ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM CIÊNCIAS"

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

William G. Whitley

Prof. WILLIAM GLENN WHITLEY
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. ÍTALO JOSÉ DEJTER, Ph.D.
Orientador

Duane Randall

Prof. DUANE RANDALL, Ph.D.

William G. Whitley

Prof. WILLIAM GLENN WHITLEY, Ph.D.

AÇÕES NÃO ORTOGONAIS DE GRUPOS ORTOGONAIS EM ESFERAS

MARIA EMÍLIA NUNES PIRES WIGGERS

Dezembro - 1978

A meu pai

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Ítalo José Dejter pela sua orientação segura e pelo seu apoio, estímulo e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

Ao Professor William Glenn Whitley um agradecimento especial pelo valioso auxílio prestado.

Estendo meus agradecimentos à Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Mostramos a existência de ações topológicas de grupos ortogonais sobre esferas, cujos conjuntos de pontos fixos não são esferas. Assim, estas ações são não ortogonais.

ABSTRACT

We show the existence of topological actions of orthogonal groups on spheres whose fixed point sets are not spheres. Thus, these actions are non-orthogonal.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O propósito do presente trabalho é apresentar alguns aspectos da Teoria de Grupos Compactos de Transformações. Em especial, mostrar a existência de O(n)-ações em esferas, agindo não ortogonalmente, como mostrou G. E. Bredon em 1965 ([8],[9], [10]), contrariando a expectativa de que os conjuntos de pontos fixos de ações ortogonais em esferas seriam esferas.

No decurso do trabalho apresentamos em primeiro lugar, as idéias fundamentais da Teoria de Grupos Topológicos e Ações de Grupos. Em seguida, desenvolvemos em detalhe o material necessário em colagens equivariantes, que produz as O(n)-esferas de Bredon. Mediante o uso da sequência de Mayer-Vietoris e outras noções de Topologia Algébrica (ver Apêndice), assim como da Conjetura Generalizada de Poincaré ([4]), construimos as O(n)-esferas e constatamos que os conjuntos de pontos fixos correspondentes não são esferas.

Notemos que as construções de que fazemos uso são, em essência, do mesmo tipo do que as usadas por Milnor ([3]), para mostrar a existência de vinte e oito estruturas diferenciáveis diferentes sobre a esfera de dimensão sete.

CAPÍTULO I

1.1. Grupos Topológicos

Definição 1.1.1.

Um *Grupo Topológico* G é um grupo que, como conjunto, possui uma topologia de Hausdorff, para o qual as operações do grupo, multiplicação

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g,h) \longmapsto gh$$

e inversa

$$G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g^{-1}, \quad \text{são contínuas.}$$

Equivalentemente, a função $G \times G \longrightarrow G$, dada por $(g,h) \longmapsto g^{-1}h$ é contínua.

Proposição 1.1.2.

Se H é um subgrupo de um grupo topológico G, então $\overline{H}$ é também um subgrupo de G.

Se H é normal, então $\overline{H}$ é normal.

Prova

Seja $\mu: G \times G \longrightarrow G$, dada por $\mu(g,h) = gh^{-1}$. Então $\mu(\overline{H} \times \overline{H}) = \mu(\overline{H \times H})$. Como μ é contínua, $\mu(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{\mu(H \times H)}$. Vamos verificar que $\mu(H \times H) = H$. Seja $\alpha \in \mu(H \times H)$, dado por $\alpha = \mu(g,h)$, com $g,h \in H$. Então, $\alpha = gh^{-1}$ e $\alpha \in H$. Seja α um elemento de H; então $\alpha = ab^{-1}$, com $a,b \in H$ e $\alpha = \mu(a,b)$. Assim, $\alpha \in (H \times H)$.

Como $\mu(\bar{H} \times \bar{H}) \subset \bar{H}$, temos que, se $a,b \in \bar{H}$, então $ab^{-1} = \mu(a,b) \in \mu(\bar{H} \times \bar{H}) \subset \bar{H}$. Logo, para qualquer $a,b \in \bar{H}$, $ab^{-1} \in \bar{H}$ e $\bar{H}$ é subgrupo de G.

Suponhamos que H é normal. Consideremos L_g e R_g, respectivamente, translação à esquerda e translação à direita, assim definidas: $L_g : G \to G$, $L_g(h) = gh$ e

$R_g : G \to G$, $R_g(h) = hg^{-1}$.

Como L_gR_g é um homeomorfismo e H é normal, temos: $L_gR_g(H) = gHg^{-1} = H$, e $\overline{L_gR_g(H)} = \bar{H}$, o que implica que $g\bar{H}g^{-1} = \bar{H}$; ou seja, $\bar{H}$ é normal.

Por mapeamento canônico ϕ de um grupo G sobre o espaço das classes laterais G/H (H subgrupo de G), entendemos a aplicação $\phi: G \to G/H$, definida por $\phi(x) = xH$.

Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo fechado de G. Um conjunto aberto em G/H é um conjunto cuja imagem inversa sob ϕ é um aberto em G.

Assim topologizamos o espaço quociente G/H, de modo que ϕ seja contínua. Se H não é fechado, G/H não é espaço de Hausdorff e, portanto, não pode ser considerado grupo topológico.

Proposição 1.1.3.

Seja H um subgrupo fechado de G. Então o espaço G/H das classes laterais à direita de H em G, com a topologia quociente induzida pela aplicação canônica $\phi: G \to G/H$, definida por $\phi(g) = gH$, é um espaço de Hausdorff e ϕ é aberta e contínua.

Prova

A aplicação $\phi: G \to G/H$, definida por $\phi(g) = gH$, é uma aplicação aberta. Basta ver que se U é aberto em G, então $\phi^{-1}\phi(U)$ também é aberto em G. Seja $v \in \phi^{-1}\phi(U)$. Queremos ver que existe uma vizinhança V de v contida em $\phi^{-1}\phi(U)$. Sabemos que $\phi(v) \in \phi(U)$. Escolhemos $u \in U$, tal que $\phi(u) = \phi(v)$. Mas então existe $h \in H$, tal que $hu = v$. Logo, hU é uma vizinhança aberta de v em G, contida em $\phi^{-1}\phi(U)$.

Vamos mostrar que G/H é espaço de Hausdorff. Suponhamos que $g_1H \neq g_2H$, ou seja, $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Como H é fechado, e portanto, o seu complementar H^c é aberto, existe U, uma vizinhança simétrica de e $(U = U^{-1})$, com $Ug_1^{-1}g_2U \subset H^c$ ou $Ug_1^{-1}g_2U \cap H = \emptyset$. Assim, $g_1^{-1}g_2U \cap UH = \emptyset$, porque $ug_1^{-1}g_2u' \neq h$, para qualquer $u, u' \in U$, $h \in H$. Se tivermos $g_1^{-1}g_2u' = uh$, então $u^{-1}g_1^{-1}g_2u' = u^{-1}uh = h \in H$, o que é um absurdo.

Como $g_1^{-1}g_2U \cap UH = \emptyset$, temos $g_2U \cap g_1UH = \emptyset$ e $g_2UH \cap g_1UH = \emptyset$. Por outro lado, $\phi(g_iU) = \{g_iuH \mid u \in U\} \subset G/H$ são subconjuntos disjuntos abertos em G/H contendo g_1H e g_2H.

Proposição 1.1.4.

Se H é um subgrupo normal fechado de um grupo topológico G, então G/H é um grupo topológico.

Prova

Devemos mostrar que a função $\mu: G/H \times G/H \to G/H$, definida por $\mu(g_1H, g_2H) = g_1^{-1}g_2H$ é contínua.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\eta} & G \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\mu} & G/H \end{array}$$

onde ϕ é a aplicação canônica, $\psi = \phi\times\phi$, e $\eta(g_1,g_2) = g_1^{-1}g_2$. Então $\mu \circ \psi(g_1,g_2) = \mu(g_1H,g_2H) = g_1^{-1}g_2H$ e $\phi\circ\eta(g_1,g_2) = \phi(g_1^{-1}g_2) = g_1^{-1}g_2H$.

Logo, $\mu \circ\psi(g_1,g_2) = \phi\circ\eta(g_1,g_2)$ (o diagrama é comutativo).

Seja $U \subset G/H$, U aberto. Então, $\mu^{-1}(U) = \psi\,\eta^{-1}\,\phi^{-1}(U)$. Como ϕ e η são contínuas e $\psi = \phi \times \phi$ é uma aplicação aberta, $\psi\,\eta^{-1}\phi^{-1}(U)$ é um aberto. Logo, μ é contínua.

Proposição 1.1.5.

Sejam $\phi: G \to H$ um epimorfismo de grupos topológicos e K o núcleo de ϕ ($K = \ker\phi$).

Então

(i) K é um subgrupo fechado normal de G;

(ii) A aplicação induzida $\phi':G/K \to H$ é contínua e bijetora; e

(iii) Se G é compacto, então ϕ' é aberta, e, portanto, um isomorfismo de grupos topológicos.

Observação: A parte (i) vale mesmo quando ϕ não é sobrejetora.

Prova

(i) É um fato elementar - [11]

(ii) Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "T"'] & H \\ G/K \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

Se $xK = yK$, com $x,y \in G$, então $\phi(x) = \phi(y)$, porque $xK = yK$ implica que $x^{-1}y \in K$. Logo, $\phi(x^{-1}y) = 1$ e $\phi(x) = \phi(y)$.

Assim, a função $\phi': G/K \longrightarrow H$ é definida por $\phi'(xK) = \phi(x)$, para qualquer $x \in G$.

Temos então $(\phi' \circ T)\ (x) = \phi'(T(x)) = \phi'(xK) = \phi(x)$, para qualquer $x \in G$. Portanto, $\phi' \circ T = \phi$.

Além disso, ϕ' é a única aplicação que composta com T dá ϕ, pois, se temos um homomorfismo T', $T': G/K \longrightarrow H$ e $T' \circ T = \phi$, segue que $T'(xK) = T'(T(x)) = (T' \circ T)\ (x) = \phi(x) = (\phi' \circ T)(x) = \phi'(T(x)) = \phi'(xK)$, para qualquer $xK \in G/K$.

Logo, T' e ϕ' são iguais.

$\phi^{-1}(A)$ é aberto se, e somente se, $T^{-1}(\phi^{-1}(A))$ é aberto em G. Temos $(T^{-1}\phi'^{-1})(A) = (\phi' \circ T)^{-1}(A) = \phi^{-1}(A)$. Logo ϕ' é contínua.

Vamos mostrar que ϕ' é bijetora.

$y \in H$ implica que existe $x \in G$ tal que $y = \phi(x)$ (ϕ é sobrejetora). Daí $\phi'(xK) = \phi(x) = y$; portanto existe $xK \in G/K$ tal que $y = \phi'(xK)$. Assim, ϕ' é sobrejetora.

Se $xK \in \mathrm{Ker}(\phi')$, temos que $\phi'(xK) = e'$, ou seja, $\phi(x) = e'$, donde $x \in K$. Daí, $xK = K$, ou seja, $\mathrm{Ker}\ (\phi') = K$. Portanto, ϕ' é injetora.

(iii) Se G é compacto, temos que ϕ' é aberta. ([7]).

Proposição 1.1.6.

Sejam G um grupo compacto e H um subgrupo fechado de G. Então, $g \in N(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ se, e somente se, $gHg^{-1} \subset H$.

Prova

Temos que provar que $gHg^{-1} = H \Longleftrightarrow gHg^{-1} \subset H$.

(a) $\Longrightarrow$) óbvio.

(b) $\Longleftarrow$) $gHg^{-1} \subset H \Longrightarrow H \subset gHg^{-1}$.

Sejam ϕ: $G \times G \longrightarrow G$, dada por $\phi(g,k) = gkg^{-1}$. Tomemos $g \in G$ e definamos $A = \{g^n | n=0,1,2,\ldots\}$.

$\bar{A}$ é um subgrupo do compacto G. ([1]).

Então, $\phi(A \times H) \subset H$, porque $\phi(g,h) = ghg^{-1} \in H$ e $\phi(g^n,h) = g^n h(g^n)^{-1} = g^n h(g^{-1})^n = g(g^{n-1}h(g^{-1})^{n-1})g^{-1} \in H$, por indução em n.

Além disso, $\phi(\bar{A} \times H) = \phi(\bar{A} \times \bar{H}) = \overline{\phi(A \times H)}$. Como ϕ é contínua, $\phi(\overline{A \times H}) \subset \overline{\phi(A \times H)}$ e $\overline{\phi(A \times H)} \subset \bar{H} = H$.

$\bar{A}$ é subgrupo de G, logo $g^{-1} \in \bar{A}$. Mas $\phi(g^{-1},k) \in H$ para todo $k \in H$. Portanto, $g^{-1}kg \in H$, para todo $k \in H$. Assim, $g^{-1}Hg \subset H$, e então, $H \subset gHg^{-1}$.

Proposição 1.1.7.

Seja G um grupo compacto. Então toda vizinhança U de e em G contém uma vizinhança V de e, que é invariante sob conjugação.

Prova

Seja ϕ: $G \times G \longrightarrow G$, definida por $\phi(g,k) = gkg^{-1}$. Seja U uma vizinhança de e. Temos que, $G - U = F = U^c$ é fechado. Assim, G-U é compacto. Como ϕ é contínua, $\phi(G \times (G - U))$ é compacto. Consideremos agora, o conjunto $V = [\phi(G \times (G - U))]^c$.

Temos,

(a) V é aberto, pois é o complementar de um fechado.

(b) $V \subset U$. Se $\alpha \notin U$, então $\alpha \in G - U$. Como $e\,\alpha\, e^{-1} = \alpha$, então $\phi(e,\alpha) = \alpha$; isto implica que $\alpha \in \phi(G \times (G - U))$; portanto, $\alpha \notin V$.

(c) $e \in V$. Se $e \notin V$, então $e \in \phi(G \times (G - U))$; portanto, existe (a,b), tal que $aba^{-1} = e$, com $a,b \in G$ e $b \notin U$. Portanto, $aba^{-1} = e$, o que implica que $ab = a$ e $b = aa^{-1} = e$. Isto é absurdo, porque $b \notin U$. Logo, $e \in V$.

(d) V é invariante sob conjugação. Precisamos provar que $gVg^{-1} \subset V$, para qualquer g em G. Seja g um elemento de G e y um elemento de gVg^{-1}. Assim, existe $x \in V$, tal que $y = gxg^{-1}$. Se $y \notin V$, então $y \in \phi(G \times (G - U))$, donde $y = h\,\alpha\, h^{-1}$, $h \in G$, $\alpha \in G$, $\alpha \notin U$.

Logo, $gxg^{-1} = h\,\alpha\, h^{-1}$,

$\Longrightarrow x = (g^{-1}h)\,\alpha\,(h^{-1}g)$,

$\Longrightarrow x = (g^{-1}h)\,\alpha\,(g^{-1}h)^{-1}$

$\Longrightarrow x = p\,\alpha\, p^{-1}$, $p \in G$, $\alpha \in G$, $\alpha \notin U$,

$\Longrightarrow x = \phi(p,\alpha)$, $p \in G$, $\alpha \in (G - U)$,

$\Longrightarrow x \in \phi(G \times (G - U))$,

$\Longrightarrow x \notin V$, absurdo.

Logo, y pertence a V, o que implica que gVg^{-1} é um subconjunto de V, para qualquer $g \in G$, ou seja, V é invariante sob conjugação.

1.2. Ações de Grupos

Definição 1.2.1.

Sejam G um grupo topológico, X um espaço topológico de Hausdorff; $\tau: G \times X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, tal que

(a) $\tau(g, \tau(h,x)) = \tau(gh,x)$;

(b) $\tau(e,x) = x$, para qualquer $g, h \in G$, e para qualquer $x \in X$.

A tripla $(G;X;\tau)$ é um Grupo Topológico de Transformações, e a aplicação τ é chamada uma Ação de G sobre X.

O espaço X, juntamente com uma dada ação τ de G, é chamado um G-espaço.

Proposição 1.2.2.

Sejam g um elemento de G; X um G-espaço e $T_g: X \longrightarrow X$, definida por $T_g(X) = g(x) = \tau(g,x)$.

Então, T_g é um homeomorfismo.

Prova

Como $T_g(x) = g(x) = \tau(g,x)$, então, por 1.2(a), $T_g T_h = T_{gh}$, para $g,h \in G$ e $T_e = 1_X$. Assim, $T_g T_{g^{-1}} = T_{gg^{-1}} = T_e = T_{g^{-1}g} = 1_X$, o que mostra que T_g é um homeomorfismo de X.

Observação

Se Homeo(X) é o grupo dos homeomorfismos de X sobre si próprio sob composição, então a aplicação $g \longmapsto T_g$ define um homomorfismo $T : G \longrightarrow \text{Homeo}(X)$.

Definição 1.2.3.

O núcleo do homomorfismo T é o núcleo da ação τ.

Ker $\tau \doteq \{g \in G | g(x) = x, \forall x \in X\}$.

O núcleo de τ é normal e fechado.

Vamos ver alguns exemplos de ações de grupos.

Exemplo 1.2.4.

Seja G um grupo topológico e a aplicação $C : G \times G \longrightarrow G$, definida por $C(g,h) = C_g(h) = ghg^{-1}$, $g,h \in G$.

Temos,

(a) C é uma aplicação contínua.

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \longrightarrow & G \times G \times G & \longrightarrow & G, \\ (g,h) & \xmapsto{\text{cont.}} & (g,h,g^{-1}) & \xmapsto{\text{cont.}} & ghg^{-1} \ ; \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{contínua}}$$

(b) $C_{g'}C_g(h) = C_{g'}(ghg^{-1}) = g'ghg^{-1}g'^{-1} = g'gh(g'g)^{-1} = C_{gg'}(h)$;

(c) $C_e(h) = ehe^{-1} = h$.

Assim, C é uma ação de G sobre si próprio por conjugação.

Definição 1.2.5.

Seja M_n a álgebra de todas as matrizes quadradas reais de ordem n com a topologia do espaço vetorial subjacente $\mathbb{R}^{n^2}$. Definimos $Gl(n,\mathbb{R})$ como o grupo das matrizes reais $n \times n$, não singulares, sob multiplicação e a topologia induzida de M_n.

Daremos especial atenção ao subgrupo de $Gl(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes A, tais que $A.A^t = I$. Este subgrupo, chamado <u>grupo ortogonal</u> , é denotado por $O(n,\mathbb{R})$, ou simplesmente $O(n)$.

Elementos de $O(n)$ podem ser interpretados como bases ortonormais, onde os vetores de uma tal base correspondem às colunas da representação matricial do elemento de $O(n)$ correspondente.

Definição 1.2.6.

Seja G um grupo topológico. Uma representação real de G é um homomorfismo contínuo de G em $Gl(n,\mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.7.

Consideremos a aplicação $T: Gl(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $T(A,u) = Au$, $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}^n$.

(a) T é contínua, porque as operações são de soma e produto usuais.

(b) $T(A,T(Bu)) = T(A,Bu) = A(Bu) = (AB)(u) = T(AB,u)$.

(c) $T(I,u) = Iu = u$.

Portanto, T é uma ação do grupo $Gl(n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Assim, qualquer representação $G \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$ define uma ação de G sobre $\mathbb{R}^n$.

Representações ortogonais $G \longrightarrow O(n)$ dão ações de G sobre o disco unitário D^n e sobre a esfera unitária S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$, onde $D^n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| = 1\}$.

<u>Exemplo 1.2.8.</u>

Sejam as aplicações $T_1: O(n) \times D^n \longrightarrow D^n$, definida por $T_1(A,u) = Au$, onde $A \in O(n)$ e $u \in D^n$, e $T_2: O(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, definida por $T_2(A,u) = Au$, onde $A \in O(n)$ e $u \in S^{n-1}$.

Para mostrar que T_1 é uma ação basta verificar que, se $u \in D^n$ então $Au \in D^n$. De fato, $\|Au\| = \|u\|$, A é ortogonal. Se $\|u\| \leq 1$, então $\|Au\| \leq 1$, logo $Au \in D^n$.

De modo análogo, se $\|u\| = 1$, então $\|Au\| = 1$, o que implica que $Au \in S^{n-1}$, e que T_2 é uma ação.

1.3. Grupos Isotrópicos e Órbitas

Definição 1.3.1.

Uma G-aplicação ou aplicação equivariante $\phi:X \longrightarrow Y$ entre G-espaços é uma aplicação que comuta com as correspondentes ações de grupos.

$$\phi(g(x)) = g(\phi(x)), \quad \forall\, g \in G, \quad \forall\, x \in X.$$

Para um dado grupo topológico G, os G-espaços formam uma categoria, cujos morfismos são as aplicações equivariantes.

Definição 1.3.2.

Uma aplicação equivariante $\phi:X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de G-espaços, se ϕ é também um homeomorfismo. Neste caso, dizemos que as correspondentes ações são equivalentes.

Definição 1.3.3.

Consideremos o G-espaço X e $x \in X$. O conjunto $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ é um subgrupo fechado de G, chamado *subgrupo isotrópico* de G por x.

Proposição 1.3.4.

Seja X um G-espaço e $x \in X$. Então $g^{-1}G_{g(x)}g = G_x$.

Prova

Seja $\alpha \in g^{-1}G_{g(x)}g$. Então $\alpha = g^{-1}hg$, para algum $h \in G_{g(x)}$. Assim, $g\,\alpha\,g^{-1} = h$. Isto implica que $g\,\alpha\,g^{-1}(g(x)) = g(x)$ e $\alpha[(g^{-1}g)(x)] = g^{-1}g(x) = x$. Logo, $\alpha \in G_x$ e $g^{-1}G_{g(x)}g \subset G_x$.

Para mostrar a inclusão na outra direção, aplica-se $g_1 = g^{-1}$ e $y = g(x)$ e obtém-se $g_1^{-1}G_{g_1(x)}g_1 \subset G_y$; assim, $G_x \subset g^{-1}G_{g(x)}g$ e $G_x = g^{-1}G_{g(x)}g$.

Proposição 1.3.5.

Seja $\phi : X \longrightarrow Y$ uma aplicação equivariante entre G-espaços. Então $G_x \subset G_{\phi(x)}$, para qualquer $x \in X$.

Prova

Seja $h \in G_x$. Então $h(x) = x$ e $h \in G$. Como ϕ é equivariante, $\phi(h(x)) = h(\phi(x))$, ou $\phi(x) = h(\phi(x))$. Isto implica que $h \in G_{\phi(x)}$.

Exemplo 1.3.6.

Seja o grupo $G = S^1$, que age sobre o espaço $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, da seguinte forma:

$\tau: S^1 \times (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \longrightarrow (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$, definida por

$\tau(t,(z_1,z_2)) = (t^2 z_1, t^7 z_2)$.

Vamos analisar as seguintes situações:

a) $(z_1,z_2) \neq (0,0)$.

O conjunto dos pontos $t \in S^1$, que fazem (z_1,z_2) permanecerem fixos pela ação dada é $S^1_{(z_1,z_2)} = \{t \in S^1 | \tau(t,(z_1,z_2)) = (z_1,z_2)\} = \{1\}$, porque $\tau(t,(z_1,z_2)) = (t^2 z_1, t^7 z_2) = (z_1,z_2)$. Assim, $t^2 = 1$ e $t^7 = 1$. Portanto, $t = 1$.

O conjunto $G_x = \{1\}$ é, então, o subgrupo isotrópico com relação aos pontos $(z_1,z_2) \neq (0,0)$.

b) $(z_1,z_2) = (0,z_2)$, com $z_2 \neq 0$.

$G_x = S^1_{(0,z_2)} = \{t \in S^1 | \tau(t,(0,z_2)) = (0,z_2)\}$

$\tau(t,(0,z_2)) = (0,t^7 z_2) = (0,z_2)$

$t^7 = 1$

Assim, $G_x = S^1_{(0,z_2)} = \mathbb{Z}_7 \subset S^1$, onde $\mathbb{Z}_7 = \{$ raizes sétimas da unidade$\}$

c) $(z_1,z_2) = (z_1,0)$, com $z_1 \neq 0$

$G_x = S_{(z_1,0)} = \{t \in S^1 | \tau(t,(z_1,0) = (z_1,0)\}$

$\tau(t,(z_1,0)) = (t^2 z_1,0) = (z_1,0)$

Daí, $t^2 = 1$, $t \in \{-1,+1\}$, e

$G_x = S^1_{(z_1,0)} = \{-1,+1\}$

d) $(z_1,z_2) = (0,0)$

$G_x = S^1_{(0,0)} = \{t \in S^1 | \tau(t,(0,0)) = (0,0)\} = S^1$

Definição 1.3.7.

Se X é um G-espaço e $x \in X$, o subespaço $G(x)=\{g(x) \in X \mid g \in G\}$ é chamado Órbita de x (sob G).

Observação:

As órbitas $G(x)$ e $G(y)$ de dois pontos quaisquer $x,y \in X$ são, ou iguais, ou disjuntas.

1.4. Pontos Fixos

Definição 1.4.1.

Um ponto x em um G-espaço X é dito fixo, se $G(x) = \{x\}$, ou seja, $G_x = G$.

Notação:

$X^G = \{x \in X \mid g(x) = x, \forall g \in G\} = F(G,X)$ é o subespaço dos pontos fixos de G sobre X.

Exemplo 1.4.2.

Para uma representação de G sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, vejamos que $F(G,\mathbb{R}^{n+1})$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $T:Gl(n+1,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

definida por $T(A,u) = Au$.

$F(Gl(n+1),\mathbb{R}^{n+1}) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} | Au = u, \ \forall A \in Gl(n+1,\mathbb{R})\}$

Sejam u, v elementos de $F(Gl(n+1,\mathbb{R}),\mathbb{R}^{n+1})$ e α um escalar, elementos arbitrariamente escolhidos.

Então, observemos que, para qualquer A em $Gl(n+1,\mathbb{R})$, temos

a) $T(A,u+v) = A(u+v) = Au + Av = (u+v) \in \mathbb{R}^{n+1}$

b) $T(A,\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha u \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Logo, $F(Gl(n+1,\mathbb{R}),\mathbb{R}^{n+1})$ é subespaço linear de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 1.4.3.

Para uma ação ortogonal de G sobre S^n, vejamos que o conjunto dos pontos fixos é uma esfera S^r.

Sabemos que uma tal ação é obtida por restrição de uma ação ortogonal do G em $\mathbb{R}^{n+1}$, e que pelo exemplo anterior, o seu conjunto de pontos fixos é um subespaço linear de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensão $r+1$.

Temos que o conjunto de pontos fixos da ação restrita a S^n é a intersecção desse subespaço linear de dimensão $r+1$ com a esfera unitária S^n, o que prova a afirmação.

CAPÍTULO II

2.1. Colagens Equivariantes

Definição 2.1.1.

Sejam A, X e Y espaços topológicos, com $A \subset X$ e $X \cap Y = \emptyset$. Seja $f:A \longrightarrow Y$, f uma função contínua. Consideremos o espaço topológico $X \cup Y$, no qual X e Y são ambos abertos e fechados, guardando sua própria topologia. Seja $\mathcal{R}$ a menor relação de equivalência sobre $X \cup Y$, tal que $x \mathcal{R} f(x)$, para qualquer x em A.

O espaço de identificação $(X \cup Y)/\mathcal{R}$ é o espaço obtido pela colagem de X a Y, através de $f:A \longrightarrow Y$. A aplicação f é chamada função de colagem.

Notação

(a) $X + Y$ é a união disjunta de espaços X e Y com a seguinte topologia: $U \subset X+Y$ é aberto se, e somente se, $U \cap X$ é aberto em X e $U \cap Y$ é aberto em Y.

(b) $(X \cup Y)/\mathcal{R} = X \cup_f Y$.

Com esta notação temos o seguinte lema.

Lema 2.1.2.

Seja $p: X + Y \longrightarrow X \cup_f Y$, a projeção canônica. Então,

(a) Y está mergulhado como um conjunto fechado, homeomórfico a Y; ainda mais $p|_Y$ é um homeomorfismo.

(b) $X - A$ está mergulhado homeomorficamente como um conjunto aberto ; ainda mais $p|_{X-A}$ é um homeomorfismo.

Prova

Observemos que $p|_Y$ e $p|_{X-A}$ são injetivos. Vamos identificar Y com $p(Y)$ e $X-A$ com $p(X-A)$. Com estas identificações $X \cup_f Y$ pode ser considerado como a união de dois subconjuntos disjuntos $(X-A)$ e Y.

Seja U aberto em Y. Devemos ver que U é a intersecção de Y com um aberto de $X \cup_f Y$. Como $f:A \longrightarrow Y$ é contínua , $f^{-1}(U)$ é aberto em A. Mas A tem a topologia de restrição de X; portanto existe um aberto V em X, tal que $f^{-1}(U) = V \cap A$. Então, $W = (V - A) + U$ é aberto em $X + Y$. Logo, $(V - A) \cup U$ é aberto em $X \cup_f Y$, desde que $p^{-1}((V - A) \cup U) = U + V$ é aberto e p-saturado (isto é, $U + V = p^{-1}p(U + V)$) em $X + Y$. Isto prova que $p(Y) \subset (X - A) \cup Y = X \cup_f Y$ tem a mesma topologia do que a topologia original de Y.

Também, $X - A$ é aberto e p-saturado (isto é, $p^{-1}p(X-A)=X-A$) em $X + Y$, o que implica que $X - A$ é aberto em $X \cup_f Y$. Assim, o seu complemento Y em $X \cup_f Y$ é fechado. Se U é aberto em $X - A \subset X$, então U é aberto em $X - A \subset X \cup Y$, já que $X-A$ é aberto em $X \cup_f Y$, o que implica (b).

Lema 2.1.3.

Sejam X e Y espaços de Hausdorff regulares. Seja A um conjunto fechado em X. Então o espaço $X \cup_f Y$ é de Hausdorff.

Observação

Um espaço X é regular, se para todo U aberto em X e para todo x em U, existe $W \subset U$, tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset U$.

Prova

Denotemos $X \cup_f Y$ por Z e escolhamos $z_1, z_2 \in Z$. Para provar que Z é de Hausdorff temos que verificar tres casos.

Caso 1 - z_1 e z_2 estão em $Z - Y \cong X - A$.

Como $Z - Y$ é aberto e homeomórfico a $X - A$, que é aberto no espaço de Hausdorff X, os pontos z_1 e z_2 podem ser separados.

Caso 2 - $z_1 \in Y$ e $z_2 \notin Y$.

Este caso segue do fato de que Y é regular.

Caso 3 - $z_1, z_2 \in Y$.

Sejam U_1 e U_2 abertos em Y, com $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Assim, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Como Y é regular, existem abertos W_1 e W_2 em Y, tais que $z_1 \in W_1 \subset \overline{W}_1 \subset U_1$ e $z_2 \in W_2 \subset \overline{W}_2 \subset U_2$. Isto implica que $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) = \emptyset$. Existem V_1 e V_2 abertos em X, tais que $V_1 \cap A = f^{-1}(W_1)$ e $V_2 \cap A = f^{-1}(W_2)$. Vejamos que $(V_1 - \bar{V}_2) \cap A = V_1 \cap A$. Basta verificar que, se $x \varepsilon V_1 \cap A$, então $x \not\varepsilon \bar{V}_2$. Se, pelo contrário, $x \varepsilon \bar{V}_2$, então $x \varepsilon A \cap \bar{V}_2$, que é o fecho de $A \cap V_2$ em A. Assim, $f(x) \varepsilon \bar{W}_2 \subset U_2$. Mas $f(x)$ também pertence a $W_1 \subset U_1$, o que é um absurdo.

De modo análogo, ve-se que $(V_2 - \bar{V}_1) \cap A = V_2 \cap A$. Assim, vemos que V_1 e V_2 são as duas vizinhanças desejadas.

Sabemos que todo espaço de Hausdorff compacto é regular.([7]). Isto garante a seguinte proposição,

Proposição 2.1.4.

Se X e Y são espaços de Hausdorff compactos, A é fechado em X e $f:A \longrightarrow Y$ é contínua, então $X \cup_f Y$ é um espaço de Hausdorff compacto.

Proposição 2.1.5.

Sejam X e Y G-espaços e $A \subset X$ um subespaço compacto invariante. Seja $f:A \longrightarrow Y$ uma aplicação equivariante. Então, o espaço de adjunção $X \cup_f Y$, quando de Hausdorff, herda uma G-ação natural.

Prova

Temos as ações: $G \times X \longrightarrow X$, $G \times (X - A) \longrightarrow X - A$, $G \times A \longrightarrow A$,

$G \times Y \longrightarrow Y$. Consideremos uma rede (g_α, x_α) em $G \times (X - A)$, convergindo em $G \times (X \cup_f Y)$ a gy. Existe $a \in A$, tal que a é ponto de acumulação de $\{x_\alpha\}$, com $f(a) = y$. Logo, existe uma subrede $\{x_{\alpha_i}\}$ que converge para a. Em $G \times X \longrightarrow X$ temos que g_{α_i} converge para g. Assim, $(g_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})$ converge para (g,a). Daí, pela continuidade da ação de $G \times X \longrightarrow X$, $g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$ converge para $g(a)$. Como a aplicação $p: X + Y \longrightarrow X \cup_f Y$ é contínua, temos que, em $X \cup_f Y$, $g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$ converge para $p(g(a)) = f(ga) = g(f(a)) = gy$.

É interessante o caso em que f é um homeomorfismo equivariante de A na sua imagem. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A = X \cap Y$ é um subespaço de X e de Y. A G-ação sobre A é a mesma nos dois casos e $X \cup Y$ representa a adjunção pela identidade sobre A.

Se $f: A \longrightarrow A$ pode ser estendido a um homeomorfismo equivariante de $X \longrightarrow X$ (respectivamente, de $Y \longrightarrow Y$) então $X \cup_f Y$ é homeomórfico a $X \cup Y$ como um G-espaço. O homeomorfismo é dado por f sobre X e pela identidade sobre Y (respectivamente, pela identidade sobre X e f sobre Y). Nos casos em que f não se estende a um homeomorfismo equivariante para X ou para Y, $X \cup_f Y$ pode ser um novo G-espaço.

2.1.6. Obtenção de auto-homeomorfismos equivariantes

Os auto-homeomorfismos equivariantes de um G-espaço A formam um grupo, sob composição, que denotaremos por $\mathrm{Homeo}^G(A)$.

Suponhamos que são dadas as aplicações equivariantes θ, $\theta' : A \to G$, onde a ação sobre G é a conjugação, ou seja: $C_g(h) = ghg^{-1}$. Denotamos a imagem de um elemento a de A através da θ, por θ_a. Temos $(\theta\theta')_{ga} = \theta_{ga}\theta'_{ga} = (g\theta_a g^{-1})(g\theta'_a g^{-1}) = g\theta_a(g^{-1}g)\theta'_a g^{-1} = g\theta_a\theta'_a g^{-1} = g(\theta_a\theta'_a)g^{-1}$. Isto prova que $\theta\theta'$ é também uma aplicação equivariante.

O conjunto das aplicações equivariantes $\theta : A \longrightarrow G$ forma um grupo pela regra $(\theta\theta')_a = \theta_a\theta'_a$. Vamos denotar este grupo por $\mathrm{Map}^G(A,G)$.

Definimos uma função $\mathrm{Map}^G(A,G) \longrightarrow \mathrm{Homeo}^G(A)$ por $\theta \longmapsto \theta^*$, onde $\theta^*(a) = \theta_a(a)$. Vemos que θ^* é equivariante, uma vez que: $\theta^*(ga) = \theta_{ga}(ga) = (g\theta_a g^{-1})(ga) = g(\theta_a(a)) = g(\theta^*(a))$.

A aplicação $\theta \longmapsto \theta^*$ é um anti-homomorfismo, ou seja, $(\theta^* \circ \lambda^*)(a) = (\lambda\theta)^*(a)$. De fato, temos $(\theta^* \circ \lambda^*)(a) = \theta^*(\lambda^*(a)) = \theta^*(\lambda_a(a)) = \theta_{\lambda_a}(\lambda_a(a)) = \lambda_a\theta_a\lambda_a^{-1}\lambda_a(a) = (\lambda_a\theta_a)(a) = (\lambda\theta)_a(a) = (\lambda\theta)^*(a)$.

Observemos que em geral é mais fácil obter aplicações equivariantes do que homeomorfismos equivariantes. De fato, a construção que acabamos de fazer será de utilidade, após o exemplo 2.2.2, na forma que segue.

Suponhamos que temos uma G-aplicação $\theta : A \longrightarrow G$, como acima, e consideremos $A \times A$ com a ação diagonal $g(a,a') = (ga,ga')$. Vemos que a aplicação $\tau : A \times A \longrightarrow G$ dada por $\tau(a,a') = \theta_a$ é equivariante. Daí, e pela construção anterior, nesta secção, obtemos $\tau^*(a',a) = (\theta_a(a'), \theta_a(a))$, onde o elemento θ_a de G age, como temos pedido, pela ação diagonal. Mas, como foi concluido na construção prévia, τ^* é um G-homeomorfismo, o que será aplicado após o exemplo 2.2.2.

2.2. Ações não ortogonais de grupos ortogonais em esferas

Sabemos que as esferas S^n são variedades diferenciáveis. ([12]). Vamos mostrar que existem ações de $O(n)$ em esferas de dimensão $4m + 1$, cujos conjuntos de pontos fixos não são esferas, dando portanto, ações não ortogonais de $O(n)$. (ver secção 1.4).

De fato, construiremos $O(n)$-espaços, pela colagem, através de um automorfismo equivariante sobre $S^{n-1} \times S^{n-1}$, do espaço $S^{n-1} \times D^n$ em $S^{n-1} \times D^n$. Estas são as mesmas construções que usou Milnor ([3]) para mostrar a existência de esferas homotópicas, homeomórficas a S^n, mas não difeomórficas a S^n.
Milnor provou, por exemplo, que existem vinte e oito esferas homeomórficas a S^7, mas diferentes entre si no que se refere à estrutura diferenciável.

Usando fatos de Homologia Singular (ver Apêndice), veremos que alguns dos objetos de dimensão $4m+1$, a construir, são homólogos a S^{4m+1}. Então, a utilização conjunta da Conjetura Generalizada de Poincaré ([4]) e do Teorema de Van Kampen ([5]) dará o fato procurado de que os objetos que denominaremos $\Sigma_{k\ \text{ímpar}}^{4m+1}$ são esferas S^{4m+1}, enquanto que, usando os mesmos fatos de Homologia, veremos que o conjunto de seus pontos fixos não são esferas.

Consideremos o homomorfismo $O(n) \longrightarrow O(2n)$, definido por $A \longmapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Por meio deste homomorfismo temos a $O(n)$-ação diagonal sobre $\mathbb{R}^{2n}$, ou seja, se $A \in O(n)$, então

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au \\ Av \end{bmatrix} \quad \text{, onde } u,v \in \mathbb{R}^n.$$

Seja S^{2n-1} decomposto da seguinte maneira: $S^{2n-1} = S_+ \cup S_-$, onde $S_+ = \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|u\| \geq \|v\| \text{ e } \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1\}$

e $S_- = \{(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq \|v\| \text{ e } \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1\}$

Seja $(u,v) \in S_+$ e $A \in O(n)$. Então, $A(u,v) = (Au,Av)$. Como A preserva a norma, temos $\|Au\| \geq \|Av\|$ e $\|Au\|^2 + \|Av\|^2 = 1$, ou seja, $A(u,v)$ é elemento de S_+. Assim, a ação de $O(n)$ em S^{2n-1} se restringe a uma ação em S_+.

De modo análogo, $O(n)$ se restringe a uma ação em S_-.

Definimos a função ϕ_+ por $\phi_+ : S_+ \longrightarrow S^{n-1} \times D^n$, dada por $\phi_+(u,v) = (u/\|u\|, v/\|u\|)$, $\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$.

A função ϕ_+ é contínua e bijetiva.

A função inversa $\phi_+^{-1} : S^{n-1} \times D^n \longrightarrow S_+$ é dada por:

$$\phi_+^{-1}[(x,y)] = (x(1 - \|y\|^2)^{-1/2}, y(1 - \|y\|^2)^{-1/2}).$$

Como $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$, $\|x\| = (1 - \|y\|^2)^{-1/2}$ e ϕ_+^{-1} é contínua. Assim, ϕ_+ é um homeomorfismo.

Também, ϕ_+ é equivariante, porque

$$\phi_+\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \phi_+\left(\begin{bmatrix} Au \\ Av \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Au/\|Au\| \\ Av/\|Au\| \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \phi_+\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/\|u\| \\ v/\|u\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au/\|u\| \\ Av/\|u\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au/\|Au\| \\ Av/\|Au\| \end{bmatrix}$$

($\|Au\| = \|u\|$ pois A é ortogonal).

A função ϕ_+^{-1} é equivariante, porque

$$\phi_+^{-1}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}\right) = \phi_+^{-1}\left(\begin{bmatrix} Ax \\ Ay\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Ax\ (1 - \|Ay\|^2)^{-1/2} \\ Ay\ (1 - \|Ay\|^2)^{-1/2}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ax\ (1 - \|y\|^2)^{-1/2} \\ Ay\ (1 - \|y\|^2)^{-1/2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(1 - \|y\|^2)^{-1/2} \\ y(1 - \|y\|^2)^{-1/2}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A\end{bmatrix} \phi_+^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}\right).$$

De forma análoga, podemos verificar que $\phi_-: S_- \longrightarrow S^{n-1} \times D^n$ definido por $\phi_-(u,v) = (u/\|v\|\ ,\ v/\|v\|)$ é um homeomorfismo equivariante.

Assim, $\phi = \phi_- \circ \phi_+^{-1}$ é também um homeomorfismo equivariante.

O espaço S_+ é homeomórfico, pela ϕ_+, a $S^{n-1} \times D^n$, e, por restrição, o bordo de S_+, denotado por ∂S_+, é homeomórfico a $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Da mesma forma, $S_- \underset{\phi_-}{\cong} S^{n-1} \times D^n$ e $\partial S_- \cong S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Consideremos a função de colagem $\phi = \phi_-\big|_{S_-} \circ \phi_+\big|_{S^{n-1} \times S^{n-1}}$.

Temos,

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & (S^{n-1} \times D^n) \cup_\phi (S^{n-1} \times D^n) \\ S_+ \cup S_- \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

onde $\phi: S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$

Vamos caracterizar aquelas aplicações equivariantes $\theta : S^{n-1} \longrightarrow O(n)$, $x \longmapsto \theta_x$, onde $O(n)$ age sobre si próprio por conjugação. Neste caso, se $x \in S^{n-1}$ e $g(x) = x$, teremos $\theta_x = \theta_{gx} = g\theta_x g^{-1}$. Portanto, θ_x deve comutar com cada elemento do grupo isotrópico de $x \in S^{n-1}$.

Consideremos $M \in O(n)$, representando uma mudança de coordenadas, levando x em v_1, onde $v_1 = [1\ 0\ \ldots\ 0]$. Então, $O(n)_x = M^{-1}(I_1 \times O(n-1))$ já que $Mx = v_1$, onde $I_1 \times O(n-1)$ representa as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{onde } A \in O(n-1).$$

Mas $O(n)_{v_1} = I_1 \times O(n-1)$. Aplicando $G_x = g^{-1}G_{g(x)}g$ (proposição 1.3.1), para $g = M$, temos:

$$O(n)_x = M^{-1}O(n)_{v_1} M = M^{-1}(I_1 \times O(n-1))\, M.$$

Como $\theta \in Map^{O(n)}(S^{n-1}, O(n))$, temos que $\theta^* \in Homeo^{O(n)}(S^{n-1})$. (Secção 2.1.1.)

<u>Lema 2.2.1.</u>

<u>Se $n > 3$, e x é elemento de S^{n-1}, vamos obter para θ_x uma das seguintes possibilidades</u>

(a) $\theta_x = I$;

(b) $\theta_x = -I$;

(c) θ_x é a reflexão através do hiperplano perpendicular a x ;

(d) θ_x é a reflexão através da linha $\mathbb{R}x$, que é igual ao oposto aditivo do caso precedente.

Estes casos não podem variar ao variar x. Os casos (c) e (d) dão ações $O(n)$-equivalentes em S^{n-1}.

Para $n = 3$, além das quatro possibilidades citadas, temos, para θ_x, todos os elementos do grupo isotrópico $I_1 \times O(2)$.

A continuidade de θ implica que estes casos não podem variar se variamos x. De fato, se $\{x_i\}$ é uma sequência em S^{n-1} que converge a v_1, podemos escolher uma sequência $M_i \in O(n)$, tal que M_i converge a I e $x_i = M_i v_1$ $(v_1 = M_i^{-1} x_i)$, de modo que $\theta_{x_i} = M_i \theta_{v_1} M_i^{-1}$ converge para $\theta_{v_1} = I\theta_{v_1} I$. (A escolha da sequência M_i com as propriedades mencionadas depende do fato de que as projeções coordenadas $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são aplicações abertas).

Seja $x = v_1 = [1\ 0\ \ldots\ 0]$. Temos $O(n)_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$. Queremos achar θ_x, que deve comutar com cada elemento do grupo $O(n)_x$

Se $n > 3$, temos os quatro casos possíveis:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix}$$

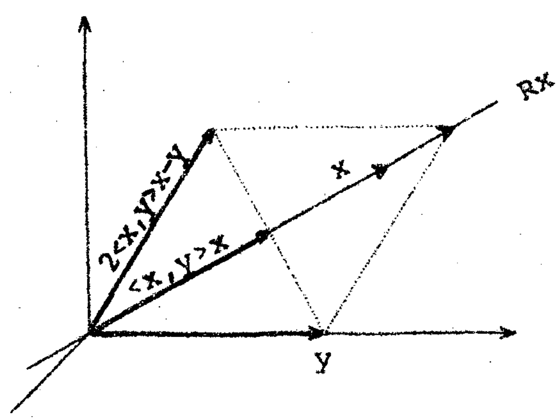
Os casos em que $\theta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ e $\theta_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ darão exemplos equivalentes, já que ao diferir no sinal, vemos que exis te uma $O(n)$-equivalência de S^{n-1}, respectivamente, com cada uma das $O(n)$-ações dadas por estes casos.

Vamos considerar somente o caso no qual θ_x é a reflexão através da reta $\mathbb{R}x$, ou seja, para $x \in S^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Temos $\theta_x(y) = 2\langle x,y\rangle x - y$, onde $\langle x,y\rangle$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^n$. Notemos que $\theta_x(x) = x$, já que $\langle x,x\rangle = \|x\| = 1$.

Exemplo 2.2.2.

Seja $y \in \mathbb{R}^3$; $x \in S^2$ $(\|x\| = 1)$.



Consideremos agora, a aplicação $\phi: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1} \times S^{n-1}$, definida por $\phi(x,y) = (\theta_x(y),x)$.

Temos
$$\begin{tikzcd}(x,y) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & (y,x) \arrow[r, "g"] & (\theta_x(y),x)\end{tikzcd}$$

Observemos que f é um homeomorfismo equivariante. O último parágrafo da secção 2.1.6, nos permite concluir que se

$\tau\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow O(n)$ é dada por $\tau(x,y) = \theta_x$, onde $O(n)$ age em $O(n)$ por conjugação, então

$$\tau^*(y,x) = (\theta_x(y),\ \theta_x(x)) = (\theta_x(y),\ x) = g(y,x).$$

Logo, g é um $O(n)$-homeomorfismo.

Assim, $\phi = f \circ g$ é também um homeomorfismo equivariante, bem como todas as potências ϕ^k , $k \in \mathbb{Z}$, são homeomorfismos equivariantes (de fato, difeomorfismos).

Vamos estudar agora, os $O(n)$-espaços definidos por $\Sigma_k^{2n-1} = S^{n-1} \times D^n \bigcup_{\phi^k} S^{n-1} \times D^n$, resultantes da colagem de $S^{n-1} \times D^n$ em si próprio, por meio das k-ésimas potências de ϕ ($k \in \mathbb{Z}$) sobre $S^{n-1} \times D^n \cong S^{n-1} \times S^{n-1}$, o bordo de $S^{n-1} \times D^n$.

Consideremos o caso em que $k = 0$. A função de colagem ϕ une o bordo de $S^{n-1} \times D^n$ no bordo de $S^{n-1} \times D^n$, de modo idêntico ao da descolagem. Ficamos com o espaço de adjunção homeomórfico a $S^{n-1} \times (D_+^n \cup D_-^n)$; onde D_+^n e D_-^n são, respectivamente, a calota superior e inferior de S^n, ou seja, $D_+^n \cup D_-^n = S^n$.

Assim, $\Sigma_0^{2n-1} = S^{n-1} \times D^n \bigcup_{\phi^0} S^{n-1} \times D^n = S^{n-1} \times S^n$, que não é uma esfera.

Para dar uma interpretação geométrica, vamos substituir o fator D^n da primeira cópia $S^{n-1} \times D^n$ por $D^n_+ \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e o da segunda cópia $S^{n-1} \times D^n$ por $D^n_- \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, através do homeomorfismo projeção $D^n_+ \subset S^n \longrightarrow D^n \subset \mathbb{R}^n \times 0$, $[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] \longmapsto$ $\longmapsto [x_1, \ldots, x_n]$.

Então a ação de $O(n)$ em D^n, que é a padrão, corresponde à ação de $O(n) \subset O(n+1)$ em $D^n_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$, uma vez que o homeomorfismo projeção é compatível com ambas as ações em D^n e D^n_+. Isto quer dizer que o homeomorfismo $D^n \longleftrightarrow D^n_+$ é $O(n)$-equivariante.

Desta forma, $\Sigma^{2n-1}_k = \Sigma^{2n-1}_{-k}$ como $O(n)$-espaços. Basta trocar os papéis das duas cópias de $S^{n-1} \times D^n$.

Seja $k = 1$. O espaço Σ^{2n-1}_1 pode ser descrito como o espaço obtido pela colagem de $S^{n-1} \times D^n$ em $D^n \times S^{n-1}$ por meio da função $\phi' : S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$, definida por $\phi'(x,y) =$ $= (x, \theta_x(y))$.

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\phi'"'] & (\theta_x(y), x) \arrow[r, "f"] & (x, \theta_x(y)) \end{tikzcd}$$

$\phi' = f \circ \phi$ é um homeomorfismo equivariante.

Como ϕ' se estende a um homeomorfismo equivariante de $S^{n-1} \times D^n$ sobre si mesmo, o espaço Σ^{2n-1}_1 é equivalente a

$S^{n-1} \times D^n \cup D^n \times S^{n-1} \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, onde a $O(n)$-ação é a ação diagonal. Assim, o caso $k = 1$ dá somente esta $O(n)$-ação sobre $\Sigma_1^{2n-1} \cong S^{2n-1}$, que é uma ação familiar.

Para estudar o caso $k \geq 2$, precisamos computar a homologia do espaço Σ_k^{2n-1} $(k \geq 2)$. (ver Apêndice).

Seja s_o um ponto dado em S^{n-1}. Sejam α e β as classes em $H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ representadas por $S^{n-1} \times \{s_o\}$ e $\{s_o\} \times S^{n-1}$, respectivamente.

O homeomorfismo $\phi\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$ induz um automorfismo $\phi_* : H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ e $\phi_*(\alpha) = a_1\, \alpha + a_2\, \beta$, onde $a_i (i = 1,2)$ é o grau da composição

(A) $S^{n-1} \times \{s_o\} \subset S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\phi} S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{p_i} S^{n-1}$, e p_i é a projeção sobre o i-ésimo fator $(i = 1,2)$.

De modo análogo podemos calcular $\phi_*(\beta)$.

Seja $n = 2$, por exemplo. α e β são classes em $H_1(S^1 \times S^1)$, representadas por: $\alpha \longrightarrow S^1 \times \{s_o\}$ e $\beta \longrightarrow \{s_o\} \times S^1$.

Temos

$\phi(x,s_o) = (\theta_x(s_o),x)$;

$\phi(s_o,y) = (\theta_{s_o}(y),s_o)$; e

$\theta_x(y) = 2 \langle x,y \rangle\ x - y, \quad x \in S^1, \quad y \in \mathbb{R}^2.$

$H_1(S^1 \times \{s_o\}) = \mathbb{Z} \oplus 0 = \mathbb{Z}$

$H_1(\{s_o\} \times S^1) = 0 \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Seja $s_o = (1,0) \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Logo $\theta_x(s_o) = 2 <x,s_o> x - s_o$. Enquanto no domínio x percorre S^1 dando uma volta, $\theta_x(s_o)$ percorre S^1 com duas voltas. Assim, o grau da aplicação na primeira coordenada é dois. Na segunda coordenada $\phi = id$, e portanto, o grau de ϕ é um.

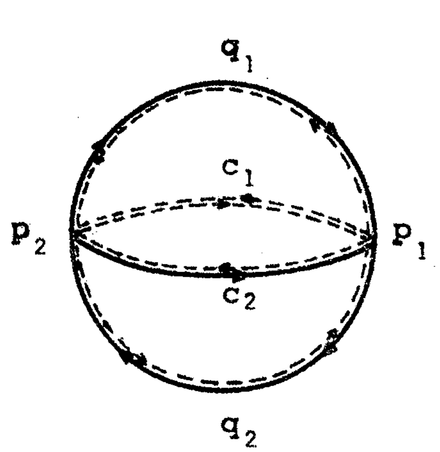
Temos então $\phi_*(\alpha) = 2\alpha + \beta$.

Ainda, para $s_o = (1,0)$, $\theta_{s_o}(y) = 2<s_o,y> s_o - y$.

Neste caso, quando y percorre S^1 num sentido dando uma volta, $\theta_*(y)$ percorre S^1, dando também uma volta, mas em sentido contrário. Assim, o grau de $\theta_{s_o}(y)$ é -1. Como para a aplicação constante o grau é zero, temos $\phi_*(\beta) = -\alpha$.

Vamos definir agora, por indução, uma decomposição de S^{n-1} em 2^{n-1} $(n-1)$-simplexos orientados, cuja soma representa uma classe geradora de $H_{n-1}(S^{n-1})$ e mostrar ao mesmo tempo os efeitos $\phi_*(\alpha)$ e $\phi_*(\beta)$ sobre ela, onde α e β representam respectivamente essa classe geradora.

Para o caso $n = 3$, temos os quatros 2-simplexos, conseguidos pela suspensão dos pontos de S^1 a um polo norte q_1 e a um polo sul q_2.



Sejam

c_{11}: face anterior superior

c_{12}: face anterior inferior

c_{21}: face posterior superior

c_{22}: face posterior inferior

Sejam f e g as funções em $C_*(S^3)$ induzidas pela ϕ através de (A).

$$
\begin{aligned}
f(c_{11}) &= c_{11} - c_{22} & \qquad g(c_{11}) &= c_{22}\\
f(c_{12}) &= c_{12} - c_{21} & \qquad g(c_{12}) &= c_{21}\\
f(c_{21}) &= c_{21} - c_{12} & \qquad g(c_{21}) &= c_{12}\\
f(c_{22}) &= c_{22} - c_{11} & \qquad g(c_{22}) &= c_{11}
\end{aligned}
$$

Assim, $f(c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22}) = 0$, e o grau da f é zero, ou seja, $a_1 = 0$, e $g(c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22}) = c_{22} + c_{21} + c_{12} + c_{11}$.

O grau da g é igual a 1.

$\phi_*(\alpha) = \beta$ e $\phi_*(\beta) = \alpha$.

Para tratar o caso $n = 4$, representamos S^3 pela projeção estereográfica compactificada em $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, identificando o polo norte com o ponto no infinito e o polo sul com a origem de $\mathbb{R}^3$.

Neste caso, obtemos oito 3-simplexos, ou tetraedros, como passo seguinte no processo de indução, anulando-se as orientações induzidas nos bordos dos tetraedros como aconteceu no caso $n = 3$.

Temos,

$$f(c_{111}) = c_{111} + c_{222} \qquad g(c_{111}) = -c_{222}$$
$$f(c_{112}) = c_{112} + c_{221} \qquad g(c_{112}) = -c_{221}$$
$$f(c_{121}) = c_{121} + c_{212} \qquad g(c_{121}) = -c_{212}$$
$$f(c_{122}) = c_{122} + c_{211} \qquad g(c_{122}) = -c_{211}$$
$$f(c_{211}) = c_{211} + c_{122} \qquad g(c_{211}) = -c_{122}$$
$$f(c_{212}) = c_{212} + c_{121} \qquad g(c_{212}) = -c_{121}$$
$$f(c_{221}) = c_{221} + c_{112} \qquad g(c_{221}) = -c_{112}$$
$$f(c_{222}) = c_{222} + c_{111} \qquad g(c_{222}) = -c_{111}$$

$$f\left(\sum_{i,j,k=1}^{2} c_{ijk}\right) = 2 \sum_{i,j,k=1}^{2} c_{ijk} \quad \text{e} \quad a_1 = 2$$

$$g\left(\sum_{i,j,k=1}^{2} c_{ijk}\right) = - \sum_{i,j,k=1}^{2} c_{ijk} \quad \text{e} \quad a_1' = -1$$

Para $n = 4$, $\phi_*(\alpha) = 2\alpha + \beta$

$\phi_*(\beta) = -\alpha$

Este processo de indução mostra que, para cada inteiro positivo n, $\phi_*(\alpha) = (1 + (-1)^n)\,\alpha + \beta$

$\phi_*(\beta) = (-1)^{n-1}\alpha$,

sendo que o caso n ímpar é similar ao descrito $n = 3$, e o caso n par é similar ao descrito $n = 4$.

Daí,

$$\phi_* = \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se n é par, $\phi_*^k = \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{bmatrix}$

Se n é ímpar, então

$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se k é par, e

$\phi_*^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ se k é ímpar.

Vamos calcular $H_p(\Sigma_k^{2n+1})$.

Temos a sequência de Mayer-Vietoris (ver Apêndice),

$$\cdots H_p(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{(i_{1*},(i_2 \circ \phi^k)_*)} H_p(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_p(S^{n-1} \times D^n) \rightarrow$$

$$\longrightarrow H_p(\Sigma_k^{2n-1}) \longrightarrow H_{p-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

onde i_1 (respectivamente i_2) é a aplicação de inclusão de $S^{n-1} \times S^{n-1}$ na cópia de $S^{n-1} \times D^n$ que contém o domínio (respectivamente a imagem) de ϕ^k. As aplicações $i_{1*}, i_{2*}: H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n)$ estão representadas pela mesma matriz $[1\ 0]$ na representação usual em vetores colunas com respeito às bases canônicas dos respectivos grupos.

Seja $p = 0$. $H_o(\Sigma_k^{2n-1}) = H_o(S^{2n-1} \times D^{2n} \bigcup_{\phi^k} S^{2n-1} \times D^{2n}) = \mathbb{Z}$, uma vez que $S^{2n-1} \times D^{2n} \bigcup_{\phi^k} S^{2n-1} \times D^{2n}$ é não vazio e conexo por caminhos.

Sabemos que (ver Apêndice),

$H_o(S^{n-1} \times D^n) = \mathbb{Z}$;

$H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) = \mathbb{Z} \oplus 0 = \mathbb{Z}$;

$H_p(S^{n-1} \times D^n) = 0$, $p \neq 0,\ n-1$;

$H_0(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \mathbb{Z}$;

$H_{2(n-1)}(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \mathbb{Z}$;

Assim, $H_{p-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) = 0$, $p \neq 1,n,2n-1$.

Para $p \neq 0,1,n-1,n,2n-1$, temos a sequência exata curta ,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_p(\Sigma_k^{2n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Logo, $H_p(\Sigma_p^{2n-1}) = 0$, $p \neq 0,1,n-1,n,2n-1$.

Vejamos o que acontece para $p = 1$. Como $\Sigma_1^{2n-1} \neq \emptyset$, vale a sequência de Mayer-Vietoris para a homologia reduzida. (ver Apêndice).

$$\cdots \longrightarrow H_1^{\#}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \xrightarrow{(i_{1*},(i_2 \circ \phi^k)_*)} H_1^{\#}(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_1^{\#}(S^{n-1} \times D^n)$$

$$\longrightarrow H_1^{\#}(\Sigma_k^{2n-1}) \longrightarrow H_0^{\#}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

Como $H_1^{\#}(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_1^{\#}(S^{n-1} \times D^n) = 0$ e $H_0^{\#}(S^{n-1} \times S^{n-1}) = 0$, então $H_1^{\#}(\Sigma_1^{2n-1}) = 0$.

Concluimos que $H_p(\Sigma_k^{2n-1}) = 0, \quad p \neq 0,n-1,n,2n-1.$

A função $(i_{1*}, i_2 o \phi^k)_*)$ é um homomorfismo entre dois grupos abelianos livres de posto 2.

$H_{n-1}(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e

$H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) \oplus H_{n-1}(S^{n-1} \times D^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$

Consideremos a base canônica deste último grupo de homologia $B = \{[1,0], [0,1]\}$.

Para n par, temos,

$$i_{1*}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(i_2 o \phi^k)_*\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & -k \end{bmatrix}$$

Logo,

$$(i_{1*}, (i_2 o \phi^k)_*)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & -k \end{bmatrix}$$ e o

homomorfismo $(i_{1*}, (i_2 o \phi^k)_*)$ pode ser representado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & -k \end{bmatrix}$.

Para n ímpar temos dois casos a considerar.

Se k é par,

$$i_{1*}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(i_2 \circ \phi^k)_*\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

e $(i_{1*}, (i_2 \circ \phi^k)_*\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

O homomorfismo $(i_{1*}, i_2 \circ \phi^k)_*)$ pode ser representado por $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

De modo análogo vemos que, se k é ímpar, o homomorfismo $(i_{1*}, (i_2 \circ \phi^k)_*)$ é representado por $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

No caso em que n é par, ou seja, $n = 2m$, temos

1) $H_0(\Sigma_k^{4m-1}) = \mathbb{Z}$

2) $H_{4m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) = \mathbb{Z}$

3) $H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) = 0$.

De fato, a sequência de Mayer-Vietoris é

$$\cdots \longrightarrow H_{2m}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{2m}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \xrightarrow{\alpha} H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\beta}$$

$$\longrightarrow H_{2m-1}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) \xrightarrow{\gamma} H_{2m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{2m-1}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) \longrightarrow \cdots$$

Mas, $H_{2m}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{2m}(S^{2m-1} \times D^{2m}) = 0$,

$H_{2m-1}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e

$H_{2m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{2m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Assim, a sequência se reduz a

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\alpha} H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1+k & -k\end{bmatrix}]{\gamma} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots,$$

onde γ é monomorfismo (det $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} \neq 0$). Portanto,

$\mathrm{Im}\,(\beta) = \mathrm{Ker}\,(\gamma) = 0.$

Então, $H_{2m}(\Sigma_k^{4m-1}) = 0.$

4) Vamos calcular $H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1})$.

$$\cdots \longrightarrow H_{2m-1}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix}]{(i_{1*},\,(i_2\circ\phi^k)_*)}$$

$$\longrightarrow H_{2m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \oplus H_{2m-1}(S^{2m-1} \times D^{2m}) \xrightarrow{\alpha} H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{2m-2}(S^{2m-1} \times S^{2m-1}) \longrightarrow \cdots \qquad \text{ou}$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix}]{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Portanto, α é um epimorfismo.

Para provar que $H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) = \mathbb{Z}_k$, consideremos

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix}]{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e tentemos uma mudança de coordenadas,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+k & -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Uma solução é

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, donde, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim, no novo sistema de coordenadas β será representado pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$.

Voltando à sequência de Mayer-Vietoris, temos

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta'} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Ker (α) = Im (β'). α induz um isomorfismo $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}: (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow H_{2m-1}(\Sigma_k^{2m-1})$.

Mas $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Ker}\ (\alpha) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\ \mathrm{Im}(\beta') = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z}) =$

$= \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_k$.

Concluimos que $H_{2m-1}(\Sigma_k^{4m-1}) = \mathbb{Z}_k$.

Seja $n = 2m + 1$. Temos então,

1) $H_o(\Sigma_k^{4m+1}) = \mathbb{Z}$.

2) $H_{4m+1}(\Sigma_k^{4m+1}) = \mathbb{Z}$.

3) Cálculo de $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1})$.

$$\cdots \longrightarrow H_{2m}(S^{2m} \times S^{2m}) \xrightarrow{\alpha} H_{2m}(S^{2m} \times D^{2m+1}) \oplus H_{2m}(S^{2m} \times D^{2m+1}) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\beta} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\gamma} H_{2m-1}(S^{2m} \times S^{2m}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Se k é par, α é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e seu efeito é

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$, logo β é um epimorfismo.

Então, $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) = \mathbb{Z}$.

Se k é ímpar, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = id$, e temos a sequência

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\gamma} 0 \longrightarrow \cdots$$

Como β é um epimorfismo, β induz $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}: (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/Ker(\beta) \longrightarrow$ $\longrightarrow H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1})$.

Mas $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/Im(id) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 0$.

Assim, $H_{2m}(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{ímpar}}) = 0$.

4) Cálculo de $H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1})$.

$$\cdots \longrightarrow H_{2m+1}(S^{2m+1} \times S^{2m+1}) \xrightarrow{\alpha} H_{2m+1}(S^{2m+1} \times D^{2m+2}) \oplus (H_{2m+1}(S^{2m+1} \times D^{2m+2}) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\beta} H_{2m}(\Sigma_k^{4m+1}) \xrightarrow{\gamma} H_{2m}(S^{2m+1} \times S^{2m+1}) \longrightarrow \cdots$$

Seja k par. Então,

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{epi}]{\beta} H_{2m}(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{par}}) \xrightarrow{\gamma} 0 \longrightarrow \cdots$$

Então, $H_{2m+1}(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{par}}) = \mathbb{Z}$.

Seja k ímpar.

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_{2m+1}(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{ímpar}}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

donde, $H_{2m+1}(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{ímpar}}) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0.$

Em resumo temos

$$H_p(\Sigma^{4m-1}_k) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0,\ 4m-1; \\ \mathbb{Z}_k, & \text{se } p = 2m-1 \\ 0, & \text{se } p \neq 0,\ 2m-1,\ 4m-1. \end{cases}$$

$$H_p(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{par}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0,\ 2m,\ 2m+1,\ 4m+1; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

$$H_p(\Sigma^{4m+1}_{k\ \text{ímpar}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0,\ 4m+1; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Assim, $\Sigma_{k\ \text{par}}^{4m+1}$ é homólogo a $S^{2m} \times S^{2m+1}$ e $\Sigma_{k\ \text{ímpar}}^{4m+1}$ é homólogo a S^{4m+1}.

Para $n \geq 3$, $S^{n-1} \times D^n$ é simplesmente conexo. Pelo Teorema de Van-Kampen ([5]), segue que Σ_k^{2n-1} é simplesmente conexo.

Como $\Sigma_{k\ \text{ímpar}}^{4m+1}$ é uma variedade diferenciável fechada, (e é simplesmente conexa), com a homologia da esfera S^{4m+1}, então vale o seguinte Teorema.

<u>Teorema 2.2.2.</u>

$\Sigma_{k\ \text{ímpar}}^{4m+1}$ <u>é homeomórfico a</u> S^{4m+1}.

<u>Prova</u>

Ver Conjectura Generalizada de Poincaré em dimensão maior ou igual a 5 ([4]) (ver Apêndice).

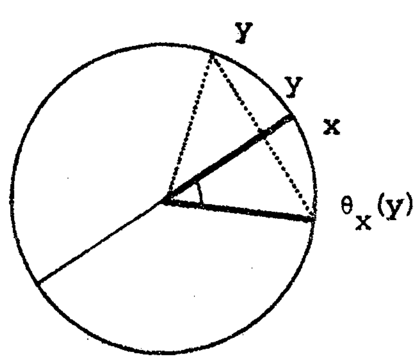
No entanto, vejamos que os conjuntos de pontos fixos destes espaços por subgrupos de $O(n)$ não são necessariamente esferas.

Lema 2.2.3.

Consideremos $D^r \subset D^n$ pela inclusão padrão, ou seja, $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in D^r$ corresponde a $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in D^n$. A aplicação $\phi^k : S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$, restrita a $S^{r-1} \times S^{r-1}$, preserva a $O(r)$-ação sobre $S^{r-1} \times S^{r-1}$ contida canonicamente na $O(n)$-ação sobre $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

É suficiente verificar que as duas componentes $\theta_x(y)$ e x de $\phi(x,y)$ são obtidas pela rotação do plano que contém x e y, de y para x, através de um ângulo igual ao ângulo entre x e y, já que isto garante que a restrição mencionada preserva a $O(r)$-ação, como desejamos.

Seja S a circunferência unitária que contém x e y pertencentes a S^{r-1}. Observemos que $S \subset S^{r-1}$.



Para $x = y$, a observação acima é óbvia.

Seja $x \neq y$. Então, $\phi(x,y) = (\theta_x(y), x)$. Os correspondentes $\theta_x(y)$ e x permanecem em S, já que o plano formado por x, y e a origem, contém $\theta_x(y)$, e portanto, coincide com o plano formado por $\theta_x(y)$, x e a origem, já que $\theta_x(y) = 2\langle x,y\rangle x - y$.

Portanto, como $(x,y) \in S^{r-1} \times S^{r-1}$, também temos, $(\theta_x(y), x) \in S^{r-1} \times S^{r-1}$. Assim, $\phi^k(x,y)$ também permanece em

S, uma vez que $\phi^k = \phi o \phi o \ldots o \phi$.

Consideremos $O(n-r)$ como o subgrupo $I_r \times O(n-r) \subset O(n)$. Então, $F(O(n-r), D^n) = D^r$, e $F(O(n-r), D^n \times S^{n-1}) = D^r \times S^{r-1}$. Vamos ver que isto implica que $F(O(n-r), \Sigma_k^{2n-1}) = \Sigma_k^{2r-1}$.

De fato, $F(O(n-r), \Sigma_k^{2n-1}) = F(O(n-r), D^n \times S^{n-1} \cup_{\phi^k} D^n \times S^{n-1}) =$

$= F(O(n-r), D^n \times S^{n-1}) \cup_\phi F(O(n-r), D^n \times S^{n-1})$

onde, $\phi = \phi^k \Big|_{F(O(n-r), S^{n-1} \times S^{n-1})} = \phi^k \Big|_{S^{r-1} \times S^{r-1}}$.

$$F(O(n-r), \Sigma_k^{2n-1}) = D^r \times S^{r-1} \cup_{\phi^k} D^r \times S^{r-1} = \Sigma_k^{2r-1}.$$

Por exemplo, seja $n = 3$, e seja $\mathbb{Z}_2 \cong O(1) \subset O(3)$ a inclusão padrão. Temos

$$\Sigma_k^5 = \Sigma_k^{2.3-1} = D^3 \times S^2 \cup_{\phi^k} D^3 \times S^2 \qquad \text{onde } \phi^k : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \times S^2$$

Daí, $O(n-r) = O(1)$. Observamos que $I_2 \times O(1) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \cong O(1)$

Portanto, $F(O(1), \Sigma_k^5) = \Sigma_k^{2r-1} = \Sigma_k^3$.

Mas vimos que $H_p(\Sigma_k^{4m-1}) = Z_k$, para $p = 2m - 1$. No nosso caso, $H_1(\Sigma_k^3) = \mathbb{Z}_k \neq 0 = H_1(S^3)$. Portanto, Σ_k^3 não é homeomórfico a S^3, uma vez que não possui a mesma homologia de S^3.

No caso geral temos,

$H_{r-1}(\Sigma_k^{2r-1}) = \mathbb{Z}_k$ (2m = r). Mas $H_{r-1}(S^{2r-1}) = 0$. Portanto ,

$F(O(n-r), \Sigma_k^{2n-1}) = \Sigma_k^{2r-1}$ não é homeomórfico a S^{2r-1}.

Assim, completamos a prova de nosso objetivo central, ou seja, mostramos a existência de ações não ortogonais dos grupos ortogonais O(n) em esferas, uma vez que os conjuntos de pontos fixos respectivos não são esferas, contrariando o exemplo 1.4.2.

APÊNDICE

Tópicos de Topologia Algébrica e Diferencial

Neste apêndice citamos conceitos e propriedades básicas da Teoria de Homologia Singular, que foram usados para mostrar que os objetos construidos em (2.2), por colagem equivariante, eram esferas homológicas, bem como para mostrar que seus conjuntos de pontos fixos geralmente não eram esferas. A principal ferramenta usada foi a sequência exata de Mayer-Vietoris [6] , associada às partes que compõem a colagem equivariante usada, e finalmente, o Teorema correspondente à Conjectura Generalizada de Poincaré [4], assim como uma forma elementar do Teorema de Van Kampen [5] .

Conceitos Básicos

A <u>casca convexa</u> de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dada pela intersecção de todos os conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$ que contém A.

Um <u>p-simplexo s</u> em $\mathbb{R}^n$ é a casca convexa de uma coleção de $(p+1)$ pontos $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ em $\mathbb{R}^n$, de modo que o conjunto $\{x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0\}$ é linearmente independente.

Notemos que se o p-simplexo s é a casca convexa de $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$, então todo ponto de s tem uma única representação da forma $\Sigma t_i x_i$, onde $t_i \geq 0$, para todo i e $\Sigma t_i = 1$.

Definimos τ_p como o conjunto de todos os pontos $(t_0, t_1, \ldots, t_p)$ em R^{p+1}, com $\Sigma t_i = 1$ e $t_i \geq 0$ para todo i.

Qualquer função contínua $\phi : \tau_p \longrightarrow X$, onde X é um espaço topológico, é chamada um <u>p-simplexo singular em X</u>.

A <u>i-ésima face</u> de um p-simplexo singular ϕ, denotada por $\partial_i \phi$, é o (p-1)-simplexo em X definido por

$$\partial_i \phi(t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_p).$$

Seja X um espaço topológico. Definimos $S_n(X)$ como o grupo abeliano livre, cuja base é o conjunto de todos os n-simplexos singulares em X. Um elemento de $S_n(X)$ é chamado uma <u>n-cadeia singular</u> de X e tem a forma $\Sigma_\phi n_\phi \phi$, onde n_ϕ é um inteiro, e é nulo para todos menos um número finito de ϕ.

Definimos o <u>operador bordo</u> como o homomorfismo $\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$, dado por $\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$.

A composição $\partial \circ \partial$ em $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1} \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$ é zero. Isto significa que o bordo de qualquer n-cadeia é uma (n-1)-cadeia que não tem bordo. É uma propriedade básica que nos leva à definição de Grupos de Homologia.

Um elemento $c \in S_n(X)$ é um <u>n-ciclo</u> se $\partial(c) = 0$. Um elemento $d \in S_n(X)$ é um <u>n-bordo</u> se $d = \partial(e)$ para algum $e \in S_{n+1}(X)$.

O núcleo do homomorfismo ∂, que é o conjunto de todos os n-ciclos, é um subgrupo de $S_n(X)$, denotado por $Z_n(X)$; a imagem de ∂ em $S_n(X)$ é o subgrupo $B_n(X)$ de todos os n-bordos.

O grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ é o n-ésimo <u>grupo de homologia singular</u> de X.

Um <u>complexo de cadeia</u> é uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos $\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$ onde $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, para todo n.

Se C e C' são complexos de cadeia com operadores bordo ∂ e ∂' respectivamente, então uma <u>aplicação de cadeia</u> de C a C' é uma família de homomorfismo $\phi_n : C \longrightarrow C'$, tal que $\partial' \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \partial$, para todo n, onde ϕ_n é $\phi|_{C_n} : C_n \longrightarrow C'_n$.

Vamos denotar por $Z_*(C)$ o núcleo de ∂ e por $B_*(C)$ a imagem de ∂. A homologia de C é o grupo graduado

$$H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C).$$

Notemos que, se ϕ é uma aplicação de cadeia $\phi(Z_*(C)) \subset Z_*(C')$ e $\phi(B_*(C)) \subset B_*(C')$. Portanto ϕ induz um homomorfismo sobre grupos de homologia $\phi_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(C')$. Neste sentido, o grupo graduado $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ torna-se um complexo de cadeia sobre o operador bordo ∂ . Assim, o grupo de homologia de X é a homologia deste complexo de cadeia.

Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua e ϕ é um n-simplexo singular em X, existe o n-simplexo singular $f_\#(\phi) = f\circ\phi$ em Y. Além disso, existe uma única extensão a um homomorfismo $f_\# : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$, para todo n.

Os grupos de homologia de um ponto são dados por:

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Teorema

Se $f:X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $f_* : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ é um isomorfismo para cada p ([6]).

Aplicações Homotópicas

Dados os espaços X e Y, duas aplicações $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ são homotópicas se existe uma aplicação

$$F : X \times I \longrightarrow Y , \qquad I = [0,1]$$

com $F(x,0) = f_0(x)$

$F(x,1) = f_1(x)$, para todo x em X.

A aplicação F é a homotopia entre f_o e f_1.

Teorema

Se $f_o, f_1 : X \longrightarrow Y$ são aplicações homotópicas, então $f_{o*} = f_{1*}$ como homomorfismos de $H_*(X)$ para $H_*(Y)$. ([6])

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$, com X e Y espaços topológicos. Se as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotópicas às respectivas aplicações identidade, então f e g são <u>inversas homotópicas</u> uma da outra. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é uma <u>equivalência homotópica</u> se f tem inversa homotópica. Neste caso, diz-se que X e Y tem o <u>mesmo tipo de homotopia</u>.

Teorema

Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo para cada n. ([6])

Seja $i : A \longrightarrow X$ a aplicação inclusão de um subespaço A de X. Uma aplicação $g : X \longrightarrow A$, tal que $i \circ g : X \longrightarrow X$ é a identidade sobre A, é uma <u>retração</u> de X sobre A. Se a composição $i \circ g : X \longrightarrow X$ é homotópica à identidade, então g é uma <u>retra-</u>

ção deformação e A é um retrato deformado de X.

Uma sequência $\cdots \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow \cdots$ de grupos abelianos e homomorfismos é exata em D, se a imagem da f é igual ao núcleo da g.

Uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

é exata, se é exata em cada G_i. Uma sequência $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ é chamada sequência exata curta.

Suponhamos agora, que $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ e $E = \{E_n\}$ são complexos de cadeia, e $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta onde f e g são aplicações de cadeia de grau zero. Então, para cada p, temos uma tripla de grupos de homologia e funções f_* e g_*,

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E).$$

Pode-se definir um homomorfismo $\Delta : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$, chamado do homomorfismo de conexão da sequência exata curta $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$.

De fato, a definição de Δ é obtida por caça do seguinte diagrama, com filas exatas e quadrados comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & D_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & D_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Teorema

Se $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos de cadeias e aplicações de cadeia de grau zero, então a sequência longa

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \cdots$$

é exata. ([6])

Dada uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X que cobrem X, chamaremos interior de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^\circ$, a coleção dos interiores dos elementos de $\mathcal{U}$.

Teorema

Se $\mathcal{U}$ é uma família de subconjuntos de X tais que $\mathcal{U}$ é uma cobertura de X, então $i_*: H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \longrightarrow H_n(X)$ é um isomorfismo para cada n.
($S_*^{\mathcal{U}}(X)$ é o sub-complexo de cadeias de $S_*(X)$ gerado por aqueles simplexos singulares cuja imagem fica em algum elemento de $\mathcal{U}$).
([6])

Por exemplo, seja $\mathcal{U} = \{U,V\}$, e a seguinte sequência curta:

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0 ,$$

onde $g(b) = (b, -b)$, para cada gerador b de $S_n(U \cap V)$ e $h(a,a') = a + a'$, para cada gerador (a,a') de $S_n(U) \oplus S_n(V)$.

Assim, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \longrightarrow H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \longrightarrow H_n(S_*(X)) \longrightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

chamada <u>sequência de Mayer-Vietoris</u>.

<u>Teorema</u>

Para cada inteiro $n \geq 0$, $H_*(S^n)$ é o grupo abeliano livre, com dois geradores, um com dimensão zero e o outro com dimensão n. ([6])

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que $f : S^n \longrightarrow S^n$ é uma aplicação contínua. Escolhamos um gerador α de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ e observemos que $f_*(\alpha) = m\alpha$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Este inteiro independe da escolha do gerador e é denominado <u>grau da f</u>, $d(f)$.

<u>Propriedades básicas do grau de uma aplicação</u>

(a) $d(\text{identidade}) = 1$.

(b) Se $f,g : S^n \longrightarrow S^n$ são aplicações contínuas, $d(f \circ g) = d(f)d(g)$.

(c) $d(\text{aplicação constante}) = 0$.

(d) Se f e g são homotópicas, então $d(f) = d(g)$.

(e) Se f é uma equivalência homotópica, então $d(f) = \pm 1$.

([6])

Proposição

Se $f : S^{n-1} \longrightarrow Y$ é contínua e Y é um espaço de Hausdorff então existe uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow H_m(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_m(Y) \xrightarrow{i_*} H_m(Y_f) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow H_o(S^{n-1}) \longrightarrow H_o(Y) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_o(Y_f), \quad \text{onde} \quad Y_f = D^n \cup_f Y.$$

Proposição

$H_*(S^m \times S^n)$, $m,n \geq 0$, é um grupo abeliano livre de posto quatro tendo um elemento da base em cada uma das dimensões $0,m,n$ e $m+n$.

([6])

Homologia Reduzida

Definimos $\partial^\# : C_o \longrightarrow \mathbb{Z}$ por $\partial^\#(\Sigma \nu_x x) = \Sigma \nu_x$, $\nu_x \in \mathbb{Z}$. Vemos facilmente que $\partial^\# \partial_1 = 0$.

Agora, definimos o grupo de homologia reduzida de X por

$$H_o^{\#}(X) = {\mathrm{Ker}\ \partial^{\#}}/{\mathrm{Im}\ \partial_1} \quad \text{e} \quad H_n^{\#}(X) = H_n(X) \ , \quad n > 0.$$

Logo, temos $H_o^{\#}(X) = 0$, se X é conexo. Se X tem n componentes conexas, então $H_o^{\#}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (n-1 parcelas).

Teorema de Van Kampen (caso especial)

Seja o espaço topológico X, conexo por caminhos, a reunião de dois conjuntos abertos e simplesmente conexos U e V, de modo que $U \cap V \neq \emptyset$. Então, X é simplesmente conexo. ([5])

Variedade Diferenciável

Para $U \subset \mathbb{R}^n$, U aberto, uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é dita diferenciável (suave), se f tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definida em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável se pode ser estendida localmente a uma aplicação diferencial sobre conjuntos abertos, isto é, se para cada $x \in X$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $x \in U$, e uma aplicação diferenciável $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $F = f$ sobre $U \cap X$.

Uma aplicação diferenciável $f : X \longrightarrow Y$ entre subconjuntos de espaços euclidianos diz-se um <u>difeomorfismo</u> se, e somente se, é bijetora e se $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é também diferenciável.

<u>Variedade Diferenciável k-dimensional</u>

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. X é uma variedade diferenciável k-dimensional se, e somente se, X é localmente difeomórfico a um aberto de $\mathbb{R}^k$, ou seja, cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V de x em X, que é difeomórfica a um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^k$.

<u>Conjectura Generalizada de Poincaré em dimensão maior ou igual a 5</u>

Se M^n, $n \geq 5$, é uma variedade diferenciável com a homologia da n-esfera S^n, então M^n é homeomórfico a S^n. Se $n = 5$ ou $n = 6$, M^n é difeomórfico a S^n.

BIBLIOGRAFIA

1) BREDON, G. E. Introduction to compact transformation groups. New York, Academic Press, 1972.

2) MONTGOMERY, D & ZIPPIN, L. Topological transformation groups. New York, Interscience, 1955.

3) MILNOR, J. W. On manifolds to the 7-sphere. Ann. Math., 64 : 339-405, 1956.

4) MILNOR,J. W. Lectures on the h-cobordism theorem. New Jorsey, Priceton University Press, 1965. p. 109.

5) GREENBERG, M. J. Lectures on algebraic topology. Reading Mass., W. A. Benjamin, 1967.

6) VICK, J. W. Homology theory. New York, Academic Press, 1972.

7) DUGUNDJI, J. Topology. Boston, Allyn & Bacon, 1966. p. 226.

8) BREDON, G. E. Transformation groups on spheres with two types of orbits. Topology, 3:103-13, 1965.

9) BREDON, G. E. Examples of differentiable group actions. Topo logy, 3:115-22, 1965.

10) BREDON, G. E. Exotic actions on spheres. "Proc. Conf. Transformation groups, New Orleans 1967". Berlin, Springer-Verlag, 1968. p. 47-76.

11) HERSTEIN, I. Topics in algebra. Waltham, Mass., Blaisdell Publishing Company, 1964.

12) GUILLEMIN, V. & POLLACK, A. Diferential topology. New Jersey, Prentice-Hall, 1974.