

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS PARA ESPAÇOS LOCALMENTE COMPACTOS

FELIPE AUGUSTO TASCA

Trabalho de Conclusão de Curso
Orientador: DANILO ROYER

Florianópolis
2013

FELIPE AUGUSTO TASCA

**TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS PARA
ESPAÇOS LOCALMENTE COMPACTOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Danilo Royer

Florianópolis

2013

Esta monografia foi apresentada como Trabalho de Conclusão de Curso no Curso de Matemática - Habilitação em Licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº **01/CCM/13**.

Professor Me. Nereu Estanislau Burin
Coordenador do Curso de Graduação em Matemática

Felipe Augusto Tasca
Acadêmico

Banca Examinadora:

Professor Dr. Danilo Royer
Orientador

Professor Dr. Daniel Gonçalves
Membro

Professor Dr. Luciano Bedin
Membro

Resumo

A proposta do seguinte trabalho é estudar o teorema de Stone-Weierstrass em espaços localmente compactos. Assumimos para tal, que os conceitos de espaços métricos estudados em Análise já são de conhecimento do leitor. Para chegarmos ao teorema proposto é necessário começar o estudo de espaços topológicos. Após definir vários conceitos dentro da Topologia, tais como, espaços de Hausdorff, espaços compactos, compactificação de Alexandroff, teremos adquirido aprendizado suficiente para alcançarmos o objetivo principal, que é estudar a versão do Teorema de Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos.

Sumário

Introdução	6
1 Espaços Topológicos	8
1.1 Interior, Fronteira e Vizinhança	12
1.2 Conjuntos Fechados, Fecho e Pontos de Acumulação	14
2 Limites	21
2.1 Sequências	21
2.2 Limite de uma Função	22
2.3 Sequência de Funções	23
3 Continuidade	27
3.1 Continuidade de Funções	27
3.2 Homeomorfismo	29
4 Compacidade	31
4.1 Espaços Compactos	31
4.2 Espaços Localmente Compactos	37
5 Compactificação de Alexandroff	42
6 Teorema de Stone-Weierstrass	49
Conclusão	59
Referências Bibliográficas	61

Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema de Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos. Para tal façanha, é necessário mostrar outros dois teoremas centrais de Análise Matemática: (i) o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que foi provado pela primeira vez pelo matemático alemão Karl Weierstrass em 1885 e que estabelece que toda função contínua $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios; (ii) o Teorema de Stone-Weierstrass, demonstrado pela primeira vez pelo matemático estadunidense Marshall H. Stone em 1937, que reconheceu que o intervalo $[a; b]$ da reta poderia ser substituído por espaços mais gerais substituindo também os polinômios por funções adequadas. Mais precisamente, Stone provou que funções contínuas definidas em espaços topológicos compactos de Hausdorff podem ser uniformemente aproximadas por funções que pertençam a uma subálgebra do espaço de todas as funções contínuas que separam pontos e contém as funções constantes.

Para chegar a estes teoremas, assumimos que os resultados sobre de Espaços Métricos vistos em Análise já são de conhecimento do leitor. Entretanto, fizemos um estudo sobre espaços topológicos pois as noções de espaço localmente compacto e espaço de Hausdorff definidas em espaços topológicos, estão presentes na hipótese da versão localmente compacta do teorema de Stone-Weierstrass. Sendo assim, o presente trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, definimos os conceitos mais básicos em topologia, como espaços topológicos, espaços metrizáveis e espaços de Hausdorff. Neste mesmo capítulo, caracterizamos o interior, a fronteira e a vizinhança de um subconjunto de um espaço topológico, e por fim, definimos conjuntos fechados, o fecho e o que é um ponto de acumulação.

O objetivo do Capítulo 2 é apresentar o conceito limites de sequências, limites de funções e limites de sequências de funções. Já no terceiro Capítulo, estudamos

continuidade de funções e o importante conceito de homeomorfismo. No Capítulo 4, caracterizamos os conjuntos compactos e localmente compactos, seguidos de algumas propriedades importantes.

O Capítulo 5 é de suma importância para o presente trabalho. Introduzimos a compactificação de Alexandroff que consegue “compactificar” um conjunto que é localmente compacto. Neste mesmo capítulo, fizemos algumas definições que foram úteis nas proposições e resultados seguintes. Finalizamos o capítulo com uma proposição que ajudou a introduzir o espaço métrico $\mathcal{C}_0(X)$ com X localmente compacto Hausdorff.

O sexto, último e mais importante capítulo é destinado às demonstrações dos teoremas de Aproximação de Weierstrass, Stone-Weierstrass e Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos.

Capítulo 1

Espaços Topológicos

No estudo de funções contínuas em espaços métricos, podemos encontrar, em quase todos os livros de Análise, a seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam M, N espaços métricos. Para que a aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M .*

Demonstração. Esta demonstração pode ser encontrada em [2] [LIMA, E.L. *Elementos de Topologia Geral* - p. 60/61]. ■

De acordo com esta proposição, o fato de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ ser contínua não depende dos números que exprimem as distâncias entre pontos desses espaços, mas somente das coleções de conjuntos abertos de M e N . Isto motiva a consideração do conceito mais geral de espaço topológico, onde os conjuntos abertos não são necessariamente definidos a partir de uma distância. Com isso, começamos a estudar alguns “subconjuntos abertos” de um conjunto, definidos de uma maneira diferente, que podem coincidir com os abertos do espaço métrico (ou não).

Definição 1. *Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados subconjuntos abertos (segundo a topologia τ) satisfazendo as seguintes condições:*

1. X e o subconjunto \emptyset são abertos, ou seja, pertencem à τ ;

2. A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um aberto;
3. A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Observação. É equivalente, em vez de 3), afirmar que a interseção de dois abertos é um aberto.

Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia X . Frequentemente se diz apenas “o espaço topológico X ”, mencionando τ somente quando for necessário para evitar ambiguidades.

Exemplos.

1. Seja X um conjunto qualquer. Definimos a topologia τ_0 em X tomando todos os subconjuntos de X como abertos. $\tau_0 = P(X)$ é chamada topologia discreta. (X, τ_0) é um espaço topológico.

Note que as condições são trivialmente cumpridas: X e \emptyset pertencem à $P(X) = \tau_0$. Se $A_i \in P(X)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in P(X)$. Ainda, se $A_i \in P(X)$ para todo $i \in I$, tem-se que $\bigcup_{i \in I} A_i \in P(X)$.

2. Considere a topologia τ_1 em X , na qual os únicos abertos são X e o conjunto vazio \emptyset . τ_1 é chamada topologia caótica e (X, τ_1) é um espaço topológico.
3. Se M é um espaço métrico então $\tau = \{A \subset M; A \text{ é aberto (segundo o conceito de conjunto aberto em espaços métricos)}\}$ é uma topologia.
4. Note que se tomarmos $\tau = X$, onde X é um conjunto, (X, X) não é espaço topológico, pois $\emptyset \notin \tau$. Porém, se tomarmos $\tau = X \cup \emptyset$, temos que (X, τ) é espaço topológico (no caso, a topologia caótica).
5. Tome $X = \{1, 2, 3\}$ e $\tau = P(X) \setminus \{2\}$. (X, τ) não é espaço topológico pois, $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \tau$.

Definição 2 (Espaços Metrizáveis). *Um espaço topológico X diz-se metrizável quando é possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d coincidem com os abertos da topologia X .*

Exemplos.

1. A topologia discreta é metrizável: basta considerar a métrica na qual $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$ quaisquer.
2. A topologia caótica não é metrizável. De fato, se X contiver pelo menos dois elementos, (X, τ_1) não será metrizável. Segundo a proposição: *Dados dois pontos distintos a e b num espaço métrico M , existem em M duas bolas abertas disjuntas com centros em a e b respectivamente*, se tomarmos uma métrica d qualquer e $\epsilon = \frac{d(a,b)}{2} > 0$, ($a, b \in X$, $a \neq b$), as bolas $B(a, \epsilon)$ e $B(b, \epsilon)$ são abertos em (X, d) . Porém, por outro lado, $B(a, \epsilon)$ e $B(b, \epsilon)$ não pertencem à τ_1 . Logo não são abertos segundo esta topologia. Portanto, τ_1 não é metrizável.
3. No plano \mathbb{R}^2 , definamos uma topologia τ declarando abertos todos os conjuntos que se podem exprimir como reunião de regiões limitadas por quadrados de lados paralelos aos eixos (excluídos os lados de cada região). (\mathbb{R}^2, τ) é espaço metrizável.
Seus abertos provém da métrica $|x - y| = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, e um subconjunto $A \subset M$ (M espaço métrico) é aberto em M se, e somente se, A é uma reunião de bolas abertas em M .

Observação. Todo espaço metrizável é topológico, pela definição. Mas nem todo espaço topológico é metrizável. Um contra-exemplo é o próprio τ_1 (topologia caótica).

Definição 3 (espaços de Hausdorff). *Um espaço topológico X é dito um espaço de Hausdorff se para todo $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem abertos $U, V \subset X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Observação. Um Espaço de Hausdorff também são chamados de Espaço Separado ou Espaço T_2 .

Note que todo espaço topológico cuja topologia provém de uma métrica é Hausdorff, conforme a seguinte proposição:

Proposição 2. *Todo espaço metrizável é Hausdorff.*

Demonstração. Se $x \neq y$, tome $U = B(x, r)$ e $V = B(y, r)$ com $r = \frac{d(x,y)}{2}$. Então, $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. ■

Exemplos.

1. A topologia discreta (τ é conjunto das partes de X) é metrizável, logo é Hausdorff.
2. A topologia caótica não é Hausdorff pois se X contém pelo menos dois pontos não é possível separá-los por abertos disjuntos (os únicos abertos são o vazio e o conjunto todo).
3. Se M é espaço métrico e $\tau = \{A \subset M; A \text{ é aberto em } M\}$, então M é Hausdorff.
4. (*Topologia Co-finita*)

Seja X um conjunto infinito. Considere a topologia $\tau = \{A \subseteq X; X \setminus A \text{ é finito}\} \cup \emptyset$.

Verificação que é topologia:

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Dados $A_1, A_2 \in \tau$, podemos ter:

Caso 1: Se $A_1 = \emptyset$ ou $A_2 = \emptyset$, temos que $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau$.

Caso 2: Se $X \setminus A_1$ e $X \setminus A_2$ são finitos, temos que $X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \in \tau$.

Logo $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(iii) Dada uma família $\{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \in \tau$, podemos ter:

Caso 1: Se $A_i = \emptyset$ para todo i , segue que $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \tau$.

Caso 2: Se ao menos um $A_{i_0} \neq \emptyset$ donde $X \setminus A_{i_0}$ é finito, temos que $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) \subset X \setminus (A_{i_0})$. Então $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ é finito.

Logo, de fato τ é topologia.

Mas note que na topologia co-finita não existem abertos (não-vazios) disjuntos. Portanto não é Hausdorff.

1.1 Interior, Fronteira e Vizinhança

Agora enunciaremos alguns conceitos e caracterizações de subconjuntos de espaços topológicos.

Definição 4. *Seja S um conjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in S$ chama-se um ponto interior de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$.*

O interior de S é o conjunto $Int(S)$ formado pelos pontos interiores de S .

Proposição 3. *O interior de um conjunto S , num espaço topológico X , é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S . Em particular, $Int(S)$ é aberto em X .*

Demonstração. Seja $A = \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ a reunião de todos os abertos $A_\lambda \subset S$. Então, A é aberto em X e $A \subset S$, logo, $x \in A$ implica $x \in Int(S)$. Assim, $A \subset Int(S)$. Reciprocamente, se $x \in Int(S)$ existe um aberto A' em X tal que $x \in A' \subset S$. Logo, $A' = A_\lambda$ para algum λ e portanto $A' \subset A$. Isto mostra que $x \in A$, donde $Int(S) \subset A$. ■

A proposição acima significa que $Int(S)$ é o maior subconjunto aberto de X contido em S .

Num espaço métrico M , um ponto x pertence ao interior de um subconjunto S se, e somente se, existe uma bola aberta $B(x; r)$, de centro em x , inteiramente contida em S .

Corolário. *Um subconjunto S é aberto se, e somente se, $S = Int(S)$.*

Exemplos.

1. Seja X um espaço métrico. Considerando os abertos da topologia como sendo os abertos formados pela união de bolas abertas em X , temos, pela Análise, que um ponto x é dito isolado em X quando existe uma bola aberta de centro em x (e raio $r > 0$) que consiste unicamente no ponto x : $B(x; r) = \{x\}$. Um espaço métrico chama-se discreto quando todos os seus pontos são isolados).

Então, um (conjunto reduzido a um) ponto $x \in X$ tem interior não-vazio se, e somente se, x é um ponto isolado. Todo subconjunto finito do espaço euclidiado \mathbb{R}^n tem interior vazio. O conjunto dos números racionais da reta (e também o conjunto dos números irracionais) tem interior vazio.

2. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o interior de uma bola fechada $B[a; r]$ é a bola aberta $B(a; r)$ de mesmo centro e mesmo raio. Num espaço métrico arbitrário, pode-se afirmar apenas que $B(a; r) \subset \text{Int}(B[a; r])$.
3. No espaço $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1\}$, o ponto $p = (0, 1)$ é interior ao quadrado $\{(x, y) \in M; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ mas não é interior ao disco $\{(x, y) \in M; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. Seja X espaço métrico. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua (no espaço métrico) e $f(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto interior ao conjunto $\{x \in X; f(x) \geq 0\}$.

Definição 5. Num espaço topológico X , diz-se que um conjunto V é uma vizinhança de um ponto $x \in X$ quando $x \in \text{Int}(V)$. Isto quer dizer, naturalmente, que V contém um aberto que contém x .

A seguinte proposição decorre imediatamente das definições.

Proposição 4. Um conjunto A é aberto num espaço topológico X se, e somente se, é uma vizinhança de cada um de seus pontos.

Definição 6. A fronteira de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto $fr(S)$ formado por todos os pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de S e do seu complementar $X - S$. Em outras palavras, para que $x \in fr(S)$ é necessário e suficiente que x não pertença nem ao interior de S nem ao interior de $X - S$.

Observação. Note que $\text{Int}(S) = \emptyset \iff S \subset fr(S)$. Também, temos que todo ponto de S que não pertence a $\text{Int}(S)$ pertence a $fr(S)$. Ainda, um conjunto S é aberto se, e somente se, $S \cap fr(S) = \emptyset$.

Exemplos.

1. No espaço \mathbb{R}^n , a fronteira de uma bola (aberta ou fechada) de centro a e raio r é a esfera $S(a; r)$.
2. A fronteira do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é toda reta \mathbb{R} .
3. Em geral, alguns pontos da fronteira de S pertencem a S , outros não; por exemplo, se $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ a fronteira de S no plano consiste no semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y > 0$ e mais o segmento $-1 \leq x \leq 1, y = 0$. O semicírculo está contido em S , o segmento não.

Assim como a noção de conjunto aberto, os conceitos de interior e de fronteira de um conjunto são relativos, isto é, se $S \subset X$ e o espaço X é um subespaço de um espaço topológico maior Y o interior de S em X e a fronteira de S em X não coincidem com o interior e a fronteira de S em Y . Por exemplo, seja $S = [a, b]$ um intervalo fechado da reta \mathbb{R} . O interior de $[a, b]$ na reta é o intervalo aberto (a, b) e a sua fronteira é o conjunto $\{a, b\}$ formado pelos dois pontos extremos. Considerando, entretanto, \mathbb{R} como o eixo das abcissas no plano \mathbb{R}^2 , o interior de $[a, b]$ em \mathbb{R}^2 é vazio e sua fronteira é (portanto) o próprio intervalo $[a, b]$.

1.2 Conjuntos Fechados, Fecho e Pontos de Acumulação

Nesta seção, faremos mais algumas caracterizações importantes de subconjuntos em espaços topológicos.

Definição 7. *Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se fechado quando o seu complementar $X - F$ é aberto.*

A fim de que F seja um conjunto fechado de X , é necessário e suficiente que, para cada ponto $x \in X - F$ exista um aberto U_x , com $x \in U_x \subset X - F$, isto é, $x \in U_x$ e $U_x \cap F = \emptyset$.

Com efeito, esta propriedade significa que $X - F = \cup U_x$, em que para cada $x \in X - F$, temos que $U_x \ni x$ é um aberto. Com isso, $X - F$ é uma reunião

de abertos, logo, $X - F$ é um conjunto aberto. (Item 2 da definição de conjunto aberto.)

Proposição 5. *Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X gozam das seguintes propriedades:*

1. *o conjunto vazio e o espaço inteiro X são fechados;*
2. *a interseção $F = \cap F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X$ é um conjunto fechado de X ;*
3. *a reunião $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \dots, F_n \subset X$ é um subconjunto fechado de X .*

Demonstração.

1. X e \emptyset são complementares dos conjuntos abertos \emptyset e X , respectivamente, logo são fechados.
2. Seja $A_\lambda = X - F_\lambda$. Cada A_λ é aberto em X , logo $A = \cup A_\lambda$ é também aberto. Como $F = \cap F_\lambda = \cap (X - A_\lambda) = X - A$, segue-se que F é fechado.
3. Novamente, os conjuntos $A_1 = X - F_1, \dots, A_n = X - F_n$ são abertos. Logo, $A_1 \cap \dots \cap A_n$ é aberto e $F_1 \cup \dots \cup F_n = (X - A_1) \cup \dots \cup (X - A_n) = X - (A_1 \cap \dots \cap A_n)$ é fechado.

■

Exemplos.

1. Os intervalos fechados $(-\infty, a] = \mathbb{R} - (a, +\infty)$, $[b, +\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, b)$ e $[a, b] = \mathbb{R} - [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$ são subconjuntos fechados da reta, pois são complementares de conjuntos abertos.
2. Num espaço de Hausdorff X , todo ponto x é um subconjunto fechado de X . Com efeito, para cada $y \in X - \{x\}$, existem abertos, A_y, B_y tais que $x \in A_y, y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Em particular, $y \in B_y \subset X - \{x\}$ e portanto $\{x\}$ é fechado em X . Segue-se que todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$

é fechado. A recíproca é falsa: o espaço definido pela topologia co-finita num conjunto infinito, como já vimos, não é Hausdorff, mas seus pontos são subconjuntos fechados.

3. Na linguagem corrente, as palavras aberto e fechado exprimem ideias mutuamente contraditórias. Mas, num espaço topológico X , um subconjunto pode ser simultaneamente aberto e fechado como, por exemplo, o espaço inteiro X e o conjunto vazio. Também, no caso extremo de um espaço discreto X (ou seja, com a topologia discreta), todo subconjunto de X é aberto e fechado. Um exemplo menos trivial é o seguinte. Seja $M = \mathbb{R} - \{0\}$ o conjunto dos reais diferentes de zero, com a métrica induzida da reta. Então, $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Cada um destes dois intervalos é evidentemente aberto em M . Por outro lado, cada um deles também é fechado, por que tem o outro (um conjunto aberto) como complementar em M .

Definição 8. *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a S quando toda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S . O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se o fecho de S e indica-se com a notação \bar{S} . Assim, $x \in \bar{S}$ se, e somente se, para todo aberto A do espaço X , $x \in A$ implica $A \cap S \neq \emptyset$.*

Proposição 6. *O fecho de um subconjunto S num espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contêm S .*

Demonstração. Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os fechados de X que contêm S . Então, $A_\lambda = X - F_\lambda$, $\lambda \in L$, são todos abertos de X contidos em $X - S$. A definição de um ponto aderente significa que $x \in \bar{S}$ se, e somente se, $x \notin \text{Int}(X - S)$. Ora, $\text{Int}(X - S) = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Logo,

$$\bar{S} = X - \text{Int}(X - S) = X - \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} (X - A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$$

como devíamos demonstrar. ■

Corolário (1). *$F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F = \bar{F}$.*

Demonstração. Com efeito, o fecho de qualquer conjunto é um subconjunto fechado por ser uma interseção de fechados. Logo, se $F = \overline{F}$, F é fechado. Reciprocamente, se F é fechado, então F pertence à família dos fechados de X que contém F e, por conseguinte, a interseção dessa família é F , isto é, $F = \overline{F}$. ■

Corolário (2). *O fecho de um conjunto S num espaço topológico X é o menor subconjunto fechado de X que contém S . Mais precisamente:*

1 \overline{S} é fechado em X ;

2 $\overline{S} \supset S$;

3 se F é um subconjunto fechado de X que contém S , então $F \supset \overline{S}$.

Demonstração. Basta demonstrar a terceira afirmação. Ora, se F é fechado e $F \supset S$, então F é um dos F_λ e, portanto, F contém a interseção dos F_λ , isto é, $F \supset \overline{S}$. ■

Exemplos.

1. Num espaço discreto, $\overline{S} = S$ para todo subconjunto S , pois todo subconjunto é fechado. Na reta, se \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais, temos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pois em todo intervalo da reta (isto é, em qualquer vizinhança de um número real) existem racionais. Ainda em \mathbb{R} , o fecho de um intervalo aberto (a, b) é o intervalo $[a, b]$. Mais geralmente, no espaço \mathbb{R}^n (bem como em qualquer espaço vetorial normado), o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$, de mesmo centro e mesmo raio.
2. Num espaço métrico qualquer M , não é sempre verdade que o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ seja a bola fechada $B[a; r]$. Tem-se sempre $B[a; r] \supset \overline{B(a; r)}$. Mas no espaço discreto em que $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$, toda bola aberta de raio 1 reduz-se ao seu ponto central e é, portanto igual a seu fecho, mas qualquer bola fechada de raio 1 é o espaço todo.
3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua tal que $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x \geq 1$ e $f(x) = x$ se $0 < x < 1$. Então o conjunto dos pontos x tais que $f(x) < 1$ é o intervalo aberto $(-\infty, 1)$ e os pontos x nos quais $f(x) \leq 1$

constituem toda a reta \mathbb{R} . Evidentemente, \mathbb{R} não é o fecho do intervalo $(0, 1)$. Isto mostra que, dada uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, nem sempre $\{x \in X; f(x) \leq a\}$ é o fecho de $\{x \in X; f(x) < a\}$.

4. O significado informal da afirmação $x \in \bar{S}$ é que x pode ser arbitrariamente aproximado (no sentido da topologia considerada no caso) por elementos de S . Por exemplo, seja $X = \mathcal{B}(M; N)$, espaço das aplicações limitadas do espaço métrico M no espaço métrico N . Considere a topologia cujos abertos (referente a topologia) são os abertos do espaço métrico $\mathcal{B}(M; N)$ equipado com métrica $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ com a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$, em que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$. Dado um conjunto de aplicações $S \subset \mathcal{B}(M; N)$, dizemos que uma aplicação limitada $f : M \rightarrow N$ pertence ao fecho de S significa afirmar que, seja qual for $\epsilon > 0$ dado, é possível encontrar $g \in S$ tal que $d(f(x), g(x)) < \epsilon$ para todo $x \in M$.
5. Num espaço topológico X , seja x um ponto aderente a um subconjunto $S \subset X$. Então todo aberto A de X que contém x , contém também algum ponto de S . Há dois casos distintos a considerar: ou existe um aberto A , contendo x e formado exclusivamente por pontos de S , ou então todo aberto que contém x contém ao mesmo tempo pontos de S e pontos de $X - S$. O primeiro caso ocorre quando $x \in \text{Int}(S)$ e o segundo, quando $x \in \text{fr}(S)$. Por conseguinte $\bar{S} = \text{Int}(S) \cup \text{fr}(S)$, reunião disjunta. Daí resulta também que $\bar{S} = S \cup \text{fr}(S)$, reunião não disjunta, a menos que S seja aberto. Desta última igualdade segue-se que S é fechado se, e somente se, $S \supset \text{fr}(S)$.

Definição 9. *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ chama-se ponto de acumulação de S quando toda vizinhança V de x em X contém algum ponto $s \in S$, distinto do ponto x . O conjunto dos pontos de acumulação de S chama-se derivado de S e indica-se com a notação S' .*

Exemplo. Seja S o intervalo $(0, 1)$ da reta, então S' é o intervalo fechado $[0, 1]$. Neste caso, S' coincide com \bar{S} . Se $P = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \subset \mathbb{R}$ então P' consiste somente no ponto 0. Seja $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números inteiros. Tem-se $\mathbb{Z}' = \emptyset$, isto é, \mathbb{Z} não possui pontos de acumulação. Dado o conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dos números racionais, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Proposição 7. *Seja X um espaço topológico. Para todo subconjunto $S \subset X$, tem-se $\overline{S} = S \cup S'$.*

Demonstração. Isto é praticamente uma tautologia. Os pontos de \overline{S} são os pontos de S mais os pontos $x \notin S$ tais que toda vizinhança de x contém algum $s \in S$ (necessariamente distinto de x pois $x \notin S$). Estes pontos pertencem a S' . Logo, $\overline{S} \subset S \cup S'$. Por outro lado, é claro que $S \subset \overline{S}$ e $S' \subset \overline{S}$, donde $S \cup S' \subset \overline{S}$. ■

Corolário (1). *Um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. Com efeito, F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F} = F \cup F'$. Mas $A = A \cup B$ é equivalente a $A \supset B$. Logo, F é fechado se, e somente se, $F \supset F'$. ■

Corolário (2). *Se $S \subset X$ não possui pontos de acumulação, então todo subconjunto de S é fechado em X .*

Demonstração. Com efeito, é claro que $T \subset S$ implica $T' \subset S'$. Logo, $T' = \emptyset$ e portanto $T' \subset T$, isto é, T é fechado, qualquer que seja $T \subset S$. ■

Proposição 8. *Seja X um espaço de Hausdorff. Para que um ponto $x \in X$ seja ponto de acumulação de um subconjunto $S \subset X$ é necessário e suficiente que toda vizinhança de x contenha uma infinidade de pontos de S .*

Demonstração. A condição é evidentemente suficiente em qualquer espaço. Para demonstrar a necessidade, seja $x \in S'$, e consideremos uma vizinhança V de x . Mostraremos, por indução, que existe um conjunto enumerável $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ de pontos de S na vizinhança de V .

Como x é ponto de acumulação de S , existe $s_1 \in S \cap V$, $s_1 \neq x$. Suponhamos obtidos n pontos distintos s_1, s_2, \dots, s_n pertencentes a $S \cap V$ e diferentes de x . Como X é um espaço de Hausdorff, o conjunto $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é fechado (e não contém x). Logo, existe uma vizinhança U de x em X , a qual não contém nenhum dos pontos s_1, s_2, \dots, s_n . O conjunto $U \cap V$ é uma vizinhança de x e portanto contém um ponto $s_{n+1} \in S$, distinto de x . Segue-se que s_{n+1} é diferente dos demais s_i e pertence a $S \cap V$, o que completa a construção indutiva do conjunto infinito $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ e demonstra a proposição. ■

Corolário. *Num espaço de Hausdorff, todo conjunto finito tem derivado vazio.*

Observação. Não foi usada, na demonstração acima, toda a hipótese de que X é um espaço de Hausdorff. Bastaria supor que X fosse um “espaço T_1 ”, isto é, um espaço no qual todo ponto é um subconjunto fechado. Esta hipótese é necessária para a validade da Proposição anterior (e deste corolário) pois se existir um ponto $x \in X$ que não é subconjunto fechado, existirá também um ponto de acumulação do conjunto $\{x\}$, que tem um só elemento.

Capítulo 2

Limites

No presente capítulo, estudaremos o conceito de limite. Os limites de seqüências constituem um instrumento de grande utilidade para o estudo dos fenômenos topológicos nos espaços métricos. Além disso, faremos o estudo de seqüências de funções e de limites da forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

2.1 Sequências

As seqüências desempenham um papel fundamental em Análise, pois muitos dos conceitos topológicos definidos num espaço métrico, podem ser expressas através do limite de seqüências. Em espaços topológicos existe a generalização de seqüências através de filtros e “nets”. Para esta seção, nos limitaremos ao conceito de seqüências, para estudos mais aprofundados pode-se consultar em [4], páginas 73 à 82.

Definição 10. *Seja X um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma seqüência em X . Dizemos que $a \in X$ é o limite da seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (equivalentemente dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $a \in X$ e escrevemos $x_n \rightarrow a$) se para toda vizinhança (ou aberto que contenha a) U de a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$.*

Exemplos.

1. Considere X com a topologia caótica. Então toda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge $\forall a \in X$, pois o único aberto em X que contém a é o próprio X , e é claro

que $x_n \in X, \forall n \geq n_0$.

2. Se considerarmos X com a topologia discreta, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge para $a \in X$ se, e somente se, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = a$, para todo $n \geq n_0$. Basta tomar $U = \{a\}$ que é aberto, segundo esta topologia.

Proposição 9. *Num espaço topológico X Hausdorff, as seqüências convergentes admitem um único limite.*

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge para $a \in X$ e para $b \in X$, com $a \neq b$. Como X é Hausdorff, existem abertos U e V disjuntos com $a \in U$ e $b \in V$. Assim, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in U$, e $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow x_n \in V$. Tome $n^* \geq n_0$ e $n^* \geq n_1$. Então $x_{n^*} \in U \cap V$, absurdo. ■

2.2 Limite de uma Função

A utilidade da noção de limite reside no fato de que é possível definir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ sem que a pertença necessariamente ao domínio de f . Apresentaremos essa definição em toda sua generalidade.

Definição 11. *Sejam A um subconjunto do espaço topológico X , $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação definida tomando valores num espaço topológico Y e $a \in \bar{A}$ um ponto de X , aderente ao conjunto A . Diremos que o ponto $b \in Y$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a se, para qualquer vizinhança V de b em Y , existir uma vizinhança U de a em X tal que $x \in U \cap A$ implica $f(x) \in V$. Escreve-se então $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

Quando o espaço Y é Hausdorff, verifica-se como na Proposição anterior que o limite, se existir, é único. Para espaços métricos, a definição de limite pode ser equivalentemente formulada com ϵ 's e δ 's: É tradicional, em Análise, dada uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in S \subset \mathbb{R}$, usar o símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para significar o que chamaríamos de $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, onde g é a restrição de f ao subconjunto $S - \{a\}$. Justifica-se, então, este abuso de notação explicando-se que, ao calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, “não é permitido à variável x assumir o valor a ”.

Um exemplo clássico é o da função $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, definida em $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Tem-se $0 \in \bar{A}$ e demonstra-se em Cálculo que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

2.3 Sequência de Funções

Nesta seção, faremos a definição de convergência de sequências de funções. Tal definição será útil nos próximos capítulos.

Definição 12. *Seja X um conjunto qualquer e M um espaço métrico.*

a) *Diz-se que uma sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$ converge simplesmente para uma aplicação $f : X \rightarrow M$ quando para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$, de pontos $f_n(x) \in M$, converge para o ponto $f(x) \in M$.*

Assim $f_n \rightarrow f$ simplesmente se, e somente se, para cada $x \in X$ e cada $\epsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $n_0 = n_0(x, \epsilon)$ (que depende não somente do ϵ dado, mas também do ponto x considerado) tal que $n \geq n_0(x, \epsilon)$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

b) *Diz-se que $f_n \rightarrow f$ uniformemente quando, dado $\epsilon > 0$, for possível obter $n_0 = n_0(\epsilon)$ (dependendo apenas do ϵ) tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, seja qual for $x \in X$.*

É evidente que se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então, $f_n \rightarrow f$ simplesmente. Mas a recíproca é falsa, como mostra o exemplo que se segue.

Exemplo. Seja $X = [0, 1]$ e, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$. Para cada x fixo, com $0 \leq x < 1$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Se $x = 1$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$. Segue-se que f_n converge simplesmente para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, e $f(1) = 1$. Mas essa convergência não é uniforme. Com efeito, dado ϵ , com $0 < \epsilon < 1$, por maior que seja n , existirão sempre pontos x no intervalo $[0, 1]$ tais que $f_n(x) - f(x) \geq \epsilon$. Basta tomar x de tal modo que $1 > x > \sqrt[n]{\epsilon}$. Então, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n > \epsilon$.

Por outro lado, dado $1 > \delta > 0$ arbitrário, seja $Y = [0, 1 - \delta]$ o intervalo fechado de extremos 0 e $1 - \delta$. Para cada $n = 1, 2, \dots$, seja $g_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função f_n ao intervalo Y . Isto é, $g_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1 - \delta$. A sequência (g_n) converge uniformemente em Y para a função identicamente nula $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, como $0 < 1 - \delta < 1$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1 - \delta)^{n_0} < \epsilon$

para todo $n > n_0$. Mas se $x \in Y$, então $0 \leq x^n \leq (1 - \delta)^n$. Logo, $n > n_0$ implica $0 \leq x^n < \epsilon$ qualquer que seja $x \in Y$ e portanto $x^n \rightarrow 0$ uniformemente em Y .

Mostraremos agora como se pode interpretar a convergência uniforme de aplicações como convergência de pontos num espaço métrico conveniente.

Sejam X um conjunto arbitrário, M um espaço métrico e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações de X em M . Sejam ainda $f : X \rightarrow M$ uma aplicação e $\mathcal{B}_f(X; M)$ o espaço de todas as aplicações $g : X \rightarrow M$ que estão a uma distância finita de f com relação a métrica d , onde $d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$.

Proposição 10. *Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $f_n \rightarrow f$ no espaço $\mathcal{B}_f(X; M)$. Reciprocamente, se $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{B}_f(X; M)$ então, f_n converge uniformemente para f .*

Demonstração. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe n_1 tal que $n > n_1$ implica $d(f_n(x), f(x)) < 1$ para todo x . Logo, qualquer que seja $n > n_1$ fixado, $d(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} \leq 1$ e portanto f_n está a uma distância finita de f . Para mostrar que $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{B}_f(X; M)$, tomemos $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$ e portanto $d(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $n > n_0$. A recíproca é imediata: se $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{B}_f(X; M)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} < \epsilon$. Logo, $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ e portanto f_n converge uniformemente para f . ■

Corolário. *O limite de uma sequência uniformemente convergente de aplicações limitadas $f_n : X \rightarrow M$ é uma aplicação limitada $f : X \rightarrow M$. Tem-se $f_n \rightarrow f$ uniformemente se, e somente se, $f_n \rightarrow f$ como pontos do espaço $\mathcal{B}(X; M)$ (das aplicações limitadas de X em M).*

Observação. Se $f_n \rightarrow f$ simplesmente, pode-se ter cada f_n limitada sem que f o seja. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida assim: $f_n(x) = x$ se $-n \leq x \leq n$, $f_n(x) = n$ se $x > n$ e $f_n(x) = -n$ se $x < -n$. Então (f_n) converge simplesmente para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Cada f_n é limitada mas f não é. Isto mostra, em particular, que f_n não converge uniformemente para f em \mathbb{R} .

Introduziremos agora uma noção de convergência para sequências de funções, a qual contém como casos particulares a convergência simples e a convergência uniforme.

Definição 13. *Dados um conjunto X e um espaço métrico M , fixemos uma coleção \mathfrak{G} de partes de X . Diz-se que uma sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$ converge para uma aplicação $f : X \rightarrow M$ uniformemente nos conjuntos de \mathfrak{G} quando, para cada $S \in \mathfrak{G}$, a sequência das restrições $f_n|_S : S \rightarrow M$ converge uniformemente para a restrição $f|_S : S \rightarrow M$. Isto significa que, para cada $S \in \mathfrak{G}$ e cada $\epsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 = n_0(S, \epsilon)$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S$.*

Exemplos.

1. Seja \mathfrak{G} a coleção das partes de X reduzidas a pontos. Então, $f_n \rightarrow f$ uniformemente nos conjuntos de \mathfrak{G} se, e somente se, $f_n \rightarrow f$ simplesmente. Por outro lado, se \mathfrak{G} consiste apenas numa parte, X , então a convergência uniforme nos conjuntos de \mathfrak{G} é a convergência uniforme em X .
2. Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x$ se $|x| \leq n$ e $f_n(x) = n$ se $x > n$ e $f_n(x) = -n$ se $x < -n$. Tomando $\mathfrak{G} =$ coleção dos intervalos limitados $[a, b]$, vê-se que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente nos conjuntos de \mathfrak{G} para a função $f(x) = x$. Com efeito, fixado $[a, b]$, existe um inteiro n_0 suficientemente grande para que $[a, b] \subset [-n_0, n_0]$. Então, se $n > n_0$, $f_n(x) = x$, seja qual for $x \in [a, b]$.
3. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e c um número real. Diz-se que f tem limite c no infinito quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $|x| > k$ implica $|f(x) - c| < \epsilon$. Escreve-se, então $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = c$. Por exemplo, se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, tem-se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e se $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $g(0) = 0$, tem-se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 1$. Se f tem limite c no infinito, a sequência de funções $f_n(x) = f(x - n)$ converge uniformemente para a função constante $f(x) = c$ nos intervalos limitados $[a, b]$. Com efeito, fixado $[a, b]$ e dado $\epsilon > 0$, tome $k > 0$ tal que $|y| > k$ implica $|f(y) - c| < \epsilon$. Ora, como $[a, b]$ é limitado,

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x - n| > k$, seja qual for $x \in [a, b]$, e portanto $n > n_0$ implica $|f(x - n) - c| < \epsilon$ para todo x em $[a, b]$. Em particular, $\frac{1}{1+(x-n)^2}$ converge uniformemente para 0 nos intervalos limitados e $e^{\frac{-1}{(x-n)^2}}$ converge para 1, uniformemente nos intervalos limitados.

Observações.

- i Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em cada um dos subconjuntos $S_1, \dots, S_k \subset X$, então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe, para cada $i = 1, \dots, k$, um inteiro $n_i > 0$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S_i$. Seja $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Então, $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S$.
- ii Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em S , então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer parte de S .
- iii Segue-se das duas observações acima que, ao considerar a convergência uniforme numa coleção \mathfrak{G} de partes de um conjunto X , não há perda de generalidade em supor, sempre que for conveniente, que \mathfrak{G} goza das seguintes propriedades:
 - a) Toda reunião finita de conjuntos de \mathfrak{G} ainda pertence a \mathfrak{G} .
 - b) Toda parte de um conjunto de \mathfrak{G} pertence a \mathfrak{G} . Com efeito, se \mathfrak{G} não possui estas propriedades, podemos tomar a coleção \mathfrak{G}' , formada pelas reuniões finitas $S'_1 \cup \dots \cup S'_k$ de partes $S'_i \subset S_i$ de elementos de \mathfrak{G} . As convergências uniformes nos conjuntos de \mathfrak{G} e de \mathfrak{G}' coincidem, e \mathfrak{G}' goza das propriedades acima estipuladas.

Capítulo 3

Continuidade

A noção de função contínua é um ponto importante da Topologia. Não distante dela está um homeomorfismo, que também será tratado neste capítulo. Estas definições serão estudadas em seus aspectos mais básicos, como introdução a uma abordagem mais ampla e como instrumento para ser aplicado nos capítulos seguintes.

3.1 Continuidade de Funções

Como já vimos no primeiro capítulo, o conceito de função contínua em espaços métricos definido alternativamente por abertos motivou um olhar mais cuidadoso sobre os conjuntos abertos. Em topologia, definimos função contínua usando conjuntos abertos.

Definição 14. *Dados espaços topológicos X e Y e dada uma função $f : X \rightarrow Y$ dizemos que f é contínua num dado $x_0 \in X$ se, para toda vizinhança V de $f(x_0)$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(U) \subset V$.*

Equivalentemente, podemos trocar vizinhança por abertos na definição.

Proposição 11. *Dada uma função $f : X \rightarrow Y$ são equivalentes:*

1. *f é contínua em todo ponto de X ;*
2. *Para todo aberto $A \subseteq Y$ tem-se que $f^{-1}(A)$ é aberto em X .*

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) Seja f contínua em todo ponto de X . Seja também A aberto em Y . Vamos mostrar que $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Para isso, provemos a seguinte afirmação:

Afirmação: Para todo $x_0 \in f^{-1}(A)$, existe um aberto $B \subset X$ que contém x_0 e que está contido em $f^{-1}(A)$. De fato, note que A é uma vizinhança (aberta) de $f(x_0)$. Como f é contínua em x_0 , existe uma vizinhança $W \subset X$ de x_0 tal que $f(W) \subset A$. O que implica que $W \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(A)$. Como W é vizinhança de x_0 , existe um aberto $B \subset W$ tal que $x_0 \in B \subset W \subset f^{-1}(A)$. Isto prova a afirmação. Denotando B por B_{x_0} temos que $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B_x$. Com isso,

$f^{-1}(A)$ é uma reunião de abertos, portanto aberto.

(2) \Rightarrow (1) Seja $x_0 \in X$ arbitrário. Dada V vizinhança de $f(x_0)$, basta tomar $\text{Int}(V)$ que é aberto em Y . Por hipótese, $f^{-1}(\text{Int}(V)) \ni x_0$ é aberto em X . Mas note que $f(f^{-1}(\text{Int}(V))) = \text{Int}(V) \subset V$. Logo f é contínua em x_0 . ■

Definição 15. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se valem as condições equivalentes do resultado anterior.

Proposição 12. Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset Y$ seja um subconjunto fechado em X .

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Dado $F' \subset Y$ fechado, $Y - F'$ é aberto. Pela Proposição 1 (que está enunciada para espaços métricos, mas também vale para espaços topológicos), temos que $f^{-1}(Y - F') = X - f^{-1}(F')$ é aberto e portanto $f^{-1}(F')$ é fechado em X . Reciprocamente, se a imagem inversa de cada fechado em Y é um fechado em X , dado um aberto $A' \subset Y$, $f^{-1}(Y - A') = X - f^{-1}(A')$ é fechado em X , donde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pela Proposição 1, f é contínua. ■

Proposição 13. Sejam X, Y e W espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow W$ funções. Se f é contínua num ponto x_0 e g é contínua em $f(x_0)$, então a função composta $g \circ f : X \rightarrow W$ é contínua em x_0 .

Demonstração. Sejam $x_0 \in X$ e W vizinhança de $g \circ f(x_0)$. Como g é contínua em $f(x_0)$, existe uma vizinhança V de $f(x_0)$ tal que $g(V) \subset W$. Por outro lado,

pelo fato de f ser contínua em x_0 , existe U vizinhança de x_0 tal que $f(U) \subset V$. Logo, $g(f(U)) \subset g(V)$, ou seja, U é vizinhança de x_0 e $g \circ f(U) \subset W$. Assim $g \circ f$ é contínua em x_0 . ■

Exemplos.

1. Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 num mesmo conjunto X , dizemos que τ_2 é mais fina que τ_1 se $\tau_2 \supseteq \tau_1$. Nestas condições, a função identidade $(X, \tau_2) \xrightarrow{id} (X, \tau_1)$ é contínua. Em um exemplo mais claro, $(X, \tau_{discreta}) \xrightarrow{id} (X, \tau_{caotica})$ é contínua.
2. Se M é um conjunto com duas métricas d_1 e d_2 , sejam τ_1 e τ_2 as topologias associadas, respectivamente. Suponha que $\exists k > 0$ e $d_1(x, y) \geq k \cdot d_2(x, y)$, para todo $x, y \in M$. Então, $\tau_1 \not\subseteq \tau_2$, mais precisamente $\tau_1 \supset \tau_2$. Note que, considerando $(M, d_2) \xrightarrow{id} (M, d_1)$, temos que $d_2(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{k} \cdot d_1(x, y)$. Daí, f é Lipschitziana, e portanto contínua.

O próximo resultado nos mostra que a convergência uniforme (de uma sequência de funções) preserva continuidade.

Proposição 14. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções contínuas definidas num espaço métrico X . Suponha que f_n converge uniformemente para uma função f , então f é uma função contínua.*

A demonstração de tal proposição pode ser encontrada em [5], na página 154.

3.2 Homeomorfismo

Faremos nesta seção o estudo de aplicações homeomorfas. Tal conceito é também muito utilizado em espaços métricos.

Definição 16. *Um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ de um espaço topológico X em um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y , cuja inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.*

Como em espaços métricos, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, do espaço topológico X num espaço topológico Y , diz-se aberta quando para cada aberto $A \subseteq X$, $f(A)$ é aberto em Y .

Proposição 15. *Uma aplicação biunívoca $f : X \rightarrow Y$ do espaço topológico X sobre o espaço topológico Y , é um homeomorfismo se, e somente se, é contínua e aberta.*

Demonstração. (\Rightarrow) Basta mostrar que f é aberta. Tome $A \subset X$ aberto. Então como f é homeomorfismo, a inversa de f , $f^{-1} := h : Y \rightarrow X$ é contínua e assim, pela proposição 11, $h^{-1}(A)$ é aberto em Y , ou seja, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ é aberto em Y . Ou seja, f é uma aplicação aberta.

(\Leftarrow) Temos de mostrar que a inversa de f , $f^{-1} := h : Y \rightarrow X$ é contínua. Tome $A \subset X$ aberto. Como f é uma aplicação aberta, temos que $f(A)$ é aberto em Y , ou seja, $h^{-1} = (f^{-1})^{-1}(A)$ é aberto em Y . Pela proposição 11 temos que h é contínua. Logo f é homeomorfismo. ■

Exemplos.

1. Não basta que a função seja contínua e invertível para ser um homeomorfismo: a função $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ definida por $f(x) = (\sin x, \cos x)$ não é um homeomorfismo, pois sua inversa não é contínua em $(1, 0) \subset S^1$. Note que a topologia considerada no subespaço $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é a topologia em que os abertos (segundo a topologia) coincidem com os abertos segundo a métrica do espaço métrico \mathbb{R}^2 . O mesmo ocorre com o subespaço $[0, 2\pi)$ do espaço métrico \mathbb{R} . Para notar a descontinuidade de $h = f^{-1}$ (inversa de f) no ponto $(1, 0)$, basta considerarmos qualquer bola aberta V com centro em $h(1, 0)$ em $[0, 2\pi)$ e raio menor que 2π . Note que $V = [0, a)$ para algum $a \in (0, 2\pi)$. Não existe uma sequer bola aberta U que contém $(1, 0)$ em S^1 , tal que $h(U)$ está inteiramente contida na bola aberta V . Basta notar que para uma bola aberta U conter o ponto $(1, 0)$, deverá conter também algum ponto no círculo S^1 , entre $(1, 0)$ e $(0, -1)$ (considerando o caminho no sentido horário). Logo h não é contínua em $(1, 0)$.
2. Grosseiramente falando, podemos dizer que um espaço topológico é um objeto geométrico, e um homeomorfismo é um alongamento contínuo e flexão do objeto numa nova forma, de uma perspectiva topológica eles são os mesmos.

Capítulo 4

Compacidade

Neste capítulo, faremos o estudo dos espaços compactos e veremos algumas propriedades. Nos próximos parágrafos, vamos trabalhar com os espaços localmente compactos.

4.1 Espaços Compactos

Nesta seção iniciaremos com a definição de cobertura, que será usada para definir conjuntos compactos.

Definição 17. *Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X . Uma cobertura de S é uma família $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $s \in C_\lambda$.*

Equivalentemente, pode-se considerar uma cobertura de S como uma coleção \mathfrak{C} de subconjuntos de X (sem índices) tal que, para cada $s \in S$ existe um conjunto C da coleção \mathfrak{C} com $s \in C$.

Diz-se que uma cobertura \mathfrak{C} é aberta, fechada, etc. quando os conjuntos C_λ que as compõem, são abertos, fechados, etc. Do mesmo modo, diz-se que \mathfrak{C} é uma cobertura finita, ou enumerável, ou não-enumerável, quando o conjunto L dos índices λ é finito, ou enumerável, ou não-enumerável.

Seja $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S . Uma subcobertura de \mathfrak{C} é uma família $\mathfrak{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de S , isto é, continua válida a

propriedade $S \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Exemplos.

1. Para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = (-n, +n)$ o intervalo aberto da reta de extremos $-n$ e $+n$. A família $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável da reta \mathbb{R} . Seja $L \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito qualquer (por exemplo, o conjunto dos números pares, ou o conjunto dos números primos). A família $\mathfrak{C}' = (I_n)_{n \in L}$ é uma subcobertura de \mathfrak{C} . Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto finito $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ de inteiros positivos, temos $I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k} = I_{n_k}$, logo, $\mathfrak{C}'' = (I_{n_1}, \dots, I_{n_k})$ não é uma subcobertura de \mathfrak{C} . Em outras palavras, \mathfrak{C} não possui subcobertura finita.
2. Mais geralmente, seja E um espaço vetorial normado de dimensão > 0 . As bolas abertas B_n , de centro 0 e raio n , constituem uma cobertura enumerável $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do espaço E e qualquer subfamília infinita é uma subcobertura, mas nenhuma delas possui uma subcobertura finita.
3. Para este exemplo, usaremos o teorema de Borel-Lebesgue cuja prova encontra-se em [2], página 174: *Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos abertos I_λ tal que todo ponto do intervalo fechado $[a, b]$ pertence a um dos I_λ , isto é, $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. Nestas condições, é possível escolher um número finito de intervalos I_λ de tal forma que $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$. Seja $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ o conjunto dos números racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. Seja (ϵ_n) uma sequência de números reais positivos tais que $\sum \epsilon_n < \frac{1}{2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos $I_n = (r_n - \epsilon_n, r_n + \epsilon_n)$. A família $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável do subconjunto S . Afirmamos que \mathfrak{C} não possui subcobertura finita. Com efeito, dada qualquer subfamília finita $(I_{n_1}, \dots, I_{n_k})$, a reunião $I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k}$ cobre uma parte do intervalo $[0, 1]$ formada por um número finito de intervalos disjuntos, cuja soma dos comprimentos não excede $2\epsilon_{n_1} + \dots + 2\epsilon_{n_k} < 2 \sum \epsilon_n < 1$. Logo, o complementar de $I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k}$ em $[0, 1]$ deve conter algum intervalo, dentro do qual haverá certamente algum número racional. Assim, S não está*

contido em $I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k}$. Segue-se que $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é uma cobertura do intervalo $[0, 1]$ pois se o fosse, pelo teorema de Borel-Lebesgue, uma subcobertura finita, a qual, em particular, cobriria o conjunto S .

Definição 18. *Um espaço topológico X chama-se compacto quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é um subconjunto compacto quando S , com a topologia induzida de X , é um espaço compacto. Isto significa que, se $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos de S , abertos em S , com $\cup U_\lambda = S$, então existe uma subfamília finita $((U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}))$ tal que $S = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$.

Para que um subconjunto S seja compacto é necessário e suficiente que toda cobertura $S \subset \cup V_\lambda$ de S , por abertos V_λ do espaço X , possua uma subcobertura finita $S \subset \cup V_{\lambda_1} \cup \dots \cup V_{\lambda_n}$. (Isto resulta imediatamente do fato de que todo conjunto U_λ , aberto em S , é da forma $U_\lambda = V_\lambda \cap S$ com V_λ aberto em X .)

Exemplo.

1. Todo espaço topológico finito é evidentemente compacto. Um espaço discreto infinito não é compacto, por que a cobertura aberta formada por seus pontos não possui subcobertura finita. Um espaço vetorial normado E de dimensão > 0 não é compacto, pois a cobertura formada pelas bolas abertas com centro na origem não possui subcobertura finita. Também não é compacto o conjunto dos números racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. (Vide o último exemplo visto.)

Observação. Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é necessariamente limitado. Com efeito, as bolas abertas de raio 1 e centro nos pontos de K constituem uma cobertura aberta de K , da qual se pode extrair uma cobertura finita $K \subset B(x_1; 1) \cup \dots \cup B(x_n; 1)$.

Para que os conjuntos U_λ , $\lambda \in L$, formem uma cobertura aberta de um espaço topológico X , é necessário e suficiente que os seus complementares $F_\lambda = X - U_\lambda$ constituam uma família de fechados em X , cuja interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é vazia.

Por passagem aos complementares, segue-se então que um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados em X , cuja interseção $\bigcap F_\lambda$ é vazia, contém uma subcobertura finita $(F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_n})$ cuja interseção $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n}$ é vazia.

Definição 19. Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem a propriedade de interseção finita quando qualquer subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_n})$ tem interseção não-vazia $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n}$.

Assim, para que um espaço topológico X seja compacto, é necessário e suficiente que a seguinte condição se cumpra:

Se uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados em X possui a propriedade da interseção finita, então a interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é não-vazia.

Exemplos.

1. Seja E um espaço vetorial normado de dimensão > 0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n = E - B(0; n)$ o complementar da bola aberta de centro 0 e raio n . Tem-se $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$. Assim, se $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, tem-se $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$ e portanto a família $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem a propriedade da interseção finita. Note-se porém que $\bigcap F_n = \emptyset$ e, mais geralmente, qualquer subfamília infinita de (F_n) tem interseção vazia.
2. Considere \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais. Tomemos um número irracional α e, para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $F_n =$ conjunto dos números racionais r tais que $\alpha - \frac{1}{n} \leq r \leq \alpha + \frac{1}{n}$. Em outras palavras $F_n = \mathbb{Q} \cap [\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}]$. Note que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de subconjuntos fechados de \mathbb{Q} com a propriedade de interseção finita. Mas $\bigcap F_n = \emptyset$. Logo, \mathbb{Q} não é um espaço compacto. (Equivalentemente, os complementares $A_n = \mathbb{Q} - F_n$ constituem uma cobertura aberta de \mathbb{Q} a qual não possui subcobertura finita.)

Proposição 16. Num espaço compacto, todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.

Demonstração. Seja X um espaço compacto e suponhamos, por absurdo, que um subconjunto infinito $S \subset X$ não tenha ponto de acumulação. Sendo infinito, S

contém um subconjunto enumerável $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ o qual também não possui ponto de acumulação. Segue-se que todo subconjunto de F é fechado em X . (Proposição 7). Para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, obtendo assim uma família $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados de X , a qual tem a propriedade da interseção finita, pois se $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, vale $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$. Mas, evidentemente $\bigcap F_n = \emptyset$. Logo, X não é compacto. ■

Observação. A proposição acima diz que todo espaço compacto goza da propriedade de Bolzano-Weierstrass. O teorema de Bolzano-Weierstrass nos diz que todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.

Proposição 17. *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração. Seja $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ uma cobertura de F por abertos $U_\lambda \subset X$. A família que consiste nos U_λ , $\lambda \in L$, e mais o conjunto $U = X - F$, é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma cobertura finita $X = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U , tem-se necessariamente $F \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$, o que prova a compacidade de F . ■

Proposição 18. *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X .*

Demonstração. Seja $x \in X - K$. Devemos obter um aberto A tal que $x \in A \cap K = \emptyset$. Ora, pela definição de espaço de Hausdorff, para cada $y \in K$ existem abertos A_y contendo x , e B_y contendo y , tais que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Obtém-se deste modo uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{y \in K} B_y$, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. Correspondentemente, definimos $A = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$. Vê-se que A é aberto contendo x e nenhum ponto de A pode pertencer a K . ■

Corolário. *Suponha que K é um subconjunto compacto do espaço de Hausdorff X e suponha que $x \notin K$. Então existem abertos U, V em X tais que $K \subset U$, $x \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Demonstração. Basta tomar $U = B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n} \supset K$ da demonstração anterior, e $V = A \ni x$. Segue que $U \cap V = \emptyset$. ■

Exemplos.

1. Seja $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de subconjuntos compactos K_λ de um espaço de Hausdorff X . A interseção $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ é um subconjunto compacto de X . Com efeito, pela proposição acima, cada K_λ é fechado em X , donde K é fechado em X . Em particular, fixando um dos K_λ , K é fechado em K_λ . Como K_λ é compacto, segue-se que K é compacto (Proposição 17).
2. Os intervalos abertos (a, b) e os intervalos semiabertos $[a, b)$ e $(a, b]$ da reta não são compactos, pois não são subconjuntos fechados de \mathbb{R} .
3. Um subconjunto da reta é compacto se, e somente se, é limitado e fechado. A ida desta afirmação é o Teorema de Borel-Lebesgue que pode ser encontrado em [2], 173. A volta resulta da Proposição 18 e da Observação da página 33.

Definição 20. *Sejam K e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : K \rightarrow Y$ é dita ser fechada se para todo $F \subset K$ subconjunto fechado, tem-se que $f(F)$ é um subconjunto fechado em Y .*

Proposição 19. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dado um subconjunto compacto $K \subset X$, afirmamos que $f(K)$ é compacto. Com efeito, seja $f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ uma cobertura de $f(K)$ por abertos $V_\lambda \subset Y$. Sendo f contínua, os conjuntos $f^{-1}(V_\lambda)$ constituem uma cobertura aberta do compacto K , da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\lambda_n})$. Segue-se que $f(K) \subset V_{\lambda_1} \cup \dots \cup V_{\lambda_n}$, o que estabelece a compacidade de $f(K)$. ■

Corolário. *Toda aplicação contínua $f : K \rightarrow Y$ de um espaço compacto K num espaço de Hausdorff Y é fechada.*

Demonstração. Com efeito, seja F um conjunto fechado de K . Pela Proposição 17, F é compacto. Pela Proposição 19, $f(F)$ é compacto e, pela Proposição 18, $f(F)$ é fechado em Y . ■

Assim, quando M é um espaço métrico compacto, o espaço $\mathcal{C}(M, N)$ das aplicações contínuas de M em N está contido no espaço $\mathcal{B}(M, N)$ das aplicações limitadas de M em N , seja qual for o espaço métrico N .

Proposição 20. *Toda aplicação $f : K \rightarrow Y$, contínua e biunívoca, de um espaço compacto K sobre um espaço de Hausdorff Y é um homeomorfismo.*

Demonstração. Pelo Corolário anterior, f é fechada e portanto $f^{-1} : Y \rightarrow K$ é contínua, de acordo com a Proposição 12. ■

A proposição acima simplifica consideravelmente a verificação de que uma aplicação $f : K \rightarrow Y$, definida num espaço compacto K e tomando valores num espaço de Hausdorff Y , é um homeomorfismo.

Proposição 21. *Toda função real contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definida num espaço compacto K , é limitada e atinge os seus extremos. Isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in K\}$ e $f(x_1) = \sup\{f(x); x \in K\}$.*

Demonstração. Pela Proposição 19, $f(K)$ é um conjunto compacto da reta. Portanto, $f(K)$ é limitado e fechado (Exemplo 3 da página 36). Segue-se que f é limitada e que $\inf f(K)$ e $\sup f(K)$ pertencem a $f(K)$, pois K é fechado. Por conseguinte, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ nos quais f assume seu mínimo e seu máximo, respectivamente: $f(x_0) = \inf\{f(K)\}$ e $f(x_1) = \sup\{f(K)\}$. ■

4.2 Espaços Localmente Compactos

Nesta seção faremos a abordagem aos conjuntos localmente compactos. Começaremos definindo a base de uma topologia.

Definição 21. *Uma base de um espaço topológico X é uma coleção de abertos que gera todos os abertos, de forma que qualquer aberto é uma união de abertos da base. Em outras palavras, uma coleção de abertos \mathcal{B} é uma base de uma topologia τ em um conjunto X se, e somente se para todo $A \in \tau$, existe $T \subset \mathcal{B}$, tal que*

$$A = \bigcup_{A_\lambda \in T} A_\lambda.$$

Exemplos.

1. Em um espaço métrico X , a topologia induzida pela métrica tem, como base, as bolas abertas.
2. Na topologia discreta, a coleção dos conjuntos unitários é uma base.

Definição 22. *Um espaço topológico X é dito ser localmente compacto se existe uma base \mathcal{B} de conjuntos com a seguinte propriedade: dado qualquer subconjunto aberto U em X e um ponto $x \in U$, existe um conjunto $B \in \mathcal{B}$ e um compacto K tal que $x \in B \subset K \subset U$.*

Proposição 22. (1) *Se X é um espaço de Hausdorff as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *X é localmente compacto;*
 - (ii) *Cada ponto de X tem uma vizinhança aberta cujo fecho é compacto.*
- (2) *Se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, e se A é um subconjunto de X , que é aberto ou fechado, então A , com respeito ao subespaço topológico, é localmente compacto.*

Demonstração. (1) (i) \Rightarrow (ii) : Lembremos que subconjuntos compactos de espaços de Hausdorff são fechados (Proposição 18) e subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos em qualquer espaço topológico (Proposição 17). Segue-se que se \mathcal{B} é como na Definição 22, então o fecho de todo conjunto em \mathcal{B} é compacto.

(ii) \Rightarrow (i) : Seja \mathcal{B} a classe de todos os abertos em X cujos fechados são compactos. Para cada $x \in X$, tomemos a vizinhança U_x cujo fecho, chamado K_x , é compacto. Suponha agora que U é uma vizinhança (qualquer) aberta de x . Seja $U_1 = U \cap U_x$, que também é vizinhança aberta de x . Assim, $x \in U_1 \subset U_x \subset K_x$.

Considere K_x como um espaço de Hausdorff compacto (com a topologia induzida de X). Nesse espaço compacto, vemos que (a) $K_x - U_1$ é fechado, e por isso um subconjunto compacto de K_x , e (b) $x \notin K_x - U_1$. Assim, pelo corolário

da Proposição 18, podemos encontrar subconjuntos abertos V_1, V_2 em K_x tais que $x \in V_1$, $K_x - U_1 \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Em particular, isto significa que $V_1 \subset K_x - V_2$. Seja $F = K_x - V_2$. O conjunto F é um subconjunto fechado do compacto K_x , e é conseqüentemente compacto (em K_x , e por isso também é compacto em X). Por isso F é um conjunto fechado em X (que é espaço de Hausdorff), e conseqüentemente, o fecho, em X , de V_1 está contido em F e é compacto. Além disso, como V_1 é aberto em K_x , existe um conjunto aberto V em X tal que $V_1 = V \cap K_x$. Mas uma vez que $V_1 \subset \overline{V_1} \subset F \subset U_1 \subset K_x$, percebemos também que $V_1 = V \cap K_x \cap U_1 = V \cap U_1$, isto é, V_1 é aberto em X .

Assim, mostramos que para qualquer $x \in X$ e qualquer vizinhança aberta U de x , existe um conjunto aberto $V_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U$, e tal que $\overline{V_1}$ é compacto. Com isso, verificamos a compacidade local de X .

- (2) Suponha que A é um subconjunto fechado de X . Seja $x \in A$. Então, por (1), existem um aberto U em X e um compacto K de X tal que $x \in U \subset K$. Então $x \in A \cap U \subset A \cap K$. Mas $A \cap K$ é compacto (em X , pois é subconjunto fechado de um conjunto compacto, e por isso também é compacto em A), e $A \cap U$ é um conjunto aberto no subespaço topológico A . Então A é localmente compacto.

Suponha agora que A é um conjunto aberto. Então, pela definição 22, se $x \in A$, então existem conjuntos $U, K \subset A$ tais que $x \in U \subset K \subset A$, tais que U é aberto em X e K é compacto. Claramente, isto significa que U é também aberto em A , e podemos concluir de (1) que A é de fato, localmente compacto. ■

Observação. Note que pelo item (1) da proposição 22 podemos dizer que um espaço de Hausdorff X é localmente compacto apenas verificando se qualquer ponto $x \in X$ possui vizinhança compacta.

Exemplos.

1. Todo espaço compacto é localmente compacto pois o espaço inteiro é uma vizinhança compacta de qualquer dos seus pontos. Todo espaço discreto é

localmente compacto pois cada um dos seus pontos é uma vizinhança compacta de si próprio. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n , em particular a reta \mathbb{R} , é localmente compacto pois toda bola fechada é uma vizinhança compacta do seu centro. Resulta daí que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é localmente compacto.

2. O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais não é localmente compacto. Com efeito, dado $x \in \mathbb{Q}$, qualquer vizinhança V de x em \mathbb{Q} contém um intervalo da forma $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ com $a, b \in \mathbb{R}$, no qual certamente existe uma sequência de números racionais convergindo em \mathbb{R} para um número irracional. De maneira análoga se vê que o conjunto dos números irracionais também não é um espaço localmente compacto.
3. Para que um espaço métrico M seja localmente compacto, é necessário e suficiente que todo ponto $x \in M$ seja centro de uma bola fechada compacta. A suficiência é óbvia. Quanto a necessidade, se M é localmente compacto, dado $x \in M$ qualquer, existe uma vizinhança compacta $V \ni x$. Da definição de vizinhança segue-se que existe uma bola fechada $B[x; \epsilon] \subset V$. Sendo um subconjunto fechado do compacto V , $B[x; \epsilon]$ é compacta. Equivalentemente, M é localmente compacto se, e somente se, todo ponto $x \in M$ é centro de uma bola aberta B cujo fecho \overline{B} é compacto.
4. A fim de que o espaço vetorial normado E seja localmente compacto é (necessário, pelo exercício anterior, e) suficiente que pelo menos uma bola fechada $B[x; \epsilon]$ seja compacta. Com efeito, basta observar que duas bolas quaisquer $B[x; \epsilon]$ e $B[x; \eta]$ em E são sempre homeomorfas. Mais precisamente, o homeomorfismo $\phi : E \rightarrow E$, definido por $\phi(z) = y + \frac{\eta}{\epsilon}(z - x)$ transforma $B[x; \epsilon]$ em $B[x; \eta]$. Segue-se daí que, se um espaço vetorial normado E não for localmente compacto, todo subconjunto compacto de E tem interior vazio.
5. Considere agora o espaço $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Por se tratar de um espaço métrico, usaremos a noção de sequencialmente compacto (em que toda sequência possui uma subsequência que é convergente) vista em Análise (em espaços métricos esta definição de compacidade

é equivalente a definição por cobertura. Isso não é verdade para espaços topológicos em geral). Para demonstrar que tal espaço não é localmente compacto, basta mostrar que a bola fechada de raio 1 e centro na origem (função identicamente nula) não é compacta. Para isso, obteremos uma sequência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $|f_n| = 1$ para todo n e $|f_m - f_n| = 1$ se $m \neq n$. Poremos $f_n(x) = 1$, para $x \geq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$, para $x \leq \frac{1}{n+1}$ e f_n linear no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Note que f_n converge para $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x \neq 0$. Tal f não é contínua em $[0, 1]$, logo, f não pertence a $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Então toda subsequência converge para $f \notin \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Capítulo 5

Compactificação de Alexandroff

Consideremos agora o importante conceito de “compactificação” de um espaço topológico.

Intuitivamente, uma compactificação de um espaço topológico X é um espaço compacto Y que contém X . Então, o fecho \overline{X} , de X em Y , é também compacto e portanto não há necessidade de considerar os pontos de Y fora de X . Em outras palavras, podemos supor que X é denso em Y .

Mais precisamente, uma compactificação do espaço topológico X é uma aplicação contínua $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que Y é compacto, $\varphi(X)$ é denso em Y e φ é um homeomorfismo de X sobre $\varphi(X)$.

Definição 23. *Uma compactificação de Alexandroff de um espaço topológico X é uma aplicação $\varphi : X \rightarrow X^*$, tal que:*

- 1º) X^* é um espaço compacto de Hausdorff;
- 2º) φ é um homeomorfismo de X sobre $\varphi(X)$;
- 3º) $X^* = \varphi(X) \cup \omega, \omega \notin \varphi(X)$.

O ponto ω tal que $X^* - \varphi(X) = \{\omega\}$, chama-se ponto no infinito da compactificação $\varphi : X \rightarrow X^*$.

Muitas vezes, por simplicidade, diz-se que X^* é a compactificação de Alexandroff de X , deixando subentendida a aplicação φ .

Observação. O complementar de um ponto num espaço topológico, ou é fechado ou é denso (conforme o ponto em questão seja isolado nesse espaço ou não). Como um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto, segue-se que, ou $\varphi(X)$ é denso em X^* ou é compacto. Por isso, ao definir a compactificação de Alexandroff, não impusemos a condição de que $\varphi(X)$ fosse denso em X^* . Se tal condição não for satisfeita, tem-se o caso trivial em que X já é compacto e X^* consiste num espaço homeomorfo a X e mais um ponto isolado.

Reciprocamente, se X for compacto, toda compactificação de Alexandroff $\varphi : X \rightarrow X^*$ é tal que $\varphi(X)$ é um subconjunto compacto (e portanto fechado) do espaço de Hausdorff X^* . Logo $\omega = X^* - \varphi(X)$ é um ponto isolado e X^* é a união de um conjunto $\varphi(X)$, homeomorfo a X , com um ponto isolado.

Teorema 1. *Todo espaço de Hausdorff X localmente compacto possui uma compactificação de Alexandroff.*

Demonstração. Defina $X^* = X \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um objeto qualquer que não pertence a X . Definamos $\varphi : X \rightarrow X^*$ como a aplicação de inclusão $\varphi(x) = x$. Para introduzir uma topologia em X^* , chamaremos de abertos em X^* os subconjuntos abertos de X e mais os conjuntos da forma $A \cup \{\infty\}$ onde A é um aberto em X tal que $X - A$ é compacto (em X).

Vamos primeiro verificar que desta maneira de fato definimos uma topologia em X^* . É claro que \emptyset e X^* são abertos de acordo com a nossa definição. Em seguida, suponha que U e V são abertos em X^* . Existem quatro casos: (i) $U, V \subset X$: nesse caso U, V e $U \cap V$ são todos abertos em X ; (ii) U é um subconjunto aberto de X e $V = X^* - K$ para algum subconjunto compacto K de X . Nesse caso, uma vez que $X - K$ é aberto em X , temos que $U \cap V = U \cap (X - K)$ é um subconjunto aberto de X ; (iii) O caso em que V é um subconjunto aberto de X e $U = X^* - K$ para algum subconjunto compacto K em X é o mesmo que em (ii); (iv) Existem subconjuntos compactos $C, K \subset X$ tais que $U = X^* - C, V = X^* - K$: nesse caso, $C \cup K$ é um subconjunto compacto de X e $U \cap V = X^* - (C \cup K)$. Temos que em todos estes quatro casos, $U \cap V$ é aberto em X^* . Finalmente, sejam (A_λ) e (B_μ) famílias de abertos em X , em que cada $X - B_\mu$ é compacto. Então $A = \cup A_\lambda$ e $B = \cup B_\mu$ são abertos em X e $X - B = \cap (X - B_\mu)$ sendo uma interseção de fechados, é um subconjunto fechado de X , contido em qualquer dos compactos $X - B_\mu$. Logo,

$X - B$ é compacto e, analogamente, $X - (A \cup B)$ é compacto. Uma reunião de abertos em X^* tem uma das seguintes formas $\cup A_\lambda = A$, $\cup(B_\mu \cup \{\infty\}) = B \cup \{\infty\}$ ou $\bigcup_{\lambda, \mu} (A_\lambda \cup B_\mu \cup \{\infty\}) = (A \cup B) \cup \{\infty\}$. De qualquer modo, tal reunião é um subconjunto aberto de X^* . Logo, temos de fato uma topologia definida em X^* .

Se $A^* \subset X^*$ é aberto, então $A^* \cap X$ é aberto em X . (Basta notar que, dado $A \subset X$, $(A \cup \{\infty\}) \cap X = A$.) Isto significa que $\varphi : X \rightarrow X^*$ é contínua. Além disso, todo conjunto $A \subset X$, aberto em X , é aberto em X^* . Logo, φ é uma aplicação aberta e, por conseguinte, um homeomorfismo de X sobre $\varphi(X)$.

Vamos mostrar agora que X^* é Hausdorff. Uma vez que subconjuntos abertos em X são abertos em X^* e como X é Hausdorff, é claro que pontos disjuntos em X podem ser separados em X^* . Suponha agora que $x \in X$. Então, pela Proposição 22(1), podemos encontrar U vizinhança aberta de x em X tal que o fecho (em X) de U é compacto. Chamando de K tal fecho, temos que $V = X^* - K$ é uma vizinhança aberta de ∞ tal que $U \cap V = \emptyset$. Logo X^* é de fato um espaço de Hausdorff.

Finalmente, suponha agora que $\{U_i : i \in I\}$ é uma subcobertura aberta de X^* . Então, tome um U_j tal que $\infty \in U_j$. Como U_j é aberto, a definição de topologia em X^* implica que $X^* - U_j = K$ é um subconjunto compacto em X . Então podemos encontrar um subconjunto $I_0 \subset I$ tal que $K \subset \cup_{i \in I_0} U_i$. Segue que $\{U_i : i \in I_0 \cup \{j\}\}$ é uma subcobertura finita de X^* , o que estabelece a compacidade de X^* . ■

Somente um espaço de Hausdorff localmente compacto X pode possuir uma compactificação de Alexandroff $\varphi : X \rightarrow X^*$. A prova disto encontra-se em [2], 205.

Exemplos.

1. Uma compactificação de Alexandroff do espaço $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ (que é localmente compacto e Hausdorff) é o espaço $X^* = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ que é homeomorfo ao espaço $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n = 1, 2, \dots\}$. Para verificar tal homeomorfismo, defina $h : X^* \rightarrow Y$ tal que $h(n) = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, e $h(\infty) = 0$.

2. Seja $A = [0, 1)$. Então uma compactificação de Alexandroff de A é o espaço $A \cup \{\infty\}$ que é homeomorfo ao conjunto $B = [0, 1]$.

Na proposição 24 será introduzido um importante resultado sobre espaços de funções. Nela, irá aparecer o conjunto $\mathcal{C}_C(X)$ e também o conceito de isomorfismo isométrico, que serão definidos no próximo parágrafo.

Definição 24. a) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida em um espaço topológico X com imagem em \mathbb{C} , definimos o suporte da função f como:*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Observe que o suporte, por definição, é sempre um subconjunto fechado.

- b) *Uma função é dita ter suporte compacto se o suporte for compacto.*
 c) *O conjunto $\mathcal{C}_C(X)$ denota o conjunto das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ com suporte compacto.*

Proposição 23. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, em que X é espaço topológico. São equivalentes:*

1. *f tem suporte compacto*
2. *Existe um $K \subset X$ fechado tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in X - K$.*

Demonstração. (1) \rightarrow (2) Basta tomar $K = \text{supp}(f)$. (2) \rightarrow (1) Seja $K \subset X$ fechado tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in X - K$. Se $f(x) \neq 0$, então $x \in K$. Portanto, $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset K$. Como K é fechado, $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subset K$. E assim, $\text{supp}(f)$ é compacto. ■

Definição 25. *Sejam A e B espaços normados. Dizemos que A e B são isomorfos isometricamente se existe uma função $F : A \rightarrow B$ tal que F é linear, F é sobrejetora e F é isometria ($\|F(x)\| = \|x\|$, $x \in A$).*

Proposição 24. *Seja X^* a compactificação de Alexandroff de um espaço de Hausdorff localmente compacto X . Seja $\mathcal{C}(X^*)$ o espaço de todas as funções contínuas em X^* sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} , equipada com a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$. (em que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$).*

(a) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) f é o limite uniforme de uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c(X)$; isto é, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções contínuas $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que f_n se anula fora de algum subconjunto compacto de X , e a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções converge uniformemente para f em X ;
- (ii) f é contínua e f se anula no infinito - isto significa que para cada $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ sempre que $x \notin K$;
- (iii) f estende-se a uma função contínua $F : X^* \rightarrow \mathbb{C}$, com $F(\infty) = 0$.

O conjunto de funções que satisfazem estas equivalências é denotado por $\mathcal{C}_0(X)$.

(b) Seja $\mathcal{I} = \{F \in \mathcal{C}(X^*) : F(\infty) = 0\}$; então \mathcal{I} é um ideal maximal em $\mathcal{C}(X^*)$, e a função $\mathcal{I} \ni F \mapsto F|_X$ define um isomorfismo isométrico de \mathcal{I} em $\mathcal{C}_0(X)$.

Demonstração. (a) (i) \Rightarrow (ii) : Para mostrar que f é contínua, basta usarmos o fato de que cada f_n é contínua, e assim pela proposição 14 temos o resultado. Se $\epsilon > 0$, tome n tal que $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon$; seja K um conjunto compacto tal que $f_n(x) = 0$, para todo $x \notin K$. Então, claramente $|f(x)| < \epsilon$, $\forall x \notin K$.

(ii) \Rightarrow (iii) : Defina $F : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X; \\ 0 & \text{se } x = \infty. \end{cases}$$

a função F é claramente contínua em todos os pontos de X (pois X é um conjunto aberto em X^*). A continuidade de F em ∞ é verificada da seguinte maneira: Seja V uma vizinhança aberta de $f(\infty)$. Então, o complementar de V , V^C é fechado em \mathbb{C} . Como f é contínua em X e $V^C \subset \mathbb{C}$ é fechado, temos que $f^{-1}(V^C)$ é fechado em X (pela proposição 12). Assim, $f^{-1}(V^C)$ é fechado em X^* , então, pela proposição 17, $f^{-1}(V^C)$ é compacto em X^* . Com isso, $f^{-1}(V^C)$ é compacto em X . Assim, o complementar de $f^{-1}(V^C)$, é aberto (em X^* , pois é complementar de um compacto) e contém ∞ , ou seja, $\infty \in X^* - f^{-1}(V^C) = F^{-1}(V)$ é aberto em X^* . Portanto F é contínua em ∞ .

(iii) \Rightarrow (i) : Fixe n . Sejam $A_n = \{x \in X^* : |F(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ e $B_n = \{x \in X^* : |F(x)| \leq \frac{1}{2n}\}$. Note que A_n e B_n são subconjuntos fechados e disjuntos de X^* , e que de fato $A_n \subset X$ (então, em particular, A_n é um compacto em X , pois é fechado em X^* e portanto, pela proposição 17 é compacto em X^*). Pelo Teorema de Urysohn (que pode ser encontrado em [1], página 207, Teorema A.4.23), podemos encontrar uma função contínua $\phi_n : X^* \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi_n(A_n) = \{1\}$ e $\phi_n(B_n) = \{0\}$. Considere a função $f_n = (F\phi_n)|_X$, então $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua. Também, se definirmos $K_n = \{x \in X^* : |F(x)| \geq \frac{1}{2n}\}$, então K_n é um subconjunto fechado em X^* e portanto compacto de X^* . Por conseguinte, K_n é compacto em X e $X - K_n \subset B_n$, e assim $f_n(x) = 0$, $\forall x \in X - K_n$. Por fim, note que f_n se aproxima de f em A_n , enquanto que se $x \in A_n$, temos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)|(1 + |\phi_n(x)|) \leq \frac{2}{n}$$

e conseqüentemente, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .

- (b) Temos de mostrar que $\mathcal{I} = \{F \in \mathcal{C}(X^*) : F(\infty) = 0\}$ é um ideal maximal em $\mathcal{C}(X^*)$. Seja A um ideal tal que $\mathcal{I} \subsetneq A \subseteq \mathcal{C}(X^*)$. Para mostrar que \mathcal{I} é ideal maximal, temos de mostrar que $\mathcal{C}(X^*) \subseteq A$. Para isso, basta provarmos que 1 (função $f(x) = 1, \forall x \in X^*$) pertence a ao ideal A . Como $\mathcal{I} \subsetneq A, \exists f \in A$ tal que $f \notin \mathcal{I}$, ou seja $f(\infty) \neq 0$. Mas f pode ser escrita como:

$$f = f - f(\infty).1 + f(\infty).1,$$

Ou seja,

$$f + f(\infty).1 - f = f(\infty).1 \in A.$$

Como $f(\infty) \neq 0$, temos que

$$(f + f(\infty).1 - f) \cdot \frac{1}{f(\infty)} = f(\infty) \cdot \frac{1}{f(\infty)} = 1 \in A.$$

Mostremos agora que \mathcal{I} é isometricamente isomorfo a $\mathcal{C}_0(X)$ via a função $G : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}_0(X)$ tal que $G(F) = F|_X$. É claro que G é linear, basta notar que

$G(F + H) = (F + H)|_X = F|_X + H|_X = G(F) + G(H)$. Também, podemos afirmar que G é sobrejetora. De fato, tome $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Então no item (iii) da parte (a), temos que f pode ser estendida a uma função contínua $F : X^* \rightarrow \mathbb{C}$, em que $F(\infty) = 0$. Ora, $F \in \mathcal{I}$ e $G(F) = f$. Por fim, note que G é isometria: se $F \in \mathcal{I}$, temos que $\|G(F)\| = \|F\| \iff \|F|_X\| = \|F\|$, mas $F|_X = F$ em X , e $F(\infty) = 0$. Logo G é isomorfismo isométrico. ■

Capítulo 6

Teorema de Stone-Weierstrass

Neste capítulo, vamos discutir o Teorema de Stone-Weierstrass. Tal teorema nos prova que toda função contínua definida num conjunto compacto pode ser aproximada por polinômios. Antes de sua demonstração, será necessário conhecer o Teorema de aproximação de Weierstrass. No final, faremos a sua generalização para espaços localmente compactos.

Teorema 2 (Aproximação de Weierstrass). *Seja $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Então a sequência de polinômios*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

converge uniformemente para f .

Demonstração.

Note que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (*) para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Derivando (*) em x e multiplicando por x obtemos:

$$nx(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kx^k y^{n-k}. (**)$$

Derivando (*) duas vezes em x e multiplicando por x^2 obtemos:

$$n(n-1)x^2(x + y)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^k y^{n-k}. (***)$$

Para $x + y = 1$, (*), (**), e (***) tornam-se

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n r_k(x). \quad (1)$$

$$nx = \sum_{k=0}^n k \cdot r_k(x). \quad (2)$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1)r_k(x). \quad (3)$$

AFIRMAÇÃO: $\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 r_k(x) &= \sum_{k=0}^n (k^2 - 2knx + n^2x^2) r_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 r_k(x) - 2nx \sum_{k=0}^n k r_k(x) + n^2x^2 \sum_{k=0}^n r_k(x) = \text{(de (1) e (2))} \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 r_k(x) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = \text{(de (3) e (2))} \\ &= n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x). \end{aligned}$$

□

Seja f a função do enunciado.

Fixe $\epsilon > 0$ (Idéia: mostrar que $\|p_n - f\|_\infty < \epsilon, \forall n \geq n_0$).

Note que f é uniformemente contínua. Então, $\exists \delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Vamos estudar $|f(x) - p_n(x)|$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &= \left| 1 \cdot f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^n f(x) r_k(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) r_k(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \rightsquigarrow (r_k(x) > 0) \\
&= \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| < \delta} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| r_k(x) + \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| r_k(x) < \\
&< \epsilon \sum_{k=0}^n r_k(x) + \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| r_k(x) = \\
&= \epsilon \cdot 1 + \sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| r_k(x) \cdot \blacktriangle
\end{aligned}$$

Como f é limitada (contínua), $\exists M > 0$ tal que $|f(z)| < M, \forall z \in [0, 1]$.

Então:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| r_k(x) \leq 2M \sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} r_k(x) = \\
&= 2M \sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} \frac{(nx - k)^2}{(nx - k)^2} r_k(x) \stackrel{afm}{\leq} 2M \sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} \frac{(nx - k)^2}{(n\delta)^2} r_k(x) \leq \\
&\leq 2M \frac{1}{(n\delta)^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 r_k(x) \stackrel{afm}{=} \frac{2M}{(n\delta)^2} n x \underset{\leq 1}{(1 - x)} \underset{\leq 1}{} \leq \\
&\leq \frac{2M}{(n\delta)^2} \cdot n = \frac{2M}{n\delta^2}.
\end{aligned}$$

Então, $|p_n(x) - f(x)| \leq \blacktriangle \leq \epsilon + \frac{2M}{n\delta^2}, \forall x \in [0, 1]$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2M}{n\delta^2} < \epsilon$.

Então, $\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1]$, temos que $|p_n(x) - f(x)| < 2\epsilon$, e portanto segue o teorema. ■

Observação. Note que \mathcal{P} (Conjunto dos polinômios) é denso em $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Corolário. \mathcal{P} é denso em $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Demonstração. Seja $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo linear. Tome $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Então $f \circ h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pela proposição anterior, dado $\epsilon > 0$, $\exists p \in \mathcal{C}([0, 1])$ tal que $\|p - f \circ h\|_\infty < \epsilon$. Segue que $\|p \circ h^{-1} - f\|_\infty < \epsilon$.(*)

(*) Note que se $x \in [a, b]$, então $x = h(t)$, para algum $t \in [0, 1]$.

Assim,

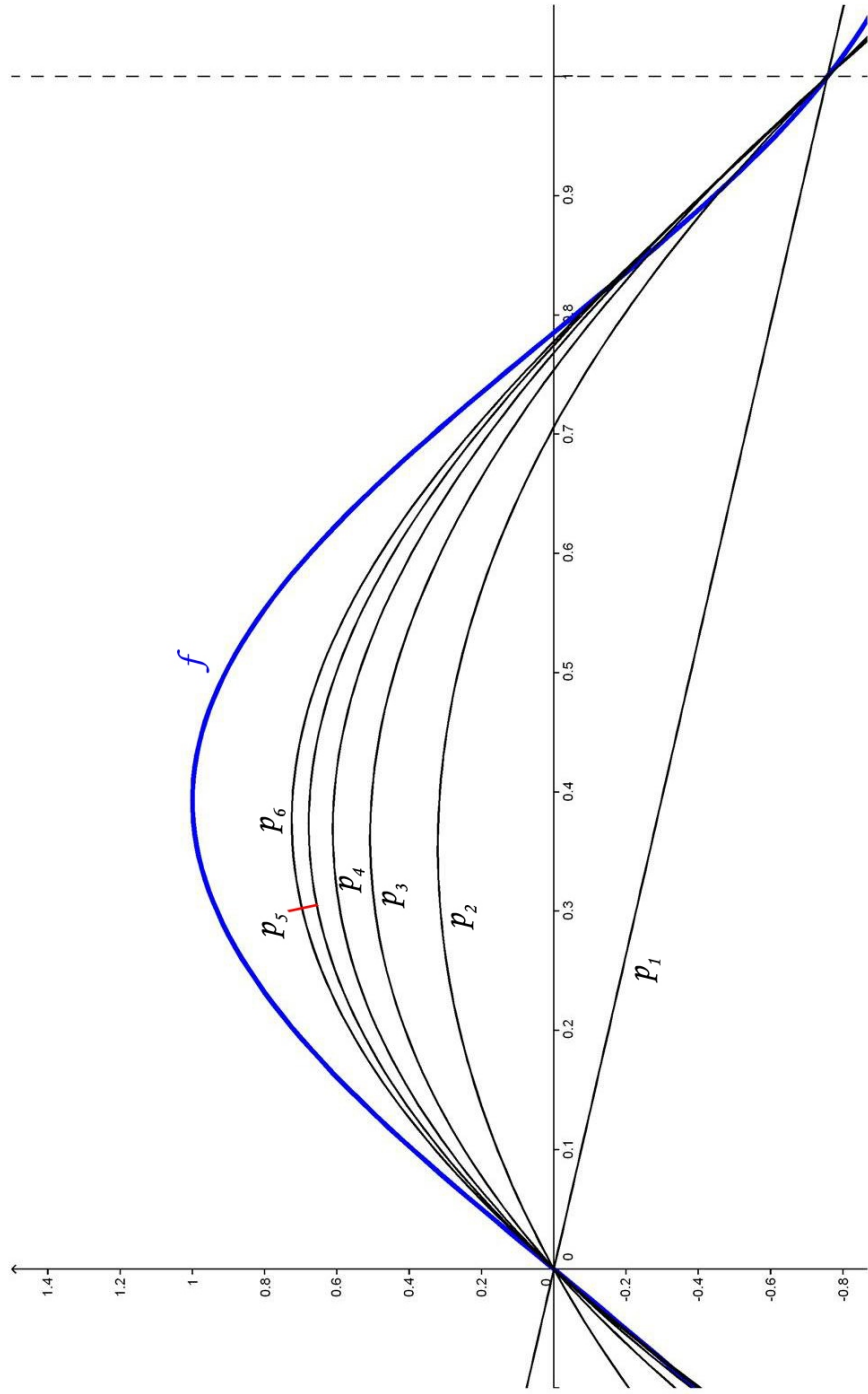
$$\begin{aligned} \|p \circ h^{-1} - f\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |(p \circ h^{-1})(x) - f(x)| = \sup_{t \in [0, 1]} |(p \circ h^{-1} \circ h)(t) - f(h(t))| = \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} |p(t) - (f \circ h)(t)| = \|p - f \circ h\|_\infty < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Exemplo.

Considere a função $f(x) = \sin(4x)$ em $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Note que quando tomamos p_n como no enunciado do teorema e testamos para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 podemos observar que realmente os polinômios estão se aproximando de f .

Aproximação por polinômios



Procedemos agora com o Teorema de Stone Weierstrass, nas versões real e complexa.

Teorema 3. (*Stone-Weierstrass*)

(a) (*Versão Real*) Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto e considere $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de X em \mathbb{R} .

Seja $B \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ com as seguintes propriedades:

- (i) B é uma álgebra, ou seja, dada $f, g \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f.g$, $f + g$ e $\alpha f \in B$;
- (ii) As funções constantes estão contidas em B ;
- (iii) B separa pontos, isto é, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, então $\exists g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$.

Neste caso, B é denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, isto é, $\overline{B} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

(b) (*Versão Complexa*) Seja X como acima, e suponha que B é uma subálgebra auto-adjunta de $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ (auto-adjunta significa que se $f \in B$, então $\overline{f} \in B$, onde \overline{f} é o conjugado de f); suponha que B satisfaz as condições (ii) e (iii) acima. Então, B é denso em $\mathcal{C}(X)$.

Demonstração. (a)

AFIRMAÇÃO 1: \overline{B} é uma álgebra. Sejam $f, g \in \overline{B}$. Tome $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, tais que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ e $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$. Então:

$$B \ni f_n \cdot g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \cdot g.$$

$$B \ni f_n + g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f + g.$$

$$B \ni \alpha f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \alpha f, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo, $f.g$, $f + g$ e $\alpha f \in \overline{B}$.

□

AFIRMAÇÃO 2: Se $f \in \overline{B}$ então $|f| \in \overline{B}$.

Note que $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Como X é compacto, $\exists [a, b]$ tal que $f(X) \subseteq [a, b]$. Considere $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $t \mapsto |t|$. Note que $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$, tome um polinômio (o corolário do teorema anterior garante sua existência) tal que $\|p - g\|_\infty < \epsilon$ (e, portanto, $|p(t) - g(t)| < \epsilon \forall t \in [a, b]$). Então $|p(f(x)) - |f(x)|| < \epsilon, \forall x \in X$. Portanto, $\|p \circ f - |f|\|_\infty \leq \epsilon$. Como p é um polinômio e $f \in \overline{B}$ então $p \circ f \in \overline{B}$. De fato, note que p é da forma $p(t) = \sum_{n=0}^n a_n t^n$. Então, $(p \circ f)(x) = \sum_{n=0}^n a_n (f(x))^n$. (\overline{B} é álgebra). Mostramos que $\|(p \circ f) - |f|\|_\infty \leq \epsilon$. Portanto $|f| \in \overline{(\overline{B})} = \overline{B}$.

□

AFIRMAÇÃO 3: Se $f, g \in \overline{B}$ então $f \vee g$ e $f \wedge g$ definidas por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ estão contidos em \overline{B} .

Note que $f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}$ e $f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}$.

Pelas AFIRMAÇÕES 1,2 e por \overline{B} ser álgebra, segue o resultado.

□

Fixe $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ e tome $\epsilon > 0$. Vamos construir $f \in B$ tal que $\|f - h\|_\infty < \epsilon$. Dados $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, tome $g \in B$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$. Defina:

$$\alpha = \frac{h(x_1) - h(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \quad \beta = \frac{h(x_2)g(x_1) - h(x_1)g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}$$

e $f_{x_1 x_2} = \alpha g + \beta$. Note que

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_2}(x_1) &= \alpha g(x_1) + \beta = \frac{(h(x_1) - h(x_2))}{g(x_1) - g(x_2)} \cdot g(x_1) + \frac{h(x_2)g(x_1) - h(x_1)g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \\ &= \frac{h(x_1)g(x_1) - h(x_1)g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} = h(x_1). \end{aligned}$$

Da mesma forma $f_{x_1 x_2}(x_2) = h(x_2)$. Conclusão: dados pontos $u, v \in X, \exists f_{uv} \in B$ tal que $f_{uv}(u) = h(u)$ e $f_{uv}(v) = h(v)$.

Fixe $\epsilon > 0$ e $x \in X$. Para cada $y \in X$, $x \neq y$, considere f_{xy} como acima, ou seja, $f_{xy} \in B$, $f_{xy}(x) = h(x)$ e $f_{xy}(y) = h(y)$. Note que dado $y \in X$, f_{xy} é contínua. (conservação do sinal na vizinhança) Então existe um aberto $V(y) \ni y$ tal que $\forall z \in V(y)$, $f_{xy}(z) \geq h(z) - \epsilon$. Tome y_1, \dots, y_n tal que $V(y_1), \dots, V(y_n)$ é uma cobertura para o conjunto X . Defina $f_x = f_{xy_1} \vee f_{xy_2} \vee \dots \vee f_{xy_n}$. Segue pela AFIRMAÇÃO 3 que $f_x \in B$. Além disso, dado $z \in X$ note que $f_x(z) \geq h(z) - \epsilon$. Também, pela construção, temos que $f_x(x) = h(x)$. Então, existe um aberto $V(x) \ni x$ tal que $\forall z \in V(x)$, $f_x(z) \leq h(z) + \epsilon$. Para cada $x \in X$, considere f_x e $V(x) \ni x$ como antes. Tome x_1, \dots, x_m tal que $V(x_1) \cup V(x_2) \cup \dots \cup V(x_m)$ é uma cobertura para X . Defina $f = f_{x_1} \wedge f_{x_2} \wedge \dots \wedge f_{x_m}$ em que $f \in B$ pela AFIRMAÇÃO 3. Note que $\forall z \in X$, $f(z) \geq h(z) - \epsilon$. Além disso, se $z \in X$, então $z \in V(x_i)$, para algum $i = 1, \dots, m$, e portanto, $f_{x_i}(z) \leq h(z) + \epsilon$ e logo $f(z) \leq h(z) + \epsilon$.

Conclusão: $\forall z \in X$, $f(z) \geq h(z) - \epsilon$, $f(z) \leq h(z) + \epsilon$. Então $|f(z) - h(z)| \leq \epsilon$, $\forall z \in X$, e portanto $\|f - h\|_\infty \leq \epsilon$.

Logo, segue o resultado.

(b) Seja \mathcal{R} o conjunto das partes reais dos elementos $f \in B$. Isto é,

$$\mathcal{R} := \{Re(f) : f \in B\}$$

É claro que \mathcal{R} contém (e de fato é igual) as partes imaginárias de cada elemento de B . Isto pode ser visto, multiplicando cada elemento em B por $-i$. Podemos afirmar que $\mathcal{R} \subset B$. Com efeito, $Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in B$ pois B é álgebra auto-adjunta. Por outro lado, \mathcal{R} é subálgebra de B . De fato, como B é álgebra, o produto de dois elementos $Re(f)$ e $Re(g)$ de \mathcal{R} é um elemento de B . Mas uma vez que $Re(f).Re(g)$ são valores reais, o produto deve pertencer a \mathcal{R} . O mesmo acontece com a soma e o produto por um escalar. Note agora que \mathcal{R} separa pontos pois como B separa pontos, para cada $x \neq y \in X$ existe uma função $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Mas isto implica que $Re(f(x)) \neq Re(f(y))$ ou $Im(f(x)) \neq Im(f(y))$, ou seja, existe uma função em \mathcal{R} que separa pontos. É claro que \mathcal{R} contém as funções constantes. Podemos então, aplicar a versão real do Teorema de Stone-Weierstrass e concluir que cada função em X pode

ser uniformemente aproximada por elementos de \mathcal{R} .

Vejamos agora que B é denso em $\mathcal{C}(X)$. Tome $f \in \mathcal{C}(X)$. Pelo que acabamos de observar, ambas $Re(f)$ e $Im(f)$ são limites uniformes de seqüências (g_n) e (h_n) de \mathcal{R} . Então

$$\|f - (g_n + ih_n)\|_\infty \leq \|Re(f) - g_n\|_\infty + \|Im(f) - h_n\|_\infty \longrightarrow 0.$$

É claro que a seqüência $(g_n + ih_n)$ está em B . Portanto, B é denso em $\mathcal{C}(X)$. ■

E agora, vamos ao Teorema de Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos. Para provar o teorema, precisamos de um resultado auxiliar, que será o seguinte lema:

Lema 1. *Se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto e A é uma subálgebra auto-adjunta de $\mathcal{C}(X)$ que separa pontos, mas se anula num ponto x_0 (isto significa que para toda $f \in A$, tem-se $f(x_0) = 0$), então o fecho de A é o conjunto de todos as $f \in \mathcal{C}(X)$ com $f(x_0) = 0$.*

Demonstração. É óbvio que o fecho de A está contido no conjunto de todas as $f \in \mathcal{C}(X)$ com $f(x_0) = 0$, apenas pela definição de convergência pontual. A outra continência é um pouco mais complicada. Seja B o conjunto definido por $B = \{f + 1c : f \in A, 1 \text{ denota a função constante um, e } c \in \mathbb{C}\}$. É claro que B é subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ pelo fato de A ser uma álgebra. Também, $A \subset B$, fazendo $c = 0$. Portanto B separa pontos de X e uma vez que a função nula está contida em A , B também contém as funções constantes e a unidade. Pela versão complexa do Teorema de Stone-Weierstrass, o fecho de B é igual a $\mathcal{C}(X)$. Afirmamos que isso prova o Lema. Para ver isso, seja $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ tal que $f(x_0) = 0$. Existe uma seqüência de funções (g_n) em B que converge uniformemente para f . Pela definição de B , $g_n = f_n + 1c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para alguma função $f \in A$ e algum $c_n \in \mathbb{C}$. Como $\{g_n(x_0)\}$ converge para zero e $f_n(x_0) = 0$ para todo n , segue que $\{1c_n\}$ converge uniformemente para zero. Finalmente,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n + 1c_n - f - 1c_n\|_\infty \leq \|f_n + 1c_n - f\|_\infty + \|1c_n\|_\infty$$

no qual o lado direito é precisamente $\|g_n - f\|_\infty + \|1c_n\|_\infty$, que converge uniformemente para zero. Assim, f_n é uma sequência em A que converge uniformemente para f . ■

Teorema 4. *Seja A uma subálgebra auto-adjunta de $\mathcal{C}_0(X)$, no qual X é espaço de Hausdorff localmente compacto. Suponha que A satisfaz as seguintes condições:*

- i. Se $x \in X$, então existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$; e*
- ii. A separa pontos.*

Então $\overline{A} = \mathcal{C}_0(X)$.

Demonstração. Seja Y uma compactificação de Alexandroff de X , $Y = X \cup \{\infty\}$. Então Y é um espaço de Hausdorff compacto. Seja B o conjunto definido por

$$B = \{f \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{C}) : f(\infty) = 0\}.$$

Então B é uma subálgebra de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{C})$ e, pela proposição 24, $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ é isometricamente isomorfo a B via a função $\phi : \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) \rightarrow B$ definida por $\phi(f) = f^*$, onde $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ e $f^*(\infty) = 0$. Então $\phi(A)$ pode ser visto como uma subálgebra de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{C})$ que separa pontos de Y e se anula no ponto ∞ . Pelo Lema 1, o fecho de A é igual a B . Pelo isomorfismo isométrico, isto é o mesmo que dizer que o fecho de A é igual a $\mathcal{C}_0(X)$. ■

Conclusão

Começamos este trabalho definindo espaços topológicos e assumido as propriedades e conceitos elementares estudados em espaços métricos como conhecidas. No avanço dos estudos definimos e provamos os resultados necessários para enunciar e provar o Teorema de Stone-Weierstrass.

Durante a parte intermediária do texto foi possível notar várias definições e estruturas em espaços topológicos que são equivalentes em espaços métricos (como por exemplo conjunto fechado, interior e fecho). Também vimos implicações que só eram verdadeiras em espaços métricos (como por exemplo ser sequencialmente compacto implica em ser compacto). Porém os espaços de funções $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}_0(X)$ (com X compacto e X localmente compacto respectivamente) são espaços normados, logo métricos, e assim, precisamos dos resultados estudados em Análise para trabalhar com tais espaços. Por isso, foi de fundamental importância já assumirmos os resultados de espaços métricos no começo.

Quando alcançamos o teorema de aproximação de Weierstrass, percebemos que em linguagem topológica, o corolário do Teorema 2 diz que o conjunto dos polinômios é denso em $\mathcal{C}([a; b]; \mathbb{R})$. Essa observação nos leva diretamente à busca de subconjuntos de $\mathcal{C}(X)$ (X compacto Hausdorff) formados por funções simples, que sejam densos em $\mathcal{C}(X)$. É claro que agora não temos mais os polinômios, pois não faz sentido falar em polinômio definido em um espaço topológico. Diante disto, usamos a solução que Marshall Stone deu em 1937 para esse problema. A questão central era identificar as funções que fariam o papel dos polinômios neste contexto mais abstrato. É natural buscar funções que, de certa forma, reproduzem o comportamento dos polinômios. Uma propriedade óbvia dos polinômios é que a soma e o produto de polinômios ainda é um polinômio e o produto de um polinômio por um escalar é um polinômio. Isso nos levou à noção de álgebra sobre um corpo.

Já nos teoremas finais, notamos que o conjunto das funções contínuas definidas em um compacto com imagem complexa, se comportam de maneira semelhante às suas subálgebras que separam pontos e contém as funções constantes (Teorema de Stone-Weierstrass). Depois disto, consideramos o espaço das funções contínuas que se anulam no infinito com domínio num espaço localmente compacto e com imagem nos complexos. Considerando A uma subálgebra que é auto-adjunta, separa pontos e, dado qualquer ponto no domínio, existe uma função em A que não se anula nesse ponto, então A é densa em tal espaço.

Referências Bibliográficas

- [1] SUNDER, V. S. **Functional Analysis: Spectral Theory**. Basel: Birkhäuser, 1998. 241p. (Birkhäuser Advanced texts).
- [2] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. 297p. (Textos Universitários).
- [3] HOCKING, J. G.; YOUNG, G. S. **Topology**. New York [U.S.A.]: Dover Publications, Inc., 1988. 384p.
- [4] WILLARD, Stephen. **General Topology**. Mineola: Dover, 2004. xii, 369p.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Rio de Janeiro (RJ): IMPA, 2009. 195p.