Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Taxas de Decaimento para a Energia Associada a um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas em $\mathbb{R}^n$ com Potencial do Tipo Dissipativo

Jaqueline Luiza Horbach

Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Coorientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Taxas de Decaimento para a Energia Associada a um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas em $\mathbb{R}^n$ com Potencial do Tipo Dissipativo

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Jaqueline Luiza Horbach

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Taxas de Decaimento para a Energia Associada a um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas em $\mathbb{R}^n$ com Potencial do Tipo Dissipativo

por

Jaqueline Luiza Horbach

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. Daniel Gonçalves

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Ryo Ikehata (Hiroshima University)

Prof. Dr. Cláudio R. Ávila da Silva Junior (IFTR-PR)

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

A Deus.

Ao meu orientador Cleverson.

Aos meus pais Valcir e Sueli.

Ao meu irmão Juliano.

Aos meus amigos.

Ao CNPq e ao REUNI.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a existência e a unicidade de soluções globais do problema de valor inicial, associado ao sistema semilinear de ondas elásticas em um meio isotrópico, com uma não linearidade do tipo não absorvente. O coeficiente do termo dissipativo é um potencial não constante em $\mathbb{R}^n$ e estudam-se os casos quando esse potencial dissipativo é do tipo considerado crítico e não crítico. Taxas de decaimento da energia total também são estudadas para os casos linear e semilinear. A existência e o decaimento para o problema semilinear são obtidos mediante a hipótese de dados iniciais pequenos. Neste trabalho seguimos idéias de Charão-Ikehata [6] e de Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

Palavras-chave: Ondas elásticas, semigrupos, existência e unicidade de solução, função potencial, método dos multiplicadores.

Abstract

We study the existence and uniqueness of global solutions of the initial value problem associated to the semi-linear system of elastic waves in an isotropic medium with a nonlinearity of type nonabsorption. The coefficient of the dissipative term is non constant potential in $\mathbb{R}^n$ and we study the case where the potential type of damping is considered critical and noncritical. Decay rates of the total energy are also studied for linear and semi-linear system. The global existence and the asymptotic behavior of the semi-linear problem are obtained on the hypothesis of small initial data. In this work we fallow ideas of Charão-Ikehata [6] and Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

Keywords: Elastic waves, semigroups, existence and uniqueness of solution, potential function, method of multipliers.

Sumário

1 Resultados Básicos **6**

1.1 Notações e identidades vetoriais 7

1.2 Distribuições 12

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$ 14

1.4 Espaços de Sobolev 18

1.5 Desigualdades importantes 21

1.6 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green 24

1.7 Operadores elípticos 25

1.8 Teorema de Lax-Milgram 26

1.9 Semigrupos de operadores lineares 27

2 Existência e Unicidade de Soluções para o Sistema de Ondas Elásticas Linear **34**

3 Taxas de Decaimento para a Energia Total do Sistema Linear **49**

3.1 Função potencial $V(x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|}$ 58

3.2 Função potencial $V(t,x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|+t}$ 66

3.3 Função potencial $V(x) \geq \dfrac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$ 72

3.4 Função potencial de Euler-Poisson -Darboux 77

4 Sistema Semilinear de Ondas Elásticas **82**

4.1 Existência de soluções locais 84

4.2 Existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia 86

Bibliografia **109**

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para um problema de valor inicial associado ao sistema de ondas elásticas sob efeitos de um termo semilinear, do tipo não absorvente, e de um termo dissipativo associado a um potencial do tipo 'damping', $V(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, a saber

$$u_{tt} - a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \operatorname{div} u + V(t,x)u_t = |u|^{p-1}u$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$u_t(0,x) = u_1(x)$$

sendo $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e os coeficientes de Lamé $a > 0$, $b > 0$ satisfazem $0 < a^2 < b^2$.

No problema acima $u = u(t,x) = (u^1(t,x), \cdots, u^n(t,x))$ é uma função vetorial que representa o deslocamento da onda no ponto x e no instante de tempo t. O expoente p no termo não linear é constante e assumimos que

$$\begin{aligned} &\text{se } n = 2 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \infty \\ &\text{se } n \geq 3 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \frac{n+2}{n-2}. \end{aligned}$$

Os dados iniciais u_0 e u_1 são escolhidos o mais fraco possível para que a energia total do sistema esteja bem definida, ou seja, escolhemos

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Neste trabalho mostramos estimativas de decaimento no tempo para a energia total do sistema de ondas elásticas acima. No caso do sistema de ondas elásticas linear e no caso semilinear não absorvente, as taxas que encontramos são polinomiais, como pode ser visto no artigo de Charão e Ikehata [6] que estuda o caso semilinear absorvente. Além de conseguirmos obter todos os resultados que aparecem em [6], também estudamos o caso do potencial $V(t,x) = V(x)$, não estudado em [6], satisfazendo uma condição do tipo

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$$

com α uma constante satisfazendo $0 < \alpha < 1$.

O caso de um potencial do tipo Euler-Poisson-Darboux que foi mencionado rapidamente no artigo de Charão-Ikehata [6] é feito neste trabalho com todos os detalhes que não aparecem em [6].

Os resultados que obtemos para o sistema de ondas elásticas com termo semilinear não absorvente ainda não foram publicados em revista indexada, mas aparecem em um preprint e em um trabalho apresentado por Ruy Charão e Ryo Ikehata no VII Workshop of Partial Differential Equations (LNCCV/UFRJ)[7].

O caminho para estudar o problema semilinear não absorvente é estudar primeiro o caso linear de maneira completa. Depois obter resultados para o caso semilinear não absorvente usando as estimativas do problema linear, combinadas com estimativas e ideias mais avançadas utilizadas em trabalhos anteriores de Todorova-Yordanov [19] e Ikehata-Todorova-Yordanov [10].

Para o caso da equação da onda com dissipação do tipo potencial

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + V(t,x)u_t(t,x) + \eta|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0,$$

existem vários trabalhos com resultados sobre o decaimento e não decaimento da energia total, podemos citar por exemplo [12], [15], [16], [20] para o caso $\eta = 0$. Recentemente, Todorova-Yordanov [19] obtiveram taxas de decaimento para a energia total considerando $V(x) \approx (1+|x|)^{-\gamma}$ com $0 \leq \gamma < 1$ e $\eta = 0$. Eles também estudaram o problema semilinear com $\eta = 1$ (ver [18]).

Para o sistema de ondas elásticas em domínios exteriores, com uma dissipação localizada próximo ao infinito, Charão-Ikehata [4] obtiveram taxas de decaimento polinomial assumindo uma condição adicional sobre os coeficientes de Lamé: $b^2 < 4a^2$.

Este trabalho foi dividido em 4 capítulos. No Capítulo 1 é apresentado resultados teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho. A existência e unicidade para o caso linear com $V(t,x) = V(x)$, via teoria de semigrupos, é estudada no Capítulo 2.

No Capítulo 3 é estudado o comportamento assintótico do problema linear para quatro diferentes potenciais que foram divididos em 4 seções.

Na Seção 3.1 estudamos o caso crítico onde o potencial $V(x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|}$, já na Seção 3.3 o potencial estudado satisfaz $V(x) \geq \dfrac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$. Esses dois potenciais foram estudados separadamente pois conseguimos encontrar taxas de decaimento melhores para o potencial da Seção 3.3. Nas Seções 3.2 e 3.4 os potenciais estudados dependem de x e de t, são eles: $V(t,x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|+t}$ e o potencial de Euler-Poisson-Darboux. Nas três primeiras seções desse capítulo precisamos da condição de que os dados iniciais tenham suporte compacto, tal condição não é necessária quando consideramos o potencial de Euler-Poisson-Darboux.

Na primeira seção do Capítulo 4 é estudado a existência de soluções locais para o sistema de ondas elásticas semilinear. Na Seção 4.2 é obtida, para dados iniciais pequenos, a existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia total do sistema. A existência de soluções globais e o decaimento da energia, com taxas polinomiais, são obtidas simultaneamente.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos as seguintes referências, Adams [1], Agmon-Douglis-Nirenberg [2], Brezis [3], Alvercio [9], Kesavan [11] e Medeiros-Rivera [13], [14], Pazy [17], onde tais resultados podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser todo $\mathbb{R}^n$.

1.1 Notações e identidades vetoriais

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. $||\cdot||$ representa a norma usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

5. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então o *gradiente* de f, que será denotado por ∇f, é definido como o vetor do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

6. Se $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o *divergente* de $F(x)$, denotado por $\mathrm{div}(F)$, como

$$\mathrm{div}(F) = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

7. O *laplaciano* de uma função f é definido como

$$\mathrm{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

e é denotado por Δf.

8. Se $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ então

$$\Delta F(x) = (\Delta f_1(x), \cdots, \Delta f_n(x)) \quad \text{e}$$

$$|\nabla F(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i(x)|^2.$$

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, c é uma constante real e F e G são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4. $\mathrm{div}(F+G) = \mathrm{div}(F) + \mathrm{div}(G)$

5. $\mathrm{div}(fF) = f\mathrm{div}(F) + \nabla f \cdot F$

O ponto $\cdot$ indica o produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Para todo vetor $u = (u^1, u^2, \cdots, u^n)$ e $v = (v^1, v^2, \cdots, v^n)$ vamos definir o vetor:

$$v : \nabla u = v^1 \nabla u^1 + v^2 \nabla u^2 + \cdots + v^n \nabla u^n = \sum_{i=1}^{n} v^i \nabla u^i.$$

Lema 1.1 *Seja $u = u(t,x)$ com $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}^n$, uma função vetorial com n componentes. Se u é uma função de classe C^2 as seguintes identidades são verdadeiras:*

a) $\mathrm{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2$;

b) $\mathrm{div}(u_t : \nabla u) = (u_t \cdot \Delta u) + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|\nabla u|^2$;

c) $\mathrm{div}(u \, div\, u) = (div\, u)^2 + (u \cdot \nabla div\, u)$;

d) $\mathrm{div}(u_t \, div\, u) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(div\, u)^2 + (u_t \cdot \nabla div\, u)$.

Demonstração: Sejam $u, v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^2 tal que $u(t,x) = (u^1(t,x), ..., u^n(t,x))$ e $v(t,x) = (v^1(t,x), ..., v^n(t,x))$. Considerando a definição de $v : \nabla u$ dada acima tem-se que

$$\mathrm{div}(v : \nabla u) = \mathrm{div} \sum_{i=1}^{n} (v^i \nabla u^i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}(v^i \nabla u^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}(v^i u^i_{x_1}, \cdots, v^i u^i_{x_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(v^i u^i_{x_1}) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(v^i u^i_{x_n}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (v^i(u^i_{x_1 x_1} + \cdots + u^i_{x_n x_n}) + v^i_{x_1} u^i_{x_1} + \cdots + v^i_{x_n} u^i_{x_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (v^i \Delta u^i + (\nabla v^i \cdot \nabla u^i)) \\
&= (v \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^{n} (\nabla v^i \cdot \nabla u^i).
\end{aligned}
$$

Considerando $v = u$ na igualdade acima tem-se que

$$
\operatorname{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^{n} (\nabla u^i \cdot \nabla u^i) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2.
$$

Por outro lado, tomando $v = u_t$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(u_t : \nabla u) &= (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^{n} (\nabla u^i_t \cdot \nabla u^i) \\
&= (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u^i|^2 \\
&= (u_t \cdot \Delta u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

As duas últimas igualdades provam os itens a) e b) do lema.

Para demonstrar os itens c) e d) vamos usar a identidade

$$\operatorname{div}(Ff) = f\operatorname{div}(F) + (F \cdot \nabla f),$$

onde f é uma função escalar e F é uma função vetorial.

Considerando $f = \operatorname{div} u$ e $F = u$ temos

$$\operatorname{div}(u \operatorname{div} u) = (\operatorname{div} u)^2 + (u \cdot \nabla \operatorname{div} u)$$

e se considerarmos $f = \operatorname{div} u$ e $F = u_t$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) &= \operatorname{div} u \operatorname{div} u_t + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\operatorname{div} u)^2 + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u). \end{aligned}$$

Assim, o lema está demonstrado.

■

1.2 Distribuições

Seja u uma função numérica definida em Ω, u mensurável, e seja $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i\in I} K_i$. Então

$$u = 0 \quad \textit{quase sempre em } K.$$

Como consequência, define-se o *suporte* de u, que será denotado por $supp\,(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega \setminus K.$$

Definição 1.1 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções*

$$u :\, \Omega \to \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $C_0^\infty(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Dizemos que* $\varphi_k \to \varphi$ *se:*

i) $\exists\, K \subset \Omega$, K *compacto, tal que* $supp\,(\varphi_k) \subset K$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ *uniformemente em* $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com a noção de convergência definida acima é denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *O conjunto de todas as distribuições sobre* Ω *é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K};\ \ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$\langle T_k, \varphi \rangle \ \to \ \langle T, \varphi \rangle,$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6 *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \qquad se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup\, ess_{x\in\Omega}\,|f(x)| \\ &= \inf\{C\in\mathbb{R}^+ \;\;/\;\; med\{x\in\Omega \;/\; |f(x)|>C\}=0\} \\ &= \inf\{C>0 \;:\;\; |f(x)|\le C \;\; \textit{quase sempre em}\; \Omega\}\end{aligned}$$

onde $med\{A\}$ *significa a medida de Lebesgue de conjunto mensurável* A.

Observação 1.1 *As funções* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega)\to\mathbb{R}^+,\;\; 1\le p\le\infty$, *são normas.*

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1\le p\le\infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1<p<\infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.1 $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$, $\;1\le p<+\infty$.

Teorema 1.2 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam* $1\le p<q\le\infty$. *Se* $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ *então* $f\in L^r(\Omega)$ *para todo* $r\in[p,q]$. *Além*

disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \, \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

com $\alpha \in [0,1]$ *tal que* $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7 *Sejam* Ω *um aberto do espaço* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Indicamos por* $L^p_{loc}(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, *para todo* K *compacto de* Ω, *onde* χ_K *é a função característica de* K.

Observação 1.2 $L^1_{loc}(\Omega)$ *é chamado o espaço das funções localmente integráveis.*

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.2 (Du Bois Reymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$ *se e somente se* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.2). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$D^\alpha T$ chama-se a derivada distribucional de T.

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [3], Kesavan [11] e Medeiros-Rivera [13], [14].

Definição 1.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leqslant m\}.$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^{\alpha}u\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)}, \qquad p = \infty,$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u,v)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

5. Seja $v = (v^1, \cdots, v^n) \in (H^m(\Omega))^n$ então

$$||v||^2_{(H^m(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} ||v^i||^2_{H^m(\Omega)}.$$

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10 *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.
2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.
3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.11 *Suponha* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $q > 1$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.3 (Teorema de Sobolev) *Sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$.

i) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;

ii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ q \in [p, \infty)$*;*

iii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*;*

sendo as imersões acima contínuas.

1.5 Desigualdades importantes

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então $ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então

$$||u||^2 \leq C||\nabla u||^2,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, sendo $C > 0$ uma constante que depende do diâmetro de Ω.

Em particular, se $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $\text{supp}\,(u)$ está contido na bola $|x| \leq R, \;\; R > 0$, vale que

$$||u||^2 \leq CR^2||\nabla u||^2,$$

com $C > 0$ uma constante.

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq r < z \leq \infty$, $1 \leq q \leq z$ e $0 \leq k \leq m$. Então existe uma constante $\tilde{C}_g > 0$ tal que

$$||u||_{W^{k,z}(\Omega)} \leq \tilde{C}_g ||D^m u||^{\theta}_{L^q(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^r(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ onde

$$||D^m u||_{L^q(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{L^q(\Omega)},$$

e $\theta = \left(\dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{z}\right)\left(\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q}\right)^{-1}.$

Observação 1.3 *No capítulo 4 aplicaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para uma função vetorial* $u = (u_1, \cdots, u_n)$. *Observemos que para* $z > 2$ *temos*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^z dx &= \int_\Omega (|u(x)|^2)^{z/2} dx \\
&= \int_\Omega (|u_1(x)|^2 + \cdots + |u_n(x)|^2)^{z/2} dx \\
&\leq C_z \int_\Omega (|u_1(x)|^z + \cdots + |u_n(x)|^z) dx \\
&= C_z \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u_i(x)|^z dx \\
&= C_z \sum_{i=1}^n ||u_i||_{L^z}^z .
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para o caso particular $m = 1$, $k = 0$ *e* $r = q = 2$ *temos*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^z dx &\leq C_z \sum_{i=1}^n \tilde{C}_g ||\nabla u_i||^{\theta z} ||u_i||^{(1-\theta)z} \\
&\leq C_z \tilde{C}_g ||\nabla u||^{\theta z} ||u||^{(1-\theta)z} \\
&= C_g ||\nabla u||^{\theta z} ||u||^{(1-\theta)z},
\end{aligned}$$

com C_g *uma constante positiva que depende de* z, n *e da constante que* *aparece na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.*

1.6 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω bem regular:

i.

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)(x)\, dx = \int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma, \quad F \in (H^1(\Omega))^n;$$

ii.

$$\int_\Omega v(x) \triangle u(x) dx = -\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega);$$

iii.

$$\int_\Omega v(x) \triangle u(x)\, dx = \int_\Omega \triangle v(x) u(x)\, dx,\ \ v \in H_0^2(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$$

sendo Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \Gamma = \partial\Omega$. A função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço.

1.7 Operadores elípticos

Definição 1.12 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, \quad x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \right| \geq C|\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Proposição 1.1 *O operador $L(u) = -a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \, div \, u + 2u$ é um operador elíptico de ordem 2.*

Teorema 1.4 (Teorema de regularidade elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2].

1.8 Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.13 *Seja H um espaço de Hilbert real. Uma aplicação*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear se $B(.,y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x,.)$ é linear para cada $x \in H$.

B é chamada de limitada (contínua) se existe uma constante C tal que

$$|B(x,y)| \leq C \, \|x\|_H \, \|y\|_H, \qquad \forall \, x, y \in H.$$

B é chamada coerciva se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x,x) \geq \delta \|x\|_H^2, \qquad \forall \, x \in H.$$

Teorema 1.5 (Lax-Milgram) *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x,u) = F(x), \qquad \forall \, x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [3].

1.9 Semigrupos de operadores lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Alvercio [9], Brezis [3] e Pazy [17].

Definição 1.14 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação*

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

I- $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

II- $S(t+s) = S(t)\,S(s), \qquad \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+.$

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III- $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)\, x\|_X = 0, \qquad \forall\ x \in X.$

Proposição 1.2 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em*

$\mathbb{R}^+$, *isto é, se* $t \in \mathbb{R}^+$ *então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \qquad \forall\, x \in X.$$

Definição 1.15 *Se* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1,\ \forall\, t \geq 0,$ S *é dito semigrupo de contrações de classe* C_0.

Definição 1.16 *O operador* $A : D(A) \to X$ *definido por*

$$D(A) = \left\{\ x \in X \ \ / \ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x \quad existe\ \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x, \qquad \forall\, x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.3 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em* X.

Proposição 1.4 *Seja* S *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *o gerador infi-*

nitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall\ t \geq 0$, e

$$\frac{d}{dt}\, S(t)\, x = A\, S(t)\, x = S(t)\, Ax.$$

Definição 1.17 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k pondo*

$$D(A^k) = \big\{x \ \ / \ \ x \in D(A^{k-1}) \ \ e \ \ A^{k-1}x \in D(A)\big\}$$

$$A^k x = A(A^{k-1}x), \qquad \forall\ x \in D(A^k).$$

Proposição 1.5 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

I- *$D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X;*

II- *Se $x \in D(A^k)$ então $S(t)\, x \in D(A^k)$, $t \geq 0$, e*

$$\frac{d^k}{dt^k}\, S(t)\, x = A^k\, S(t)\, x = S(t)\, A^k\, x, \qquad \forall\ k \in \mathbb{N};$$

III- *$\displaystyle\bigcap_k D(A^k)$ é denso em X.*

Lema 1.3 *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada*

$x \in D(A^k)$,

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|_X \tag{1.1}$$

o funcional $|\cdot|_k$ *é uma norma em* $D(A^k)$ *munido da qual* $D(A^k)$ *é um espaço de Banach.*

Definição 1.18 *A norma (1.1) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo* $D(A^k)$ *da norma (1.1) será representado por* $[D(A^k)]$.

Teorema Lumer-Phillips

Definição 1.19 *Seja* A *um operador linear de* X. *O conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *para os quais o operador linear* $\lambda I - A$ *é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de* A *e é representado por* $\rho(A)$.

O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, *representado por* $R(\lambda, A)$, *é dito resolvente de* A.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Ponhamos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^* \ / \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \ \forall \ x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \quad \forall \ x \in X$.

Imediatamente se vê que $\|j(x)\|_{X^*} = \|x\|_X$.

Definição 1.20 *Seja X um espaço de Banach. Diz-se que o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j,*

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \qquad \forall \ x \in D(A).$$

Em espaços de Hilbert, a definição de operador dissipativo é:

Definição 1.21 *Seja H um espaço de Hilbert. Diz-se que o operador linear $A : D(A) \subset H \to H$ é dissipativo se,*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, \qquad \forall \ x \in D(A).$$

Teorema 1.6 (Lumer-Phillips) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Banach X então:*

i- *A é dissipativo;*

ii- $Im(\lambda - A) = X, \quad \lambda > 0 \qquad (Im(\lambda - A) =$ *imagem de* $\lambda I - A)$.

Reciprocamente, se

i- $D(A)$ *é denso em* X;

ii- A *é dissipativo;*

iii- $Im(\lambda_0 - A) = X$, *para algum* $\lambda_0 > 0$, *então* A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0.

Definição 1.22 *O operador* A *é dito ser* m-*dissipativo se* A *é dissipativo e* $Im(\lambda_0 - A) = X$, *para algum* λ_0.

Proposição 1.6 *Se* A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em um espaço de Banach* X *e* B *é o operador linear e limitado então* $A + B$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em* X.

Problema de Cauchy Abstrato

Seja X um espaço de Banach e A um operador linear de X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\frac{dU}{dt} = AU(t)$$
$$U(0) = U_0 \tag{1.2}$$

onde $U_0 \in X$ e $t \geq 0$.

Definição 1.23 *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para todo $t > 0$, tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (1.2) é dita solução forte do problema (1.2).*

Teorema 1.7 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $U_0 \in D(A)$ o problema (1.2) tem uma única solução forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, D(A)),$$

onde S é o semigrupo gerado por A.

Se $U_0 \in X$ então dizemos que $U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$ é uma solução fraca para o problema (1.2).

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções para o Sistema de Ondas Elásticas Linear

Neste capítulo, usando a teoria de semigrupos, vamos mostrar a existência e unicidade de solução do seguinte sistema linear de ondas elásticas:

$$u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + V(x) u_t = 0 \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2.2}$$

$$u_t(0,x) = u_1(x) \tag{2.3}$$

onde $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, $u = u(t,x) = (u^1(t,x), ..., u^n(t,x))$ é o vetor de deformações com n componentes, os coeficientes $a > 0$ e $b > 0$ satisfazem $0 < a^2 < b^2$ e a função potencial $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, os coeficientes a e b estão relacionados com os coeficientes de Lamé λ e μ da seguinte forma: $b^2 = \lambda + 2\mu$ e $a^2 = \lambda + \mu$.

Fazendo o produto interno usual em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ da equação (2.1) com u_t temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + V(x) u_t\big)\, dx = 0,$$

que, formalmente, implica em

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||u_t||^2 + a^2||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2)||\mathrm{div}\, u||^2\right\} + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|u_t|^2\, dx = 0.$$

A identidade anterior motiva definir a energia total do sistema (2.1) por:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\big(||u_t||^2 + a^2||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2)||\text{div}\, u||^2\big).$$

Nota-se da referida identidade acima que a energia $\mathcal{E}(t)$ é uma função decrescente do tempo t, o que caracteriza o sistema (2.1)-(2.3) como dissipativo.

Neste trabalho consideramos o seguinte espaço de Hilbert:

$$X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$$

com o produto interno definido por

$$(U, V)_X = \int_{\mathbb{R}^n} u_1 \cdot v_1 \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u_1^i \cdot \nabla v_1^i \, dx$$
$$+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \text{div}(u_1)\, \text{div}(v_1)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_2 \cdot v_2 \, dx$$

para todo $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ em X.

Observação 2.1 *Vamos considerar a norma em $(H^1(\Omega))^n$ como sendo*

$$||u||_{(H^1(\Omega))^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + \, (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} |div(u)|^2 \, dx$$

dado pelas três primeiras integrais do produto interno em X definido acima.

Escrevendo o sistema (2.1)-(2.3) na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = AU(t) + BU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, o operador $A : D(A) \to X$ é dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ a^2\Delta + (b^2 - a^2)\nabla\mathrm{div} - I & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

com $D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e o operador $B : X \to X$ é dado por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -V(x) \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que existe um único $U(t)$ que satisfaz o problema

(2.4), consequentemente, existe uma única função $u = u(t, x)$ que satisfaz o sistema (2.1)-(2.3), ou seja, queremos mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Considere o sistema (2.1)-(2.3) com as seguintes condições $a > 0$ e $b > 0$ tal que $0 < a^2 < b^2$ e a função potencial $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então se $(u_0, u_1) \in X$ existe uma única solução fraca $u(t, x)$ tal que*

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n)^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n)^n).$$

Para provar o Teorema 2.1 vamos mostrar que $A + B$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. Pela teoria de semigrupos isso ocorre se B é linear e limitado e A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Lema 2.1 *O operador $B : X \to X$ definido acima é um operador linear e limitado.*

Demonstração: Dados $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ no espaço energia X, tem-se que

$$
\begin{aligned}
B(U+V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \\ I & -V(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ u_1 + v_1 - V(x)u_2 - V(x)v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ u_1 - V(x)u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ v_1 - V(x)v_2 \end{pmatrix} \\
&= BU + BV,
\end{aligned}
$$

o que mostra que B é linear.

Para mostrar que B é limitado vamos estimar a norma de BU em $X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. Seja $U = (u_1, u_2)$ então

$$
\begin{aligned}
||BU||_X^2 &= ||\ (0\ ,\ u_1 - V(x)u_2)\ ||_X^2 \\
&= ||u_1 - V(x)u_2||^2 \\
&\leq 2\,||u_1||^2 + 2\,||V||_{L^\infty}^2\,||u_2||^2 \\
&\leq \max\{2,\ 2\,||V||_{L^\infty}^2\}\,||U||_X^2.
\end{aligned}
$$

Logo, $||B||_{\mathcal{L}(X)} \leq \max\{2,\, 2\,||V||_{L^\infty}^2\}^{1/2}$.

■

Para mostrar que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 vamos usar o Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, vamos mostrar que A é m-dissipativo e densamente definido.

Como $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^2(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n$$

temos que $(H^2(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$. Também $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Logo, $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$.

Portanto, o domínio de A, $D(A)$, é denso no espaço energia X.

Lema 2.2 *O operador A definido em (2.5) é m-dissipativo.*

Demonstração: Para que A seja um operador m-dissipativo é suficiente mostrar que A é dissipativo e que $Im(I - A) = X$.

Seja $U=(u,v)\in D(A)$ então

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_X &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ a^2\Delta u+(b^2-a^2)\nabla \mathrm{div}\, u - u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v\cdot u\,dx + a^2\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\nabla v^i\cdot\nabla u^i\,dx \\
&+ (b^2-a^2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}\, v\,\mathrm{div}\, u\,dx + a^2\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u\cdot v\,dx \\
&+ (b^2-a^2)\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\mathrm{div}\, u\cdot v\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u\cdot v\,dx,
\end{aligned}
$$

pela definição do produto interno em X e $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$.

Usando o Lema 1.1, o Teorema da Divergência e a identidade

$\mathrm{div}(v\,\mathrm{div}\, u)=(\nabla\mathrm{div}\, u\cdot v)+\mathrm{div}\, v\,\mathrm{div}\, u$ temos

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_X &= a^2\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\nabla v^i\cdot\nabla u^i\,dx + (b^2-a^2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}\, v\,\mathrm{div}\, u\,dx \\
&+ a^2\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}(v:\nabla u)\,dx - a^2\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\nabla v^i\cdot\nabla u^i\,dx \\
&+ (b^2-a^2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}(v\,\mathrm{div}\, u)\,dx - (b^2-a^2)\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}\, v\,\mathrm{div}\, u\,dx = 0,
\end{aligned}
$$

o que mostra que $A:D(A)\to X$ é dissipativo.

Resta provar que $Im(I-A)=X$.

Um dos lados da continência é fácil de mostrar. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in Im(I-A)$ então existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$(I-A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) \subset X$ e $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$ temos $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$.

Portanto, $Im(I-A) \subset X$.

Já a outra inclusão será dividida em etapas. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$ queremos encontrar $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$(I-A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Vamos definir a aplicação

$$\mathfrak{a} : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathfrak{a}(u,\varphi) = a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx$$
$$+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx.$$

Na sequência vamos mostrar que a função $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$ é bilinear, contínua e coerciva.

a) Bilinearidade de $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$. Dado φ e ϕ em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(u,\varphi+\lambda\phi) &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla (\varphi+\lambda\phi)^i \, dx \\
&+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} (\varphi+\lambda\phi) \, dx \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot (\varphi+\lambda\phi) \, dx \\
&= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx + \lambda a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla \phi^i \, dx \\
&+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx + \lambda (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \phi \, dx \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \phi \, dx \\
&= \mathfrak{a}(u,\varphi) + \lambda \, \mathfrak{a}(u,\phi),
\end{aligned}$$

pois, os operadores ∇ e div são lineares.

A prova da linearidade em relação a primeira componente é provada de maneira completamente análoga. Assim, a função $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$ é bilinear.

b) Coercividade de $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$. Seja $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$, então

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(u,u) &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla u^i \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} u \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot u \, dx \\
&= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\nabla u^i|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx \\
&\geq a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx \\
&= ||u||^2_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}.
\end{aligned}$$

c) Continuidade de $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$. Dado u e φ em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ temos

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{a}(u,\varphi)| &\leq a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \right| dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{div} u| \, |\operatorname{div} \varphi| \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u| \, |\varphi| \, dx \\
&\leq a^2 \sum_{i=1}^n ||\nabla u^i|| \; ||\nabla \varphi^i|| + (b^2 - a^2) ||\operatorname{div} u|| \; ||\operatorname{div} \varphi|| + 2 \, ||u|| \; ||\varphi|| \\
&\leq C ||u||_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n} ||\varphi||_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}.
\end{aligned}$$

Agora, consideramos o funcional $L : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\varphi \, dx.$$

Vamos mostrar que L é linear e contínua.

d) Linearidade de L. Dado φ e ϕ em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle L, (\varphi + \lambda\phi) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\phi \, dx \\
&= \langle L, \varphi \rangle + \lambda \langle L, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

e) Continuidade de L. Como $(f, g) \in X$ tem-se que f e g pertencem a $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$. Assim, dado $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ temos

$$\begin{aligned}
|\langle L, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\varphi \, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f+g)\varphi| \, dx \\
&\leq ||f+g|| \; ||\varphi|| \\
&\leq ||f+g|| \; ||\varphi||_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram existe $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ tal que

$$\mathfrak{a}(u,\varphi) = \langle L, \varphi\rangle \text{ para todo } \varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx \\ + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\varphi \, dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$.

Em particular

$$\begin{aligned} a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx \\ + 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)\varphi \, dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Isso implica que

$$f + g = -a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \operatorname{div} u + 2u$$

no sentido das distribuições, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Como $f \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $g \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$, aplicando o teorema da regularidade elíptica para o operador elíptico de segunda ordem

$$-a^2\Delta - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div} + 2I$$

concluímos que $u \in (H^2(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$f + g = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + 2u \qquad \text{em } (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Seja $v = u - f$. Então tem-se que $v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$g = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + u + v.$$

Dessa forma, provamos que $U = (u, v) \in D(A)$ satisfaz
$(I - A)U = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Logo, $Im(I - A) = X$ e o lema está provado. ■

Usando os Lemas 2.1 e 2.2, segue da Proposição 1.6 que $A + B$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. Seja

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por $A+B$ então $U(t) = S(t)U_0$ é a solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} S(t)U_0 = (A+B)S(t)U_0 \\ S(0)U_0 = U_0. \end{cases}$$

Também se $U_0 = (u_0, u_1) \in X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ temos que

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$$

logo, a primeira componente $u(t)$ de $U(t) = S(t)U_0$ satisfaz

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

e é a única solução fraca do sistema linear de ondas elásticas (2.1)-(2.3). Além disso, se $U_0 = (u_0, u_1) \in D(A) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^2(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^2(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

é única solução forte do mesmo sistema.

Capítulo 3

Taxas de Decaimento para a Energia Total do Sistema Linear

Neste capítulo vamos encontrar taxas de decaimento para a energia total associada ao sistema de ondas elásticas linear para diferentes condições sobre a função potencial $V(t, x)$.

Para encontrar essas taxas de decaimento para a energia total do sistema vamos usar o método dos multiplicadores. Para começar vamos multiplicar formalmente a equação (2.1) por gu, onde $g(t)$ é uma função que depende somente de t:

$$
\begin{aligned}
&gu \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + V(t,x)u_t\big) \\
&= g(u \cdot u_{tt}) - a^2 g\,(u \cdot \Delta u) - (b^2 - a^2) g\,(u \cdot \nabla \mathrm{div}\, u) + gV(t,x)(u \cdot u_t) = 0.
\end{aligned}
$$

Usando os itens a) e c) do Lema 1.1 e o fato de que

$$
\frac{d}{dt}(u \cdot u_t) = (u \cdot u_{tt}) + |u_t|^2
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&gu \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + V(t,x)u_t\big) \\
&= g\frac{d}{dt}(u \cdot u_t) - g|u_t|^2 - a^2 g\,\mathrm{div}(u : \nabla u) + a^2 g|\nabla u|^2 \qquad (3.1)\\
&- (b^2 - a^2) g\,\mathrm{div}(u\,\mathrm{div}\, u) + (b^2 - a^2) g\,(\mathrm{div}\, u)^2 + \frac{g}{2}\,V(t,x)\frac{d}{dt}|u|^2 = 0,
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$.

Agora vamos multiplicar formalmente a equação (2.1) por fu_t, onde

$f(t)$ é uma função que depende somente de t:

$$f u_t \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \mathrm{div}\, u + V(t,x) u_t\big)$$

$$= f(u_t \cdot u_{tt}) - a^2 f\,(u_t \cdot \Delta u) - (b^2 - a^2) f\,(u_t \cdot \nabla \mathrm{div}\, u) + f V(t,x) |u_t|^2 = 0.$$

Usando os itens b) e d) do Lema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} & f u_t \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \mathrm{div}\, u + V(t,x) u_t\big) \\ & = \frac{f}{2} \frac{d}{dt} |u_t|^2 - a^2 f\, \mathrm{div}(u_t : \nabla u) + \frac{a^2 f}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 \\ & - (b^2 - a^2) f\, \mathrm{div}(u_t\, \mathrm{div}\, u) + \frac{(b^2 - a^2) f}{2} \frac{d}{dt} (\mathrm{div}\, u)^2 + f V(t,x) |u_t|^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo $t \geq 0$.

Somando as igualdades (3.1) e (3.2) temos

$$\begin{aligned} & \big(g u + f u_t\big) \cdot \big(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \mathrm{div}\, u + V(t,x) u_t\big) \\ & = \frac{f}{2} \frac{d}{dt} \left(|u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\mathrm{div}\, u)^2\right) + g \frac{d}{dt} (u \cdot u_t) \\ & + \frac{g}{2} V(t,x) \frac{d}{dt} |u|^2 - g |u_t|^2 - a^2 g\, \mathrm{div}(u : \nabla u) + a^2 g |\nabla u|^2 \\ & - (b^2 - a^2) g\, \mathrm{div}(u\, \mathrm{div}\, u) + (b^2 - a^2) g\, (\mathrm{div}\, u)^2 - a^2 f\, \mathrm{div}(u_t : \nabla u) \\ & - (b^2 - a^2) f\, \mathrm{div}(u_t\, \mathrm{div}\, u) + f V(t,x) |u_t|^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $t \geq 0$.

Vamos considerar a função

$$e(t,x) = \frac{f}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)$$
$$+ g(u \cdot u_t) + \frac{g}{2}\,V(t,x)|u|^2 - \frac{g_t}{2}|u|^2. \tag{3.4}$$

Assim

$$\frac{d}{dt}e(t,x) = \frac{f_t}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)$$
$$+ \frac{f}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)$$
$$+ g_t(u\cdot u_t) + g\frac{d}{dt}(u\cdot u_t) + \frac{g_t}{2}\,V(t,x)|u|^2 + \frac{g}{2}\,V_t(t,x)|u|^2$$
$$+ \frac{g}{2}\,V(t,x)\,\frac{d}{dt}|u|^2 - \frac{g_{tt}}{2}|u|^2 - \frac{g_t}{2}\frac{d}{dt}|u|^2.$$

Como $g_t(u\cdot u_t) = \dfrac{g_t}{2}\dfrac{d}{dt}|u|^2$, temos

$$\frac{f}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right) + g\frac{d}{dt}(u\cdot u_t) + \frac{g}{2}\,V(t,x)\,\frac{d}{dt}|u|^2$$
$$= \frac{d}{dt}e(t,x) - \frac{f_t}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)$$
$$- \frac{g_t}{2}\,V(t,x)|u|^2 - \frac{g}{2}\,V_t(t,x)|u|^2 + \frac{g_{tt}}{2}|u|^2, \tag{3.5}$$

para todo $t \geq 0$.

Substituindo a igualdade (3.5) na igualdade (3.3) temos

$$\frac{d}{dt}e(t,x) - \frac{f_t}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right) - \frac{g_t}{2}\,V(t,x)|u|^2$$

$$- \frac{g}{2}\,V_t(t,x)|u|^2 + \frac{g_{tt}}{2}|u|^2 - g|u_t|^2 - a^2 g\operatorname{div}(u:\nabla u) + a^2 g|\nabla u|^2$$

$$- (b^2-a^2)g\operatorname{div}(u\operatorname{div} u) + (b^2-a^2)g\,(\operatorname{div} u)^2 - a^2 f\operatorname{div}(u_t:\nabla u)$$

$$- (b^2-a^2)f\operatorname{div}(u_t\operatorname{div} u) + fV(t,x)|u_t|^2 = 0.$$

Reorganizando os termos acima de forma adequada encontramos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}e(t,x) + \left(fV(t,x) - g - \frac{f_t}{2}\right)|u_t|^2 + \left(\frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2}\,V(t,x) - \frac{g}{2}\,V_t(t,x)\right)|u|^2$$

$$+ a^2\left(g - \frac{f_t}{2}\right)|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\left(g - \frac{f_t}{2}\right)(\operatorname{div} u)^2 - a^2 g\operatorname{div}(u:\nabla u)$$

$$- (b^2-a^2)g\operatorname{div}(u\operatorname{div} u) - a^2 f\operatorname{div}(u_t:\nabla u) - (b^2-a^2)f\operatorname{div}(u_t\operatorname{div} u)$$

$$= \frac{d}{dt}e(t,x) + G(t,x) = 0, \tag{3.6}$$

para todo $t \geq 0$, onde

$$
\begin{aligned}
G(t,x) = &\left(fV(t,x) - g - \frac{f_t}{2}\right)|u_t|^2 + \left(\frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2}\,V(t,x) - \frac{g}{2}\,V_t(t,x)\right)|u|^2 \\
&+ a^2\left(g - \frac{f_t}{2}\right)|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)\left(g - \frac{f_t}{2}\right)(\operatorname{div} u)^2 - a^2 g\operatorname{div}(u : \nabla u) \\
&- (b^2 - a^2)g\operatorname{div}(u\operatorname{div} u) - a^2 f\operatorname{div}(u_t : \nabla u) - (b^2 - a^2)f\operatorname{div}(u_t\operatorname{div} u),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

para todo $t \geq 0$.

Integrando em relação a x, obtemos que

$$
\frac{d}{dt}E(t) + F(t) = 0 \tag{3.8}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e(t,x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)\,dx \qquad (3.9)\\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} g(u\cdot u_t)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g}{2}\,V(t,x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g_t}{2}|u|^2\,dx
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
F(t) = &\int_{\mathbb{R}^n} \left(fV(t,x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 \, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} \, V(t,x) - \frac{g}{2} \, V_t(t,x) \Big) |u|^2 \, dx \qquad (3.10) \\
&+ a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 \, dx,
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$, pois, pelo Teorema da Divergência temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u : \nabla u) \, dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t : \nabla u) \, dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u \operatorname{div} u) \, dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) \, dx = 0.$$

Observação 3.1 *Tomando $f = 1$ e $g = 0$ em (3.8) obtemos a identidade da energia*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \mathcal{F}(t) = 0$$

onde

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} V(t,x)|u_t|^2\,dx \tag{3.11}$$

é o termo dissipativo e

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(div\,u)^2\right)\,dx \tag{3.12}$$

é a energia total do sistema.

Usando a propriedade da velocidade finita de propagação (ver [5],[8]) temos que $u(t,x) = 0$ fora de $\Omega(t)$, onde

$$\Omega(t) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$$

com R o raio do suporte dos dados iniciais.

Assim, para todo $t \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} E(t) = &\int_{\Omega(t)} \frac{f}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)\,dx \\ &+ \int_{\Omega(t)} g(u \cdot u_t)\,dx + \int_{\Omega(t)} \frac{g}{2}\,V(t,x)|u|^2\,dx - \int_{\Omega(t)} \frac{g_t}{2}|u|^2\,dx \end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$
\begin{aligned}
F(t) = &\int_{\Omega(t)} \left(fV(t,x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 \, dx \\
&+ \int_{\Omega(t)} \Big(\frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2}\, V(t,x) - \frac{g}{2}\, V_t(t,x) \Big) |u|^2 \, dx \\
&+ a^2 \int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Nas próximas seções assumiremos diferentes condições para a função potencial $V(t,x)$. Para cada condição encontraremos taxas de decaimento para a energia total do sistema linear (2.1)-(2.3).

O roteiro da prova será o seguinte: Pela identidade (3.8) temos que

$$
\frac{d}{dt} E(t) + F(t) = 0, \qquad \forall \; t \geq 0. \tag{3.15}
$$

Vamos encontrar funções f e g de tal forma que:

i) $F(t) \geq 0, \quad \forall \; t \geq t_0$.

ii) $(1+t)^{\kappa} \mathcal{E}(t) \leq C E(t), \quad \forall \; t \geq t_0$,

com C e t_0 constantes positivas, onde $\mathcal{E}(t)$ é a energia total do sistema definida em (3.12).

Dessa forma, integrando (3.15) em (t, t_0) e usando os itens i) e ii) acima concluímos que a energia total decai para zero mais rápido que a função $(1+t)^{-\kappa}$.

3.1 Função potencial $V(x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|}$

Consideramos o potencial $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|} \tag{3.16}$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Também consideramos as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1+t, \qquad f(t) = (1+t)^{1-\delta} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}$$

com $t \geq 0$ e $\delta \geq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{C_0}{b} < \delta < 1 \;\text{ se }\; 0 < C_0 \leq b \\ &0 \leq \delta < 1 \;\text{ se }\; 0 < b < C_0. \end{aligned}$$

Vamos supor as seguintes hipóteses sobre os dados iniciais

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \text{ e}$$

$$\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(u_1) \subset \{|x| \leq R\},$$

onde $R > 0$ é um número real fixo.

Lema 3.1 *Considerando as hipóteses acima, existe $t_0 > 0$ tal que as funções $h(t)$, $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem:*

i) $2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

ii) $2g(t) - f_t(t) = 0;$

iii) $g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

iv) $g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

para todo $t \geq t_0$ e $\Omega(t) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$ onde R é o raio do suporte dos dados iniciais.

Demonstração:

i) Usando as definições de $f(t)$ e $g(t)$ temos

$$\begin{aligned}
&2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \\
&\quad = 2(1+t)^{1-\delta}V(x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\
&\quad = 2(1+t)^{-\delta}((1+t)V(x) - 1 + \delta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 2(1+t)^{-\delta}\left((1+t)\frac{C_0}{1+|x|}-1+\delta\right)\\
&\geq 2(1+t)^{-\delta}\left((1+t)\frac{C_0}{1+bt+R}-1+\delta\right),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Omega(t)$.

Observe que $(1+t)^{-\delta} > 0$ e

$$
\lim_{t\to\infty}\left((1+t)\frac{C_0}{1+bt+R}-1+\delta\right)=\frac{C_0}{b}-1+\delta>0,
$$

pois, se $0 < C_0 \leq b$ temos que $1-\dfrac{C_0}{b} < \delta$ e, portanto, $\dfrac{C_0}{b}-1+\delta > 0$. Se $0 < b < C_0$ temos que $0 < \dfrac{C_0}{b}-1$ e assim $0 < \delta < \dfrac{C_0}{b}-1+\delta$.

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$
2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \quad \text{para todo } t \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega(t).
$$

ii) $2g(t) - f_t(t) = (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} = 0$, para todo $t \geq 0$,

isto é, ii) é trivial.

iii) Da definição de $g(t)$ e sendo $V_t(x) = 0$ temos

$$
\begin{aligned}
&g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x)\\
&\quad = g_{tt}(t) - g_t(t)V(x)\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\,\delta\,(1+t)^{-1-\delta}V(x)\\
&\quad = \delta\,\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}\big(1+\delta+(1+t)V(x)\big) \geq 0,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, pois $\delta < 1$.

iv) Usando as definições de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
&g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t)\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-\delta}V(x) + \delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta} - \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-\delta}V(x) - (1-\delta)\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\big((1+t)V(x) - 1 + \delta\big)\\
&\quad \geq \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\left((1+t)\frac{C_0}{1+bt+R} - 1 + \delta\right),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Omega(t)$ e $t \geq 0$.

Analogamente ao que foi feito no item i) concluímos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \quad \text{para todo } \; t \geq t_0 \; \text{ e } \; x \in \Omega(t).$$

■

Usando o Lema 3.1 concluímos que

$$F(t) \geq 0, \tag{3.17}$$

para todo $t \geq t_0$, onde $F(t)$ foi definido em (3.10).

Por (3.8) temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo $t \geq t_0$. Integrando de t_0 a t, temos,

$$E(t) \leq E(t_0), \tag{3.18}$$

para todo $t \geq t_0$.

Nos próximos dois lemas provaremos que $(1+t)^{1-\delta}\mathcal{E}(t) \leq CE(t)$, para todo $t \geq t_0$.

Lema 3.2 *Com as hipóteses do início da seção temos que*

$$\int_{\Omega(t)} \Big(\big(g(t)V(x) - g_t(t)\big)|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \Big)\, dx \geq 0,$$

para todo $t \geq t_0$.

Demonstração: Pelo item iv) do Lema 3.1 temos

$$g(t)V(x) - g_t(t) \geq h^{-1}(t)g(t),$$

para todo $t \geq t_0$ e $x \in \Omega(t)$.

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(t)} \Big(\big(g(t)V(x) - g_t(t)\big)|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \Big)\, dx \\ &\quad \geq \int_{\Omega(t)} \Big(h^{-1}(t)g(t)|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \Big)\, dx \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$, pois,

$$\int_{\Omega(t)} -2g(t)\big(h^{-\frac{1}{2}}(t)u \cdot h^{\frac{1}{2}}(t)u_t\big)\, dx \leq \int_{\Omega(t)} \Big(g(t)h^{-1}(t)|u|^2 + g(t)h(t)|u_t|^2 \Big)\, dx.$$

∎

Lema 3.3 *Seja* $u = u(t,x)$ *uma solução fraca do sistema linear de ondas* *elásticas. Assumindo as hipóteses do início da seção temos que*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \big(f(t)-h(t)g(t)\big)|u_t|^2 + f(t)\big(a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(div\, u)^2\big)\, dx \leq E(t)$$

para todo $t \geq t_0$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} E(t) = &\int_{\Omega(t)} \frac{f}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)\, dx \\ &+ \int_{\Omega(t)} g(u\cdot u_t)\, dx + \int_{\Omega(t)} \frac{g}{2}\, V(x)|u|^2\, dx - \int_{\Omega(t)} \frac{g_t}{2}\, |u|^2\, dx \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e pelo Lema 3.2

$$\int_{\Omega(t)} \big(gV(x)-g_t\big)|u|^2\, dx + 2\int_{\Omega(t)} g(u\cdot u_t)\, dx \geq -\int_{\Omega(t)} hg|u_t|^2\, dx,$$

para todo $t \geq t_0$ e $x \in \Omega(t)$, temos que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \left(f\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right) - hg|u_t|^2\right)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \left((f-hg)|u_t|^2 + f\left(a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\right)\right)\, dx, \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$.

$\blacksquare$

Teorema 3.1 *Seja $u = u(t, x)$ uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3). Assumindo as hipóteses do início da seção tem-se que*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)} E(t_0) \tag{3.19}$$

para todo $t \geq t_0$, onde $k^{-1} = max \left\{ 1, \dfrac{1+\delta}{2} \right\}$.

Demonstração: Substituindo $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ na conclusão do Lema 3.3 e usando (3.18) temos

$$\begin{aligned}
E(t_0) \geq & \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \left((1+t)^{1-\delta} - \frac{1-\delta}{2} (1+t)^{1-\delta} \right) |u_t|^2 \, dx \\
& + \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div}(u))^2 \, dx \\
& = \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} \left(1 - \frac{1-\delta}{2} \right) |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div}(u))^2 \, dx \\
& = \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \int_{\Omega(t)} \frac{1+\delta}{2} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2 \, dx \\
& = \frac{1}{2} (1+t)^{1-\delta} \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\} \int_{\Omega(t)} |u_t|^2 + a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2 \, dx \\
& = (1+t)^{1-\delta} \max \left\{ 1, \frac{1+\delta}{2} \right\} \mathcal{E}(t)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$.

Portanto,

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{\delta-1}E(t_0)$$

para todo $t \geq t_0$.

■

Como o funcional $\mathcal{E}(t)$ é contínuo existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{E}(t) \leq CE(t_0)(1+t)^{\delta-1}$$

para todo $t \geq 0$.

3.2 Função potencial $V(t,x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|+t}$

Consideramos o potencial $V(t,x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$V(t,x) \geq \frac{C_0}{1+|x|+t} \tag{3.20}$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Também vamos precisar de uma condição sobre a derivada de $V(t,x)$. Assumindo que $V_t(t,x) \leq 0$, para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Consideramos também as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \qquad f(t) = (1+t)^{1-\delta} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}$$

com $t \geq 0$ e $\delta \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} &1 - \frac{C_0}{b+1} < \delta < 1 \ \text{ se } \ 0 < C_0 \leq b+1 \\ &0 \leq \delta < 1 \ \text{ se } \ 0 < b+1 < C_0. \end{aligned}$$

As hipóteses sobre os dados iniciais são as mesmas da seção anterior.

Lema 3.4 *Com as hipóteses acima temos que existe $t_0 > 0$ tal que as funções $h(t)$, $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem:*

i) $2f(t)V(t,x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

ii) $2g(t) - f_t(t) = 0;$

iii) $g_{tt}(t) - g_t(t)V(t,x) - g(t)V_t(t,x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$

iv) $g(t)V(t,x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

para todo $t \geq t_0$ e $\Omega(t) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$ onde R é o raio do suporte dos dados iniciais.

Demonstração:

i) Substituindo $f(t)$ e $g(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
&2f(t)V(t,x) - f_t(t) - 2g(t) \\
&\quad = 2(1+t)^{1-\delta}V(t,x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\
&\quad = 2(1+t)^{-\delta}\big((1+t)V(t,x) - 1 + \delta\big) \\
&\quad \geq 2(1+t)^{-\delta}\left((1+t)\frac{C_0}{1+|x|+t} - 1 + \delta\right) \\
&\quad \geq 2(1+t)^{-\delta}\left((1+t)\frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta\right),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Omega(t)$.

Tem-se que $(1+t)^{-\delta} > 0$ e

$$
\lim_{t\to\infty}\left((1+t)\frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta\right) = \frac{C_0}{b+1} - 1 + \delta > 0,
$$

devido as hipóteses sobre δ no ínicio desta seção.

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$
2f(t)V(t,x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.
$$

ii) $2g(t) - f_t(t) = (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} = 0$, para todo $t \geq 0$.

iii) Como $V_t(t,x) \leq 0$ temos da limitação inferior de $V(t,x)$ que

$$
\begin{aligned}
&g_{tt}(t) - g_t(t)V(t,x) - g(t)V_t(t,x)\\
&\quad \geq g_{tt}(t) - g_t(t)V(t,x)\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\,\delta\,(1+t)^{-1-\delta}V(t,x)\\
&\quad = \delta\frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-2-\delta}\big(1+\delta+(1+t)V(t,x)\big) \geq 0,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, pois $\delta < 1$.

iv) Usando a definição de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ temos da hipótese da limitação sobre $V(t,x)$ que

$$
\begin{aligned}
&g(t)V(t,x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t)\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-\delta}V(t,x) + \delta\frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta} - \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-\delta}V(t,x) - (1-\delta)\frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\big((1+t)V(t,x) - 1 + \delta\big)\\
&\quad \geq \frac{1-\delta}{2}\,(1+t)^{-1-\delta}\left((1+t)\,\frac{C_0}{1+(b+1)t+R} - 1 + \delta\right),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Omega(t)$, com $t \geq 0$.

Analogamente ao que foi feito na prova do item i) deste lema concluímos que

$$g(t)V(t,x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \text{ para todo } t \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega(t).$$

■

Usando o Lema 3.4 concluímos que

$$F(t) \geq 0, \tag{3.21}$$

para todo $t \geq t_0$, onde $F(t)$ foi definido em (3.10).

Logo, por (3.8),

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo $t \geq t_0$. Integrando de t_0 a t, temos,

$$E(t) \leq E(t_0) \tag{3.22}$$

para todo $t \geq t_0$.

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, vamos encontrar taxas de decaimento para a energia total do sistema linear. As demonstrações dos dois próximos lemas são análogas as demonstrações dos Lemas 3.2 e 3.3, respectivamente.

Lema 3.5 *Com as hipóteses do Lema 3.4 temos que*

$$\int_{\Omega(t)} \Big(\big(g(t)V(t,x) - g_t(t)\big)|u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \Big)\, dx \geq 0,$$

para todo $t \geq t_0$.

Lema 3.6 *Supondo que* $u = u(t,x)$ *é uma solução fraca do sistema com as hipóteses do Lema 3.4 temos que*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \big(f(t) - h(t)g(t)\big)|u_t|^2 + f(t)\big(a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(div\, u)^2\big)\, dx \leq E(t) \tag{3.23}$$

para todo $t \geq t_0$.

Teorema 3.2 *Seja* $u = u(t,x)$ *uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3). Assumindo as hipóteses do Lema 3.4 tem-se a seguinte estimativa para a energia total*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)} E(t_0), \quad \forall\ t \geq t_0, \tag{3.24}$$

onde $k^{-1} = max\left\{1, \dfrac{1+\delta}{2}\right\}$.

A demonstração do Teorema 3.2 é análoga a demonstração do Teorema 3.1.

3.3 Função potencial $V(x) \geq \dfrac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$

Vamos agora considerar o potencial $V(t,x) = V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1+|x|)^\alpha}$$

com $C_0 > 0$ uma constante e $\alpha \in (0,1)$.

Observamos que pela propriedade da velocidade finita de propagação tem-se

$$V(x) \geq \frac{C_0}{(1+bt+R)^\alpha} \tag{3.25}$$

para todo $x \in \Omega(t)$.

Para conseguir estimar a energia do sistema vamos começar estimando a função $F(t)$ escolhendo funções $f(t)$ e $g(t)$ adequadas de tal forma que tenhamos

$$F(t) \geq 0.$$

Escolhamos as funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \qquad f(t) = 1 + t \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{1}{2}$$

com $t \geq 0$.

As hipóteses sobre os dados iniciais são as mesmas da seção anterior.

Lema 3.7 *Com as hipóteses acima temos que existe $t_0 > 0$ tal que as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ satisfazem:*

i) $2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

ii) $2g(t) - f_t(t) = 0;$

iii) $g_{tt}(t) - g_t(t)V(x) - g(t)V_t(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$

iv) $g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \Omega(t);$

para todo $t \geq t_0$ com $\Omega(t) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x| \leq bt + R\}$ onde R é o raio do suporte dos dados iniciais.

Demonstração: Notamos que a demonstração dos itens ii) e iii) são imediatas.

i) Usando a limitação inferior sobre $V(t,x)$ e as definições das funções $f(t)$ e $g(t)$ combinadas com (3.25) temos que

$$\begin{aligned}
&2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \\
&\quad = 2(1+t)V(x) - 2 \\
&\quad \geq \frac{2(1+t)C_0}{(1+bt+R)^\alpha} - 2 \\
&\quad \geq 2(1+t)^{1-\alpha}\left(\frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1}\right),
\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega(t)$, com $t \geq 0$.

Como $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1}\right) = \frac{C_0}{b^\alpha} > 0.$$

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$2f(t)V(x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.$$

iv) Substituindo $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ e usando (3.25) temos

$$
\begin{aligned}
& g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \\
& \geq \frac{C_0}{2(1+bt+R)^\alpha} - \frac{1}{2}(1+t)^{-1} \\
& = \frac{1}{2}(1+t)^{-\alpha}\left(\frac{C_0(1+t)^\alpha}{(1+bt+R)^\alpha} - (1+t)^{\alpha-1}\right)
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Omega(t)$, com $t \geq 0$.

Analogamente ao que foi feito no item i) concluímos que

$$g(t)V(x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega(t), \text{ com } t \geq t_0.$$

$\blacksquare$

Observação 3.2 *Usando o Lema 3.7 concluímos que*

$$F(t) \geq 0, \tag{3.26}$$

para todo $t \geq t_0$, onde $F(t)$ foi definido em (3.10).

Logo, por (3.8),

$$\frac{d}{dt}E(t) = -F(t) \leq 0,$$

para todo $t \geq t_0$. Integrando de t_0 a t, temos,

$$E(t) \leq E(t_0). \tag{3.27}$$

Lema 3.8 *Com as hipóteses do Lema 3.7 temos que para todo $t \geq t_0$, vale que*

$$\int_{\Omega(t)} \Big(\big(g(t)V(x) - g_t(t) \big) |u|^2 + h(t)g(t)|u_t|^2 + 2g(t)(u \cdot u_t) \Big) \, dx \geq 0.$$

Lema 3.9 *Supondo que $u = u(t,x)$ é uma solução fraca do sistema e assumindo as hipóteses do Lema 3.7 temos que para todo $t \geq t_0$*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \big(f(t) - h(t)g(t) \big) |u_t|^2 + f(t) \big(a^2 |\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(div\, u)^2 \big) \, dx \leq E(t).$$

As demonstrações dos Lemas 3.8 e 3.9 são análogas as demonstrações dos Lemas 3.2 e 3.3, respectivamente.

Teorema 3.3 *Seja $u = u(t,x)$ uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3) com as hipóteses do Lema 3.7. Então*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-1} E(t_0) \tag{3.28}$$

para todo $t \geq t_0$, *onde* $k^{-1} = max\left\{1, \frac{1+\delta}{2}\right\}$.

A demonstração do Teorema 3.3 é análogo ao Teorema 3.1

3.4 Função potencial de Euler-Poisson - Darboux

Nesta seção vamos considerar a função potencial $V(t,x)$ de Euler-Poisson-Darboux. Com as hipóteses sobre $V(t,x)$ vamos obter taxas de decaimento da energia total sem a necessidade de dados iniciais com suporte compacto.

Esse potencial satisfaz a hipótese $V(t,x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ com

$$(1+t)V(t,x) \geq A(x),$$

onde $A(x)$ é uma função regular limitada em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} A(x) > 0.$$

Além disso, assumimos a condição de que $V_t(t,x) \leq 0$, para todo

$(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Escolhemos $\delta \geq 0$ tal que

$$1 - \alpha \leq \delta < 1 \ \text{ se } 0 < \alpha < 1$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \ \text{ se } \alpha \geq 1.$$

Neste caso precisamos refazer o Lema 3.1 e os outros lemas terão demonstrações análogas.

Lema 3.10 *Supondo que $V(t, x)$ é uma função potencial de Euler-Poisson-Darboux, temos que as funções*

$$h(t) = 1 + t, \qquad f(t) = (1+t)^{1-\delta} \qquad e \qquad g(t) = \frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta},$$

satisfazem:

i) $2f(t)V(t, x) - f_t(t) - 2g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$

ii) $2g(t) - f_t(t) = 0;$

iii) $g_{tt}(t) - g_t(t)V(t, x) - g(t)V_t(t, x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$

iv) $g(t)V(t, x) - g_t(t) - h^{-1}(t)g(t) \geq 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Note que a demonstração do item ii) é imediata.

i) Usando as definições de $f(t)$ e $g(t)$ temos, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, que

$$
\begin{aligned}
&2f(t)V(t,x) - f_t(t) - 2g(t) \\
&\quad = 2(1+t)^{1-\delta}V(t,x) - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} - (1-\delta)(1+t)^{-\delta} \\
&\quad = 2(1+t)^{-\delta}\big((1+t)V(t,x) - 1 + \delta\big) \\
&\quad \geq 2(1+t)^{-\delta}(A(x) - 1 + \delta) \\
&\quad \geq 2(1+t)^{-\delta}(\alpha - 1 + \delta) \geq 0,
\end{aligned}
$$

pois, se $0 < \alpha < 1$ temos que $1 - \alpha \leq \delta < 1$ portanto $0 \leq \alpha - 1 + \delta$ e se $\alpha \geq 1$ temos que $\alpha - 1 \geq 0$ e assim $\alpha - 1 + \delta \geq 0$.

iii) Da definição de $g(t)$ e como $V_t(t,x) \leq 0$ temos para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$ que

$$
\begin{aligned}
&g_{tt}(t) - g_t(t)V(t,x) - g(t)V_t(t,x) \\
&\quad \geq g_{tt}(t) - g_t(t)V(t,x) \\
&\quad = \frac{1-\delta}{2}(-\delta)(-1-\delta)(1+t)^{-2-\delta} + \frac{1-\delta}{2}\,\delta\,(1+t)^{-1-\delta}V(t,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta\,\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}\big(1+\delta+(1+t)V(t,x)\big)\\
&\geq \delta\,\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}(1+\delta+A(x))\\
&\geq \delta\,\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-2-\delta}(1+\delta+\alpha)\geq 0.
\end{aligned}
$$

iv) As definições de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ implicam, para $x\in\mathbb{R}^n$ e $t\geq 0$, que

$$
\begin{aligned}
&g(t)V(t,x)-g_t(t)-h^{-1}(t)g(t)\\
&\quad=\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(t,x)+\delta\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}-\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad=\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-\delta}V(t,x)-(1-\delta)\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}\\
&\quad=\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}\big((1+t)V(t,x)-1+\delta\big)\\
&\quad\geq\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}(A(x)-1+\delta)\\
&\quad\geq\frac{1-\delta}{2}(1+t)^{-1-\delta}(\alpha-1+\delta)\geq 0,
\end{aligned}
$$

pela definição de δ.

Isso conclui a prova deste lema.

$\blacksquare$

Usando o lema anterior e procedendo como na demostração do Teorema 3.1 podemos facilmente provar o seguinte resultado.

Teorema 3.4 *Seja* $[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. *Seja* $u = u(t,x)$ *uma solução fraca global para o sistema (2.1)-(2.3) com* $V(t,x)$ *o potencial de Euler-Poisson-Darboux. Então para todo* $t \geq 0$ *é valido que*

$$\mathcal{E}(t) \leq k(1+t)^{-(1-\delta)} E(t_0) \tag{3.29}$$

onde $k^{-1} = max\left\{1, \dfrac{1+\delta}{2}\right\}$.

Capítulo 4

Sistema Semilinear de Ondas Elásticas

Neste capítulo vamos estudar a existência de soluções globais e o comportamento assintótico da energia total associada ao seguinte sistema semilinear de ondas elásticas em $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div}\, u + V(x) u_t = |u|^{p-1} u \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = \epsilon u_0(x) \tag{4.2}$$

$$u_t(0,x) = \epsilon u_1(x) \tag{4.3}$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$ e $b > 0$ com $0 < a^2 < b^2$ e $\epsilon > 0$. E ainda, assumimos a seguinte condição sobre a potência p que aparece no termo não linear:

$$\begin{aligned} &\text{se } n = 2 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \infty \\ &\text{se } n \geq 3 \quad \text{então} \quad 1 + \frac{4}{n-1} < p < \frac{n+2}{n-2}. \end{aligned}$$

Considere $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$V(x) \geq \frac{C_0}{1 + |x|},$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Vamos supor as seguintes hipóteses sobre os dados iniciais

$$[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \text{ e}$$

$$\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(u_1) \subset \{|x| \leq R\},$$

onde $R > 0$ é um número real fixo.

A constante $\epsilon > 0$ que aparece nas condições iniciais será usada na prova da existência de solução global. Para $[u_0, u_1]$ fixos, vamos provar que existe ϵ_2 tal que o problema (4.1)-(4.3) possui solução global, desde que, $\epsilon < \epsilon_2$, ou seja, provaremos a existência de solução global somente para dados iniciais pequenos.

Observe que o termo não linear não aparece na energia. Isso dificulta a análise matemática do problema.

4.1 Existência de soluções locais

Nesta seção, vamos apresentar o resultado de existência de solução local para o sistema (4.1)-(4.3).

Considerando a mesma notação usada no Capítulo 2, podemos reescrever o sistema (4.1)-(4.3) da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = \big(A + B\big)\, U(t) + F(U(t)) \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $U(t) = (u(t), u_t(t))$, $U_0 = (u_0, u_1)$, $F(U(t)) = (0, |u|^{p-1}u)$ e $A : D(A) \subset X \to X$ e $B : X \to X$ são os operadores lineares definidos no Capítulo 2.

Usando a teoria de semigrupos obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Suponha que p e $V = V(x)$ satisfazem as condições apresentadas no início deste capítulo. Então, para dados iniciais $(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ com suporte contido no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \;/\; |x| \leq R\}$, $R > 0$ fixo, o problema (4.1)-(4.3) admite uma única solução local fraca $u = u(t,x)$, definida em algum intervalo maximal de existência $(0, T_m)$, tal que*

$$u \in C([0,T_m); (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0,T_m); (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

e satisfaz a propriedade da velocidade finita de propagação

$$u(t,x) = 0 \quad para \quad |x| \geq bt + R\,, \quad 0 \leq t < T_m\,.$$

Observação 4.1 *O tempo T_m depende dos dados iniciais e de $\epsilon > 0$. Assim, $T_m = T_m(\epsilon)$ e*

$$T_m(\epsilon) \geq \frac{C}{\epsilon}$$

com $C > 0$ uma constante dependendo dos dados iniciais.

Além disso, se $T_m(\epsilon) < \infty$ então,

$$\limsup_{t \to T_m} \left\{ \, ||u_t||^2 + a^2 ||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2) ||div\, u||^2 \right\} = +\infty. \tag{4.5}$$

4.2 Existência de soluções globais e taxas de decaimento para a energia

Na seção anterior mostramos que o sistema (4.1)-(4.3) tem solução local. Nesta seção, vamos provar a existência de soluções globais para dados iniciais pequenos e encontrar taxas de decaimento para a energia total associada ao sistema semilinear (4.1)-(4.3). Nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.2 *Assumindo as hipóteses do início do capítulo, supondo a condição de que*

$$F(n,p) = \frac{n(p-1) - p - 3}{p-1} > 1 - \frac{C_0}{b}$$

se $0 < C_0 \leq b$ *e considerando* δ *um número satisfazendo*

$$1 - \frac{C_0}{b} < \delta < F(n,p) \quad se \quad 0 < C_0 \leq b$$
$$0 \leq \delta < F(n,p) \quad se \quad C_0 > b,$$

então existe $\epsilon_2 > 0$ *tal que para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ *o problema (4.1)-(4.3) tem uma única solução global*

$$u \in C([0,\infty), (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0,\infty), (L^2(\mathbb{R}^n))^n),$$

satisfazendo

$$\mathcal{E}(t) \leq K I_0 (1+t)^{-(1-\delta)},$$

para todo $t \geq 0$ *com* K *uma constante positiva dependendo de* δ, R, p *e* $||V||_{L^\infty}$, *onde* $I_0 = ||u_1||^2 + a^2||\nabla u_0||^2 + (b^2 - a^2)||div\, u_0||^2$ *e*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(||u_t||^2 + a^2||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2)||div\, u||^2)$$

é a energia total do sistema.

Observação 4.2 *Para todo* $n \geq 2$ *tem-se que* $0 < F(n,p) < 1$.

De fato, por hipótese $p-1 > \dfrac{4}{n-1}$*, assim,*

$$F(n,p) = \frac{n(p-1)-p-3}{p-1} = \frac{(p-1)(n-1)-4}{p-1} > 0$$

para todo $n \geq 2$.

Se $n = 2$ *temos* $F(2,p) = \dfrac{2(p-1)-p-3}{p-1} = \dfrac{p-5}{p-1} < 1$*, pois* $p-5 < p-1$.

Agora, se $n \geq 3$ *temos por hipótese que* $p < \dfrac{n+2}{n-2}\cdot$ *Assim,* $n(p-1)-p-3 < p-1$ *e, portanto,*

$$F(n,p) = \frac{n(p-1)-p-3}{p-1} < 1.$$

Antes de demonstrar o Teorema 4.2 vamos encontrar algumas identidades e provar alguns lemas.

Multiplicando a equação (4.1) por $(fu_t + gu)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&(fu_t + gu)\cdot(u_{tt} - a^2\Delta u - (b^2-a^2)\nabla \operatorname{div} u + V(x)u_t) \\
&\quad = f|u|^{p-1}(u\cdot u_t) + g|u|^{p+1} \\
&\quad = \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{p+1}|u|^{p+1}\right) - \frac{f_t}{p+1}|u|^{p+1} + g|u|^{p+1},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde foi usado que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{p+1}|u|^{p+1}\right) = \frac{f_t}{p+1}|u|^{p+1} + f|u|^{p-1}(u \cdot u_t).$$

Observe que o termo que aparece a esquerda na igualdade acima é o mesmo termo que apareceu no Capítulo 3. Assim, integrando em relação a x obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(g - \frac{f_t}{p+1}\right)|u|^{p+1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{p+1}|u|^{p+1}\right) dx \quad (4.6)$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde

$$\begin{aligned} E(t) = &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f}{2}\left(|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2\right) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} g(u \cdot u_t)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g}{2} V(x)|u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g_t}{2}|u|^2\, dx \qquad (4.7) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_{\Omega(t)} \left(fV(x) - g - \frac{f_t}{2} \right) |u_t|^2 \, dx \\ &+ \int_{\Omega(t)} \Big(\frac{g_{tt}}{2} - \frac{g_t}{2} \, V(x) - \frac{g}{2} \, V_t(x) \Big) |u|^2 \, dx \\ &+ a^2 \int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) |\nabla u|^2 \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{2} \right) (\operatorname{div} u)^2 \, dx\end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $t \in [0, T_m)$, com $E(t)$ e $F(t)$ os mesmos funcionais usados no Capítulo 3.

Considere as seguintes funções positivas:

$$h(t) = 1 + t, \qquad f(t) = (1+t)^{1-\delta} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{1-\delta}{2} \, (1+t)^{-\delta}$$

com $t \geq 0$ e $\delta \geq 0$, com δ satisfazendo a hipótese do Teorema 4.2, ou seja,

$$\begin{aligned}&1 - \frac{C_0}{b} < \delta < F(n,p) < 1 \ \text{ se } \ 0 < C_0 \leq b \\ &0 \leq \delta < F(n,p) < 1 \ \text{ se } \ C_0 > b.\end{aligned}$$

Vimos na Seção 4.1 que $\lim_{\epsilon \to 0} T_m(\epsilon) = +\infty$. Assim, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $t_0 < T_m$, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, onde t_0 é a constante que aparece no Lema 3.1. Os próximos resultados são válidos para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Sabemos pelo Lema 3.1 que $F(t) \geq 0$, para todo $t_0 \leq t < T_m$. Assim, pela igualdade (4.6) temos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{p+1}\right)|u|^{p+1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{p+1}|u|^{p+1}\right) dx,$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$. Integrando de t_0 a t, temos,

$$\begin{aligned} E(t) \leq E(t_0) &+ \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{p+1}\right)|u|^{p+1}\, dxds \\ &+ \frac{f}{p+1}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx - \frac{f(t_0)}{p+1}\int_{\Omega(t)} |u(t_0)|^{p+1}\, dx \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Usando o Lema 3.2 temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \big(f - hg\big)|u_t|^2 + f\big(a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2\big)\, dx \\ &\leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega(t)} \left(g - \frac{f_t}{p+1}\right)|u|^{p+1}\, dxds \\ &+ \frac{f}{p+1}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx - \frac{f(t_0)}{p+1}\int_{\Omega(t)} |u(t_0)|^{p+1}\, dx, \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Como $f(t_0) > 0$ temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)}(f-hg)|u_t|^2 + f\big(a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\big)\,dx \tag{4.9}$$
$$\leq E(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega(t)}\left(g - \frac{f_t}{p+1}\right)|u|^{p+1}\,dxds + \frac{f}{p+1}\int_{\Omega(t)}|u|^{p+1}\,dx,$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Os dois próximos lemas serão importantes na demonstração do Teorema 4.2.

Lema 4.1 *Seja* $u = u(t,x)$ *uma solução local em* $[0, T_m)$. *Então para cada* $t \in [0, T_m)$

$$E(t) \leq C_R(t)\mathcal{E}(t)$$

onde $C_R(t)$ *é uma função positiva dependendo de* t, R *e* $||V||_{L^\infty}$, *onde* $E(t)$ *foi definido em (3.13).*

Demonstração: Inicialmente vamos estimar algumas integrais que aparecem no funcional $E(t)$ por termos da energia total do sistema.

Usando a desigualdade de Young tem-se que

$$\int_{\Omega(t)} g(u\cdot u_t)\,dx \leq \int_{\Omega(t)} g\,|u|\,|u_t|\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} g|u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} g|u_t|^2\,dx.$$

Pela desigualdade de Poincaré temos

$$\int_{\Omega(t)} g(u\cdot u_t)\,dx \leq \frac{C_p^2}{2}(bt+R)^2\int_{\Omega(t)} g|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} g|u_t|^2\,dx,$$

para todo $0 \leq t < T_m$.

Usando novamente a desigualdade de Poincaré tem-se

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} gV(x)|u|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} g||V||_{L^\infty}|u|^2\,dx$$
$$\leq \frac{g}{2}\,||V||_{L^\infty} C_p^2(bt+R)^2\int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2\,dx$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} g_t|u|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} |g_t|\,|u|^2\,dx$$
$$\leq \frac{|g_t|}{2}\,C_p^2(bt+R)^2\int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2\,dx,$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
E(t) \leq & \frac{1}{2}\,(f+g) \int_{\Omega(t)} |u_t|^2\,dx \\
& + \frac{1}{2}\left(a^2 f + (g + g||V||_{L^\infty} + |g_t|)\, C_p^2\,(bt+R)^2\right) \int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2\,dx \\
& + \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) f \int_{\Omega(t)} (\operatorname{div} u)^2\,dx \\
& \leq C_R(t)\mathcal{E}(t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde

$$C_R(t) = \max\{(f+g),\, a^{-2}(a^2 f + (g + g||V||_{L^\infty} + |g_t|)C_p^2(bt+R)^2)\}.$$

■

Lema 4.2 *Seja $u = u(t,x)$ a solução fraca local do sistema (4.1)-(4.3). Então existe $T = T(\epsilon) \in [0, T_m)$ tal que para todo $t \in [0, T]$ temos*

$$\mathcal{E}(t) \leq 2\mathcal{E}(0) = \epsilon^2\{||u_1||^2 + a^2||\nabla u_0||^2 + (b^2 - a^2)||div\, u_0||^2\} = \epsilon^2\, I_0$$

com

$$\lim_{\epsilon \to 0} T(\epsilon) = \infty.$$

Demonstração: Usando a identidade da energia

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_{\Omega(t)} V(x)|u_t|^2\, dx = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx$$

e integrando de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_{\Omega(t)} V(x)|u_t|^2\, dxds \\
&\quad = \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1}\left(\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx - \int_{\Omega(t)} |u(0)|^{p+1}\, dx\right) \qquad (4.10)\\
&\quad \leq \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (ver Capítulo 1 - Seção 1.5) com $m = 1$, $k = 0$, $z = p+1$, $r = 2$ e $q = 2$, podemos estimar a última integral da forma:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx &\leq \left(C_g \left(\int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int_{\Omega(t)} |u|^2\, dx \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \right)^{p+1} \\ &= (C_g)^{p+1} \left(\int_{\Omega(t)} |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{\theta(p+1)}{2}} \left(\int_{\Omega(t)} |u|^2\, dx \right)^{\frac{(1-\theta)(p+1)}{2}} \\ &= (C_g)^{p+1} ||\nabla u||^{\theta(p+1)} ||u||^{(1-\theta)(p+1)},\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde $\theta = \dfrac{n(p-1)}{2(p+1)}\cdot$ Pelas hipóteses sobre p é fácil ver que $0 < \theta < 1$.

Usando agora a desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} |u|^{p+1}\, dx &\leq (C_g)^{p+1} ||\nabla u||^{\theta(p+1)} \big(C_p(bt+R)\, ||\nabla u||\, \big)^{(1-\theta)(p+1)} \\ &= (C_g)^{p+1} \big(C_p(bt+R) \big)^{(1-\theta)(p+1)} ||\nabla u||^{\theta(p+1)+(1-\theta)(p+1)} \\ &= (C_g)^{p+1} \big(C_p(bt+R) \big)^{(1-\theta)(p+1)} ||\nabla u||^{p+1}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

para todo $t \in [0, T_m)$.

Usando a desigualdade acima em (4.10) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_{\Omega(t)} V(x)|u_t|^2\,dxds \\
&\quad \le \mathcal{E}(0) + \frac{1}{p+1}(C_g)^{p+1}\big(C_p(bt+R)\big)^{(1-\theta)(p+1)}||\nabla u||^{p+1} \\
&\quad = \mathcal{E}(0) + C(p,n)(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)}||\nabla u||^{p+1},
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde $C(p,n) = \dfrac{1}{p+1}(C_g)^{p+1}(C_p)^{(1-\theta)(p+1)} > 0$.

Como $V(x) > 0$ e

$$
a^2||\nabla u||^2 \le ||u_t||^2 + a^2||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2)(\operatorname{div} u)^2 = 2\mathcal{E}(t),
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\le \mathcal{E}(0) + C(p,n)(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)}\big(2a^{-2}\mathcal{E}(t)\big)^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \mathcal{E}(0) + C(p,n)a^{-(p+1)}2^{\frac{p+1}{2}}(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)}\mathcal{E}(t)^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \mathcal{E}(0) + C_1(bt+R)^{(1-\theta)(p+1)}\mathcal{E}(t)^{\frac{p+1}{2}} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0, T_m)$, onde $C_1 = C(p,n)a^{-(p+1)}2^{\frac{p+1}{2}}$.

Considere o primeiro $T > 0$ tal que $\mathcal{E}(T) = 2\mathcal{E}(0)$, como $\mathcal{E}(0)$ depende de ϵ, $T = T(\epsilon)$ também depende.

Caso não exista tal T o lema está demonstrado, basta escolher $T < T_m$, pois neste caso, $\mathcal{E}(t) < 2\mathcal{E}(0)$ para todo $t \in [0, T_m)$.

Assim, $\mathcal{E}(t) < 2\mathcal{E}(0)$ para todo $t \in [0, T)$. Aplicando $t = T$ na desigualdade (4.12) temos

$$2\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(0) + C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)}\mathcal{E}(T)^{\frac{p+1}{2}},$$

logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(0) &\leq C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)}\mathcal{E}(T)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= C_1(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)}2^{\frac{p+1}{2}}\mathcal{E}(0)^{\frac{p+1}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(bT + R)^{(1-\theta)(p+1)} \geq C_1^{-1}2^{-\frac{p+1}{2}}\mathcal{E}(0)^{1-\frac{p+1}{2}}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}T &\geq \frac{1}{b}\left(\left(C_1^{-1}2^{-\frac{p+1}{2}}\right)^{\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}}\mathcal{E}(0)^{\frac{1-p}{2(1-\theta)(p+1)}} - R\right) \\ &= C_2 I_0^{\frac{1-p}{2(1-\theta)(p+1)}}\epsilon^{\frac{(1-p)}{(1-\theta)(p+1)}} - \frac{R}{b}\end{aligned}$$

onde

$$C_2 = \frac{(2\,C_1)^{-\frac{1}{(1-\theta)(p+1)}}}{b}.$$

Note que $T \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, pois $\dfrac{(1-p)}{(1-\theta)(p+1)} < 0$, já que o denominador é positivo e o numerador é negativo. ■

Pelo Lema 4.1 temos que $E(t_0) \leq C_R(t_0)\mathcal{E}(t_0)$. Precisamos estimar $\mathcal{E}(t_0)$. Pelo Lema 4.2, $\mathcal{E}(t) \leq 2\mathcal{E}(0)$ para todo $t \in [0,T]$ com $T \to +\infty$ quando $\epsilon \to 0$.

Observação 4.3 *Dessa forma, existe* $\epsilon_1 \leq \epsilon_0$ *tal que para todo* $s \leq t_0$ *e todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ *temos que* $\mathcal{E}(s) \leq 2\mathcal{E}(0)$.

Assim,

$$E(t_0) \leq 2\,C_R(t_0)\mathcal{E}(0) = I_0 C_R(t_0)\,\epsilon^2,$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$.

Usando as definições de $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ e a desigualdade acima em (4.9) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1+t)^{1-\delta}}{2}\int_{\Omega(t)}\frac{1+\delta}{2}\,|u_t|^2+a^2|\nabla u|^2+(b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\,dx \\
&\quad\leq I_0C_R(t_0)\,\epsilon^2+\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega(t)}\left(\frac{(1-\delta)(p-1)}{2(p+1)}(1+s)^{-\delta}\right)|u|^{p+1}\,dxds \\
&\quad+\frac{(1+t)^{1-\delta}}{p+1}\int_{\Omega(t)}|u|^{p+1}\,dx=I_0C_R(t_0)\,\epsilon^2 \qquad (4.13)\\
&\quad+\frac{(1-\delta)(p-1)}{2(p+1)}\int_{t_0}^{t}(1+s)^{-\delta}||u||_{L^{p+1}}^{p+1}ds+\frac{(1+t)^{1-\delta}}{p+1}||u||_{L^{p+1}}^{p+1},
\end{aligned}
$$

para todo $t\in[t_0,T_m)$.

Na sequência vamos obter estimativas para os dois últimos termos da desigualdade acima.

Pela desigualdade (4.11)

$$||u||_{L^{p+1}}^{p+1}\leq (C_g)^{p+1}\big(C_p(bt+R)\big)^{(1-\theta)(p+1)}||\nabla u||^{p+1}.$$

Considerando $D=\max\{b,R\}$ temos

$$||u||_{L^{p+1}}^{p+1}\leq (C_g)^{p+1}\big(DC_p(1+t)\big)^{(1-\theta)(p+1)}||\nabla u||^{p+1}.$$

Usando o fato que

$$
\begin{aligned}
||\nabla u||^{p+1} &\leq a^{-(p+1)}\big(||u_t||^2 + a^2||\nabla u||^2 + (b^2-a^2)||\operatorname{div} u||^2\big)^{\frac{p+1}{2}} \\
&= a^{-(p+1)}(2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
||u||^{p+1}_{L^{p+1}} &\leq (C_g)^{p+1}\big(DC_p(1+t)\big)^{(1-\theta)(p+1)}a^{-(p+1)}(2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}} \\
&= \widetilde{C}\,(1+t)^{(1-\theta)(p+1)}(2\mathcal{E}(t))^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{C} = (C_g)^{p+1}\big(DC_p\big)^{(1-\theta)(p+1)}a^{-(p+1)}$.

Considerando

$$
M(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t}(1+s)^{1-\delta}(2\mathcal{E}(s)), \qquad (4.15)
$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$, temos

$$
\begin{aligned}
||u||^{p+1}_{L^{p+1}} \leq& \widetilde{C}(1+t)^{(1-\theta)(p+1)}\big((1+t)^{\delta-1}M(t)\big)^{\frac{p+1}{2}} \\
=& \widetilde{C}\,(1+t)^{(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}}M(t)^{\frac{p+1}{2}}, \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Usando a igualdade (4.16) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} (1+s)^{-\delta} ||u||_{L^{p+1}}^{p+1} ds \\
&\quad \leq \widetilde{C}\, M(t)^{\frac{p+1}{2}} \int_{t_0}^{t} (1+s)^{-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} ds \qquad (4.17) \\
&\quad \leq C_\delta\, \widetilde{C}\, M(t)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$, onde

$$C_\delta = \int_{t_0}^{t} (1+s)^{-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}} ds < \infty.$$

Justificativa de que $C_\delta < \infty$:

Como $\theta = \dfrac{n(p-1)}{2(p+1)}$ *temos que*

$$\begin{aligned}
&(1-\theta)(p+1) - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
&\quad = \left(1 - \frac{n(p-1)}{2(p+1)}\right)(p+1) - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
&\quad = \frac{2(p+1) - n(p-1)}{2} - \delta + \frac{(p+1)(\delta-1)}{2} \\
&\quad = \frac{2p + 2 - np + n - 2\delta + \delta p + \delta - p - 1}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{p+1-np+n+\delta p-\delta}{2}$$

$$= \frac{\delta(p-1)-n(p-1)+p+1}{2},$$

como $\delta < F(n,p)$ *temos*

$$\begin{aligned}
&(1-\theta)(p+1)-\delta+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}\\
&\quad= \frac{\delta(p-1)-n(p-1)+p+1}{2}\\
&\quad< \frac{\left(\dfrac{n(p-1)-p-3}{p-1}\right)(p-1)-n(p-1)+p+1}{2}\\
&\quad= \frac{n(p-1)-p-3-n(p-1)+p+1}{2}\\
&\quad= \frac{-2}{2} = -1.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $-\delta+(1-\theta)(p+1)+\dfrac{(p+1)(\delta-1)}{2} < -1.$

Usando as estimativas (4.16) e (4.17) em (4.13) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+t)^{1-\delta}}{2}\int_{\Omega(t)}\frac{1+\delta}{2}\,|u_t|^2+a^2|\nabla u|^2+(b^2-a^2)(\operatorname{div} u)^2\,dx\\
&\quad\leq I_0C_R(t_0)\,\epsilon^2+\frac{(1-\delta)(p-1)C_\delta\,\widetilde{C}}{2(p+1)}M(t)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\widetilde{C}}{p+1}\,(1+t)^{1-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}}M(t)^{\frac{p+1}{2}}$$

$$\leq I_0 C_R(t_0)\,\epsilon^2+\left(\frac{(1-\delta)(p-1)C_\delta\,\widetilde{C}}{2(p+1)}+\frac{\widetilde{C}}{p+1}\right)M(t)^{\frac{p+1}{2}}$$

$$= I_0 C_R(t_0)\,\epsilon^2+C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

pois como foi visto na justificativa acima,

$$1-\delta+(1-\theta)(p+1)+\frac{(p+1)(\delta-1)}{2}<0,$$

para todo $t\in[t_0,T_m)$ onde

$$C_1^*=\frac{(1-\delta)(p-1)C_\delta\,\widetilde{C}}{2(p+1)}+\frac{\widetilde{C}}{p+1}\,.$$

Como, por hipótese $\delta<1$, tem-se que

$$\frac{(1+t)^{1-\delta}}{2}\;\frac{1+\delta}{2}\int_{\Omega(t)}|u_t|^2+a^2|\nabla u|^2+(b^2-a^2)(\operatorname{div}u)^2\,dx$$

$$\leq I_0 C_R(t_0)\epsilon^2+C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}},$$

para todo $t\in(t_0,T_m)$ com $I_0=||u_1||^2+a^2||\nabla u_0||^2+(b^2-a^2)||\operatorname{div}u_0||^2$.

Usando a desigualdade acima temos que

$$\sup_{t_0\leq s\leq t}(1+s)^{1-\delta}(2\mathcal{E}(s)) \leq \frac{4}{1+\delta}\left(I_0C_R(t_0)\epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}}\right),$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Assim conseguimos a seguinte estimativa:

$$M(t) \leq \frac{4}{1+\delta}\left(I_0C_R(t_0)\epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}}\right), \tag{4.18}$$

para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Lema 4.3 *Seja $M(t)$ a função dada por (4.15). Então existe $M_0 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, com $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ tal que $M(t) \leq M_0$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_2$ e $t \in [t_0, T_m)$.*

Demonstração: Da desigualdade (4.18) temos que

$$M(t) \leq \frac{4}{1+\delta}\left(I_0C_R(t_0)\epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}}\right), \ \forall\, t \in [t_0, T_m),$$

com $\epsilon > 0$ fixo tal que $0 < \epsilon < \epsilon_1$.

Como $M(t) \geq 0$, para todo $t \in [t_0, T_m)$, vamos definir a função

$$F_\epsilon(M) = \frac{4}{1+\delta} \left(I_0 C_R(t_0)\epsilon^2 + C_1^* M(t)^{\frac{p+1}{2}} \right) - M$$

para $M \in \mathbb{R}^+$. A função $F_\epsilon(M) \geq 0$ para todo $M \in \mathbb{R}^+$.

Temos que a derivada da fução F_ϵ é

$$\frac{dF_\epsilon}{dM} = \frac{p+1}{2} \, \frac{4C_1^*}{1+\delta} \, M^{\frac{p-1}{2}} - 1.$$

Assim, o único ponto crítico de F_ϵ é

$$M_0 = \left(\frac{2(1+\delta)}{4C_1^*(p+1)} \right)^{\frac{2}{p-1}} .$$

Mas $\dfrac{d^2}{dM^2}(F_\epsilon(M_0)) = \dfrac{(p+1)(p-1)}{4} \, \dfrac{4C_1^*}{1+\delta} \, M_0^{\frac{p-3}{2}} \geq 0$, pois, $C_1^* > 0$, $p > 1$ e $M_0 > 0$. Logo, M_0 é ponto de mínimo global da função contínua $F_\epsilon(M)$.

Como $F_\epsilon(0) = \dfrac{4}{1+\delta} \, I_0 C_R(t_0)\epsilon^2$, existe um $\epsilon_1^* \leq \epsilon_1$ tal que $F_\epsilon(M_0) < 0$ se $0 < \epsilon < \epsilon_1^*$.

Pela Observação 4.3 temos que $\mathcal{E}(s) \leq 2\mathcal{E}(0)$ para todo $0 \leq s \leq t_0$. Assim

$$
\begin{aligned}
M(t_0) &\leq (1+t_0)^{1-\delta} 4\mathcal{E}(0) \\
&= (1+t_0)^{1-\delta} 4\epsilon^2 I_0.
\end{aligned}
$$

Agora, fixando $\epsilon_2 > 0$ satisfazendo $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1^*$ de modo que a desigualdade $(1+t_0)^{1-\delta} 4\epsilon^2 I_0 < M_0$ ocorra para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, temos que $M(t_0) < M_0$. Como $F_\epsilon(M(t)) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, T_m)$ e $F_\epsilon(M_0) < 0$ temos pela continuidade de $M(t)$ temos que

$$M(t) \leq M_0 \text{ para todo } t_0 \leq t < T_m.$$

Portanto, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_2$ temos que $M(t) \leq M_0$ para todo $t_0 \leq t < T_m$.

■

Escolha $C > 0$ suficientemente grande de tal forma que $M_0 \leq C I_0$, assim pelo Lema 4.3 acima concluímos que existe um $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$M(t) \leq C I_0, \ \ t \in [0, T_m). \tag{4.19}$$

Portanto, pela definição de $M(t)$ em (4.15) e usando a desigualdade (4.19) temos que $\mathcal{E}(t) \leq \dfrac{CI_0}{2}(1+t)^{\delta-1}$, para todo $t \in [t_0, T_m)$.

Note que $\mathcal{E}(t)$ também é limitado no intervalo $[0, t_0]$, pois, como a solução $u = u(t,x)$ é uma função contínua, no intervalo $[0, t_0]$ ela é limitada, ou seja, existe uma constante M_1 positiva tal que $\mathcal{E}(t) \leq M_1 I_0 (1+t)^{\delta-1}$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Portanto, $\mathcal{E}(t) \leq K I_0 (1+t)^{\delta-1}$, para todo $t \in [0, T_m)$, onde $K = \max\{M_1, \frac{C}{2}\}$.

Como a energia é limitada em todo intervalo maximal de existência temos que

$$\limsup_{t \to T_m} \left\{ \, ||u_t||^2 + a^2 ||\nabla u||^2 + (b^2 - a^2) ||\operatorname{div} u||^2 \right\} < \infty,$$

então pela Observação 4.1 concluímos que $T_m = \infty$, ou seja, $u = u(t,x)$ é uma solução global e

$$\mathcal{E}(t) \leq K I_0 (1+t)^{\delta-1},$$

para todo $t \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, o que prova o Teorema 4.2.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] Agmon, S., Douglis, H., Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.

[3] Brezis, H., *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[4] Charão, R. C., Ikehata, R., *Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity.* Nonlinear Analysis 67, 398-429, 2007.

[5] Charão, R. C., *Ondas elásticas 3D: princípio de Huygens, princípio da amplitude limite e ressonâncias.* Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil 1992.

[6] Charão, R. C., Ikehata, R., *Energy dacay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping.* J. Math. Anal. Appl. 380, 46-56, 2011.

[7] Charão, R. C., Ikehata, R., *The semilinear system of elastic waves in $\mathbb{R}^n$ with nonabsorption and a critical damping potential.* VII Workshop of Partial Differential Equations (LNCCV/UFRJ).

[8] Ferreira, M. V., *Ondas elásticas e eletromagnéticas em domínios exteriores: propriedades assintóticas.* Tese de Doutorado. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil 2005.

[9] Gomes, A. M., *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[10] Ikehata, R., Todorova, G., Yordanov, B., *Critical Exponent for Semilinear Wave Equations with Space-Dependent Potential.* Funkcialaj Ekvacioj, 52, 411-435, 2009.

[11] Kesavan, S., *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[12] Matsumura, A., *Energy decay of solutions of dissipative wave equations.* Proc. Japan Acad. 53, 232-236, 1977.

[13] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[14] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[15] Mochizuki, K., *Scattering theory for wave equations with dissipative terms.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 12, 383-390, 1976.

[16] Mochizuki, k., Nakazawa, H., *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 32, 401-414, 1996.

[17] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[18] Todorova, G., Yordanov B., *Nonlinear dissipative wave equations with potential.* AMS Contemporary Math. 426, 317-337, 2007.

[19] Todorova, G., Yordanov, B., *Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients.* J. Diff. Eqns. 242, 4497 - 4518, 2009.

[20] Uesaka H., *The total energy decay of solutions for the wave equation with a dissipative term*. J. Math. Kyoto Univ. 20, 57-65, 1979.