

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Teorema Espectral para Operadores Compactos

Auto-Adjuntos

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Gabriela Silmaia da Silva Yoneda

Florianópolis, 2013

Gabriela Silmaia da Silva Yoneda

Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos

Trabalho de Concluso de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:
Alcides Buss

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2012

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 18/CCM/13.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Alcides Buss
Orientador

Prof. Daniel Gonçalves

Prof. José Luiz de Rosas Pinho

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu tio Celso e ao meu avô Mario pelo incentivo, apoio e dedicação ao longo de todos esses anos. Agradeço também ao meu padrinho Edson pelo carinho, suporte e, principalmente, pelos momentos leves e descontraídos.

Agradeço ao meu namorado, Luiz Gustavo Cordeiro, por ter aparecido na minha vida, ser tão companheiro e até mesmo pelas pequenas "chatices". Meu amor, você é meu porto seguro e o meu mundo é mais colorido e feliz com a sua presença.

Agradeço ao meu orientador, Professor Alcides Buss, por todo o trabalho desde que começamos.

Agradeço ao Professor Daniel Gonçalves por ter aceito o convite de fazer parte da banca deste trabalho. Agradeço ao Professor José Luiz Rosas Pinho não só por ter aceito o convite de fazer parte da banca deste trabalho, mas também pelos ótimos anos de PET e pelas ótimas aulas.

Agradeço aos amigos; aos de graduação pelas horas de estudo, cafés e conversas e aos de colégio por sempre me lembrarem do "mundo fora da Matemática". Em especial, agradeço à Sara, por ser exatamente do jeito que você é e estar sempre presente, e ao Vinícius, pelas conversas e e-mails mesmo quando estivemos a uma distância de meio mundo um do outro.

Sumário

Introdução	5
1 Espaços de Banach	7
1.1 Espaços de Banach	7
1.2 Transformações Lineares	17
2 Espaços de Hilbert	28
2.1 Espaços de Hilbert	28
3 Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos	43
3.1 Operadores Adjuntos	43
3.2 Operadores Compactos	46
3.3 Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos	51
Referências	57

Introdução

Há cerca de cem anos, os físicos começaram a perceber que a mecânica clássica é fundamentalmente errada no âmbito atômico e, portanto, não pode ser uma descrição correta de sua natureza. A subsequente transição para a mecânica quântica foi bastante rápida e, no final da década de 20, a estrutura básica estava completa.

John von Neumann e Garret Birkhoff notaram que a estrutura lógica de sistemas quânticos é diferente da estrutura lógica dos sistemas clássicos. Ao longo dos anos seguintes, outras estruturas quânticas surgiram: espaços topológicos quânticos, grupos quânticos, espaços de Banach quântico, entre outros. A propriedade central que eles compartilham é a relação comum com espaços de Hilbert. A idéia fundamental da quantização matemática é que conjuntos são substituídos por espaços de Hilbert e funções escalares por operadores sobre tais espaços.

Em Mecânica Quântica, os possíveis estados (mais precisamente, estados puros) de um sistema quântico são representados por vetores unitários (denominados vetores de estado) residindo em um espaço de Hilbert complexo separável, conhecido como espaço de estado. A natureza exata desse espaço de Hilbert depende do sistema. Por exemplo, os estados de posição e momento de uma partícula não relativista com spin zero é o espaço de todas as funções quadrado integráveis.

Para que se possa entender porque é razoável que nos estudos de mecânica quântica trocasse a idéia de conjuntos por espaços de Hilbert e funções por operadores contínuos, faz-se necessário o estudo de espaços de Banach, primeiramente, e de espaços de Hilbert. O teorema espectral, que é um dos principais objetivos deste trabalho, explica porque é razoável trocar funções por operadores em espaços de Hilbert.

Consideramos como pré-requisitos deste trabalho conhecimentos a respeito de transformações lineares, convergência, continuidade, completude, dentre outros adquiridos nas disciplinas de Álgebra Linear e Análise.

No primeiro capítulo, trabalhamos com espaços de Banach. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo em relação à métrica proveniente da norma. Nosso objetivo

é obter uma boa familiarização com tais espaços para o posterior estudo dos espaços de Hilbert, considerando que sempre podemos definir uma norma a partir de um produto interno. Terminamos o capítulo com o Teorema de Hahn-Banach que, dentre outras coisas, garante a existência de uma quantidade suficiente de funções contínuas lineares em qualquer espaço normado.

No segundo capítulo, estudamos espaços de Hilbert. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que é completo com relação à métrica proviente do produto interno. Estamos especialmente interessados em saber como e quando podemos ter uma base em um espaço de Hilbert. Finalizamos o capítulo, estabelecendo um isomorfismo isométrico entre qualquer espaço de Hilbert separável de dimensão infinita com o espaço l_2 .

Por fim, fazemos um pequeno estudo sobre a teoria de operadores, em especial operadores adjuntos, operadores compactos e operadores de Fredholm. O teorema principal do trabalho, o teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, é enunciado e demonstrado ao final deste capítulo, concluindo o trabalho.

1 Espaços de Banach

1.1 Espaços de Banach

O objetivo deste capítulo é definir um espaço de Banach, apresentar alguns exemplos e estudar propriedades inerentes a estes espaços. E, em seguida, estudar transformações lineares entre espaços normados, dentre eles, os espaços de Banach. Embora normalmente o corpo seja referido somente como \mathbb{K} , estamos sempre trabalhando com \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Definição 1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica em X é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz, $\forall x, y, z \in X$:*

- i. $d(x, y) \geq 0$;
- ii. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exemplo 1. *Sejam $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$ (distância usual).*

d é uma métrica.

De fato, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ temos:

- i. $d(x, y) = |x - y| \geq 0$;
- ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- iii. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;
- iv. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Definição 2. Um espaço métrico é um par (X, d) em que X é um conjunto não vazio e d é uma métrica.

Exemplo 2. Seja $l_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$.

Defina $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

(l_∞, d) é um espaço métrico.

De fato, para quaisquer $x, y, z \in l_\infty$ temos:

i. $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| \geq 0$;

ii. $d(x, y) = 0 \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = 0 \iff |x_n - y_n| = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \iff x_n = y_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \iff x = y$;

iii. $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n - x_n| = d(y, x)$;

iv. Basta notar que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - z_n + z_n - y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - z_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n - y_n| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Definição 3. Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz, para quaisquer $x, y \in X$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$:

i. $\|x\| \geq 0$;

ii. $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 4. Um espaço normado é um par $(X, \|\cdot\|)$ em que X é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em X .

Proposição 1. A função norma é contínua.

Demonstração. Vamos mostrar que $\|\cdot\|$ é Lipschitz contínua.

Sejam $x, y \in X$.

Então $d(\|x\|, \|y\|) = | \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| = |x - y| = d(x, y)$.

Logo, $\|\cdot\|$ é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz 1 e, portanto, é contínua. □

Teorema 1. *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Então quaisquer duas normas em X são equivalentes, isto é, para quaisquer $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas em X existem $K, L > 0$ tais que $\|x\|_1 \leq K\|x\|_2$ e $\|x\|_2 \leq L\|x\|_1$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base para X e seja $x \in X$.

Podemos então escrever $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e defina $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Seja $\|\cdot\|_2$ uma outra norma qualquer em X .

Mostremos que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.

Por um lado,

$$\|x\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_2 \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| = M \|x\|,$$

em que $M = \sup\{\|e_i\|_2 : 1 \leq i \leq n\}$.

Logo, $\|x\|_2 \leq M\|x\|$.

Agora, mostremos que existe $L > 0$ tal que $L\|x\|_2 \geq \|x\|$.

Suponha, por absurdo, que não exista tal $L \in \mathbb{R}$. Ou seja, para todo $L \in \mathbb{R}$ a desigualdade falha para algum $x \in X$.

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in X$ tal que $k\|x^k\|_2 < \|x^k\|$.

Podemos assumir que $\|x^k\| = 1$, pois caso contrário, bastaria trocar x^k por $\frac{x^k}{\|x^k\|}$.

Desse modo, as sequências $\{x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ são limitadas e, portanto, existem $k_1 < k_2 < \dots$ tais que $\{x_i^{k_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ são convergentes.

Seja $x_i = \lim_{p \rightarrow \infty} x_i^{k_p}$ e seja $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Então:

$$\|x^{k_p} - x\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n (x_i^{k_p} - x_i) e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{k_p} - x_i| \|e_i\|_2.$$

Quando $p \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^n |x_i^{k_p} - x_i| \|e_i\|_2 \rightarrow 0$.

Como $k\|x^k\|_2 < \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i^k| = 1$,

$$\|x^{k_p}\|_2 < \frac{1}{k_p} \text{ e, quando } p \rightarrow \infty, \|x^{k_p}\|_2 < \frac{1}{k_p} \rightarrow 0.$$

Logo, $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{k_p} = 0$. Pela unicidade do limite, $x = 0 \iff x_i = 0$.

Mas, $1 = \sum_{i=1}^n |x_i^{k_p}| \rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, o que é um absurdo.

Portanto, existe $L \geq 0$ tal que $L\|x\|_2 \geq \|x\|$.

□

Proposição 2. *Seja X um espaço normado e seja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. então (X, d) é um espaço métrico.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

- i. $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;
- ii. $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
- iii. $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$;
- iv. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

□

A proposição acima nos diz que a partir de uma norma sempre podemos definir uma métrica. Todavia, nem toda métrica provém de uma norma.

Proposição 3. *Seja X um espaço normado e seja d uma métrica. Então a distância proveniente da norma satisfaz $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.*

Demonstração. $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$.

□

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x^3$.

Defina em \mathbb{R} , $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = |x^3 - y^3|$.

É fácil ver que d define uma distância em \mathbb{R} . Porém, para $\lambda \neq 1$, temos:

$d(\lambda x, \lambda y) = d(f(\lambda x), f(\lambda y)) = |\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3| = |\lambda^3(x^3 - y^3)| = |\lambda^3| \cdot |x^3 - y^3| = |\lambda^3| d(x, y) \neq |\lambda| d(x, y)$.

Definição 5. Seja X um espaço normado. Dizemos que X é um espaço de Banach se X é completo com relação à métrica proveniente da norma.

Proposição 4. l_∞ é um espaço de Banach, com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\}$

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em l_∞ .

Note que $x_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots\}, \dots, x_n = \{x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots\}$.

Seja $m \in \mathbb{N}^+$ qualquer e considere a sequência $\{x_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Mostremos que $\{x_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, n \geq n_0$ tem-se que $d(x_k, x_n) < \varepsilon$.

Mas, $|x_k^m - x_n^m| \leq d(x_k, x_n) < \varepsilon$.

Logo, $\{x_n^m\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy. Como \mathbb{R} é completo, existe $x^m \in \mathbb{R}$ tal que $x^m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m$.

Como tomamos $m \in \mathbb{N}^+$ qualquer, para todo $m \in \mathbb{N}^+$, $\{x_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Seja $x = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots\}$.

Mostremos que $x \in l_\infty$.

Seja $\varepsilon = 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, n \geq n_0$ tem-se que $d(x_k, x_n) < 1$.

Daí, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos $|x_k^m - x_n^m| < 1$.

Em particular, para quaisquer $k, m \in \mathbb{N}$, $|x_k^m - x_n^m| < 1$.

Quando $k \rightarrow \infty$, temos $|x^m - x_n^m| \leq 1$. Logo, $d(x, x_n) \leq 1$.

Como $\{x_n^m\}$ é limitada, para todo $m \in \mathbb{N}$, $|x_n^m| \leq L$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x^m| \leq L + 1$.

Portanto, $x \in l_\infty$.

Finalmente, mostremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x .

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, k > n_0$ tem-se $d(x_n, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Desse modo, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se $d(x_n^m, d_k^m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Quando $n \rightarrow \infty$, $d(x^m, d_k^m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, para todo $m \in \mathbb{N}$, $d(x^m, d_k^m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Sendo assim, $d(x, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Portanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x .

□

Antes de continuarmos com os exemplos de espaços de Banach, precisamos mostrar as proposições abaixo:

Proposição 5. (Desigualdade de Hölder) Dados $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se que

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $p + q = pq$ e $p - 1 = (q - 1)^{-1}$.

Sejam $\alpha, \beta \geq 0$. Temos que $\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1} dt + \int_0^\beta u^{q-1} du = \frac{t^p}{p} \Big|_0^\alpha + \frac{u^q}{q} \Big|_0^\beta = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

Isto é, $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

Sejam $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Consideremos dois casos:

Caso 1: Suponha que $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1$ e $\sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1$.

Tomando $\alpha = x_i$ e $\beta = y_i$, tem-se $|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}$.

Somando membro a membro, tem-se

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{q} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Caso 2:

É claro que a desigualdade vale se $x_i = 0$ ou $y_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Suponha então que este não seja o caso e sejam $c = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $d = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$.

Desse modo, $\sum_{i=1}^n |cx_i|^p = 1$ e $\sum_{i=1}^n |dy_i|^q = 1$.

Assim, considerando $\bar{x}_i = cx_i$ e $\bar{y}_i = dy_i$, caímos no caso 1 e então $\sum_{i=1}^n |\bar{x}_i \bar{y}_i| \leq 1$.

Dividindo por cd , obtemos $\sum_{i=1}^n |\bar{x}_i \bar{y}_i| \leq \frac{1}{cd} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

□

Proposição 6. (*Desigualdade de Minkowski*)

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{-\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{-\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Definição 6. Seja $p \geq 1$ e defina $l_p = \{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$.

Proposição 7. l_p é um espaço normado com $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Mostremos que l_p é um subespaço vetorial de \mathbb{K}^{∞} , o conjunto de todas as seqüências com entradas pertencentes a \mathbb{K} .

Obviamente, $0 \in l_p$.

Sejam $x, y \in l_p$ e seja $n \in \mathbb{N}$ fixo.

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $x, y \in l_p$, sejam A, B tais que $A = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ e $B = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$.

É claro que $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ e $\sum_{i=1}^n |y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$.

Logo, $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}} < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $x + y \in l_p$.

Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in l_p$, tem-se que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_i|^p\right) = |\lambda|^p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right) < \infty$.

Logo, $\lambda x \in l_p$.

Mostremos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma.

A única propriedade de norma não trivial é a desigualdade triangular.

Para $x, y \in l_p$, temos:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Portanto, l_p é um espaço normado.

□

Proposição 8. *Seja X um espaço métrico compacto e seja $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$. Defina $d_{\infty}(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$. Então $C(X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C(X)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Fixe $x \in X$.

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ temos:

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Logo, } \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de Cauchy em } \mathbb{R}.$$

Como \mathbb{R} é completo, definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para $x \in X$.

Mostremos que f_n converge uniformemente para f .

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja $n \geq n_0$. Note que para todo $m > n_0$ e para todo $x \in X$ temos :

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) &= |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f_m\| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_m(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Quando $m \rightarrow \infty$, $d(f_m(x), f(x)) \rightarrow 0$. Logo, $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Logo, f_n converge uniformemente para f . Donde f é contínua e então $f \in C(X)$.

Portanto, $C(X)$ é completo.

□

Proposição 9. l_p é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em l_p .

Fixando $i \in \mathbb{N}$, considere a sequência $\{x_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$\{x_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois $|x_i^n - x_i^m| \leq \|x^n - x^m\|$ e $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como \mathbb{R} é completo, existe $x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n$.

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ e mostremos que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$.

Fixe $N \in \mathbb{N}$. Então, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \|x - x^n\|_{p,N} \\ &= \|x - x^m + x^m - x^n\|_{p,N} \\ &\leq \|x - x^m\|_{p,N} + \|x^m - x^n\|_{p,N} \\ &\leq \|x - x^m\|_{p,N} + \|x^m - x^n\|_p \\ &= \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \|x^m - x^n\|_p \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ (podemos supor $\varepsilon < 1$).

Como $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m \geq$ temos

$$\|x^n - x^m\|_p < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tome $n \geq n_0$. Note que para todo $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\|x - x^n\|_{p,N} \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \|x^n - x^m\|_p.$$

Tomando m suficientemente grande,

$$\|x - x^n\|_{p,N} \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i - x_i^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \|x^n - x^m\|_p \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Então } \sum_{i=1}^N |x_i - x_i^m|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p.$$

$$\text{Quando } N \rightarrow \infty, \text{ temos } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^m|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p < \varepsilon.$$

Com isso, $x - x^n \in l_p$, para todo $n \geq n_0$. Logo, $x = (x - x^n) + x^n \in l_p$.

Donde $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x e $x \in l_p$.

Sendo assim, l_p é um espaço normado completo. Portanto, l_p é um espaço de Banach.

□

1.2 Transformações Lineares

Teorema 2. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ linear. São equivalentes:*

1. T é contínua;
2. T é contínua em algum $x_0 \in X$;
3. T é contínua em 0;
4. T é uniformemente contínua;
5. Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in X$;
6. A imagem de todo conjunto limitado por T é limitado.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) :

Como T é contínua, T é contínua em todo ponto. Em particular, T é contínua em $x_0 \in X$.

(2) \Rightarrow (3) :

Seja $x_0 \in X$ tal que T é contínua em x_0 e defina $U_{x_0} : X \rightarrow X$ dada por $U_{x_0}(x) = x + x_0$.

Como $\|U_{x_0}(x) - U_{x_0}(y)\| = \|(x + x_0) - (y + x_0)\| = \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in X$. Logo, U_{x_0} é uma isometria.

Note que $T = U_{T(x_0)} \circ T \circ U_{x_0}$, pois

$$U_{-T(x_0)} \circ T \circ U_{x_0}(x) = U_{T(x_0)} \circ T(x + x_0) = -T(x_0) + T(x + x_0) = T(x) + T(x_0) - T(x_0) = T(x).$$

Como U_{x_0} é contínua em 0, T é contínua em $U_{x_0}(0)$ e $U_{-T(x_0)}$ é contínua em todo ponto, T é contínua em 0.

(5) \Rightarrow (4) :

Seja $\varepsilon > 0$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{k+1}$.

Então para quaisquer $x, y \in X$ tais que $d(x, y) = \|x - y\| < \delta$ temos:

$$d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq k\|x - y\| < k \cdot \delta = k \cdot \frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon.$$

Portanto, T é uniformemente contínua.

(5) \Rightarrow (6) :

Seja $A \subset X$ limitado. Então existe $r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$, ou seja, $\|x\| < r$, para todo $x \in A$.

Logo, $\sup\{\|x\| : x \in A\} < \infty$. Além disso, por hipótese, $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in A$.

Daí $\sup\{\|T(x)\| : x \in A\} \leq k \sup\{\|x\| : x \in A\} < \infty$ e, portanto, $T(A)$ é limitado.

(6) \Rightarrow (1) :

Seja $M \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$.

Daí $d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq M\|x - y\|$. Logo, T é Lipschitz contínua e, portanto, T é contínua.

(4) \Rightarrow (3) :

É óbvio.

(3) \Rightarrow (6) :

Seja $\varepsilon = 1$. Como T é contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ implica em $\|T(x)\| < 1$.

Então para qualquer $y \in X$ não nulo, temos $\|T(\frac{\delta y}{\|y\|})\| \leq 1$.

Como T é linear, temos $\|T(\frac{\delta y}{\|y\|})\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|T(y)\| \leq 1 \Leftrightarrow \|T(y)\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|$.

Logo, T é limitada.

(6) \Rightarrow (5) :

Por hipótese, $\sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(x)\|\} < \infty$.

Seja $k = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Então para qualquer $x \in X$ não nulo, seja $y = \frac{x}{\|x\|}$.

Desse modo, $\|T(y)\| \leq k$. Logo, $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| \leq k$. Donde $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, como queríamos.

□

Exemplo 4. Seja $X = Y = C[0, 1]$, com a norma do sup e seja $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Mostremos que $\|T(f)\| \leq \|f\|$ e, portanto, T é contínua.

Sejam $f \in C[0, 1]$ e $x \in [0, 1]$. Então:

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x \|f\| = x \cdot \|f\| \leq \|f\|.$$

Podemos então tomar o sup e daí $\|T(f)\| \leq \|f\|$.

Desse modo, T satisfaz a condição 5 do teorema e, portanto todas, e concluímos que T é contínua.

Proposição 10. Toda transformação linear em um espaço normado de dimensão finita é contínua.

Demonstração. Sejam X um espaço normado de dimensão finita, Y espaço normado e $T : X \rightarrow Y$ transformação linear.

Defina em X , $\|x\|_2 = \|x\| + \|T(x)\|$.

Como X tem dimensão finita, as duas normas são equivalentes e, portanto, existe $k > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq k\|x\|$.

$$\text{Daí } \|x\| + \|T(x)\| \leq k\|x\| \rightarrow \|T(x)\| \leq (k-1)\|x\|.$$

Portanto T é contínua.

□

Definição 7. Seja $T : X \rightarrow Y$ transformação linear entre espaços normados.

Definimos $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$.

Exemplo 5. Sejam $X = Y = C[0, 1]$ e $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pelo exemplo anterior, $\|T(f)\| \leq \|f\|$ e, como T é contínua, $\|T(f)\| \leq k\|f\|$. Logo, $\|T\| \leq 1$.

Seja $f \equiv 1$. Então $\|f\| = 1$ e $T(f)(x) = \int_0^1 1dt = x$. Ou seja, $T(f) = Id$ e $\|T(f)\| = 1$.

Donde, $\|T\| = 1$.

Lema 1. Seja $T : X \rightarrow Y$ contínua. Então $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, existe $k \in \mathbb{K}$, tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$.

$$\text{Além disso, } \|T\| \geq \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \geq \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\|.$$

$$\text{Logo, } \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|.$$

□

Teorema 3. *Sejam X, Y espaços normados e seja $B(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ é contínua}\}$. $B(X, Y)$ é um espaço vetorial e $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ é uma norma em $B(X, Y)$.*

Demonstração. Sejam $T, S \in B(X, Y)$ e seja $x \in X$.

$$\text{Então } \|(T + S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\|x\|. \text{ Logo } T + S \in B(X, Y).$$

Além disso, $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$, o que verifica a desigualdade triangular.

Sejam $T \in B(X, Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$. Temos então:

$$\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha T(x)\| = |\alpha| \|T(x)\| \leq |\alpha| \|T\| \|x\|.$$

Logo, $\alpha T \in B(X, Y)$.

Além disso, como $\|(\alpha T)(x)\| \leq |\alpha| \|T\| \|x\|$, então $\|\alpha T\| \leq |\alpha| \|T\|$.

Por outro lado, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever:

$$\|T\| = \left\| \frac{1}{\alpha} \alpha T \right\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha T\|. \text{ Donde, } |\alpha| \|T\| \leq \|\alpha T\|.$$

Logo, $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$.

Sejam $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ e seja $x \in X$.

$$\text{Então } \|ST(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|. \text{ Logo, } \|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Portanto, $B(X, Y)$ é um espaço vetorial normado e $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

□

Teorema 4. *Sejam X espaço métrico, Z um subespaço denso de X e Y um espaço métrico completo. Seja $f : Z \rightarrow Y$ uma aplicação uniformemente contínua. Então existe uma única aplicação uniformemente contínua $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ estendendo f e tal que $\tilde{f}|_Z = f$.*

Demonstração. Dado $x \in X$ qualquer, como Z é denso em X , existe uma sequência $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Z tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Como $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e f é uniformemente contínua, $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é, obviamente, de Cauchy.

Como Y é completo, existe $y \in Y$ tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$.

Defina então, para cada $x \in X$, $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$, em que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência em Z que converge para x .

\tilde{f} está bem definida pois se temos $x \in X$ tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$, então temos:

$\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{f(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de Cauchy em Y e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$, temos também $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n)$ em Y .

Mostremos agora que \tilde{f} é uniformemente contínua.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como f é uniformemente contínua, existe $\delta_f > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in Z$, se $d(x, y) < \delta_f$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Tome $\delta = \delta_f$.

Sejam $x, y \in X$ tais que $d(x, y) < \delta$. Como Z é denso em X , existem sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Z tais que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ e $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos:

$$d(x_n, x) < \frac{\delta - d(x, y)}{2} \text{ e } d(y_n, y) < \frac{\delta - d(x, y)}{2}.$$

$$\text{Logo, } d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) < \frac{\delta - d(x, y)}{2} + d(x, y) + \frac{\delta - d(x, y)}{2} = \delta.$$

Como f é contínua, $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$.

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, temos $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$.

Como $\tilde{f}|_Z = f$ e Z é denso, \tilde{f} é única.

□

Teorema 5. *Seja X um espaço normado e seja $D \subseteq X$ um subespaço vetorial denso em X . Seja $T : D \rightarrow Y$ uma transformação linear contínua, em que Y é um espaço de Banach. Então existe uma única transformação linear contínua $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{T}|_D = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração. Como T é contínua, T é uniformemente contínua.

Como X é espaço métrico, existe uma única função uniformemente contínua $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ estendendo T .

Mostremos que \tilde{T} é linear.

Sejam $x, y \in X$. Tome $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em D tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Então:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(x+y) &= \tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_n + y_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) + T(y_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(y_n) \\
 &= \tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) + \tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) \\
 &= \tilde{T}(x) + \tilde{T}(y)
 \end{aligned}$$

Analogamente, é fácil ver que $\tilde{T}(\alpha x) = \alpha \tilde{T}(x)$.

□

Teorema 6. *Sejam X e Y espaços normados, sendo Y completo. Então $B(X, Y)$ é completo.*

Demonstração. Seja $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B(X, Y)$.

Fixe $x \in X$ não nulo e considere a sequência $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$.

Mostremos que $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ tem-se $\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$.

Então, para todo $n, m \geq n_0$ temos:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon.$$

Logo, $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como Y é completo, defina $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$.

Mostremos que T é linear.

Sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

$$T(\alpha x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) + T_n(y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Logo, T é linear.

Como $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $M \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo, $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq M \|x\|$.

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq M \|x\|$, pois a função norma é contínua.

Portanto, T é contínua e $\|T\| \leq M$. Donde $T \in B(X, Y)$.

Mostremos, finalmente, que $T_n \rightarrow T$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m \geq n_0$ tem-se $\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Seja $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$.

Então, para todo $n \geq n_0$ temos:

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T(x)\| &= \|T_n(x) - T_m(x) + T_m(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_n(x) - T_m(x)\| + \|T_m(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_n - T_m\| \|x\| + \|T_m(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_n - T_m\| + \|T_m(x) - T(x)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m(x) - T(x)\| \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$, $\|T_m(x) - T(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Donde, $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Portanto, $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$.

□

Definição 8. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . O espaço dual de X , denotado por X^* , é o conjunto que consiste dos funcionais lineares $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.*

Definição 9. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que um funcional $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semilinear se $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ e $p(\alpha x) \leq \alpha p(x)$, para todo $x, y \in X$ e $\alpha > 0$.*

Teorema 7. (Teorema de Hahn-Banach - Caso real) Sejam X um espaço vetorial real e p um funcional semilinear em X . Sejam $Y \subseteq X$ um subespaço vetorial de X e $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f(y) \leq p(y)$ para todo $y \in Y$. Então existe um funcional linear $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$ e $\tilde{f}|_Y = f$.

Demonstração. Seja $\mathcal{S} = \{(Z, g) : Z \text{ é um subespaço vetorial de } X \text{ com}$

$Y \subseteq Z; g : Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ é funcional linear tal que } g|_Y = f \text{ e } g(z) \leq p(z)\}$.

Defina uma relação de ordem em \mathcal{S} por $(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2)$ quando $Z_1 \subseteq Z_2$ e $g_2|_{Z_1} = g_1$.

Seja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ totalmente ordenado e escreva $\mathcal{T} = \{(Z_i, g_i)\}_{i \in I}$.

Seja $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$.

Defina $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira: para cada $z \in Z$ escolha $i \in I$ tal que $z \in Z_i$ e então $g(z) = g_i(z)$.

Note que se $z \in Z_j$, então $Z_j \subseteq Z_i$ ou $Z_i \subseteq Z_j$. De qualquer modo, $g_j(z) = g_i(z)$.

Definida desse modo, g é linear, pois cada g_i é linear e, para todo $y \in Y$, temos $g(y) = g_i(y)$, para todo $i \in I$.

Logo, $g(y) = f(y)$. Donde $g|_Y = f$.

Além disso, para todo $z \in Z$, temos $g(z) = g_i(z) \leq p(z)$. Logo, $(Z, g) \in \mathcal{S}$ e $(Z, g) \geq (Z_i, g_i)$, para todo $i \in I$.

Assim, (Z, g) é um majorante para \mathcal{S} .

Pelo Lema de Zorn, existe (W, h) elemento maximal.

Suponha, por absurdo, que $W \subset X$. Então existe $x_0 \in X \setminus W$.

Seja $W' = W \oplus \mathbb{R}x_0$ e seja $a \in \mathbb{R}$.

Defina $h' : W' \rightarrow \mathbb{R}$ por $h'(w + \lambda x_0) = h(w) - \lambda a$. É claro que h' é linear e $h'|_W = h$.

Sejam $w_1, w_2 \in W$. Temos:

$$h(w_1 + w_1) \leq p(w_1 + w_2) = p((w_1 + x_0) - (x_0 + w_2)) \leq p(w_1 + x_0) + p(-w_2 - x_0).$$

$$\text{Então } h(w_1) - p(w_1 + x_0) \leq h(w_2) + p(-w_2 - x_0).$$

$$\text{Fixando } w_1, \text{ temos } h(w_1) - p(w_1 + x_0) \leq \inf_{w_2 \in W} h(w_2) + p(-w_2 - x_0).$$

$$\text{Daí } \sup_{w_1 \in W} h(w_1) - p(w_1 + x_0) \leq \inf_{w_2 \in W} h(w_2) + p(-w_2 - x_0).$$

Escolha $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{w_1 \in W} h(w_1) - p(w_1 + x_0) \leq a \leq \inf_{w_2 \in W} h(w_2) + p(-w_2 - x_0).$$

Então, para todo $w \in W$ temos :

$$h(w) - p(w + x_0) \leq a \leq h(w) + p(-w - x_0).$$

Mostremos agora que $h'(w') \leq p(w')$, para todo $w' \in W'$.

Seja $w' \in W'$. Podemos escrever $w' = w + \lambda x_0$. Logo $h'(w') = h'(w + \lambda x_0) = h(w) - \lambda a$.

Se $\lambda > 0$ como $h(\frac{w}{\lambda}) - p(\frac{w}{\lambda} + x_0) \leq a$, então $a - h(\frac{w}{\lambda}) \leq p(\frac{w}{\lambda} + x_0)$.

Assim, $h'(\frac{w}{\lambda} + x_0) = h(\frac{w}{\lambda}) - a \leq p(\frac{w}{\lambda} + x_0)$.

Como $\lambda > 0$, $h'(w + \lambda x_0) \leq p(w + \lambda x_0)$. Donde $h'(w') \leq p(w')$.

Se $\lambda < 0$, aplicamos a desigualdade $a \leq h(w) + p(-w - x_0)$, para $\frac{-w}{\mu}$, em que $\lambda = -\mu$.

Daí, $-h(\frac{-w}{\mu}) + a \leq p(\frac{w}{\mu} - x_0)$. Logo, $h'(\frac{w}{\mu} - x_0) \leq p(\frac{w}{\mu} - x_0)$.

Como $\mu > 0$, $h'(w - \mu x_0) \leq p(w - \mu x_0) \iff h'(w + \lambda x_0) \leq p(w + \lambda x_0)$. Donde $h'(w') \leq p(w')$.

Desse modo, $(W', h') \in \mathcal{S}$ e $(W', h') > (W, h)$, o que contraria a maximalidade de (W, h) .

Portanto, $W = X$ e $h = \tilde{f}$ do enunciado.

□

O teorema de Hahn-Banach garante a existência de uma quantidade suficiente de funções contínuas lineares em qualquer espaço normado real.

O caso geral do Teorema de Hahn-Banach, que não será feito neste trabalho, é enunciado do seguinte modo em [1], página 10:

Teorema 8. (Teorema de Hahn-Banach) *Seja V um espaço vetorial e seja V_0 um subespaço de V . Seja $\phi_0 \in V_0^*$. Então existe um $\phi \in V^*$ tal que $\phi|_{V_0} = \phi_0$ e $\|\phi\| = \|\phi_0\|$.*

Corolário 1. *Seja X um espaço vetorial normado. Então, para todo $x_0 \in X$ não nulo, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema de Hahn-Banach ao subespaço $Y = \langle x_0 \rangle$, ao funcional

linear limitado $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$ e ao funcional semilinear $p(x) = \|x\|$.

□

Teorema 9. (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear limitada e sobrejetiva. Então existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset T(B(0, 1))$.*

Demonstração. Passo 1: Mostremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B(0, n))}$ tem interior não vazio.

Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\text{int}(\overline{T(B(0, n))}) = \emptyset$.

Pelo teorema de Baire (SUNDER[1], página 21), $\text{int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B(0, n))}) = \emptyset$.

Mas, como $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n)$, $Y = \overline{T(X)} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B(0, n))}$.

Logo, $\text{int}(Y) = \emptyset$, o que é um absurdo.

Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B(0, n))}$ tem interior não vazio.

Passo 2: Sejam $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tais que $B(y_0, r) \subseteq \overline{T(B(0, n))}$. Mostremos que $B(0, r) \subseteq \overline{T(B(0, 2n))}$.

Seja $y \in B(0, r)$. Podemos escrever $y = (y_0 + y) - y_0$ e, como $\|y\| < r$ então $\|(y_0 + y) - y_0\| < r$.

Logo, $(y_0 + y) \in B(y_0, r)$. Como $B(y_0, r) \subseteq \overline{T(B(0, n))}$, existem sequências $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{x'_m\}_{m' \in \mathbb{N}}$ em $B(0, n)$ tais que $T(x_m) \rightarrow y_0 + y$ e $T(x'_m) \rightarrow y_0$.

Então, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\|x_m - x'_m\| \leq \|x_m\| + \|x'_m\| < 2n.$$

Além disso, como $T(x_m) \rightarrow y_0 + y$ e $T(x'_m) \rightarrow y_0$, $T(x_m - x'_m) \rightarrow y$.

Portanto, $y \in \overline{T(B(0, 2n))}$.

Passo 3: Existe uma constante $k > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $T(x_n) \rightarrow y$ e $\|x_n\| \leq k\|y\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $y \in Y$ não nulo. Considere $y' = \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{r}{2}$.

Então $y' \in \overline{T(B(0, 2n))}$. Logo, existe $\{x_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$ em $B(0, 2n)$ tal que $T(x_{n'}) \rightarrow y'$.

Desse modo, tome $x_n = \frac{2\|y\|}{r} \cdot x_{n'}$.

Assim, $T(x_n) \rightarrow y$ e $\|x_n\| = \left\| \frac{2\|y\|}{r} \cdot x_{n'} \right\| = \frac{2\|y\|}{r} \cdot \|x_{n'}\| < \frac{2\|y\|}{r} \cdot 2n = \frac{4n}{r} \cdot \|y\|$.

Portanto, tome $k = \frac{4n}{r}$.

Passo 4: Para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$ e $\|x\| \leq 2k\|y\|$.

Pelo passo anterior, existe $x_1 \in X$ tal que $\|y - T(x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|y\|$ e $\|x_1\| \leq k\|y\|$.

Como $y - T(x_1) \in Y$, pelo passo anterior, existe $x_2 \in X$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| \leq \frac{1}{2^2}\|y\| \text{ e } \|x_2\| \leq k\|y - T(x_1)\| \leq \frac{1}{2}k\|y\|.$$

Indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $\|y - T(x_1) - T(x_2) - \dots - T(x_n)\| \leq \frac{1}{2^n}\|y\|$ e $\|x_n\| \leq k\|y - T(x_1) - \dots - T(x_{n-1})\| \leq \frac{k}{2^{n-1}}\|y\|$.

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{i=1}^N x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^N \frac{k\|y\|}{2^{i-1}} \leq 2k\|y\|$.

Definindo $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, x converge absolutamente e, portanto, x converge, pois X é de Banach.

E $T(x) = y$, pois $\left\| y - T\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) \right\| \leq \frac{1}{2^N}\|y\| \rightarrow 0$.

Passo 5: Seja $U \subseteq X$ aberto e seja $T(x) \in T(U)$, em que $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Mostremos que $B(T(x), s) \subseteq T(U)$, em que $s = \frac{r}{2k}$.

Seja $T(x) + v \in B(T(x), s)$. Pelo passo anterior, existe $u \in X$ tal que $T(u) = v$ e $\|u\| \leq 2k\|v\| \leq \frac{2kr}{2k} = r$.

Assim, $\|(x+u) - x\| < r$ e então $x+u \in B(x, r) \subseteq U$.

Logo, $T(x+u) = T(x) + T(u) = T(x) + v \in T(U)$.

Portanto, $B(T(x), s) \subseteq T(U)$.

□

Corolário 2. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear limitada e bijetiva. Então a aplicação linear $T^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua.*

Demonstração. Seja $U \subseteq Y$ aberto em Y .

Como T é bijetiva, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ que é aberto em Y , pois T é sobrejetiva.

Logo, T^{-1} é aberta.

□

2 Espaços de Hilbert

O objetivo deste capítulo é estudar espaços de Hilbert, alguns exemplos e propriedades. Principalmente, queremos mostrar que todo espaço de Hilbert possui uma base Hilbertiana.

2.1 Espaços de Hilbert

Definição 10. *Seja X um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Um produto interno em X é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz:*

- i. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$;
- ii. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- iii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, para quaisquer $x, y \in X$;
- iv. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in X$.

Proposição 11. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defina $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Então $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, para todos $x, y \in X$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e seja $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Então $\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$.

Ou seja, $\langle x + ty, x + ty \rangle = \|x + ty\|^2 = \|x^2 + 2xty + y^2t^2\| = \|x\|^2 + 2\|xyt\| + \|y\|^2t^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2t^2 \geq 0$.

Como $\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $4(\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Portanto, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

□

Proposição 12. *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define uma norma em X .*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- ii. Como $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$;
- iii. $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$;
- iv. $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

□

A proposição acima nos diz que sempre podemos definir um produto interno a partir de uma norma. Porém, nem toda norma provém de um produto interno.

Proposição 13. *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, norma proveniente do produto interno, satisfaz: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$.

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\
 &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle + \langle x, x - y \rangle + \langle y, x - y \rangle \\
 &= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle x, x \rangle} + \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\langle y, y \rangle} + \overline{\langle x, x \rangle} + \overline{\langle -y, x \rangle} + \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\langle -y, y \rangle} \\
 &= 2\overline{\langle x, x \rangle} + 2\overline{\langle y, y \rangle} = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *Em l_p , $p \neq 2$, a norma não provém de um produto interno.*

Sejam $x = (1, 1, 1, \dots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in l_p$.

Então: $\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x + y\| = 2 = \|x - y\|$.

Logo, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4 + 4 = 8$. Por outro lado, $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}) = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} \cdot 2 = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$.

Ou seja, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \neq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Portanto, em l_p , $p > 2$, a norma não provém de um produto interno.

Proposição 14. (Teorema de Pitágoras) *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $x, y \in X$ são ortogonais se, e somente se, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Demonstração. Sabemos que $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Então, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y \rangle = 0$.

□

Proposição 15. (Identidade Polar) *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$.*

Demonstração. $\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) - \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) = \langle x, y \rangle$.

□

Proposição 16. (Identidade do Paralelogramo) *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.*

Demonstração. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle) + (\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

□

Definição 11. *Um espaço de Hilbert é um par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, em que X é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em X , tal que X é completo com relação à norma proveniente do produto interno. Denotaremos por \mathcal{H} um espaço de Hilbert.*

Proposição 17. l_2 é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Para quaisquer $x, y \in l_2$, defina $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

Defina também $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

É fácil ver que a série converge, pois $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, pela desigualdade de Holder.

□

Teorema 10. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $C \subset \mathcal{H}$ um subconjunto convexo fechado e não-vazio. Para todo $x \in \mathcal{H}$ existe um único $y_0 \in C$ tal que $\|x - y_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$.*

Demonstração. \circ *Existência*

Seja $d = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ e seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em C tal que $\|x - y_n\| = d_n \rightarrow d$.

Mostremos que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, pela identidade do paralelogramo, temos:

$$\|x - y_n + (x - y_m)\|^2 + \|x - y_n - (x - y_m)\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2).$$

Como C é convexo, $\frac{y_n + y_m}{2} \in C$ e

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2) - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Quando $n, m \rightarrow \infty$, $2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2 \rightarrow 0$.

Como \mathcal{H} é completo e C é fechado, seja $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ e $y_0 \in C$.

\circ *Unicidade*

Suponha que existem $y_0, \bar{y}_0 \in C$ tais que $\|x - y_0\| = \|x - \bar{y}_0\| = d$.

Utilizando novamente a identidade do paralelogramo, temos

$$\|y_0 - \bar{y}_0\|^2 = 2(d^2 + d^2) - 4\|x - \frac{y_0 + \bar{y}_0}{2}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Logo, $y_0 = \bar{y}_0$.

□

Corolário 3. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $L \subset \mathcal{H}$ um subespaço vetorial fechado. Para todo $x \in \mathcal{H}$ o único $y_0 \in L$ tal que $\|x - y_0\| = \min_{y \in L} \|x - y\|$ satisfaz $x - y_0 \perp L$.*

Demonstração. Mostremos que $\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$, para todo $y \in L$.

Para $0 \leq t \leq 1$, temos que $z = (1 - t)y_0 + ty \in L$.

Logo, $\|x - y_0\| \leq \|x - (1 - t)y_0 - ty\| = \|x - y_0 - t(y - y_0)\|$.

E então

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 - 2t \langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2 \|y - y_0\|^2 \Rightarrow 2 \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq t \|y - y_0\|.$$

Quando $t \rightarrow 0$, $\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$.

Utilizando as propriedades de produto interno, $\langle x - y_0, y \rangle \leq \langle x - y_0, y_0 \rangle$.

Como isso é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, temos necessariamente $\langle x - y_0, y \rangle = 0$.

□

Teorema 11. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e seja $Y \subset \mathcal{H}$ subespaço vetorial fechado. Então $\mathcal{H} = Y \oplus Y^\perp$, em que $Y^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid x \perp y, \text{ para todo } y \in Y\}$.*

Demonstração. Mostremos que $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

Seja $y \in Y \cap Y^\perp$. Então $\langle y, y \rangle = 0$, donde $y = 0$.

Mostremos que $\mathcal{H} = Y \oplus Y^\perp$.

Seja $x \in \mathcal{H}$.

Seja $y_0 \in Y$ o único ponto que minimiza a distância a Y . Pelo resultado anterior, $x - y_0 \in Y^\perp$. Então $x = y_0 + (x - y_0)$.

Portanto, $\mathcal{H} = Y \oplus Y^\perp$.

□

Proposição 18. *Nas condições do teorema acima, dado $x \in \mathcal{H}$ podemos escrever $x = y + z$, com $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$ de forma única. Defina $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $P(x) = y$. Então:*

- i. P é linear;
- ii. P é contínua;
- iii. $\text{Im}(P) = Y$;
- iv. $P|_Y = \text{Id}$;
- v. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$ temos $\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$.

Demonstração. i. Sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Podemos escrever $x_1 = y_1 + z_1$ e $x_2 = y_2 + z_2$, em que $y_1, y_2 \in Y$ e $z_1, z_2 \in Y^\perp$.

Desse modo, temos $\alpha x_1 + x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) = (\alpha y_1 + y_2) + (\alpha z_1 + z_2)$.

Dáí $P(\alpha x_1 + x_2) = P((\alpha y_1 + y_2) + (\alpha z_1 + z_2)) = \alpha y_1 + y_2 = \alpha P(x_1) + P(x_2)$.

ii. Seja $x \in \mathcal{H}$. Podemos escrever $x = y + z$, com $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$.

Note que $\|P(x)\| = \|y\|$.

Além disso, $\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \langle y+z, y+z \rangle = \langle y, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, y \rangle + \langle z, z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Logo, $\|x\|^2 \geq \|y\|^2$. Donde $\|x\| \geq \|P(x)\|$.

Portanto, P é contínua e $\|P\| \leq 1$.

Por outro lado, note que, se $y \in Y \setminus \{0\}$, então $\|P(y)\| \leq \|P\| \|y\| \Leftrightarrow \|y\| \leq \|P\| \|y\| \Leftrightarrow 1 \leq \|P\|$. Portanto, $\|P\| = 1$.

iii. É claro que $Im(P) \subseteq Y$. Então basta mostrar que $Y \subseteq Im(P)$.

Para todo $y \in Y$, temos que $P(y) = y$.

iv. Para todo $y \in Y$, temos que $P(y) = y$

v. Sejam $x, y \in \mathcal{H}$ e escreva $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, com $x_1, y_1 \in Y$ e $x_2, y_2 \in Y^\perp$.

Então:

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \text{ e}$$

$$\langle x, P(y) \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

Portanto, $\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$.

□

Definição 12. P é chamada de projeção ortogonal sobre Y .

Definição 13. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$.

Denotamos $M^\perp = \{x \in \mathcal{H} | x \perp m, \text{ para todo } m \in M\}$.

Proposição 19. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$. Então:

i. $M \subseteq (M^{\perp\perp})$;

ii. se $M \subseteq N$, então $N^\perp \subset M^\perp$;

iii. $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.

Demonstração. i. Seja $m \in M$ e seja $n \in M^\perp$. Então $\langle n, m \rangle = 0$.

Por outro lado, $\langle m, n \rangle = \overline{\langle n, m \rangle} = \bar{0} = 0$. Portanto, $m \in M^{\perp\perp}$

ii. Seja $y \in N^\perp$. Então, $\langle y, n \rangle = 0$, para todo $n \in N$. Como $M \subseteq N$, temos $\langle y, m \rangle = 0$, para todo $m \in M$.

Logo, $y \in M^\perp$. Portanto, $N^\perp \subseteq M^\perp$.

iii. Pelo item (i.), sabemos que $M \subseteq M^{\perp\perp}$.

Pelo item (ii.), $M^{\perp\perp\perp} \subseteq M^\perp$.

Agora, seja $x \in M^\perp$ e seja $y \in M^{\perp\perp}$. Mostremos que $\langle x, y \rangle = 0$.

De fato, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{0}$, pois $y \in M^{\perp\perp}$ e $x \in M^\perp$.

Logo, $M^{\perp\perp\perp} \subseteq M^\perp \subseteq M^{\perp\perp\perp}$.

Portanto, $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$.

□

Proposição 20. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$. Então $M^{\perp\perp} = \overline{\text{span}M}$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $M \subset M^{\perp\perp}$.

Como $M^{\perp\perp}$ é espaço vetorial, $\text{span}(M) \subset M^{\perp\perp}$.

Para cada $m \in M$ fixo podemos definir $\phi : M^\perp \rightarrow \mathbb{K}$ por $\phi(x) = \langle x, m \rangle$.

ϕ é contínua, pois $|\langle x, m \rangle| \leq \|x\| \|m\|$. Logo, $M^\perp = \bigcap_{m \in M} \phi^{-1}(\{0\})$ é fechado.

Além disso, $M^{\perp\perp}$ é fechado. Donde $\overline{\text{span}M} \subseteq M^{\perp\perp}$.

Mostremos que $M^{\perp\perp} \subseteq \overline{\text{span}M}$.

Seja $Y = \text{span}M$. Note que $Y^\perp \subseteq M^\perp$.

Além disso, $M^\perp \subseteq Y^\perp$, pois se $x \in M^\perp$ e $y \in Y$ então

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_k m_k \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, m_1 \rangle + \dots + \overline{\alpha_k} \langle x, m_k \rangle = 0.$$

Seja $Z = \overline{Y}$. É claro que $Y \subseteq Z$, logo $Z^\perp \subseteq Y^\perp$.

Mostremos que $Y^\perp \subseteq Z^\perp$.

De fato, dados $x \in Y^\perp$ e $z \in Z$, temos $\langle x, z \rangle = \langle x, \lim y_n \rangle = \lim \langle x, y_n \rangle = \lim 0 = 0$.

Portanto, $M^\perp = Y^\perp = Z^\perp$.

Como Z é fechado, $\mathcal{H} = Z \oplus Z^\perp$.

Como Z^\perp é fechado, $\mathcal{H} = Z^\perp \oplus Z^{\perp\perp}$. Além disso, $Z \subseteq Z^{\perp\perp}$.

Mostremos que $Z^{\perp\perp} \subseteq Z$.

Seja $x \in Z^{\perp\perp}$. Como $\mathcal{H} = Z \oplus Z^\perp$, podemos escrever $x = a + b$, em que $a \in Z \subseteq Z^{\perp\perp}$ e $b \in Z^\perp$.

Daí $x = a + b = x + 0$ e, como $a, x \in Z^{\perp\perp}$ e $b \in Z^\perp$, $x = a$ e $b = 0$. Donde $x \in Z$.

Assim, $Z = \bar{Y} = \overline{\text{span}M}$ e $Z^\perp = M^\perp$.

Donde $Z^{\perp\perp} = M^{\perp\perp}$.

Portanto, $\overline{\text{span}M} = M^{\perp\perp}$.

□

Lema 2. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $L \subset \mathcal{H}$ um subespaço vetorial fechado. Então existe $z \in \mathcal{H} \setminus L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

Demonstração. Pelo teorema 8, para $w \in \mathcal{H} \setminus L$, existe $y_0 \in L$ tal que $w - y_0 \perp L$.

É claro que $w - y_0 \notin L$.

Tome então $z = \frac{w - y_0}{\|w - y_0\|}$. Daí $\|z\| = \left\| \frac{w - y_0}{\|w - y_0\|} \right\| = \frac{\|w - y_0\|}{\|w - y_0\|} = 1$ e $z \perp L$, como queríamos.

□

Teorema 12. *(Teorema de Representação de Riesz) Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Dado $f \in \mathcal{H}^*$, existe um único $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Além disso, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|y\|_{\mathcal{H}}$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}^*$ e seja $L = \ker(f)$.

Se $L = \mathcal{H}$, tome $y = 0$.

Caso contrário, pelo lema anterior, existe $z \in \mathcal{H} \setminus L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.

Temos que $\mathcal{H} = \langle z \rangle \oplus L$, pois dado $x \in \mathcal{H}$ podemos escrever $x = \frac{f(x)}{f(z)}z + (x - \frac{f(x)}{f(z)}z)$, com $x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in L$.

Mostremos que $y = f(z)z$.

De fato, $\langle x, f(z)z \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z + (x - \frac{f(x)}{f(z)}z), f(z)z \right\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z, f(z)z \right\rangle = f(x) \langle z, z \rangle = f(x)$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Logo, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} \leq \|y\|_{\mathcal{H}}$ e $\|f\|_{\mathcal{H}^*} \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|$.

Portanto, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|y\|_{\mathcal{H}}$.

□

Corolário 4. *Todo espaço de Hilbert \mathcal{H} é reflexivo, isto é, \mathcal{H} e \mathcal{H}^{**} são isometricamente isomorfos.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, podemos associar a cada $f \in \mathcal{H}^*$ um único $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Denotemos a função que faz tal associação por ϕ .

ϕ é uma transformação anti-linear bijetora e isométrica. Isto é, \mathcal{H} e \mathcal{H}^* são isometricamente isomorfos.

Como $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$, temos também $\mathcal{H}^* = (\mathcal{H}^*)^*$.

Desse modo, para cada $F \in (\mathcal{H}^*)^*$ podemos associar $f \in \mathcal{H}^*$ tal que $F(g) = f(y)$ para todo $g \in \mathcal{H}^*$ e $y \in \mathcal{H}$ satisfaz $g(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Além disso, a cada $f \in \mathcal{H}^*$ associa-se um elemento $x \in \mathcal{H}$ tal que $f(y) = \langle y, x \rangle$, para todo $y \in \mathcal{H}$.

Portanto, $F(g) = f(y) = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle = g(x)$, para toda $g \in \mathcal{H}^*$.

□

Definição 14. *Sejam X um espaço normado, I um conjunto qualquer e $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$. Dizemos que $x = \sum_{i \in I} x_i$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que para todo $F \subseteq I$ finito com $F_\varepsilon \subseteq F$, então $\|x - \sum_{i \in F} x_i\| < \varepsilon$.*

Definição 15. *Seja H um espaço com produto interno. Um conjunto $\{e_i\}_{i \in I}$ é chamado ortogonal se $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, sempre que $i \neq j$.*

Definição 16. *Seja H um espaço com produto interno. Um conjunto $\{e_i\}_{i \in I}$ é chamado ortonormal se for ortogonal e $\|e_i\| = 1$, para todo $i \in I$.*

Note que se $x \in \mathcal{H}$ é combinação linear finita $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, então $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$ e então $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Proposição 21. (Desigualdade de Bessel) Seja $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$ um conjunto ortonormal. Então, para todo $x \in \mathcal{H}$, tem-se $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Demonstração. É suficiente mostrar que para todo $F \in I$ finito, temos $\sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

$$\text{Seja } y = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Como, para todo $j \in F$, $\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$, então

$$x - y \in \text{span}\{e_i \mid i \in F\}^\perp.$$

Note que $x - y \perp y$ e, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\|x\|^2 = \|y + x - y\|^2 = \langle y + (x - y), y + (x - y) \rangle = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|y\|^2.$$

$$\text{Logo, } \|y\|^2 \leq \|x\|^2.$$

$$\text{Mas, } \|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$$\text{Portanto, } \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Teorema 13. Seja $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$ um conjunto ortonormal. Então:

- i. Uma série $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ converge se, e somente se, $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < \infty$;
- ii. Se a série $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ converge e $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$, então $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$;
- iii. Para qualquer $x \in \mathcal{H}$, a série $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ converge.

Demonstração. i. (\Leftarrow) Seja $A = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < \infty$.

Defina $D = \{i \in I : |\alpha_i| \neq 0\}$ e $D_n = \{i : |\alpha_i| > \frac{1}{n}\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Mostremos que D_n é finito.

Suponha, por absurdo, que não. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{n^2} > A$. Tome i_1, \dots, i_k distintos em D_n .

Daí $\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} |a_i|^2 = \sum_{j=1}^k |a_{i_j}|^2 > \frac{k}{n^2} > A$, o que é um absurdo.

Portanto D é enumerável e então existe uma quantidade enumerável de índices i para os quais $\alpha_i \neq 0$.

Podemos então supor, sem perda de generalidade, que I é enumerável.

Mostremos que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n$ converge utilizando o critério de Cauchy.

Vamos denotar $S_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$.

Então, com $N \geq M$, temos

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{i=M+1}^N \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=M+1}^N |\alpha_i|^2.$$

Logo, a série converge.

(\Rightarrow) Suponha que $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ converge e $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i = x$.

Para cada $F \subseteq I$ finito, considere $x_F = \sum_{i \in F} \alpha_i e_i$.

$$\text{Daí } \langle x - x_F, x \rangle = \left\langle x - x_F, \sum_{i \in F} \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i \in F} \bar{\alpha}_i \langle x - x_F, e_i \rangle = 0,$$

pois, para todo $i \in F$ temos :

$$\langle x - x_F, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = \alpha_i - \langle \sum_{i \in F} \alpha_i e_i, e_i \rangle = \alpha_i - \alpha_i = 0, \text{ pelo item (ii).}$$

$$\text{Logo, } \|x\|^2 = \|x_F + x - x_F\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x - x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{i \in F} |\alpha_i|^2.$$

Desse modo, para todo $F \subseteq I$ finito, temos $\sum_{i \in F} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$.

Donde $\sup_{F \subseteq I \text{ finito}} \sum_{i \in F} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$.

Portanto, $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2$ converge.

ii. Seja $\varepsilon > 0$.

Tome $F_\varepsilon \subseteq I$ satisfazendo para todo $F_\varepsilon \subseteq F$ finito $\|x - \sum_{j \in F} \alpha_j e_j\| < \varepsilon$.

Tome $F = F_\varepsilon \cup \{i\}$. Então

$$|\langle x, e_i \rangle - \alpha_i| = \left| \left\langle x - \sum_{j \in F} \alpha_j e_j, e_i \right\rangle \right| \leq \|x - \sum_{j \in F} \alpha_j e_j\| \|e_i\| < \varepsilon.$$

Portanto, $\langle x, e_i \rangle$.

iii. Pelo item (i.), basta provar que $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ converge.

$$\text{Dado } F \subseteq I \text{ finito, } \sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$$\text{Aplicando o sup, temos } \sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \infty.$$

□

Definição 17. Uma base Hilbertiana para um espaço de Hilbert \mathcal{H} é um conjunto ortonormal $\{e_i\}_{i \in I}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{H}$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Teorema 14. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $B = \{e_i\}_{i \in I}$ um conjunto ortonormal. Então são equivalentes:

- i. B é uma base Hilbertiana;
- ii. $\overline{\text{span}B} = \mathcal{H}$;
- iii. $B^\perp = \{0\}$;
- iv. para todo $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) É imediata.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

$$B^\perp = B^{\perp\perp} = (\overline{\text{span}B})^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}, \text{ pois } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

$$(3) \Rightarrow (1)$$

$$\text{Seja } x \in \mathcal{H} \text{ e seja } y = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Mostremos que $x - y \in B^\perp$.

Para qualquer $j \in I$, temos :

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

Assim, $x - y \in B^\perp = \{0\}$. Logo, $x = y = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

$$(1) \Leftrightarrow (4)$$

$$\text{Seja } x \in \mathcal{H} \text{ e seja } y = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i.$$

Então:

$\langle x - y, y \rangle = \left\langle x - y, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} \langle x - y, e_i \rangle = \sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} (\langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle)$, pelo teorema anterior.

$$\text{E } \sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} (\langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle) = 0.$$

Como $\|x\|^2 = \|y + (x - y)\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$. Logo, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - y\|^2$.

Portanto, B é uma base Hilbertiana se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$.

□

Teorema 15. *Todo espaço de Hilbert admite uma base ortonormal Hilbertiana.*

Demonstração. Seja \mathfrak{D} o conjunto de todos os subconjuntos ortonormais de \mathcal{H} , ordenado por inclusão.

Mostremos que \mathfrak{D} possui um elemento maximal.

Seja $Y \subseteq \mathfrak{D}$ um subconjunto totalmente ordenado qualquer.

Seja $B = \bigcup_{A \in Y} A$.

Sejam $u, v \in B$ distintos. Então $u \in A_1$ e $v \in A_2$, para $A_1, A_2 \in Y$.

Como $A_1 \subseteq A_2$ ou $A_2 \subseteq A_1$, $u, v \in A_1$ ou $u, v \in A_2$.

Assim, $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\| = \|v\| = 1$.

Como $B = \bigcup_{A \in Y} A$, $B \supseteq A$, para todo $A \in Y$.

Pelo lema de Zorn, existe um elemento maximal em B .

Note que B satisfaz a condição 3 do teorema da base Hilbertiana, pois se $B^\perp \neq \{0\}$, podemos tomar $u \in B^\perp$ não nulo e então $B \cup \left\{ \frac{u}{\|u\|} \right\}$ pertenceria a \mathfrak{D} estritamente maior que B , o que contrariaria a maximalidade de B .

Portanto, B é uma base Hilbertiana.

□

Proposição 22. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Se \mathcal{H} é separável, então toda base Hilbertiana de \mathcal{H} é enumerável.*

Demonstração. Seja $B = \{e_i\}_{i \in I}$ uma base qualquer.

Para $i \neq j$, note que

$$\|e_i - e_j\|^2 = \langle e_i - e_j, e_i - e_j \rangle = \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_j, e_i \rangle + \langle e_j, e_j \rangle = 2.$$

Logo, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$.

Seja $D = \left\{ \sum_{n=1}^N a_n e_n \mid N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$. Claramente, D é denso e enumerável.

Então, tome para cada $i \in I$ um elemento $d_i \in D \cap B(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Desse modo, fica definida uma função $f : I \rightarrow D$ que associa a cada $i \in I$ um elemento d_i .

Como f é injetora, I é enumerável e, portanto, B é enumerável.

□

Proposição 23. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Se \mathcal{H} admite base Hilbertiana enumerável, então \mathcal{H} é separável.*

Demonstração. Seja B uma base enumerável, $B = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Seja $D = \left\{ \sum_{n=1}^N a_n e_n \mid N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$.

Como D é denso e enumerável, \mathcal{H} é separável.

□

Teorema 16. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então existe um isomorfismo $\phi : l_2 \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\langle u, v \rangle = \langle \phi(u), \phi(v) \rangle$, para todo $u, v \in l_2$. Além disso, ϕ é uma isometria.*

Demonstração. Seja B uma base Hilbertiana para \mathcal{H} .

Como \mathcal{H} é separável, B é enumerável. Como \mathcal{H} tem dimensão infinita, então B também tem dimensão infinita.

Escreva $B = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e defina $\phi : l_2 \rightarrow B$ por $\phi(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n$.

Como $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n$ converge.

É fácil ver que ϕ é linear.

Além disso, para todo $x \in \mathcal{H}$, $x = \phi(\langle x_i, e_i \rangle_{n \in \mathbb{N}})$.

Logo, ϕ é sobrejetora.

Agora, sejam $u, v \in l_2$. Então

$$\begin{aligned} \langle \phi(u), \phi(v) \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n e_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n e_n \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \left\langle e_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n e_n \right\rangle = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \langle e_n, e_n \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{v}_n = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Logo, ϕ é uma isometria.

Do mesmo modo, podemos concluir que $\|\phi(u)\| = \|u\|$, para todo $u \in l_2$. Logo, ϕ é injetora.

□

3 Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos

Neste capítulo, estudamos operadores adjuntos, compactos e de Fredholm para que ao final do capítulo possamos enunciar e demonstrar o Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos.

3.1 Operadores Adjuntos

Definição 18. *Sejam V, W espaços vetoriais e $h : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$. h é dita ser uma forma sesqui-linear se h é linear na primeira variável e anti-linear na segunda variável.*

Proposição 24. *Sejam V, W espaços normados e $h : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ sesqui-linear. Então são equivalentes:*

1. h é contínua;
2. $\sup\{|h(x, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty$;
3. $|h(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, para algum $M > 0$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2)

Seja $\varepsilon = 1$. Como h é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |h(x, y) - h(0, 0)| < 1.$$

Logo, $\|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |h(x, y)| < 1$.

Seja $(x, y) \in V \times W$, com x, y não nulos e $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$.

$$\text{Então } \left\| \left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}, \frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo, $|h(x,y)| < \frac{4}{\delta^2} \|x\| \|y\| \leq \frac{4\epsilon}{\delta^2}$.

(2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (1) e (3) \Rightarrow (2) são consequências do teorema sobre continuidade de transformações lineares. □

Exemplo 7. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ uma transformação linear contínua.

Defina $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{K}$ por $h(x_1, x_2) = \langle T(x_1), x_2 \rangle$.

h é sesqui-linear e, como $|h(x_1, x_2)| = |\langle T(x_1), x_2 \rangle| \leq \|T(x_1)\| \|x_2\| \leq \|T\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$,

h é contínua.

Definição 19. A norma de uma função sesqui-linear contínua $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{K}$ é definida por $\|h\| = \sup\{|h(x_1, x_2)| : \|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1\}$.

Proposição 25. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ uma transformação linear contínua. Defina $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{K}$ por $h(x_1, x_2) = \langle T(x_1), x_2 \rangle$. Então $\|h\| = \|T\|$.

Demonstração. No exemplo acima, vimos que $\|h\| \leq \|T\|$.

Mostremos então que $\|T\| \leq \|h\|$.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}_1$, com $\|x_n\| \leq 1$ e tal que $\|T(x_n)\| \rightarrow \|T\|$.

Seja $y_n = \frac{T(x_n)}{\|T(x_n)\|}$.

Então:

$$\|h\| \geq |h(x_n, y_n)| = \left\langle T(x_n), \frac{T(x_n)}{\|T(x_n)\|} \right\rangle = \|T(x_n)\|.$$

Quando tomamos o limite, temos $\|h\| \geq \|T\|$.

Portanto, $\|h\| = \|T\|$. □

Teorema 17. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ sesqui-linear contínua. Então existe uma única transformação linear contínua $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $h(x, y) = \langle T(x), y \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}_1$ e para todo $y \in \mathcal{H}_2$. Além disso, $\|h\| = \|T\|$.

Demonstração. Seja $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$.

Para $x \in \mathcal{H}_1$, considere o funcional linear $\Phi: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $\phi(y) = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Então $|\Phi(y)| = |h(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$. Logo, Φ é contínua.

Pelo teorema de Riez, existe $z \in \mathcal{H}_2$ tal que $\phi(y) = \langle y, z \rangle$.

Denote $z = T(x)$.

Assim, $\Phi(y) = \overline{h(x, y)} = \langle y, T(x) \rangle$.

Logo, $h(x, y) = \langle T(x), y \rangle$.

Definimos desse modo $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ por $T(x) = z_x$.

Mostremos que T é linear e contínua.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x_1 + x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + h(x_2, y) \\ &= \alpha \langle T(x_1), y \rangle + \langle T(x_2), y \rangle = \langle \alpha T(x_1) + T(x_2), y \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$.

Além disso, $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = |h(x, T(x))| \leq M \|x\| \|T(x)\|$.

Daí $\|T(x)\| \leq M \|x\|$. E, portanto, T é contínua.

□

Exemplo 8. Seja $T: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ uma transformação linear entre espaços de Hilbert. Defina $h: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ por $h(x, y) = \langle x, T(y) \rangle$.

É fácil ver que h é sesqui-linear.

Além disso, $|h(x, y)| = |\langle x, T(y) \rangle| \leq \|x\| \|T(y)\|$. Logo, h é contínua.

Pelo teorema anterior, existe $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ linear tal que $\langle x, T(y) \rangle = \langle S(x), y \rangle$, para quaisquer $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$.

Definição 20. O operador S definido no exemplo acima é chamado de o adjunto de T e é denotado por T^* .

Proposição 26. $\|A^*A\| = \|A\|^2$

Demonstração. $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$.

Seja $x \in X$, temos:

$$\|A(x)\|^2 = |\langle A(x), A(x) \rangle| = |\langle A^*A(x), x \rangle| \leq \|AA^*(x)\| \|x\| \leq \|A^*A\| \|x\|^2.$$

Logo, $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$.

□

Proposição 27. *Sejam $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ e $S : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$. Então $(ST)^* = T^*S^*$.*

Demonstração. Sejam $x \in \mathcal{H}_1$ e $z \in \mathcal{H}_3$. Então:

$$\langle (ST)^*(z), x \rangle = \langle z, ST(x) \rangle = \langle z, S(T(x)) \rangle = \langle S^*(z), T(x) \rangle = \langle T^*S^*(z), x \rangle.$$

Logo, $(ST)^* = T^*S^*$.

□

Definição 21. *Um operador auto-adjunto é um operador linear que é o adjunto de si mesmo.*

3.2 Operadores Compactos

Definição 22. *Seja X um espaço normado e seja $T : X \rightarrow X$ contínua. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor spectral se $T - \lambda I$ não for bijetor.*

Definição 23. *Seja X um espaço normado e seja $T : X \rightarrow X$ contínua. O espectro de T é o conjunto de todos os valores espectrais.*

Denotaremos o espectro de T por $\sigma(T)$.

Denotaremos por $\rho(T)$ o conjunto $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.

Definição 24. *O espectro discreto de T , $\sigma_p(T)$, é o conjunto dos autovalores de T .*

O espectro contínuo de T , $\sigma_c(T)$, é o conjunto:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \mid (T - \lambda I) \text{ é injetor, não sobrejetivo, mas tem imagem densa}\}.$$

O espectro residual de T , $\sigma_r(T)$ é o conjunto $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T) \setminus \sigma_c(T)$.

Proposição 28. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in B(X)$, com $\|I - T\| < 1$. Então T é inversível.*

Demonstração. Seja $R = I - T$. Então $\|R\| < 1$.

Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \|R^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|R\|^n$, pois $\|R^n\| \leq \|R\|^n$.

Então $\sum_{n=0}^{\infty} \|R^n\|$ converge por comparação com $\sum_{n=0}^{\infty} \|R\|^n$.

Como X é de Banach, $B(X)$ é de Banach. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} R^n$ converge.

Agora,

$$T \circ \sum_{n=0}^{\infty} R^n = (I - R) \circ \sum_{n=0}^{\infty} R^n = \sum_{n=0}^{\infty} R^n - R \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R^n = \sum_{n=0}^{\infty} R^n - \sum_{n=0}^{\infty} R \cdot R^n = I.$$

$$\text{Analogamente, } \sum_{n=0}^{\infty} R^n \circ T = I.$$

$$\text{Portanto, } T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n.$$

□

Corolário 5. *Seja X um espaço de Banach e seja $G = \{T \in B(X) | T \text{ é inversível}\}$. Então se $T \in G$ e $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, então $S \in G$.*

Demonstração. Seja $R = T - S$. Então $S = T - R = T(I - T^{-1}R)$.

Mostremos então que $I - T^{-1}R$ é inversível.

Note que $\|(I - T^{-1}R) - I\| = \|T^{-1}R\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|R\| < 1$.

Pela proposição anterior, $S \in G$.

□

Teorema 18. *Sejam X espaço de Banach e $T \in B(X)$. Então $\sigma(T)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{K} \rightarrow B(X)$ dada por $f(\lambda) = T - \lambda I$ e seja $G = \{T \in B(X) | T \text{ é inversível}\}$.

Como f é contínua, $\rho(T) = f^{-1}(G)$ e G é aberto, então $\rho(T)$ é aberto.

Logo, $\sigma(T)$ é fechado.

Mostremos que $\sigma(T)$ é limitado.

Em verdade, mostremos que $\sigma(T)$ está contido na bola fechada de centro na origem e raio $\|T\|$.

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$.

Sejam $U = -\lambda I$ e $S = T - \lambda I$.

Então $\|U - S\| = \|T\|$ e $\|U^{-1}\| = \|-\lambda^{-1}I\|^{-1} = (|\lambda^{-1}|\|I\|)^{-1} = |\lambda|$.

Logo, $\|U - S\| < \|U^{-1}\|^{-1}$.

Como U é inversível, S é inversível. Daí $T - \lambda I$ é inversível e então $\lambda \in \rho(T)$.

Ou seja, se $\lambda \in \sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$, então $\lambda \in \overline{B(0, 1)}$. Donde $\sigma(T)$ é limitado.

Como $\sigma(T) \subseteq \mathbb{K}$ é fechado e limitado, então $\sigma(T)$ é compacto.

□

Definição 25. O raio espectral de T é definido por $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Definição 26. Sejam X espaço de Banach e $T \in B(X)$. A função resolvente de T é a função $R : \rho(T) \rightarrow B(X)$ dada por $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.

Proposição 29. Sejam $\lambda, \mu \in \rho(T)$, então $R(\mu) - R(\lambda) = (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} R(\mu) - R(\lambda) &= (T - \mu I)^{-1} - (T - \lambda I)^{-1} = (T - \mu I)^{-1}(I - (T - \mu I)(T - \lambda I)^{-1}) \\ &= (T - \mu I)^{-1}((T - \lambda I) - (T - \mu I))(T - \lambda I)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(T - \mu I)^{-1}(T - \lambda I)^{-1} = (\mu - \lambda) \cdot R(\mu) \cdot R(\lambda). \end{aligned}$$

□

Definição 27. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ linear. Dizemos que T é compacto se $\overline{T(B(0, 1))}$ é compacto.

Proposição 30. Seja $T : X \rightarrow Y$ compacto. Então para todo $M \subseteq X$ limitado tem-se que $\overline{T(M)}$ é compacto.

Demonstração. Como M é limitado, existe $r > 0$ tal que $M \subseteq B(0, r)$. Logo, $\frac{1}{r}M \subseteq B(0, 1)$.

Assim, $\overline{T(\frac{1}{r}M)} \subseteq \overline{T(B(0, 1))}$ que é fechado contido em um compacto.

Logo, $\overline{T(\frac{1}{r}M)}$ é compacto.

Como $\overline{T(\frac{1}{r}M)} = \overline{\frac{1}{r}T(M)} = \frac{1}{r}\overline{T(M)}$.

Portanto, $\overline{T(M)} = r\overline{T(\frac{1}{r}M)}$.

□

Proposição 31. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$. T é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ a sequência $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente.*

Demonstração. (\Rightarrow)

Como $M = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, $\overline{T(M)}$ é compacto.

Como $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{T(M)}$, $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente pois, em um compacto, toda sequência limitada possui subsequência convergente.

(\Leftarrow)

Seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{T(B(0, 1))}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in B(0, 1)$ tal que $\|T(x_n) - y_n\| < \frac{1}{n}$.

Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, existe $\{T(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Assim, $\|y_{n_k} - T(x_{n_k})\| < \frac{1}{n_k}$. Logo, y_{n_k} converge para o limite de $\{T(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Donde $\overline{T(B(0, 1))}$ é sequencialmente compacto e, portanto, é compacto.

□

Exemplo 9. *Seja X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear tal que $T(X)$ tem dimensão finita. T é compacto.*

De fato, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada qualquer em X .

Como $\|T(x_n)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $T(X)$.

Então, $\overline{\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}}$ é compacto. Como $\dim T(X) < \infty$, $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Logo, pelo teorema acima, T é compacto.

Exemplo 10. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados, com $\dim X < \infty$, e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então T é compacto.*

De fato, como $\dim X < \infty$ e T é linear, T é limitado e $\dim T(X) \leq \dim X < \infty$.

Portanto, caímos no caso do exemplo acima e então T é compacto.

Definição 28. Denotamos por $K(X, Y)$ o conjunto de todas as transformações lineares compactas de X em Y .

Proposição 32. $K(X, Y)$ é fechado em $B(X, Y)$ se X é normado e Y é de Banach.

Demonstração. Seja $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K(X, Y)$ com $T_n \rightarrow T$, para $T \in B(X, Y)$.

Mostremos que $T \in K(X, Y)$, isto é, T é compacto.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada e seja $P > 0$ (suponha $P > 1$) tal que $\|x\| \leq P$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada T_n é compacto, $\{T_n(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tem subsequência convergente.

Então existe $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{T_n(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $\{T(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $T_n \rightarrow T$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3P}$.

Como $T_n(y_i)$ é de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $k, l \geq k_0$, $\|T_n(y_k) - T_n(y_l)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Desse modo, temos, para quaisquer $k, l \geq \max\{n, k_0\}$:

$$\begin{aligned} \|T(y_k) - T(y_l)\| &\leq \|T(y_k) - T_n(y_k)\| + \|T_n(y_k) - T_n(y_l)\| + \|T_n(y_l) - T(y_l)\| \\ &\leq \|T - T_n\| \|y_n\| + \|T_n(y_k) - T_n(y_l)\| + \|T_n(y_l) - T(y_l)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3P} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\{T(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como Y é de Banach, $\{T(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Donde, T é compacto e, portanto, $K(X, Y)$ é fechado.

□

3.3 Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos

Sabemos que se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é uma transformação linear, um autovetor é um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$ e, neste caso, λ é um autovalor de T .

Além disso, λ é autovalor se, e somente se, $T - \lambda I$ não é injetor.

Uma outra maneira, era encontrar as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ e denominávamos espectro de T como sendo o conjunto dos autovalores de T (que era igual ao conjunto das raízes de p).

Nosso objetivo, era encontrar condições para que existisse uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .

Nesta seção, encontraremos condições necessários para o caso de estamos trabalhando com espaços de dimensão infinita.

Definição 29. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$. Dizemos que T é um operador de Fredholm se $\dim(\ker(T)) < \infty$ e $\text{codim}(\text{Im}(T)) < \infty$.*

Definição 30. *Seja T um operador de Fredholm. O índice de T é o número inteiro $\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \text{codim}(\text{Im}(T))$.*

Proposição 33. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$ um operador de Fredholm. Se $\text{codim}(\text{Im}(T)) < \infty$, então $\text{Im}(T)$ é fechado.*

Demonstração. \circ Suponha que T seja injetora.

Seja $n = \text{codim}(\text{Im}(T))$ e sejam y_1, \dots, y_n tais que $\text{span}(\text{Im}(T) \cup \{y_1, \dots, y_n\}) = Y$.

Defina $S : X \oplus \mathbb{K}^n \rightarrow Y$ em que $S(x, a_1, \dots, a_n) = T(x) + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$.

É claro que S é sobrejetiva.

Mostremos que S é injetiva.

Suponha que não e seja $(x, a_1, \dots, a_n) \neq 0$ tal que $S(x, a_1, \dots, a_n) = 0$.

Como $S(x, a_1, \dots, a_n) = T(x) + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = 0$ e T é injetora, existe pelo menos um $a_i \neq 0$.

Então, $y_i \in \text{span}(\text{Im}(T) \cup \{y_i, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n\})$.

O que não pode ocorrer, pois $\text{codim} = n$.

Logo, S é injetiva.

Definindo $\|(x, a_1, \dots, a_n)\| = \|x\| + \sum_{i=1}^n |a_i|$, podemos ver que S é contínua.

Então, S^{-1} é contínua.

Daí, $\text{Im}(T) = S(X \oplus \{0\}) = S(X)$ que é fechado.

Portanto, $\text{Im}(T)$ é fechado.

o Suponha que T não seja injetora.

Seja $K = \ker(T)$ e considere $\frac{X}{K}$.

Mostremos que existe $S: \frac{X}{K} \rightarrow$ linear e contínua tal que $S \circ q = T$.

Veja que se definimos $S(\bar{x}) = T(x)$, temos que $\bar{x} = \bar{y} \leftrightarrow x = y$.

Desse modo, S está bem definida e é linear.

Seja $\gamma \in \frac{X}{K}$. Escolha $x \in \gamma$ tal que $\gamma = \bar{x}$.

Assim, $\|S(\gamma)\| = \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$.

Tomando $\inf_{x \in \gamma}$, temos $\|S(\gamma)\| \leq \|T\| \|\gamma\|$.

Logo, S é contínua e $\|S\| \leq \|T\|$.

Por outro lado, $\|T\| = \|S \circ q\| \leq \|S\| \|q\| \leq \|S\|$, pois $\|\bar{x}\| \leq \|x\| \Rightarrow \|q(x)\| \leq 1$.

Então, $\|T\| = \|S\|$.

Além disso, $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$, pois $\text{Im}(T) = T(X) = S(q(X)) = S(\frac{X}{K}) = \text{Im}(S)$.

Como S é injetora, voltamos ao caso anterior.

Portanto, $\text{Im}(T)$ é fechado.

□

Teorema 19. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e seja $T: X \rightarrow X$ um operador compacto. Então:*

1. $0 \in \sigma(T)$;

2. *Todo valor espectral não nulo é auto-valor ;*
3. *$\sigma(T)$ é enumerável (possivelmente finito);*
4. *O único possível ponto de acumulação de $\sigma(T)$ é $\lambda = 0$;*
5. *para todo $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, $\ker(T - \lambda I)$ tem dimensão finita.*

Demonstração. 1. Mostremos que $T - 0I = T$ não é inversível.

Se T fosse inversível, como $K(X)$ é um ideal, teríamos $K(X) = B(X)$.

Em particular, $I \in K(X)$, o que contraria a hipótese de que $\dim X = \infty$.

2. Mostremos que $I - \frac{T}{\lambda}$ não é injetor.

Como $\frac{T}{\lambda}$ é compacto e I é Fredholm, então $I - \frac{T}{\lambda}$ é Fredholm.

Assim, $\text{ind}(I - \frac{T}{\lambda}) = \text{ind}(I) = 0$.

Então $\dim(\ker(I - \frac{T}{\lambda})) = \text{codim}(\text{Im}(I - \frac{T}{\lambda}))$.

Daí, se supomos $I - \frac{T}{\lambda}$ injetor, então $I - \frac{T}{\lambda}$ é sobrejetor, o que é um absurdo pois $I - \frac{T}{\lambda}$ não é inversível.

5. Seja $K_\lambda = \ker(T - \lambda I)$. Então $T|_{K_\lambda} = \lambda I$.

Seja B_λ a bola unitária fechada de K_λ e seja B bola fechada em X que contém B_λ . Então:

$\lambda B_\lambda = T(B_\lambda) \subseteq T(B)$, que é compacto.

Como B_λ é fechada, B_λ é compacta.

Então $\dim K_\lambda < \infty$.

Afirmção 1: Para todo $r > 0$, temos $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > r\}$ finito.

Suponha, por absurdo, que existe $r > 0$ e infinitos elementos distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ do espectro com $|\lambda_i| \geq r$.

Pelo item 2., tome um autovetor x_i para cada λ_i .

Defina $M_n = \text{span}(\{x_1, \dots, x_n\})$. Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente independente para todo $n \in \mathbb{N}$, $M_{n-1} \subset M_n$ propriamente.

Podemos escolher, por Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in M_n$ com $\|y_n\| = 1$ e tal que $d(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Vamos mostrar que $\|T(y_n) - T(y_m)\| \geq k > 0$, para algum $k \in \mathbb{R}$, pois, nesse caso, $\{T(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, o que é um absurdo, já que T é compacto e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado.

Note que $(T - \lambda_n I)(M_n) \subset M_{n-1}$. Pois

$$(T - \lambda_n I)(x_i) = T(x_i) - \lambda_n x_i = \lambda_i x_i - \lambda_n x_i = (\lambda_i - \lambda_n)x_i, \text{ para todo } i \leq n.$$

E, se $i = n$, $(T - \lambda_n I)(x_n) = 0 \in M_{n-1}$.

Se $i < n$, $(T - \lambda_n I)(x_i) = (\lambda_i - \lambda_n)x_i \in M_{n-1}$.

Então, temos, supondo sem perda de generalidade $n > m$:

$$T(y_n) - T(y_m) = (T - \lambda_n)(y_n) - T(y_m) + \lambda_n y_n = \lambda_n y_n + [(T - \lambda_n)(y_n) - T(y_m)] = \lambda_n y_n - z, \text{ em que } z \in M_{n-1}.$$

Daí

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = \|\lambda_n y_n - z\| = |\lambda_n| \|y_n - \frac{z}{\lambda_n}\| \geq |\lambda_n| d(y_n, M_{n-1}) > |\lambda_n| \frac{1}{2} > \frac{r}{2}.$$

3 e 4. Note que $\sigma(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{K} \setminus B(0, \frac{1}{n})) \cup \{0\}$.

□

Teorema 20. *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ um operador compacto auto-adjunto. Então os autovetores linearmente independentes de T formam uma base de Hilbert para \mathcal{H} e todos os autovalores de T são reais.*

Demonstração. Passo 1 :

Mostremos que $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Seja $x \in \mathcal{H}$. Temos então:

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^*(T(x)), x \rangle = \langle T^2(x), x \rangle \leq \|T^2(x)\| \|x\| \leq \|T^2\| \|x\|^2.$$

$$\text{Então, } \|T(x)\| \leq \|T^2\|^{1/2} \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T^2\|^{1/2} \Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^2\|.$$

$$\text{Por outro lado, } \|T^2\| = \|TT\| \leq \|T\| \|T\| = \|T\|^2.$$

$$\text{Logo, } \|T^2\| = \|T\|^2.$$

Passo 2 :

Mostremos que $r(T) = \|T\|$.

Como $T = T^*$, então $(T^2)^* = (T^*)^2 = T^2$. Logo, T^2 é auto-adjunto.

Então, $\|T^4\| = \|T^2\|^2 = \|T\|^4$.

Indutivamente, é fácil ver que $\|T^{(2^n)}\| = \|T\|^{2^n}$.

Assim, temos então:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T\| = \|T\|.$$

Passo 3 :

Mostremos que T tem ao menos um autovalor.

Suponha $T \neq 0$. Então $r(T) = \|T\| \neq 0$. Logo, $0 \neq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Então existe $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. E, pelo teorema anterior, λ é auto-valor.

Passo 4 :

Mostremos que se $K \subseteq \mathcal{H}$ é um subespaço invariante por T , então K^\perp é invariante por T .

Seja $x \in K^\perp$. Mostremos que $T(x) \in K^\perp$.

Seja $k \in K$. Então:

$$\langle T(x), k \rangle = \langle x, T^*(k) \rangle = \langle x, T(k) \rangle = 0, \text{ pois } T(k) \in K \text{ e } x \in K^\perp.$$

Logo, $T(x) \in K^\perp$ e, portanto, $T(K^\perp) \subseteq K^\perp$.

Passo 5 :

Seja B um conjunto ortonormal maximal formado por autovetores de T . Mostremos que B é base.

Seja $K = \overline{\text{span}(B)}$.

É claro que $T(\text{span}(B)) \subseteq \text{span}(B)$. Daí $T(\overline{\text{span}(B)}) \subseteq \overline{\text{span}(B)}$.

Logo, K é invariante por T e, pelo passo anterior, K^\perp é invariante por T .

Suponha, por absurdo, que $K \neq \mathcal{H}$.

Considere a restrição de T , $T|_{K^\perp} : K^\perp \rightarrow K^\perp$.

$T|_{K^\perp}$ é auto-adjunto e compacto.

Pelo passo 3, existe um autovetor $v \in K^\perp$. Vamos supor $\|v\| = 1$.

Daí, $B \cup \{v\}$ é um conjunto ortonormal de autovetores. O que é um absurdo, pois B é maximal.

Donde, $K = B$ e, portanto, B é uma base Hilbertiana.

Passo 6 :

Mostremos que se λ é autovalor, então $\lambda \in \mathbb{R}$.

Seja λ um autovalor e seja v um autovetor associado a λ , com $\|v\| = 1$.

Temos então:

$$\lambda = \lambda \|v\|^2 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda}.$$

Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Referências

- [1] V. S. SUNDER. Functional Analysis: Spectral Theory.
- [2] E. KREYSZIG. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley. 1989
- [3] J. B. CONWAY. A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag. 1994