o esperado. Outros problemas, um pouco mais complexos, foram realizados para verificar determinados aspectos do modelo.

Corpo de Prova

Primeiramente usou-se um modelo axisimétrico, que poder ser visto na Fig. 4.16, para simular um corpo de prova de um ensaio de tração ou compressão. Este problema visou testar a robustez do modelo, ou seja, os limites de deformação em tração e compressão.

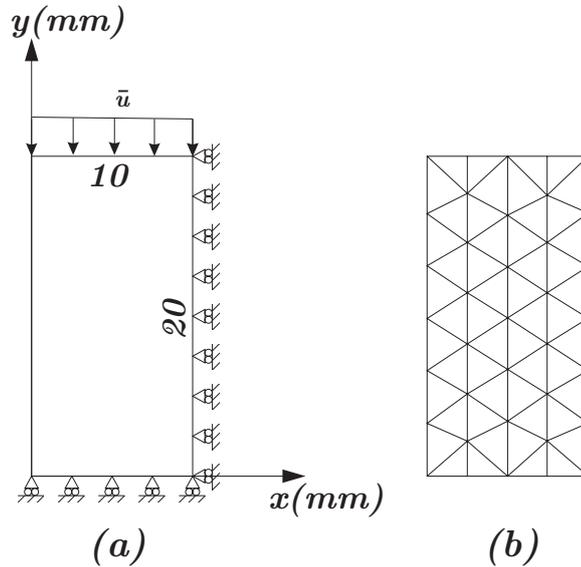


Figura 4.16: Corpo de prova usado em um ensaio de tração ou compressão e sua malha.

Inicialmente foi aplicado um deslocamento prescrito em forma de rampa simulando um ensaio de compressão. A Fig. 4.17 mostra o resultado encontrado. Nela tem-se um aumento rápido do valor da tensão, com o aumento do valor do deslocamento, tendendo a um valor assintótico. Pode-se ver que o valor do deslocamento é muito alto, chegando a um valor maior que de 70% de deformação. Em seguida, invertendo-se a direção do carregamento, simulou-se um ensaio de tração, conforme pode ser visto na Fig. 4.17. A tensão, agora, aumenta a uma taxa menor que no ensaio de compressão. Com isso, tem-se valores maiores ainda de deformação. Para este caso chegou-se a valores de 100% de deformação. Todavia, constatou-se que poderiam ser alcançados valores bem maiores de deformação.

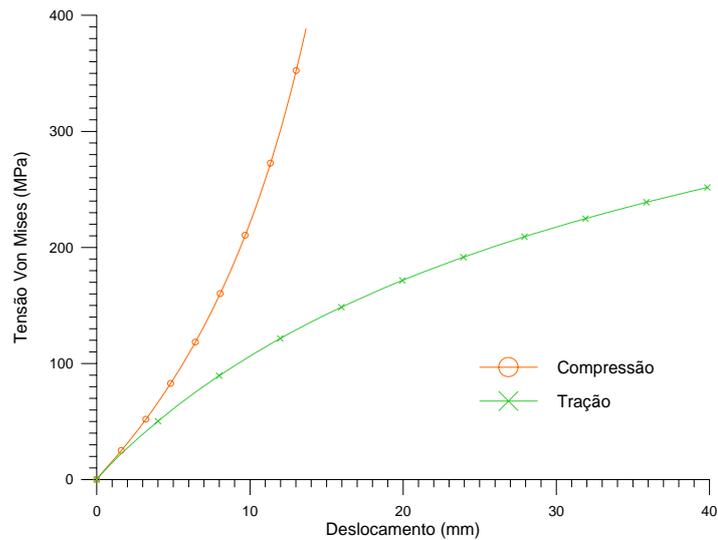


Figura 4.17: Simulação de um ensaio de tração e compressão.

Polia II

Finalmente, testou-se a robustez do modelo quanto a sua geometria e a pontos de concentração de tensão. Como o problema da polia, usado no modelo linear, demonstrou-se muito abrangente, usou-se uma geometria similar para o modelo não-linear. Como pode ser visto na Fig. 4.18.

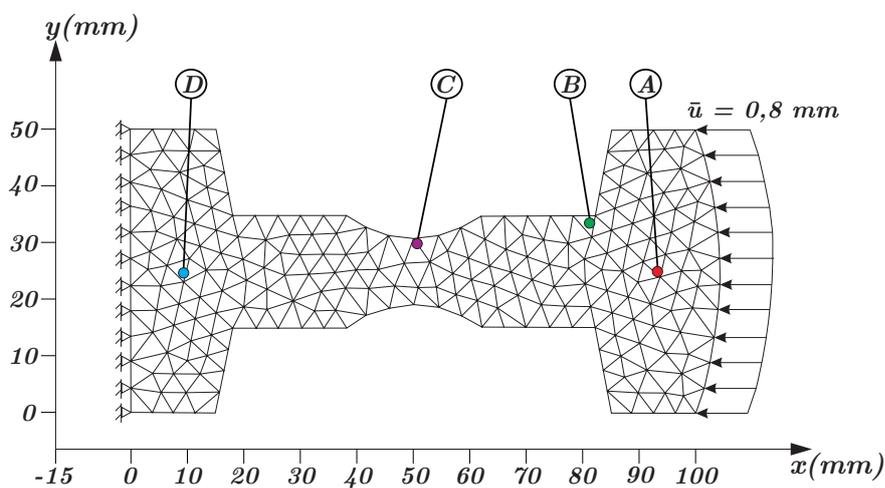


Figura 4.18: Modelo geométrico e malha da polia II.

A Fig. 4.19 mostra a polia deformada no instante final da análise. Como o carregamento aplicado foi na forma de deslocamento prescrito na forma de degrau, esta deformação é constante ao longo na análise, havendo assim uma variação no campo das tensões.

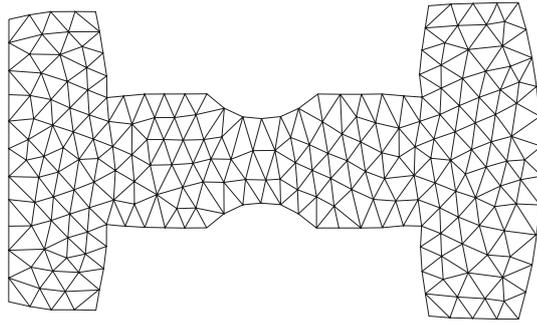


Figura 4.19: Polia II deformada.

A variação do campo de tensões ao longo do tempo pode ser vista na Fig. 4.20. Como era esperado, houve uma redução dos valores do campo de tensões ao longo do tempo. No entanto, esta redução é bem maior nos instantes iniciais. Isto pode ser verificado analisando as figuras nos instantes $t = 0$ s, $t = 5$ s e $t = 10$ s, onde há apenas uma variação de tempo pequena e uma grande variação no campo de tensões. Por outro lado, se analisarmos as figuras nos instantes $t = 10$ s e $t = 40$ s, a variação de tempo é maior enquanto que a variação do campo de tensões é menor, tendendo a um valor constante.

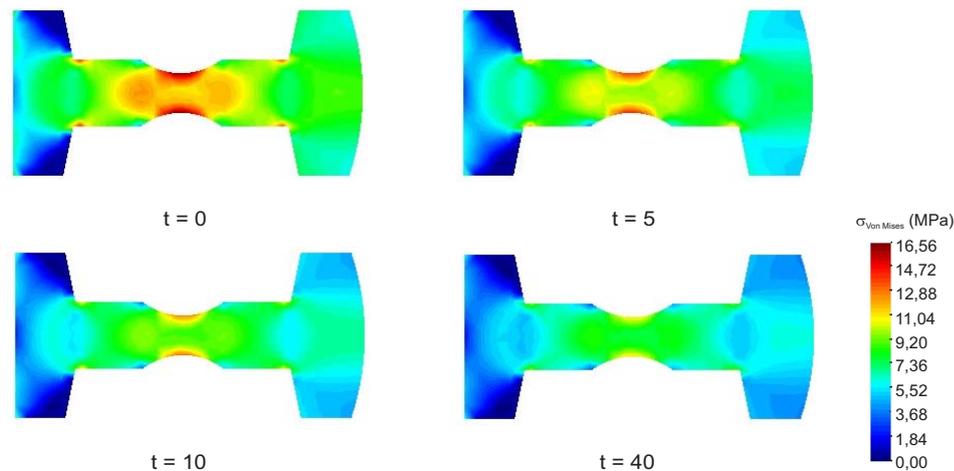


Figura 4.20: Variação do campo de tensões ao longo do tempo.

Analisando-se determinados pontos da polia II, pode-se verificar melhor este fenômeno, como pode ser visto na Fig. 4.21. A posição destes pontos podem ser encontrados na Fig. 4.18. Nessas curvas fica bem caracterizado o fenômeno da relaxação de tensões, inclusive em pontos de concentração de tensão. Verifica-se diferentes valores para a tensão, mas o mesmo comportamento, é observado em todos os pontos que consiste em uma tendência comum para um campo de tensões constantes, onde esta estabilização dos valores de tensão ocorre, aproximadamente, no mesmo instante de tempo.

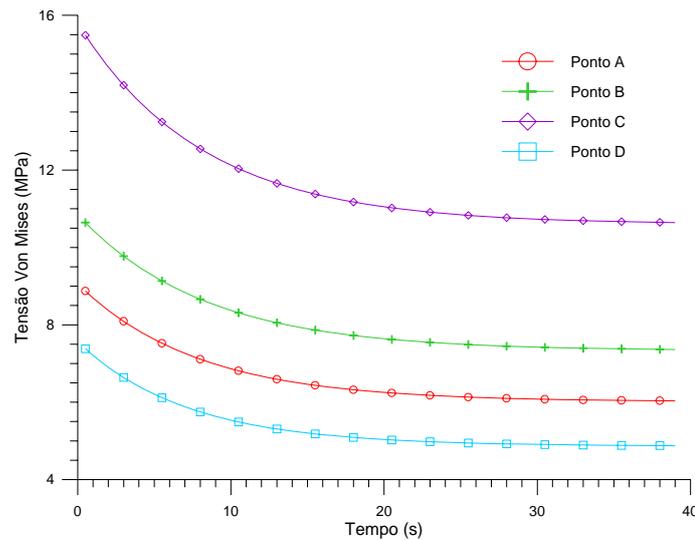


Figura 4.21: Relaxação em alguns pontos da polia II.

4.4 Conclusões Parciais

Os resultados encontrados foram todos considerados satisfatórios e dentro do esperado. Para o modelo viscoelástico linear, seus resultados foram exatamente iguais ao do software usado. Mesmo variando-se os parâmetros viscoelásticos e aplicando diferentes temperaturas, os resultados foram iguais. Posteriormente, aumentando-se a malha e gerando geometrias diferentes, inclusive com pontos de concentração de tensão, foram analisadas as questões comportamentais e fenomenológicas viscoelásticas e todas responderam muito bem. No entanto, limitações foram encontradas, principalmente devido ao uso de séries de Prony para descrever a evolução dos parâmetros viscoelásticos ao longo do tempo. Se analisarmos uma curva de fluência podemos verificar que pode-se apenas reproduzir o comportamento da fluência primária e secundária, e não a fluência terciária. Contudo, isto não se torna um problema enquanto falamos em pequenas deformações.

No modelo viscoelástico não-linear foram mais levados em conta os aspectos comportamentais e fenomenológicos viscoelásticos. Isto porque não foram encontrados resultados viscoelásticos que poderiam ser considerados capazes de uma comparação eficiente, pois geralmente faltavam os parâmetros viscoelásticos. Todavia, comparando-se com os resultados do modelo viscoelástico linear, considerou-se que os resultados estavam qualitativamente consistentes. Os demais testes ressaltaram mais ainda sua potencialidade. Mas, como dito, o uso de série de Prony causa uma dificuldade de representação da fluência terciária, o que é relevante para grandes deformações. Para a representação da fluência terciária é necessária a introdução de uma teoria de dano. Com a introdução de uma variável de dano adequada consegue-se representar a fluência terciária devido a evolução da tensão efetiva, corrigida pelo dano. A introdução de uma teoria de dano é sem dúvida um dos trabalhos futuros que se pretende realizar.

Outro fator que dificultou uma análise melhor dos modelos foi a velocidade de processamento dos computadores utilizados, principalmente para o modelo não linear. Com o aumento

do número de nós, consequentemente dos graus de liberdade, e dos parâmetros viscoelásticos, as análises tornavam-se exponencialmente onerosas, causando dificuldade na geração de resultados. Entretanto, uma melhor análise destes modelos, principalmente para o modelo de grandes deformações, devem ser realizadas. A comparação também deveria ser realizada com dados mais confiáveis, como resultados teóricos e experimentais.

Capítulo 5

Conclusão

Inicialmente, quando do início deste trabalho, pensou-se apenas em apresentar um modelo viscoelástico de pequenas deformações. No entanto, viu-se a possibilidade de propor um modelo viscoelástico para grandes deformações. Para tal, existiram alguns passos antes de se propor este modelo.

Primeiramente procurou-se conhecer melhor o comportamento dos polímeros. Quando deste estudo verificou-se que vários fatores são relevantes em seu comportamento, tais como sua estrutura molecular, seu processo de fabricação, sua temperatura de trabalho, etc. Pequenos fatores que podem parecer não interferirem em seu comportamento, podem ter um resultado muito além do esperado. Outro ponto importante é como podem ser caracterizadas e determinadas suas propriedades. Verificou-se que, para polímeros, pode-se classificar as propriedades como de curta duração ou instantâneas e as de longa duração ou viscoelásticas. As propriedades de curta duração podem ser avaliadas em ensaios já conhecidos, como o ensaio de tração, por exemplo. Estas propriedades têm um valor mais a fim de comparação entre os polímeros. Já as propriedades de longa duração são determinadas em ensaios específicos para polímeros. Os modelos viscoelásticos costumam usar estas propriedades.

Em seguida, antes de se propor o modelo viscoelástico para grandes deformações, julgou-se necessário um conhecimento maior do fenômeno de viscoelasticidade. Então foi desenvolvido um modelo viscoelástico linear, com base no modelo usado pelo software ANSYS. Neste estudo pode-se conhecer melhor os fenômenos viscoelásticos, como a fluência, a relaxação de tensão, etc. Foi visto também que materiais viscoelásticos são conhecidos como materiais com memória, ou seja, são materiais que possuem a habilidade de retornar ao seu estado inicial mesmo após sofrerem uma deformação inelástica. Vários modelos são propostos na literatura para descrever o comportamento viscoelástico. Um tipo muito encontrado na literatura são os modelos do tipo mola-amortecedor. Também pode-se desenvolver outro modelo usando o princípio de superposição de Boltzmann. No entanto, todos estes modelos possuem basicamente a mesma forma final, onde são compostos por uma parte instantânea ou elástica e uma parte dependente do tempo ou viscosa. Contudo estes modelos são unidimensionais. Assim, foi proposto que a forma encontrada para o modelo viscoelástico unidimensional poderia também ser usado em um modelo tridimensional, mudando-se apenas as medidas escalares por tensoriais. Um fator simplificador no modelo foi a consideração de um material termoreologicamente simples, podendo

assim ser usado o princípio de superposição tempo-temperatura. Caso não fosse assumida esta hipótese o modelo iria se tornar muito mais complicado. A consideração do uso de séries de Prony para descrever os módulos de cisalhamento e o "bulk modulus" também pareceu muito eficiente, pois com isso conseguiu-se facilmente avaliar as integrais das quais eles faziam parte. Com isso chegou-se ao mesmo modelo que o software ANSYS, exceto pelo fato de que seu modelo considera que a deformação no instante de tempo $t = 0+$ é igual a 0. Isto não parece muito coerente, pois, como foi utilizado, a deformação no instante de tempo $t = 0+$ é a deformação elástica do material.

Finalmente, pode-se propor o modelo viscoelástico para grandes deformações. Um dos principais cuidados foi a escolha de medidas de tensão e deformação que fossem invariantes ao observador. Caso essa premissa não fosse satisfeita, observadores em postos distintos poderiam ver de forma diferente o mesmo resultado. Uma vez escolhido um par conjugado que satisfizesse o princípio da invariância do observador, este foi aplicado ao mesmo modelo que o usado em viscoelasticidade linear. A única mudança foi a troca das medidas de tensão e deformação linear por medidas de tensão e deformação para grande deformações. O único problema encontrado foi que devido ao uso de série de Prony para descrever o módulo de cisalhamento e o "bulk módulo" não é possível a representação da fluência terciário do modelo. Para o modelo de pequenas deformações isso não causou nenhum problema, mas para o de grandes deformações, nas quais pode-se alcançar este nível de fluência, isto pode ser um problema. Para isto é necessário a introdução de uma teoria de dano, como já mencionado.

Os modelos viscoelásticos apresentados foram programados em linguagem Fortran e comparados com outros tipos de resultados. Para o modelo viscoelástico linear pode-se considerar a comparação feita suficiente, pois acredita-se que o modelo do software ANSYS pode ser considerado confiável. Já para o modelo viscoelástico não-linear os testes feitos foram mais qualitativos que quantitativos. Isso aconteceu devido à falta de dados comparativos para problemas de grandes deformações. Apesar disto, pode-se considerar que o modelo não-linear apresentou resultados satisfatórios, podendo-se, futuramente, serem comparados a resultados teóricos e experimentais.

Bibliografia

- [1] ABAQUS – **4.8.1 Viscoelasticity** – Time domain viscoelasticity, Section 10.7.1 of the ABAQUS Analysis User’s Manual.
- [2] ABAQUS – **4.8.2 Finite-strain viscoelasticity** – Time domain viscoelasticity, Section 10.7.1, ABAQUS Analysis User’s Manual.
- [3] ANSYS – **Release 9.0 Documentation** - Chapter 4, Structures with Material Nonlinearities, 4.7, Viscoelasticity.
- [4] BATHE, K.J. – **Finite Elements Procedures in Engineering Analysis** – Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- [5] BAYER AG – **Manual da Bayer AG** – Disponível na internet: <http://www.plastics.bayer.com/AG/AE/index.jsp>.
- [6] BILLMEYER, J.R., F.W. – **Textbook of Polymer Science** – 3^a ed, John Wiley, New York, 1984.
- [7] BONET, J., WOOD, R.D. – **Nonlinear Continuum mechanics for Finite Elements Analysis** – Cambridge University Press, USA, 1997.
- [8] CALLISTER JR., W.D. – **Materials Science and Engineering: an Introduction** – Third Edition, John Wiley e Sons, Inc, New York, 1994.
- [9] CANEVAROLO Jr, S.V. – **Ciência dos Polímeros: um Texto Básico para Tecnólogos e Engenheiros** – Artliber Editora, São Paulo, 2002.
- [10] CRAWFORD, R.J. – **Plastics Engineering** – 2nd Edition, Pergamon Press, São Paulo, 1989.
- [11] CRIESFIELD, M.A. – **Nonlinear Finite Element analysis of Solid and Structures**, v.2, Wiley, England, 1997.
- [12] FINDLEY, W.N.; LAI, J.S.; ONARAN, K. – **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials : with an Introduction to Linear Viscoelasticity** – Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [13] GURTIN, M.E. – **An Introduction to Continuum Mechanics** – Academic Press, New York, 1981.

- [14] HARPER, C.A. – **Handbook of Plastics and Elastomers** – McGraw Hill, New York, 1975.
- [15] HILL, H. – **Aspects of Invariance in Solids Mechanics** – Advances in Applied Mechanics, v.18, p. 1-75, 1978.
- [16] HUGHES, T.J.R. – **The finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite element Analysis** – Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [17] LEE, S.B., WINEMAN, A. – **A model for non-linear viscoelastic axial response of an elastomeric bushing** – International Journal of Non-Linear Mechanics, v 34, 779-793, 1999.
- [18] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. – **Mechanics of Solids Materials** – First paperback edition, Cambridge University Press, 1994.
- [19] MACHADO, G.C. – **Método dos Elementos Livres de Galerkin Aplicados à Espumas Poliméricas** – Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC, 2006.
- [20] MALVERN, L.E. – **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium** – Prentice Hall, 1969.
- [21] MANO, E.B. – **Introdução a Polímeros** – Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1985.
- [22] MANO, E.B. – **Polímeros Como Materiais de Engenharia** – Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1991.
- [23] “MARANYL” NYLON 6.6 – **Technical Service note N 109** – Moulding Powders Group, I. C. I. Plastics Division, Welwyn Garden City, Herts, England.
- [24] MASCARENHAS, W.N. – **Sistematização do Processo de Obtenção do Leiaute Dimensional de Componentes de Plástico Moldados por Injeção** – Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC, 2002.
- [25] MICHAELI, W., KAUFMANN, H., GREIF, H., VOSSEBÜRGER, F.J. – **Training in Plastics Technology: a Text and Workbook** – Hanser, New York, 1995.
- [26] NEVIERRE, R. – **An extension of the time-temperature superposition principle to non-linear viscoelastic solids** – International Journal of Solids and Structures, xxx, xxx-xxx, 2005.
- [27] ORTIZ, M., RADOVITZKY, R.A., REPETO, E.A. – **The Computation of Exponential and Logarithmic Mappings and Their First and Second Linearizations** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 52, p. 1431-1441, 2001.

- [28] PAPOULIA, K.D.¹, ASCE, M.¹, PANOSKALTSIS, V.P.², KOROVAJCHUK, I.² – **A class of models of 3D finite viscoelasticity** – ¹School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY 14853 - ²Department of Civil Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, OH 44106.
- [29] PERIC, D., OWEN, D.R.J., HONNOR, M.E. – **A model for finite strain elastoplasticity based on logarithmic strains: Computational issues** – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.94, p. 35-61, 1992.
- [30] PERIC, D., OWEN, D.R.J. – **Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids** – Reports on Progress in Physics, v. 61, p. 1495-1574, 1998.
- [31] PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. – **Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing** – Cambridge University Press, ISBN 0-521-43721-0.
- [32] ROSSI, R. – **Proposições e Aplicações Considerando o Método de Galerkin Livre de Elementos** – Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2005.
- [33] ROYLANCE, D. – **Engineering Viscoelasticity - Notes** – Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, October, 2001.
- [34] SAECHTLING, H. – **International Plastic Handbook: for the Technologist, Engineer and User** – Hanser, New York, 1995.
- [35] SHAW, S. – **Finite Element and Discrete Time Methods for Continuum Problems with Memory and Applications to Viscoelasticity** – Thesis of Doctor, Department of Mathematics and Statistics, Brunel University, Uxbridge, 1993.
- [36] SHAW, S.; WHITEMAN, J.R. – **Some Partial Differential Volterra Equation Problems Arising in Viscoelasticity** – Equadif 9 Cd Rom, Brno, 1997, Proceedings, pp. 183-200.
- [37] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J. – **Continuum Modeling and Numerical Simulation of Material Damage at Finite Strains** – Archives of Computational Methods in Engineering – v. 5, p. 311-384, 1998.
- [38] TICONA – **Designing_With_Plastics** – Disponível na internet: www.ticona.com.
- [39] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. – **Theory of Elasticity** – 3^a ed, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [40] ZABARAS, N., SRIKANTH, A. – **An object-oriented programming approach to the lagrangian FEM analysis of inelastic deformations and metal-forming processes** – International Journal for Numerical Methods in Engineering, v45, 399– 445, 1999.

- [41] ZHANG, C., ZHANG, W, – **Elasticity recovery correspondence principles for physically nonlinear viscoelastic problems for a class of materials** – International Journal of Solids and Structures, v38, 8359-8373, 2001.
- [42] ZIENKIEWICZ, O.C. – The Finite Element Method – 4rd edition, v.1, McGraw-Hill, New York, 1977.