UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

A Matemática na composição musical

Juciara Guimarães Carvalho

Florianópolis
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A Matemática na composição musical

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Juciara Guimarães Carvalho

Florianópolis
2013

Juciara Guimarães Carvalho

A matemática na composição musical

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção de grau de licenciada em Matemática

Orientador: **Licio Hernanes Bezerra**

Florianópolis
Fevereiro 2013

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática — Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 02/CCM/2013.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Licio Hernanes Bezerra
Orientador

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Agradecimentos

Agradeço a minha família, aos amigos de graduação, aos amigos músicos, ao meu namorado Edson Júnior, aos professores que contribuiram para a minha formação, especialmente aos professores Nereu Estanislau Burin, Carmem Suzane Comitre Gimenez, José Luiz Rosas Pinho e o meu orientador Licio Hernanes Bezerra. Muito obrigada a todos que colaboraram para eu concluir esta etapa da minha vida.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar teoremas matemáticos que se relacionam com a composição musical, destacando algumas relações entre a Matemática e Música e seus respectivos conteúdos. Este trabalho proporciona a alunos de matemática e de música acesso a informações de relações entre ambas as áreas. Serão abordados conteúdos de teoria musical, noções de Álgebra, assim como um contexto histórico. O incentivo a novos caminhos de pesquisa nessa área interdisciplinar também é objetivo deste trabalho.

O presente trabalho aborda um contraste entre o sistema de composição tonal e o atonal. Desde o século XVIII até o século XIX, o sistema de composição que vigorava era o sistema tonal. Tal sistema é baseado em uma estrutura denominada tonalidade. Por muito tempo essa estrutura suportava as necessidades da composição, mas muitos compositores começaram a questionar o sistema tonal. No século XX, surge o sistema atonal que despreza a hierarquia entre as notas. Esta liberdade para compor levou Schoenberg a criar o dodecafonismo. A partir de então, as doze notas da escala cromática ocidental, sujeitas a uma relação de ordem, formarão o novo sistema de composição, fato este que revolucionou a história da composição musical.

A estrutura desta monografia é composta por três capítulos. No primeiro relataremos o contexto histórico envolvendo os estudos entre matemática e música. Introduziremos alguns conceitos de teoria musical, apresentando uma pequena abordagem sobre o sistema tonal e atonal com suas respectivas propriedades. Deste modo, abordaremos alguns conceitos e informações relevantes para a compreensão dos seguintes capítulos. No capítulo 2 encontram-se o conjunto de defnições e resultados necessários ao entendimento do Teorema Hexacordal, a demostração deste teorema e um exemplo de como pode ser aplicado o teorema no contexto musical. No último capítulo está o Teorema de k-notas antecedido por definições e resultados contendo exemplos relevantes à demonstração do teorema. No final desse capítulo há aplicações no contexto musical.

1 *Matemática e música*

1.1 Contexto histórico

Por volta do século VI a.C., na Grécia Antiga, surge o primeiro registro científico envolvendo matemática e música. Foi elaborado pelos filósofos da escola pitagórica, que relacionaram os intervalos musicais com o conceito matemático de razões. Para Pitágoras e seus seguidores a música e a aritmética eram inseparáveis. Pitágoras inventou um instrumento composto por uma única corda, chamado monocórdio, cujos intervalos musicais eram obtidos através de razões numéricas entre o comprimento da corda vibratória. Ele fez as seguintes constatações: A razão 2:1 produzia uma oitava perfeita, a razão 3:2 uma quinta perfeita e a razão 4:3 produzia uma quarta perfeita. A razão 9:8 produzia o intervalo de um tom, ou seja, seria a diferença entre uma quinta e uma quarta perfeitas. Para mais informações o leitor pode consultar [1], [6].

Vamos destacar alguns estudiosos que também relacionaram a matemática com a música. No século IV a.C. Aristóxeno idealizou um modelo para descrever os intervalos musicais como distâncias no espaço entre as notas. Cláudio Ptolomeu, século II d.C., realizou importantes trabalhos na área de astronomia e teoria musical. Ele acreditava que as leis matemáticas alicerçavam tanto as estruturas dos intervalos musicais quanto as estruturas dos corpos celestes. Estudou também os intervalos musicais enquanto razões numéricas, semelhanças entre o sistema harmônico e o círculo associado ao zodíaco, e ainda, semelhanças entre as modulações tonais e os movimentos dos astros [6].

No século VI d.C., Boécio estabeleceu que a música é a ciência dos números e que estes governam o mundo, harmonizando todas as coisas. Em seus estudos, destacam-se as proporcionalidades aritméticas, geométricas e harmônicas associadas ao som. No século XVI, Zarlino continuou os estudos relacionados aos intervalos musicais, dividindo a oitava em doze partes quase iguais, propondo razões mais simplificadas. Já no século

XVII, outros pesquisadores como Galileu Galilei, Kepler, Descartes, Huygens, entre outros, aprofundaram os estudos da teoria musical [3], [6], [10].

Galileu Galilei estudou a proporção entre as frequências das vibrações, observando as cordas vibrantes e a consonância. Contudo, os estudos relacionados ao som desenvolveram-se no século XVIII por Euler, Bernoulli, Lagrange e D' Alembert. No século seguinte, Fourier dá continuidade aos estudos das vibrações do som [3], [6]. Na segunda metade do século XX, as relações entre matemática e música se intensificaram com os estudos da música atonal e dodecafônica. Milton Babbitt, Allen Forte e David Lewin são alguns dos teóricos que estudaram tópicos musicais em termos matemáticos [2]. Alguns resultados sob a ótica destes influentes teóricos serão explorados e estudados ao longo deste trabalho.

1.1.1 Preliminares da Teoria Musical

A Matemática e a Música possuem uma linguagem universal. Ambas são bem estruturadas e apresentam suas definições, notações e aplicações próprias. Abordaremos a seguir, alguns conceitos musicais, designados pela teoria musical, que serão relevantes para o presente trabalho. Sugerimos que o leitor interessado consulte [9], [11] para uma exposição mais detalhada.

Como muitos leitores já possuem conhecimento, a música é a arte de combinar os sons. O som musical é identificado pela *nota musical*, seja ela representada graficamente ou pela altura do som. Conhecemos as notas por dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, também identificadas pelas letras maiúsculas C, D, E, F, G, A, B, respectivamente. Para o presente trabalho vamos considerar a equivalência das classes de notas, ou seja, quando nos referimos a nota Lá, por exemplo, referimos-nos a todas as notas Lá existentes com diferentes alturas. Sendo assim, um Lá agudo e um Lá grave estão na mesma classe de notas, em outras palavras, são equivalentes.

As notas são representadas em um conjunto de cinco linhas horizontais e quatro espaços, denominado *pentagrama ou pauta musical*, como podemos ver na figura 1. Para identificarmos as notas o pentagrama deve ter alguns símbolos para que o músico faça a leitura completa de todas as informações da partitura. Um destes símbolos é a clave que determinará os nomes das notas. Por exemplo, na figura 2 temos a clave de sol no início, signo de compasso e algumas notas.

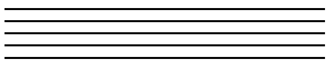

Figura 1: Pentagrama.

Figura 2: Notas no pentagrama.

Chamamos de *melodia* a sucessão de sons de alturas e valores diferentes que obedecem a um sentido lógico musical. A melodia se desenvolve horizontalmente em uma linha melódica de notas determinadas pelo compositor. E verticalmente se desenvolve a harmonia, que contém os acordes. Logo, a música possui a melodia e a harmonia. Observe o trecho inicial do Concerto para Clarinete (Mozart) a seguir:

Figura 3: Esquema de melodia e harmonia.

O acorde é a combinação simultânea de três ou mais sons diferentes. Os acordes são classificados pelos intervalos formados entre as notas do acorde. A ciência que estuda os acordes é a *Harmonia*. Um exemplo de acorde ocorre quando tocamos as notas Dó, Mi, Sol simultaneamente que recebe o nome de acorde de Dó Maior.

Em termos musicais, o *intervalo* é a diferença de altura (grave ou agudo) entre dois sons. Também pode ser considerado como a distância entre duas notas medidas em *semitons*. Um semitom é, pelo sistema musical ocidental, o menor intervalo possível entre duas notas. Define-se também que o intervalo compreendido por dois semitons sucessivos é um *tom*. Destacamos o fato de que é estabelecido que entre as notas Mi e Fá, Si e Dó o intervalo é um semitom. Em [9] e [11], o leitor pode encontrar mais informações sobre a classificação dos intervalos, entre outras coisas.

O sistema temperado, sistema que utilizamos, estabelece que todos os semitons possuem "tamanhos" iguais. O semitom pode ser caracterizado como: *natural* (dado entre as notas mi e fá, si e dó); *diatônico* (formado por notas de nomes diferentes, por exemplo, lá e si bemol); *cromático* (formado por notas de nomes iguais, por exemplo, fá e fá sustenido).

Quando queremos modificar a altura das notas, usamos um sinal denominado *acidente*. Este é sempre colocado antes da nota da qual queremos alterar. São acidentes:

Sustenido denotado por $\sharp$ - eleva a nota um semitom;
Dobrado sustenido denotado por $\times$ - eleva a nota um tom;
Bemol denotado por $\flat$ - abaixa a nota um semitom;
Dobrado bemol denotado por $\flat\flat$ - abaixa a nota um tom,
Bequadro denotado por $\natural$ - anula o efeito dos demais acidentes.

Resumidamente, a *escala musical* é uma série de notas sucessivas separadas por tons ou semitons. A escala é formada por oito notas, visto que a primeira nota é igual a última nota. Consideramos que o leitor deva ter algum conhecimento sobre *escala musical*. Todavia, destacamos aqui alguns tipos de escala e suas descrições.

A *escala diatônica* é uma sequência de notas contendo, geralmente, o intervalo de um tom (T) ou de um semitom (ST). Vejamos a seguir, um exemplo de escala diatônica:

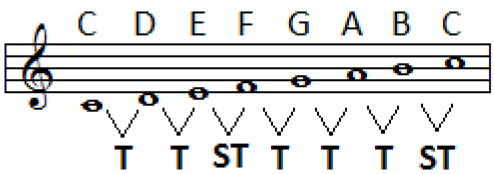

Figura 4: Escala diatônica - Dó Maior.

A *escala cromática* é a sequência de doze semitons consecutivos. No piano, obtem-se a escala cromática tocando-se sucessivamente as teclas brancas e pretas. Vejamos a figura abaixo:

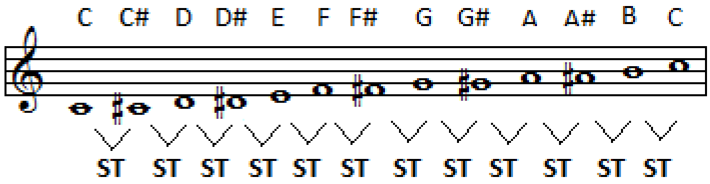

Figura 5: Exemplo de uma escala cromática.

Observe que a escala cromática possui acidentes para que os intervalos sejam de um semitom.

Já as *escalas enarmônicas* são as que representam os mesmos sons, mas com nomes diferentes. Por exemplo, as escalas Si Maior e Dó ♭ Maior. E, as *escalas homônimas* são escalas que têm o mesmo nome, ou seja, são escalas maiores e menores que possuem a mesma tônica. Por exemplo, as escalas Dó Maior e Dó Menor. Existem também as escalas chamadas exóticas, que são assim denominadas por apresentarem características diferentes das escalas usadas pela música ocidental. São tipos de *escalas exóticas*: *escala cigana* (é uma escala menor harmônica com o IV grau elevado de um semitom. Liszt a empregou na Rapsódia Húngara n.3); *escala pentatônica* (é uma escala de cinco notas, facilmente encontrada em diversos folclores como o chinês, japonês, escocês, inca, brasileiro, entre outros); *escala hexafônica* (é uma escala de seis notas, encontrada no folclore americano de origem africana); *escala de tons inteiros* (é uma escala hexafônica em que as notas se sucedem por tons, que foi introduzida na música erudita por Debussy). Salientamos que para ter um contato mais profundo com escalas é preciso conhecer sua estrutura [9], [11].

Mesmo que o leitor não esteja muito familiarizado com a Teoria Musical, esperamos que essas definições e conceitos o auxiliem na compreensão do contexto deste trabalho. A seguir, faremos um breve relato sobre a música tonal, atonal e dodecafônica, que são as áreas de concentração do presente trabalho. Posteriormente, faremos os estudos em termos matemáticos.

1.1.2 Sistema tonal

1.1.2.1 O que é tonalidade?

Em 1816, o musicólogo belga François Joseph Fétis, [14] , elabora pela primeira vez o conceito de tonalidade. Fétis define tonalidade como residindo "na ordem pela qual as notas da escala são dispostas, nas suas distâncias respectivas e nas suas relações harmônicas. A composição dos acordes, as circunstâncias para modificá-los e as leis de sucessão dos acordes são consequências indispensáveis dessa tonalidade". E acresenta: "o que chamo de tonalidade é a sucessão de fatos melódicos e harmônicos que advêm da disposição das distâncias dos sons em nossas escalas maior e menor". (Philosophie de la musique. New York: Pendragon Press, Stuyversant, 1994, p.155-156).

Para Lacerda [9], tonalidade é o conjunto de funções dos graus da escala e dos acordes sobre eles formados.

Para Med [11], tonalidade é a interdependência em que se encontram os diferentes graus da escala, relativamente a uma nota ou acorde (tônica), que é o centro de todos os seus movimentos.

Os autores acima acrescentam que os graus de uma escala são a denominação da sucessão das notas que compõem a escala diatônica. Cada um desses graus possui uma função específica na formação e conexão dos acordes. Em relação à harmonia, os graus recebem os respectivos nomes:

I - Tônica; II - Sobre-tônica; III - Mediante; IV - Sub-dominate; V - Dominante;
VI - Sobre-dominante; VII - Sensível

Notemos que a primeira nota da escala é considerada o primeiro grau, a segunda nota é o segundo grau, e assim sucessivamente. Ressaltando o fato de que, como a escala é composta por oito notas, o oitavo grau correponderá ao primeiro grau uma oitava acima. Observe a figura 6:

Figura 6: Exemplo considerando os graus de uma escala.

Considera-se o primeiro grau (tônica) o mais importante, seguido do quarto e quinto graus. A tônica na composição musical estabelece uma hierarquia entre os graus da escala, determinando o tom central e, em torno dela, gravitam a harmonia e a melodia. Com isso, estabeleceu-se um sistema de composição, denominado sistema tonal.

Cada tonalidade está definida por uma escala, apresentando uma certa distribuição de tons e semitons. Dizemos então que a tonalidade pode ser de modo maior ou menor. Será maior quando a distância do III grau para o IV grau e do VII para o VIII grau é de um semitom, como no exemplo abaixo:

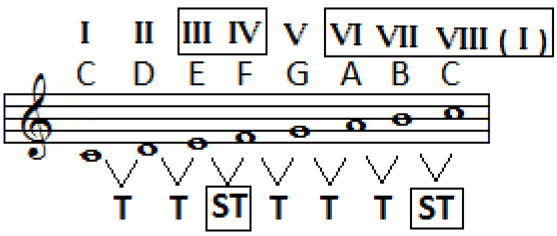

Figura 7: Escala Dó Maior.

Será menor se a distância do II grau para o III grau e do V para o VI graus é de um semitom, conforme o exemplo a seguir:

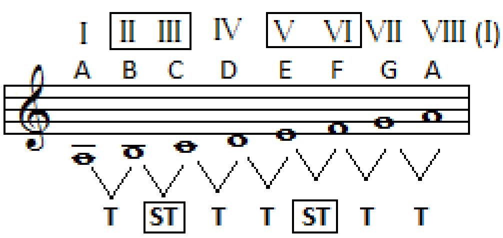

Figura 8: Escala Lá Menor.

A tonalidade designa a escala utilizada na obra musical, mas não significa que a obra fique condicionada apenas a essa tonalidade. O recurso utilizado para a mudança de tonalidade na obra é chamado de modulação. Portanto, uma sinfonia em ré maior indica que a tonalidade principal da sinfonia é ré maior, mas não indica que a peça musical irá utilizar todas as notas da escala de ré maior. Observe que a escala cromática não define nenhuma tonalidade [9], [11].

O sistema tonal tem caráter tipicamente ocidental, tem suas origens no século VIII, foi predominantemente utilizado até a segunda metade do século XIX. A música tonal perpetuou nos seguintes períodos musicais: Barroco, Classicismo e Romantismo. São exemplos de músicas tonais as obras de Bach, Mozart, Beethoven, Schumann, Wagner. Contudo, foi durante o século XX que muitos compositores começaram a discutir sobre o sistema tonal, visto que tal sistema já não satisfazia a composição musical. As modulações eram tão constantes nas peças musicais, que dificultavam ao ouvinte identificar a tonalidade principal da obra. *Tristan und Isold* [Tristão e Isolda, 1859] de Wagner e *Verklärte Nacht* [Noite transfigurada, 1899] de Schoenberg exemplificam essa fase de transição [10].

Com isso, o sistema tonal sofreu rejeição e alguns compositores iniciaram a busca por novos métodos de composição. Destacamos aqui a Segunda Escola Vienense, constituída por Arnold Schoenberg (1874-1951) e seus discípulos Anton Webern (1883-1945) e Alban Berg (1885-1935), pela composição de obras musicais ditas "atonais livres". Entre 1921 e 1923, Schoenberg organiza a atonalidade e define o dodecafonismo serial [6], [10]. O leitor deve estar se perguntando: afinal o que é música atonal e música dodecafônica?

1.1.3 Sistema atonal e dodecafonismo

Partindo do enfraquecimento e da insuficiência dos elementos afirmadores das funções tonais, a mudança para o novo sistema de composição, denominado atonal, se deu de forma gradativa. Em sentido amplo, é atonal qualquer música que não obedeça às leis do sistema tonal, ou seja, qualquer música que não apresente uma hierarquia entre as notas. Schoenberg denominou esse período de emancipação de dissonância, pois uma dissonância já não se resolveria numa consonância (acorde perfeito), mas sim na plenitude cromática. Traduz também a liberdade de utilizar toda as doze notas da escala cromática igualmente na composição, sem exigir resolução [10],[11],[13].

Schoenberg compôs algumas peças baseadas no novo sistema atonal, porém considerou tal sistema demasiadamente sem regras. Foi então que ele organizou igualmente os doze sons da escala cromática, sujeitos a uma relação de ordem e não hierárquico, criando o dodecafonismo serial. Sendo assim, o novo método de composição relaciona os doze sons apenas um ao outro. As notas são organizadas em grupos de até doze notas denominados séries e podem exercer várias funções na música. As séries são usadas em quatro diferentes disposições: original, retrógrada, invertida e retrógrada-invertida.

Vamos ilustrar a série e suas diferentes disposições com base na melodia do primeiro violino na obra O quarteto de Cordas N° 4 de Schoenberg [16].

i) Série original: $D - C\sharp - A - B\flat - F - E\flat - E - C - A\flat - G - F\sharp - B$;

ii) Série retrógrada: $B - F\sharp - G - A\flat - C - E - E\flat - F - B\flat - A - C\sharp - D$;

iii) Série invertida: $G - A\flat - C - B - E - F\sharp - F - A - C\sharp - D - E\flat - B\flat$;

iv) Série retrógrada-invertida: $B\flat - E\flat - D - C\sharp - A - F - F\sharp - E - B - C - A\flat - G$.

Ao escrever uma série o compositor escolhe séries menores para investigar seu conteúdo e depois expande para a série com todas as doze notas. Este fato evidencia os estudos com a questão intervalar entre as notas, uma vez que o intervalo é a menor estrutura que facilita a análise. Ressaltamos ainda que toda composição dodecafônica, seja melódica (estruturas horizontais) ou harmônica (estruturas verticais), deve ser originada com base em uma série. A série permite ao compositor uma diversidade de opções no momento da composição, pois as disposições da série, que estão intimamente relacionadas umas com as outras, fornecem a mesma sonoridade.

Cabe destacar alguns expoentes da composição musical, da primeira metade do século XX: Stravinsky, Schoenberg, Mahler, Berg, Webern, Bartók , Debussy. Na segunda metade destacaram-se Berio, Stockhausen, Boulez, Cage, Xenakis, Messiaen, Ligeti, Babbitt. A essa nova geração concebeu-se o período do serialismo integral [2], [6],[10].

2 Estudo do Teorema Hexacordal

2.1 A origem do Teorema Hexacordal

O Teorema Hexacordal foi descoberto empiricamente pelos compositores que trabalhavam com o método dodecafônico desenvolvido por Schoenberg. O teorema foi provado por Milton Babbitt e David Lewin. Posteriormente, David Lewin e Ralph Fox demonstraram o teorema de uma maneira diferenciada, utilizando a teoria de grupos. Resumidamente, o teorema hexacordal aborda as estruturas dos intervalos dos hexacordes a partir de um conjunto de doze notas [2].

Esses compositores utilizam o conjunto das doze notas da escala cromática, dispostas em qualquer ordem, como base para suas composições melódicas. A partir desse conjunto, é possível formar subconjuntos de notas e somente alguns destes subconjuntos serão musicalmente significantes em um dado contexto musical específico. A esses subconjuntos destacaremos o hexacorde que é um acorde de seis notas.

2.2 Preliminares

Para o desenvolvimento deste trabalho foi necessário a compreensão de alguns conceitos de Álgebra. Em vista disso, e também para auxiliar o leitor a compreender o tema abordado, esta seção é dedicada aos conceitos básicos e essenciais para o decorrente estudo. As definições e resultados foram retirados principalmente de [5], [8].

2.2.1 Definições e resultados

Teorema 1 *(Divisão Euclidiana) Dados inteiros d e D com $d \neq 0$, existem inteiros q e r tais que $D = d.q + r$ e $0 \leq r < |d|$. Além disso, q e r são unicamente determinados pelas condições acima.*

A prova do teorema pode ser encontrada em [8] p.59-60.

Definição 1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*$*. Dizemos que* a *é congruo a* b *módulo* m *se* $m|(a-b)$*, isto é, se* $a - b = m.q$ *para um conveniente inteiro* q*. Para indicar que* a *é côngruo a* b*, módulo* m*, usa-se a notação* $a \equiv b$ *(mod m).*

Definição 2 *Uma relação R sobre um conjunto E não-vazio é chamado relação de equivalência sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Em outras palavras, R deve satisfazer respectivamente, as seguintes propriedades:*
i) Se $x \in E$*, então* xRx*;*
ii) Se $x, y \in E$ *e* xRy*, então* yRx*;*
iii) Se $x, y, z \in E$*,* xRy *e* yRz*, então* xRz*.*

Exemplo: A relação de congruência módulo m ($m \in \mathbb{N}^*, m > 1$) sobre $\mathbb{Z}$, como definido anteriormente, é uma relação de equivalência, pois:
$\forall x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \equiv x$ (mod m);
$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y$ (mod m) $\rightarrow y \equiv x$ (mod m);
$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, x \equiv y$ (mod m), $y \equiv z$ (mod m) $\rightarrow x \equiv z$ (mod m).

Definição 3 *Dada a relação de equivalência* $\sim$ *em um conjunto X, definimos a classe de equivalência de um elemento* $a \in X$ *como sendo o conjunto* $[a] = \{x \in X; x \sim a\}$ *e o elemento* a *será chamado de representante da classe* $[a]$*.*

Haja vista a definição de classe de equivalência e sabendo que a congruência modular define uma relação de equivalência, isto nos motiva à definição abaixo:

Definição 4 *Seja* $m \in \mathbb{Z}$*, com* $m > 1$*. A classe residual módulo* m *de um elemento* $a \in \mathbb{Z}$ *é a classe de equivalência segundo a relação de equivalência dada pela congruência módulo* m*:*

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv a \text{ (mod m)}\}$$

Proposição 1 *Para cada* $a \in \mathbb{Z}$ *existe um e somente um* $r \in \mathbb{Z}$*, com* $0 \leq r < m$*, tal que* $[a] = [r]$*.*

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{Z}$. Pela divisão euclidiana, existem dois números inteiros q e r, com $0 \leq r < m$, tais que $a = m.q + r$. Portanto, é único o inteiro r tal que $0 \leq r < m$ e $a \equiv r$ (mod m). Consequentemente, é único o inteiro r tal que $0 \leq r < m$ e $[a] = [r]$.

■

Corolário 1 *Existem m classes residuais módulo m disintas, a saber,* $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

Demonstração: Pela proposição acima, $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$; $[a] = [r]$, isto é, cada r está definindo todas as classes residuais módulo m em $\mathbb{Z}$ e estas são representadas por $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

■

O conjunto de todas as classes residuais módulo m é representado por $\mathbb{Z}_m$. Assim, pelo corolário anterior, esse conjunto possui m elementos que podem ser representados por $[0], [1], \ldots, [m-1]$. Uma vantagem das classes residuais é que transformam a congruência $a \equiv b$ (mod m) na igualdade $[a] = [b]$.

Em $\mathbb{Z}_m$ definimos a operação de adição da seguinte maneira: $[a] + [b] = [a + b]$. Vejamos abaixo as propriedades de adição de $\mathbb{Z}_m$.

Considere $[a], [b]$ e $[c] \in \mathbb{Z}, temos:$
A_1) Associatividade $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$

Demonstração: $([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c] = [(a + b) + c] = [a + (b + c)] = [a] + [b + c] =$ $= [a] + ([b] + [c])$. As igualdades acima decorrem diretamente da definição de soma de classes residuais módulo m e da associação na adição dos inteiros.

A_2) Comutatividade $[a] + [b] = [b] + [a]$

Demonstração: $[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$ As igualdades acima decorrem diretamente da definição de soma de classes residuais módulo m e da comutação na adição dos inteiros.

A_3) Existência do elemento neutro $[a] + [0] = [a]$

Demonstração: $[a] = [a + 0] = [a] + [0]$ As igualdades acima decorrem diretamente da definição de soma de classes residuais (mod m) e da existência do elemento neutro na adição dos inteiros.

A_4) Existência do simétrico $[a] + [-a] = [0]$

Demonstração: $[0] = [a + (-a)] = [a] + [-a]$ As igualdades acima decorrem diretamente da definição de soma de classes residuais (mod m) e da existência do elemento simétrico na adição dos inteiros.

Definição 5 *Um sistema constituído de um conjunto não-vazio G e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$ sobre G é chamado grupo se essa operação satisfaz aos seguintes axiomas:*

i) Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$;

ii) Existência do elemento neutro: $\exists e \in G \text{ tal que } a * e = e * a = a, \forall a \in G$;

iii) Existência do simétrico: $\forall a \in G, \exists a_0 \in G \text{ tal que } a * a_0 = a_0 * a = e$;

iv) Se, além disso, ainda satisfazer o axioma da comutatividade: $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, *o grupo recebe o nome de grupo comutativo ou grupo abeliano.*

Exemplo: Já que $\mathbb{Z}_m$ goza das propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4, então, pela definição de grupo, o sistema $(\mathbb{Z}_m, +)$ é grupo abeliano.

Definição 6 *Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A e indica-se por $P(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.*

Definição 7 *Dado um conjunto A não vazio, chama-se partição P de A a um subconjunto de P(A) (conjunto das partes de A) tal que:*

i) Se $C \in P$, então $C \neq \emptyset$;
ii) Se $C_1 \in P$, $C_2 \in P$, $C_1 \neq C_2$, então $C_1 \bigcap C_2 = \emptyset$;
iii) $\bigcup_{C \in P} C = A$, isto é, a reunião de todos os elementos de P é A.

Definição 8 *Dados A e B, se $B \subseteq A$, então $A - B$ chama-se conjunto complementar de B em A ou complemento de B em A. Indicamos por $C_A B$. Neste caso, diremos que B e $A - B$ são ditos complementares.*

Definição 9 *Um conjunto A é finito se ele admite uma correspondência um a um com um conjunto da forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ para algum n natural. A cardinalidade do conjunto finito A é simplesmente o seu número de elementos. Denotaremos tal fato por $\#(A)$.*

Definição 10 *Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.*
Notemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$ pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto não depende da ordem dos elementos. A fórmula do número de combinações é dada por: $\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$, $\forall m, r \in \mathbb{N}$, com $r \leq m$ [7].

Definição 11 *Um conjunto A é um acorde se:*
i) $A \neq \emptyset$;
ii) $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$;
iii) $\#(A) = m$ tal que $m \in \{2, ..., 12\}$. Quando $m = 6$, o acorde será chamado de hexacorde (objeto central deste capítulo).

Proposição 2 *Dada uma partição de $\mathbb{Z}_{12}$ em dois hexacordes A e B, temos que $C_{\mathbb{Z}_{12}} B = A$. Assim, pela definição 8, A e B são complementares.*

De fato. Sabemos que $P(\mathbb{Z}_{12}) = \{A, B\}$, ou seja, pela definição de partição temos:
i) $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ e $B \subseteq \mathbb{Z}_{12}$, com $A, B \neq \emptyset$;
ii) $A \cap B = \emptyset$;
iii) $A \cup B = \mathbb{Z}_{12}$.

Afirmação: $C_{\mathbb{Z}_{12}} B = \mathbb{Z}_{12} - B = (A \cup \mathbb{Z}_{12}) - B = A$.

(i) $(A \cup B) - B \subseteq A$*;*
Se $x \in (A \cup B) - B$*, então* $x \in A$ *ou* $x \in B$*, mas* $x \notin B$*. Logo,* $x \in A$*.*

(ii)$A \subseteq (A \cup B) - B$*;*
Se $x \in A$*, então* $x \in A \cup B$*. Como* $A \cap B = \emptyset$*,* $x \notin B$*. Logo,* $x \in (A \cup B) - B$

■

Definição 12 *Seja* A *um hexacorde. Dados* a_i *,* $a_j \in A$ *com* $i \neq j$*, e* $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$*, o intervalo do par* (a_i, a_j)*, denotado por* $|(a_i, a_j)|$*, é definido da seguinte maneira:*

$$|(a_i, a_j)| = min\{|a_i - a_j|, 12 - |a_i - a_j|\}$$

Notemos que o intervalo do par (a_i, a_j) *é o mesmo que o intervalo do par* (a_j, a_i)*.*

Definição 13 *Seja* S *um conjunto não-vazio. O multiconjunto* M *associado ao conjunto* S *é o conjunto de pares ordenados:*
$M = \{(s_i, n_i) | s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}_+, s_i \neq s_j$ *para* $i \neq j\}; \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$*. O número* n_i *refere-se à multiplicidade dos elementos* s_i *em* M *[12].*

Exemplo 1: $M = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$ é o multiconjunto associado ao conjunto $S = \{a, b, c\}$. O elemento a tem multiplicidade 2.
Outra maneira de representar o multiconjunto de acordo com suas multiplicidades é dada por: $\{a, a, b, b, b, c\}$, usaremos esta notação no decorrer do trabalho.

Exemplo 2: Considere os multiconjuntos $M_1 = \{a, a, b, b, b, c\}$ e $M_2 = \{a, b, c, c\}$. Observe que $M_1 \neq M_2$, pois a multiplicidade de a em M_1 é 2 e em M_2 é 1, embora possuam os mesmos elementos.

Definição 14 *O multiconjunto de intervalos de um hexacorde* A *é construído da seguinte maneira:*
(i) Combinamos todos os 6 elementos de A *tomando-os 2 a 2, gerando uma coleção de pares;*
(ii) De cada par é extraído o seu intervalo (conforme definição 12);
(iii) Os intervalos calculados são dispostos em um multiconjunto, e este é denominado multiconjunto de intervalos do hexacorde A*. Denotaremos por* $M(A)$*.*

Definição 15 *Uma transposição sobre um acorde* $\{X_1, ..., X_m\}$ *em que* $m \in \{2, ...12\}$ *é a aplicação:*

$$T_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$$

$$x \mapsto x + n$$

e $T_n(\{X_1, \ldots, X_m\}) := \{T_n(X_1), \ldots, T_n(X_m)\}$ *tal que* $n \in \mathbb{N}$ *é o número da transposição, isto é, indica de quantos semitons cada nota será acrescida.*

Definição 16 *Uma inversão sobre um acorde* $\{X_1, ..., X_m\}$ *em que* $m \in \{2, ...12\}$ *é a aplicação:*

$$I : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$$

$$x \mapsto 12 - x$$

e $I(\{X_1, \ldots, X_m\}) := \{I(X_1), \ldots, I(X_m)\}$

Proposição 3 *O multiconjunto de intervalos de um hexacorde é invariante sobre a aplicação de* T_n *e* I.

Demonstração: Sejam $a, b \in A$ onde A é um hexacorde qualquer. Assim, $T(a)$ e $T(b) \in T(A)$. Vamos calcular o intervalo do novo par genérico obtido:

$$|T_n(a) - T_n(b)| = |a + n - (b + n)| = |a - b|$$

Isto é,

$$|(T_n(a), T_n(b))| = min\{|T_n(a) - T_n(b)|, 12 - |T_n(a) - T_n(b)|\} =$$

$$= min\{|a - b|, 12 - |a - b|\} = |(a, b)|.$$

Note agora que $I(a)$ e $I(b) \in I(A)$. O intervalo do novo par é obtido:

$$|I(a) - I(b)| = |12 - a - (12 - b)| = | - a + b| = |a - b|$$

Isto é,

$$|(I(a), I(b))| = min\{|I(a) - I(b)|, 12 - |I(a) - I(b)|\} =$$

$$= min\{|a - b|, 12 - |a - b|\} = |(a, b)|.$$

Como cada par $a, b \in A$ foi tomado genericamente, concluimos que as operações T_n e I preservam o multiconjunto de intervalos, isto é, $T_n(A)$, $I(A)$ e A possuem o mesmo multiconjunto de intervalos.

$\blacksquare$

Lema 1 *Considere uma partição de $\mathbb{Z}_{12}$ em dois hexacordes com multiconjuntos de intervalos idênticos A e B. Se comutar um par de elementos adjacentes de A e B, então os multiconjuntos de intervalos permanecem idênticos.*

Demonstração: Considere a seguinte partição de $\mathbb{Z}_{12}$ em dois hexacordes A e B. Pela proposição 2 A e B são complementares. Vejamos os hexacordes representados pelo “relógio” abaixo:

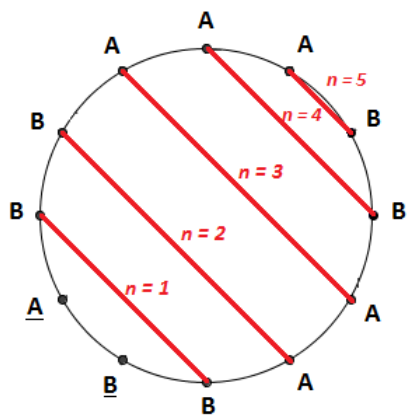

Figura 9: Relógio 1.

Note que um par de elementos adjacentes quaisquer foi destacado, restando outros cinco pares identificados pelas retas traçadas. Sendo n um inteiro, com n de 1 a 5, que representa as distâncias dos pares restantes no relógio ao par destacado, temos, de acordo com a figura anterior o esquema dado pela figura 10.

Temos quatro possibilidades de combinação para configurar os intervalos. São elas: A seguido de A, B seguido de B, A seguido de B e B seguido de A. Note que a configuração de $n = 4$ é a mesma de $n = 5$.

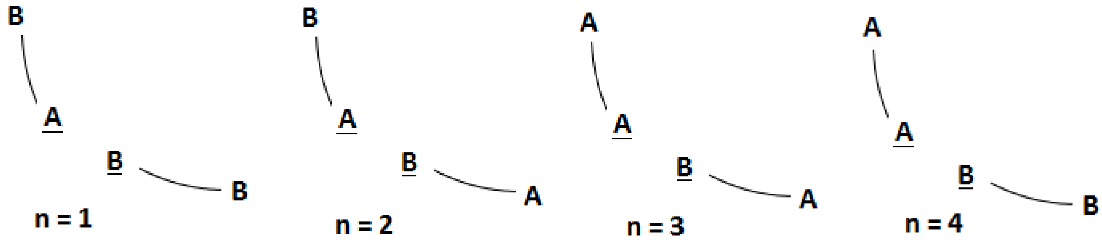

Figura 10: Esquema 1.

Visualizando disposições particulares no relógio temos a motivação para descrever esquemas de hexacordes quaisquer. No próximo esquema, ilustraremos as 4 possibilidades de vizinhança com distância n. Além disso, o par adjacente será permutado.

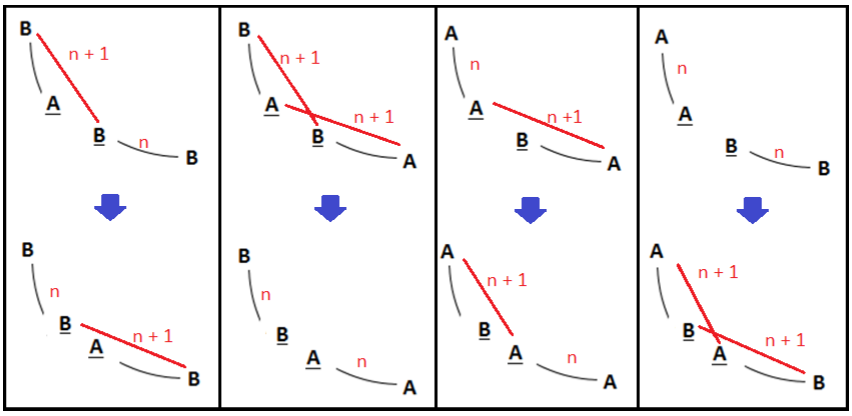

Figura 11: Esquema 3.

Por hipótese M(A) = M(B) e a única alteração nos hexacordes A e B deve-se à permutação. Assim, conforme o esquema 3, conclui-se que a permutação manteve a igualdade do conteúdo intervalar entre os hexacordes complementares.

■

2.3 O teorema Hexacordal

Antes de enunciar o Teorema Hexacordal, faremos uma breve explanação sobre o teorema.

Neste capítulo vamos considerar as doze notas musicais representadas por $\mathbb{Z}_{12}$.

Considerando $\mathbb{Z}_{12}$ vamos particionar esse conjunto em dois subconjuntos A e B, hexacordes complementares. São exemplos de possíveis hexacordes formados a partir de $\mathbb{Z}_{12}$:

$$A = \{0, 1, 4, 5, 8, 11\} \text{ e } B = \{2, 3, 6, 7, 9, 10\};$$

$$A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B' = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\};$$

$$A'' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ e } B'' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\};$$

Pergunta: Quantos hexacordes podemos formar a partir de $\mathbb{Z}_{12}$? Para quantificar os hexacordes, basta que façamos:

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6!}{6.5.4.3.2.1.6!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6}{6.5.4.3.2.1} = \frac{665280}{720} = 924$$

Uma vez que, como os hexarcordes são conjuntos, a ordem dos elementos dispostos no hexacorde não importa. Logo, temos 924 possibilidades de formar hexacordes. Na música, pode haver hexacordes que não são musicalmente utilizados.

Com um hexacorde podemos formar pares dos seus elementos e avaliar o intervalo entre eles. Temos que a quantidade dos pares possíveis de serem formados a partir de um hexacorde é dada por:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{2.1.4!} = \frac{6.5}{2.1} = \frac{30}{2} = 15$$

Ou seja, formamos 15 pares de elementos de um dado hexacorde.

Consideremos agora o hexacorde $A = \{0, 1, 4, 5, 8, 11\}$, os pares possíveis são:

$$(0, 1), (0, 4), (0, 5), (0, 8), (0, 11),$$

$$(1, 4), (1, 5), (1, 8), (1, 11),$$

$$(4, 5), (4, 8), (4, 11),$$

$$(5, 8), (5, 11),$$

$$(8, 11).$$

As doze notas estão dispostas no "relógio", abaixo, pela posição dos números, as letras A e B indicam quais notas pertencem ao hexacorde A e ao hexacorde B. Esses elementos podem estar dispostos em qualquer ordem desde que representem os hexarcordes gerados a partir de $\mathbb{Z}_{12}$. Observemos a figura 12:

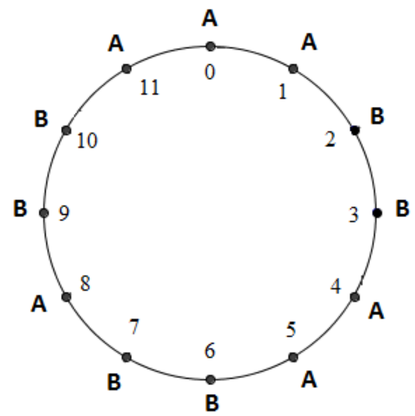

Figura 12: Relógio - Hexacordes

Neste exemplo, os hexacordes representados são $A = \{0, 1, 4, 5, 8, 11\}$ e $B = \{2, 3, 6, 7, 9, 10\}$. Como vimos anteriormente, podemos formar pares dos elementos de um hexacorde. Considerando o hexacorde A, vamos descrever os intervalos dos seus pares de elementos, contando a distância entre os elementos no sentido horário e anti-horário do "relógio", através da seguinte tabela:

Par	Intervalo no sentido horário	Intervalo no sentido anti-horário
(0,1)	1	11
(0,4)	4	8
(0,5)	5	7
(0,8)	8	4
(0, 11)	11	1
(1,4)	3	9
(1,5)	4	8
(1,8)	7	5
(1,11)	10	2
(4,5)	1	11
(4,8)	4	8
(4,11)	7	5
(5,8)	3	9
(5,11)	6	6
(8,11)	3	9

Tabela 1: Pares e intervalos do hexacorde A

Conforme a tabela 1, vemos que o intervalo (distância) entre as notas pertence ao conjunto $\{1, \ldots, 11\}$. Vamos analisar o intervalo do par $(0, 1)$. No sentido horário o intervalo do par é 1 e no sentido anti-horário o intervalo do par é 11, isto ocorre porque 1 e 11 são equivalentes módulo 12. De modo geral, diremos que o intervalo da nota x para a nota y é $y - x$ mod(12). Assim, temos a relação $n \sim 12 - n$ e portanto, $1 \sim 11$, $2 \sim 10$, $3 \sim 9$, $4 \sim 8$, $5 \sim 7$, $6 \sim 6$. Em outras palavras, vamos considerar a menor distância independente do sentido ser horário ou anti-horário. Nestas condições,o multiconjunto de intervalos de A é $\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$.

De maneira análoga, tomamos o hexacorde $B = \{2, 3, 6, 7, 9, 10\}$ e costruímos a tabela dos pares de B e seus respectivos intervalos:

Par	Intervalo no sentido horário	Intervalo no sentido anti-horário
(2,3)	1	11
(2,6)	4	8
(2,7)	5	7
(2,9)	7	5
(2,10)	8	4
(3,6)	4	8
(3,7)	4	8
(3,9)	6	6
(3,10)	7	5
(6,7)	1	11
(6,9)	3	9
(6,10)	4	8
(7,9)	2	10
(7,10)	3	7
(9,10)	1	11

Tabela 2: Pares e intervalos do hexacorde B

De acordo com a tabela 2, temos que o multiconjunto de intervalos do hexacorde B é $\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6\}$. E como podemos ver, os multiconjuntos de intervalos de A e de B são iguais. Este fato não é mera coincidência, este resultado é consequência direta do Teorema Hexacordal.

Teorema 2 *Tome os números de 0 a 11, particionados em dois conjuntos quaisquer, cada um com seis elementos. Então, A e B possuem o mesmo multiconjunto de intervalos.*

Demonstração: Dado $\mathbb{Z}_{12}$, consideremos A e B como enunciado no teorema. Por de-

finição, A e B são hexacordes, pelo corolário 2, são complementares.
Agora, considere os seguintes hexacordes complementares de $\mathbb{Z}_{12}: A' = \{0, 1, 4, 5, 8, 11\}$ e $B' = \{2, 3, 6, 7, 9, 10\}$ ilustrados anteriormente. Vimos que $M(A') = M(B')$ e, pelo lema anterior, podemos trocar pares adjacentes (conforme ilustrado no relógio esquemático do lema) obtendo novos conjuntos A'' e B'' que satisfazem $M(A'') = M(B'')$. Façamos um número suficiente de trocas com pares adjacentes até chegarmos nos hexacordes complementares A e B. Então pelo lema, temos:

$$M(A') = M(B') \Rightarrow M(A'') = M(B'') \Rightarrow ... \Rightarrow M(A) = M(B).$$

■

2.4 Exemplificando os resultados

Vamos representar as notas pelas seguintes classes de equivalências:

$$C := [0]$$
$$C\sharp := [1]$$
$$D := [2]$$
$$D\sharp := [3]$$
$$E := [4]$$
$$F := [5]$$
$$F\sharp := [6]$$
$$G := [7]$$
$$G\sharp := [8]$$
$$A := [9]$$
$$A\sharp := [10]$$
$$B := [11]$$

A peça Opus 19, nº 6 de Schoenberg inicia com o hexacorde $\{[0], [5], [6], [7], [10], [11]\}$. Mas poderíamos representar sem usar os colchetes, uma vez que [0] representa todas as notas C. Suponha que queiramos iniciar a peça com outro hexacorde a fim de que tenhamos o mesmo resultado sonoro. Quais são os hexacordes que satisfazem tal condição? (Sabendo que hexacordes com o mesmo multiconjunto de intervalos apresentam sonoridades semelhantes)

Pelos resultados obtidos anteriormente, sabemos que hexacordes complementares possuem o mesmo multiconjunto de intervalos e, ainda, a transposição e a inversão preservam o multiconjunto de intervalos. Então, basta recorrer a estes resultados para gerarmos novos hexacordes que terão a mesma sonoridade. Com estas três "operações" podemos fazer composição delas, garantindo assim uma maior diversidade de hexacordes com a mesma sonoridade.

Segue que, dado o hexacorde $\{[0],[5],[6],[7],[10],[11]\}$ seu complementar é dado por: $\{[1],[2],[3],[4],[8],[9]\}$.
Agora, vamos utilizar a transposição T_n em que $n \in \mathbb{N}$. Escolha $n = 2$, então temos que o novo hexacorde será: $\{[2],[7],[8],[9],[0],[1]\}$.

Para a inversão teremos o hexacorde: $\{[0],[7],[6],[5],[2],[1]\}$.

Portanto, temos que os hexarcordes

$$\{[0],[5],[6],[7],[10],[11]\}$$

$$\{[1],[2],[3],[4],[8],[9]\}$$

$$\{[2],[7],[8],[9],[0],[1]\}$$

$$\{[0],[7],[6],[5],[2],[1]\}$$

possuem sonoridades semelhantes. O resultado do Teorema Hexacordal evidencia que a música dodecafônica possui muitas possibilidades para ser composta, sendo que não apresentamos os outros aspectos que englobam a composição musical, segundo o dodecafonismo serial.

3 Estudo do Teorema de k-notas

3.1 Círculo das quintas

De modo geral, os músicos e compositores utilizam o círculo das quintas para compreender e descrever as relações musicais entre alguns intervalos, sendo útil para compor e harmonizar melodias, construir acordes, fazer modulações e analisar a estrutura da música. As relações obtidas entre os intervalos e demais estruturas têm despertado o interesse de pesquisadores para uma possível tradução matemática.

Primeiramente, vamos relembrar que as notas musicais Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Fá e Sol são representadas pelas letras maiúsculas A, B, C, D, E, F, G, respectivamente. Vamos considerar a equivalência das classes de notas, ou seja, quando nos referimos a nota Lá, por exemplo, nos referimos a todas as notas Lá existentes com diferentes alturas. Sendo assim um Lá agudo e um Lá grave estão na mesma classe de notas, em outras palavras são equivalentes. Se a nota possuir uma alteração, sustenido ($\sharp$), o símbolo será colocado ao lado da nota, por exemplo, A$\sharp$. As notas A, B, C, D, E, F, G formam as escalas diatônicas e as notas A, $A\sharp$, B, C, $C\sharp$, D, $D\sharp$, E, F, $F\sharp$, G, $G\sharp$ formam as escalas cromáticas. Para mais informações o leitor pode consultar [9], [10], [11].

Em teoria musical, o círculo das quintas é um espaço geométrico circular que descreve as relações entre as doze notas da escala cromática, conforme a figura 13.

Construímos o círculo das quintas começando de uma nota qualquer da escala cromática. Dada a nota inicial, no sentido horário, a nota subsequente no círculo das quintas distará 7 semitons (distância cromática). Repete-se esta razão para cada nota consecutiva até que se preencham todas as notas da escala cromática e obtenhamos novamente a nota inicial, completando o círculo [15].

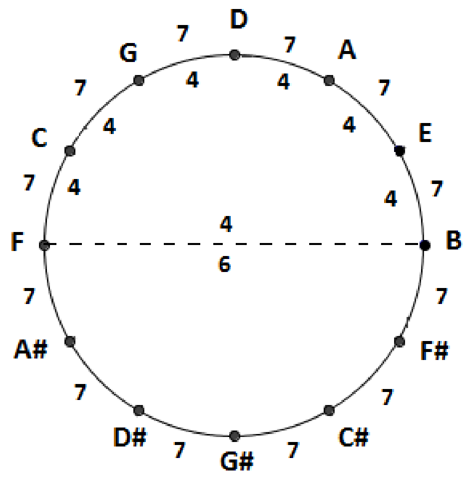

Figura 13: Círculo das quintas

Observamos que o número 4 que está dentro do círculo é a distância diatônica entre as notas consecutivas, ou seja, a distância entre a primeira nota e a segunda considerando a ordenação da escala diatônica A, B, C, D, E, F, G é 4.

Considerando a parte superior do círculo das quintas que contém as notas diatônicas chamaremos esta parte de círculo diatônico. Posteriormente, faremos um estudo mais detalhado deste assunto. Segue abaixo a figura que ilustra o círculo diatônico:

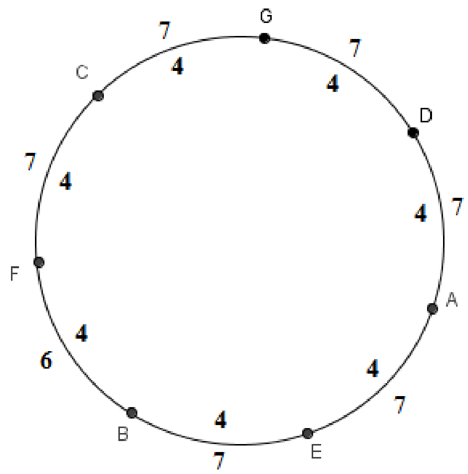

Figura 14: Círculo diatônico

Note que de B para F temos a distância de 6 semitons, sendo uma exceção do círculo diatônico [15]. Esse caso será muito importante no estudo posterior.

3.2 Preliminares

Para prosseguir o presente trabalho veremos algumas definições necessárias à compreensão do Teorema de k-notas. Em vista disso, esta seção é dedicada também a exemplos que auxiliarão a compreensão do tema.

3.2.1 Definições e exemplos

As definições que serão descritas abaixo foram retiradas principalmente de [15].

Definição 17 *O conjunto das notas pertencentes à escala diatônica A, B, C, D, E, F, G é chamado de conjunto diatônico. Esse conjunto de notas corresponde às teclas brancas do piano.*

Definição 18 *Uma linha de k-notas, em que* $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$*, é uma sequência ordenada de k notas distintas pertencentes ao conjunto diatônico. Denotamos por* $X_1 - X_2 - \dots - X_k$*. Além disto, o conjunto de todas as linhas de k-notas é denotado por* C_k*.*

Exemplo: Para $k = 3$ escolhemos quaisquer 3-notas pertencentes ao conjunto diatônico. Então, A - B - C, B - D - F, G - D - A são exemplos de linhas de 3-notas.

Definição 19 *A ordenação diatônica é a sequência*

$$A, B, C, D, E, F, G, A, B, C, \dots$$

Isto é, após a última nota (G), retoma-se a primeira (A).

Exemplo: Da nota F até C, a ordenação diatônica é: F, G, A, B, C.

Definição 20 *A ordenação cromática é a sequência*

$$A, A\sharp, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B, B\sharp, C, \dots$$

Isto é, após a última nota (G), retoma-se a primeira (A).

Exemplo: Da nota D até B, a ordenação cromática é: $D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B$.

Definição 21 *Comprimento diatônico das notas $X_1 - X_2$ é a distância entre a primeira nota e a segunda nota considerando a ordenação diatônica. Denotamos por $d(X_1 - X_2)$. Além disso, dada a linha $X_1 - X_2 - \ldots - X_k$, definimos o vetor diatônico como sendo o vetor em que as entradas são comprimentos diatônicos denotado por $(d(X_1 - X_2), d(X_2 - X_3), \ldots, d(X_{k-1} - X_k), d(X_k - X_1))$.*

Exemplo 1: Consideremos a linha C - D - F. Vamos encontrar o comprimento diatônico e o vetor diatônico.

$d(C - D) = 1$ pois a ordenação diatônica de C até D é $\overbrace{C, D}^{1}$

$d(D - F) = 2$ pois a ordenação diatônica de D até F é $\overbrace{D, E, F}^{2}$

$d(F - C) = 4$ pois a ordenação diatônica de F até C é $\overbrace{F, G, A, B, C}^{4}$

O vetor diatônico é formado pelos comprimentos diatônicos encontrados. Logo, o vetor é (1, 2, 4).

Exemplo 2: Considere a sequência diatônica A, E, B, F, C, G, D, A, E, B, ... que é a sequência de notas diatônicas no círculo das quintas. Sabemos que a ordenação diatônica é a sequência

$$A, B, C, D, E, F, G, A, B, C, \ldots$$

Assim, a distância entre as notas consecutivas no círculo diatônico é:

$d(A - E) = 4$ pois a ordenação diatônica de A até E é $\overbrace{A, B, C, D, E}^{4}$

$d(E - B) = 4$ pois a ordenação diatônica de E até B é $\overbrace{E, F, G, A, B}^{4}$

$d(B - F) = 4$ pois a ordenação diatônica de B até F é $\overbrace{B, C, D, E, F}^{4}$

$d(F - C) = 4$ pois a ordenação diatônica de F até C é $\overbrace{F, G, A, B, C}^{4}$

$d(C - G) = 4$ pois a ordenação diatônica de C até G é $\overbrace{C, D, E, F, G}^{4}$

$d(G - D) = 4$ pois a ordenação diatônica de G até D é $\overbrace{G, A, B, C, D}^{4}$

$d(D - A) = 4$ pois a ordenação diatônica de D até A é $\overbrace{D, E, F, G, A}^{4}$

Formalizamos, então as distâncias diatônicas no círculo das quintas, conforme sugerido nas figuras 13 e 14 da seção 3.1. Ademais, as distâncias diatônicas entre notas consecutivas é constante e igual a 4. Este fato nos motivará à uma nova definição:

Definição 22 *A distância de uma quinta é a distância entre notas consecutivas no círculo das quintas no sentido horário. Na escala diatônica, uma quinta equivale à distância 4.*

Exemplo: A distância entre A e B, no círculo das quintas vale 2 quintas. Note que 2 quintas valem 8 na escala diatônica, todavia, temos apenas 7 notas na ordenação usual da escala diatônica. Assim, fazemos a congruência módulo 7, isto é, $8 \equiv 1 \pmod 7$ que é exatamente o que esperávamos da distância diatônica entre A e B.

Definição 23 *O conjunto das notas pertencentes à escala cromática*

$$A, A\sharp, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp$$

é chamado de conjunto cromático. Esse conjunto de notas corresponde às teclas brancas e pretas do piano.

Notemos então, que as notas diatônicas estão contidas na escala cromática.

Definição 24 *Comprimento cromático das notas $X_1 - X_2$ é a distância entre a primeira nota e a segunda nota considerando a ordenação da escala cromática $A - A\sharp - B - C - C\sharp - D - D\sharp - E - F - F\sharp - G - G\sharp$, ou seja, o comprimento cromático é a quantidade se semitons entre as notas. Denotamos por $|X_1 - X_2|$. Além disso, dada a linha $X_1 - X_2 - \ldots - X_k$, definimos o vetor cromático como sendo o vetor em que as entradas são comprimentos cromáticos denotado por $(|(X_1 - X_2)|, |(X_2 - X_3)|, \ldots, |(X_{k-1} - X_k)|, |(X_k - X_1)|)$.*

Exemplo: Consideremos o exemplo anterior com a linha C - D - F. Vamos encontrar o comprimento cromático e o vetor cromático.

Vamos considerar a escala cromática $A, A\sharp, B, C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp$ para particionar o intervalo da seguinte maneira:

$|C - D| = 2$ pois a ordenação cromática de C até D é $\overbrace{C, C\sharp, D}^{2}$

$|D - F| = 3$ pois a ordenação cromática de D até F é $\overbrace{D, D\sharp, E, F}^{3}$

$|F - C| = 7$ pois a ordenação cromática de F até C é $\overbrace{F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B, C}^{7}$

O vetor cromático é formado pelos comprimentos cromáticos encontrados. Logo, o vetor é (2, 3, 7).

Definição 25 *Dizemos que duas ou mais linhas de k-notas são do mesmo gênero se possuem o mesmo vetor diatônico. Além disso, a classe de uma linha de k-notas é o conjunto de todas as linhas de k-notas que são do mesmo gênero. Denotamos a classe de* $X_1 - X_2 - \ldots - X_k$ *como* $< X_1 - X_2 - \ldots - X_k >$.

Exemplo: Considere a linha A - C - D; o vetor diatônico de A - C - D é (2, 1, 4). Temos que $< A-C-D >= \{A-C-D, B-D-E, C-E-F, D-F-G, E-G-A, F-A-B, G-B-C\}$. Posteriormente, detalharemos como encontrar todas as linhas de k-notas de um dado gênero.

Definição 26 *Dizemos que duas ou mais linhas de k-notas do mesmo gênero são da mesma espécie se possuem o mesmo vetor cromático. Além disso, as espécies geradas por um gênero são partições do gênero em que as linhas de k-notas de uma mesma partição admitem o mesmo vetor cromático.*

Exemplo: O gênero $< A - C - D >$ é particionado em três espécies {A - C - D, B - D - E, D - F - G, E - G - A}, {C - E - F, G - B - C} e {F - A - B} com os vetores cromáticos (3, 2, 7), (4, 1, 7) e (4, 2, 7), respectivamente.
Posteriormente, enunciaremos resultados que quantificam as diferentes espécies de um gênero, bem como as suas multiplicidades. Com tais resultados, será desenvolvida uma forma precisa de encontrar as diferentes espécies em um dado gênero.

3.3 Teorema de k-notas

Lema 2 *Seja* $< X_1 - X_2 - \ldots - X_k >$ *uma classe de linhas de k-notas dispostas no sentido horário dos círculo das quintas. Então, esta classe possui exatamente 7 linhas de k-notas distintas.*

Demonstração: Defina a função sucessora $S : C_k \to C_k$ que faz a correspondência $X_1 - \ldots - X_k \mapsto S(X_1) - \ldots - S(X_k)$, em que $S(X_i)$ é o sucessor da nota X_i no círculo das quintas considerando-se as notas diatônicas, $i \in \{1, \ldots, k\}$ e C_k é o conjunto de todas as linhas de k-notas.

Assim, dadas $X_1 - X_2 - \ldots - X_k$ e o seu sucessor $S(X_1 - X_2 - \ldots - X_k) = S(X_1) - \ldots - S(X_k)$, ambos terão o mesmo vetor diatônico já que $D(X_i - X_{i+1}) = D(S(X_i) - S(X_{i+1}),$ em que $X_{k+1} = X_1$. Em outras palavras, $X_1 - X_2 - \ldots - X_k$ e $S(X_1) - \ldots - S(X_k)$ estão no mesmo gênero. Retomando ao fato de que na escala diatônica temos 7 notas distintas, então:

$$X_1 - \ldots - X_k = S^p(X_1 - \ldots - X_k);$$

$$S(X_1) - \ldots - S(X_k) = S^{p+1}(X_1 - \ldots - X_k);$$

$$\vdots$$

$$S^6(X_1) - \ldots - S^6(X_k) = S^{p+6}(X_1 - \ldots - X_k);$$

em que $p = 7q, \forall q \in \mathbb{N}$.

Em outras palavras, temos ciclo repetido de 7 linhas de k-notas. Como a função sucessora preserva o vetor diatônico no círculo das quintas, temos 7 linhas de k-notas com o mesmo gênero, ou seja, $< X_1 - \ldots - X_k >$ admite 7 linhas de k-notas distintas.

A prova deste lema nos indica a forma de obtermos todas as 7 linhas de k-notas de um mesmo gênero, isto é, aplicando 6 vezes a função sucessora a uma dada linhas de k-notas obtemos as $6 + 1 = 7$ linhas de k-notas de uma dada classe.

■

Teorema 3 *Considere a escala diatônica. Dado $k \in \{1, \ldots, 7\}$ e $X_1 - \ldots - X_k$ uma linha de k-notas qualquer, então $< X_1 - \ldots - X_k >$ contém k espécies.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos para o sentido horário do círculo das quintas. Seja $X_1 - \ldots - X_k$ uma linha de k-notas. Aplicando 6 vezes a função sucessora S definida no lema anterior, obtemos as $6 + 1 = 7$ linhas de k-notas distintas que estão no mesmo gênero de $X_1 - \ldots - X_k$, isto é, obtemos $< X_1 - \ldots - X_k >$.

Observe que o intervalo entre as notas X_i e X_{i+1} na escala cromática considerando o círculo das quintas, é $|X_i - X_{i+1}| = 7p \pmod{12}$ (Módulo 12 pois a escala cromática admite 12 notas cíclicas no círculo das quintas) em que $p \in \mathbb{N}^*$ para $i \in \{1, \ldots, 7\}$ em que $X_{k+1} = X_1$, com exceção aos intervalos da forma $|X_i - X_{i+1}|$ que contiverem a sequência $B - F$ em seu intervalo, que diferentemente das outras notas consecutivas no círculo das quintas, não vale 7, mas sim 6, isto é $|X_i - X_{i+1}| = (7p + 6) \pmod{12}$. Logo, uma linha de k-notas $X_1 - \ldots - X_k$ terá k intervalos possíveis:

$$|X_1 - X_2|, |X_2 - X_3|, \ldots, |X_{k-1} - X_k|, |X_k - X_1|,$$

Ou seja, k possibilidades para o intervalo $B - F$ estar contido no dado intervalo (claramente, $B - F$ estará em um único intervalo dessas entradas, isto é, não poderá estar contido em dois ou mais intervalos).

Em outras palavras, para um vetor cromático da forma:

$$(|X_1 - X_2|, |X_2 - X_3|, \ldots, |X_{k-1} - X_k|, |X_k - X_1|),$$

temos k possibilidades de vetores cromáticos distintos, ou seja, teremos k espécies distintas.

Agora vamos considerar $X_1 - \ldots - X_k$ uma linha de k-notas qualquer (não necessariamente no sentido horário do círculo das quintas). Seja π a permutação que reordena uma linha de k-notas quaisquer no sentido horário do círculo das quintas, assim:

$$\pi(X_1 - \ldots - X_k) = X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)}$$

Observe que a classe de linhas de k-notas $< X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)} >$ contém exatamente k espécies distintas (provado anteriormente). Observe também que

$$\pi(< (X_1 - \ldots - X_k) >) =< X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)} >$$

Logo, cada espécie de $< X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)} >$ está associada a uma espécie de $< (X_1 - \ldots - X_k) >$ e vice-versa, pois toda permutação é inversível. Em outras palavras, temos uma correspondência uma a uma entre espécies de $< (X_1 - \ldots - X_k) >$ e $< X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)} >$. Ou seja, como $< X_{\pi(1)} - \ldots - X_{\pi(k)} >$ admite k espécies distintas, então $< (X_1 - \ldots - X_k) >$ também possui k espécies distintas.

$\blacksquare$

3.4 Exemplificando os resultados

Exemplo 1: Considere as linhas $A - B - C$ e $C - D - E$. Aparentemente as linhas possuem a mesma estrutura, pois ambas possuem 3 notas e seguem a ordenação diatônica (A, B, C, D, E, F, G). Vejamos mais atentamente as teclas do piano, conforme a figura 15:

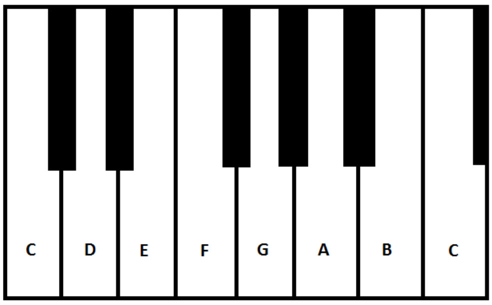

Figura 15: Teclas do piano.

Como podemos ver, na sequência A, B, C, entre as teclas B e C não há uma tecla preta que as separem. Isso significa que o intervalo entre B e C é de um semitom. Diferentemente ocorre com as teclas D e E, pois há uma tecla preta que as separam. Ou seja, o intervalo entre D e E é de dois semitons. Logo, apesar das linhas apresentarem a mesma estrutura, elas são diferentes e isso implicará em diferentes efeitos sonoros.

Suponhamos que este seja um problema com o qual um compositor se deparou. Ele precisará encontrar outra linha, pertencente ao círculo diatônico, que apresente efeito sonoro igual a $A - B - C$. Vamos ajudá-lo a encontrar:

Primeiramente, verificamos o vetor diatônico da linha $A - B - C$:

- $D(A - B) = 1$, pois a ordenação diatônica de A até B é $\overbrace{A, B}^{1}$;
- $D(B - C) = 1$, pois a ordenação diatônica de B até C é $\overbrace{B, C}^{1}$;
- $D(C - A) = 5$, pois a ordenação diatônica de C até A é $\overbrace{C, D, E, F, G, A}^{5}$

Logo, o vetor diatônico é (1, 1, 5).

Agora, temos que investigar uma linha de 3-notas seguindo a ordenação diatônica A, B, C, D, E, F, G que possui o vetor diatônico (1, 1, 5). Podemos recorrer as definições de teoria musical e perceber que as únicas notas que possuem o intervalo de um semitom são as notas B e C, E e F. Com isso, encontramos facilmente a linha $D - E - F$.
Por definição temos que $A - B - C$ e $D - E - F$ são do mesmo gênero. Mas só isso não garante que possuem efeito sonoro igual. Segue que temos que verificar se as linhas pertencem à mesma espécie. Para isso, vamos verificar os vetores cromáticos das linhas:

para a linha $A - B - C$ temos:

- $|A - B| = 2$, pois a ordenação cromática de A até B é $\overbrace{A, A\sharp, B}^{2}$;

  $|B - C| = 1$, pois a ordenação cromática de B até C é $\overbrace{B, C}^{1}$;

- $|C - A|) = 9$, pois a ordenação cromática de C até A é $\overbrace{C, C\sharp, D, D\sharp E, F, F\sharp, G, G\sharp, A}^{9}$

Logo, o vetor cromático é (2, 1, 9).

Para a linha $D - E - F$ temos:

- $|D - E| = 2$, pois a ordenação cromática de D até E é $\overbrace{D, D\sharp, E}^{2}$;

  $|E - F| = 1$, pois a ordenação cromática de E até F é $\overbrace{E, F}^{1}$;

- $|F - D|) = 9$, pois a ordenação cromática de F até D é $\overbrace{F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B, C, C\sharp, D}^{9}$

Logo, o vetor cromático é (2, 1, 9).

Por definição temos que $A - B - C$ e $D - E - F$ são da mesma espécie, o que nos garante que possuem efeito sonoro semelhante. Portanto, o compositor poderá utilizar essas duas linhas de 3-notas para obter em sua música o efeito desejado.

Exemplo 2: Seja $C, D, E, F, G, A, B, C, D, E, \ldots$ uma sequência ordenada de notas da escala diatônica que formam a escala de Dó Maior. Vamos considerar o conjunto das notas da escala de Dó Maior como sendo $D_0 = \{C, D, E, F, G, A, B\}$. Com base na teoria musical, podemos formar acordes utilizando somente as notas da escala de Dó Maior, os quais chamaremos de tríades. As tríades são formadas por 3 notas que estão dispostas em terças (intervalo diatônico de 3 notas).

Para utilizar a notação e resultados do Teorema de k-notas vamos considerar o círculo das quintas. Podemos construir os acordes a partir da escala de Dó Maior percorrendo o círculo das quintas. Deste modo, formalizaremos o processo definindo a seguinte função:

$$f \colon D_0 \longrightarrow C_3$$

em que

$$X \longmapsto X - S^4(X) - S(X),$$

tal que $D_0 = \{C, D, E, F, G, A, B\}$, C_3 é o conjunto de todas as linhas de 3-notas, S é a função sucessora que opera no círculo das quintas seguindo o sentido horário e $S^n(x)$ é aplicar a função sucessora n vezes para $n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicando a função nas notas possíveis, obtemos:

$$f(C) = C - E - G;$$

$$f(G) = G - B - D;$$

$$f(D) = D - F - A;$$

$$f(A) = A - C - E;$$

$$f(E) = E - G - B;$$

$$f(B) = B - D - F;$$

$$f(F) = F - A - C.$$

Suponhamos que queiramos compor uma música baseada nos acordes obtidos a partir da escala de Dó Maior. Para tal, classificaremos os acordes em distintas espécies. Como cada acorde é uma linha de 3-notas, o genêro que contém os acordes da escala Dó Maior terá exatamente 3 espécies distintas. Antes de classificar as espécies, falta provar que os acordes são do mesmo gênero.

Observe que aplicar a função sucessora na linha de 3-notas é: $S(X_1 - X_2 - X_3) = S(X_1) - S(X_2) - S(X_3)$, isto é, análoga à função definida no Lema 2. Em tais condições:

$$f(X) = X - S^4(X) - S(X)$$

$$f(S(X)) = S(X) - S^5(X) - S^2(X)$$

Isto é,

$$f(S(X)) = S(f(X)),$$

Assim:

$$f(S^2(X)) = S^2(f(X))$$

$$f(S^3(X)) = S^3(f(X))$$

$$\vdots$$

$$f(S^6(X)) = S^6(f(X))$$

Ou seja, aplicar a função nas 7 possibilidades de notas é o mesmo que aplicar a função sucessora 6 vezes no primeiro acorde dado. Assim, vemos que a linha de 3-notas $f(X) = X - S^4(X) - S(X)$ está descrevendo uma classe de linhas de 3-notas disposta no sentido horário do círculo das quintas, isto é, todas estas linhas estão no mesmo gênero e portanto terão o mesmo vetor diatônico (Lembrando que a função sucessora preserva o vetor diatônico mediante a sua aplicação, conforme mencionado na prova do Lema 2).

Evitaremos entrar em detalhes que excedem os objetivos do presente trabalho, os quais exigiriam uma complexidade maior no estudo de composição musical. No momento apenas estamos interessados em classificar os acordes em diferentes espécies. Com base no círculo das quintas, vamos determinar o vetor cromático de cada acorde. Vejamos abaixo:

- O acorde $C - E - G$ possui o vetor cromático $(4, 3, 5)$;
- O acorde $G - B - D$ possui o vetor cromático $(4, 3, 5)$;
- O acorde $D - F - A$ possui o vetor cromático $(3, 4, 5)$;
- O acorde $A - C - E$ possui o vetor cromático $(3, 4, 5)$;
- O acorde $E - G - B$ possui o vetor cromático $(3, 4, 5)$;
- O acorde $B - D - F$ possui o vetor cromático $(3, 3, 6)$;

- O acorde $F - A - C$ possui o vetor cromático $(4, 3, 5)$;

Como já prevíamos pelo Teorema de k-notas existem 3 espécies distintas. São elas:

$$\{CEG, GBD, FAC\}, \{DFA, ACE, EGB\}, \{BDF\}$$

Em outras palavras, teremos três sonoridades distintas.

Ilustraremos o fato de que acordes da mesma espécie possuem sonoridades semelhantes com o início da música Ode to Joy da 9ª Sinfonia de Ludwig Van Beethoven. Observe a parte musical a seguir:

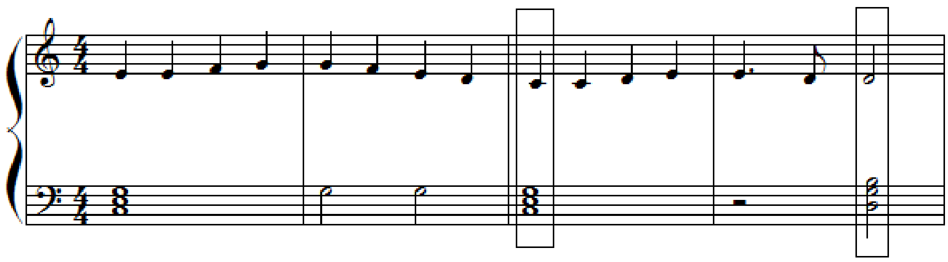

Figura 16: Exemplo - Trecho da nona Sinfonia de Beethoven

O trecho inicial é formado pelos acordes C - E - G e G - B - D (destacados na figura 16). Conforme visto anteriormente, estes acordes são da mesma espécie e apresentam sonoridade semelhante. Por outro lado, o acorde F - A - C também é da mesma espécie que os acordes destacados. Logo, cabe ao compositor escolher o acorde que utilizará para diversificar a música e,ao mesmo tempo, preservar a sonoridade nos trechos desejados. Com isso, poderíamos iniciar o trecho musical utilizando qualquer um dos acordes de mesma espécie, a considerar outras questões que envolvem a composição musical não apresentada neste trabalho. O que, de modo geral, reforça a importância do teorema de k-notas. Convido o leitor a fazer tal experimentação.

Considerações Finais

A mesma música que pode ser ouvida e sentida, tocando as entranhas mais profundas do ser, pode também ser descrita por meio de alguns conceitos formais da matemática. Isto talvez explica o interesse de grandes matemáticos pela música: É a razão justificando os anseios da alma.

A composição musical relaciona a criatividade do compositor com o raciocínio sobre padrões e deduções lógicas, ou seja, a sensibilidade musical tem como base uns dos pilares da matemática. Sob essa ótica, a matemática se tornou uma ferramenta para organizar e formalizar os conceitos musicais, analisar a estrutura da música, obter novos resultados para a Música.

Cabe aqui ressaltar a sutileza necessária para que o indivíduo perceba a relação entre a Matemática e a Música. Apesar de serem áreas aparentemente distantes, com um pouco mais de observação e pesquisa podemos constatar que estão muito próximas. O presente estudo é um ínfimo exemplo de tal façanha.

À luz do atual trabalho, é possível concluir que existem muitas perspectivas a serem abordadas. Por exemplo, o teorema hexacordal se restringe aos acordes de seis notas, ao passo que o teorema de k-notas trabalha somente com linhas de notas diatônicas. Eis os seguintes questionamentos: será que existe algum teorema que engloba ambos? É possível generalizar o teorema de k-notas para linhas de notas cromáticas?

Como podemos perceber, há um universo de possíveis temas e resultados a serem investigados que possibilitem o desenvolvimento e a inovação musical, além de contribuir com novas aplicações em algumas áreas da matemática. Deseja-se que a continuidade desses resultados ou dessa linha de pesquisa sejam inspirações para outros estudantes e que desperte o interesse em vivenciar a beleza e os encantos que essas áreas nos proporcionam.

Referências

[1] L. H. Bezerra, *Por que compomos com apenas 12 notas musicais?*, Revista ORM-SC. n.6 Florianópolis: UFSC, 2009.

[2] S. K. Blau , *The Hexacordal Theorem: A Mathematical Look at Interval Relations in Twelve- Tone Composition*, Mathematics magazine, 72 (4), 310-313, 1999.

[3] C. B. Boyer, *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

[4] J. Clough and G. Myerson, *Variety and multiplicity in diatonic systems*, J. Music Theory 29 (1985) 249-270.

[5] H.H. Domingues e G. Iezzi, *Álgebra Moderna*, ed.4, São Paulo: Atual, 2003.

[6] D. J. Grout e C. V. Palisca, *História da Música Ocidental*, Portugal: Gradiva, 1994.

[7] S. Hazzan, *Fundamentos de matemática Elementar, Combinatória e Probabilidade 5*, 33-36, ed.6, São Paulo: Atual, 1993.

[8] A. Hefez, *Curso de Álgebra*, ed. 4, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[9] O. Lacerda, *Compêndio de Teoria Elementar da Música*, ed.13, São Paulo: Ricordi, 1961.

[10] B. Massin e J. Massin, *História da Música ocidental*, Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[11] B. Med, *Teoria da Música*, ed.3, Brasília: Musimed, 1986.

[12] S. Roman, *Advanced Linear Algebra*, Third Edition, p.1. New York: Springer, 2008.

[13] A. Schoenberg, *Fundamentos da Composição Musical*, São Paulo: EDUSP, 1993.

[14] A. Schoenberg, *Harmonia*, São Paulo: UNESP, 2001.

[15] D. Silverman and J. Wiseman, *Noting The Difference: Musical Scale and Permutations*, America Mathematical, monthly 113, 648-651, 2006.

[16] J. N. Straus, *Introdução à Teoria Pós-tonal*, ed. 2. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 2000.