Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Introdução às Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso

Luis Augusto Uliana

Florianópolis, 2013

Luis Augusto Uliana

Introdução às Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora:
Virgínia Silva Rodrigues

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2013

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 04/CCM/2012.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Virgínia Silva Rodrigues
Orientadora

Prof. Luiz Augusto Saeger

Prof. Giuliano Boava

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço minha mãe Romy, por ter acreditado em mim e por confiar em minha dedicação. Agradeço aos meus tios Harry, Vera e Lilian, por se manterem sempre próximos de minha mãe e por me apoiarem.

Agradeço minha namorada, Josyanne Pasetti, por me aguentar. Você certamente foi um ponto estável para mim durante a graduação, principalmente nos momentos mais difíceis.

Agradeço à minha orientadora, Prof.ª Virgínia Silva Rodrigues, por ter me aberto uma porta. Tive a oportunidade de cursar muitas disciplinas na área de álgebra com a Profª Virgínia, que sempre se mostrou dedicada ao seu trabalho e incentivada por uma paixão clara pela pesquisa em sua área. Acredito que essa vontade tenha me contagiado. E claro, não posso deixar de mencionar que foi alguém que me deu uma oportunidade e acreditou em meu potencial, sou muito grato por isso.

Agradeço aos professores Luiz Augusto Saeger e Giuliano Boava por terem aceito o convite de fazer parte da banca deste trabalho e pela paciência na correção do mesmo.

Agradeço aos meus colegas de graduação, não irei escrever o nome de cada um aqui, mas queria dizer que tive a oportunidade de estudar com pessoas ótimas, dedicadas e que levaram bastante a sério as disciplinas. Muitas pessoas estiveram comigo em vários momentos da graduação, inclusive como colegas de PET. Tenho certeza que essas pessoas terão um futuro ótimo, pois são dedicadas e sérias, e isso a longo prazo, faz diferença.

Agradeço meus colegas Deividi e Sara, por serem pessoas muito abertas e me receberem muito bem. Vocês me ajudaram bastante em compreender o que está escrito nesse trabalho e muito mais. Espero que possamos ter mais cafés juntos para podermos conversar. Posso dizer que ambos me influenciaram nas áreas de estudos que eu escolhi. Tive ótimas indicações de vocês.

Agradeço ao Professor José Luiz Rosas Pinho, por ser não apenas um ótimo docente, mas também por ser o melhor coordenador que o PET poderia ter.

Não posso deixar de lembrar de meus colegas de moradia, com os quais estive junto por anos na graduação. Com eles pude aprender muito, principalmente com questões de convivência e limpeza. São os melhores companheiros de apartamentos que eu poderia ter tido, cada um com seu jeito. Mas no fim todos nós nos entendíamos. Não menos importante, é valido lembrar que eu fiquei bom no Guitar Hero graças a vocês.

Por fim, mas não menos importante,agradeço meus colegas de infância e adolescência, Leonardo, João Felipe, Ketson e Marcelo. Sempre nos encontramos em períodos de férias para jogar futebol de areia na praia de Balneário Camboriú. Vocês fizeram parte de um período importante em minha vida, e são pessoas muito engraçadas, aprendi muitas piadas com vocês. Espero que o Ketson tenha avisado. Leonardo, nunca esquecerei do ”jogo”, isso mudou minha vida.

Sumário

Introdução

Uma álgebra de Hopf é uma estrutura algébrica observada pela primeira vez, na década de 40, pelo matemático alemão Heinz Hopf. Nas décadas seguintes, tornou-se uma teoria algébrica com importantes aplicações na matemática e na física. Para estudarmos tal estrutura precisamos compreender os conceitos de álgebra e coálgebra. Nesse trabalho, apresentamos também algumas noções básicas da teoria de comódulos. Desenvolvemos as teorias de coálgebras e comódulos sobre um corpo k, embora seja possível generalizar para um anel comutativo R com unidade (R-coálgebras e R-comódulos) e para um anel não comutativo R com unidade (R-coanéis e R-comódulos). Uma das vantagens de estudarmos essas estruturas sobre um corpo k reside no fato de que o produto tensorial de k-espaços vetoriais continua sendo um k-espaço vetorial.

Consideramos como pré-requisitos desse trabalho a teoria básica de anéis e grupos. No rol das disciplinas do bacharelado, o curso de estruturas algébricas que envolve teoria de módulos e produto tensorial sobre módulos.

Primeiramente apresentamos um pouco sobre a teoria de coálgebras. Uma coálgebra é a noção dual de álgebra obtida invertendo as setas dos diagramas da definição de álgebra. Podemos definir noções de subestruturas e estrutura quociente para coálgebras, bem como uma noção de morfismo entre coálgebras. O objetivo é dar os alicerces para a definição de uma álgebra de Hopf. Terminamos o capítulo fazendo a construção da álgebra dual de uma coálgebra dada, a qual é sempre possível. Por outro lado, dada uma álgebra, para construírmos sua coálgebra dual, só será possível se a álgebra tiver dimensão finita.

No segundo capítulo, fazemos uma introdução à teoria de comódulos. Tal estrutura é, de maneira similar ao caso da coálgebra, uma noção dual obtida da noção de módulo, a qual podemos definir via diagramas. A estrutura de comódulo está intimamente ligada à estrutura de coálgebra, pois toda coálgebra pode ser vista como um comódulo sobre si própria. Definimos uma categoria cujos objetos são módulos que possuem uma característica especial, os chamados C^*-módulos racionais. Como grande resultado deste capítulo, mostramos que a categoria dos C-comódulos à direita é isomorfa à categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais, mediante esse isomorfismo é possível entender como as estruturas de módulos racionais e comódulos relacionados.

Finalmente, o terceiro capítulo trata de álgebras de Hopf. Inicialmente definimos a noção de biálgebra, uma estrutura que é uma coálgebra, uma álgebra e satisfaz uma determinada condição. Uma classe especial de biálgebras são as chamadas álgebras de Hopf, que são biálgebras com um morfismo S chamado antípoda, que tem a propriedade de ser o elemento inverso da função identidade em relação ao chamado produto de convolução. Desenvolvemos as noções estruturais básicas, vemos alguns exemplos de álgebras de Hopf e provamos algumas propriedades relativas a antípoda.

1 Álgebras e Coálgebras

O objetivo desse capítulo é definir a estrutura de uma coálgebra sobre um corpo k, apresentar alguns exemplos de coálgebras e provar algumas propriedades. Para motivar a definição de uma coálgebra, inicialmente definimos o que é uma álgebra sobre um corpo k via diagramas. Essa definição será equivalente à definição tradicional como será mostrado. Com essa definição, via diagramas, podemos inverter o sentido das setas dos diagramas e obter uma noção dual, que chamamos coálgebra. Todos os produtos tensoriais são sobre k a menos de menção contrária, $\otimes_k$.

1.1 Álgebras

Definição 1. *Uma k-álgebra é uma tripla (A, M, u), em que A é um k-espaço vetorial, $M : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes M"] \arrow[d, "M \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "u \otimes I_A"] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes u"'] \\ & A \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

em que I_A é a identidade em A e

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A & \to & k \otimes A \\ & a & \mapsto & 1_k \otimes a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi: & A & \to & A \otimes k \\ & a & \mapsto & a \otimes 1_k \end{array}$$

são os isomorfismos canônicos.

A função M é chamada multiplicação da álgebra e u é chamada unidade. A comutatividade do primeiro diagrama é exatamente a associatividade da multiplicação da álgebra e podemos escrever como

$$\begin{aligned} M\circ(M\otimes I_A)(a\otimes b\otimes c) &= M(ab\otimes c)=(ab)c \\ &= a(bc)=M(a\otimes bc)=M\circ(I_A\otimes M)(a\otimes b\otimes c) \end{aligned}$$

para quaisquer $a,b,c\in A$. A comutatividade do segundo diagrama nos fornece

$$\begin{aligned} (M\circ(u\otimes I_A)\circ\phi)(a) &= (M\circ(u\otimes I_A))(1_k\otimes a)=M(u(1_k)\otimes a) \\ &= 1_A a=a=a1_A \\ &= M(a\otimes u(1_k))=(M\circ(I_A\otimes u)\circ\psi)(a), \forall a\in A. \end{aligned}$$

Classicamente, uma álgebra é definida como a seguir. No entanto, essa definição prévia via diagramas nos possibilita visualizar algo a mais como será observado posteriormente.

Definição 2. *Uma k-álgebra unitária A é um anel $(A,+,.)$ com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e é satisfeita uma relação de compatibilidade da estrutura de anel com a estrutura de espaço vetorial*

$$\lambda(a_1a_2)=(\lambda a_1)a_2=a_1(\lambda a_2)\text{ , }\forall\lambda\in k \text{ e } \forall a_1,a_2\in A.$$

Proposição 1. *As definições de k-álgebra dadas acima são equivalentes.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja (A,M,u) uma k-álgebra segundo a Definição 1, ou seja, A é um k-espaço vetorial, $M:A\otimes A\to A$ e $u:k\to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais que comutam os diagramas da definição. Consideremos o seguinte produto

$$\begin{aligned} \cdot:\ A\times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a\cdot b=M(a\otimes b)=ab. \end{aligned}$$

A partir dessa operação, verificamos alguns axiomas de anel. Claramente, a associatividade de $\cdot$ é dada pela comutatividade do primeiro diagrama.

A distributividade à esquerda é válida, pois dados $a,b,c\in A$ temos que $a(b+c)=M(a\otimes(b+c))=M(a\otimes b+a\otimes c)=M(a\otimes b)+M(a\otimes c)=ab+ac$. A distributividade à direita é analogamente provada.

O elemento $u(1_k)$ é a unidade. De fato, como o segundo diagrama comuta $a=I_A(a)=M\circ(u\otimes I_A)\circ\phi(a)=M(u\otimes I_A)(1_k\otimes a)=M(u(1_k)\otimes a)=u(1_k)a$ e analogamente $a=a\,u(1_k)$, ou seja, $u(1_k) = 1_A$.

Resta-nos verificar a relação de compatibilidade. Dados $r \in k$ e $a, b \in A$ temos que

$$\begin{aligned} r(ab) &= rM(a \otimes b) = M(r(a \otimes b)) \\ &= M(ra \otimes b) = (ra)b \\ &= M(ar \otimes b) = M(a \otimes rb) \\ &= a(rb) \end{aligned}$$

usando a k-linearidade de M e propriedades do produto tensorial. Portanto vale $r(ab) = (ra)b = a(rb)$, $\forall r \in k$ e $\forall a, b \in A$.

($\Leftarrow$) Seja agora A uma k-álgebra segundo a Definição 2, ou seja, A é um k-espaço vetorial com uma estrutura de anel $(A, +, .)$ e unidade 1_A que satisfaz a relação de compatibilidade mencionada. Precisamos exibir $M : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ morfismos de k-espaços vetoriais que comutem os diagramas da primeira definição.

Definimos $u : k \to A$ como sendo $u(r) = r1_A$, $\forall r \in k$. É fácil notarmos que u é k-linear e $u(1_k) = 1_k 1_A = 1_A$. Notemos também que $\cdot : A \times A \to A$ é uma função k-bilinear pois A é um anel. Portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de k-espaços vetoriais $M : A \otimes A \to A$ tal que $M(a \otimes b) = ab$, $\forall a, b \in A$. Para maiores informações sobre produto tensorial veja ([4], p.208).

Nos resta verificar a comutatividade dos diagramas. Para o primeiro, dados $a, b, c \in A$ temos $M \circ (M \otimes I_A)(a \otimes b \otimes c) = M(M(a \otimes b) \otimes I_A(c)) = M(ab \otimes c) = (ab)c$ e $M \circ (I_A \otimes M)(a \otimes b \otimes c) = M(I_A(a) \otimes M(b \otimes c)) = M(a \otimes bc) = a(bc)$. Como A é um anel, $(ab)c = a(bc)$ e assim, $M \circ (M \otimes I_A) = M \circ (I_A \otimes M)$.

Para o segundo diagrama, dado $a \in A$ temos $M \circ (u \otimes I_A) \circ \phi(a) = M(u \otimes I_A)(1_k \otimes a) = M(u(1_k) \otimes I_A(a)) = M(1_A \otimes a) = 1_A a = a$ e analogamente obtemos $M \circ (I_A \otimes u) \circ \psi(a) = a1_A = a$. Portanto, o segundo diagrama também comuta e temos a equivalência demonstrada. ■

Exemplo 1. Todo corpo k é uma k-álgebra .

Exemplo 2. (Álgebra de grupo) Seja G um grupo escrito com a operação de multiplicação. Então podemos escrever a álgebra de grupo

$$A = kG = \oplus_{g \in G} kg.$$

Dado um elemento $x \in A$ temos que $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ em que $\lambda_g = 0$, a menos de uma quantidade finita de $g \in G$. Nesse conjunto podemos definir as seguintes operações:

- Soma: $\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g$.
- Produto: $(\sum_{g \in G} r_g g)(\sum_{h \in G} s_h h) = \sum_{z \in G} t_z z$ em que $t_z = \sum_{g,h \in G} r_g s_h$ e $z = gh \in G$.
- Produto por escalar: dado $r \in k$, $r \sum_{g \in G} r_g g = \sum_{g \in G} r r_g g$.

Com essas operações, A possui uma estrutura de k-álgebra. Vale observarmos que a unidade dessa álgebra é o elemento $1_k e$ em que $e \in G$ é o elemento neutro do grupo. De fato, $(\sum_{g \in G} r_g g)(1_k e) = \sum_{g \in G} (r_g 1_k) g = \sum_{g \in G} r_g g$. Analogamente, $(1_k e)(\sum_{g \in G} r_g g) = \sum_{g \in G} r_g g$.

Exemplo 3. (Álgebra das séries de potências formais) Consideremos o conjunto $k[[X]] = \{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n : a_n \in k\}$. Podemos definir nesse conjunto as operações de

- Soma: $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$.
- Produto por escalar: dado $r \in k$ temos $r \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (r a_n) X^n$.

É simples verificar que com a soma e o produto por escalar definidos acima, $k[[X]]$ é um k-espaço vetorial. Consideremos a função $m : k[[X]] \times k[[X]] \to k[[X]]$ dada por

$$m\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n.$$

É possível verificar que m definida assim é k-bilinear. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único morfismo de k-espaços vetoriais:

$$\begin{array}{rccl} M: & k[[X]] \otimes k[[X]] & \to & k[[X]] \\ & (\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \otimes \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n) & \mapsto & \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{i+j=n} a_i b_j) X^n. \end{array}$$

Podemos definir também uma função $u : k \to k[[X]]$ por $u(1_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{n,0} X^n$ em que $\delta_{n,0}$ é o delta de Kronecker e que por linearidade estende-se a k. Verifiquemos que os diagramas da definição de álgebra comutam. Notemos que

$$\begin{aligned} M\circ(M\otimes I_{k[[X]]})(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} b_nX^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) &= M(\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i+j=n} a_ib_j)X^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{j+i+k=n} a_ib_jc_k)X^n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M\circ(I_{k[[X]]}\otimes M)(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} b_nX^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} c_nX^n) &= M(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{j+k=n}^{n} b_jc_k)X^n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{j+i+k=n} a_ib_jc_k)X^n. \end{aligned}$$

Portanto, temos a igualdade desejada. Para o segundo diagrama, temos $M\circ(u\otimes I_{K[[X]]})\circ\phi(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) = M(u\otimes I_{K[[X]]})(1_k\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) = M(\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_{n,0}X^n\otimes\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$. Analogamente, $M\circ(I_{k[[X]]}\otimes u)\circ\psi(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$. Logo, $k[[X]]$ é uma k-álgebra.

Exemplo 4. (Álgebra oposta) Seja (A,M,u) uma álgebra. Podemos definir uma nova álgebra A^{op} que, como conjunto, é exatamente o conjunto A com a ressalva de que a multiplicação é dada por $M^{op} = M\circ\tau : A\otimes A\to A$ em que $\tau : A\otimes A\to A\otimes A$ é a aplicação chamada *twist* dada por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$. Denotamos a tripla como $A^{op} = (A,M^{op},u)$. A verificação da comutatividade dos diagramas da definição de álgebra são imediatos. Sejam $a,b,c\in A$. Então

$$(M^{op}\circ(M^{op}\otimes I))(a\otimes b\otimes c) = M^{op}(ba\otimes c) = c(ba)$$

$$(M^{op}\circ(I\otimes M^{op}))(a\otimes b\otimes c) = M^{op}(a\otimes cb) = (cb)a.$$

A igualdade vale, pois a álgebra (A,M,u) é associativa. Logo, $M^{op}\circ(M^{op}\otimes I) = M^{op}\circ(I\otimes M^{op})$. O axioma da unidade é imediato. Portanto, A^{op} é uma álgebra.

Definição 3. *Uma álgebra (A,M,u) é dita comutativa se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "M"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "M"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

A função τ é a aplicação twist dita acima. Em outras palavras, $\forall a,b\in A$ temos que $M(a\otimes b) = ab = ba = M(b\otimes a)$.

Sejam A e B duas k-álgebras unitárias. Dizemos que $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se f é um morfismo de anéis, de k-espaços vetoriais e $f(1_A) = 1_B$. Uma maneira equivalente de definir morfismo de álgebras e mais interessante para o nosso propósito é dada a seguir.

Definição 4. *Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) álgebras. Uma função k-linear $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama nos diz que $f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in A$ e o segundo diagrama que $f(1_A) = 1_B$.

Proposição 2. *Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) duas álgebras. Sabemos que $A \otimes B$ tem uma estrutura de k-espaço vetorial. Assim, definindo funções*

$$M_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \to A \otimes B \text{ e } u_{A\otimes B} : A \otimes B \to k$$

como sendo $M_{A\otimes B} = (M_A \otimes M_B) \circ (I_A \otimes \tau \otimes I_B)$ e $u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B) \circ \phi^{-1}$, em que τ é a aplicação twist e $\phi : k \otimes k \to k$ é o isomorfismo canônico, segue que $A \otimes B$ é uma k-álgebra.

Demonstração: Sejam $a, c, x \in A$ e $b, d, y \in B$. Então

$$(M_{A\otimes B} \circ (M_{A\otimes B} \otimes I))(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes x \otimes y) = M(ac \otimes bd \otimes x \otimes y) = (ac)x \otimes (bd)y$$

$$(M_{A\otimes B} \circ (I \otimes M_{A\otimes B}))(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes x \otimes y) = M(a \otimes b \otimes cx \otimes dy) = a(cx) \otimes b(dy).$$

Como A e B são álgebras temos que $(M_{A\otimes B} \circ (M_{A\otimes B} \otimes I)) = (M_{A\otimes B} \circ (I \otimes M_{A\otimes B}))$. Agora, $u_{A\otimes B}(1) = (u_A \otimes u_B) \circ \phi^{-1}(1) = (u_A \otimes u_B)(1 \otimes 1) = u_A(1) \otimes u_B(1) = 1_A \otimes 1_B$. Portanto, $A \otimes B$ é uma k-álgebra. ∎

1.2 Coálgebras

A importância da definição de uma k-álgebra via diagramas está em sua natureza categórica. Agora, podemos dualizar a definição de uma k-álgebra invertendo o sentido das flechas nos diagramas e obter uma nova estrutura a qual chamamos uma k-coálgebra.

Definição 5. *Uma k-coálgebra é uma tripla* (C, Δ, ε)*, em que* C *é um k-espaço vetorial,* $\Delta : C \to C \otimes C$ *e* $\varepsilon : C \to k$ *são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes I_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C \arrow[ur, "\phi"] & & C \otimes k \arrow[ul, "\psi"'] \\
 & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I_C"] \arrow[ur, "I_C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Em que I_C é a identidade em C e as aplicações Δ e ε são chamadas de comultiplicação e counidade da coálgebra C, respectivamente. Os isomorfismos canônicos ϕ e ψ são dados por $\phi(\lambda \otimes c) = \lambda c$ e $\psi(c \otimes \lambda) = c\lambda$, $\forall c \in C$ e $\forall \lambda \in k$. A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada axioma da coassociatividade, isto é, $(\Delta \otimes I_C) \circ \Delta = (I_C \otimes \Delta) \circ \Delta$. Já a comutatividade do segundo diagrama é chamada axioma da counidade e nos dá $\phi \circ (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta = I_C = \psi \circ (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.

Notemos que em uma álgebra, a multiplicação funciona como uma espécie de "contração" interna entre seus elementos, enquanto que em uma coálgebra, a comultiplicação funciona como uma espécie de "explosão" de seus elementos que dá essa noção abstrata dual. Ficando subentendido o corpo k, escrevemos apenas C uma coálgebra, ao invés de k-coálgebra e A uma álgebra, ao invés de k-álgebra. Vamos agora ver alguns exemplos de coálgebras.

Exemplo 5. Sejam S um conjunto não-vazio e kS o k-espaço vetorial com base S. Para definir uma estrutura de coálgebra em kS, basta definirmos Δ e ε nos elementos da base e estendermos por linearidade. Assim, kS é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por $\Delta(s) = s \otimes s$ e $\varepsilon(s) = 1$, $\forall s \in S$.

Observação 1. Decorre desse primeiro exemplo que em todo k-espaço vetorial V podemos introduzir uma estrutura de coálgebra. Basta tomar S como sendo uma base de V já que todo espaço vetorial possui base. Em particular, o corpo k é uma coálgebra, basta tomar $S = \{1_k\}$. Nesse caso, temos $\forall \lambda \in k$ que $\Delta(\lambda) = \lambda \otimes 1_k$, o isomorfismo canônico, e $\varepsilon(\lambda) = \lambda$, a identidade em k.

Exemplo 6. Seja C um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então C é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por $\Delta(c_m) = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}$ e $\varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$, em que $\delta_{0,m}$ é o delta de Kronecker. Vamos mostrar que C é de fato uma coálgebra.

Notemos que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.(*)$$

Também temos que

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta(c_m) = (\Delta \otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) = \sum_{i=0}^{m} \Delta(c_i) \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} (\sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j}) \otimes c_{m-i}$$

$$(I \otimes \Delta) \circ \Delta(c_m) = (I \otimes \Delta)(\sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i) = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes \Delta(c_i) = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes (\sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j}).$$

Devido à $(*)$, chegamos que $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$. Mostremos a comutatividade do segundo diagrama. Para $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}(\phi \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta)(c_m) &= \phi((\varepsilon \otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i})) = \phi(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i) \otimes c_{m-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i) c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \delta_{0,i} c_{m-i} = c_m.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se a outra igualdade. Logo, C é uma coálgebra. Esta coálgebra é chamada *coálgebra da potência dividida*.

Exemplo 7. Sejam $n \geq 1$ inteiro e $M^c(n,k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2. Denotamos por $\{e_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$ e definimos em $M^c(n,k)$ uma comultiplicação $\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}$ e uma counidade $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$. Dessa maneira, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra, chamada *coálgebra de matrizes*. De fato, temos que

$$\begin{aligned}((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_{ij}) &= (I \otimes \Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes \Delta(e_{pj}) \\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes \sum_{q=1}^{n} e_{pq} \otimes e_{qj} = \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(e_{ij}) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}) = \sum_{p=1}^{n} \Delta(e_{ip}) \otimes e_{pj} \\ &= \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{iq} \otimes e_{qp} \otimes e_{pj} = \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Mostremos que $\phi \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I_{M^c(n,K)}$. De fato,

$$\begin{aligned}(\phi \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta)(e_{ij}) &= \phi((\varepsilon \otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj})) = \phi(\sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip}) \otimes e_{pj}) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip}) e_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{i,p} e_{pj} \\ &= e_{ij}.\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se o outro lado. Assim, $M^c(n,K)$ é uma coálgebra.

Exemplo 8. Sejam G um grupo e kG como vimos no exemplo da álgebra de grupo. Podemos introduzir nesse conjunto uma estrutura de coálgebra, basta observarmos que $\{1_k g\}_{g \in G}$ é uma base para kG. Por abuso de notação, escrevemos $\{g\}_{g \in G}$ para denotar tal base. Assim, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \Delta: kG & \to & kG \otimes kG \\ g & \mapsto & g \otimes g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \varepsilon: kG & \to & k \\ g & \mapsto & 1. \end{array}$$

e estender por linearidade.

1.2.1 Notação de Sweedler, subcoálgebras e coálgebras quociente

Nosso objetivo aqui, é apresentar uma notação nova que irá facilitar os cálculos futuros com longas composições que envolvam a comultiplicação. Essa notação é chamada de notação de Sweedler. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar ([1] , p.4-8).

Dada uma coálgebra (C, Δ, ε), podemos definir recursivamente uma sequência de aplicações $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ como segue:

- $\Delta_1 = \Delta$
- $\Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C$ ($n+1$ vezes), em que $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

Quando aplicamos Δ em um elemento de C temos o elemento $\Delta(c) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_i'$. Na notação de Sweedler, Δ aplicada em um elemento é escrita como $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, para qualquer $c \in C$. A vantagem está em suprimir os índices. Indutivamente, temos que $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Pela definição de Δ_n, quanto maior o n, mais "carregada" torna-se a escrita de $\Delta_n(c)$, qualquer que seja $c \in C$. Para $n = 2$, temos que

$$((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}$$

$$((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2.$$

Da comutatividade do primeiro diagrama temos

$$\Delta_2(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\Delta_2(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Do fato de que o segundo diagrama da definição da coalgebra comuta, temos

$$c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2).$$

Tendo em mente a notação de Sweedler, apresentamos mais um importante exemplo de coálgebra.

Exemplo 9. (Coálgebra cooposta) Utilizando a álgebra oposta vista no Exemplo 4, podemos dar uma noção dual de uma coálgebra cooposta. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra, definimos C^{cop} , como sendo exatamente o conjunto C, mas com comultiplicação definida por $\tau \circ \Delta : C \to C \otimes C$ em que τ é a aplicação *twist* já comentada. Denotamos a tripla como $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$. Seja $c \in C$. Então

$$((\Delta^{cop} \otimes I) \circ \Delta^{cop})(c) = (\Delta^{cop} \otimes I)(\sum c_2 \otimes c_1) = \sum c_{2_2} \otimes c_{2_1} \otimes c_1 = \sum c_3 \otimes c_2 \otimes c_1.$$

$$((I \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop})(c) = (I \otimes \Delta^{cop})(\sum c_2 \otimes c_1) = \sum c_2 \otimes c_{1_2} \otimes c_{1_1} = \sum c_3 \otimes c_2 \otimes c_1.$$

A comutatividade do segundo diagrama não é difícil de ser verificada. Portanto, $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ é de fato uma coálgebra.

Se olharmos as definições de comutatividade de uma álgebra (Definição 3) e morfismo de álgebra (Definição 4) podemos dar definições duais para coálgebras.

Definição 6. *Uma coálgebra (C,Δ,ε) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C\otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C\otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que, para todo $c \in C$, $\Delta(c)=\sum c_1\otimes c_2=(\tau\circ\Delta)(c)=\sum c_2\otimes c_1$.

Definição 7. *Sejam $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ e $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ duas coálgebras. Uma função k-linear $f:C\to D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser reescrita como

$$\Delta_D(f(c))=\sum f(c)_1\otimes f(c)_2=\sum f(c_1)\otimes f(c_2)=(f\otimes f)(\Delta(c)),\forall c\in C.$$

Essa igualdade nos diz em outras palavras que num morfismo de coálgebras podemos “tirar o índice de dentro” ou “colocar o índice para dentro”, dependendo se a “explosão” via Δ foi feita antes ou depois de aplicar o morfismo em um elemento da coálgebra.

Já a comutatividade do segundo diagrama pode ser reescrita como

$$(\varepsilon_D\circ f)(c)=\varepsilon_C(c).$$

Agora, estudamos um pouco subestruturas e estruturas quociente.

Definição 8. *Seja (C,Δ,ε) uma coálgebra. Um k-subespaço vetorial $D\subseteq C$ é dito uma subcoálgebra de C se $\Delta(D)\subseteq D\otimes D$.*

Definição 9. *Sejam (C,Δ,ε) uma coálgebra e I um k-subespaço vetorial de C. Dizemos que I*
i) é um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I)\subseteq C\otimes I$ (respectivamente, $\Delta(I)\subseteq I\otimes C$);

ii) é um coideal se $\Delta(I)\subseteq I\otimes C+C\otimes I$ e $\varepsilon(I)=\{0\}$.

Exemplo 10. Vejamos um exemplo de um coideal I, que não é coideal à direita nem à esquerda, basta considerar o anel de polinômios $k[X]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\Delta(X^n) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n, \quad \varepsilon(X^n) = 0 \text{ para } n \geq 1$$
$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon(1) = 1.$$

De fato, consideremos $I = kX$ o subespaço gerado por X. Mostremos que I é um coideal. É claro que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X \in I \otimes k[X] + k[X] \otimes I$ e que $\varepsilon(X) = 0$. Suponhamos, por absurdo, que I seja coideal à esquerda, ou seja, $\Delta(X) \in k[X] \otimes I$. Assim, temos $\Delta(X) = \sum c_i \otimes \alpha_i X$, com $c_i \in k[X]$ e $\alpha_i X \in I$. Notemos que,

$$\begin{aligned} X &= (\phi \circ (I_{k[X]} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(X) \\ &= \phi((I_{k[X]} \otimes \varepsilon)(\sum c_i \otimes \alpha_i X)) \\ &= \phi(\sum c_i \otimes \varepsilon(\alpha_i X)) \\ &= \sum c_i \alpha_i \varepsilon(X) = 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo. Uma conta análoga mostra que I não é coideal à direita.

Embora seja bastante útil o próximo lema, não apresentamos aqui sua demonstração. No entanto, o leitor pode encontrá-la em ([1], Lemma 1.4.8 , p.25).

Lema 1. *Sejam $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ morfismos de k-espaços vetoriais. Então $Ker(f \otimes g) = Ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes Ker(g)$.*

A próxima proposição mostra uma situação muito semelhante ao que ocorre com anéis, grupos e módulos.

Proposição 3. *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então são válidas as afirmações.*
i) $Im(f) = f(C)$ é uma subcoálgebra de D.

ii) $ker(f)$ é um coideal de C.

Demonstração: i) Como f é um morfismo de coálgebras o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D. \end{tikzcd}$$

Então $\Delta_D(Im(f)) = \Delta_D(f(C)) = (f \otimes f) \circ \Delta_C(C) \subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) = Im(f) \otimes Im(f)$. Logo, $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D.

Agora, como $f(ker(f)) = 0$ temos $(\Delta_D \circ f)(ker(f)) = 0$ o que implica $((f \otimes f) \circ \Delta_C)(ker(f)) = 0$. Portanto, $\Delta_C(ker(f)) \subseteq ker(f \otimes f) = ker(f) \otimes C + C \otimes ker(f)$, pelo lema acima. Como f é um morfismo de coálgebras, f comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Portanto, $\varepsilon_C(ker(f)) = (\varepsilon_D \circ f)(ker(f)) = 0$. Assim $ker(f)$ é um coideal de C. ■

Mostramos agora uma proposição que será importante no nosso estudo sobre Álgebras de Hopf. Conseguimos, a partir de duas álgebras dar uma estrutura de álgebra para o produto tensorial das mesmas. Isso será possível também para coálgebras.

Proposição 4. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Então $C \otimes D$ é também uma coálgebra.*

Demonstração: Sabemos que $C \otimes D$ tem uma estrutura de k-espaço vetorial. Definimos funções

$$\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D \to C \otimes D \otimes C \otimes D \text{ e } \varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \to k$$

por $\Delta_{C\otimes D} = (I_C \otimes \tau \otimes I_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e $\varepsilon_{C\otimes D} = \phi \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$, em que τ é a aplicação *twist* e $\phi : k \otimes k \to k$ é o isomorfismo canônico. Vale observarmos que $\Delta_{C\otimes D}$ e $\varepsilon_{C\otimes D}$ assim definidas são morfismos de k-espaços vetoriais pois são composições de funções k-lineares. Verifiquemos agora que os diagramas da definição de coálgebra comutam. Sejam $c \in C$ e $d \in D$. Então

$$\begin{aligned} (\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) &= (\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) \\ &= (\sum (c_1)_1 \otimes (d_1)_1 \otimes (c_1)_2 \otimes (d_1)_2 \otimes c_2 \otimes d_2) \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3 \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} (I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ (\Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) &= ((I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) \\ &= (\sum c_1 \otimes d_1 \otimes (c_2)_1 \otimes (d_2)_1 \otimes (c_2)_2 \otimes (d_2)_2 \\ &= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3 \end{aligned}$$

Vale a comutatividade do primeiro diagrama. Agora,

$$\begin{aligned}(c\otimes d) &= (\sum c_1\varepsilon_C(c_2))\otimes(\sum d_1\varepsilon_D(d_2))\\ &= \sum(c_1\otimes d_1)\varepsilon_C(c_2)\varepsilon_D(d_2)\\ &= \sum(c_1\otimes d_1)\varepsilon_{C\otimes D}(c_2\otimes d_2).\end{aligned}$$

Analogamente, pode-se mostrar que $(c\otimes d) = \sum \varepsilon_{C\otimes D}(c_1\otimes d_1)(c_2\otimes d_2)$. Logo, $C\otimes D$ é uma coálgebra. ∎

Teorema 2. *Sejam C uma coálgebra, I um coideal e $p : C \to C/I$ a projeção canônica de k-espaços vetoriais. Então*
i) Existe uma única estrutura em C/I (chamada de coálgebra quociente) tal que p é um morfismo de coálgebras.
ii) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras com $I \subseteq Ker(f)$, então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f}\circ p = f$.

Demonstração: i) Como I é um coideal temos que $\Delta(I)\subseteq I\otimes C + C\otimes I$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$. Assim, temos $((p\otimes p)\circ\Delta)(I) \subseteq (p\otimes p)(I\otimes C + C\otimes I) = 0$, por causa da definição de p. Portanto, $I\subseteq Ker((p\otimes p)\circ\Delta)$ e dessa maneira, é possível definir única $\overline{\Delta} : C/I \to C/I\otimes C/I$ por $\overline{\Delta}(\overline{c}) = (p\otimes p)\circ\Delta(c)$ para todo $c\in C$. Tal $\overline{\Delta}$ é claramente um morfismo de k-espaços vetoriais, pois é composta de funções k-lineares. Logo, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, "\overline{\Delta}"] \\ C\otimes C \arrow[r, "p\otimes p"'] & C/I\otimes C/I. \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Seja $c\in C$. Então $p(c) = \overline{c}$ e $\overline{\Delta}(\overline{c}) = (p\otimes p)(\Delta(c)) = (p\otimes p)(\sum c_1\otimes c_2) = \sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_2}$. Notemos que

$$((\overline{\Delta}\otimes I)\circ\overline{\Delta})(\overline{c}) = (\overline{\Delta}\otimes I)(\sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_2}) = \sum\overline{c_{1_1}}\otimes\overline{c_{1_2}}\otimes\overline{c_2} = \sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_2}\otimes\overline{c_3}$$

e

$$((I\otimes\overline{\Delta})\circ\overline{\Delta})(\overline{c}) = (I\otimes\overline{\Delta})(\sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_2}) = \sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_{2_1}}\otimes\overline{c_{2_2}} = \sum\overline{c_1}\otimes\overline{c_2}\otimes\overline{c_3}.$$

Portanto, $(\overline{\Delta}\otimes I)\circ\overline{\Delta} = (I\otimes\overline{\Delta})\circ\overline{\Delta}$ o que corresponde à comutatividade do primeiro diagrama. Como $\varepsilon(I) = \{0\}$, segue que $I\subseteq Ker(\varepsilon)$ e daí, podemos definir $\overline{\varepsilon} : C/I \to k$ tal que

$\overline{\varepsilon} \circ p = \varepsilon$, isto é, $\overline{\varepsilon}(p(c)) = \overline{\varepsilon}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$ para todo $c \in C$ e tal $\overline{\varepsilon}$ é k-linear. O diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C/I \arrow[dl, "\overline{\varepsilon}"] \\ & k. & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Como $\overline{\varepsilon}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$, $\forall c \in C$, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C/I \arrow[dd, "\overline{\Delta}"] & \\ k \otimes C/I \arrow[ur, "\phi"] & & C/I \otimes k \arrow[ul, "\psi"'] \\ & C/I \otimes C/I. \arrow[ul, "\overline{\varepsilon} \otimes I_{C/I}"] \arrow[ur, "I_{C/I} \otimes \overline{\varepsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, pois $(\psi \circ (I_{C/I} \otimes \overline{\varepsilon}))(\overline{\Delta}(\overline{c})) = \sum \overline{c_1}\, \overline{\varepsilon}(\overline{c_2}) = \sum \overline{c_1} \varepsilon(c_2) = \sum p(c_1)\varepsilon(c_2) = \sum p(c_1 \varepsilon(c_2)) = p(\sum c_1 \varepsilon(c_2)) = p(c) = \overline{c}$. Analogamente, $\phi \circ (\overline{\varepsilon} \otimes I_{C/I}) \circ \overline{\Delta} = I_{C/I}$.

Portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra. Segue, de imediato, dos diagramas comutativos (1.1) e (1.2) que p é um morfismo de coálgebras.

ii) Como $I \subseteq Ker(f)$, isso equivale a dizermos que $f(I) = 0$. Novamente, existe um único morfismo k-linear $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f} \circ p = f$. Dado $c \in C$, $\bar{f}(\bar{c}) = f(c)$. Daí,

$$(\Delta_D \circ \bar{f})(\bar{c}) = \Delta_D(f(c)) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = \sum \bar{f}(\overline{c_1}) \otimes \bar{f}(\overline{c_2}) = (\bar{f} \otimes \bar{f})(\overline{\Delta}(\bar{c})).$$

Finalmente,

$$(\varepsilon_D \circ \bar{f})(\bar{c}) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon(c) = \overline{\varepsilon}(\bar{c})$$

Portanto, $\bar{f}$ é um morfismo de coálgebras. ■

Corolário 1. *(Teorema fundamental do isomorfismo para coálgebras) Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então existe um isomorfismo canônico de coálgebras entre $C/Ker(f)$ e $Im(f)$.*

Demonstração: Fazendo $I = Ker(f)$ em ii) da proposição acima e observando que $\overline{f}$ é injetiva, segue o resultado, pois $Im(\overline{f}) = Im(f)$.

1.2.2 A (co)álgebra dual

Nessa seção, construímos a álgebra dual de uma coálgebra dada. No caso em que a álgebra possui dimensão finita, contruímos a coálgebra dual dessa álgebra. Algumas propriedades e construções que podem ser feitas com essa estrutura dual são desenvolvidas.

Dado um k-espaço vetorial V, usamos a notação V^* para representar o espaço $Hom(V,k)$.

Para o próximo lema, seguimos a referência ([1], Lemma 1.3.2 , p.16). Esse lema tem participação importante exatamente na parte em que, a partir de uma álgebra de dimensão finita, a estrutura de coálgebra dual é apresentada.

Lema 2. *Sejam k um corpo, M, N e V k-espaços vetoriais e as funções lineares* $\phi : M^* \otimes V \to Hom(M,V)$, $\phi' : Hom(M,N^*) \to (M \otimes N)^*$ *e* $\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ *definidas por*

$$\phi(f \otimes v)(m) = f(m)v, \text{ para } f \in M^*, v \in V, m \in M;$$

$$\phi'(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \text{ para } g \in Hom(M,N^*), m \in M, n \in N;$$

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n), \text{ para } f \in M^*, g \in N^*, m \in M, n \in N.$$

Então são válidas as afirmações.

(i) ϕ *é injetiva. Se V for finito dimensional, então* ϕ *é um isomorfismo.*

(ii) ϕ' *é um isomorfismo.*

(iii) ρ *é injetiva. Se N for finito dimensional, então* ρ *é um isomorfismo.*

Usando indução e o item (iii) do lema anterior enunciamos o resultado que segue.

Corolário 2. *Sejam* $M_1, M_2, ..., M_n$ *k-espaços vetoriais, a função* $\theta : M_1^* \otimes ... \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes ... \otimes M_n)^*$ *definido por* $\theta(f_1 \otimes ... \otimes f_n)(m_1 \otimes ... \otimes m_n) = f_1(m_1)...f_n(m_n)$ *é injetiva. Além disso, se todos os espaços* M_i *,* $\forall i \in \{1,...,n\}$ *forem finito dimensionais, então* θ *é um isomorfismo.*

Exigimos, no corolário, que todos os espaços tenham dimensão finita pois é importante no processo de indução.

Observação 3. Dados dois espaços vetoriais X e Y, $v : X \to Y$ uma função k-linear. Denotamos por $v^* : Y^* \to X^*$ a função k-linear definida por $v^*(f) = f \circ v$ para toda $f \in Y^*$.

Com esses resultados e definições em posse, podemos agora dar um passo adiante. Dada uma coálgebra (C, Δ, ε) , vamos introduzir uma estrutura de álgebra no k-espaço vetorial $C^* =$

$Hom(C,k)$. Para isso, é necessário definir funções k-lineares $M : C^* \otimes C^* \to C^*$ e $u : C^* \to k$ tais que os diagramas da definição de álgebra comutem.

Definimos

$$M : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \text{ e } u : k \xrightarrow{\varphi} k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

isto é, $M = \Delta^* \circ \rho$ e $u = \varepsilon^* \circ \varphi$ em que $\varphi(\alpha)(\lambda) = \alpha\lambda$, $\forall \alpha, \lambda \in k$. Claramente, M e u são k-lineares.

Vejamos que $u(1_k) = \varepsilon$. De fato, $u(1_k)(c) = ((\varepsilon^* \circ \varphi)(1_k))(c) = (\varepsilon^*(\varphi(1_k)))(c) = \varphi(1_k)(\varepsilon(c)) = 1_k\varepsilon(c) = \varepsilon(c)$, $\forall c \in C$. Logo, $u(1_k) = \varepsilon$, isto é, a unidade da álgebra C^* é exatamente $\varepsilon_C = \varepsilon$.

Observação 4. *Denotamos $M(f \otimes g)$ por $f * g$. Segue da definição de M que $(f * g)(c) = ((\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g))(c) = \Delta^*(\rho(f \otimes g))(c) = \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) = \sum f(c_1)g(c_2)$ para $f, g \in C^*$ e $c \in C$. Da definição de u, segue que $u(r)(c) = (\varepsilon^*(\varphi(r)))(c) = \varphi(r)(\varepsilon(c)) = r\varepsilon(c)$.*

Proposição 5. *(C^*, M, u) é uma álgebra.*

Demonstração: Precisamos verificar a comutatividade dos diagramas de álgebra. Sejam $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= (f * (g * h))(c). \end{aligned}$$

Portanto, a associatividade vale. Mostremos que $u(1_k)$ é o elemento identidade na multiplicação definida por M. Sejam $f \in C^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned} (\varepsilon * f)(c) &= \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) \\ &= f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\ &= f(c). \end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon * f = f$ e analogamente, $f * \varepsilon = f$. Logo, C^* é uma álgebra. ■

A álgebra C^* é chamada álgebra dual da coálgebra C. A multiplicação definida em C^* é chamada convolução. Vejamos alguns exemplos de álgebras duais de coálgebras dadas.

Exemplo 11. Seja S um conjunto não vazio e kS a coálgebra definina no Exemplo 5. Então a álgebra dual é $(kS)^* = Hom(kS,k)$ com multiplicação dada por

$$(f * g)(s) = f(s)g(s) \text{ para } f,g \in (kS)^* \text{ e } s \in S.$$

Exemplo 12. Seja H a coálgebra definida no Exemplo 6. Então a álgebra H^* tem multiplicação definida por

$$(f * g)(c_n) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{(n-i)})$$

para $f,g \in H^*$, $n \in \mathbb{N}$ e unidade $u : k \to H^*$ onde $u(r)(c_n) = r\delta_{0,n}$ para $r \in k$ e $n \in \mathbb{N}$.

Essa álgebra H^* é isomorfa à álgebra das séries de potências formais $k[[X]]$ vista no Exemplo 3 , o isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & H^* & \to & k[[X]] \\ & f & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(c_n)X^n. \end{array}$$

.

De fato, não é difícil ver que σ é k-linear. Lembrando da Definição 4, precisamos verificar que σ comuta os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} H^* \otimes H^* \arrow[r, "\sigma\otimes\sigma"] \arrow[d, "M_{H^*}"'] & k[[X]] \otimes k[[X]] \arrow[d, "M_{k[[X]]}"] \\ H^* \arrow[r, "\sigma"'] & k[[X]] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^* \arrow[rr, "\sigma"] & & k[[X]] \\ & K \arrow[ul, "u_{H^*}"] \arrow[ur, "u_{k[[X]]}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_{k[[X]]} \circ (\sigma \otimes \sigma)(f \otimes g) &= M_{k[[X]]}(\sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)X^n \otimes \sum_{n=0}^{\infty} g(c_n)X^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} f(c_i)g(c_j))X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{(n-i)}))X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(f * g)(c_n)X^n \\ &= (\sigma \circ M_{H^*})(f \otimes g). \end{aligned}$$

Portanto, $M_{k[[X]]} \circ (\sigma \otimes \sigma) = (\sigma \circ M_{H^*})$, ou seja, o primeiro diagrama comuta. Verifiquemos a unidade

$$\sigma(u_{H^*}(1)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{H^*}(1)(c_n)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0,n}X^n = 1_{k[[X]]}.$$

Nesse momento podemos nos fazer uma pergunta dual: dada uma álgebra (A,M,u) conseguimos definir em $A^* = Hom(A,k)$ uma estrutura de coálgebra? A resposta é, nem sempre.

Notemos que, para definir a estrutura de álgebra dual de uma coálgebra C, foi importante utilizar $\rho : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ para definir a multiplicação. Agora, queremos definir a comultiplicação e, para isso, necessitamos que ρ seja um isomorfismo. Exigindo que A seja de dimensão finita, ρ é um isomorfismo pelo Lema 2.

Sabemos que a função $T : k^* \to k$ definida por $T(\alpha) = \alpha(1)\ \forall \alpha \in k^*$ é um isomorfismo. Seja então uma álgebra (A,M,u) finito dimensional. Podemos definir $\Delta = \rho^{-1} \circ M^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ e $\varepsilon = T \circ u^* : A^* \to k$ tal que $\varepsilon(f) = (T \circ u^*)(f) = T(u^*(f)) = u^*(f)(1) = f(u(1)) = f(1_A)$.

Lema 3. *Seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ para $i \in \mathbb{N}$ e $g_i, h_i \in A^*$. Então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)\ \forall a,b \in A$. Além disso, se $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$ para $g'_j, h'_j \in A^*$ então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$, isto é, $\sum g_i \otimes h_i$ é univocamente determinada pela condição $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b), \forall a,b \in A$.*

Demonstração: Notemos que $\sum_i g_i(a)h_i(b) = \rho(\Delta(f))(a \otimes b)$, mas pela definição de $\Delta = \rho^{-1} \circ M^*$, temos que $\sum_i g_i(a)h_i(b) = M^*(f)(a \otimes b) = f(M(a \otimes b)) = f(ab)$.

Agora, se existir uma outra família finita de funções $g'_j, h'_j \in A^*$ tal que $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$, então

$$\begin{aligned} \rho(\sum_i g_i \otimes h_i)(a \otimes b) &= \sum_i g_i(a)h_i(b) \\ &= f(ab) \\ &= \sum_j g'_j(a)h'_j(b) \\ &= \rho(\sum_j g'_j \otimes h'_j)(a \otimes b). \end{aligned}$$

Como ρ é injetiva, veja Lema 2, temos que $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$. ∎

Proposição 6. *Seja (A,M,u) uma álgebra de dimensão finita. Então (A^*,Δ,ε) é uma coálgebra.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$ com $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Denotamos $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{i,j} \otimes g''_{i,j}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$. Verificamos a comutatividade dos diagramas da definição de uma coálgebra.

$$((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f) = (\Delta \otimes I)(\sum_i g_i \otimes h_i) = \sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i$$

$$((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f) = (I \otimes \Delta)(\sum_i g_i \otimes h_i) = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}.$$

Utilizando a função $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ definida por $\theta(u \otimes v \otimes w)(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$ para $u,v,w \in A^*$ e $a,b,c \in A$, segue que θ é injetiva pelo Corolário 2. Notemos que,

$$\begin{aligned}
\theta(\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g'_{i,j}(a) g''_{i,j}(b) h_i(c) \\
&= \sum_i g_i(ab) h_i(c) \\
&= f((ab)c) \\
&= f(abc).
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\theta(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j})(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a) h'_{i,j}(b) h''_{i,j}(c) \\
&= \sum_i g_i(a) h_i(bc) \\
&= f(a(bc)) \\
&= f(abc).
\end{aligned}$$

Como a função θ é injetiva, temos que

$$\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$$

e isso nos dá que

$$((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f) = ((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f), \forall f \in A^*.$$

Logo, Δ é coassociativa.

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned}(\phi \circ (\varepsilon \otimes I_{A^*}) \circ \Delta(f))(a) &= (\sum_i \varepsilon(g_i)h_i)(a) \\ &= \sum_i g_i(1_A)h_i(a) \\ &= f(1_A a) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_i \varepsilon(g_i)h_i = f$ e analogamente, $\sum_i \varepsilon(h_i)g_i = f$. Assim $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. ■

Vamos mostrar agora que essas construções duais que fizemos permanecem bem com respeito a morfismos.

Proposição 7. *Sejam C e D coálgebras e A e B álgebras de dimensão finita.*
i) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras então $f^* : D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras.
ii) Se $g : A \to B$ é um morfismo de álgebras então $g^* : B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração:

i) Sejam $d^*, e^* \in D^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}(f^*(d^* * e^*))(c) &= (d^* * e^*)(f(c)) \\ &= \sum d^*(f(c)_1)e^*(f(c)_2) \\ &= \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2)) \\ &= \sum (f^*(d^*))(c_1)(f^*(e^*))(c_2) \\ &= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c).\end{aligned}$$

Portanto, temos $f^*(d^* * e^*) = f^*(d^*) * f^*(e^*)$. A unidade da álgebra D^* é ε_D, daí $f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$ pois f é morfismo de coálgebras.

ii) Precisamos verificar que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "g^* \otimes g^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[rr, "g^*"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B^*}"'] & & A^* \arrow[dl, "\varepsilon_{A^*}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Seja $b^* \in B^*$. Lembrando do que foi mostrado no Lema 3, podemos escrever $(\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(b^* \circ g) = \sum_i g_i \otimes h_i$ e $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_j p_j \otimes q_j$. Usamremos a função ρ definida no Lema 2 com $M = N = A$, que é injetiva. Sejam $a, b \in A$. Então

$$\rho((\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b) = (b^* \circ g)(ab) = b^*(g(ab))$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
\rho((g^* \otimes g^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*))(a \otimes b) &= \rho(\sum_j p_j \circ g \otimes q_j \circ g)(a \otimes b) \\
&= \sum_j (p_j \circ g)(a)(q_j \circ g)(b) \\
&= \sum_j p_j(g(a))q_j(g(b)) \\
&= b^*(g(a)g(b)) \\
&= b^*(g(ab)).
\end{aligned}$$

Pela injetividade de ρ temos que $(\Delta_{A^*} \circ g^*)(b^*) = (g^* \otimes g^*) \circ \Delta_{B^*}(b^*)$. Portanto, o primeiro diagrama comuta. Finalmente, $(\varepsilon_{A^*} \circ g^*)(b^*) = \varepsilon_{A^*}(b^* \circ g) = (b^* \circ g)(1) = b^*(g(1)) = b^*(1) = \varepsilon_{B^*}(b^*)$, ou seja, o segundo diagrama comuta. Logo, g^* é um morfismo de coálgebras. ∎

2 Comódulos

Da mesma forma que definimos álgebras via diagramas para obtermos a noção dual de coálgebra, é possível darmos uma definição via diagramas de um A-módulo para obtermos a noção dual de um C-comódulo, em que (A,M,u) é uma álgebra e (C,Δ,ε) é uma coálgebra. A definição de módulo sobre uma álgebra unitária é uma exigência necessária e um pouco maior do que pedir que A seja apenas um anel. Temos a definição "tradicional" de um A-módulo, apresentada abaixo:

Definição 10. *Seja (A,m,u) uma álgebra. Dizemos que um conjunto $M \neq \emptyset$ é um A-módulo à esquerda se M é um k-espaço vetorial e está definida uma multiplicação externa que a cada par $(\alpha,m) \in A \times M$ associa um elemento $\alpha m \in M$, de forma que, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2 \in A$ e $m_1,m_2 \in M$, valem as seguintes propriedades:*

i) $\alpha_1(\alpha_2 m_1) = (\alpha_1\alpha_2)m_1$;

ii) $\alpha_1(m_1+m_2) = \alpha_1 m_1 + \alpha_1 m_2$;

iii) $(\alpha_1+\alpha_2)m_1 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_1$;

iv) $1_A m_1 = m_1$.

De maneira análoga definimos a noção de um A-módulo à direita. Vamos agora apresentar uma nova definição via diagramas e provar que é equivalente à definição acima.

Definição 11. *Seja (A,m,u) uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (M,λ) em que M é um k-espaço vetorial e $\lambda : A\otimes M \to M$ é um morfismo de k-espaços vetorias tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "I_A\otimes\lambda"] \arrow[d, "m\otimes I_M"'] & A\otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\lambda"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[rr, "\lambda"] & & M \arrow[dl, "\phi"] \\ & k\otimes M \arrow[ul, "u\otimes I_M"] & \end{tikzcd}$$

comutam, em que $\phi : M \to k\otimes M$ é o isomorfismo canônico.

A comutatividade do primeiro diagrama nos diz que $\alpha_1(\alpha_2 x) = (\alpha_1\alpha_2)x$, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ e $x \in M$. Já a comutatividade do segundo diagrama nos diz que $1_A x = x$, $\forall x \in M$.

Observação 5. De maneira análoga, podemos definir um A-módulo à direita sobre uma álgebra A, sendo o morfismo da forma $\lambda : M \otimes A \to M$.

Afirmação 1. *As Definições* 10 *e* 11 *dadas acima são equivalentes.*

Demonstração: Suponhamos M nas condições da Definição 11. Precisamos definir uma multiplicação por escalar que satisfaça as propriedades da Definição 10. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & A \times M & \to & M \\ & (\alpha, m) & \mapsto & \alpha \cdot m = \lambda(\alpha \otimes m) = \alpha m. \end{array}$$

As propriedades i) e iv) seguem imediatamente da comutatividade do primeiro e segundo diagramas da Definição 11, respectivamente. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ e $m_1, m_2 \in M$. Então

ii)

$$\begin{aligned} \alpha_1(m_1 + m_2) &= \lambda(\alpha_1 \otimes (m_1 + m_2)) \\ &= \lambda(\alpha_1 \otimes m_1 + \alpha_1 \otimes m_2)) \\ &= \lambda(\alpha_1 \otimes m_1) + \lambda(\alpha_1 \otimes m_2) \\ &= \alpha_1 m_1 + \alpha_1 m_2. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)m_1 &= \lambda((\alpha_1 + \alpha_2) \otimes m_1) \\ &= \lambda((\alpha_1 \otimes m_1 + \alpha_2 \otimes m_1) \\ &= \lambda(\alpha_1 \otimes m_1) + \lambda(\alpha_2 \otimes m_1) \\ &= \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_1. \end{aligned}$$

Logo, M é um A-módulo à esquerda segundo a Definição 10. Agora mostremos que a Definição 10 implica a Definição 11. Suponhamos M nas condições da Definição 10. Assim, existe uma função

$$\begin{array}{rccl} \lambda' : & A \times M & \to & M \\ & (\alpha, m) & \mapsto & \alpha m \end{array}$$

tal que satisfaz todas as propriedades da Definição 10. Essa função λ' é claramente k-bilinear.

Pela propriedade universal do produto tensorial existe um único morfismo de k-espaços vetoriais $\lambda : A\otimes M \to M$ tal que $\lambda(\alpha\otimes m) = \alpha m$ para $\alpha \in A$ e $m \in M$. Verifiquemos a comutatividade dos diagramas da Definição 11. Notemos que,

$$(\lambda \circ (u\otimes I_M)\circ \phi)(x) = (\lambda \circ (u\otimes I_M))(1\otimes x) = \lambda(u(1)\otimes x) = 1_A x = x\ ,\ \forall x \in M$$

e assim, o segundo diagrama comuta. Para o primeiro, sejam $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$. Então

$$(\lambda \circ (I_A\otimes \lambda))(a_1\otimes a_2\otimes m) = \lambda(a_1\otimes a_2 m) = a_1(a_2 m)$$

e

$$(\lambda \circ (m\otimes I_M))(a_1\otimes a_2\otimes m) = \lambda(a_1 a_2\otimes m) = (a_1 a_2)m$$

e, por hipótese, $a_1(a_2 m) = (a_1 a_2)m$. Logo, $\lambda\circ(I_A\otimes\lambda) = \lambda\circ(m\otimes I_M)$. Portanto, M é um A-módulo à esquerda segundo a Definição 11. ■

Com essa definição de A-módulo via diagramas, podemos dualizá-la para obtermos a noção de um C-comódulo, em que (C,Δ,ε) é uma coálgebra.

Definição 12. *Um C-comódulo à direita é um par (M,ρ), em que M é um k-espaço vetorial, $\rho : M \to M\otimes C$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M\otimes C \arrow[d, "I_M\otimes\Delta"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\rho\otimes I_C"'] & M\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes C \arrow[rr, "I_M\otimes\varepsilon"] & & M\otimes k \arrow[dl, "\phi"] \\ & M \arrow[ul, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

em que $\phi : M\otimes k \to M$ é o isomorfismo canônico.

De maneira similar, podemos definir um C-comódulo à esquerda. Podemos introduzir a notação de Sweedler para comódulos também. Seja M um C-comódulo à direita, com a estrutura dada por $\rho : M \to M\otimes C$. Então $\forall m \in M$ temos que

$$\rho(m) = \sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}$$

em que os elementos $m'_{(0)}s \in M$ e os $m'_{(1)}s \in C$. Se M é um C-comódulo à esquerda com a estrutura dada por $\rho : M \to C\otimes M$, denotamos

$$\rho(m) = \sum m_{(-1)}\otimes m_{(0)}.$$

A comutatividade dos diagramas da definição de um comódulo à direita pode ser escrita, com notação de Sweedler, assim

$$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2$$

e

$$\sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m.$$

Exemplo 13. Toda coálgebra C é um C-comódulo à direita e à esquerda. A função que lhe dá a estrutura de C-comódulo (à direita e à esquerda) é a comultiplicação $\Delta : C \to C \otimes C$.

Exemplo 14. Se C é uma coálgebra e X é um k-espaço vetorial, então $X \otimes C$ é um C-comódulo à direita com a estrutura dada pela função $\rho : X \otimes C \to X \otimes C \otimes C$ em que $\rho = I_X \otimes \Delta$, ou seja, $\rho(x \otimes c) = \sum x \otimes c_1 \otimes c_2$, para quaisquer $x \in X$ e $c \in C$.

Verifiquemos que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta"] \arrow[d, "I_X \otimes \Delta"'] & X \otimes C \otimes C \arrow[d, "I_{X\otimes C} \otimes \Delta"] \\
X \otimes C \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta \otimes I_C"] & X \otimes C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[dd, "I_X \otimes \Delta"'] & \\
& X \otimes C \otimes k \arrow[ul, "\phi"'] \\
X \otimes C \otimes C. \arrow[ur, "I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Para o primeiro diagrama, sejam $x \in X$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}
((I_X \otimes \Delta \otimes I_C) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum x \otimes \Delta(c_1) \otimes c_2 \\
&= \sum x \otimes c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \ \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((I_{X\otimes C} \otimes \Delta) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama,

$$\begin{aligned}
(\phi\circ(I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)\circ(I_X\otimes\Delta))(x\otimes c) &= (\phi\circ(I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon))(x\otimes(\sum c_1\otimes c_2))\\
&= (\phi\circ(I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon))(\sum x\otimes c_1\otimes c_2)\\
&= \phi\left(\sum(I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(x\otimes c_1\otimes c_2)\right)\\
&= \phi\left(\sum x\otimes c_1\otimes\varepsilon(c_2)\right)\\
&= \sum x\otimes c_1\varepsilon(c_2)\\
&= x\otimes\sum c_1\varepsilon(c_2)\\
&= x\otimes c.
\end{aligned}$$

Definimos agora a noção de morfismo para comódulos, isso é importante para termos uma visão mais categórica dessa estrutura.

Definição 13. *i) Sejam A uma álgebra e $(X,\lambda_X),(Y,\lambda_Y)$ dois A-módulos à esquerda. Uma função k-linear $f : X\to Y$ é dita um morfismo de A-módulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes X \arrow[r, "I_A\otimes f"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & A\otimes Y \arrow[d, "\lambda_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do diagrama acima nos diz que

$$f(ax) = af(x).$$

ii) Sejam C uma coálgebra e (M,ρ_M), (N,ρ_N) dois C-comódulos à direita. Uma função k-linear $g : M\to N$ é dita um morfismo de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M\otimes C \arrow[r, "g\otimes I_C"'] & N\otimes C.
\end{tikzcd}$$

A comutatividade desse último diagrama nos diz que

$$\sum g(m)_{(0)}\otimes g(m)_{(1)} = \sum g(m_{(0)})\otimes m_{(1)}.$$

Podemos falar agora na categoria dos comódulos à direita sobre uma coálgebra C, cujos objetos são todos os C-comódulos à direita e os morfismos entre dois objetos quaisquer dessa categoria são morfismos de C-comódulos à direita. Denotamos tal categoria por $\mathscr{M}^C$. De maneira análoga, é definida a categoria dos C-comódulos à esquerda como ${}^C\mathscr{M}$.

Definição 14. *Seja (M,ρ) um C-comódulo à direita. Um k-subespaço vetorial N de M é chamado um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.*

Observemos que N sendo um C-subcomódulo à direita de M, N é um C-comódulo à direita, cuja estrutura é a restrição de ρ a N.

Sejam (M,ρ) um C-comódulo à direita e N um C-subcomódulo de M. Sejam M/N o k-espaço vetorial quociente e $\pi : M \to M/N$, a projeção canônica dada por $\pi(m) = \overline{m}$, para todo $m \in M$.

Teorema 6. *Sejam (M,ρ) um C-comódulo à direita e N um C-subcomódulo de M. Então existe uma única estrutura de C-comódulo à direita em M/N tal que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.*

Demonstração: Temos que $((\pi \otimes I_C) \circ \rho)(N) \subseteq (\pi \otimes I_C)(N \otimes C) \subseteq \pi(N) \otimes C = 0$, pois $N = ker(\pi)$. Logo, $N \subseteq Ker((\pi \otimes I_C) \circ \rho)$. Portanto, existe um único morfismo $\bar{\rho}$ de k-espaços vetoriais tal que o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\pi \otimes I_C"] & (M/N) \otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\bar{\rho} \circ \pi = (\pi \otimes I_C) \circ \rho$. Então, para qualquer $m \in M$,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\overline{m}) &= (\bar{\rho} \circ \pi)(m) = ((\pi \otimes I_C) \circ \rho)(m) = (\pi \otimes I_C)(\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}) \\ &= \sum \pi(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = \sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}. \end{aligned}$$

Mostremos que $(M/N, \bar{\rho})$ é um C-comódulo à direita, ou seja, temos que mostrar que

$(I_{M/N}\otimes\Delta)\circ\bar{\rho}=(\bar{\rho}\otimes I_C)\circ\bar{\rho}$. De fato, seja $\overline{m}\in M/N$. Então

$$\begin{aligned}((I_{M/N}\otimes\Delta)\circ\overline{\rho})(\overline{m}) &= (I_{M/N}\otimes\Delta)(\sum\overline{m_{(0)}}\otimes m_{(1)})\\ &= \sum\overline{m_{(0)}}\otimes m_{(1)_1}\otimes m_{(1)_2}\\ &= \sum\overline{m_{(0)}}\otimes m_{(1)}\otimes m_{(2)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((\overline{\rho}\otimes I_C)\circ\overline{\rho})(\overline{m}) &= (\overline{\rho}\otimes I_C)(\sum\overline{m_{(0)}}\otimes m_{(1)})\\ &= \sum\overline{\rho}(\overline{m_{(0)}})\otimes m_{(1)}\\ &= \sum\overline{(m_{(0)})_{(0)}}\otimes(m_{(0)})_{(1)}\otimes m_{(1)}\\ &= \sum\overline{m}_{(0)}\otimes m_{(1)}\otimes m_{(2)}.\end{aligned}$$

Logo, $(I_{M/N}\otimes\Delta)\circ\bar{\rho}=(\bar{\rho}\otimes I_C)\circ\bar{\rho}$. A comutatividade do segundo diagrama é válida pois

$$\begin{aligned}(\phi\circ(I_{M/N}\otimes\varepsilon)\circ\overline{\rho})(\overline{m}) &= (\phi\circ(I_{M/N}\otimes\varepsilon))(\sum\overline{m_{(0)}}\otimes m_{(1)})\\ &= \sum\overline{m_{(0)}}\varepsilon(m_{(1)})\\ &= \sum\overline{m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)})}\\ &= \overline{\sum m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)})}=\overline{m}.\end{aligned}$$

Do fato do diagrama do início da demonstração ser comutativo concluímos que $\pi : M\to M/N$ é um morfismo de comódulos. ■

O comódulo M/N com a estrutura definida acima é chamado *comódulo quociente de M com respeito ao subcomódulo N*.

Proposição 8. *Sejam M e N dois C-comódulos à direita e $f : M\to N$ um morfismo de comódulos. Então $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N e $Ker(f)$ é um C-subcomódulo de M.*

Demonstração: Sejam $\rho_M : M\to M\otimes C$ e $\rho_N : N\to N\otimes C$ as aplicações de estrutura dos dois C-comódulos. Como f é um morfismo de comódulos, temos que $((f\otimes I_C)\circ\rho_M)(Ker(f))=\rho_N(f(Ker(f)))=0$. Dessa maneira, $\rho_M(Ker(f))\subseteq Ker(f\otimes I_C)=Ker(f)\otimes C$, a última igualdade decorre do Lema 1. Assim, $Ker(f)$ é um subcomódulo de M.

Por outro lado, $\rho_N(Im(f))=\rho_N(f(M))=(\rho_N\circ f)(M)=((f\otimes I_C)\circ\rho_M)(M)\subseteq Im(f)\otimes C$ e portanto, $Im(f)$ é um subcomódulo de N. ■

Teorema 7. *(Teorema fundamental do isomorfismo para comódulos) Sejam $f : M\to N$ um* *morfismo de C-comódulos à direita, $\pi : M \to M/Ker(f)$ e $i : Im(f) \to N$, a projeção e a inclusão canônicas, respectivamente. Então existe um único isomorfismo de C-comódulos $\overline{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/Kerf \arrow[r, "\overline{f}"] & Imf. \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração: Pelo teorema do isomorfismo de espaços vetoriais, existe um único isomorfismo $\overline{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ de k-espaços vetoriais tal que $f(m) = (i \circ \overline{f} \circ \pi)(m) = \overline{f}(\overline{m})$, $\forall m \in M$. Resta mostrarmos que $\overline{f}$ é um morfismo de comódulos.

Sejam $\omega : M/Ker(f) \to (M/Ker(f)) \otimes C$ e $\theta : Im(f) \to Im(f) \otimes C$ as aplicações de estrutura dos respectivos comódulos. Temos que

$$\begin{aligned} ((\overline{f} \otimes I_C) \circ \omega)(\overline{m}) &= (\overline{f} \otimes I_C)(\sum \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}) \\ &= \sum \overline{f}(\overline{m_{(0)}}) \otimes m_{(1)} \\ &= \sum f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} \\ &= \sum f(m)_{(0)} \otimes f(m)_{(1)} \\ &= \sum \overline{f(m)_{(0)}} \otimes f(m)_{(1)} \\ &= (\theta \circ \overline{f})(\overline{m}), \end{aligned}$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} M/Ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\omega"'] & Im(f) \arrow[d, "\theta"] \\ (M/Ker(f)) \otimes C \arrow[r, "\overline{f} \otimes I_C"] & Im(f) \otimes C \end{tikzcd}$$

e isso nos diz que $\overline{f}$ é um morfismo de C-comódulos à direita. ■

2.1 Módulos racionais

Todas as construções nessa seção têm por objetivo demonstrar um isomorfismo entre categorias, a saber as categorias $\mathscr{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathscr{M})$, essa última será definida mais adiante no texto.

Sejam C uma coálgebra e C^* sua álgebra dual. Consideremos M um k-espaço vetorial e $\omega : M \to M \otimes C$ k-linear, dada por $\omega(m) = \sum\limits_i m_i \otimes c_i$, para todo $m \in M$. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \psi_\omega : & C^* \otimes M & \to & M \\ & c^* \otimes m & \mapsto & \sum\limits_i c^*(c_i) m_i \end{array}$$

em que $\psi_\omega = \varphi \circ (\sigma \otimes I_M) \circ (I_{C^*} \otimes \tau) \circ (I_{C^*} \otimes \omega)$, em que τ é a aplicação *twist* (já vista no Capítulo 1),

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & C^* \otimes C & \to & k \\ & c^* \otimes c & \mapsto & c^*(c) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccl} \varphi : & k \otimes M & \to & M \\ & \alpha \otimes m & \mapsto & \alpha m. \end{array}$$

Proposição 9. *(M, ω) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Escrevemos, para todo $m \in M$, $\omega(m) = \sum\limits_i m_i \otimes c_i = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Denotamos, para todo $c^* \in C^*$, $c^* \cdot m = \psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)}) m_{(0)}$. Mostremos que ψ_ω é uma ação. Primeiro, observemos que

$$1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m$$

e, para quaisquer $c^*, d^* \in C^*$ e $m \in M$,

$$\begin{aligned} c^* \cdot (d^* \cdot m) &= c^* \cdot \left(\sum d^*(m_{(1)}) m_{(0)}\right) \\ &= \sum d^*(m_{(1)}) c^*({m_{(0)}}_{(1)}) {m_{(0)}}_{(0)} \\ &\overset{(*)}{=} \sum d^*({m_{(1)}}_2) c^*({m_{(1)}}_1) m_{(0)} \\ &= \sum c^*({m_{(1)}}_1) d^*({m_{(1)}}_2) m_{(0)} \\ &= \sum (c^* * d^*)(m_{(1)}) m_{(0)} \\ &= (c^* * d^*) \cdot m \end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue do fato de que (M, ω) é C-comódulo à direita. Logo, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.

$(\Leftarrow)$ Temos que (M,ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda e denotamos $\omega(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, $\forall m \in M$ e $\psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)} = c^* \cdot m$. Temos que verificar que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\omega"'] & M\otimes C \arrow[d, "I_M\otimes\Delta"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\omega\otimes I_C"'] & M\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes C \arrow[rr, "I_M\otimes\varepsilon"] & & M\otimes k \arrow[dl, "\phi"] \\ & M. \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

Para o segundo diagrama, notemos que $m = 1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = (\phi \circ (I_M \otimes \varepsilon) \circ \omega)(m)$, $\forall m \in M$. Sabemos, por hipótese, que $(c^* * d^*) \cdot m = c^* \cdot (d^* \cdot m)$, $\forall c^*, d^* \in C^*$ e $\forall m \in M$. Assim,

$$\begin{aligned} c^* \cdot (d^* \cdot m) &= \sum d^*(m_{(1)})c^*(m_{(0)_{(1)}})m_{(0)_{(0)}} \\ &= \sum c^*(m_{(0)_{(1)}})d^*(m_{(1)})m_{(0)_{(0)}} \\ &= \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((\omega \otimes I) \circ \omega(m)) \end{aligned}$$

em que $\Phi : M \otimes k \otimes k \to M$ é o isomorfismo canônico dado por $\Phi(m \otimes \alpha \otimes \lambda) = m(\alpha\lambda)$. Além disso,

$$\begin{aligned} (c^* * d^*) \cdot m &= \sum (c^* * d^*(m_{(1)}))m_{(0)} \\ &= \sum c^*(m_{(1)_1})d^*(m_{(1)_2})m_{(0)} \\ &= \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((I \otimes \Delta) \circ \omega(m)). \end{aligned}$$

Logo, $\Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((\omega \otimes I_C) \circ \omega(m)) = \Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)((I_M \otimes \Delta) \circ \omega(m))$. Escrevemos $y = (\omega \otimes I_C) \circ \omega(m) - (I_M \otimes \Delta) \circ \omega(m)$. Sabemos que C possui base e chamamos uma delas de $\{e_i\}_{i\in I}$. Em vista disso, podemos escrever $y = \sum m_{i,j} \otimes e_i \otimes e_j \in M \otimes C \otimes C$. Para quaisquer i_0, j_0 fixados, podemos considerar $e^*_{i_0}$ e $e^*_{j_0}$ em C^* tais que $e^*_{i_0}(e_t) = \delta_{i_0,t}$ e $e^*_{j_0}(e_l) = \delta_{j_0,l}$. Notemos que, $\Phi(I_M \otimes c^* \otimes d^*)(y) = 0$, $\forall c^*, d^* \in C^*$. Em particular, $0 = \Phi(I_M \otimes e^*_{i_0} \otimes e^*_{j_0})(y) = m_{i_0,j_0}$ o que implica que $y = 0$. Logo, $(\omega \otimes I_C) \circ \omega(m) = (I_M \otimes \Delta) \circ \omega(m)$, $\forall m \in M$ e assim,$(\omega \otimes I_C) \circ \omega = (I_M \otimes \Delta) \circ \omega$. ■

Sejam M um C^*-módulo à esquerda e $\psi_\omega : C^* \otimes M \to M$ a aplicação que fornece sua estrutura de módulo. O conjunto $Hom(C^*, M)$ é o k-espaço vetorial das transformações k-lineares de

C^* em M. Definimos

$$\begin{array}{rcll} \rho_M: & M & \rightarrow & Hom(C^*,M) \\ & m & \mapsto & \rho_M(m)(c^*) = c^* \cdot m. \end{array}$$

Sejam $j: C \to C^{**}$ e $f_M: M \otimes C^{**} \to Hom(C^*,M)$ definidas por $j(c)(c^*) = c^*(c)$ e $f_M(m \otimes c^{**})(c^*) = c^{**}(c^*)m$, respectivamente. Mostremos que j e f_M são injetoras.

Fato 1: j é injetora. De fato, seja $c \in Ker(j)$. Então $j(c) = 0$. Assim, $0 = j(c)(c^*) = c^*(c)$ para qualquer $c^* \in C^*$ e isso implica que $c = 0$.

Fato 2: f_M é injetora. De fato, seja $\sum\limits_i m_i \otimes c_i^{**} \in Ker(f_M)$ em que os $m_i's$ são linearmente independentes (esse fato segue de [1], p.16). Então $0 = f_M(\sum\limits_i m_i \otimes c_i^{**})(c^*) = \sum\limits_i c_i^{**}(c^*)m_i$ para qualquer $c^* \in C^*$, o que implica, $c_i^{**}(c^*) = 0$, $\forall c^* \in C^*$, ou seja, $c_i^{**} = 0$ e daí $\sum\limits_i m_i \otimes c_i^{**} = 0$.

Segue disso, que a função

$$\mu_M: M \otimes C \to Hom_k(C^*,M)$$

definida por $\mu_M = f_M \circ (I_M \otimes j)$ é injetora. Da definição, temos

$$\begin{array}{rcl} \mu_M(m \otimes c)(c^*) & = & (f_M \circ (I_M \otimes j)(m \otimes c))(c^*) \\ & = & (f_M(m \otimes j(c)))(c^*) \\ & = & j(c)(c^*)m \\ & = & c^*(c)m \end{array}$$

para quaisquer $c \in C$, $c^* \in C^*$ e $m \in M$.

Definição 15. *Um C^*-módulo à esquerda M é dito racional se $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$.*

Vejamos algumas observações que seguem imediatamente dessa definição.

Observação 8. M é um C^*-módulo à esquerda racional se, e somente se, $c^* \cdot m = \sum\limits_i c^*(c_i)m_i$, para famílias finitas $(c_i)_{i \in I} \subseteq C$ e $(m_i)_{i \in I} \subseteq M$ (I é um conjunto finito), $\forall m \in M$ e $\forall c^* \in C^*$.

De fato, $\rho_M(m) \in \mu_M(M \otimes C)$ se, e somente se, $\rho_M(m) = \mu_M(\sum\limits_{i \in I} m_i \otimes c_i)$ para famílias finitas $(c_i)_{i \in I} \subseteq C$ e $(m_i)_{i \in I} \subseteq M$ se, e somente se, $\rho_M(m)(c^*) = c^* \cdot m = \mu_M(\sum\limits_{i \in I} m_i \otimes c_i)(c^*) = \sum\limits_{i \in I} c^*(c_i)m_i$, $\forall c^* \in C^*$.

Observação 9. Seja M um C^*-módulo à esquerda racional. Se, para $m \in M$, existem dois pares de famílias finitas $(c_i)_{i \in I} \subseteq C$ e $(m_i)_{i \in I} \subseteq M$, $(c'_j)_{j \in J} \subseteq C$ e $(m'_j)_{j \in J} \subseteq M$ então $\sum\limits_{i \in I} m_i \otimes c_i =$

$\sum_{j\in J} m'_j \otimes c'_j$, pois μ_M é injetora.

Exemplo 15. Seja C uma coálgebra. Então C é um C^*-módulo à esquerda e à direita racional cujas ações são dadas por $c^* \cdot c = \sum c^*(c_2)c_1$ e $c \cdot c^* = \sum c^*(c_1)c_2$.

Exemplo 16. Se C é uma coálgebra de dimensão finita, então o C^*-módulo à esquerda C^* é racional. De fato, nesse caso temos que $j : C \to C^{**}$ e $f_{C^*} : C^* \otimes C^{**} \to Hom(C^*, C^*)$ são isomorfismos de k-espaços vetoriais, para o isomorfismo j, veja ([1], Proposition 1.3.14, p.22) e para f_{C^*} notemos que é um caso particular do Lema 2 item (i), a menos de *twist*. Segue da definição de μ_{C^*} que $\mu_{C^*}(C^* \otimes C) = Hom(C^*, C^*)$, pois nesse caso μ_{C^*} é um isomorfismo. Portanto, $\rho_{C^*}(C^*) \subseteq \mu_{C^*}(C^* \otimes C)$, ou seja, C^* é um C^*-módulo à esquerda racional.

Denotamos por $Rat(_{C^*}\mathscr{M})$ a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais. Falamos sobre categorias e não colocamos a definição propriamente dita de uma categoria. Isso se deve ao fato de que as categorias trabalhadas aqui são as categorias $\mathscr{M}^c$ cujos objetos e morfismos já foram ditos anteriormente e a categoria $Rat(_{C^*}\mathscr{M})$, categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais, cujos objetos são todos os C^*-módulos à esquerda racionais e os morfismos entre dois objetos quaisquer dessa categoria são morfismos de C^*-módulos à esquerda.

O leitor interessado pode consultar sobre o tema num contexto mais geral em ([4], p.52-53) e ([1], p.361-362). Entretanto, para o próximo teorema, é conveniente citarmos a seguinte definição, que diz respeito à duas categorias serem isomorfas.

Definição 16. *Duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são ditas isomorfas se existem funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $I_{\mathscr{C}} = G \circ F$ e $I_{\mathscr{D}} = F \circ G$, em que $I_{\mathscr{C}}$ e $I_{\mathscr{D}}$ são os funtores identidade nas respectivas categorias, isto é, $I_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ é tal que $I_{\mathscr{C}}(C) = C$, para qualquer objeto C em $\mathscr{C}$ e, para qualquer morfismo $f : C \to C'$ em $\mathscr{C}$, $I_{\mathscr{C}}(f) = f$ e da mesma forma tem-se $I_{\mathscr{D}}$.*

Teorema 10. *As categorias $\mathscr{M}^c$ e $Rat(_{C^*}\mathscr{M})$ são isomorfas.*

Demonstração: Seja (M, ω) um C-comódulo à direita. Mostremos que (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda racional. Pela Proposição 9 e, com sua notação, (M, ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda. Como $c^* \cdot m = \psi_\omega(c^* \otimes m) = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$ segue, da Observação 8, que M é um C^*-módulo à esquerda racional.

Sejam M, N dois C-comódulos e $f : M \to N$ um morfismo de C- comódulos. Provemos que

f é um morfismo de C^*-módulos à esquerda racionais. De fato,

$$\begin{aligned} f(c^* \cdot m) &= f(\sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}) = \sum c^*(m_{(1)})f(m_{(0)}) \\ &= \sum c^*(f(m)_{(1)})f(m)_{(0)} = c^* \cdot f(m). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir o funtor $T : \mathscr{M}^c \to Rat({}_{c^*}\mathscr{M})$ tal que $T(M,\omega) = (M,\psi_\omega)$ e $T(f) = f$, para todo morfismo de C-comódulos f.

Seja (M,ψ) um C^*-módulo à esquerda racional. Como $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*,M)$ é injetora, segue que, $\overline{\mu_M} : M \otimes C \to \mu_M(M \otimes C)$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Temos que $\psi(c^* \otimes m) = c^* \cdot m = \rho_M(m)(c^*)$, $\forall c^* \in C^*$ e podemos definir

$$\begin{aligned} \omega_\psi : \quad M &\to M \otimes C \\ m &\mapsto \omega_\psi(m) = \overline{\mu_M}^{-1}(\rho_M(m)). \end{aligned}$$

Portanto, $\omega_\psi(m) = \overline{\mu_M}^{-1}(\rho_M(m)) = \overline{\mu_M}^{-1}(\mu_M(\sum\limits_i m_i \otimes c_i)) = \sum\limits_i m_i \otimes c_i$, $\forall m \in M$, em que $(c_i)_{i\in I} \subseteq C$ e $(m_i)_{i\in I} \subseteq M$ são famílias finitas tais que $c^* \cdot m = \sum\limits_i c^*(c_i)m_i$.

Queremos ver que (M,ω_ψ) é um C-comódulo à direita e para isso mostremos que $\psi_{\omega_\psi} = \psi$, pois se assim o fizermos, teremos pela Proposição 9 que (M,ω_ψ) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M,ψ_{ω_ψ}) é um C^*-módulo à esquerda. Temos que

$$\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i = \overline{\mu_M}^{-1}(\rho_M(m)) \Rightarrow \overline{\mu_M}(\sum_i m_i \otimes c_i) = \rho_M(m) \Rightarrow \sum_i \overline{\mu_M}(m_i \otimes c_i) = \rho_M(m)$$

e claramente segue que $\sum\limits_i \mu_M(m_i \otimes c_i) = \rho_M(m)$.

Portanto, $\rho_M(m)(c^*) = \sum\limits_i \mu_M(m_i \otimes c_i)(c^*) = \sum\limits_i c^*(c_i)m_i = \psi(c^* \otimes m)$. Por outro lado, $\psi_{\omega_\psi}(c^* \otimes m) = \sum\limits_i c^*(c_i)m_i = \psi(c^* \otimes m)$ e isso implica que $\psi_{\omega_\psi} = \psi$. Logo, (M,ω_ψ) é um C-comódulo à direita.

Sejam (M,ψ_M) e (N,ψ_N) C^*-módulos à esquerda racionais e $f : M \to N$ um morfismo de C^*-módulos à esquerda. Mostremos que f é um morfismo de C-comódulos à direita com as estruturas (M,ω_{ψ_M}) e (N,ω_{ψ_N}). Precisamos mostrar que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_{\psi_M}"'] & N \arrow[d, "\omega_{\psi_N}"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes I_C"'] & N \otimes C. \end{tikzcd}$$

Seja $m \in M$. Então $\omega_{\psi_M}(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ e

$$\begin{aligned}
\mu_N((f \otimes I_C) \circ \omega_{\psi_M}(m))(c^*) &= \mu_N(\sum_i f(m_i) \otimes c_i)(c^*) \\
&= \sum_i c^*(c_i) f(m_i) \\
&= f(\sum_i c^*(c_i) m_i) \\
&= f(c^* \cdot m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu_N((\omega_{\psi_N} \circ f)(m))(c^*) &= \mu_N(((\overline{\mu_N}^{-1} \circ \rho_N) \circ f)(m))(c^*) \\
&= \rho_N(f(m))(c^*) \\
&= c^* \cdot f(m) \\
&= f(c^* \cdot m).
\end{aligned}$$

Como μ_N é injetiva segue que $(f \otimes I_C) \circ \omega_{\psi_M}(m) = (\omega_{\psi_N} \circ f)(m)$, $\forall m \in M$ e isso nos diz que $(f \otimes I_C) \circ \omega_{\psi_M} = \omega_{\psi_N} \circ f$.

Definimos agora, $S : Rat({}_{C^*}\mathscr{M}) \to \mathscr{M}^c$ tal que $S(M, \psi) = (M, \omega_\psi)$ e $S(f) = f$, para toda f um morfismo de C^*-módulos à esquerda. Temos que

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(M, \psi) &= T(S(M, \psi)) = T(M, \omega_\psi) \\
&= (M, \psi_{\omega_\psi}) \ = \ (M, \psi)
\end{aligned}$$

e ainda $(T \circ S)(f) = f$. Portanto, $T \circ S = I_{Rat({}_{C^*}\mathscr{M})}$. Para finalizarmos, observemos que

$$\begin{aligned}
\omega_{\psi_\omega} : \quad M &\to M \otimes C \\
m &\mapsto \overline{\mu_M}^{-1}(\rho_M(m)) = \omega_{\psi_\omega}(m) \ (*).
\end{aligned}$$

Aplicando $\overline{\mu_M} = \mu_M$ à $(*)$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\mu_M}(\omega_{\psi_\omega}(m))(c^*) &= \rho_M(m)(c^*) \\
&= c^* \cdot m
\end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}\overline{\mu_M}(\omega(m))(c^*) &= \overline{\mu_M}(\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)})(c^*)\\ &= \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}\\ &= \psi_\omega(c^* \otimes m)\\ &= c^* \cdot m.\end{aligned}$$

Sendo $\overline{\mu_M}$ injetora, $\omega_{\psi_\omega}(m) = \omega(m), \forall m \in M$. Portanto, $\omega_{\psi_\omega} = \omega$. Logo,

$$\begin{aligned}(S \circ T)(M,\omega) &= S(T(M,\omega)) = S(M,\psi_\omega)\\ &= (M,\omega_{\psi_\omega}) = (M,\omega)\end{aligned}$$

e também $(S \circ T)(f) = f$. Assim, $S \circ T = I_{\mathscr{M}^c}$. Portanto, as categorias $\mathscr{M}^c$ e $Rat({}_{c^*}\mathscr{M})$ são isomorfas. ■

3 Álgebras de Hopf

Nessa seção, definimos álgebra de Hopf e apresentamos alguns exemplos e propriedades. Para isso, é necessário definir biálgebras. Em particular, álgebras de Hopf são biálgebras. Além disso, para que se tenha uma álgebra de Hopf é necessária a existência de uma função chamada antípoda, a qual desempenha um papel fundamental em todo esse contexto.

Seja H um k-espaço vetorial que possui uma estrutura de álgebra (H, M, u) e também uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε). Abaixo, mostramos um resultado que é uma compatibilidade entre as estruturas de álgebra e de coálgebra de H. Lembramos que $H \otimes H$ possui uma estrutura de coálgebra e de álgebra.

Proposição 10. *As seguintes afirmações são equivalentes.*
i) As funções M e u são morfismos de coálgebras.

ii) As funções Δ e ε são morfismos de álgebras.

Demonstração: Temos que $M : H \otimes H \to H$ é um morfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "I\otimes\tau\otimes I"] & & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "M\otimes M"'] & & H \otimes H.
\end{tikzcd}$$

Lembrando que a composição $(I \otimes \tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta_{H \otimes H}$ é a estrutura de coálgebra em

$H \otimes H$. Também,

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\ k \otimes k \arrow[d, "\phi"] & & \\ k \arrow[rr, "I"'] & & k. \end{tikzcd}$$

Observemos que $\phi(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon_{H\otimes H}$. A função u é um morfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi^{-1}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "u\otimes u"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "I_k"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Notemos que Δ é morfismo de álgebras se, e somente se, o primeiro e o terceiro diagramas comutam, e ε é morfismo de álgebras se, e somente se, o segundo e o quarto diagramas comutam e segue a equivalência. ∎

Observação 11. O fato de Δ e ε serem morfismos de álgebras, possibilita-nos expressar em notação de Sweedler os fatos abaixo

$$\sum (hg)_1 \otimes (hg)_2 = \Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g) = (\sum h_1 \otimes h_2)(\sum g_1 \otimes g_2) = \sum h_1 g_1 \otimes h_2 g_2$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) \quad \text{para quaisquer} \quad h, g \in H.$$

Além disso, $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1_K$.

Definição 17. *Um k-espaço vetorial H que possui estruturas de álgebra (H, M, u) e de coálgebra (H, Δ, ε) é uma biálgebra se Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Observação 12. Diremos que uma biálgebra H possui uma propriedade P, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade P. Assim, por exemplo, podemos falar de biálgebras comutativas (se sua estrutura de álgebra for comutativa) ou cocomutativas (se sua estrutura de coálgebra for cocomutativa).

Proposição 11. *Seja H uma biálgebra. Então são válidas as seguintes proposições.*

i) Se H é comutativa então M é morfismo de álgebras.

ii) Se H é cocomutativa então Δ é morfismo de coálgebras.

Demonstração: i) Temos que verificar que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd} H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[r, "M\otimes M"] \arrow[d, "M_{H\otimes H}"'] & H\otimes H \arrow[d, "M"] \\ H\otimes H \arrow[r, "M"'] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[rr, "M"] & & H \\ & k. \arrow[ul, "u_{H\otimes H}"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Sejam $a,b,c,d \in H$. Então

$$(M\circ(M\otimes M))(a\otimes b\otimes c\otimes d) = M(ab\otimes cd) = (ab)(cd) = abcd.$$
$$(M\circ M_{H\otimes H})(a\otimes b\otimes c\otimes d) = M(ac\otimes bd) = (ac)(bd) = acbd \overset{(*)}{=} abcd.$$

A igualdade $(*)$ é satisfeita, pois H é comutativa. Agora, verifiquemos a comutatividade do segundo diagrama:

$$M\circ u_{H\otimes H}(1) = M(1_H\otimes 1_H) = 1_H 1_H = 1_H = u(1).$$

Logo, M é um morfismo de álgebras.

ii) Verifiquemos a comutatividade dos diagramas abaixo.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H\otimes H \arrow[d, "\Delta_{H\otimes H}"] \\ H\otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"'] & H\otimes H\otimes H\otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & H\otimes H \arrow[dl, "\varepsilon_{H\otimes H}"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} (\Delta_{H\otimes H}\circ\Delta)(h) &= \Delta_{H\otimes H}(\sum h_1\otimes h_2) \\ &= \sum h_{1_1}\otimes h_{2_1}\otimes h_{1_2}\otimes h_{2_2} \\ &= \sum h_1\otimes h_3\otimes h_2\otimes h_4 = (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\Delta\otimes\Delta)\circ\Delta)(h) &= (\Delta\otimes\Delta)(\sum h_1\otimes h_2) \\ &= \sum h_{1_1}\otimes h_{1_2}\otimes h_{2_1}\otimes h_{2_2} \\ &= \sum h_1\otimes h_2\otimes h_3\otimes h_4 = (**) \end{aligned}$$

Temos $(*) = (**)$, pois H é cocomutativa. Para o segundo diagrama, temos $\varepsilon_{H\otimes H}\circ\Delta(h) =$

$\varepsilon_{H\otimes H}(\sum h_1 \otimes h_2) = \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2) = \varepsilon(\sum h_1 \varepsilon(h_2)) = \varepsilon(h)$, para todo $h \in H$. Portanto, Δ é morfismo de coálgebras. ∎

Exemplo 17. O corpo k é uma biálgebra. Lembremos que k possui uma estrutura de álgebra e de coálgebra, em que $\Delta : k \to k \otimes k$ é o isomorfismo canônico e $\varepsilon : k \to k$ é a identidade em k. Resta-nos verificar que tais funções são morfismos de álgebras. Sejam $\alpha, \lambda \in k$. Então

$$\Delta(\alpha\lambda) = (\alpha\lambda) \otimes 1 = (\alpha \otimes 1)(\lambda \otimes 1) = \Delta(\alpha)\Delta(\lambda)\ ,\ \Delta(1) = 1 \otimes 1 = 1_{k\otimes k}$$

e

$$\varepsilon(\alpha\lambda) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\lambda) \ \text{ e } \ \varepsilon(1) = 1.$$

Exemplo 18. Sejam G um grupo e kG a álgebra de grupo vista no Exemplo 2 cuja estrutura de coálgebra é dada por

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & kG & \to & kG \otimes kG \\ & g & \mapsto & g \otimes g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon : & kG & \to & k \\ & g & \mapsto & 1. \end{array}$$

Verifiquemos que Δ e ε são morfismos de álgebras. Sejam $g, h \in kG$ elementos da base. Então temos que $\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$ e ainda $\varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Portanto, kG é uma biálgebra.

Vejamos algumas maneiras de construir novas biálgebras a partir de biálgebras já conhecidas.

Exemplo 19. Seja H uma biálgebra. Então H^{op}, H^{cop} e $H^{op,cop}$ são biálgebras, em que H^{op} possui a estrutura de álgebra oposta e mantém a estrutura de coálgebra de H, H^{cop} possui a estrutura de coálgebra cooposta e mantém a estrutura de álgebra de H e $H^{op,cop}$ possui a estrutura de coálgebra cooposta e álgebra oposta de H. Denotamos por $\cdot_{op}$ a multiplicação em H^{op}. Sejam $g, h \in H$. Então

$$\begin{aligned} \Delta(x \cdot_{op} y) &= \Delta(yx) = \Delta(y)\Delta(x) \\ &= y_1x_1 \otimes y_2x_2 = (x_1 \otimes x_2) \cdot_{op} (y_1 \otimes y_2) \\ &= \Delta(x) \cdot_{op} \Delta(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon(x\cdot_{op}y) &= \varepsilon(yx) \\ &= \varepsilon(y)\varepsilon(x) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Portanto, H^{op} é uma biálgebra. Agora,

$$\Delta^{cop}(hg) = \sum (hg)_2 \otimes (hg)_1 = \sum (h_2g_2 \otimes h_1g_1)$$

e

$$\Delta^{cop}(h)\Delta^{cop}(g) = (\sum h_2 \otimes h_1)(\sum g_2 \otimes g_1) = (\sum h_2g_2 \otimes h_1g_1).$$

Portanto, H^{cop} é uma biálgebra. Não é difícil verificar que $H^{op,cop}$ é uma biálgebra.

Proposição 12. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^* com a estrutura de álgebra dual da coálgebra H e com a estrutura de coálgebra dual da álgebra H é uma biálgebra, chamada biálgebra dual de H.*

Demonstração: Denotamos por Δ e ε a comultiplicação e a counidade de H e por δ e E a comultiplicação e counidade de H^*. Lembremos que para $f \in H^*$ temos $E(f) = f(1_H)$ e $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ com a propriedade que $f(ab) = \sum f_1(a)f_2(b)$ para quaisquer $a, b \in H$.

Mostremos que δ é um morfismo de álgebras. Sejam $a, b \in H$. Então

$$\begin{aligned} (f * g)(ab) &= \sum f((ab)_1)g((ab)_2) \\ &= \sum f(a_1b_1)g(a_2b_2) \\ &= \sum f_1(a_1)f_2(b_1)g_1(a_2)g_2(b_2) \\ &= \sum f_1(a_1)g_1(a_2)f_2(b_1)g_2(b_2) \\ &= \sum (f_1 * g_1)(a)(f_2 * g_2)(b), \end{aligned}$$

em que $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ e $\delta(g) = \sum g_1 \otimes g_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta(f * g) &= \sum (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2) \\ &= \sum (f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2) \\ &= \delta(f)\delta(g). \end{aligned}$$

Sejam $h,g \in H$. Então $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$ e isso nos diz que $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$. Logo, δ é morfismo de álgebras. Mostremos agora que E é um morfismo de álgebras.

$$E(f * g) = (f * g)(1_H) = f(1_H)g(1_H) = E(f)E(g)$$

e ainda $E(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1$. Portanto, H^* é uma biálgebra. ■

Definição 18. *Sejam H e L duas biálgebras. Uma função k-linear $f : H \to L$ é dita um morfismo de biálgebras se f é um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras com respeito às estruturas de álgebra e de coálgebra de H e L, respectivamente.*

Teorema 13. *Sejam H uma biálgebra e I um k-subespaço vetorial de H que é um ideal (da estrutura de álgebra presente em H) e é um coideal (da estrutura de coálgebra presente em H). Então a estrutura de álgebra e de coálgebra quociente H/I define uma biálgebra e a projeção $p : H \to H/I$ é um morfismo de biálgebras.*

Demonstração: Primeiro lembremos que a estrutura de coálgebra em H/I vista no Teorema 2 é definida por $\overline{\Delta}(\overline{h}) = \sum \overline{h_1} \otimes \overline{h_2}$ e $\overline{\varepsilon}(\overline{h}) = \varepsilon(h)$ para todo $h \in H$. Verifiquemos que $\overline{\Delta}$ e $\overline{\varepsilon}$ são morfismos de álgebras.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\overline{hg}) &= \sum \overline{(hg)_1} \otimes \overline{(hg)_2} = \sum \overline{h_1}\overline{g_1} \otimes \overline{h_2}\overline{g_2} \\ &= \sum (\overline{h_1} \otimes \overline{h_2})(\overline{g_1} \otimes \overline{g_2}) = \overline{\Delta}(\overline{h})\overline{\Delta}(\overline{g}). \end{aligned}$$

Claramente, $\overline{\Delta}(\overline{1}) = \overline{1} \otimes \overline{1}$. Agora,

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}(\overline{hg}) &= \varepsilon(hg) \\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(g) \\ &= \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{\varepsilon}(\overline{g}). \end{aligned}$$

Também, $\overline{\varepsilon}(\overline{1}) = \varepsilon(1_H) = 1$. Portanto, H/I é uma biálgebra. ■

O próximo resultado é imediato.

Corolário 3. *Se H é uma biálgebra comutativa (respectivamente cocomutativa) então a biálgebra quociente H/I é comutativa (respectivamente cocomutativa).*

Falta-nos um último preparativo para definirmos o que é uma álgebra de Hopf, e este é, por sua vez, muito importante. Dessa próxima estrutura de álgebra que definimos abaixo, extraímos a ideia do que chamamos antípoda, uma função que destaca um tipo específico de biálgebra.

Sejam (C,Δ,ε) uma coálgebra e (A,M,u) uma álgebra. Definimos sobre $Hom(C,A)$ uma estrutura de álgebra na qual a multiplicação denotada por $*$ é dada como segue. Se $f,g \in Hom(C,A)$, então

$$(f*g)(c) = (M \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para todo $c \in C$. Essa multiplicação definida é associativa pois, para quaisquer $f,g,h \in Hom(C,A)$ e $c \in C$, segue que

$$\begin{aligned}
((f*g)*h)(c) &= \sum (f*g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\
&= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\
&= \sum f(c_1)(g*h)(c_2) \\
&= (f*(g*h))(c).
\end{aligned}$$

A unidade de $Hom(C,A)$ é o elemento $u \circ \varepsilon \in Hom(C,A)$, pois notemos que, para todo $c \in C$,

$$\begin{aligned}
(f*(u\circ\varepsilon))(c) &= \sum f(c_1)(u\circ\varepsilon)(c_2) \\
&= \sum f(c_1)u(1)\varepsilon(c_2) \\
&= f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

e portanto, $f*(u\circ\varepsilon) = f$. Analogamente, é possível mostrar que $(u\circ\varepsilon)*f = f$. Reparemos que se $A = k$, temos que $Hom(C,A) = Hom(C,k) = C^*$ e $*$ é o produto de convolução definido na álgebra dual de uma coálgebra C. Por essa razão, chamamos esse produto $*$ de produto de convolução.

Consideremos um caso particular dessa construção de álgebra que acabamos de fazer. Seja H uma biálgebra, denotamos H^c a estrutura de coálgebra de H e H^a a estrutura de álgebra de H. Nessas condições, temos uma estrutura de álgebra em $Hom(H^c,H^a)$. Notemos que a função identidade $I : H \to H$ pertence à álgebra $Hom(H^c,H^a)$.

Definição 19. *Seja H uma biálgebra. Uma função k-linear $S : H \to H$ é chamada antípoda de H se S for a inversa da função identidade $I : H \to H$ com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom(H^c,H^a)$.*

Definição 20. *Uma biálgebra H é dita uma álgebra de Hopf se H possui uma antípoda.*

Observação 14. Algumas observações podem ser levantadas de imediato dessa definição.
i) A antípoda em uma álgebra de Hopf é única, pois é o inverso do elemento I da álgebra $Hom(H^c, H^a)$.
ii) Nem toda biálgebra é uma álgebra de Hopf, ou seja, nem sempre é garantida a existência de uma antípoda em uma biálgebra. Mais adiante, apresentamos um exemplo de biálgebra que não tem antípoda.
iii) Uma álgebra de Hopf tem uma propriedade P se satisfizer as mesmas condições vistas na Observação 12, ou seja, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade P.
iv) De $S * I = I * S = u \circ \varepsilon$, segue que

$$(S*I)(h) = \sum S(h_1)I(h_2) = \sum S(h_1)h_2 = (u\circ\varepsilon)(h) = u(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H$$

$$(I*S)(h) = \sum I(h_1)S(h_2) = \sum h_1 S(h_2) = (u\circ\varepsilon)(h) = u(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H.$$

Portanto, em notação de Sweedler $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$ ou, via diagramas, $M \circ (S \otimes I) \circ \Delta = M \circ (I \otimes S) \circ \Delta = u \circ \varepsilon$.

Definição 21. *Sejam H e T duas álgebras de Hopf. Uma função $f : H \to T$ é dita um morfismo de álgebras de Hopf se for um morfismo de biálgebras.*

Proposição 13. *Sejam H e T duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_T. Se $f : H \to T$ é um morfismo de biálgebras, então $S_T \circ f = f \circ S_H$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra $Hom(H,T)$, $S_T \circ f$ e $f \circ S_H$ elementos dessa álgebra. Mostremos que $S_T \circ f$ é o inverso à esquerda de f e $f \circ S_H$ é o inverso à direita de f nessa álgebra e isso implica que $S_T \circ f = f \circ S_H$. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
((S_T \circ f) * f)(h) &= \sum (S_T \circ f)(h_1) f(h_2) \\
&= \sum S_T(f(h_1)) f(h_2) \\
&= \sum S_T(f(h)_1) f(h)_2 \\
&= \varepsilon_T(f(h)) 1_T \\
&= \varepsilon_H(h) 1_T \\
&= u_T(\varepsilon_H(h)) \\
&= (u_T \circ \varepsilon_H)(h)
\end{aligned}$$

também,

$$\begin{aligned}(f*(f\circ S_H))(h) &= \sum f(h_1)(f\circ S_H)(h_2)\\ &= \sum f(h_1)f(S_H(h_2))\\ &= f(\sum h_1 S_H(h_2))\\ &= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\ &= \varepsilon_H(h)1_T\\ &= u_T(\varepsilon_H(h))\\ &= (u_T\circ\varepsilon_H)(h).\end{aligned}$$

Assim, f é invertível em $Hom(H,T)$ com relação ao produto de convolução, disso segue que sua inversa à direita é igual à sua inversa à esquerda, ou seja, $S_T\circ f = f\circ S_H$. ∎

Antes de vermos alguns exemplos de álgebras de Hopf, mostramos algumas propriedades referentes à antípoda para tomarmos mais conhecimento do seu papel nessa estrutura.

Proposição 14. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então são válidas as afirmações.*

i) $S(hg) = S(g)S(h)$, *para quaisquer* $g,h\in H$.

ii) $S(1_H) = 1_H$.

iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2)\otimes S(h_1)$ *ou, via diagramas,* $(S\otimes S)\circ\tau\circ\Delta = S\circ\Delta$.

iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades i) e ii) significam que S é um antimorfismo de álgebras e iii) e iv) significam que S é um antimorfismo de coálgebras.

Demonstração: i) Considere $H\otimes H$ com a estrutura de coálgebra vista na Proposição 4 e H com sua estrutura de álgebra. Nessas condições faz sentido falar na álgebra $Hom(H\otimes H,H)$, com a multiplicação sendo a convolução. A unidade dessa álgebra é o elemento $u_H\circ\varepsilon_{H\otimes H}: H\otimes H\to H$. Consideremos as funções $F,G,M: H\otimes H\to H$ definidas por

$$F(h\otimes g) = S(g)S(h)\ ,\ G(h\otimes g) = S(hg) \text{ e } M(h\otimes g) = hg$$

para quaisquer $h,g\in H$. Mostremos que M é a inversa à esquerda de F e que M é a inversa à direita de G, com respeito ao produto de convolução. De fato,

$$\begin{aligned}
(M*F)(h\otimes g) &= \sum M((h\otimes g)_1)F((h\otimes g)_2)\\
&= \sum M(h_1\otimes g_1)F(h_2\otimes g_2)\\
&= \sum h_1g_1S(g_2)S(h_2)\\
&= \sum h_1\varepsilon(g)1_HS(h_2)\\
&= \sum \varepsilon(g)h_1S(h_2)\\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H\\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g)1_H\\
&= (u_H\circ\varepsilon_{H\otimes H})(h\otimes g)
\end{aligned}$$

o que nos mostra que $M*F=u_H\circ\varepsilon_{H\otimes H}$. Também,

$$\begin{aligned}
(G*M)(h\otimes g) &= \sum G((h\otimes g)_1)M((h\otimes g)_2)\\
&= \sum G(h_1\otimes g_1)M(h_2\otimes g_2)\\
&= \sum S(h_1g_1)h_2g_2\\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2\\
&= \varepsilon(hg)1_H\\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H\\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g)1_H\\
&= (u_H\circ\varepsilon_{H\otimes H})(hg)
\end{aligned}$$

e portanto, $G*M=u_H\circ\varepsilon_{H\otimes H}$. Disso segue que $F=G$, ou seja, $S(hg)=S(g)S(h)$.

ii) Temos $S(1_H)=\varepsilon(1_H)1_H=1_H$. Portanto, $S(1_H)=1_H$.

iii) Agora, consideremos H com sua estrutura de coálgebra e $H\otimes H$ com sua estrutura de álgebra vista na Proposição 2. Assim, podemos supor a álgebra $Hom(H,H\otimes H)$ com o produto de convolução. O elemento identidade dessa álgebra é a função $u_{H\otimes H}\circ\varepsilon_H$. Sejam as funções $F,G:H\to H\otimes H$ definidas por

$$F(h)=\Delta(S(h)) \text{ e } G(h)=\sum S(h_2)\otimes S(h_1)$$

para todo $h\in H$. Provemos que Δ é a inversa de F à esquerda e é a inversa de G à direita com respeito ao produto de convolução. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= \sum \Delta(h_1)F(h_2) \\
&= \sum \Delta(h_1)\Delta(S(h_2)) \\
&= \Delta(\sum h_1 S(h_2)) \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H)(h)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(G * \Delta)(h) = \sum G(h_1)\Delta(h_2) &= \sum (S((h_1)_2) \otimes S((h_1)_1))((h_2)_1 \otimes (h_2)_2) \\
&= \sum (S(h_2) \otimes S(h_1))(h_3 \otimes h_4) \\
&= \sum S(h_2)h_3 \otimes S(h_1)h_4 \\
&= \sum S((h_2)_1)(h_2)_2 \otimes S(h_1)h_3 \\
&= \sum \varepsilon(h_2)1_H \otimes S(h_1)h_3 \\
&= \sum 1_H \otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2 \\
&= \sum 1_H \otimes S(h_1)h_2 \\
&= 1_H \otimes \varepsilon(h)1_H \\
&= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon_H)(h).
\end{aligned}$$

Portanto, temos $F = G$, ou seja, $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$.

iv) Basta aplicarmos ε na igualdade $\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Assim obtemos $\sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) = \varepsilon(h)$. Como ε e S são k-lineares, temos $\varepsilon(S(\sum \varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(h)$ e usando a propriedade da counidade, segue que $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$. ∎

Proposição 15. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

i) $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$.

ii) $\sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$.

iii) $S^2 = I$ *(*$S^2 = S \circ S$ *e* I *é a função identidade em* H*).*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ iii) Por definição sabemos que I é o inverso de S pelo produto de convolução. Mostremos que S^2 é o inverso de S à direita pelo produto de convolução e pela unicidade do inverso, podemos garantir a igualdade desejada. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(S * S^2)(h) &= \sum S(h_1)S^2(h_2) \\
&= \sum S(S(h_2)h_1) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)S(1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \\
&= (u \circ \varepsilon)(h).
\end{aligned}$$

Portanto, $S * S^2 = u \circ \varepsilon$.

iii) $\Rightarrow$ i) Basta aplicarmos S na igualdade $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$. Temos

$$\begin{aligned}
S(\sum S(h_1)h_2) &= \sum S(S(h_1)h_2) \\
&= \sum S(h_2)S^2(h_1) \\
&= \sum S(h_2)I(h_1) \\
&= \sum S(h_2)h_1 \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H
\end{aligned}$$

e portanto, $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$.

As implicações iii) $\Rightarrow$ ii) e ii) $\Rightarrow$ iii) são análogas às implicações iii) $\Rightarrow$ i) e i) $\Rightarrow$ iii), respectivamente. ∎

Corolário 4. *Seja H uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa, então $S^2 = I$.*

Demonstração: Suponhamos que H seja comutativa. Então $\varepsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2 = \sum h_2 S(h_1)$, ou seja, $S^2 = I$.

Se H for cocomutativa, então temos que $\sum h_1 \otimes h_2 = \sum h_2 \otimes h_1$. Assim, $\varepsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2 = \sum S(h_2)h_1$. Portanto, $S^2 = I$. ∎

Vamos dar noção de subestruturas de álgebras de Hopf como subálgebras e álgebras quociente de Hopf.

Definição 22. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Um subespaço vetorial W de H é* *chamado uma subálgebra de Hopf de H se W é uma subálgebra e uma subcoálgebra de H e se* $S(W) \subset W$.

Observamos que se W é uma subálgebra de Hopf então W é uma álgebra de Hopf ela mesma com a estrutura induzida de H.

Definição 23. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S, um k-subespaço vetorial I de H é dito um ideal de Hopf se I é um ideal e um coideal de H e* $S(I) \subseteq I$.

Teorema 15. *Sejam H uma álgebra de Hopf e I um ideal de Hopf. Então* H/I *é uma álgebra de Hopf. A projeção canônica* $p : H \to H/I$ *é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração: Sabemos do Teorema 13 que H/I tem uma estrutura de biálgebra. Como $S(I) \subseteq I$, podemos definir $\overline{S} : H/I \to H/I$ por $\overline{S}(\overline{h}) = \overline{S(h)}$. De fato, $\overline{S}$ está bem definida, pois se $\overline{h} = \overline{w}$ então $h - w \in I$ e portanto, $S(h-w) \in I$ pela hipótese, ou seja, $S(h) - S(w) \in I$ o que implica que $\overline{S(h)} = \overline{S(w)}$.

Verifiquemos que $\overline{S}$ é uma antípoda.

$$\begin{aligned}
\sum \overline{S}(\overline{h_1})\overline{h_2} &= \sum \overline{S(h_1)}\,\overline{h_2} \\
&= \sum \overline{S(h_1)h_2} \\
&= \overline{\varepsilon(h)1_H} \\
&= \varepsilon(h)\overline{1_H} \\
&= \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1_H}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que $\sum \overline{h_1}\,\overline{S}(\overline{h_2}) = \overline{\varepsilon}(\overline{h})\overline{1_H}$. Portanto, H/I é uma álgebra de Hopf. ■

Apresentamos agora alguns exemplos de álgebras de Hopf. Para o primeiro exemplo, gostaríamos de fazer mais alguns comentários.

Definição 24. *Seja C uma coálgebra. Um elemento* $c \in C$ *é dito grouplike se c é não-nulo e* $\Delta(c) = c \otimes c$. *O conjunto dos elementos grouplike da coálgebra C é denotado por* $G(C)$. *Segue da propriedade da counidade que* $\varepsilon(c) = 1$, *para todo* $c \in C$.

Proposição 16. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então G(H) é um grupo com a multiplicação de H.*

Demonstração: Notemos que $1_H \in G(H)$, pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Se $g,h \in G(H)$, então $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g\otimes g)(h\otimes h) = gh\otimes gh$, ou seja, $gh \in G(H)$. Finalmente, se $g \in G(H)$ então $S(g) \in G(H)$, pois $\Delta(S(g)) = \sum S(g_2)\otimes S(g_1) = S(g)\otimes S(g)$. Por outro lado, $(S*I)(g) = S(g)g = \varepsilon(g)1_H = 1_H$ e analogamente, $gS(g) = 1_H$. Donde, $g^{-1} = S(g) \in G(H)$. Logo, $G(H)$ é um grupo.

Exemplo 20. (Álgebra de Grupo) Seja G um grupo multiplicativo. Vimos no Exemplo 18 que kG possui uma estrutura de biálgebra. Falta-nos definir uma antípoda para que kG seja uma álgebra de Hopf. Definindo $S: kG \to kG$ por $S(g) = g^{-1}$ para $g \in G$ e estendendo por linearidade temos S definida em todo kG. Observamos que

$$\sum S(g_1)g_2 = S(g)g = g^{-1}g = 1_G = \varepsilon(g)1_G$$

e de maneira análoga $\sum g_1 S(g_2) = \varepsilon(g)1_G$, para todo $g \in G$. Portanto, kG é uma álgebra de Hopf. Observemos que $G(kG) = G$.

Exemplo 21. Finalmente, apresentamos um exemplo de uma biálgebra que não é uma álgebra de Hopf como dissemos na Observação 14. Consideremos G um monóide (conjunto não vazio com uma operação $\cdot$ associativa com um elemento neutro $e \in G$) tal que G não é um grupo com essa operação $\cdot$. Nessas condições, kG é uma biálgebra, mas não é uma álgebra de Hopf, pois caso exista uma antípoda, necessariamente, a mesma será definida como no exemplo acima. Assim, G seria um grupo, o que é uma contradição.

Para o próximo exemplo, é necessário que mostremos o seguinte lema.

Lema 4. *A igualdade* $\binom{m+n}{l} = \sum\limits_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}$ *é válida para todos* $n,m,l \in \mathbb{N}$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m+n} \binom{m+n}{l} x^l &= (1+x)^{m+n} \qquad \text{(Pelo teorema binomial)} \\
&= (1+x)^m(1+x)^n \\
&= \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l\right) \\
&= \sum_{l=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}\right) x^l,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade utilizamos a definição do produto de polinômios de graus m e n, com a convenção de que $\binom{m}{i} = 0$ sempre que $i > m$ e $\binom{n}{l-i} = 0$ sempre que $l - i > n$. Igualando os coeficientes de x^l concluímos que $\binom{m+n}{l} = \sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{n}{l-i}$. ■

Para maiores informações, o leitor pode consultar ([5], p. 288).

Exemplo 22. (Álgebra de Hopf das potências divididas) Seja H um k-espaço vetorial com base $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$, já definimos uma estrutura de coálgebra em H no Exemplo 6 em que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \text{ e } \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Agora, definimos uma estrutura de álgebra em H. Sejam $c_m, c_n \in H$. Então

$$c_n c_m = \binom{n+m}{n} c_{n+m}$$

que pode ser estendida por linearidade. Notemos que,

$$c_0 c_m = \binom{m}{0} c_m = c_m = c_m c_0.$$

Denotamos $c_0 = 1_H$ o elemento identidade em H. Mostremos que essa multiplicação é associativa, ou seja, $(c_n c_m)c_p = c_n(c_m c_p)$ para quaisquer $n, m, p \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(c_n c_m)c_p &= \binom{n+m}{n} c_{n+m} c_p \\
&= \binom{n+m}{n}\binom{n+m+p}{n+m} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(n+m)!}{n!m!}\frac{(n+m+p)!}{(n+m)!p!} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!} c_{n+m+p} \\
&= \binom{m+p}{n} c_n c_{m+p} = c_n(c_m c_p).
\end{aligned}$$

Assim, H tem uma estrutura de álgebra. Verifiquemos que H é uma biálgebra mostrando que ε e Δ são morfismos de álgebras. É claro que $\varepsilon(c_m c_n) = \binom{n+m}{n}\varepsilon(c_{n+m}) = \binom{n+m}{n}\delta_{o,m+n} =$

$\delta_{o,n}\delta_{o,m} = \varepsilon(c_n)\varepsilon(c_m)$. Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta(c_n)\Delta(c_m) &= (\sum_{t=0}^{n} c_t \otimes c_{n-t})(\sum_{j=0}^{m} c_j \otimes c_{m-j}) \\
&= \sum_{t=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{t+j}{t}\binom{m+n-t-j}{n-t} c_{t+j} \otimes c_{n+m-t-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n+m}\sum_{t=0}^{n} \binom{i}{t}\binom{n+m-i}{n-t} c_i \otimes c_{n+m-i} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{n} c_i \otimes c_{n+m-i} \\
&= \Delta\left(\binom{n+m}{n} c_{n+m}\right) \\
&= \Delta(c_n c_m).
\end{aligned}$$

Em que na igualdade $(*)$ foi utilizado o Lema 4, com a convenção de que $\binom{i}{t} = 0$ sempre que $t > i$. Falta-nos definir uma antípoda. Seja $S : H \to H$ dada por

$$S(c_0) = S(1_H) = 1_H \;\text{ e }\; S(c_m) = -S(c_0)c_m - S(c_1)c_{m-1} - \ldots - S(c_{m-1})c_1.$$

Mostremos que $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$ para todo h pertencente a base de H. Sendo H claramente cocomutativa, valem as condições equivalentes da Proposição 15. Para $c_0 = 1_H$, temos

$$S(c_0)c_0 = S(1_H)1_H = 1_H = \varepsilon(c_0)1_H.$$

Para $m > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& (S*I)(c_m) = S(c_0)c_m + S(c_1)c_{m-1} + \ldots + S(c_{m-1})c_1 + S(c_m)c_0 \\
\overset{(*)}{=}\; & S(c_0)c_m + S(c_1)c_{m-1} + \ldots + S(c_{m-1})c_1 + (-S(c_0)c_m - S(c_1)c_{m-1} - \ldots - S(c_{m-1})c_1)1_H \\
=\; & 0 = \varepsilon(c_m)1_H,
\end{aligned}$$

na igualdade $(*)$ estão sendo usados a definição de $S(c_m)$ e que $c_0 = 1_H$.

Portanto, H é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 23. (Álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4) Suponhamos k um corpo de característica diferente de 2. Seja H uma álgebra gerada por elementos c e x de uma álgebra satisfazendo as relações: $c^2 = 1$, $x^2 = 0$ e $xc = -cx$. Então H é um espaço vetorial de dimensão

4 cuja base é $\{1, c, x, cx\}$. A estrutura de coálgebra é dada por

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1,\ \varepsilon(c) = 1 \text{ e } \varepsilon(x) = 0,$$

em que Δ e ε são multiplicativas.

Notemos que

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta(x) = (\Delta \otimes I)(c \otimes x + x \otimes 1) = c \otimes c \otimes x + c \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1 \text{ e}$$

$$(I \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = (I \otimes \Delta)(c \otimes x + x \otimes 1) = c \otimes c \otimes x + c \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1.$$

Portanto vale a coassociatividade para x. A verificação para c é imediata. Notemos também que,

$$\begin{aligned} \phi((\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(x)) &= \phi((\varepsilon \otimes I)(c \otimes x + x \otimes 1)) \\ &= \phi((\varepsilon(c) \otimes x + \varepsilon(x) \otimes 1)) \\ &= \phi(1 \otimes x) = x. \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\psi((I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x)) = x$. Portanto, H possui uma estrutura de coálgebra. Definimos a antípoda S por $S(c) = c^{-1}$ e $S(x) = -cx$. Assim,

$$S(c)c = c^{-1}c = 1_H = \varepsilon(c)1_H \text{ e}$$

$$S(c)x + S(x)1_H = c^{-1}x - cx = cx - cx = 0 = \varepsilon(x)1_H$$

e portanto, H é uma álgebra de Hopf. Observemos que $G(H) = < c >$, em que $< c >$ é o grupo multiplicativo gerado por c.

Observação 16. O exemplo acima é de uma álgebra de Hopf que não é comutativa nem cocomutativa. De fato, se $cx = xc$ teríamos $cx - xc = 0$, ou seja, $cx + cx = 0$, o que implica, $(1+1)cx = 0$ e como k tem característica diferente de dois, $1+1 \neq 0$ e daí, $cx = 0$, um absurdo. Logo, não é comutativa.

Agora, suponhamos que $\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1 = (\tau \circ \Delta)(x) = x \otimes c + 1 \otimes x$. Denotando por M_H a multiplicação em H, teríamos que $M_H(c \otimes x + x \otimes 1) = M_H(x \otimes c + 1 \otimes x)$, ou seja, $cx + x = xc + x$, o que implica, $cx = xc$, o que é uma contradição. Logo, H não é cocomutativa.

O próximo exemplo generaliza o exemplo anterior, são as chamadas álgebras de Hopf Taft.

Exemplo 24. (Álgebras de Hopf Taft) Sejam $n > 1$ um inteiro e λ uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Consideremos a álgebra $H_{n^2}(\lambda)$ definida pelos geradores c e x, valendo as relações

$$c^n = 1, x^n = 0, xc = \lambda cx.$$

Sobre essa álgebra podemos introduzir uma estrutura de coálgebra exatamente como no exemplo acima. Dessa maneira, $H_{n^2}(\lambda)$ torna-se uma biálgebra de dimensão n^2, tendo como base $\{c^i x^j : 0 \leq i, j \leq n-1\}$. A antípoda é definida por $S(c) = c^{-1}$ e $S(x) = -c^{-1}x$. Para o caso em que $n = 2$ e $\lambda = -1$, temos a álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4.

Observação 17. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então a biálgebra $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Além disso, se S é bijetora, então as biálgebras H^{op} e H^{cop} são álgebras de Hopf com antípoda S^{-1}.

De fato, seja $h \in H^{op,cop}$. Então

$$(S * I)(h) = \sum S(h_2) \cdot_{op} h_1 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) 1_H = (u \circ \varepsilon)(h)$$

e

$$(I * S)(h) = \sum h_2 \cdot_{op} S(h_1) = \sum S(h_1) h_2 = \varepsilon(h) 1_H = (u \circ \varepsilon)(h).$$

Portanto, $S * I = I * S = u \circ \varepsilon$. Logo, $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S.

Agora, seja $h \in H^{op}$. Então

$$(S^{-1} * I)(h) = \sum S^{-1}(h_1) \cdot_{op} h_2 = \sum h_2 S^{-1}(h_1).$$

Mas, $S(\sum h_2 S^{-1}(h_1)) = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) 1_H = S(\varepsilon(h) 1_H)$. Como S é injetora, temos $\sum h_2 S^{-1}(h_1) = \varepsilon(h) 1_H = (u \circ \varepsilon)(h)$ e assim, $S^{-1} * I = u \circ \varepsilon$. Similarmente, $I * S^{-1} = u \circ \varepsilon$. Portanto, H^{op} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}. Com raciocínio análogo, H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda S^{-1}.

Proposição 17. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Então a biálgebra H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração: Sabemos que H^* é uma biálgebra, veja Proposição 12. Mostremos que S^* é a antípoda de H^*. Sejam $h^* \in H^*$ e $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$, em que δ é a comultiplicação de H^*.

Então, para todo $h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum (S^*(h_1^*)h_2^*)(h) &= \sum S^*(h_1^*)(h_1)h_2^*(h_2) \\
&= \sum h_1^*(S(h_1))h_2^*(h_2) \\
&= \sum h^*(S(h_1)h_2) \\
&= h^*(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)h^*(1_H) \\
&= E(h^*)\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Daí, $\sum S^*(h_1^*)h_2^* = E(h^*)\varepsilon$. Similarmente, $\sum h_1^* S^*(h_2^*) = E(h^*)\varepsilon$. ■

Proposição 18. *Se H e L são biálgebras, então $H \otimes L$ com a estrutura de álgebra e de coálgebra já definidas anteriormente possui uma estrutura de biálgebra. Se H e L são álgebras de Hopf então $H \otimes L$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S_H \otimes S_L$.*

Demonstração: Temos em $H \otimes L$ as operações definidas nas Proposições 2 e 4. Mostremos que $\Delta_{H\otimes L}$ e $\varepsilon_{H\otimes L}$ são morfismos de álgebras. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes L}((h\otimes l)(w\otimes t)) &= \Delta_{H\otimes L}(hw\otimes lt) \\
&= \sum (hw)_1 \otimes (lt)_1 \otimes (hw)_2 \otimes (lt)_2 \\
&= \sum (h_1w_1 \otimes l_1t_1 \otimes h_2w_2 \otimes l_2t_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes L}(h\otimes l)\Delta_{H\otimes L}(w\otimes t) &= \sum (h_1 \otimes l_1 \otimes h_2 \otimes l_2)(w_1 \otimes t_1 \otimes w_2 \otimes t_2) \\
&= \sum (h_1w_1 \otimes l_1t_1 \otimes h_2w_2 \otimes l_2t_2).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{H\otimes L}((h\otimes l)(w\otimes t)) &= \varepsilon_{H\otimes L}(hw\otimes lt) \\
&= \varepsilon_H(hw)\varepsilon_L(lt) \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(w)\varepsilon_L(l)\varepsilon_L(t) \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_L(l)\varepsilon_H(w)\varepsilon_L(t) \\
&= \varepsilon_{H\otimes L}(h\otimes l)\varepsilon_{H\otimes L}(w\otimes t).
\end{aligned}$$

Logo, $H \otimes L$ é uma biálgebra. Agora, suponhamos que H e L são álgebras de Hopf, verifiquemos que $S_H \otimes S_L$ é uma antípoda para a biálgebra $H \otimes L$.

$$\begin{aligned}
\sum S_H \otimes S_L(h_1 \otimes l_1)(h_2 \otimes l_2) &= \sum (S_H(h_1) \otimes S_L(l_1))(h_2 \otimes l_2) \\
&= \sum S_H(h_1)h_2 \otimes S_L(l_1)l_2 \\
&= \varepsilon_H(h)1_H \otimes \varepsilon_L(l)1_L \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_L(l)(1_H \otimes 1_L) \\
&= \varepsilon_{H\otimes L}(h \otimes l)1_{H\otimes L} \\
&= (u_{H\otimes L} \circ \varepsilon_{H\otimes L})(h \otimes l).
\end{aligned}$$

Analogamente, $I_{H\otimes L} * (S_H \otimes S_L) = u_{H\otimes L} \circ \varepsilon_{H\otimes L}$. Portanto, $H \otimes L$ é uma álgebra de Hopf. ■

Lembramos que se A é uma álgebra e M é um A-módulo à esquerda, então M é um A^{op}-módulo à direita com a ação dada por $ma = am$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$. A estrutura de álgebra oposta é essencial para que valha a propriedade $m(a \cdot_{op} b) = (ma)b$, ou seja, $m(a \cdot_{op} b) = m(ba) = (ba)m = b(am) = (am)b = (ma)b$ para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$. Em geral, M não possui uma estrutura natural de A-módulo à direita.

Da mesma forma, se C é uma coálgebra e M é um C-comódulo à direita, então M é um C^{cop}-comódulo à esquerda, mas pode não ser um comódulo à esquerda sobre C.

Terminamos nosso trabalho provando um resultado que mostra a importância da antípoda no sentido de obtermos estruturas de módulos e de comódulos nas situações explicitadas acima.

Teorema 18. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*
i) Se M é um H-módulo à esquerda então M possui uma estrutura de H-módulo à direita com ação dada por $mh = S(h)m$.
ii) Se M é um H-comódulo à direita ($\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$) então M possui uma estrutura de H-comódulo à esquerda com coação dada por $\rho' : M \to H \otimes M$ com $\rho'(m) = \sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}$.

Demonstração: i) Sejam $h, p \in H$, $m \in M$. Então

$$m(hp) = S(hp)m = (S(p)S(h))m = S(p)(S(h)m) = S(p)(mh) = (mh)p \quad \text{e}$$

$$m1_H = S(1_H)m = 1_H m = m.$$

ii) De fato, seja $m \in M$. Escrevemos $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Provemos que $(\Delta \otimes I) \circ \rho' = (I \otimes \rho') \circ \rho'$.

$$
\begin{aligned}
((\Delta \otimes I) \circ \rho')(m) &= (\Delta \otimes I)(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) \\
&= \sum S(m_{(1)})_1 \otimes S(m_{(1)})_2 \otimes m_{(0)} \\
&= \sum S(m_{(1)_2}) \otimes S(m_{(1)_1}) \otimes m_{(0)} \\
&= \sum S(m_{(2)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
((I \otimes \rho') \circ \rho')(m) &= (I \otimes \rho')(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) \\
&= \sum S(m_{(1)}) \otimes S(m_{(0)_1}) \otimes m_{(0)_{(0)}} \\
&= \sum S(m_{(2)}) \otimes S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}
\end{aligned}
$$

portanto, $(\Delta \otimes I) \circ \rho' = (I \otimes \rho') \circ \rho'$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\phi \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \rho')(m) &= \phi \circ (\varepsilon \otimes I)(\sum S(m_{(1)}) \otimes m_{(0)}) \\
&= \phi(\sum \varepsilon(S(m_{(1)})) \otimes m_{(0)}) \\
&= \sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Conclusão

O trabalho foi desenvolvido ao longo do ano de 2012 e podemos fazer algumas observações no que concerne ao conteúdo. A disciplina *Introdução as álgebras de Hopf* foi um passo importante para um avanço sistemático e eficiente no que diz respeito ao conteúdo de álgebras de Hopf e teoria de comódulos. O presente trabalho não tem um final, possui uma continuação natural dentro do estudo feito. Além do que foi apresentado nesse trabalho, foram estudados assuntos como módulos de Hopf, teoria de integrais para uma biálgebra, ação de álgebra de Hopf H numa álgebra (H- módulo álgebra) e a coação de uma álgebra de Hopf H numa álgebra (H-comódulo álgebra).

Com relação ao andamento do conteúdo, pode-se dizer que foi agradável e motivador explorar um assunto novo tão cativante e belo em sua essência. A maior parte das dúvidas foram sanadas no decorrer dos dois últimos semestres, pode-se dizer que o assunto foi estudado em um bom momento.

Vemos algumas conexões entre as estruturas trabalhadas, por exemplo, no isomorfismo entre as categorias $\mathscr{M}^c$ e $Rat({}_{c^*}\mathscr{M})$. No entanto, o entrelaçamento maior de tais estruturas fica mais evidente com um estudo mais aprofundado que poderá ser feito posteriormente em uma dissertação de mestrado.

Referências Bibliográficas

[1] S. DĂSCĂLESCU; C. NĂSTĂSESCU; S. RAIANU. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 2001.

[2] D. R. PANSERA “**Extensões de Hopf-Galois**”, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.

[3] F. C. POLCINO. “**Anéis e Módulos**”, IME - USP, 1972.

[4] T. W. HUNGERFORD. “**Algebra**”, Springer, 2000.

[5] A. C. O. Morgado; J. B. P. Carvalho; P. C. P. Carvalho; P. Fernandez. “**Análise Combinatória e Probabilidade**”, 9ª edição, SBM, 2006.