Carlos Fabiano Rosa

Série de Taylor e Aplicações

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Florianópolis - SC
2013

Carlos Fabiano Rosa

Série de Taylor e Aplicações

Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Professor Orientador: Daniel Norberto Kozakevich

Florianópolis - SC
2013

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n^{o} 12/CCM/13.

____

Prof^{o} Nereu Estanislau Burin

Professor da disciplina

Banca Examinadora:

____

Daniel Norberto Kozakevich

Orientador

____

Sônia Elena Palomino Bean

____

Márcio Rodolfo Fernandes

Sumário

Agradecimentos

Ao meu orientador, Daniel Norberto Kozakevich, pela liberdade e que escutou pacientemente as minhas considerações partilhando comigo suas ideias, conhecimento e experiências.

Aos meus pais, Frank e Zilda, que apoiaram de todas as maneiras possíveis e me conduziram a esta formação.

Aos meus irmãos, Fábio, Deize, e Franklin, que me guiaram e sempre acreditaram que completaria essa jornada.

Aos amigos, em especial Julianna Tabalipa, Marcelo Gomes, Ivo Paulek Junior e Michely de Melo Pellizzaro que direta ou indiretamente ajudaram durante a graduação.

À banca examinadora que humildemente aceitou meu convite.

Introdução

O desenvolvimento de funções em séries de Taylor são ferramentas frequentemente utilizadas em áreas como Cálculo e Análise Numérica. Expressar funções como a soma de termos infinitos é uma estratégia muito útil. Veremos neste trabalho que utilizamos tal ferramenta para aproximar funções ao redor um ponto, bem como, encontrar seus pontos de máximos e mínimos. Além disso, podemos aplicar os conceitos série de Taylor para estudar convergência de métodos iterativos e, ainda, para buscar soluções de equações diferenciais ordinárias.

O trabalho divide-se em três capítulos:

No primeiro capítulo, a discussão se dá em torno das séries de potências. Bem como estudar o comportamento de funções representadas como série de potências se faz necessário estudar o raio de convergência para que tais representações existam. Portanto, com a finalidade de entrar no tema principal estes foram os tópicos abordados na primeira seção, assim como alguns teoremas que são fundamentais para o desenvolvimento em série de Taylor. A estrutura desse capítulo está baseada, principalmente, na referência [2].

No segundo capítulo, baseado nas referências [3] e [7] iniciamos os conceitos de expansão em Taylor para funções de uma ou mais variáveis. Este capitulo, dedica-se também a representação de uma função através da soma parcial da sua série de Taylor (polinômio de Taylor) acrescidos de um resto e do qual enunciamos um resultado importante, a Fórmula de Taylor. Além disso, como consequência vimos alguns ”formas”de restos que são encontrados na fórmula de Taylor.

O terceiro e último capítulo, está baseado em algumas aplicações, na Matemática, da expansão em série de Taylor: aproximação de funções ao redor de um ponto, máximos e mínimos de funções, convergência de métodos iterativos , resolução de equação diferencial ordinária linear ao redor de um ponto ordinário [9] e soluções aproximadas de equações diferenciais [10].

1 *Série de Potências*

Algumas vezes se faz necessário representar funções por séries, mais especificamente série de potências. Entretanto, é preciso definir série de potência, estudar as principais propriedades e, além disso, verificar que uma classe restrita de funções são representadas através da mesma. O objetivo desta seção é abrir caminho ao estudo principal deste trabalho, isto é, o estudo da *Série de Taylor*. A seção a seguir foi elaborada a partir da referência [2].

1.1 Série de Potências

Definição 1.1.1. *Seja a_n, $n \geq 0$, uma sequência numérica dada e seja x_0 um número real dado. A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

denomina-se série de potências, com coeficientes a_n, em volta de x_0(ou centrada em x_0).

Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma série de potências centrada $x_0 = 0$ e com coeficiente $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

De certo modo, uma série de potências trata-se de uma série de polinômios com infinitos termos. Veremos que funções definidas como séries de potências compartilham muitas propriedades semelhantes a dos polinômios.

1.1.1 Convergência das Séries de Potências

Para que valores de x a série de potências é convergente? A convergência é segura para $x = x_0$, com soma em a_n, e pode acontecer que seja o único ponto em que ela converge. O próximo teorema destaca um propriedade muito importante das séries de potências.

Teorema 1.1.1. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *for convergente para* $x = x_1$, *com* $x_1 \neq 0$, *então a série convergirá absolutamente para todo* x *no intervalo aberto* $]-|x_1|,|x_1|[$.

Demonstração. Sendo, por hipótese, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ convergente, segue

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x_1^n = 0.$$

Tomando-se $\varepsilon = 1$, existe um natural p tal que, para todo $n \geq p$,

$$|a_n x_1^n| \leq 1$$

como

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

resulta que, para todo x e todo natural $n \geq p$,

$$|a_n x^n| \leq \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Para $|x| < |x_1|$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ é convergente. Segue do critério da comparação que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x, com $|x| \leq |x_1|$. □

Corolário 1.1.1. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ *for convergente* $x = x_1$, *com* $x_1 \neq x_0$, *então a série convergirá absolutamente para todo* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, *onde* $r = |x_1 - x_0|$.

1.1.2 Raio de Convergência

Objetivo principal desta seção é definir *raio de convergência* de uma série de potências. Contudo, antes, devemos discutir um teorema muito importante sobre convergência.

Teorema 1.1.2. *Seja a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *Existem apenas três possibilidades:*

I) *ou* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge apenas para* $x = 0$*;*

II) *ou* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente para todo x real;*

III) *ou existe* $R > 0$ *tal que a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente para todo x no inervalo* $(-R, R)$ *e diverge para todo x, com* $|x| > R$. *Nos extremos* $-R$ *e* R *a série poderá convergir ou não.*

Demonstração. Seja A o conjunto de todos os $x \geq 0$ para os quais a série converge
1º caso. $A = \{0\}$

Se a série convergisse para algum $x_1 \neq 0$, pelo teorema anterior, convergiria, também, para todo $x \in (-|x|, |x|)$, que contradiz a hipótese de $A = \{0\}$. Logo, se $A = \{0\}$ a série convergirá apenas para $x = 0$.
2ºcaso. $A = (0, +\infty)$

Para todo x real, existe, $x_1 > 0$ tal que

$$|x| < x_1.$$

como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ é convergente, pelo teorema anterior, a série convergirá absolutamente para todo x, com $|x| < x_1$. Portanto a série convergirá absolutamente para todo x.
3ºcaso. $A \neq (0, +\infty)$ e $A \neq \{0\}$

Se, para todo $r > 0$, existisse $x_1 > r$ tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} {x_1}^n$$

fosse convergente, pelo teorema anterior, a série convergirá absolutamente para todo x, que contradiz com a hipótese $A \neq (0, +\infty)$. Portanto se , $A \neq (0, +\infty)$, então A será limitada superiormente; logo, admitirá supremo R:

$$R = \sup A$$

Como $A \neq \{0\}$ teremos, evidentemente, $R > 0$. Sendo R o supremo de A, para todo x com $|x| < R$, existe $x_1 \in A$. Resulta, novamente do teorema anterior, que a série converge absolutamente para todo $x \in (-R, R)$.

Agora suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convirja para $x = x_1$, com $x_1 \neq 0$ e divirja para x_2, se $|x_2| < |x_1|$ então pelo teorema anterior x_2 converge, e isto é contradição com a hipótese, logo $|x_2| > |x_1|$. Como R é o supremo de A, então para $|x| > R$ a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é divergente. $\square$

Observação 1.1.1. *Considerando que a série seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, *com uma simples mudança de variável, por exemplo,* $x - x_0 = y$ *e aplicando o teorema acima então existe, também, três possibilidades:*

I) *ou a série converge para* $x = x_0$*;*

II) *ou série converge para todo* x*;*

III) *ou existe* $R > 0$ *tal que a série converge para todo* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *e diverge para* $|x - x_0| > R$*. Nos extremos* $x_0 - R$ *e* $x_0 + R$ *a série poderá convergir ou não.*

Agora, podemos definir o raio de convergência:

Definição 1.1.2. *Dada uma série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, *seu raio de convergência é um valor (finito ou infinito) dado por*

$$R = \{\sup |x - x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge } \}.$$

E ainda denominamos o intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *de intervalo de convergência da série de potências.*

O exemplo a seguir nos fornecerá uma fórmula para o cálculo do raio de convergência da série de potências da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Exemplo 1. *Seja a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *e suponha que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \geq p$*, onde* p *é natural fixo. Mostre que o raio de convergência da série é*

$$\boxed{R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

desde que o limite exista, finito ou infinito.

Solução.

Apliquemos o critério da razão para série de termos quaisquer.

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, a série convergirá absolutamente para todo x. Neste caso o raio de convergência é $+\infty$:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$$

(Observe que $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$

Se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, a série convergirá apenas para $x = x_0$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$$

Se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ for finito e diferente de zero, a série convergirá absolutamente para todo x tal que

$$|x - x_0| \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ou seja, convergirá para todo x tal que

$$|x - x_0| < \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R;$$

e divergirá para $|x - x_0| > R$.

O raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

onde $a_n \neq 0$ para $n \geq p$ (p fixo), é dado pela fórmula

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1.1}$$

desde que o limite exista finito ou infinito.

1.2 Funções Dada Como Série de Potências

Como já citado na introdução deste capítulo, funções podem ser representadas por série de potências. Mas por que expressar funções como uma soma de termos infinitos? Na verdade, essa estratégia é muito útil. Nos próximos capítulos deste trabalho, quando adentrarmos em Série de Taylor (uma classe restrita de série de potências), tal condição nos auxiliará em cálculo de integrais que não possuem primitivas, resoluções de equações diferenciais e aproximar funções por polinômios.

Uma série de potência, se convergente para todo x ou para algum $R > 0$ tal que $|x - x_0| < R$, pode ser expressa como uma função f e podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

A série é dita uma representação da função f no intervalo de convergência e é chamada de **expansão em série de potências** da função f no ponto x_0. E ainda, podemos definir o domínio de f como sendo o intervalo de convergência da série.

Exemplo 2. *Determine o domínio da função* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$*:*

Solução:

A série que representa a função f está centrada no ponto $x_0 = 0$, além disso, o domínio da função são os valores no qual a série converge, isto é, $|x| < R$, onde R é o raio de convergência. Logo, pela fórmula do raio de convergência

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

Assim, para $|x| < 1$ a série converge.

Nos extremos $x = 1$ e $x = -1$, as séries $\sum_{n=0}^{\infty} n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ divergem (pelo critério da razão de termos quaisquer [2]). Portanto, o domínio da função f é o intervalo $(-1, 1)$.

1.2.1 Diferenciação e Integração de Série de Potências

Uma vez que a função é representada por uma série de potências ela compartilha teoremas semelhantes aos das funções polinomiais, como por exemplo, duas que veremos a seguir: diferenciação e integração. As demonstrações dos teoremas estão dispostas em [4].

Teorema 1.2.1. *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *tiver um raio de convergência* $R > 0$ *, então a função* f *é definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *e*

(i)

$$f'(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \tag{1.2}$$

(ii)

$$\int f(x)dx = c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{1.3}$$

Os raios de convergência da série de potências nas Equações ***(i)*** *e* ***(ii)*** *são ambos R.*

Exemplo 3. *Calcular a integral* $\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$*:*

Solução:

Integrando a solução conforme proposto no teorema acima temos:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ainda, podemos verificar que R é igual para as duas funções.

2 Série de Taylor

Como vimos anteriormente podemos expressar uma função em série de potências. Na verdade, o próximo objetivo é verificar que a expressão
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ pode ser reescrita tal que seu seu coeficiente a_n seja igual a $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

2.1 Expansão em Série de Taylor para Funções de uma Variável

Inicialmente vamos supor que a função f tem derivadas de todas as ordens e que possa ser representada como uma série de potências, com raio de convergência R. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \\ & \text{para } |x-x_0| < R. \end{aligned}$$

Primeiramente, aplicamos $x = x_0$ nas $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, até sua n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$ e assim obtemos:

$$a_0 = f(x_0);\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!};\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!};\ ...$$

e conforme segue o padrão notaremos que:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Agora, vamos adotar por convenção que $f^{(0)} = f$ e podemos descrever o resultado acima da seguinte forma:

Se f possuir uma expansão em séries de potências em torno do ponto x_0, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < R$$

então seu coeficientes são dados pela fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Em outras palavras se f tiver uma expansão em série de potências centrada em x_0, então ela deve ter a forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.1}$$

A série da equação acima é chamada **série de Taylor da função f centrada em x_0**.

No caso mais particular, para $x_0 = 0$, a série tem a forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

e recebe o nome de **série de Maclaurin**.

Entretanto, propomos anteriormente que se f puder ser representada como séries de potências em torno do ponto x_0, então f será igual a soma de sua série de Taylor. Agora, dada uma função como garantir ela possa ser representada por uma série de Taylor?

Se $f(x)$ é igual a soma de uma série, então $f(x)$ convergirá para o limite das somas parciais dessa série. E, digamos que $T_n(x)$ é a soma parcial da série:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{2.2}$$

onde $T_n(x)$ é um polinômio e denominamos como **polinômio de Taylor de grau n** centrado em x_0. Em outras palavras

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Assim, conforme n tende ao infinito a soma parcial dos termos do polinômio de Taylor é uma aproximação da $f(x)$, isto é, $f(x) \approx T_n(x)$. Ainda, podemos escrever

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

onde $R_n(x)$ é o **resto**(ou erro de truncamento) da série de Taylor. E de maneira equivalente

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

A seguir apresentaremos o teorema que expressa formalmente nossa análise:

Teorema 2.1.1. *Seja f uma função com derivada de todas as ordens e $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n e polinômio de Taylor de grau n centrado em x_0 e*

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

para todo $|x - x_0| < R$, então f é igual a soma da sua série de Taylor no intervalo $|x - x_0| < R$.

Demonstração. O teorema acima sugere que se, de alguma maneira, pudermos mostrar que $R_n(x) = 0$ quando $n \to +\infty$, então $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, ou seja a função f pode ser representada por uma série de Taylor. De fato, pois

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = \lim_{n \to +\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = f(x).$$

□

2.2 Fórmula de Taylor

Vimos que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde $R_n(x)$ é o resto da série de Taylor e $T_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n. E ainda, se conseguimos mostrar que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, então a f pode ser representada através de sua série de Taylor em torno de um ponto x_0, ou seja, para $|x - x_0| < R$ (R raio de convergência). A seguir, baseado na referência [6] e na [3], faremos análise sobre a função f quando possui apenas derivadas até ordem $n + 1$.

2.2.1 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Teorema 2.2.1 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo $(a;b)$. Seja $x_0 \in [a,b]$ então existe ξ entre x_0 e x tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{2.3}$$

O Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange, na verdade, pode ser visto como uma extensão do Teorema do Valor Médio[3]. Ou seja, se uma função F contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe um $c \in (a,b)$ com $F'(c) = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$. E sua demostração segue a mesma ideia, isto é, tomar uma função em que seja válido o Teorema de Rolle.

Demonstração. Consideremos a função

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \lambda(x-t)^{n+1} \text{ ,com } t \text{ entre } x_0 \text{ e } x$$

Assim devemos encontrar um λ tal que $F(x_0) = 0$. E ainda, temos que $F(x) = 0$, logo, $F(x) = F(x_0) = 0$. A função F é contínua e diferenciável no intervalo $[a,b]$, portanto pelo Teorema de Rolle existe ξ entre x_0 e x tal que $F'(\xi) = 0$.
Derivando a função $F(t)$ encontramos:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) + \lambda(n+1)(x-t)^n \\
F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + \lambda(n+1)(x-t)^n \\
F'(t) &= -f'(t) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)}_{\text{série telescópica}} + \lambda(n+1)(x-t)^n
\end{aligned}$$

Então, a soma da série telescópica é:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) = f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Logo,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n$$

Portanto para $t = \xi$ temos:

$$0 = F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-\xi)^n + \lambda(n+1)(x-\xi)^n \Rightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Retornando a função e substituindo o valor λ

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

E para $t = x_0$, então $F(x_0) = 0$, por hipótese concluímos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Para ξ entre x_0 e x. $\square$

Observação: O Teorema de Taylor com Resto de Lagrange garante simplesmente que existe uma função para o resto e que seu valor existe para algum número entre x e x_0. Porém, na prática, um dos problemas comuns é determinar ξ entre x e x_0 para encontrar o valor de $f^{(n+1)}(\xi)$.

2.2.2 Fórmula de Taylor com resto da Integral

O resultado a seguir mostra que se f possui derivada até a ordem $n+1$ e $f^{(n+1)}$ for continua num intervalo aberto, então f pode ser reescrita como $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, onde t é um ponto entre x_0 e x.

Teorema 2.2.2 (Fórmula de Taylor com Resto da Integral)**.** *Se $f^{(n+1)}$ continua sobre um intervalo aberto I que contém x_0, e para todo x pertencente a I, então*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{2.4}$$

Demonstração. Temos que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ e usaremos indução matemática para mostrar o resultado. Então para $n = 1$,

$$R_1 = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

e pela hipótese devemos obter a integral $\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt$. Assim, usando o Teorema Fundamenta do Cálculo e a técnica de integração por partes com:
$u = x-t$ e $dv = f''(t)dt$, assim $du = -dt$ e $v = f'(t)$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt &= (x-t)f'(t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \\
&= 0-(x-x_0)f'(x_0)+f(x)-f(x_0) \\
&= f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \\
&= f(x)-T_1(x) = R_1(x)
\end{aligned}$$

Portanto, o teorema é válido para $n = 1$. Agora, vamos supor que vale para $n = k$ e assim

$$R_k(x) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt$$

E queremos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja,

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt$$

Novamente integramos por partes com
$u = (x-t)^{k+1}$ e $dv = f^{(k+2)}(t)$. Então $du = -(k+1)(x-t)^k$ e $v = f^{k+1}(t)$, assim

$$\frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}f^{(k+1)}(t)]_{x_0}^{x} + \frac{k+1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt \\
&= 0-\frac{1}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}f^{(k+1)}(x_0)+\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt \\
&= -\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}+R_k(x) \\
&= f(x)-T_k(x)-\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \\
&= f(x)-T_{k+1}(x) = R_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

Logo , vale para $n = 1$ e para $n = k+1$, então por indução matemática o teorema é verdadeiro para todo n. $\square$

2.2.3 Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy

Nesta seção visando ampliar o estudo sobre as formas de expressar o resto na Fórmula de Taylor apresentamos a seguir mais um resultado que, também, se encontra em alguns livros acadêmicos.

Teorema 2.2.3 (Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy)**.** *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo $(a;b)$. Seja $x_0\in[a,b]$ então existe η entre x_0 e x tal que*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0) \tag{2.5}$$

Demonstração. A função f, por hipótese, tem $n+1$ derivadas contínuas no intervalo (a,b) que contém x_0 e x. Portanto, é válido o teorema com resto da integral. Logo,

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}{n!}$$

para algum t entre x e x_0. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais [5], a hipótese assegura a existência de um η entre x e x_0, tal que

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}{n!}=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n$$

sendo assim, o resto pode ser representado também por:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

como $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, temos que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0)$$

□

Observação: a mesma dificuldade de encontrar o ξ para a Fórmula com Resto de Lagrange, também, acontece quando precisamos encontrar o η para a Fórmula com Resto de Cauchy. Usualmente, o que se faz é procurar uma função que limita a função do resto e assim fazer uma estimativa do erro.

2.3 Expansão em Série de Taylor Para Função de Duas Variáveis

O objetivo presente nesta seção, baseado na referência [7] , é elaborar uma análise sobre como a série de Taylor pode representar uma função com duas variáveis. Basicamente, o raciocínio é fazer analogia à funções de apenas uma variável atendo-se ao fato que suas derivadas são parciais.

2.3.1 Expansão em Série de Taylor de 2ª Ordem

Assim como uma função $f(x)$ pode ser aproximada através do polinômio de Taylor de segunda ordem, isto é, $f(x) \approx T_2(x)$, procura-se uma expressão que aproxime a função $z(x,y)$ tal que $z(x,y) \approx T_2(x,y)$.

Inicialmente, seja $z = z(x,y)$, função com duas variáveis. E, digamos que x e y então em função de uma variável t, ou seja, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Assim, como z está em função de x e y é correto dizer, também, que z está em função de t, logo $z = z(t) = f(x(t), y(t))$. Além disso, z possui derivada (se existir), em relação a t. Para extender para o cenário de duas variáveis devemos tomar $x(t) = x_0 + t\Delta x$ e $y = y + t\Delta y$, onde Δx e Δy são constantes. Portanto, $x'(t) = \Delta x$, $y'(t) = \Delta y$, $x''(t) = 0$, $y''(t) = 0$.

Então pela regra da cadeia a primeira derivada em relação a t é:

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\Delta y
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

E a segunda derivada de z em relação a t:

$$
\begin{aligned}
z''(t) &= \frac{d}{dt}z'(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right] \\
&= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t),y(t))\left[x'(t)\right]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t),y(t))\left[x'(t)y'(t)\right]\right] \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(t),y(t))\left[y'(t)x'(t)\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t),y(t))\left[y'(t)\right]^2\right] \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

e recordando que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, teorema das derivadas mistas [7], a expressão pode ser simplificada para:

$$z''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t),y(t))(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t),y(t))\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t),y(t))(\Delta y)^2 \qquad (2.8)$$

Agora, se $z = f(x,y)$ é uma função de duas variáveis que é diferenciável numa vizinhança próxima do ponto (x_0,y_0), então queremos encontrar um polinômio T_2 que satisfaça

$$f(x,y) \approx T_2(x,y)$$

quando (x,y) estão suficientemente próximo de (x_0,y_0), ou seja, quando $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$. E, assim devemos tomar:

$$\Delta x = (x-x_0) \text{ e } \Delta y = (y-y_0)$$

Logo,

$$z(t) = f(x(t),y(t)) = f(x_0 + t\Delta x, y + t\Delta y)$$

É importante observar que

$$f(x,y) = f(x_0 + (x-x_0), y_0 + (y-y_0)) = z(1)$$

Pela Fórmula de Taylor temos que

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}z''(t_0)(t - t_o)^2 + R_2(t)$$

Então, para $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x,y) = z(1) &\approx z(0) + z'(0)(1-0) + \frac{1}{2}z''(0)(1-0)^2 \\ &= z(0) + z'(0) + \frac{z''(0)}{2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto,

$$z(0) \;=\; f(x(0),y(0)) = f(x_0 + 0(x - x_0), y_0 + 0(y - y_0)) = f(x_0, y_0)$$

Da equação (2.6),

$$\begin{aligned} z'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(0),y(0))\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0),y(0))\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y \end{aligned}$$

E finalmente, da equação (2.7)

$$z''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(0),y(0))(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(0),y(0))\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(0),y(0))(\Delta y)^2$$

Substituindo $z(0)$, $z'(0)$, $z''(0)$ na aproximação da fórmula (2.9), e recordando que $\Delta x = (x - x_0)$ e $\Delta y = y - y_0$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2
\end{aligned}
$$

E conforme a fórmula de Taylor, também, escreve-se:

Exemplo 4. *Qual o polinômio de Taylor de segunda ordem centrada no ponto* $(1,1)$ *para função* $x^2cos(y^3)$*?*

Solução:

Calculando as derivadas parciais de primeira e segunda ordem e utilizando a fórmula acima obtemos o resultado:

$$
\begin{aligned}
x^2cos(y^3) &\approx cos(1)-3sen(1)(y-1)+2(x-1)cos(1)-\frac{9}{2}cos(1)\\
&- 3sen(1)(y-1)^2-6(x-1)sen(1)(y-1)+(x-1)^2cos(1)
\end{aligned}
$$

2.3.2 Expansão em Série de Taylor de n-ésima Ordem

Na seção anterior, a função $f(x,y)$ foi aproximado até a segunda ordem do polinômio de Taylor, isto é, $f(x,y)\approx T_2(x,y)$. Agora, queremos expressar $f(x,y)=T_n(x,y)+R_n(x,y)$, onde $T_n(x,y)$ é a n-ésima ordem do **Polinômio de Taylor** da função f, e $R_n(x,y)$ é dito o **resto** da n-ésima ordem do polinômio.

A ideia se conserva a mesma aplicada anteriormente, porém, pela fórmula de Taylor basta aproximar a função z pela k-ésima derivada, ou seja,

$$z(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{(k)}(t)}{k!}(t-t_0)^k+R_n(t)$$

E ainda, para $t_0=0$

$$f(x,y)=z(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{(k)}(0)}{k!}+R_n(t)$$

Então precisamos encontrar a k-ésima derivada de z em relação a t e aplicar o ponto $t_0 = 0$. Ainda, no caso em que $\Delta x = (x - x_0)$ e, $\Delta y = (y - y_0)$ e $z(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, a função f vai ter sempre derivada em relação x e y. Logo,

$$z^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(x(t), y(t))(x - x_0)^i (y - y_o)^j$$

Quando calculamos a k-ésima derivada $\dfrac{\partial^k f}{\underbrace{\partial x \partial x}_{i \text{ vezes}} \cdots \underbrace{\partial y \partial y}_{j \text{ vezes}}}$ todas as parciais mistas são permutações ∂x e ∂y, sendo assim, uma permutação repetida com i e j elementos. Portanto a quantidade de parciais mistas nesse caso é $\dfrac{k!}{i!j!} \dfrac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(x(t), y(t))$. Ainda $i + j = k \Rightarrow j = k - i$, e assim

$$z^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(x(t), y(t))(x - x_0)^i (y - y_o)^{k-i} \tag{2.10}$$

Então a $z^{(k)}(t)$ aplicada no ponto $t_0 = 0$ é igual a

$$\begin{aligned} z^{(k)}(0) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x(0), y(0))(x - x_0)^i (y - y_o)^{k-i} \\ z^{(k)}(0) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0, y_0)(x - x_0)^i (y - y_o)^{k-i} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Substituindo essa equação em

$$f(x,y) = z(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{(k)}(0)}{k!} + R_n(t)$$

obtemos uma expressão para a Fórmula de Taylor de n-ésima ordem:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0, y_0)(x - x_0)^i (y - y_o)^{k-i} + R_n(x,y) \tag{2.12}$$

com resto R_n em função das duas variáveis x e y.

Entretanto, quando $\lim\limits_{n+\infty} R_n(x,y) = 0$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0, y_0)(x - x_0)^i (y - y_o)^{k-i}. \tag{2.13}$$

Além disso, conforme fora visto na seção 2.2.1 uma função de apenas uma variável pode ser expressa através da fórmula de Taylor com resto de Lagrange. Analogamente, conseguimos uma expressão que represente uma função de duas variáveis. [5]

Teorema 2.3.1. *Suponha que $f(x,y)$ e todas suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $n+1$ sejam continuas em $D = \{(x,y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ e seja $(x_0,y_0) \in D$. Para cada $(x_0,y_0) \in D$, existem ξ_1 entre x e x_0 e ξ_2 entre y e y_0 tais que*

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$$

em que

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x,y)(x-x_0)^i (y-y_0)^{k-i}$$

e

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^i (y-y_0)^{n+1-i}.$$

Exemplo 5.

A representação para $n = 2$ é

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + R_n(x,y) \end{aligned}$$

e

$$R_n(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} \frac{2!}{(3-i)!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^{3-i}}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^i (y-y_0)^{3-i}$$

2.4 Expansão em Série de Taylor para Funções de Várias Variáveis

Como pode-se imaginar, assim que o número de variáveis cresce a expressão que aproxima a função pela série de Taylor também cresce. Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de todas as ordens n numa vizinhança próxima ao ponto $(a_1, a_2, ..., a_m)$ a série de Taylor que representa f é dada por:

$$f(x_1,x_2,...,x_m) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1+i_2+...+i_m=k}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!...i_m!} \frac{\partial^k f(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} ... \partial x_m^{i_m}} (x_1-a_1)^{i_1} ... (x_m-a_m)^{i_m}$$

Analogamente à função com duas variável, dada uma função z tal que $z = z(x_1,x_2,...,x_m)$ e ainda que x_j está em função de uma variável t, isto é, $x_j = x_j(t)$ para todo $j = 1,2,...,m$. Da mesma maneira, pode-se dizer que

$$z(t) = f(x_1(t),x_2(t),...,x_m(t)).$$

Ainda, assume-se para um caso especial em que $x_j(t) = a_1 + t(x_j - a_j)$, para $j = 1,2,...,m$.

Então, $z(1) = f(x_1(1),x_2(1),...,x_m(1)) = f(x_1,x_2,...,x_m)$

Logo, da fórmula de Taylor temos que :

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + R_n(t)$$

Então, aproximando o valor $z(1)$ através da série de Taylor centrada no ponto $t_0 = 0$, obtém-se que:

$$z(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + R_n(t)$$
$$z(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{(k)}(0)}{k!} + R_n(t)$$

Portanto,

$$z(1) = f(x_1,x_2,...,x_m) = \tag{2.14}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1+i_2+...+i_m=k}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!...i_m!} \frac{\partial^k f(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} ... \partial x_m^{i_m}} (x_1-a_1)^{i_1} ... (x_m-a_m)^{i_m}$$
$$+ R_n(x_1,x_2,...,x_n)$$

É importante observar que

$$z^{(k)}(0) = \sum_{i_1+...+i_m=k}^{k} \frac{k!}{i_1!...i_m!} \frac{\partial^k f(a_1,...,a_m)}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_m^{i_m}} (x_1-a_1)^{i_1} ... (x-a_2)^{i_m}$$

onde a generalização da derivada $z^{(k)}(t)$ é obtida a partir de uma análise de combinações tal que $\dfrac{k!}{i_1!...i_m!}$ é a quantidade das parciais mistas (permutações com repetição) para a função $z(t) = f(x_1(t),...,x_m(t))$.

Portanto, a partir dos resultados acima para $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável numa vizinhança próximo a um ponto $(a_1,a_2,...,a_m)$ pode ser representada pela fórmula de Taylor da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,...,x_m) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1+i_2+...+i_m=k}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!...i_m!} \frac{\partial^k f(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} ... \partial x_m^{i_m}} (x_1-a_1)^{i_1}...(x_m-a_m)^{i_m} \\ &+R(x_1,x_2,...,x_m) \end{aligned} \tag{2.15}$$

E ainda quando n tende ao infinito e $R_n(x_1,x_2,...,x_m)$ tende zero , então temos uma representação em série de Taylor para f e logo

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,...,x_m) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1+i_2+...+i_m=k}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!...i_m!} \frac{\partial^k f(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} ... \partial x_m^{i_m}} (x_1-a_1)^{i_1}...(x_m-a_m)^{i_m}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

3 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações da série e da fórmula de Taylor. Entre elas, a mais fundamental e usada em Calculo Numérico é aproximação de funções. Em seguida, convergência de métodos iterativos, estudo sobre os máximos e mínimos e, soluções de equações diferenciais ordinárias.

3.1 Aproximando Funções por Série de Taylor

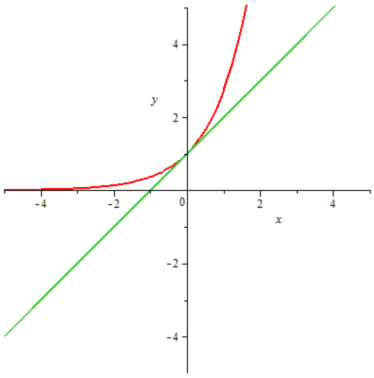
Um exemplo clássico, mas que permite estudar com afinidade o comportamento da aproximação por série de Taylor, é o da função exponencial $f(x) = e^x$. É sabido pela fórmula de Taylor que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ou ainda que $f(x) \approx T_n(x)$, onde $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Avaliando as derivadas da função f ao redor do ponto x_0, temos que:

$$
\begin{array}{rcll}
f(0) & = & 1 & \\
f'(x) & = & e^x & f'(0) = 1 \\
f''(x) & = & e^x & f''(0) = 1 \\
f'''(x) & = & e^x & f'''(0) = 1 \\
 & \vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = & e^x & f^{(n)}(0) = 1
\end{array}
$$

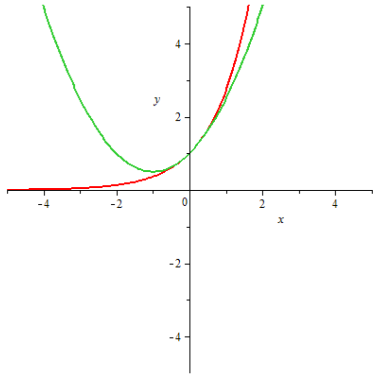
E assim encontramos os polinômios de Taylor:

$$
\begin{aligned}
T_1(x) &= 1+x \\
T_2(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!} \\
T_3(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \\
T_4(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!} \\
&\vdots \\
T_n(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

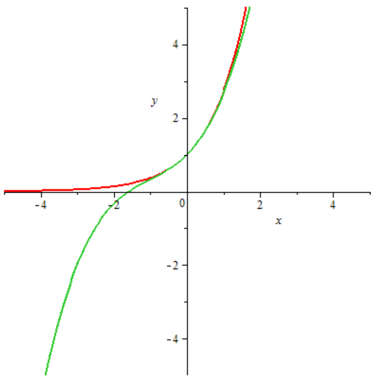
A figura abaixo mostra que ao aumentar o valor de n , $T_n(x)$ parece se aproximar da função e^x. Isto sugere que para n suficientemente grande e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.



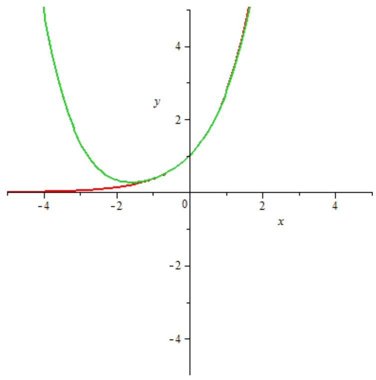
(a) $T_1(x)$



(b) $T_2(x)$



(c) $T_3(x)$



(d) $T_4(x)$

Figura 3.1: Função Exponencial e seus polinômios de Taylor

De fato, quando n for suficientemente grande a função f será igual a soma de sua série de Taylor próximo ao ponto $x_0 = 0$. Na verdade, a aproximação ”é boa”quando analisamos um intervalo próximo ao ponto em que a série está centrada. Caso contrário, se analisamos o intercalo $(-2,-1)$ percebemos que o polinômio de Taylor não se ajusta "tão bem"a função f.

Agora, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange escrevemos a função e^x como:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum ξ entre 0 e x.

Sendo assim, é válido que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right| = e^{\xi}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Quando n tende ao infinito $\lim_{n\to\infty} e^{\xi}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$
De fato, para $x > 0$, temos que $e^{\xi} < e^x$ pois $\xi \in (0,x)$ e logo $0 <$, e assim

$$0 < e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

e o $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ e logo pelo teorema do confronto $\lim_{n\to\infty} e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Se $x < 0$, então $e^{\xi} < e^0 = 1$, pois $\xi \in (x,0)$ e portanto

$$0 < e^{\xi}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Assim $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, logo, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Pelo teorema do confronto e de maneira análoga ao limite anterior $\lim_{n\to\infty} e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Conclusão, quando n tende ao infinito o $\lim_{n\to\infty} e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ para todo x real, e logo pelo teorema (2.2.1) a função e^x é igual a a soma de sua série de Taylor. Isto é

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{,para todo } x\,.$$

Exemplo 6. *Encontre a série de Taylor centrada em $x_0 = 0$, para a função $f(x) = a^x$, com $a > 0$.*

Solução:

Para encontrar a solução podemos usar um resultado de logaritmo que nos diz que:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

Agora, $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$, convergente para todo u real. Assim, se $u = x\ln a$, obtemos

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln a)^n}{n!}$$

logo,

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$$

Além disso, a convergência da série é válida para todo x real.

Tabela de séries de Taylor centrada em $x_0 = 0$

Diversas funções elementares, assim como e^x, podem ser reescritas como soma de sua série de Taylor. Segue abaixo uma lista com as principais funções em torno do ponto 0 (série de MacLaurin).

$f(x)$	Série de Taylor	
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = \infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = \infty$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = \infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\ln(x+1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$R = 1$

Além do mais, as funções acima podem ser combinadas com outras gerando novas séries de Taylor. Este é o caso que será observado no exemplo a seguir.

Exemplo 7. *Estime o valor da integral* $\int_0^1 xcos(x^3)dx$.

Solução:

É verdade que $\cos u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$, para todo u. Assim, basta fazer uma mudança de variável,isto é, chamar $u = x^3$. Portanto,

$$x\cos(x^3) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^{2n})^3}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!},$$

para todo x. Reescrevendo a integral $\int_0^1 xcos(x^3)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!}dx$.
E como uma série de potência é integrável, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)[(2n)!]}\Big|_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1^{6n+2}}{(6n+2)[(2n)!]} - \sum_{n=0}^{\infty} 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(6n+2)[(2n)!]}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xcos(x^3)dx &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(6n+2)[(2n)!]} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{336} - \frac{1}{14400} + \ldots \approx 0.4404
\end{aligned}$$

3.1.1 Aproximação para Função de Duas Variáveis

Esta seção dedica-se, na prática, como acontece a aproximação de uma função com mais de uma variável através de seu polinômio de Taylor.

É verdade pela fórmula de Taylor que $f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$, e ainda que $f(x,y) \approx T_n(x,y)$, para uma função definida $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entretanto, pelo teorema (2.3.1) se f possui $n+1$ derivadas parciais próxima à uma vizinhança de um ponto (x_0, y_0), então

$$T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial^i \partial^{k-i}}(x_0,y_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^{k-i}$$

e claramente,

$$f(x,y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0,y_0)(x-x_0)^i(y-y_0)^{k-i}.$$

A maior dificuldade de estabelecer as aproximações é encontrar as derivadas parciais da função. Não é uma tarefa difícil mas requer muita atenção. Na prática usa-se os softwares matemáticos para obtenção dos polinômios de Taylor. Porém, nesta seção utilizamos ”pequenos”valores para n com intuito de compreender a estrutura desta parte do trabalho acadêmico.

Exemplo 8.

Seja a função $f(x,y) = sen(xy)$ e vamos aproximar através do polinômio de Taylor de grau 2 em torno do ponto $(1, \frac{\pi}{3})$. Logo, pela fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\approx T_2(x,y) \\
T_2(x,y) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(1, \frac{\pi}{3})(x-1)^i(y-\frac{\pi}{3})^{k-i} \\
&= f(1, \frac{\pi}{3}) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{\pi}{3})(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{3})(y-\frac{\pi}{3}) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{\pi}{3})(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, \frac{\pi}{3})(x-1)(y-\frac{\pi}{3}) \\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, \frac{\pi}{3})(y-\frac{\pi}{3})^2
\end{aligned}$$

As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos(xy)y & \frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{\pi}{3}) &= \frac{\pi}{6} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos(xy)x & \frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{3}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -sen(xy)y^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{\pi}{3}) &= \frac{-\sqrt{3}}{18}\pi^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -sen(xy)x^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, \frac{\pi}{3}) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -sen(xy)xy + cos(xy) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, \frac{\pi}{3}) &= \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

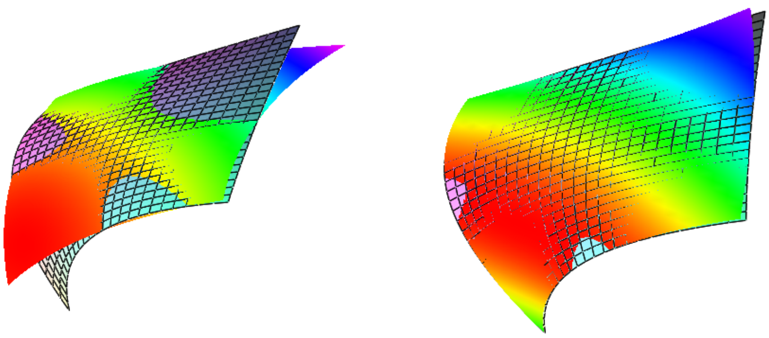
e portanto,

$$
\begin{aligned}
sen(xy) &\approx T_2(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}(x-1) + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{36}(x-1)^2 \\
&+ (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})(x-1)(y-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(y-\frac{\pi}{3})^2.
\end{aligned}
$$

Para ter uma dimensão de como o número de termos do polinômio cresce quando aumentos para terceira ordem, isto é, calculando $T_3(x,y)$, o resultado obtido é:

$$
\begin{aligned}
sen(xy) &\approx T_2(x,y) - \frac{\pi^3}{324}(x-1)^3 + (\frac{-\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi^2}{36})(y-\frac{\pi}{3})(x-1)^2 \\
&+ (\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12})(y-\frac{\pi}{3})^2(x-1) - \frac{1}{12}(y-\frac{\pi}{3})^3
\end{aligned}
$$

Utilizando software **Maple**, abaixo elaboramos uma representação gráfica de como o $T_2(x,y)$ e $T_3(x,y)$ se ajustam na função $sen(xy)$ próximo ao ponto $(1, \frac{\pi}{3})$:



(a) $T_2(x,y)$ (b) $T_3(x,y)$

Assim , quanto maior a ordem do polinômio de Taylor ao redor de um ponto melhor é a aproximação.

3.2 Máximos e Mínimos

Em diversas situações, os pontos mais interessantes de uma função são os pontos de máximos e mínimos. Porém, quando a função tem mais de uma variável, eles não são tão simples de localizá-los. O estudo realizado nesta seção, restrita a função de duas variáveis, tem como objetivo encontrar estes pontos através do polinômio de Taylor. [3]

Definição 3.2.1. *Uma função de duas de variáveis tem um máximo local em (a,b) se $f(x,y) \leq f(a,b)$ quando (x,y) está próximo (a,b), o número $f(a,b)$ é chamado de valor máximo local. Se $f(x,y) \geq f(a,b)$ quando (x,y) próximo (a,b), então f tem um mínimo local e $f(a,b)$ é chamado de valor mínimo local.*

Teorema 3.2.1. *Se uma função f tem máximo ou mínimo locais em (a,b) e as derivadas parciais de primeira ordem existem nesse ponto, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.*

Definição 3.2.2. *Uma função $f(x,y)$ tem um ponto de sela em um ponto crítico (a,b), se (x,y) próximo próximo (a,b) então existem pontos do domínio (x,y) onde $f(x,y) < f(a,b)$ e pontos do domínio onde $f(x,y) > f(a,b)$.*

Observação: Um ponto (a,b) é chamado de ponto crítico se as derivadas parciais nesse ponto são nulas ou se uma destas não existem. [3]

Matriz Hessiana, Fórmula de Taylor, Máximos e Mínimos

A seguir veremos que é possível avaliar os pontos de máximo e mínimo fazendo um estudo sobre a matriz hessiana da função f. Onde a matriz hessiana de uma função $f(x,y)$ é definida da seguinte forma:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Agora, seja $f(a,b)$ um valor de máximo ou mínimo local, então

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad - \quad & f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ + \quad & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right] \end{aligned}$$

Como $f(a,b)$ é um valor de máximo ou mínimo pelo teorema $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Portanto,

$$f(x,y) - f(a,b) \quad \approx \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]$$

A equação acima revela que o sinal de $f(x,y) - f(a,b)$ depende dos valores das derivadas parciais de segunda ordem. Além disso, rescrevendo a equação na forma matricial nota-se a presença da matriz hessiana da função f aplicada no ponto (a,b):

$$f(x,y)-f(a,b)\approx\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

Ainda, podemos dizer que $f(x,y)-f(a,b)=v^TH(a,b)v$, onde $v=\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$ e v^T seu transposto.

Da Álgebra Linear se $H(a,b)$ *semi-definida positiva*, isto é, $v^TH(a,b)v\geq 0$ então $f(a,b)$ é um valor de mínimo local. E $f(a,b)$ será máximo local se $H(a,b)$ for *semi-definida negativa*, isto é, $v^TH(x,y)v\leq 0$. Além disso, $f(a,b)$ será um ponto de sela se existir um v tal que $v^TH(a,b)v<0$ e outro v tal que $v^TH(a,b)v>0$, isto é, $H(x,y)$ é a *matriz indefinida*. Também, chamamos $H(a,b)$ de definida positiva se $v^TH(a,b)v>0$, e se $v^TH(a,b)v<0$, $H(a,b)$ é dita definida negativa.

Recorrendo, ainda, a Álgebra Linear podemos avaliar a natureza do ponto crítico através dos autovalores da hessiana. Sejam λ_1, λ_2 os autovalores da hessiana $H(a,b)$, então:

1. se os autovalores de $H(a,b)$ são positivos , então a hessiana é definida positiva e portanto a função possui um ponto de mínimo local.

2. se todos os autovalores de $H(a,b)$ são negativos, então a hessiana é definida negativa e portanto possui um ponto de máximo local.

3. se os autovalores de $H(a,b)$ tem sinais diferentes, então a hessiana é indefinida e portanto possui um ponto de sela.

Entretanto, no caso, para funções definidas em $\mathbb{R}^2$ é mais confortável avaliar a natureza do ponto através do determinante da matriz hessiana. Assim , vamos enunciar um teorema que relaciona os pontos de máximos e mínimos via determinante.

Teorema 3.2.2. *Suponha que as segundas derivadas de f sejam contínuas em uma bola aberta centrada em (a,b),e suponha que (a,b) seja ponto crítico de f. Seja*

$$D=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2$$

- $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $f(x,y)$ tem um mínimo local em (a,b);

- $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(x,y)$ tem um máximo local em (a,b).

- $D < 0$, então $f(a,b)$ não é nem mínimo nem máximo local(é chamado ponto de sela);

Observação: Podemos justificar o teorema acima encontrando os autovalores da hessiana, isto é,

$$det(H - \lambda I) = 0$$

e obtemos,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a,b) \\ &\lambda_1 \lambda_2 = D \end{aligned}$$

Bem, se o determinante D é negativo os autovalores tem sinais trocados e portanto (a,b) é ponto de sela em f. Logo, se D maior zero então os autovalores tem mesmo sinal, e também verifica-se que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ têm mesmo sinal. Assim, se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ então $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e portanto (a,b) é um ponto de mínimo local. Caso contrário, se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ então $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ e portanto (a,b) é um máximo local.

Exemplo 9. *Considere a função $f(x,y) = x^3 - y^2 - 12x + 6y + 5$, determine os pontos onde ocorrem máximo e mínimo.*

Solução: Primeiro é necessário encontrar os pontos críticos de f, ou seja, onde as derivadas parciais de primeira ordem não existem ou são iguais a 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = ^+_- 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6 - 2y = 0 \Rightarrow y = 3$$

Os pontos são $(-2,3)$ $(2,3)$. Agora, calculando as derivas parciais de segunda ordem o determinante da matriz Hessiana é:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -12x$$

Para o ponto $(2,3)$:
$H(2,3) = -12.2 = -24 < 0$, portanto no $(2,3)$ não tem máximo nem mínimo local, logo $f(2,3)$ é um ponto de sela.

Para o ponto $(-2,3)$:
$H(-2,3) = -12.(-2) = 24 > 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3) = -12 < 0$. Logo, $H(-2,3) > 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3) < 0$, então $f(2,3)$ é um máximo local.

Exemplo 10.

Agora, para função $f(x,y) = xsen(y)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = sen(y) \Rightarrow y = k\pi \text{ k inteiro}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xcos(y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ pois, } cos(k\pi) \neq 0$$

Logo o único ponto crítico é $(0,k\pi)$. As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -xcos(y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = cos(y)$$

Assim

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & cos(y) \\ cos(y) & -xsen(y) \end{pmatrix} = 0[-xsen(y)] - [cos(y)]^2$$

Portanto $H(0,k\pi) = -[cos(k\pi)]^2 < 0$, sendo assim, $(0,k\pi)$ não é máximo e nem mínimo. Então, $f(0,k\pi)$ é um ponto de sela , para todo k inteiro.

A seguir, temos o gráfico da função $f(x,y)$ próximo ao ponto de sela $(0,\pi)$. Assim pra determinada região da superfície $(0,\pi)$ é ponto de máximo, contrapartida, pra determinada outra região é ponto de mínimo local. O gráfico foi produzido através do software **Maple**.

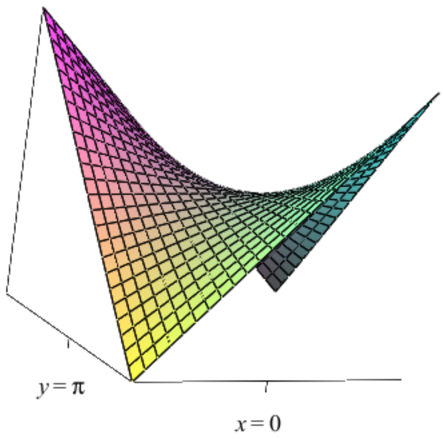


Figura 3.2: Gráfico da função $xsen(y)$

3.3 Convergência de Métodos Iterativos

Encontrar raízes de uma função nem sempre é um processo simples. Entretanto, na disciplina de Métodos Numérico em Cálculo são introduzidos métodos que nos auxiliam para tal objetivo. O método de Newton (ou Newton-Raphson) é um dos métodos mais conhecidos e eficientes para a solução de um problema raiz, isto é, $f(x) = 0$. Este método pode ser introduzido de diversas maneiras. O mais comum é considerar a técnica de modo gráfico. Outra possibilidade é usando a aproximação linear do polinômio de Taylor, ou ainda, se desejar uma convergência mais rápida aproxima-se pelo polinômio quadrático de Taylor(segunda ordem) o qual denominamos nesse trabalho de Método de Halley.

Quanto a convergência, se $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência que convirja para α e $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^{\kappa}} = \lambda$, então $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para α com ordem κ.

3.3.1 Convergência Quadrática do Método de Newton

O Algoritmo do método de Newton é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ se } f'(x_n) \neq 0 \text{ existir }, n \geq 0$$

De acordo com o teorema de Taylor, se f tem derivadas até a segunda ordem em um intervalo I e pode ser representada pela expansão em torno de um ponto próximo da raiz de $f(x)$. E suponhamos que α seja a raiz, então pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos que para algum ξ que está entre x_n e α:

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

como α é raiz então $f(\alpha) = 0$ e portanto

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

e assim

$$-\frac{f''(\xi)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n)$$

Relembrando que o método de Newton é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

logo, substituindo esse resultado na equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{f(\xi)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} &= (x_n - x_{n+1}) + (\alpha - x_n) \\
\alpha - x_{n+1} &= -\frac{f(\xi)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)}
\end{aligned}$$

além do mais, digamos que o erro seja $E_n = \alpha - x_n$ e assim,

$$E_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}E_n^2 \Rightarrow |E_{n+1}| = \left|-\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}\right| |E_n^2| \Rightarrow |E_{n+1}| = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}\right| |E_n^2|$$

A convergência depende muito da escolha do x_0 inicial que deve ser próximo a raiz. Caso convirja como vimos ela é dita convergência quadrática.

3.3.2 Convergência Cúbica do Método de Halley

Segundo a referência [8] o Método de Halley, similar ao de Newton, é um método para verificação de raiz. É um algoritmo para resolver a equação não linear $f(x) = 0$ e consiste em uma sequencia de iterações a partir de um ponto inicial x_0 da seguinte forma :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

desde que possua derivada até a terceira ordem.

Agora vamos supor que f seja contínua e possua derivada de terceira ordem numa vizinhança próximo a α, tal que, $f(\alpha) = 0$. E ainda, se x_n está nessa vizinhança , então a partir do teorema de Taylor com resto de Lagrange podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(\alpha - x_n)^3 \quad (1) \\ 0 &= f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\eta)(\alpha - x_n)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

para algum ξ e η existente entre α e x_n

Então multiplique (1) por $2f'(x_n)$ e (2) por $f''(x_n)(\alpha - x_n)$ e subtraia (2) de (1):

$$\begin{aligned}
0 &= 2f'(x_n)f(x_n) + 2[f'(x_n)]^2(\alpha - x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n)^2 \\
&+ \frac{f'(x_n)f'''(\xi)(\alpha - x_n)^3}{3} - f(x_n)f''(x_n) - f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 \\
&- \frac{f''(x_n)f''(\eta)(\alpha - x_n)^3}{2} \\
\Rightarrow 0 &= 2f'(x_n)f(x_n) + 2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n) \\
&+ \left(\frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3} - \frac{f'(x_n)f''(\eta)}{2}\right)(\alpha - x_n)^3 \\
\Rightarrow &- 2f'(x_n)f(x_n) - \left(\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{6}\right) \\
&= (2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n))(\alpha - x_n)
\end{aligned}$$

E logo

$$\begin{aligned}
&\alpha - x_n = \\
&-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} - \frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}(\alpha - x_n)^3
\end{aligned}$$

Mas pelo método de Halley $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$ logo,

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}(\alpha - x_n)^3$$

Tomando o erro $E_n = \alpha - x_n$, assim

$$|E_{n+1}| = \left|-\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}\right| |E_n|^3$$

Portanto, em outras palavras, a medida que n aumenta a convergência do método entre um termo e seu anterior é cúbica. Claro, a convergência do método depende muito do x_0 inicial. Sendo assim, mais uma vez conseguimos estudar a convergência usando a fórmula de Taylor.

3.4 Equações Diferenciais Ordinárias

Encontrar solução de uma equação diferencial ordinária linear nem sempre é possível mediante a manipulação de funções elementares. O objetivo dessa seção é verificar que tais soluções são possíveis utilizando séries de Taylor. Isto é, admite-se que a equação diferencial ordinária linear possui uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

para um raio de convergência $|x-x_0| < R$. Mais especificamente, o objetivo é encontrar solução em série de Taylor para uma equação diferencial de segunda ordem linear com coeficientes variáveis da forma $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$, tal que, $y = y(x)$. Esta equação é muito comum em determinados campos das físicas, por exemplo, na eletrostática. A maior dificuldade usando este método como solução é a recorrência de sucessivas derivadas implícitas.

3.4.1 Solução em série de Taylor ao redor de um ponto ordinário

Para o desenvolvimento desta seção é necessário definir ponto ordinário e enunciar um teorema sobre a existência de uma solução em série de Taylor para equação diferencial já citada. Esta seção foi elaborada a partir de [9]

Definição 3.4.1. *Seja $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$, com $y = y(x)$ e A, B e C polinômios sem fatores comuns. Dizemos que x_0 é um* ponto ordinário *da equação se $A(x_0) \neq 0$, e um* ponto singular *se $A(x_0) = 0$.*

Teorema 3.4.1 (Existência de soluções em série de Taylor)**.** *Se $x = x_0$ é um ponto ordinário da equação diferencial*

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

então existe solução em série de Taylor ao redor do ponto $x = x_0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Observação: Segundo a referência a solução converge para $|x-x_0| < R$, onde R é a distância de x_0 ao ponto singular mais próximo, e dizemos que a solução de $y(x)$ é uma solução ao redor do ponto ordinário x_0.

Exemplo 11.

Equação de Legendre: Esta equação ocorre principalmente em problemas com simetria esférica, por exemplo, em eletrostática. Tem a seguinte forma:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \text{ ,para } p \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

O ponto $x_0 = 0$ é um ponto ordinário. Então, procuramos uma solução em série de Taylor tal que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$.

Para $x = 0$ e sabendo que $a_0 = y(0)$ e $a_2 = \dfrac{y''(0)}{2!}$, temos

$$\begin{aligned} y''(0) &= -p(p+1)y(0) \\ \Rightarrow \quad & a_2 = -\frac{p(p+1)a_0}{2!} \end{aligned}$$

Derivando implicitamente a equação (3.1) em relação a x e aplicando no ponto $x = 0$, obtém-se :

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''' & -4xy'' + (p(p-1)-2)y = 0 \\ \Rightarrow \quad & y'''(0) = -(p(p+1)-2)y'(0) \\ \Rightarrow \quad & a_3 = -\frac{(p+2)(p-1)}{3!}a_1 \end{aligned}$$

Calculando a derivada de segunda ordem da equação (3.1) em relação a x:

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(4)} & -6xy^{(3)} + (p(p+1)-6)y^{(2)} = 0 \\ \Rightarrow \quad & y^{(4)}(0) = -(p+3)(p-2)y^{(2)}(0) \\ \Rightarrow \quad & a_4 = \frac{(p+3)(p+1)p(p-2)}{4!}a_0 \end{aligned}$$

Derivando a equação acima novamente em relação a x:

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(5)} & -8xy^{(4)} + (p(p+1)-12)y^{(3)} = 0 \\ \Rightarrow \quad & y^{(5)}(0) = -(p+4)(p-3)y^{(3)}(0) \\ \Rightarrow \quad & a_5 = \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}a_1 \end{aligned}$$

E assim continuamos recursivamente observando que existe uma padrão nas derivadas tal que

$$y^{(n+2)}(0) = -(p+n+1)(p-n)y^{(n)}(0)$$

Em seguida substituindo os valores dos coeficientes na $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ &= a_0 + a_1 x - \frac{p(p+1)}{2!} a_0 x^2 - \frac{(p+2)(p-1)}{3!} a_1 x^3 \\ &+ \frac{(p+3)(p+2)p(p-1)}{4!} a_0 x^4 + \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!} a_1 x^5 - \ldots \end{aligned}$$

Todos os coeficientes foram determinados termos de a_0 e a_1. Assim,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{(p+3)(p+2)p(p-1)}{4!} x^4 - \ldots \right] \\ &+ a_1 \left[x - \frac{(p+2)(p-1)}{3!} x^3 + \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \ldots \right] \end{aligned}$$

Logo, $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_(x)$, tal que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{(p+3)(p+2)p(p-1)}{4!} x^4 - \ldots \\ y_2(x) &= x - \frac{(p+2)(p-1)}{3!} x^3 + \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \ldots \end{aligned}$$

As soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes. Além disso, $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ é uma solução para equação de Legendre. Isto é, se tomar respectivamente $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ ou $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ forma-se uma base para as soluções.

Observação: No estudo de equações diferenciais,a independência linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ pode ser verificada através do calculo Wronskiano, ou seja,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

e nesse caso para $x = 0$ o Wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$.

O próximo exemplo mostra que é possível encontrar soluções com ”formas mais fechadas”.

Exemplo 12. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$(2+4x-2x^2)y''-12(x-1)y'-12y=0 \tag{3.2}$$

Soluçao:

Dado $x=1$ é um ponto ordinário. Então, buscamos uma solução tal que $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$, para $a_n=\dfrac{y^{(n)}(1)}{n!}$.

Além disso, simplificamos a equação dividindo por 2, assim:

$$(1+2x-x^2)y''+(6-6x)y'-6y=0 \tag{3.3}$$

Se $x=1$ na equação (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} y''(1) &= 3y(1) \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{3}{2}a_0 \end{aligned}$$

Agora derivando a equação (3.3) implicitamente em relação a x e aplicando no ponto $x=1$, temos:

$$\begin{aligned} (1-2x-x^2)y^{(3)} \quad &+ \quad (8-8x)y''-12y'=0 \\ &\Rightarrow \quad y^{(3)}(1)=6y'(1) \\ &\Rightarrow \quad a_3=a_1 \end{aligned}$$

Calculando a segunda derivada da equação (3.3):

$$\begin{aligned} (1-2x-x^2)y^{(4)} \quad &+ \quad (10-10x)y^{(3)}-12y''=0 \\ &\Rightarrow \quad y^{(4)}(1)=10y''(1)=30y(1) \\ &\Rightarrow \quad a_4=\frac{5}{4}a_0 \end{aligned}$$

Repetindo o processo,

$$\begin{aligned}(1-2x-x^2)y^{(5)} &+ (12-12x)y^{(4)}-12y^{(3)}=0\\ &\Rightarrow y^{(5)}(1)=15y^{(3)}(1)=15\cdot 6y(1)\\ &\Rightarrow a_5=\frac{3}{4}a_1\end{aligned}$$

Analogamente encontramos, para todo $k\geq 1$

$$\begin{aligned}a_6 &= \frac{7}{8}a_0\\ a_7 &= \frac{4}{8}a_1\\ &\vdots\\ a_{2k} &= \frac{2k+1}{2^k}a_0\\ a_{2k+1} &= \frac{k+1}{2^k}a_1\end{aligned}$$

A solução $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ pode ser moldada com a seguinte forma $y(x)=a_0+a_1(x-1)+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}(x-1)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}(x-1)^{2k+1}$, uma vez que a fórmula de recorrência dos coeficiente são verdadeiros para $k\geq 1$. Substituindo a_{2k} e a_{2k+1},logo

Logo,

$$y(x)=a_0+a_1(x-1)+a_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k}+a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1}$$

Entretanto , podemos avaliar o somatório para $k\geq 0$ e verificar que os coeficientes de a_0 e a_1 coincidem. Desta forma,

$$y(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1}$$

Para,

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}(x-1)^{2k}$$

e

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}(x-1)^{2k+1}$$

são ambas convergentes para todo x e ainda são linearmente independentes (Wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$). Para $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ ou $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ nota-se que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (3.3).

3.4.2 Soluções Aproximadas Para Equações Diferenciais Ordinárias

A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo [10]. Nesta seção apresentaremos dois métodos que são utilizados para calcular a solução de uma equação diferencial ordinária num conjunto discreto de pontos. Além do mais, ambos os métodos surgem da expansão da função em série de Taylor.

Método de Taylor

Para o desenvolvimento do método supomos que a solução $y(x)$ para o problema de valor inicial

$$y' = f(x,y)\ ,\ a \leq x \leq b,\ y(a) = \alpha$$

tenha $(n+1)$ derivadas continuas. Se expandirmos a solução, $y(x)$, na enésima ordem do polinômio de Taylor com resto de Lagrange no ponto x_i e avaliar no ponto x_{i+1}, obtemos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_i) \tag{3.4}$$

para algum $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ e $h = x_{i+1} - x_i$.

A diferenciação sucessiva da solução, $y(x)$, nos dá

$$y'(x) = f(x,y(x))$$
$$y''(x) = f'(x,y(x))$$

e, em geral,

$$y^{(k)} = f^{(k-1)}(x, y(x))$$

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y(x_i)) + \ldots \\ &+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y(x_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(x_i)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Exemplo 13. *Considere o problema de valor inicial e aplique o método de Taylor de segunda ordem:*

$$y' = y - x^2 + 1, \; y(0) = 0.5, \; 0 \leq x \leq 2$$

Solução:

A segunda ordem para o método de Taylor é

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y(x_i)) + O(h^3)$$

Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange o erro é igual a $\frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$ e assim a fórmula nos fornece uma ordem de erro $O(h^3)$.

Contudo, temos

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y(x_i))$$

Calculando as derivadas, obtemos

$$f(x, y(x)) = y - x^2 + 1$$
$$f'(x, y(x) = y - x^2 - 2x - 1$$

Logo,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h(y(x_i) - x_i^2 + 1) + \frac{h^2}{2}(y(x_i) - x_i^2 - 2x_i - 1)$$

A solução exata do P.V.I é

$$y(x) = (x+1)^2 - 0,5e^x$$

A tabela a seguir contém os valores da solução exata e aproximada para cada x_i:

x_i	$y(x_i)$	$y(x)$ solução exata
0,0	0,5000000	0,5000000
0,2	0,8300000	0.8292986
0,4	1,2158000	1.2140877
0,6	1,6529760	1.6489406
0,8	2,1323327	2.1272295
1,0	2,6486459	2.6408591
1,2	3,1913480	3.1799415
1,4	3,7486446	3.7324000
1,6	4,3061464	4.2834838
1,8	4,8462986	4.8151763
2,0	5,3476843	5.3054720

Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas e um método de resolução de equação diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. A fórmula obtém-se da expansão em série de Taylor. Se assumimos que $y(x)$ têm derivadas contínuas até ordem $(n+1)$, numa vizinhança de um ponto x, podemos expandi-la na série de Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + y''(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$

para algum $\xi \in (x, x+h)$.

Então, para aproximação de segunda ordem tomando h e $-h$ respectivamente, temos

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_1) \quad (1)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_2) \quad (2)$$

Subtraindo a última expressão da primeira obtemos uma fórmula centrada para primeira derivada

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} y'''(\xi) \tag{3.6}$$

para $\xi \in (x-h, x+h)$

Se aproximássemos por Taylor de primeira ordem obteríamos uma ordem de erro h, porém, nesse caso a fórmula fornece uma aproximação com ordem de h^2.

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{3.7}$$

De maneira análoga, fazendo expansão em Taylor até a terceira ordem conseguimos uma expressão pra derivada segunda

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\kappa) \tag{3.8}$$

para algum $\kappa \in (x-h, x+h)$.

No método de diferenças finitas as derivadas presentes na equação diferencial são substituídas por aproximações das equações descritas acima. Assim, para cada ponto x_i, no intervalo onde a equação diferencial esta definida, tomamos:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{3.9}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_1 + y_{i-1}}{h^2} \tag{3.10}$$

Onde h é o tamanho do intervalo $x_{i+1} - x_i$ e, por conveniência de notação, $y_i = y(x_i)$.

Para ilustrar a ideia do método a seguir temos um exemplo.

Exemplo 14. *Usando o método das diferenças finitas podemos encontrar aproximações para a solução da equação diferencial ordinária*

$$y'' - y' + xy = e^x(x^2+1), \qquad x \in (0,1)$$

com condições de contorno,

$$y(0) = 0 \qquad y(1) = e$$

Solução:

Se discretizamos o intervalo $(0,1)$ tomando um $h = 0,1$ e usando as equações (3.8) e (3.9) para aproximar $y(x_i)$, teremos para $i = 1,2,...,9$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + x_i y_i = e^{x_i}(x_i^2 + 1)$$

Neste caso podemos caso particular, onde h é uniforme podemos notar que $x_i = ih$ e o sistema acima pode ser rescrito como

$$(2-h)y_{i+1} + (2ih^3 - 4)y_i + (2+h)y_{i-1} = 2h^2 e^{ih}((ih)^2 + 1).$$

As condições de contorno aparecerão nas equações correspondentes a $i = 1$ e $i = 9$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} &(2-h)y_2 + 2(h^3 - 2)y_1 = 2h^2(h^2+1)e^h && i = 1 \\ &2(9h^3 - 2)y_9 + (2+h)y_8 = 2h^2 e^{9h}(81h^2 + 1) - (2-h)e && i = 9 \end{aligned}$$

A solução exata do problema de contorno é $y(x) = xe^x$. Os resultados correspondentes para solução exata e a aproximação com $h = 0,1$ estão apresentados na tabela:

x_i	y_i	solução exata $y(x_i)$
0,1	0,110401	0,110517
0,2	0,244056	0,244281
0,3	0,404638	0,404958
0,4	0,596333	0,596730
0,5	0,823911	0,824361
0,6	1,09280	1,09327
0,7	1,40918	1,40963
0,8	1,78007	1,78043
0,9	2,21342	2,21364

Os passos seguidos ano exemplo anterior podem ser generalizados em um algoritmo geral de problemas de contorno de equações diferenciais de segunda ordem [10].

Conclusão

Nesse trabalho nos propusemos a estudar o comportamento das funções quando estão representadas por sua série de Taylor. O maior incentivo para dedicar-se a esse tema foram as diversas áreas de aplicações, principalmente, na área da matemática aplicada. A elaboração do mesmo foi uma tarefa que exigiu muitas horas de dedicação, porém, prazerosa. Além do mais, pude aplicar vários conceitos recebidos durante o curso e, ainda, aperfeiçoar e agregar novos conhecimentos.

No primeiro capítulo, fez-se necessário o estudo prévio de conceitos e ferramentas relacionados à série de potências. Ainda nesse capítulo, o resultado mais importante é o que diz respeito à convergência. Os pontos da função e sua série de potências têm valores coincidentes apenas se estiverem no intervalo de convergência da série.

No segundo capítulo, introduzimos o conceito de série de Taylor. Além do mais, vimos que o conceito amplia-se ao cenário para funções definidas em mais de uma variável. Entretanto, o resultado mais importante citado nesse capítulo, sem dúvidas, é a fórmula de Taylor. A fórmula garante que podemos representar a função através da soma parcial da série de Taylor acrescidos de um resto. De fato, utilizamos a fórmula para modelar diversos problemas propostos no capítulo três.

No terceiro capítulo, vimos a importância de todo o estudo praticado nos capítulos anteriores. A seção foi dedicada exclusivamente aos campos de aplicações da série de Taylor. A maior parte delas são utilizadas em método numéricos. Por exemplo, convergência de métodos iterativos, máximos e mínimo de funções, solução de EDO's. Neste parte do trabalho buscamos apresentar os resultados, na maioria das vezes, através de exemplos. Assim, enunciamos os teoremas necessários, porém, omitimos a demostração.

Finalmente, concluo afirmando a importância desse trabalho o qual abre caminhos para estudos mais avançados, por exemplo, equações diferenciais parciais. Na verdade, o presente trabalho é um estudo superficial tendo em vista que o tema pode facilmente ser aplicado a áreas mais complexas e deixando assim a porta entreaberta para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um Curso de Cálculo:** Volume 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] GUIDORIZZI, Luiz Hamilton. **Um Curso de Cálculo:** Volume 4. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[3] STEWART, James. **Cálculo:** Volume 2. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[4] APOSTOL, Tom M.. **Calculus:** One-Variables, With an Introduction to Linear Algebra. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1967.

[5] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica.** 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 722 p.

[6] ANDRADE, Doeherty. **Teorema de Taylor**. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/taylor.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2012.

[7] KATZNELSON, Yonatan. **Taylor's approximation in several variables**. supplementary notes. Disponível em: <http://classes.soe.ucsc.edu/ams011b/Winter08/PDF/11Bsn2.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2012.

[8] WIKIPEDIA. **Halley's method**. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method>. Acesso em: 05 jan. 2013.

[9] CANO, : José Albeiro Sánchez. **Método de Las series de Taylor para Resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales e no Lineales**. Disponível em: <http://casanchi.com/mat/metodotaylor01.pdf>. Acesso em: 23 out. 2012

[10] CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**: Para as engenharias e Ciências Aplicadas. Campinas: Editora da Unicamp, 1993