UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÕES COMPLEXAS IRREDUTÍVEIS DE SU(2) E SO(3)

MARIA JOSÉ WANDERLINDE

Florianópolis
-1979-

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

Especialidade em MATEMÁTICA e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação

William G. Whitley
Prof. WILLIAM GLENN WHITLEY
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Italo J. Dejter
Prof. ÍTALO JOSÉ DEJTER, Ph.D.
Orientador

Fernando Cabral
Prof. FERNANDO CABRAL, Ph.D.

Walter de Bona Castelan
Prof. WALTER DE BONA CASTELAN, Dr.

Agradecimentos

Ao Professor Ítalo José Dejter pela sugestão do assunto e por sua valiosa orientação durante o decorrer do referido trabalho.

À Professora Rute Kalvon por sua espontânea colaboração na parte da teoria de grupos.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

Ao meu irmão Manoel Vieira pela datilografia deste trabalho.

RESUMO

Desenvolvemos, com o objetivo de comparação, a fundamentação teórica de duas formulações equivalentes das representações irredutíveis de SU(2) e SO(3). Uma delas leva o ponto de vista da Matemática Física e a outra baseia-se no estudo direto das propriedades dos homomorfismos de SU(2) em SU(n+1) em relação à noção de produto tensorial.

ABSTRACT

We develop with the aim of comparison, a theoretical foundation of two equivalent formulations of the irreducible representations of SU(2) and SO(3). One of these takes the point of view of Mathematical Physics and the other one is based on the direct study of the properties of the homomorphisms from SU(2) into SU(n+1) in relation to the notion of the symmetric tensor product.

ÍNDICE

I- Preliminares

I.1- Exponencial de uma Matriz.

Seja $\mathbb{A}$ um operador linear sobre um espaço vetorial V com produto interno, de dimensão n.

A norma $||\ \mathbb{A}\ ||$ de $\mathbb{A}$ é definida pela expressão

$$||\ \mathbb{A}\ || = \max_{v \in V, ||v||=1} \{||\mathbb{A}v||\}$$

Definimos a norma de uma Matriz $A=[a_{ij}]$ do tipo n x n por $||A|| = ||\mathbb{A}||$, onde $\mathbb{A}$ é o operador linear determinado por A e uma base ortonormal $\{v_j\}$.

I.1.1- Definição de exp A.

A exponencial exp A de uma matriz n x n A é definida pela soma

$$\exp A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \quad ,$$

onde $A^0 = E_n$ (matriz identidade de ordem n).

I.1.2- Teorema ([1], pág 154)

Se A e B são matrizes n x n e B é não singular, então

$$\exp (B\ A\ B^{-1}) = B(\exp A)B^{-1}$$

I.1.3- Matriz triangular superior

Seja C uma matriz n x n. Dizemos que $C=[c_{ij}]$ é uma matriz triangular superior se $c_{ij}= 0$ para todo $1 \leq j < i \leq n$.

I.1.4- Definição de Matriz Semelhante

Uma matriz A, do tipo n x n, é semelhante à uma matriz C, do tipo n x n, se e só se existe uma matriz B, não singular, tal que $C=BAB^{-1}$.

Denotamos isto por $A \cong C$.

I.1.5- Proposição ([1], pág 155).

Seja A uma matriz complexa n x n com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Então A é semelhante à uma matriz triangular superior C ($A \cong C$) cujos elementos da diagonal são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

I.1.6- Proposição ([1], pág 156).

Seja A uma matriz n x n com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Então exp A tem auto-valores

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}.$$

I.1.7- Proposição ([1], pág 156).

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A) = e^{\operatorname{tr} A}$$

Em particular, exp A é uma matriz não singular.

I.1.8- Funções Analíticas

Definição 1:

Dizemos que uma função $f(x,y)$ definida em uma vizinhança de um ponto (x_0,y_0) tem uma expansão em série de potências em um ponto (x_0, y_0) se existe uma série de potências formal $S(X, Y)$ cujo domínio de convergência não é vazio e tal que

$f(x,y) = S(x-x_0, y-y_0)$ para $|x-x_0|$ e $|y-y_0|$ suficientemente pequenos (cf. [9], págs 10 e 121).

Definição 2:

Uma função de valor real ou complexo $f(x,y)$ definida em um conjunto aberto D é denominada analítica em D, se para cada ponto (x_0,y_0) ε D, a função $f(x,y)$ tem uma expansão em série de potências no ponto (x_0, y_0), (cf. [9],pág 121).

I.1.9- Definição de série de potências Matricial

Definimos uma série de potências matricial por

$$f(A) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j A^j,$$

onde A é uma matriz n x n, real ou complexa.

Propriedades:

1. $\exp(-A)\exp(A)=E_n$,
para toda matriz A, do tipo n x n;

2. $(\exp A)^m = \exp mA$; $m= 0,\pm 1, \ldots$

3. $\ell n\ (E_n + A) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{A^j}{j}$, $\quad$ para $||A||<1$;

4. $\exp [\ell n\ (E_n+A)] = E_n+A$, $\quad ||A||<1$;

5. $\ell n\ (\exp A) = A$, $\quad ||A||<\ell n 2$.

I.1.10- Teorema ([1], pág 158).

Seja L_n o espaço de todas as matrizes n x n, reais ou complexas, e seja G_n o grupo de todas as matrizes não singulares em L_n.

Para $\xi,\delta > 0$ sejam

$$\mathfrak{A} = \{A \in L_n \mid ||A|| < \xi\},$$

$$\mathfrak{B} = \{B \in G_n \mid ||B-E_n|| < \delta\}.$$

A função exponencial $A \to \exp A$ transforma L_n em G_n. Existem constantes positivas $\xi,\delta < 1$ tal que a vizinhança $\mathfrak{A}$ da matriz nula em L_n é levada biunivocamente sobre a vizinhança $\mathfrak{B}$ da matriz identidade E_n em G_n.

A aplicação $A \to \exp A$, $A \in \mathfrak{A}$, e sua inversa $B \to \ell n\ B$, $B \in \mathfrak{B}$, são analíticas, isto é, os elementos das matrizes exp A e ℓn B são funções analíticas dos elementos das matrizes A e B, respectivamente.

Pelo teorema (I.1.10) uma matriz $B \in G_n$ em uma vizinhança suficientemente próxima de E_n

pode ser escrita de forma única na forma $B=\exp A$, com A em uma vizinhança suficientemente próxima da matriz nula.

Seja t um parâmetro real ou complexo. Escrevemos $A(t)$ para denotar uma matriz real ou complexa do tipo $n \times n$, cujas componentes $A_{ij}(t)$ são funções de t.

Se cada uma das componentes é derivável, dizemos que $A(t)$ é derivável com derivada

$\dot{A}(t) = dA(t)/dt$, cujas componentes são $\dot{A}_{ij}(t)$.

Se $A(t)$ e $B(t)$ são matrizes $n \times n$, deriváveis, então

$$(d/dt)\left[\alpha\, A(t) + \beta\, B(t)\right] = \alpha\, \dot{A}(t) + \beta\, \dot{B}(t),$$

$$(d/dt)\left[\, A(t)\, B(t)\right] = \dot{A}(t)\, B(t)+A(t)\, \dot{B}(t)\ ,$$

para quaisquer α,β reais ou complexos.

A derivada de $\exp(tA)$, com A uma matriz do tipo $n \times n$ constante, é dada por

$$(d/dt)\ \exp(tA) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\, A^{j} =$$

$$= A \exp(tA) = \left[\exp(tA)\right] A. \qquad \text{I.1.11}$$

Se $\dot{A}(t) = Z$, sendo Z a matriz nula, então a solução geral é $A(t) = A_0$, onde A_0 é uma matriz constante.

I.1.12- <u>Teorema</u> ([1], pág 159).

Se $AB = BA$ então $\exp(A + B) = \exp A \times \exp B$.

Seja L_n o espaço de dimensão n^2 de todas as matrizes complexas do tipo $n \times n$. Para $A \in L_n$ definimos a transformação linear **Ad** A $n^2 \times n^2$ sobre L_n, com relação a uma base de L_n, por

$$\text{AdA } (B) = [A , B],$$

onde $[A , B] = A B - B A.$

Apresentaremos um exemplo de AdA no final capítulo II (estudo de U(2)).

Temos ainda que AdA é o operador nulo, se e só se A comuta com qualquer matriz $B \in L_n$.

Definimos $(\text{AdA})^m$ por

$$(\text{AdA})^m (B) = [A, [A, \ldots [A,B]]], \text{ m vezes.}$$

I.2- Grupos de Lie

I.2.1- Definição de Grupo de Lie Local

Denotamos por F o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$.

Seja F^n o espaço vetorial das n-uplas $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $g_i \in F$, e seja o vetor nulo em F^n denotado por $e = (0, 0, \ldots, 0)$.

Consideremos F^n munido da topologia usual. Vamos supor que V é um conjunto aberto em F^n contendo e.

Um grupo de Lie local $\mathbb{G}$, de dimensão n, em uma vizinhança $V \subseteq F^n$ é determinado por uma função $\zeta(g,h)$ com as seguintes propriedades:

(1) $\zeta(g,h) \in F^n$ para todo $g,h \in V$.

(2) $\zeta(g,h)$ é uma função analítica de cada um dos seus 2n argumentos.

(3) Se $\zeta(g,h) \in V$ e $\zeta(h,k) \in V$ então $\zeta(\zeta(g,h), k) = \zeta(g, \zeta(h,k))$.

(4) $\zeta(e,g) = \zeta(g,e) = g$ para todo $g \in V$.

Denotamos $\zeta(g,h)$ por gh.

Assim pela propriedade (3), conforme segue, va-

le a lei associativa:
$(gh)k = \zeta((gh),k) = \zeta(\zeta(g,h),k) = \zeta(g,\zeta(h,k)) =$
$= \zeta(g,(hk)) = g(hk)$.

Pela propriedade (4), existe um elemento neutro e, ou seja,

$eg = \zeta(e,g) = g = \zeta(g,e) = ge$.

Dizemos que $h \varepsilon G$ é um elemento inverso de $g \varepsilon G$ se $\zeta(g,h) = gh = \zeta(h,g) = hg = e$.

A existência de um elemento inverso para cada $g \varepsilon V$ é garantida pelas propriedades (2) e (4).

Um grupo de Lie é um grupo topológico tal que uma vizinhança dele ao redor da origem se comporta, a menos de um homeomorfismo, como um grupo de Lie local, com a mesma operação do grupo.

Daqui em diante, ao falarmos em grupo devemos entender grupo de Lie local.

Um grupo de Lie Local não é necessàriamente um grupo no sentido da álgebra moderna, já que os axiomas do grupo são satisfeitos somente em uma vizinhança de $e \varepsilon V$.

I.2.2- Definição de Grupo de Lie linear local

Seja W um conjunto aberto conexo no espaço F^n contendo o vetor e.

Um grupo de Lie linear local G, de dimensão n, é um conjunto de matrizes não singulares m x m, $A(g) = A(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, definidas para cada $g \varepsilon W$, tais que:

(1) $A(e) = E_m$ (matriz identidade)

(2) Os elementos da matriz $A(g)$ são funções analíticas dos parâmetros $g_1, g_2, \ldots, g_n$ e a aplicação $g \to A(g)$ é biunívoca.

(3) As n matrizes $\partial A(g)/\partial g_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são linearmente independentes para cada $g \varepsilon W$ (estas matrizes geram um subespaço de dimensão n do espaço de dimensão m^2 das matrizes mxm).

(4) Existe uma vizinhança W' de e em F^n, $W' \subseteq W$, com a seguinte propriedade: para cada par de n-uplas g,h em W' existe uma n-upla k em W satisfazendo $A(g)\ A(h) = A(k)$, onde a operação do lado esquerdo é o produto de matrizes.

I.2.2.1- <u>Proposição</u> ([1], pág 164).

Cada grupo de Lie linear local define um grupo de Lie local.

I.2.2.2- <u>Definição de Grupo de Lie linear</u>

Um grupo de Lie linear é um grupo topológico tal que uma vizinhança dele ao redor da origem se comporta, a menos de um homeomorfismo, como um grupo de Lie linear local, com a mesma operação do grupo.

I.3- <u>Álgebra de Lie</u>

Seja G um grupo de Lie local definido numa vizinhança $V \subseteq F^n$. Uma curva analítica através da identidade sobre G é uma função $t \to g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$ de uma vizinhança de 0 ε F em V tal que $g(0) = e$, e as funções $g_j(t)$ sejam analíticas em t.

O vetor tangente a g(t) em e é o vetor

$$\alpha = [dg(t)/dt]\Big|_{t=0} = (\dot{g}_1(0), \dot{g}_2(0), \ldots\ldots\ldots\ldots, \dot{g}_n(0)) \ \varepsilon\ F^n.$$

Cada vetor em F^n é o vetor tangente em e para alguma curva analítica.

De fato, a curva $\alpha t = (\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_n t)$ tem o vetor tangente $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ em e; assim podemos identificar o conjunto de vetores tangentes com F^n.

Em particular os vetores tangentes em e formam um espaço vetorial de dimensão n.

Para $g,h \in V$ temos $gh = \zeta(g,h)$, onde ζ é uma função vetorial analítica de seus 2n argumentos. Assim as componentes $(gh)_j = \zeta_j(g,h)$ podem ser expressas como séries de Taylor em g_ℓ, h_ℓ sobre $g = h = e$. Já que $\zeta(e,g) = \zeta(g,e) = g$ temos

I.3.1- $$\zeta_j(g,h) = g_j + h_j + \sum_{\ell,s=1}^{n} c_{j,\ell s}\, g_\ell\, h_s + r_j\,(g,h)\,,$$

onde r_j consiste de todos os termos de ordem maior que dois em g_ℓ, h_ℓ e

I.3.2- $$c_{j,\ell s} = (\tfrac{1}{2}\, \partial^2/\partial g_\ell\, \partial h_s)\,\zeta_j(g,h)\,\Big|_{g=h=e}$$

Examinemos agora a relação entre as curvas analíticas através de e, e as operações de espaço vetorial sobre vetores tangentes.

Sejam $g(t)$, $h(t)$ curvas analíticas através de e, com vetores tangentes α, β, respectivamente. Então para quaisquer $a,b \in F$,

$k(t) = g(at)\, h(bt) = \zeta(g(at),\, h(b,t))$ é também uma curva analítica através de e.

O vetor tangente $\gamma = \dot{k}(0)$ pode ser obtido diferenciando ambos os lados de (I.3.1), que resulta em

$$\gamma = a\,\alpha + b\,\beta.$$

O sinal + refere-se a adição de vetores em F^n.

A curva $e(t) = e$ tem vetor tangente θ em e, sendo

$$\theta = (0,0,\ldots,0)$$

Seja α' o vetor tangente em e à curva analítica $g^{-1}(t)$. Já que $e(t) = g(t)\, g^{-1}(t)$, segue-se que

$$\theta = \alpha + \alpha', \quad \text{ou} \quad \alpha = -\alpha'.$$

Esses resultados usam somente os termos de primeira ordem na expansão para $\zeta(g,h)$.

Vamos introduzir agora uma operação sobre vetores tangentes em e que depende dos termos de segunda ordem.

Com g(t) e h(t) dados anteriormente, definimos o colchete comutador $[\alpha,\beta]$ de α e β como o vetor tangente em e à curva

$$k(t) = g(\tau)\ h(\tau)\ g^{-1}(\tau)\ h^{-1}(\tau), \qquad t = \tau^2.$$

Assim

$$[\alpha,\beta] = [d/d(\tau^2)]\ g(\tau)\ h(\tau)\ g^{-1}(\tau)\ h^{-1}(\tau)\Big|_{\tau=0}$$ ou

mais precisamente, $[\alpha\ ,\ \beta]$ é o coeficiente de τ^2 na expansão da série de Taylor para k.

I.3.4- Teorema ([1], pág 167).

$$[\alpha,\beta]_j = \sum_{\ell,s=1}^{n} C_j^{\ell s}\ \alpha_\ell\ \beta_s\ , \qquad 1 \leq j \leq n\ ,$$

onde

$$C_j^{\ell s} = C_{j,\ell s} - C_{j,s\ell} \qquad \text{(ver I.3.2).}$$

As propriedades básicas do comutador são dadas pelo teorema que segue.

I.3.5- Teorema ([1],pág 168).

Sejam $\alpha,\beta\ \varepsilon\ F^n$ e $a,b\ \varepsilon\ F$. Então

(1) $[\alpha,\beta] = -[\beta,\alpha]$

(2) $[a\alpha + b\beta,\gamma] = a[\alpha,\gamma] + b[\beta,\gamma]$.

(3) $[[\alpha,\beta],\gamma] + [[\gamma,\alpha],\beta] + [[\beta,\gamma],\alpha] = \theta$,
(igualdade de Jacobi).

I.3.6- Definição de álgebra de Lie

A álgebra de Lie L(G) de um grupo de Lie local G é o conjunto de todos os vetores tangentes em e, munido das operações de produto por escalar, adição de vetores e produto comutador.

I.3.7- Definição de álgebra de Lie abstrata

Uma álgebra de Lie abstrata ζ sobre F (corpo dos números reais ou complexos) é um espaço vetorial sobre F, juntamente com um produto comutador $[\alpha\ ,\ \beta]\ \varepsilon\ \zeta$ definido para todo $\alpha,\beta\ \varepsilon\ \zeta$, tal que para todo $\alpha,\beta,\gamma\ \varepsilon\ \zeta$

e $a,b_i \in F$ temos:

(1) $[\alpha,\beta] = -[\beta,\alpha]$

(2) $[a\alpha + b\beta,\gamma] = a[\alpha,\gamma] + b[\beta,\gamma]$

(3) $[[\alpha,\beta],\gamma] + [[\gamma,\alpha],\beta] + [[\beta,\gamma],\alpha] = \theta$.

Seja G o grupo de Lie linear local, de dimensão n, de matrizes inversíveis m x m, e seja $A(t) = A(g(t))$, $A(0) = E_m$, uma curva analítica através da identidade. Podemos identificar o vetor tangente α em e com a matriz

$$\mathfrak{A} = (d/dt)\, A(g(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial g_j} A(g) \Big|_{g=e} \dot{g}_j(0) = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_j\, \alpha_j \;,$$

I.3.8- onde $c_j = \partial/\partial g_j\, A(g) \Big|_{g=e}$

Assim identificamos o espaço tangente em e com o espaço de todas as matrizes $\mathfrak{A}$, dadas em (I.3.8).

Da definição de grupo de Lie linear local, temos que o conjunto $\{c_j\}$ é linearmente independente e gera um subespaço de dimensão n do espaço de todas as matrizes m x m.

Muitas das propriedades vistas para grupo de Lie local são muito mais fáceis de serem verificadas para grupo de Lie linear local. Por exemplo, sejam A(t) e B(t) curvas analíticas em G com matrizes tangentes $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ na identidade, respectivamente. Já que

$(d/dt)(A(t)\, B(t)) = \dot{A}(t)\, B(t) + A(t)\, \dot{B}(t)$ e

$A(0) = B(0) = E_m$, segue-se que $A(t)\, B(t)$ é uma curva analítica com matriz tangente $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ em E_m.

Com A(t) e B(t) dados acima definimos o comutador das matrizes tangentes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ por

$$[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = (d/dt)\, [A(\tau)\, B(\tau)\, A^{-1}(\tau)\, B^{-1}(\tau)] \Big|_{t=0}$$

onde $t = \tau^2$, isto é, $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ é a matriz tangente à curva $c(t) = A(\tau)\, B(\tau)\, A^{-1}(\tau)\, B^{-1}(\tau)$ na identidade.

I.3.9- Teorema ([1], pág 169)

Sejam L(G) a álgebra de Lie de um grupo de Lie local G, e $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ε L(G). Então

$[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ε L(G).

I.4- Homomorfismos

I.4.1- Definição de homomorfismo de álgebras de Lie abstratas

Um homomorfismo entre duas álgebras de Lie abstratas ζ e ζ' é uma aplicação $\phi : \zeta \to \zeta'$ tal que

(1) $\phi(a\,\alpha + b\,\beta) = a\,\phi(\alpha) + b\,\phi(\beta)$

(2) $\phi([\alpha,\beta]) = [\phi(\alpha)\,,\,\phi(\beta)]$,

onde $a,b \in F$, $\alpha,\beta \in \zeta$.

Se um homomorfismo ϕ é uma aplicação biunívoca de ζ sobre ζ' então ϕ é chamado um isomorfismo.

I.4.2- Definição de homomorfismo de grupo de Lie local

Um homomorfismo analítico (local) de um grupo de Lie local G em um grupo de Lie local G' é uma aplicação $\mu : W \to W'$ onde $\mu(g)$ é definido em uma vizinhança W de $e \in G$ e W' é uma vizinhança de $e' \in G'$ tal que

$\mu(gh) = \mu(g)\,\mu(h)$, $g,h,\, gh \in W$, e

μ é uma função analítica.

Se μ é um homomorfismo biunívoco de uma vizinhança de $e \in G$ sobre uma vizinhança de $e' \in G'$ tal que $\mu^{-1} : W' \to W$ é analítica, então μ é denominado um isomorfismo, e G é isomórfico (localmente) a G'.

Sejam G e G' grupos de Lie locais de dimensões n e n' respectivamente, com correspondentes álgebras de Lie L(G), L(G'). Se μ é um homomorfismo analítico de G sobre G' veremos pelo teorema abaixo que μ induz um homomorfismo μ^* de $L(G)$ em $L(G')$.

I.4.3- <u>Teorema</u> ([1], pág 179).

Um homomorfismo analítico $\mu : G \to G'$ induz um homomorfismo de álgebra de Lie $\mu^* : L(G) \to L(G')$ definido por

$$\mu^*(\alpha) = (d/dt)\, \mu(g(t)) \big|_{t=0}$$

onde $g(t)$ é uma curva analítica em G com vetor tangente α em e. μ^* é um isomorfismo se μ é um isomorfismo.

μ^* não depende da curva analítica escolhida.

I.4.4- <u>Teorema</u> ([1], pág 180).

Sejam G e G' grupos de Lie lineares locais, e $\rho : L(G) \to L(G')$ um homomorfismo de álgebra de Lie. Então existe um único homomorfismo analítico local μ de G em G' tal que $\mu^* = \rho$. Se ρ é um isomorfismo então μ é um isomorfismo.

I.4.5- <u>Corolário</u> ([1], pág 181).

Sejam G e G' grupos de Lie lineares locais. Então $L(G)$ é isomórfico a $L(G')$ se e só se G é isomórfico a G'.

<u>Nota:</u>

Se G e G' são grupos de Lie lineares conclui-se que $L(G)$ é isomórfico a $L(G')$ se e somente se G é localmente isomórfico a G'.

I.5- <u>Grupos clássicos de Lie</u>

Introduzimos aqui alguns dos grupos de Lie mais relevantes. Estes constituem exemplos das estruturas que estamos estudando, ou seja, grupos de Lie e grupos de Lie locais lineares. Assim também exemplificaremos as álgebras de Lie correspondentes, isto é, os espaços tangentes nos elementos neutros respectivos. Indicaremos as dimensões destes grupos como grupos complexos e/ou reais.

I.5.1- Definição de grupo real e/ou complexo

Um grupo G é denominado real (complexo) se G é isomorfo a um subgrupo do grupo de automorfismos de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

I.5.2- $GL(m,\mathbb{C}) = G_m$

O grupo, sob multiplicação, de matrizes não singulares $m \times m$, sobre $\mathbb{C}$ é chamado de grupo linear geral $GL(m,\mathbb{C})$ e a álgebra de Lie deste grupo, $g\ell(m, \mathbb{C})$, consiste de todas as matrizes da forma

$$\Omega = (d/dt)\ A(t)\ \Big|_{t=0}\ , \qquad A(0) = E_m\ ,$$

onde $A(t)$ é uma curva analítica em $GL(m, \mathbb{C})$ e E_m é a matriz identidade de ordem m.

Reciprocamente, se Ω é uma matriz $m \times m$, então $A(t) = \exp t\,\Omega$ é uma curva analítica com matriz tangente Ω, ([4], cap O).

$GL(m, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie complexo de dimensão m^2. Considerando os elementos de $GL(m, \mathbb{C})$ como soma das partes real e imaginária, ele é um grupo de Lie real de dimensão $2m^2$.

I.5.3- $SL(m, \mathbb{C}) = SL(m)$

É um subgrupo especial de $GL(m, \mathbb{C})$, cujas matrizes têm determinante igual a 1 (um), ou seja,

$$SL(m, \mathbb{C}) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}.$$

A álgebra de Lie de $SL(m, \mathbb{C})$, denotada por $s\ell(m, \mathbb{C})$, é o espaço das matrizes tangentes Ω, do tipo $m \times m$, cujo traço é nulo.

De fato $\det A = 1$, $A \in SL(m, \mathbb{C})$,

e $\exp \Omega = A$, $\Omega \in s\ell(m, \mathbb{C})$.

Por (I.1.7) sabemos que

$1 = \det(\exp \Omega) = \exp(\mathrm{tr}\,\Omega)$. Isto implica que $\mathrm{tr}\,\Omega = 0$.

A dimensão do grupo de Lie complexo $SL(m, \mathbb{C})$ é $(m^2 - 1)$, ou em termos de partes real e imaginária, temos $SL(m, \mathbb{C})$ como grupo de Lie real com dimensão $2(m^2 - 1)$.

I.5.4- $O(m, \mathbb{C}) = O(m)$

É o grupo das matrizes complexas A, do tipo $m \times m$, tal que $A^t A = E_m$, ou seja,

$O(m, \mathbb{C}) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) \mid A^t A = E_m\}$.

A álgebra de Lie de $O(m)$, denotada por $o(m)$, é o espaço de todas as matrizes anti-simétricas do tipo $m \times m$. De fato, seja $A(t)$, $A(0) = E_m$, uma curva analítica em $O(m)$ com matriz tangente Ω na identidade. Diferenciando a expressão $A^t(t)\, A(t) = E_m$ e fazendo $t=0$ encontramos $\Omega^t + \Omega = Z$, ou seja, Ω é anti-simétrica.

A dimensão do grupo de Lie complexo $O(m, \mathbb{C})$ é $\frac{1}{2}(m^2 - m)$, enquanto que considerando as partes real e imaginária, é um grupo de Lie real de dimensão $m^2 - m$.

I.5.5- $SO(m, \mathbb{C}) = SO(m)$

$SO(m) = \{A \in O(m) \mid \det A = 1\}$.

Sejam $A \in O(m)$ e $\Omega \in o(m)$. Como Ω é anti-simétrica, o $\mathrm{tr}\,\Omega$ é zero e

$\det A = \exp(\mathrm{tr}\,\Omega) = 1$.

Assim a álgebra de Lie de $O(m)$ é igual à álgebra de Lie de $SO(m)$.

I.5.6- $U(m)$

$U(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^t A = E_m\}$.

$U(m)$ é chamado o grupo unitário de todas as matrizes unitárias, do tipo $m \times m$. trata-se de um grupo de Lie real com dimensão m^2.

Dado $A \in U(m)$ em uma vizinhança muito pequena de E_m, podemos encontrar uma única matriz Ω suficientemente próxima da matriz nula Z, tal que

$\exp \Omega = A$.

Seja $u(m)$ a álgebra de Lie de $U(m)$.

Se $\Omega \in u(m)$, então Ω é anti-hermitiana, ou seja, $\bar{\Omega}^t = -\Omega$, e a álgebra de Lie de $U(m)$ é o espaço de todas as matrizes anti-hermitianas.

I.5.7- SU(m)

$SU(m) = \{A \in U(m) \mid \det A = 1\}$.

$SU(m)$, subgrupo de $U(m)$, é um grupo de Lie real com dimensão $m^2 - 1$.

A álgebra de Lie de $SU(m)$, denotada por $su(m)$, é constituída por todas as matrizes anti-hermitianas de traço zero, já que $\det A = 1$ e $\det A = \det (\exp \Omega) = \exp (\mathrm{tr}\, \Omega)$, implicam $\mathrm{tr}\, \Omega = 0$, para Ω pertencente a uma vizinhança suficientemente próxima da matriz nula Z.

I.6- Medidas invariantes em grupos de Lie

Seja G um grupo de Lie real de dimensão n de matrizes $m \times m$.

Uma função complexa $f(B)$ sobre G é contínua em $B \in G$ se ela é contínua nos parâmetros $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ em um sistema de coordenadas locais para G em B.

Se f é contínua com relação a um sistema de coordenadas locais em B, então f é contínua com relação a todos os sistemas de coordenadas.

Se f é contínua em cada $B \in G$, então f é contínua sobre G.

Todo grupo de Lie é uma variedade diferenciável [8]. Definimos integral sobre variedade diferenciável de acordo com [8].

Consideraremos agora elementos de volume infinitesimais com relação aos quais a integral associada sobre o grupo é invariante à esquerda, isto é,

$$\int_G f(BA)\, dA = \int_G f(A)\, dA \quad , \qquad B \in G \quad ,$$

onde f é uma função contínua sobre G , tal que ambas as integrais convergem.

Em termos de coordenadas locais $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ em A , $dA = W(g)\, dg_1 \ldots dg_n = W(g)\, dg$, onde a função contínua W é chamada de função peso.

Se $k = (k_1, k_2, \ldots k_n)$ é outro sistema de coordenadas locais em A , então

$dA = \tilde{W}(k)\, dk_1, \ldots dk_n$, e

$\tilde{W}(k) = W(g(k)) \left|\det(\partial g_i / \partial k_j)\right|$, onde o determinante é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

Veremos agora como construir uma medida invariante à esquerda para um grupo de Lie linear real G de dimensão n.

Seja $\{c_j, \ 1 \leq j \leq n\}$ uma base para o grupo G. Introduziremos um produto interno sobre $L(G)$, com relação ao qual a base escolhida é ortogonal.

Associamos a n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $\Sigma\, \alpha_j\, c_j \in L(G)$.

Dados os vetores linearmente independentes $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ em $L(G)$, eles geram um paralelepípedo em $L(G)$ com volume

I.6.1- $$V = \left|\det(\alpha_j^{(i)})\right| > 0.$$

A expressão I.6.1 define um volume no espaço tangente ao elemento identidade.

Seja $A(t)$ uma curva analítica em G tal que $A(0) = A$.

Chamaremos $\dot{A}(0) = \Omega$ a matriz tangente de $A(t)$ em A.

O conjunto de todas as matrizes tangentes Ω quando $A(t)$ percorre todas as curvas analíticas através de A, forma um espaço vetorial T_A, chamado o espaço tangente em A.

Se $A(t)$ é uma curva analítica através de A, ou seja, $A(0) = A$, então $A^{-1}A(t)$ é uma curva analítica através de E_m.

Assim

$$(d/dt)\ [A^{-1}A(t)]\big|_{t=0} = \Omega \ \varepsilon\ L(G) \quad ,$$

ou $A^{-1}\tilde{\Omega} = \Omega$.

Seja $\Omega_j = \Sigma\, \alpha_k^{(j)} c_k$.

Definiremos o volume V_A do paralelepípedo em T_A gerado pelos n vetores

$$\tilde{\Omega}_j = \partial A/\partial g_j(e) \ \varepsilon\ T_A \quad , \quad \text{por}$$

$$V_A(g) = |\det \alpha_k^{(j)}| > 0.$$

A definição de medida invariante à esquerda $d_\ell A$ sobre G é dada por

I.6.2- $d_\ell A = V_A(g)\, dg_1 \ldots dg_n$, que independe do sistema de coordenadas locais.

De fato, se $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ é um outro sistema de coordenadas locais em A, então

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial K_\ell} = \sum_j A^{-1}\tilde{\Omega}_j \frac{\partial g_j}{\partial k_\ell} = \sum_{j,s} \frac{\partial g_j}{\partial k_\ell}\, \alpha_s^{(j)}\, c_s \quad ,$$

$$V_A(k) = \left|\det\left(\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial k_\ell}\, \alpha_s^{(j)}\right)\right| = \left|\det\left(\frac{\partial g_j}{\partial k_\ell}\right)\right| \cdot$$

$$\cdot \left|\det(\alpha_s^{(j)})\right|.$$

Assim

$$V_A(k)\, dk_1 \ldots dk_n = V_A(g)\ |\det(\partial g_j/\partial k_\ell)|$$

$$dk_1 \ldots dk_n = V_A(g)\, dg_1 \ldots dg_n = d_\ell A.$$

De forma análoga calcula-se a medida invariante à direita $d_r A = W_A(k)\, dk_1 \ldots dk_n$, através de $\frac{\partial A}{\partial k_\ell} A^{-1}$.

I.6.3- Definição de grupo compacto

Um grupo de matrizes m x m é compacto se ele é um subconjunto fechado e limitado do conjunto L_m de todas as matrizes m x m.

I.6.4- Teorema ([1], pág 211).

Se G é um grupo de Lie linear compacto, então

$d_\ell A = d_r A$.

Para um grupo de Lie linear compacto G escrevemos $dA = d_\ell A = d_r A$, onde a medida dA é invariante à direita e à esquerda, e o volume de G é dado por

$$V_G = \int_G 1\, dA.$$

I.7- Representações de grupos e derivadas de Lie

I.7.1- Representação de grupo

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e seja GL(V) o grupo de todas as transformações lineares não singulares de V sobre V.

Uma representação de um grupo G com espaço de representação V é um homomorfismo $T: g \to T(g)$ de G em GL(V). A dimensão da representação é a dimensão de V.

Para $g_1, g_2, g, e \in G$, onde e é o elemento identidade, temos:

$$T(g_1)\, T(g_2) = T(g_1\, g_2);$$
$$T(g)^{-1} = T(g^{-1});$$

$T(e) = E$, onde E é o operador identidade sobre V.

I.7.2- Representações matriciais

Uma representação matricial de dimensão n de G é um homomorfismo

$$T : g \to T(g) \quad \text{de } G \text{ em } GL(n, \mathbb{C}).$$

Um homomorfismo $T : A \to T(A)$ de G em GL(V) é chamado um homomorfismo analítico se os elementos matriciais $T_{ij}(A)$ em relação a uma base em V, são funções analíticas das coordenadas locais de A em G.

Se os elementos matriciais são funções analíticas em relação a uma base, então eles serão analíticos em relação a qualquer base.

Para cada Ω ε L(G) definimos o operador infinitesimal $\hat{\Omega}$ sobre V por

$$\hat{\Omega} = (d/dt)\ T(A(t))\big|_{t=0}\ , \qquad \text{I.7.2.1}$$

onde $A(t)$ é uma curva analítica em G com matriz tangente Ω na identidade.

$\hat{\Omega}$ não depende da curva analítica $A(t)$.

Os operadores $\hat{\Omega}$ formam uma álgebra de Lie, a qual é uma imagem homeomórfica de L(G).

I.7.3- Representação de uma álgebra de Lie

Uma representação de uma álgebra de Lie ζ com espaço de representação V é uma função ρ de ζ no espaço de todos os operadores lineares sobre V, tal que para a,b ε F e α,β ε ζ temos:

(1) $\rho(a\alpha + b\beta) = a\ \rho(\alpha) + b\ \rho(\beta)$;

(2) $\rho([\alpha,\beta]) = \rho(\alpha)\ \ \rho(\beta) - \rho(\beta)\ \rho(\alpha) = [\rho(\alpha),\ \rho(\beta)]$.

Os operadores $\hat{\Omega} = \rho(\Omega)$ definem uma representação de L(G) sobre V. Assim cada representação de G induz uma representação de L(G).

I.7.4- Representação associada e subespaços invariantes

Uma representação T sobre um espaço vetorial V induz uma representação associada de L(G) que denotaremos por ρ.

Se W é um subespaço de V, dizemos que W é T invariante se $T(g)w$ ε W para cada g ε G e cada w ε W.

Dizemos que W é ρ-invariante se $\rho(\alpha)w$ ε W para cada w ε W e cada α ε L(G).

I.7.5- Representações redutíveis

Com a notação de I.7.4 V diz-se T-redutível se existir um subespaço linear próprio W de V invariante sob T. Caso contrário T diz-se irredutível. Analogamente V diz-se ρ-redutível se existir um subespaço próprio W de V que é invariante sob ρ. Caso contrário ρ diz-se irredutível.

I.7.6- <u>Teorema</u> ([1], pág 187).

Seja T uma representação do grupo de Lie linear e conexo G sobre o espaço vetorial V, e seja ρ a representação associada de L(G).

Vamos supor que W é um subespaço de V.

Então:

(1) W é T-invariante se e somente se ele é ρ-invariante.

(2) W é T-irredutível se e somente se ele é ρ-irredutível.

I.7.7- <u>Grupos de transformação de Lie local</u>

Seja U um conjunto aberto conexo no espaço vetorial complexo de dimensão m, $\mathbb{C}^m$. Qualquer $x \in U$ pode ser designado por suas coordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \in \mathbb{C}$.

Seja G um grupo de Lie local de dimensão n, definido em uma vizinhança conexa de $e = (0, 0, \ldots, 0)$ em $\mathbb{C}^m$.

Seja Q uma função que associa a cada par (x,g), onde $x \in U$, e $g \in G$, um elemento

$Q(x,g) = xg \in \mathbb{C}^m$.

Por definição Q age sobre a variedade diferenciável U como um grupo de transformação de Lie local se Q satisfaz as seguintes propriedades:

(1) xg é analítica nas n + m coordenadas de x e g;

(2) $xe = x$, para todo $x \in U$;

(3) se $xg \in U$ então $(xg)h = x(gh)$, para g, h, $gh \in G$.

Seja $\exp \alpha t$, $\alpha \in L(G)$, um subgrupo a um parâmetro de G. Para $x^0 \in U$, com x^0 fixado, chamamos a curva $x(t) = x^0 \exp \alpha t \in U$ a trajetória de x^0 sob $\exp \alpha t$. Vemos que x(t) está bem definida para valores suficientemente pequenos de $|t|$.

A função vetorial $x(t)$ pode ser representada por uma série de Taylor em t em relação a $t=0$:

$$x_i(t) = x_i^0 + t(\partial Q_i/\partial t)\ (x^0, \exp \alpha t)\big|_{t=0} + \ldots\ ,$$

ou $x_i(t) = x_i^0 + t \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x^0)\alpha_j + \ldots$,

com $1 \leq i \leq m$, onde

$$P_{ij}(x^0) = (\partial Q_i/\partial g_j)\ (x^0, g)\big|_{g=e} \qquad \text{I.7.8}$$

e $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$.

Assim, $\dot{x}(0)$ é tangente à trajetória de $\exp \alpha t$ através de x^0.

Se $f(x)$ é analítica em uma vizinhança de x^0, definimos as funções analíticas $(\exp \alpha t)f$ por

$[(\exp \alpha t)f]\ (x) = f(x \exp \alpha t)$ para $\alpha \in L(G)$ e valores convenientemente pequenos de $|t|$.

Mais geralmente, seja $\mathfrak{A}_{x^0}$ o espaço de todas as funções analíticas f em uma vizinhança de x^0, onde a vizinhança pode variar com a função.

Definimos os operadores $T(g) : \mathfrak{A}_{x^0} \rightarrow \mathfrak{A}_{x^0}$ por

$$[T(g)\ f]\ (x) = f(xg)\ , \quad x \in U\ , \quad g \in G\ . \qquad \text{I.7.9}$$

Para um dado $f \in \mathfrak{A}_{x^0}$, o lado direito estará bem definido para x suficientemente próximo de x^0 e g suficientemente próximo de e.

Já que G é um grupo de transformação local temos que

$$[T(g_1, g_2)\ f]\ (x) = f(x(g_1\ g_2)) =$$
$$= \{T(g_1)\ [T(g_2)\ f]\}\ (x).$$

Assim $T(g_1\ g_2) = T(g_1)\ T(g_2)$ para $g_1, g_2 \in G$.

Os operadores $T(g)$ definem uma representação local de G sobre o espaço vetorial de dimensão infinita $\mathfrak{A}_{x^0}$. Em analogia com (I.7.2.1) podemos definir os operadores infinitesimais correspondentes a esta representação, conforme segue.

I.7.10- Definição de derivada de Lie

A derivada de Lie $L_\alpha f$ de uma função analítica $f \in \mathfrak{A}_x 0$ é dada por

$$L_\alpha f(x) = (d/dt)\ f(xg(t))\big|_{t=0} \quad , \quad \text{onde}$$

$g(t)$ é uma curva analítica em G com vetor tangente α no ponto e.

Um cálculo direto conduz a

$$L_\alpha f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\partial f(x)/\partial x_i) P_{ij}(x) \alpha_j \; , \text{ onde } P_{ij}(x) \text{ é}$$

dado por (I.7.8). Em outras palavras temos

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x)\ \alpha_j (\partial/\partial x_i).$$

Está claro desta expressão que L_α depende somente de α; não da particular curva $g(t)$.

I.7.11- Representação multiplicadora

Seja G um grupo de transformação de Lie local agindo sobre uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^m$, $x^0 \in U$.

Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto de todas as funções analíticas em uma vizinhança de x^0.

Uma representação multiplicadora (local) T de G sobre $\mathfrak{A}$ com multiplicador v , consiste de todas as aplicações $T(g)$ de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{A}$ definidas para $g \in G$ e $f \in \mathfrak{A}$ por

$$[T(g)f]\ (x) = v(x,\ g)\ f(xg).$$

Aqui $v(x, g)$ é uma função escalar de x e g, analítica, tal que:

(1) $v(x, e) = 1$;

(2) $v(x, g_1 g_2) = v(x, g_1)\ v(x, g_2)$.

I.7.12- Derivada de Lie generalizada

A derivada de Lie generalizada $D_\alpha f$ de f sob o grupo a um parâmetro $\exp \alpha t$ é a função analítica

$$D_\alpha f(x) = d/dt\ [T(\exp \alpha t) f]\ (x)\big|_{t=0}$$

Para $v \equiv 1$ a derivada de Lie generalizada é a derivada ordinária de Lie L_α.

I.7.13- Teorema ([1], pág 192).

O conjunto de todas as derivadas de Lie de um grupo de transformação de Lie local G forma uma álgebra de Lie a qual é uma imagem homomórfica de L(G). De fato

(1) $L_{(a\alpha + b\beta)} = aL_\alpha + bL_\beta$,

(2) $L_{[\alpha,\beta]} = L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha = [L_\alpha, L_\beta]$,

onde $\alpha,\beta \in L(G)$, $a,b \in \mathbb{C}$.

I.7.14- Teorema ([1] , pág 198).

As derivadas de Lie generalizadas de uma representação multiplicadora local formam uma álgebra de Lie sob as operações de adição de derivadas e colchete comutador de Lie

$$[D_\alpha , D_\beta] = D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha.$$

Esta álgebra é uma imagem homomórfica de L(G).

$$D_{a\alpha} + D_{b\beta} = aD_\alpha + bD_\beta \quad ; \quad D_{[\alpha,\beta]} = [D_\alpha , D_\beta].$$

I.7.15- Ação de um grupo em uma representação

Um grupo de Lie G age efetivamente em uma representação multiplicadora local T se L(G) é isomórfica à álgebra das derivadas de Lie generalizadas.

I.7.16- Teorema ([1], pág 199).

Sejam $D_j = \sum_{i=1}^{m} P_{ij}(x)\,(\partial/\partial x_i) + P_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ operadores diferenciais linearmente independentes definidos e analíticos em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^m$.

Se existem constantes c_{jk}^{ℓ} tal que

$$[D_j , D_k] = \sum_{\ell=1}^{n} c_{jk}^{\ell} D_\ell , \qquad 1 \leq i,j \leq n ,$$

então os D_j formam uma base para uma álgebra de Lie a qual é a álgebra das derivadas de Lie generalizadas de uma representação multiplicadora local efetiva T.

A ação do grupo G é obtida pela integração das equações

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x(t))\,\alpha_j \quad ,$$

$$(d/dt)\,\ell n\, v(x^0, \exp \alpha t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, P_j(x(t)), \qquad \text{onde}$$

$x(0) = x^0$, $v(x^0, e) = 1$, $x(t) = x^0 \exp \alpha t$, e $1 \le i \le m$.

I.7.17- Média de uma função sobre um grupo

Seja G um grupo de Lie linear compacto e seja f uma função complexa contínua sobre G.

Definimos a média de f sobre G , denotada por $\mathfrak{A}v(f(A))$, onde $A \in G$, por

$$\mathfrak{A}v(f(A)) = \frac{1}{V_G} \int_G f(A)\, dA = \int_G f(A)\, \delta A \quad ,$$

onde $\delta A = V_G^{-1}\, dA$ é a medida invariante normalizada.

Então

$$\mathfrak{A}v\,(f(BA)) = \int_G f(BA)\,\delta A = \int_G f(A)\,\delta A = \mathfrak{A}v(f(A)) \quad ,$$

$$\mathfrak{A}v(f(AB)) = \mathfrak{A}v(f(A)) \quad , \quad \mathfrak{A}v(1) = \int_G \delta A = 1 \quad , \ B \in G.$$

II- Estudo de U(2) e sua álgebra de Lie

Passaremos ao estudo do grupo de Lie U(2) e sua álgebra de Lie, ou seja, o espaço de todas as matrizes anti-hermitianas, do tipo dois por dois.

$U(2) = \{A \ \varepsilon \ GL(2, \mathbb{C}) \quad \bar{A}^t A = E_2\}.$

Para a álgebra de Lie $u(2) = L(U(2))$, de dimensão 4, escolhemos como base o conjunto das matrizes:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Efetivamente, trata-se de um conjunto de vetores linearmente independente, ou seja,

$$a' \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + b' \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c' \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{se}$$

e somente se $a' = b' = c' = d' = 0$.

Se Ω pertence à álgebra de Lie de U(2) então

$\Omega = a'I_1 + b'I_2 + c'I_3 + d'I_4 \quad , \quad a',b',c',d' \ \varepsilon \ \mathbb{R}.$

Então

$$\Omega = \begin{bmatrix} c'i & -b' + a'i \\ b' + a'i & d'i \end{bmatrix}$$

Definimos A pertencente ao grupo de Lie U(2) por

$A = \exp(aI_1) \ \exp(bI_2) \ \exp(cI_3) \ \exp(dI_4).$

Vamos calcular a matriz $\exp(aI_1)$ utilizando definições, teoremas e proposições do capítulo I (I.1.1 a I.1.6).

Assim $e^{aI_1} = \exp aI_1 = \exp \begin{bmatrix} 0 & ai \\ ai & 0 \end{bmatrix}$

Como $\det(aI_1 - \lambda I) = \lambda^2 - a^2 i^2$, os auto-valores de aI_1 são $\lambda_1 = ai$ e $\lambda_2 = -ai$.

Então $C = \begin{bmatrix} ai & 0 \\ 0 & -ai \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz

$$aI_1 = \begin{bmatrix} 0 & ai \\ ai & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \exp C = \begin{bmatrix} e^{ai} & 0 \\ 0 & e^{-ai} \end{bmatrix}.$$

Mas C é semelhante a aI_1, ou seja,

$C = B(aI_1)\,B^{-1}$, (B não singular) e

$B^{-1}\,C\,B = aI_1$.

Como $\exp\,(aI_1) = B^{-1}(\exp C)\,B$, temos após alguns cálculos,

$$\exp(aI_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{ai}+ e^{-ai}) & \frac{1}{2}(e^{ai}- e^{-ai}) \\ \frac{1}{2}(e^{ai}- e^{-ai}) & \frac{1}{2}(e^{ai}+ e^{-ai}) \end{bmatrix}$$

De forma análoga calcula-se as demais exponenciais, que resultam em:

$$\exp\,(bI_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{bi}+ e^{-bi}) & \frac{i}{2}(e^{bi}- e^{-bi}) \\ \frac{i}{2}(e^{-bi}- e^{bi}) & \frac{1}{2}(e^{bi}+ e^{-bi}) \end{bmatrix} ,$$

$$\exp(cI_3) = \begin{bmatrix} e^{ci} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \exp(dI_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{di} \end{bmatrix}.$$

Desta forma, se A pertence ao grupo de Lie $U(2)$, então

$$A = \exp(aI_1)\,\exp(bI_2)\,\exp(cI_3)\,\exp(dI_4) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a22 \end{bmatrix} ,$$

onde $a_{11} = \frac{e^{di}}{4}\left[(1 + i)(e^{ji}+ e^{-ji}) + (1 - i)(e^{xi}+ e^{-xi})\right],$

$$a_{12} = \frac{e^{ci}}{4}\left[(1 + i)(e^{xi}- e^{-xi}) + (1 - i)(e^{ji}- e^{-ji})\right],$$

$$a_{21} = \frac{e^{di}}{4}\left[(1 + i)(e^{ji}- e^{-ji}) + (1 - i)(e^{xi}- e^{-xi})\right],$$

$$a_{22} = \frac{e^{ci}}{4}\left[(1 + i)(e^{xi}+ e^{-xi}) + (1 - i)(e^{ji}+ e^{-ji})\right],$$

onde $x = a + b$, $j = a - b$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Para $\Omega \in L(U(2))$ define-se a transformação linear $Ad\,\Omega$ em $L(U(2))$ por

$Ad\,\Omega(\mathcal{B}) = \Omega\mathcal{B} - \mathcal{B}\Omega$, onde $\Omega\mathcal{B} - \mathcal{B}\Omega = [\Omega,\mathcal{B}]$ é o colchete comutador.

A matriz $Ad\,\Omega$ com relação à base de $L(U(2))$ é do tipo 4×4 $(2^2 \times 2^2)$ e a transformação $Ad\,\Omega$ é nula se e somente se ela comuta com toda matriz $B \in L(U(2))$.

Vamos calcular $Ad\ I_1$, através de sua ação na base I_1, I_2, I_3, I_4, considerando-se cada matriz da base como uma das colunas da matriz 4×4, conforme podemos observar na segunda matriz de II.1.

$$\text{Seja } Ad\ I_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Sabemos que

$$Ad\ I_1(I_1) = I_1I_1 - I_1I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Ad\ I_1(I_2) = I_1I_2 - I_2I_1 = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$$

$$Ad\ I_1(I_3) = I_1I_3 - I_3I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad\ I_1(I_4) = I_1I_4 - I_4I_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{II.1}$$

o que implica em

$$Ad\ I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i/2 & -i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix}$$

De forma análoga calculamos $Ad\ I_2$, $Ad\ I_3$, $Ad\ I_4$, que são:

$$\mathrm{Ad}\ I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & i/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathrm{Ad}\ I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathrm{Ad}\ I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os comutadores da álgebra de Lie de U(2) são:

$$[I_1, I_2] = \mathrm{Ad}\ I_1(I_2) = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} = 2(I_3 - I_4) ,$$

$$[I_1, I_3] = \mathrm{Ad}\ I_1(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -I_2 ,$$

$$[I_1, I_4] = \mathrm{Ad}\ I_1(I_4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I_2 ,$$

$$[I_2, I_3] = \mathrm{Ad}\ I_2(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = I_1 ,$$

$$[I_2, I_4] = \mathrm{Ad}\ I_2(I_4) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -I_1 ,$$

$$[I_3, I_4] = \mathrm{Ad}\ I_3(I_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

III- Os grupos de rotação SO(3) e SU(2)

III.1- SO(3)

Como caso particular de I.5.5 temos $SO(3, \mathbb{R})=SO(3)$. É o grupo de Lie, de todas as matrizes reais 3 x 3 tais que $A^tA = E_3$ e $\det A = 1$.

A álgebra de Lie $so(3)$ de $SO(3)$ é constituída de todas as matrizes reais Ω tais que $\Omega^t = -\Omega$.

As matrizes

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são linearmente independentes e formam uma base para a álgebra de Lie $so(3)$.

Se $\Omega \in so(3)$ então $\Omega = \Psi' I_1 + \theta' I_2 + \Phi' I_3$, onde $\Psi', \theta', \Phi' \in \mathbb{R}$.

As relações de comutação dos vetores da base são:

$$\begin{aligned} [I_1, I_2] &= I_1 I_2 - I_2 I_1 = I_3, \\ [I_2, I_3] &= I_2 I_3 - I_3 I_2 = I_1, \qquad \text{III.1.1} \\ [I_3, I_1] &= I_3 I_1 - I_1 I_3 = I_2. \end{aligned}$$

Um elemento A do grupo de Lie $SO(3)$ é dado por $A = \exp \Psi I_1 . \exp \theta I_2 . \exp \Phi I_3$, onde $\Psi, \theta, \Phi \in \mathbb{R}$.

Vamos calcular $\exp \Phi I_3$ da mesma forma que foi calculado o elemento genérico de $u(2)$.

$$\det(\Phi I_3 - xI) = \begin{vmatrix} -x & -\Phi & 0 \\ \Phi & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 - \Phi^2 x = x(x - \Phi i) . (x + \Phi i)$$

Assim:

$$\Phi I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\Phi & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi i & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi i \end{bmatrix} = C.$$

Mas $(\Phi I_3)B = BC$, B não singular.

Passamos a calcular os elementos de B, isto é os valores a, b, ..., h, j na relação seguinte

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Phi & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi i & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi i \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} -d\Phi & -e\Phi & -f\Phi \\ a\Phi & b\Phi & c\Phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b\Phi i & -c\Phi i \\ 0 & e\Phi i & -f\Phi i \\ 0 & h\Phi i & -j\Phi i \end{bmatrix}$$

então $a = d = h = j = 0$.

Se $b = 1$ então $e = -i$; se $c = 1$ então $f = i$.

Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando sua inversa, temos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas $\exp(\Phi I_3) = B(\exp C)B^{-1}$, donde

$$\exp(\Phi I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\Phi i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\Phi i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2(e^{\Phi i}+ e^{-\Phi i}) & i/2(e^{\Phi i}- e^{-\Phi i}) & 0 \\ i/2(-e^{\Phi i}+ e^{-\Phi i}) & 1/2(e^{\Phi i}+ e^{-\Phi i}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas $1/2(e^{\Phi i}+ e^{-\Phi i}) = 1/2(\cos\Phi + i\ \mathrm{sen}\,\Phi + \cos(-\Phi) + i\ \mathrm{sen}\,(-\Phi)) = \cos\Phi$;

$i/2(e^{\Phi i}- e^{-\Phi i}) = i/2(\cos\Phi + i\ \mathrm{sen}\,\Phi - \cos(-\Phi) - i\ \mathrm{sen}(-\Phi)) = -\mathrm{sen}\,\Phi$;

$i/2(-e^{\Phi i}+ e^{-\Phi i}) = i/2(-\cos\Phi - i\ \mathrm{sen}\,\Phi + \cos(-\Phi) + i\ \mathrm{sen}(-\Phi)) = \mathrm{sen}\,\Phi$.

Temos então $\exp(\Phi I_3) = \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\text{sen}\,\Phi & 0 \\ \text{sen}\,\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

De forma análoga calcula-se as demais exponenciais, obtendo-se:

$$\exp(\Psi I_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & -\text{sen}\Psi \\ 0 & \text{sen}\Psi & \cos\Psi \end{bmatrix} \qquad \exp(\theta I_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim se $A \in SO(3)$ então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & -\text{sen}\Psi \\ 0 & \text{sen}\Psi & \cos\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\text{sen}\,\Phi & 0 \\ \text{sen}\,\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$a_{11} = \cos\theta \cos\Phi$; $a_{12} = -\cos\theta\, \text{sen}\Phi$; $a_{13} = \text{sen}\theta$;
$a_{21} = \text{sen}\Psi\, \text{sen}\theta \cos\Phi + \cos\Psi\, \text{sen}\,\Phi$;
$a_{22} = -\,\text{sen}\Psi\, \text{sen}\theta\, \text{sen}\Phi + \cos\Psi \cos\Phi$;
$a_{23} = -\text{sen}\Psi \cos\theta$;
$a_{31} = -\cos\Psi\, \text{sen}\theta \cos\Phi + \text{sen}\Psi\, \text{sen}\,\Phi$;
$a_{32} = \cos\Psi\, \text{sen}\theta\, \text{sen}\,\Phi + \text{sen}\Psi \cos\Phi$;
$a_{33} = \cos\Psi \cos\theta$.

Nota:

Fazendo $\theta = \Phi = 0$ obtemos um subgrupo a um parâmetro de SO(3), formado pelas rotações em torno do eixo de x.

Fazendo $\Psi = \Phi = 0$, ou $\Psi = \theta = 0$ temos dois outros subgrupos a um parâmetro de SO(3), sendo eles respectivamente, as rotações em torno dos eixos de y e z.

III.2- SU(2)

SU(2) é um grupo de Lie real a três parâmetros formados por todas as matrizes complexas A , do tipo 2 x 2, tais que $\bar{A}^t A = E_2$ e det A = 1.

Uma base para a álgebra de Lie su(2) de SU(2) é a seguinte:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix} , \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} , \quad J_3 = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix}.$$

As relações de comutação desta álgebra são idênticas às da álgebra de Lie so(3) , ou seja

$$\begin{aligned} [J_1 , J_2] &= J_1 J_2 - J_2 J_1 = J_3 \\ [J_2 , J_3] &= J_2 J_3 - J_3 J_2 = J_1 \\ [J_3 , J_1] &= J_3 J_1 - J_1 J_3 = J_2 . \end{aligned} \qquad \text{III.2.1}$$

Se $\Omega \in su(2)$ então $\Omega = a'J_1 + b'J_2 + c'J_3$, onde $a' , b' , c' \in \mathbb{R}$.

$$\Omega = a' \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix} + b' \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + c' \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c'i/2 & \frac{-b'+a'i}{2} \\ \frac{b'+a'i}{2} & \frac{-c'i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{bmatrix} ,$$

onde $x_1 = \frac{a'}{2}$, $x_2 = \frac{b'}{2}$, $x_3 = \frac{c'}{2}$.

Um elemento genérico do grupo de Lie SU(2) é dado por $A = \exp aJ_1 . \exp bJ_2 . \exp cJ_3$.

Como $\exp cJ_3$ é uma matriz diagonal, usando (I.1.5) temos

$$\exp cJ_3 = \begin{bmatrix} e^{ci/2} & 0 \\ 0 & e^{-ci/2} \end{bmatrix} .$$

Vamos então calcular $\exp(aJ_1)$ e $\exp(bJ_2)$.

Temos

$$\det(aJ_1 - xI) = \begin{vmatrix} -x & \frac{ai}{2} \\ \frac{ai}{2} & -x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{a^2 i^2}{4} =$$

$$= (x - \frac{ai}{2})(x + \frac{ai}{2}).$$

Então
$$aJ_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ai}{2} \\ \frac{ai}{2} & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\sim}{=} \begin{vmatrix} \frac{ai}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-ai}{2} \end{vmatrix} = C \ .$$

Como $aJ_1 \stackrel{\sim}{=} C$ então existe B não singular tal que $aJ_1 = B\ C\ B^{-1}$.

Determinando B , obtemos exp $aJ_1 = B(\exp C)B^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{ai}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{ai}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2(e^{ai/2} + e^{-ai/2}) & 1/2(e^{ai/2} - e^{-ai/2}) \\ 1/2(e^{ai/2} - e^{-ai/2}) & 1/2(e^{ai/2} + e^{-ai/2}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(a/2) & i\ \mathrm{sen}(a/2) \\ i\ \mathrm{sen}(a/2) & \cos(a/2) \end{bmatrix}$$

Analogamente calculamos exp $bJ_2 =$

$$\begin{bmatrix} 1/2(e^{bi/2} + e^{-bi/2}) & 1/2(e^{bi/2} - e^{-bi/2}) \\ 1/2(e^{bi/2} - e^{-bi/2}) & 1/2(e^{bi/2} + e^{-bi/2}) \end{bmatrix}$$

O elemento genérico do grupo de Lie SU(2) é dado por $A = \exp aJ_1 \ .\ \exp bJ_2 \ .\ \exp cJ_3 =$

$$= \begin{bmatrix} 1/2(e^{(a+b+c)i/2} + e^{-(a+b-c)i/2}) & 1/2(e^{(a+b-c)i/2} - e^{-(a+b+c)i/2}) \\ 1/2(e^{(a+b+c)i/2} - e^{-(a+b-c)i/2}) & 1/2(e^{(a+b+c)i/2} - e^{-(a+b+c)i/2}) \end{bmatrix} =$$

$$= 1/2 \begin{bmatrix} e^{x_1 i} + e^{-x_2 i} & e^{x_2 i} - e^{-x_1 i} \\ e^{x_1 i} - e^{-x_2 i} & e^{x_2 i} + e^{-x_1 i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

$\alpha = 1/2(\cos x_1 + \cos x_2) + i(\mathrm{sen}\ x_1 - \mathrm{sen}\ x_2)$;

$\beta = 1/2(-\cos x_1 + \cos x_2) + i(\mathrm{sen}\ x_1 + \mathrm{sen}\ x_2)$;

$x_1 = \frac{a+b+c}{2}$; $x_2 = \frac{a+b-c}{2}$.

III.3- Relação de homomorfismo entre SU(2) e SO(3)

Seja G um grupo de Lie linear local (definido em I.2.2).

- Para $B \in G$, fixo, a aplicação $\mu_B(A) = BAB^{-1}$, $A \in G$, é um automorfismo interno de G.
- Para $B \in G$, fixo, o automorfismo interno μ_B de G induz um automorfismo μ_B^* na álgebra de Lie L(G) de G dado por

$$\mu_B^*(\Omega) = (d/dt)\ \mu_B(\exp t\Omega)\big|_{t=0} = (d/dt)\ B(\exp\ t\Omega)\ B^{-1}\big|_{t=0} = B(\exp t\Omega)\ \Omega\ B^{-1}\big|_{t=0} = B(\exp 0\Omega)\ \Omega B^{-1} = B\Omega B^{-1}.$$

De III.1.1 e III.2.1 concluímos que SU(2) e SO(3) têm as mesmas relações de comutação, e portanto so(3) e su(2) são álgebras de Lie isomórficas.

Então SO(3) e SU(2) são localmente isomórficos.

Vejamos agora um automorfismo da álgebra de Lie su(2) que vai nos permitir induzir uma relação de homomorfismo R entre SU(2) e SO(3), sendo esta uma relação de isomorfismo local.

Consideremos o automorfismo de su(2) dado por

$\mu_A^*(\Omega) = \mathcal{B} = A\Omega A^{-1}$, onde $A \in SU(2)$; $\Omega, \mathcal{B} \in su(2)$.

Sejam $\Omega = \begin{bmatrix} ix_3 & -x_2+ix_1 \\ x_2+ix_1 & -ix_3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} iy_3 & -y_2+iy_1 \\ y_2+iy_1 & -iy_3 \end{bmatrix}$,

$A = \begin{bmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ -a_2+ib_2 & a_1-ib_1 \end{bmatrix}$, onde $a_1+ib_1 = \alpha$; $a_2+ib_2 = \beta$.

Temos $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ou $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1$.

Expandindo a relação $\mathcal{B} = A\Omega A^{-1}$ obtemos

$$\begin{bmatrix} iy_3 & -y_2+iy_1 \\ y_2+iy_1 & -iy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ -a_2+ib_2 & a_1-ib_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ix_3 & -x_2+ix_1 \\ x_2+ix_1 & -ix_3 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a_1-ib_1 & -a_2-ib_2 \\ a_2-ib_2 & a_1+ib_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$b_{11} = i(a_1^2x_3-a_2^2x_3+b_1^2x_3-b_2^2x_3+2a_1a_2x_1+2a_1b_2x_2-2a_2b_1x_2+ +2b_1b_2x_1) \;;$$

$$b_{22} = i(-a_1^2x_3+a_2^2x_3-b_1^2x_3+b_2^2x_3-2a_1a_2x_1-2a_1b_2x_2+2a_2b_1x_2- -2b_1b_2x_1) = -b_{11} \;;$$

$$b_{12} = (a_1^2x_2+a_2^2x_2-b_1^2x_2-b_2^2x_2+2a_1b_1x_1-2a_1b_2x_3-2a_2b_1x_3- -2a_2b_2x_1) + i(a_1^2x_1-a_2^2x_1-b_1^2x_1+b_2^2x_1-2a_1a_2x_3-2a_1b_1x_2- -2a_2b_2x_2+2b_1b_2x_3) \;;$$

$$b_{21} = (-a_1^2x_2-a_2^2x_2+b_1^2x_2+b_2^2x_2-2a_1b_1x_1+2a_1b_2x_3+2a_2b_1x_3+ +2a_2b_2x_1) + i(a_1^2x_1-a_2^2x_1-b_1^2x_1+b_2^2x_1-2a_1a_2x_3-2a_1b_1x_2- -2a_2b_2x_2+2b_1b_2x_3) = -\overline{b_{12}} \;.$$

Da igualdade de matrizes temos:

$$y_1 = (a_1^2-a_2^2-b_1^2+b_2^2)\,x_1 + (-2a_1b_1-2a_2b_2)\,x_2 + +(-2a_1a_2+2b_1b_2)\,x_3 = R(A)_{11}\,x_1 + R(A)_{12}\,x_2 + + R(A)_{13}\,x_3 \;;$$

$$y_2 = (2a_1b_1-2a_2b_2)\,x_1 + (a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2)\,x_2 + +(-2a_1b_2-2a_2b_1)\,x_3 = R(A)_{21}\,x_1 + R(A)_{22}\,x_2 + + R(A)_{23}\,x_3 \;;$$

$$y_3 = (2a_1a_2+2b_1b_2)\,x_1 + (2a_1b_2-2a_2b_1)\,x_2 + (a_1^2-a_2^2+ +b_1^2-b_2^2)\,x_3 = R(A)_{31}\,x_1 + R(A)_{32}\,x_2 + R(A)_{33}\,x_3 \,.$$

Então

$$y_j = \sum_{k=1}^{3} R(A)_{jk}\,x_k \qquad \text{para} \quad j = 1,\,2,\,3.$$

Veremos que estes $R(A)_{jk}$ definem um homomorfismo de grupos

$R : SU(2) \to SO(3)$, que ao elemento

$$A = \begin{bmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ -a_2+ib_2 & a_1-ib_1 \end{bmatrix}$$ faz corresponder o elemento

$$R(A) = \begin{bmatrix} a_1^2-a_2^2-b_1^2+b_2^2 & -2a_1b_1-2a_2b_2 & -2a_1a_2+2b_1b_2 \\ 2a_1b_1-2a_2b_2 & a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2 & -2a_1b_2-2a_2b_1 \\ 2a_1a_2+2b_1b_2 & 2a_1b_2-2a_2b_1 & a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2 \end{bmatrix} .$$

De fato $\mu^*_{AB}(\Omega) = (AB)\Omega(AB)^{-1} = (AB)\Omega(B^{-1}A^{-1}) =$
$= A\ \mu^*_B(\Omega)A^{-1} = \mu^*_A(\mu^*_B(\Omega)) = \mu^*_A\ \mu^*_B(\Omega)$.

Portanto $R(AB) = R(A).R(B)$, o que implicará em R ser um homomorfismo.

Sendo $R(A).R(A)^t = E_3$ e $\det(R(A)) = 1$ então as matrizes $R(A)$, do tipo 3×3, pertencem ao grupo $SO(3)$. Então R é um homomorfismo de $SU(2)$ em $SO(3)$; mas $R(A) = R(-A)$; ainda mais $R(A) = E_3$ se e somente se $A = \pm E_2$, ou seja, exatamente dois elementos de $SU(2)$ são levados em cada elemento de $SO(3)$.

Vamos verificar que R é um epimorfismo, ou seja, um homomorfismo sobrejetivo.

Sabemos que $\operatorname{tr} \Omega = \operatorname{tr} \mathcal{B} = 0$ e $y_1^2+y_2^2+y_3^2 = \det \mathcal{B} =$
$= \det(A\Omega A^{-1}) = \det A \cdot \det \Omega \cdot \det A^{-1} = \det \Omega = x_1^2+$
$+x_2^2+x_3^2 = q^2$, onde $q \in \mathbb{R}$.

As matrizes hermitianas $i\Omega$ e $i\mathcal{B}$ têm os mesmos auto-valores, sendo eles $\pm iq$; logo estas matrizes são semelhantes, e existe uma matriz unitária B tal que $\mathcal{B} = B\Omega B^{-1}$. Mas $|\det B| = 1$, o que implica que

$B = e^{i\theta} . A$, onde $\det B = e^{2i\theta}$, e $A \in SU(2)$.

Assim $A \to R(A)$ é um epimorfismo em $SO(3)$.

$$\begin{tikzcd}
SU(2) \arrow[rr, "R(\text{epimorfismo})"] \arrow[dr] & & SO(3) \\
& SU(2)/K \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

onde K = núcleo de $SU(2) = \{+E_2, -E_2\}$.

Pelo teorema do isomorfismo ([6], pág 59) existe uma aplicação f tal que $f(A') \in SO(3)$ para todo $A' \in SU(2)/K$, tal que f é um homomorfismo bijetor, isto é, um isomorfismo.

Logo $SO(3)$ é isomórfico a $SU(2)/K$.

Como $-A$ está distante de E_2 quando A está próximo de E_2 então $R(A)$ é uma aplicação localmente isomórfica.

Do ponto de vista topológico SU(2) é homeomórfico à esfera unitária S^3, e SO(3) é homeomórfico ao espaço projetivo de cada diâmetro em S^3.

III.4- Volume de SU(2) e SO(3)

Os ângulos de Euler (Φ, θ, Ψ) formam um sistema de coordenadas convenientes para SU(2) ([1], pág 225).

Seja $A(\Phi, \theta, \Psi) = (\exp \Phi J_3)(\exp \theta J_1)(\exp \Psi J_3) =$

$$\text{III.4.1} = \begin{bmatrix} e^{i(\Phi+\Psi)/2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} & i \cdot e^{i(\Phi-\Psi)/2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ i\, e^{i(\Psi-\Phi)/2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & e^{-i(\Phi+\Psi)/2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Tomando os ângulos de Euler no domínio $0 \leq \Phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $-2\pi \leq \Psi < 2\pi$, e seguindo a teoria apresentada em (I.6), passemos ao cálculo do volume de SU(2), que é compacto ([1], pág 211), dado por

$$V_{SU(2)} = \int_{SU(2)} dA .$$

Temos

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial \Phi} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} e^{-i\Psi}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{2}e^{i\Psi}\operatorname{sen}\theta & \frac{i}{2}\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= (\operatorname{sen}\Psi \operatorname{sen}\theta)J_1 + (\cos\Psi \operatorname{sen}\theta)J_2 + (\cos\theta)J_3 .$$

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & i/2\, e^{-i\Psi} \\ i/2\, e^{i\Psi} & 0 \end{bmatrix} = (\cos\Psi)J_1 - (\operatorname{sen}\Psi)J_2 .$$

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial \Psi} = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix} = J_3 .$$

$$dA = V_A(\Phi, \theta, \Psi)\, d\Phi\, d\theta\, d\Psi =$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\Psi \operatorname{sen}\theta & \cos\Psi \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\Psi & -\operatorname{sen}\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| d\Phi\, d\theta\, d\Psi =$$

$$= \operatorname{sen}\theta\, d\Phi\, d\theta\, d\Psi .$$

Então $V_{SU(2)} = \int_{SU(2)} dA = \int_{SU(2)} \operatorname{sen}\theta \, d\Phi \, d\theta \, d\Psi =$

$= \int_{-2\pi}^{2\pi} d\Psi \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 16\pi^2.$

Como $R(A) = R(-A)$, então dois conjuntos diferentes de ângulos de Euler determinam a mesma matriz rotação.

Se A é dado através dos ângulos de Euler (cf. III. .4.1), então

$$R(A) = \begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\Psi\cos\theta & -\cos\Phi\operatorname{sen}\Psi - \operatorname{sen}\Phi\cos\Psi\cos\theta & \operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\operatorname{sen}\Psi\cos\theta & -\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\theta & -\cos\Phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\Psi\operatorname{sen}\theta & \cos\Phi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e $R((A(\Phi,\theta,\Psi)) = R(A(\Phi,\theta,\Psi \pm 2\pi))$

Mas SU(2) é localmente isomórfico a SO(3); então suas medidas invariantes são iguais e

$\int_{SO(3)} dA = \int_{SO(3)} \operatorname{sen}\theta \, d\Phi \, d\theta \, d\Psi = \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta =$

$= 8\pi^2,$

ou seja, a metade do volume de SU(2). Acontece que SU(2) é um duplo recobrimento de SO(3) de forma que dA é o mesmo para ambos, mas o volume calculado para SU(2) é o dobro do volume calculado para SO(3).

III.5-SL(2) - Complexificação de SU(2)

$$SL(2) = SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } \det g = 1 \right\} \quad ;$$

e $s\ell(2)$ é a álgebra de Lie de SL(2).

Sejam os elementos

$$I^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

que definem uma base para $s\ell(2)$ com as seguintes relações de comutação:

$$[I^3, I^{\pm}] = \pm I^{\pm} \quad , \quad [I^+, I^-] = 2I^3 .$$

Complexificação de su(2)

Seja G uma álgebra de Lie real de dimensão n. A complexificação G_c de G é a álgebra de Lie complexa de dimensão n, consistindo de todas as combinações lineares complexas de elementos da álgebra real G.

Veremos agora que $s\ell(2) = s\ell(2,\mathbb{C})$ é uma complexificação de su(2):

$$J_2+iJ_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I^+ ,$$

$$-J_2+iJ_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = I^- ,$$

$$-iJ_3 = -i \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = I^3 ,$$

onde $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$,

$J_3 = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix}$, foram definidas em (III.2), e constituem uma base para su(2).

Como I^+, I^-, I^3 formam uma base para a álgebra de Lie $s\ell(2)$, vemos que ela é uma complexificação de su(2), de dimensão 3, como pretendíamos.

Assim $su(2)_c \cong s\ell(2)$ e su(2) é uma forma real de $s\ell(2)$.

III.6-Representações irredutíveis de SU(2) e SO(3)

Uma representação T de su(2) em um espaço vetorial V induz uma representação de $s\ell(2)$, ou seja, de acordo com o visto na secção anterior

$$T(I^{\pm}) = \pm T(J_2) + iT(J_1) \quad e \quad T(I^3) = -iT(J_3).$$

Calculando-se as representações irredutíveis de $s\ell(2)$, encontra-se as representações irredutíveis de $su(2)$ e através da exponenciação obtêm-se as representações irredutíveis de $SU(2)$.

Vamos verificar que $SL(2)$ age efetivamente em uma representação multiplicadora.

Seja $\mathcal{E}(G)$ a álgebra de Lie formada pelas derivadas de Lie $\{L_\alpha\}$, definidas em I.7.11.

Observemos que $\alpha \to L_\alpha$ é um homomorfismo de $L(G)$ sobre $\mathcal{E}(G)$. Se esta aplicação é um isomorfismo, isto é, $\dim L(G) = \dim \mathcal{E}(G)$ então G age efetivamente como um grupo de transformação.

Já vimos uma base para a álgebra de Lie $s\ell(2)$ e vamos agora considerar os operadores que seguem, agindo numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

III.6.1 $\mathcal{E}^+ = -2uz + z^2(d/dz) \quad ; \quad \mathcal{E}^- = -d/dz \quad ;$

$\mathcal{E}^3 = -u + z(d/dz)$.

Verifica-se a seguinte relação de comutação por (I.7.17)

$$[\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^+]\ f(z) = \mathcal{E}^3(\mathcal{E}^+ f(z)) - \mathcal{E}^+ (\mathcal{E}^3 f(z)) =$$
$$= (-u + z\ d/dz)(-2uz\ f(z) + z^2\ d/dz\ f(z)) -$$
$$- (-2uz + z^2\ d/dz)(-u\ f(z) + z\ d/dz\ f(z)) =$$
$$= (-u + z\ d/dz)(-2uz\ f(z) + z^2\ f'(z)) -$$
$$- (-2uz + z^2\ d/dz)(-u\ f(z) + z\ f'(z)) = 2\ u^2\ z\ f(z) -$$
$$- u\ z^2\ f'(z) - 2u\ z\ f(z) - 2u\ z^2\ f'(z) +$$
$$2z^2\ f'(z) + z^3\ f''(z) - 2\ u^2 z\ f(z) + 2u\ z^2\ f'(z) +$$
$$+ uz^2\ f'(z) - z^2\ f'(z) - z^3\ f''(z) = -2u\ z\ f(z) +$$
$$+ z^2\ d/dz\ f(z) = \mathcal{E}^+\ f(z).$$

Analogamente calculamos os demais colchetes comutadores e obtemos:

$$[\mathcal{E}^3\ ,\ \mathcal{E}^{\pm}] = \pm\ \mathcal{E}^{\pm} \qquad ; \qquad [\mathcal{E}^+\ ,\ \mathcal{E}^-] = 2\ \mathcal{E}^3.$$

Logo estes operadores geram uma álgebra de Lie isomórfica a $s\ell(2)$ e são as derivadas de Lie generalizadas (I.7.12) correspondentes a uma representação multiplicadora local de $SL(2)$ sobre $\mathbb{C}$.

Usando-se o teorema I.7.16 e integrando-se as equações obtêm-se a ação dos subgrupos a um parâmetro: $\exp \tau I^3$, $\exp bI^+$, $\exp cI^-$, que são dadas por

$$[T(\exp \tau I^3)\ f]\ (z^0) = e^{-u\tau}\ f(z^0\ e^{\tau})\ ;$$
$$[T(\exp bI^+)\ f]\ (z^0) = (1 - bz^0)^{2u}\ f\left(\frac{z^0}{1 - bz^0}\right)\ ,\quad |bz^0| < 1\ ;$$
$$[T(\exp cI^-)\ f](z^0) = f(z^0 - c).$$

Vejamos que a representação multiplicadora local $T(g)$ é dada por uma expressão do tipo:

$$[T(g)\ f](z) = [T(\exp b'I^+)\ T(\exp c'I^-)\ .$$
$$.\ T(\exp \tau'I^3)\ f](z) = (\exp u - \tau')(1 - b'z)^{2u}\ .$$
$$.\ f\left(\frac{z(\exp \tau')(1 + c'\ b') - c'\ \exp \tau'}{1 - b'z}\right) =$$
$$= (bz + d)^{2u}\ f\left(\frac{az + c}{bz + d}\right)\ , \qquad \text{III.6.2}$$

onde $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \varepsilon\ SL(2)$.

Assim se $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \varepsilon\ SL(2)$, então

$$zg = (az + c)/(bz + d)\ ,$$
$$v(z,g) = (bz + d)^{2u} \qquad \text{(cf I.7.11)}\ ,\ \text{e}$$

$[T(g)\ f](z) = (bz + d)^{2u}\ f\left(\frac{az + c}{bz + d}\right)$, para g em uma vizinhança próxima de e.

Este elemento g pode ser escrito por

$$g = (\exp b'I^+)(\exp c'I^-)(\exp \tau'I^3) =$$

$$\begin{bmatrix} (\exp \frac{1}{2}\tau')(1 + b'c') & -b'\ \exp -\frac{1}{2}\tau' \\ -c'\ \exp \frac{1}{2}\tau' & \exp -\frac{1}{2}\tau' \end{bmatrix}\ ,\ \text{onde}$$

$\exp \frac{1}{2}\tau' = d^{-1}$; $b' = -b/d$; $c' = -cd$, o que justifica III.6.2.

Os operadores em III.6.1 são as derivadas de Lie generalizadas, conforme apresentação que segue

$$\mathcal{E}^{+} f(z) = d/db\ T(\exp bI^{+})\ f(z)\Big|_{b=0} = -2uz\ f(z) + $$
$$+ z^2\ d/dz\ f(z);$$
$$\mathcal{E}^{-} f(z) = d/dc\ T(\exp cI^{-})\ f(z)\Big|_{c=0} = -\ d/dz\ f(z);$$
$$\mathcal{E}^{3} f(z) = d/d\tau\ T(\exp \tau I^{3})\ f(z)\Big|_{\tau=0} = -u\ f(z) + $$
$$+ z\ d/dz\ f(z);$$

A ação destes operadores no espaço de dimensão $2u+1$ dos polinômios de ordem $2u$, define a representação da álgebra de Lie $D^{(u)}$ de $s\ell(2)$.

Seja $V^{(u)}$ o espaço vetorial de dimensão $(2u+1)$ constituído dos polinômios:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{2u} c_j z^j$$

Escolhendo como base $h_j(z) = z^j$, $j=0,1,\ldots,2u$, temos a seguinte ação

$$\mathcal{E}^3\ h_j = (-u+z\ d/dz)\ z^j = -uz^j + jzz^{j-1} = -uz^j + jz^j =$$
$$= (j-u)\ z^j = (j-u)\ h^j;$$
$$\mathcal{E}^-\ h_j = (-d/dz)\ z^j = -jz^{j-1} = -j\ h_{j-1}\ ; \qquad \text{III.6.3}$$
$$\mathcal{E}^+\ h_j = (-2uz + z^2\ d/dz)\ z^j = -2uz^{j+1} + jz^{j+1} =$$
$$= (j-2u)\ z^{j+1} = (j-2u)\ h_{j+1}.$$

Esta ação é uma representação irredutível de $s\ell(2)$ sobre $V^{(u)}$, que induz uma representação irredutível de $su(2)$.

Encontraremos também as representações irredutíveis de $SU(2)$ induzidas pelas representações de $su(2)$, restringindo os operadores $T(A)$ para $A \in SU(2)$.

$$\text{Seja}\quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$[T(A)\ f\ ](z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2u}\ f\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right), \quad f \in V^{(u)}$$

Estas representações de $SU(2)$ de dimensão $(2u+1)$ são irredutíveis já que as representações da álgebra de Lie associada são também irredutíveis.

Mas se $T(-E_2) = E$, onde E é o operador identidade, então T é chamada de representação inteira e define uma representação irredutível de SO(3).

Em nosso caso temos:

$$-E_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T(-E_2)\ f\ ](z) = (0.z-1)^{2u}\ f(\frac{-z\ +\ 0}{0.z+\ -1}) = (-1)^{2u} f(z),$$

ou $\quad T(-E_2) = (-1)^{2u}\ E.$

Para u = 0, 1, 2, ... as representações irredutíveis são inteiras e definem as representações irredutíveis de SO(3) (comparar com a observação final do capítulo IV).

Para u = 1/2, 3/2, 5/2, ... são representações meias inteiras que duplicam as representações irredutíveis de SO(3), constituindo as restantes representações irredutíveis de SU(2).

III.6.4- <u>Teorema</u> ([1], pág 213)

Seja T uma representação contínua do grupo de Lie linear compacto G, no espaço V de dimensão finita, com produto interno. Então T é equivalente a uma representação unitária em V.

Vamos denotar as representações de dimensão (2u+1) de SU(2) por $D^{(u)}$. Como SU(2) é compacto vamos ver que existe um produto interno (-,-) sobre o espaço vetorial $V^{(u)}$, com relação ao qual as representações $D^{(u)}$ são unitárias.

Seja $\langle -,- \rangle$ um produto interno em $V^{(u)}$.
Vamos definir (-,-) por

$$(f,h) = \frac{1}{V_{SU(2)}} \int_{SU(2)} \langle T(A)\ f,\ T(A)\ h\rangle\ dA =$$

$$= \Omega v\ [T(A)f,\ T(A)h] = (T(A)f, T(A)h),$$

onde $A \in SU(2)$ e $f, h \in V^{(u)}$, (I.7.18).

Seja $\mathfrak{L}_k$ tal que $\exp t\mathfrak{L}_k = T(\exp tJ_k)$ onde J_k forma a base para su(2), (III.2).

Substituindo no produto interno acima, diferenciando com relação a t e fazendo t = 0 temos

$$(\mathfrak{L}_k f, h) = -(f, \mathfrak{L}_k h), \qquad k = 1, 2, 3;$$

ou

$$\mathfrak{L}_k^* = -\mathfrak{L}_k ,$$

isto é, os operadores $\mathfrak{L}_k$ são anti-hermitianos, ou seja, os operadores $i\mathfrak{L}_k$ são hermitianos.

Com as relações que seguem

$$\mathfrak{L}^{\pm} = \pm \mathfrak{L}_2 + i\mathfrak{L}_1 ; \qquad \mathfrak{L}^3 = i\mathfrak{L}_3 ;$$

$$(\mathfrak{L}^-)^* = \mathfrak{L}^+ ; \quad (\mathfrak{L}^+)^* = \mathfrak{L}^- ; \quad (\mathfrak{L}^3)^* = \mathfrak{L}_3 ;$$

$$(\mathfrak{L}^3 h_j, h_k) = (h_j, \mathfrak{L}^3 h_k) ;$$

$$(\mathfrak{L}^+ h_j, h_k) = (h_j, \mathfrak{L}^- h_k) ;$$

$$(\mathfrak{L}^- h_j, h_k) = (h_j, \mathfrak{L}^+ h_k) ;$$

e ainda por (III.6.3) temos que

$(h_j, h_k) = 0$ se $j \neq k$ e

$$(2u-j) ||H_{j+1}||^2 = (2u-j)(h_{j+1}, h_{j+1}) =$$

$$-(h_{j+1}, (2u-j)\, h_{j+1}) = -(h_{j+1}, \mathfrak{L}^+ h_j) = -(\mathfrak{L}^- h_{j+1}, h_j) =$$

$$= -(-(j+1)\, h_j, h_j) = (j+1)(h_j, h_j) = (j+1)\, ||h_j||^2 .$$

Verificamos com estas duas últimas afirmações que os vetores da base $h_j(z) = z^j$, são mutuamente ortogonais, e a relação que existe entre as normas dos vetores da base é

$$(2u-j)\, ||h_{j+1}||^2 = (j+1)\, ||h_j||^2 .$$

Vamos agora ortonormalizar o produto interno escolhendo arbitrariamente $||h_0||$. Escolhemos uma base ortonormal $\{ f_m \}$ para $V^{(u)}$, onde $f_m(z) =$

$= h_j(z) = z^j$.

Os vetores da base serão classificados pelos auto-valores $m=j-u$ de f_m, com relação a $\mathcal{E}^3$.

Vamos normalizar $h_0(z) = 1$ por $||h_0||^2 = (2u)!$ e

$$||h_j||^2 = (2u-j)!\ j!$$

Assim os vetores $f_m(z) = \dfrac{(-1)^j\ h_j(z)}{|h_j(z)|} =$

$$= \frac{(-z)^j}{[||h_j(z)||]^{1/2}} = \frac{(-z)^{u+m}}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} \quad , \qquad \text{com } m =$$

$= -u, -u+1, \ldots , u-1, u,$ formam uma base ortonormal para $V^{(u)}$.

Segue ainda de (III.6.3) que

$$\mathcal{E}^3\ f_m = (-u + z\ d/dz)\ \frac{(-z)^{u+m}}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} =$$

$$= \frac{-u(-z)^{u+m}}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} + \frac{z(u+m)(-z)^{u+m-1}(-1)}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} =$$

$$= \frac{[-u-z(u+m)(-z)^{-1}](-z)^{u+m}}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} = \frac{m(-z)^{u+m}}{[(u-m)!\,(u+m)!]^{1/2}} =$$

$= m\ f_m$.

De forma análoga calculamos os demais e obtemos

$$\mathcal{E}^+\ f_m = [(u+m+1)(u-m)]^{1/2}\ f_{m+1}\ ;$$

$$\mathcal{E}^-\ f_m = [(u-m+1)(u+m)]^{1/2}\ f_{m-1}\ .$$

Os elementos da matriz da representação $D^{(u)}$ com relação à base ortonormal $\{f_m\}$ são

$$T^u_{nm}(A) = (T(A)f_m\ ,\ f_n) \qquad \text{ou}$$

$$[T(A)f_m](z) = \sum_{n=-u}^{u} T^u_{nm}(A)\ f_n(z) \quad ,$$

onde $\quad -u \leq m \leq u$.

Seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$. Então $g(A,z) = [T(A)f_m|(z) =$

$$= (\beta z + \bar{\alpha})^{2u} f_m\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2u} \frac{\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right)^{u+m}}{[(u-m)!(u+m)!]^{1/2}} =$$

$$= \frac{(\beta z + \bar{\alpha})^{u-m}(\alpha z - \bar{\beta})^{u+m}}{[(u - m)!(u + m)!]^{1/2}} = \sum_{n=-u}^{u} T^u_{nm}(A) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-m} (z)^{u+n}}{[(u-n)!(u+n)!]^{1/2}} .$$

A ação de $\varepsilon^3 f_m$, $\varepsilon^+ f_m$, $\varepsilon^- f_m$ já definem a álgebra de Lie $D^{(u)}$, mas utilizando as duas expressões da igualdade anterior e igualando as potências em z obtemos a relação que existe com a teoria das funções especiais, conforme segue

$$T^u_{nm}(A) = \left[\frac{(u+m)!(u-n)!}{(u+n)!(u-m)!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^{u+n} \bar{\alpha}^{m-n} \bar{\beta}^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} .$$

$$\cdot \ {}_2F_1(-u-n, m-u; m-n+1; -\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2) ; \qquad \text{III.6.4.1}$$

onde $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n! \left[\frac{n^z}{(z)_{n+1}}\right]$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,

$\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ é a função gama e

${}_2F_1(n+1, -n; 1; 1/2(1-\cos\theta))$ é a função hipergeométrica, ou seja,

$${}_2F_1(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{1c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 +$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)}x^3 + \ldots$$

Se a,b,c são reais, então a série converge para $-1 < x < 1$, desde que $c-(a+b) > -1$;

e ${}_2F_1(a,b;c;x)$ é a solução da equação diferencial hipergeométrica $x(x - 1)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$

IV- Homomorfismos de SU(2) em SU(n+1)

Neste capítulo estamos apresentando, como principal contribuição deste trabalho, uma relação de homomorfismo entre SU(2) e SU(n+1), seguido de uma regra prática que nos permite identificar, de forma bastante acessível, um elemento do grupo especial unitário SU(n+1); com n = 2, 3, ...; conhecendo-se apenas um elemento de SU(2).

IV.1- Álgebra dos quatérnios

A álgebra $\mathbb{H}$ dos quatérnios é uma álgebra de dimensão 4 sobre $\mathbb{R}$, com uma base composta de quatro elementos 1, i, j, k, cuja tabela de multiplicação é dada pelas seguintes fórmulas:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ,$$

$$ij = -ji \quad , \quad ik = -ki \quad , \quad jk = -kj \quad ,$$

$$ij = k \quad , \quad jk = i \quad , \quad ki = j \ .$$

Se q é um quatérnio então q é expresso como combinação linear de 1, i, j, k, ou seja,

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, e o conjungado de q , denominado $\bar{q}$ é expresso por

$$\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \ .$$

Todo quatérnio pode ser escrito na forma

$$q = (a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i)j \quad , \quad \text{ou}$$

$$q = \alpha + \beta j \quad , \quad \text{onde } j^2 = -1 \ , \ ij = -ji \ , \ \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Observemos em particular que $\mathbb{H}$ possui a estrutura do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, com a base padrão obtida pelas seguintes identificações:

$1 \equiv (1,0,0,0)$, $i \equiv (0,1,0,0)$; $j \equiv (0,0,1,0)$ e $k \equiv (0,0,0,1)$. Também $\mathbb{H}$ possui a estrutura do espaço vetorial complexo com a base obtida pelas seguintes identificações: $1 \equiv (1,0)$ e $j \equiv (0,1)$. Como todo quatérnio pode ser escrito na forma $\alpha + \beta j$, onde α, β são complexos ($\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$), denotaremos

$\mathbb{H}$ por $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_j$. A esfera unitária $S(\mathbb{H}) = S(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_j)$ de vetores unitários de $\mathbb{H}$, na norma padrão, coincide com a esfera S^3 de $\mathbb{R}^4$. Esta esfera constitui um grupo de Lie com a operação usual de produto quaterniônico.

IV.2- Determinação dos homomorfismos F_n

Apresentaremos outra forma de se obter as representações irredutíveis de SU(2), já apresentadas anteriormente neste trabalho (III.6.4.1).

A primeira seguiu as definições e teoremas de [1], sendo apresentada em 2.13 de [1], pág 230, ou em III.6.4.1 do presente trabalho.

Seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ um elemento do grupo SU(2), ou seja, uma matriz especial unitária.

Então φ envia $\alpha+\beta j \in S(\mathbb{H}) = S(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_j) = S^3$, (IV.1)

na matriz especial unitária

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} .$$

A representação complexa padrão de SU(2) é por definição o monomorfismo de inclusão

$\phi_1 : SU(2) \to \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^2$. Denotaremos por $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2$ a soma direta de duas cópias complexas $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$.

Temos quatro homomorfismo:

$a_{ij} : \mathbb{C}_i \to \mathbb{C}_j$ para $i,j = 1,2$, de modo que

$$[\phi_1(A)](z_1,z_2) = (a_{11}z_1 + a_{21}z_2 \,,\, a_{12}z_1 + a_{22}z_2) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{2} a_{i1}\, z_i \;,\; \sum_{i=1}^{2} a_{i2}\, z_i \Big).$$

Veremos que as representações complexas irredutíveis, de dimensão $n+1$, de SU(2) estão determinadas, a menos de constantes complexas, por homomorfismos de SU(2) em SU(n + 1).

De acordo com [12], pág 168, o anel das representações complexas $K(SU(2))$ é um anel de polinômios gerado pela representação complexa ϕ_1.

Seja $F_1 : SU(2) \to SU(2)$ a aplicação identidade. Disto decorre que a potência n-ésima de ϕ_1 em $K(SU(2))$ é única. Esta potência n-ésima é uma representação $\phi_n : SU(2) \to \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^{n+1}$ que, como veremos, se fatoriza na forma:

$$SU(2) \xrightarrow{F_n} SU(n+1) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^{n+1}$$

Teremos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
SU(2) \arrow[r, "F_n"] \arrow[d, "\phi_1"'] & SU(n+1) \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^{n+1} \arrow[d] \\
\bigoplus_{i,j=1,2} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_i , \mathbb{C}_j) \arrow[r] & \bigoplus_{K,\ell=1,2,\ldots,n+1} \mathrm{Hom}(\mathbb{D}_K, \mathbb{D}_\ell)
\end{tikzcd}$$

onde $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{K=0}^{n} \mathbb{D}_K$, que é a soma direta de linhas complexas $\mathbb{D}_K$.

Seja $\otimes^{n-K} \mathbb{C}_1 \otimes \otimes^K \mathbb{C}_2$ o produto tensorial ([11], secção 3.2) de $n - K$ cópias de $\mathbb{C}_1$ por K cópias de $\mathbb{C}_2$.

Seja $\hat{\otimes}(\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2)^n = \bigoplus_{K=0}^{n} (\otimes^{n-K} \mathbb{C}_1 \otimes \otimes^K \mathbb{C}_2)$ a potência tensorial simétrica ([11], secção 3).

Identificamos $\mathbb{D}_K$ com $\otimes^{n-K} \mathbb{C}_1 \otimes \otimes^K \mathbb{C}_2$ de modo que a potência tensorial simétrica $\hat{\otimes}(\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2)^n$ fique identificada com

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{K=0}^{n} \mathbb{D}_K \quad .$$

Se F_n estiver representada nas bases canônicas de $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^n$ (como foram sugeridas anteriormente), pela

$\vdots$

matriz $M(A) = \{u_{K\ell}(A) \mid 0 \leq K,\ell \leq n\}$, então $u_{K\ell}$ se comportaria como um homomorfismo de

$$\otimes^{n-\ell}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{\ell}\mathbb{C}_2 \quad \text{em} \quad \otimes^{n-K}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{K}\mathbb{C}_2 .$$

Sabemos por ([11], 2.2) que existe uma aplicação n-linear $\tau : \mathbb{C}_1^{n-\ell} \times \mathbb{C}_2 \to \otimes^{n-\ell}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{\ell}\mathbb{C}_2$, tal que se $\Psi_{K\ell} : \mathbb{C}_1^{n-\ell} \times \mathbb{C}_2^{\ell} \to \otimes^{n-K}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{K}\mathbb{C}_2$ é uma aplicação n-linear qualquer, então existirá uma única aplicação $u_{K\ell} : \otimes^{n-\ell}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{\ell}\mathbb{C}_2 \to \otimes^{n-K}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{K}\mathbb{C}_2$, tal que o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_1^{n-\ell} \times \mathbb{C}_2^{\ell} \arrow[rr, "\Psi_{K\ell}"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \otimes^{n-K}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{K}\mathbb{C}_2 \\
& \otimes^{n-\ell}\mathbb{C}_1 \otimes \otimes^{\ell}\mathbb{C}_2 \arrow[ur, "u_{K\ell}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (IV.2.1).$$

A forma geral de $u_{K\ell}$ que se pode obter do diagrama anterior, a partir de homomorfismos elementares a_{ij} de Ψ_1 , ou seja, $\alpha,\beta,-\overline{\beta},\overline{\alpha}$, é a seguinte:
se (K,ℓ) é um par de índices com $0 \leq K,\ell \leq n$, tal que $n-K-\ell \geq 0$ e $K-\ell \geq 0$, então a sua posição, no arranjo dos índices por filas e colunas, fica indicada no triângulo seguinte:

Neste caso $u_{K\ell}$ deve ser multiplicação pelo número complexo

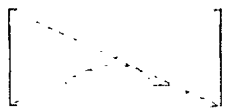
$$u_{K,\ell}\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \sum_{h=0}^{\ell} C_{K,\ell,h}\,\alpha^{n-K-\ell}\,(-\bar{\beta})^{K-\ell}(\alpha\bar{\alpha})^{\ell-h}(-\beta\bar{\beta})^{h},$$

para certas constantes $C_{K,\ell,h}$.

Para os outros três triângulos do arranjo de sub-índices a forma desta aplicação n-linear é como segue:

$$u_{K,\ell}\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \sum_{h=0}^{\ell} C_{K,\ell,h}\,\alpha^{n-K-\ell}\,\beta^{K-\ell}(\alpha\bar{\alpha})^{\ell-h}(-\beta\bar{\beta})^{h} \quad ;$$

$$u_{K,\ell}\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \sum_{h=0}^{\ell} C_{K,\ell,h}\,(\bar{\alpha})^{n-K-\ell}(\beta)^{K-\ell}(\alpha\bar{\alpha})^{\ell-h}(-\beta\bar{\beta})^{h};$$



$$u_{K,\ell}\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \sum_{h=0}^{\ell} C_{K,\ell,h}\,(\bar{\alpha})^{n-K-\ell}(-\bar{\beta})^{K-\ell}(\alpha\bar{\alpha})^{\ell-h}(-\beta\bar{\beta})^{h}.$$

Daí ficam induzidos, de acordo com IV.2.1, os homomorfismos elementares $u_{K,\ell}$ que darão lugar às entradas $u_{K,\ell}$ da matriz representativa do homomorfismo F_n.

IV.3- Teorema

A representação complexa irredutível ϕ_n de dimensão n+1 é determinada por um homomorfismo de grupos

$F_n : SU(2) \to SU(n+1)$, dado pela matriz

$$F_n(\alpha+\beta j) = F_n\left(\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\right) = \{u_{K,\ell} \mid 0 \leq K,\ell \leq n\}, \quad \text{onde}$$

os $u_{K,\ell}$ são determinados da seguinte forma:

seja $C_{K,\ell} = \binom{n}{K}^{1/2}\binom{n}{\ell}^{-1/2}$,

$r = n - K - \ell$, $s = K - \ell$; então para cada par (K,ℓ) para o qual $r,s \geq 0$, está bem definida a expressão

$$d_{K\ell} = C_{K\ell} \sum_{h=0}^{\ell} \binom{n-K}{h} \binom{K}{\ell-K} |\alpha|^{2(\ell-h)} \left(-|\beta|^2\right)^h .$$

Então

IV.3.1
$$u_{K\ell} = \alpha^r (-\bar{\beta})^s d_{K\ell} \quad , \quad u_{\ell K} = \alpha^r \beta^s d_{K\ell}$$
$$u_{n-\ell,n-K} = \bar{\alpha}^r (-\bar{\beta})^s d_{K\ell} \quad , \quad u_{n-K,n-\ell} = \bar{\alpha}^r \beta^s d_{K\ell} .$$

Prova:

$u_{K0} = \otimes^{n-K} \mathbb{C}_1 \otimes \otimes^K \mathbb{C}_2 \to \otimes^n \mathbb{C}_1$, então

$$u_{K0}(\alpha+\beta j) = C_{K00}\, \alpha^{n-K} (\bar{\beta})^K .$$

Como $\sum_{K=0}^{n} |u_{K0}|^2 = 1$, ou seja

$$|C_{000}\, \alpha^n \bar{\beta}^0|^2 + |C_{100}\, \alpha^{n-1} \bar{\beta}^1| + \ldots + |C_{n00}\, \alpha^0 \bar{\beta}^n| = 1 ,$$

temos que $C_{000} = C_{n00} = 1$,

e $(C_{K00})^2 = \dfrac{n!}{(n-K)!\,K!} = \dbinom{n}{K}$, ou $C_{K0} = \dbinom{n}{K}^{1/2}$

Sejam $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix}$ ε $SU(2)$,

$$\text{e} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a - \beta \bar{b} & \alpha b + \beta \bar{a} \\ -\bar{\beta} a - \bar{\alpha}\bar{b} & -\bar{\beta} b + \bar{\alpha}\bar{a} \end{vmatrix} .$$

Como F_n é um homomorfismo de grupos temos que

$$F_n(\varphi(\alpha+\beta j)\, \varphi(a+bj)) = F_n(\varphi((\alpha a - \beta\bar{b}) + (\alpha b + \beta\bar{a})j) =$$

$$= F_n(\varphi(\alpha + \beta j))\, F_n(\varphi(a + bj)) \text{ , isto é,}$$

$$u_{Kh}\,(\hat{\tau}\,((\alpha+\beta j)(a+bj))) = \sum_{\ell=0}^{n} u_{K\ell}(\tau\,(\alpha+\beta j))\; u_{\ell h}(\hat{\tau}\,(a+bj)),$$

onde K indica a linha e h a coluna.

Para $h=0$ temos:

$$u_{K0}(\hat{\tau}\,((\alpha a - \beta\bar{b}) + (\alpha b + \beta\bar{a})j)) = \sum_{\ell=0}^{n} u_{K\ell}\,\tau(\alpha+\beta j)\,u_{\ell 0}\,(\hat{\tau}\,(a+bj)) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} u_{K\ell}\,\hat{\tau}\,(\alpha+\beta j)\,\binom{n}{\ell}^{1/2} a^{n-\ell}\,\bar{b}^{\ell}.$$

Mas $u_{K0}(\hat{\tau}\,((\alpha a - \beta\bar{b}) + (\alpha b + \beta\bar{a})j)) =$

$$\binom{n}{K}^{1/2} (\alpha a - \beta\bar{b})^{n-K}\,(\bar{\beta} a + \bar{\alpha}\,\bar{b})^{K} \;.$$

Substituindo esta igualdade na antecedente temos:

$$\binom{n}{K}^{1/2}(\alpha a - \beta\bar{b})^{n-K}\,(\bar{\beta} a + \bar{\alpha}\,\bar{b})^{K} = \sum_{\ell=0}^{n} u_{K\ell}(\hat{\tau}\,(\alpha+\beta j))\,.$$

$$.\;\binom{n}{\ell}^{1/2} a^{n-\ell}\,\bar{b}^{\ell}\;.$$

Desenvolvendo os binômios, somatório e simplificando os termos, encontramos

$$u_{K\ell}(\hat{\tau}\,(\alpha+\beta j)) = \binom{n}{K}^{1/2}\binom{n}{\ell}^{-1/2} \alpha^{r}(-\bar{\beta})^{s}\;.$$

$$.\;\sum_{h=0}^{\ell} \binom{n-K}{h}\binom{K}{\ell-h} |\alpha|^{2(\ell-h)}\,(-|\beta|^2)^{h}.$$

Com $C_{K\ell} = \binom{n}{K}^{1/2}\binom{n}{\ell}^{-1/2}$, $r=n-K-\ell$, $s=K-\ell$

então para $r,s \geq 0$ fica bem definida a expressão

$$d_{K\ell} = C_{K\ell} \sum_{h=0}^{\ell} \binom{n-K}{h}\binom{K}{\ell-h} |\alpha|^{2(\ell-h)}\,(-|\beta|^2)^{h}\;.$$

Além disso

$$u_{K\ell} = \alpha^{r}(-\bar{\beta})^{s}\,d_{K\ell} \quad,\quad u_{\ell K} = \alpha^{r}\,\beta^{s}\,d_{K\ell}\;,$$

$$u_{n-K,n-\ell} = \bar{\alpha}^{r}\,\beta^{s}\,d_{K\ell} \quad,\quad u_{n-\ell,n-K} = \bar{\alpha}^{r}(-\bar{\beta})^{s}\,d_{K\ell}\;,$$

o que determina completamente $F_n : SU(2) \to SU(n+1)$. Compondo esta com a representação ϕ_n de $SU(n+1)$ em $\mathrm{Aut}\ \mathbb{C}^{n+1}$, de acordo com (IV.2.1) obtemos a representação ϕ_n procurada.

IV.4- Exemplos

Vamos calcular os elementos $u_{K\ell}$, em que $r,s \geq 0$ e os demais serão calculados pelas três últimas igualdades de IV.3.1.

Vejamos os elementos detalhados de

$F_2 : SU(2) \to SU(3)$

$$F_2(\alpha+\beta j) = F_2 \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \{u_{K\ell} \mid 0 \leq K,\ell \leq n\} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Somente os elementos da região hachuriada possuem $r,s \geq 0$ (triângulo I). Substituindo-se os valores correspondentes dos elementos nas fórmulas do teorema IV.3, obtém-se:

$$u_{00} \begin{cases} K=\ell=0 \quad , \quad n=2 \quad , \quad r=2 \quad , \quad s=0 \\ C_{00}=\binom{2}{0}^{1/2} \binom{2}{0}^{-1/2} = 1 \\ d_{00}=C_{00}\binom{2}{0}\binom{0}{0}^{2(0)}(-|\beta|^2)^0 = 1 \\ u_{00}=\alpha^2(-\overline{\beta})^0 d_{00}=\alpha^2 \end{cases}$$

$$u_{10} \begin{cases} K=1 \quad , \quad \ell=0 \quad , \quad n=2 \quad , \quad r=1 \quad , \quad s=1. \\ C_{10}=\sqrt{2} \quad , \quad d_{10}=\sqrt{2} \\ u_{10} = -\sqrt{2}\ \alpha\ \overline{\beta} \end{cases}$$

$$u_{11} \begin{cases} K=1 \quad , \quad \ell=1 \quad , \quad n=2 \quad , \quad r=s=0 \\ C_{11}=1 \quad , \quad d_{11} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\ u_{11} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{cases}$$

$$u_{20}\begin{cases} K=2\ ,\quad \ell=0\ ,\quad n=2\ ,\quad r=0\ ,\quad s=2 \\ C_{20}=1\ ,\quad d_{20}=1 \\ u_{20}=\bar{\beta}^2 \end{cases}$$

$$u_{01}\ \{u_{K\ell}=u_{10}\ ,\quad u_{\ell k}=u_{01}=\alpha^r\beta^s \quad d_{K\ell}=\sqrt{2}\ \alpha\ \beta$$

$$u_{02}\ \{u_{K\ell}=u_{20}\ ,\quad u_{\ell k}=u_{02}=\alpha^r\ \beta^s \quad d_{K\ell}=\beta^2$$

$$u_{22}\begin{cases} u_{K\ell}=u_{00}\ ,\quad u_{22}=u_{(n-\ell)(n-K)}=\bar{\alpha}^r(-\bar{\beta})^s \quad d_{K\ell}=\bar{\alpha}^2 \\ \text{ou} \\ u_{22}=u_{(n-K)(n-\ell)}=\bar{\alpha}^r\ \beta^s \quad d_{K\ell}=\bar{\alpha}^2 \end{cases}.$$

$$u_{12}\ \{u_{K\ell}=u_{10}\ ,\quad u_{12}=u_{(n-K)(n-\ell)}=\bar{\alpha}^r\ \beta^s \quad d_{K\ell}=\bar{\alpha}\ \beta\ \sqrt{2}$$

$$u_{21}\ \{u_{K\ell}=u_{10}\ ,\quad u_{21}=u_{(n-\ell)(n-K)}=\bar{\alpha}^r(-\bar{\beta})^s \quad d_{K\ell}=\sqrt{2}\ \bar{\alpha}(-\bar{\beta})$$

$$\text{Portanto } F_2(\alpha+\beta j) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\ \alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\ \alpha\beta & |\alpha|^2-|\beta|^2 & \sqrt{2}\ \bar{\alpha}\ \beta \\ \bar{\beta}^2 & -\sqrt{2}\ \bar{\alpha}\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix}$$

De forma análoga podemos calcular F_3; $F_4, \ldots , F_n, \ldots$

Vejamos os elementos de F_3 e F_4 (matrizes completas) e a seguir F_5 e F_6 (triângulo I).

$$F_3(\alpha+\beta j) = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\alpha^2\beta & \sqrt{3}\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\sqrt{3}\alpha^2\bar{\beta} & \alpha(|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \beta(2|\alpha|^2-|\beta|^2) & \sqrt{3}\ \bar{\alpha}\beta^2 \\ \sqrt{3}\alpha\bar{\beta}^2 & \bar{\beta}(2|\alpha|^2-|\beta|^2) & \bar{\alpha}(|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \sqrt{3}\ \bar{\alpha}^2\beta \\ \bar{\beta}^3 & \sqrt{3}\ \bar{\alpha}\ \bar{\beta}^2 & -\sqrt{3}\ \bar{\alpha}^2\bar{\beta} & \bar{\alpha}^3 \end{bmatrix}$$

$$F_4(\alpha+\beta j)=\begin{bmatrix}
\alpha^4 & \sqrt{4}\alpha^3\beta & \sqrt{6}\alpha^2\beta^2 & \sqrt{4}\alpha\beta^3 & \beta^4 \\
-\sqrt{4}\alpha^3\bar\beta & \alpha^2(|\alpha|^2-3|\beta|^2) & \sqrt{3/2}\,\alpha\beta(2|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \beta^2(3|\alpha|^2-|\beta|^2) & \sqrt{4}\,\bar\alpha\beta^3 \\
\sqrt{6}\alpha\bar\beta^2 & -\sqrt{3/2}\,\alpha\bar\beta(2|\alpha|^2-2|\beta|^2) & (|\alpha|^4-4|\alpha|^2|\beta|^2+|\beta|^4) & \sqrt{3/2}\,\bar\alpha\beta(2|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \sqrt{6}\,\bar\alpha^2\beta^2 \\
-\sqrt{4}\;\bar\beta^3 & \bar\beta^2(3|\alpha|^2-|\beta|^2) & -\sqrt{3/2}\;\bar\alpha\;\bar\beta(2|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \bar\alpha^2(|\alpha|^2-3|\beta|^2) & \sqrt{4}\;\bar\alpha^3\beta \\
\bar\beta^4 & -\sqrt{4}\;\bar\alpha\;\bar\beta^3 & \sqrt{6}\;\bar\alpha^2\bar\beta^2 & -\sqrt{4}\;\bar\alpha^3\bar\beta & \bar\alpha^4
\end{bmatrix}$$

$$F_5(\alpha+\beta j)=\begin{bmatrix}
\alpha^5 & & \\
-\sqrt{5}\alpha^4\bar\beta & \alpha^3(|\alpha|^2-4|\beta|^2) & \\
\sqrt{10}\alpha^3\bar\beta^2 & -\sqrt{2}\alpha^2\bar\beta(2|\alpha|^2-3|\beta|^2) & \alpha(|\alpha|^4-6|\alpha|^2|\beta|^2+3|\beta|^4) \\
-\sqrt{10}\alpha^2\bar\beta^3 & \sqrt{2}\alpha\bar\beta^2(3|\alpha|^2-2|\beta|^2) & -\bar\beta(3|\alpha|^4-6|\alpha|^2|\beta|^2+|\beta|^4) \\
\sqrt{5}\alpha\bar\beta^4 & \bar\beta^3(4|\alpha|^2-|\beta|^2) & \\
\bar\beta^5 & &
\end{bmatrix}$$

$$F_6(\alpha+\beta j)=\begin{bmatrix}
\alpha^6 & & & \\
-\sqrt{6}\alpha^5\bar\beta & \alpha^4(|\alpha|^2-5|\beta|^2) & & \\
\sqrt{15}\alpha^4\bar\beta^2 & -\sqrt{5/2}\,\alpha^3\bar\beta(2|\alpha|^2-4|\beta|^2) & \alpha^2(|\alpha|^4-8|\alpha|^2|\beta|^2+6|\beta|^4) & \\
-\sqrt{20}\alpha^3\bar\beta^3 & \sqrt{10/3}\,\alpha^2\bar\beta^2(3|\alpha|^2-3|\beta|^2) & -\sqrt{4/3}\,\alpha\bar\beta(3|\alpha|^4-9|\alpha|^2|\beta|^2+3|\beta|^4) & (|\alpha|^6-9|\alpha|^4|\beta|^2+9|\alpha|^2|\beta|^4-|\beta|^6) \\
\sqrt{15}\alpha^2\bar\beta^4 & -\sqrt{5/2}\,\alpha\bar\beta^3(4|\alpha|^2-2|\beta|^2) & \bar\beta^2(6|\alpha|^4-8|\alpha|^2|\beta|^2+|\beta|^4) & \\
-\sqrt{6}\alpha\bar\beta^5 & \bar\beta^4(5|\alpha|^2-|\beta|^2) & & \\
\bar\beta^6 & & &
\end{bmatrix}$$

As matrizes representativas de F_2, F_4 e F_6, assim como de todos os F_{2n}, juntamente com III.3, produzem homomorfismos de SO(3) em Aut($\mathbb{C}^{(2n+1)}$).

Estes homomorfismos dão as representações complexas irredutíveis de SO(3).

V- Conclusão: Equivalência de III.6.4.1 e IV.3.1

Vamos mostrar que as duas formas (III.6.4.1) e (IV.3.1), para obtenção das representações irredutíveis de SU(2), são equivalentes.

De III.6.4.1 temos:

$$T^{u}_{nm}(A) = \left[\frac{(u+m)!\,(u-n)!}{(u+n)!\,(u-m)!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^{u+n}\,\overline{\alpha}^{u-m}\,\overline{\beta}^{m-n}}{\Gamma\,(m-n+1)} \;.$$

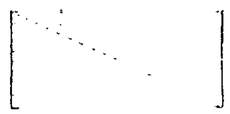
$$\cdot\; {}_2F_1(-u-n, m-u; m-n+1; -|\beta/\alpha|^2) \quad ,$$

onde $u \geq m, n \geq -u$, e

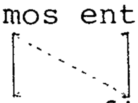
$${}_2F_1(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{1c}\,x + \frac{a(a+1)\;b(b+1)}{1c(c+1)}\,x^2 + \ldots,$$

para $c \neq 0, -1, -2, \ldots$

$T^{u}_{nm}(A)$ estará bem determinada no triângulo hachuriado da matriz que segue



De IV.3.1 obteremos toda a matriz através dos elementos do triângulo hachuriado

Veremos então a equivalência para o triângulo em que $r,s \geq 0$ , com $r=n-K-\ell$, $s=K-\ell$, onde n é o índice do homomorfismo e K,ℓ representam os elementos da linha e coluna, respectivamente.

Vamos desenvolver IV.3.1 utilizando

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{como elemento genérico de SU(2).}$$

$$u_{K\ell} = \binom{n}{K}^{1/2} \binom{n}{\ell}^{-1/2} \alpha^{n-K-\ell}\,\overline{\beta}^{K-\ell} \sum_{h=0}^{\ell} \binom{n-K}{h} \binom{K}{\ell-h} |\alpha|^{2(\ell-h)} (-|\beta|^2)^h =$$

$$= \left[\frac{n!}{K!\,(n-K)!}\;\frac{\ell!\,(n-\ell)!}{n!}\right]^{1/2} \alpha^{n-K}\;\overline{\beta}^{K-\ell} \left[\binom{n-K}{0} \binom{K}{\ell} |\alpha|^{2\ell} + \right.$$

$$+\binom{n-K}{1}\binom{K}{\ell-1}|\alpha|^{2(\ell-1)}(-|\beta|^2)^1+\binom{n-K}{2}\binom{K}{\ell-2}|\alpha|^{2(\ell-2)}(-|\beta|^2)^2+\dots]$$

$$=\left[\frac{\ell!(n-\ell)!}{K!(n-K)!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}\,\bar{\beta}^{K-\ell}\,[\frac{K!\,|\alpha|^{2\ell}}{\ell!(K-\ell)!}+(n-K)\frac{K!}{(\ell-1)!(K-\ell+1)!}$$

$$|\alpha|^{2(\ell-1)}(-|\beta|^2)^1+\frac{(n-K)(n-K-1)}{2}\frac{K!}{(\ell-2)!(K-\ell-2)!}\cdot$$

$$\cdot\ |\alpha|^{2(\ell-2)}(-|\beta|^2)^2+\dots]=\left[\frac{\ell!(n-\ell)!}{K!(n-K)!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}\bar{\beta}^{K-\ell}\ \cdot$$

$$\cdot\ \frac{K!}{\ell!}\ [\frac{|\alpha|^{2\ell}}{(K-\ell)!}+\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ |\alpha|^{2(\ell-1)}(-|\beta|^2)^1+$$

$$+\frac{(n-K)(n-K-1)\ \ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ |\alpha|^{2(\ell-2)}(-|\beta|^2)^2+\dots]=$$

$$=\left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}$$

$$\bar{\beta}^{K-\ell}[\frac{|\alpha|^{2\ell}}{(K-\ell)!}-\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ |\alpha|^{2(\ell-1)}|\beta|^2+\frac{(n-K)(n-K-1)\ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ \cdot$$

$$\cdot\ |\alpha|^{2(\ell-2)}|\beta|^4-\dots]=\left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}\bar{\beta}^{K-\ell}\ \cdot$$

$$\cdot\ [\frac{|\alpha|^{2\ell}}{(K-\ell)!}-\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ |\alpha|^{2\ell}|\alpha|^{-2}|\beta|^2+\frac{(n-K)(n-K-1)\ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ \cdot$$

$$\cdot\ |\alpha|^{2\ell}|\alpha|^{-4}|\beta|^4-\dots]=\left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}\ \bar{\beta}^{K-\ell}$$

$$[\frac{\alpha^{\ell}\ \bar{\alpha}^{\ell}}{(K-\ell)!}-\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ \alpha^{\ell}\bar{\alpha}^{\ell}|\beta/\alpha|^2+\frac{(n-K)(n-K-1)\ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ \cdot$$

$$\alpha^{\ell}\bar{\alpha}^{\ell}|\beta/\alpha|^4-\dots]=\left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K-\ell}\alpha^{\ell}\bar{\alpha}^{\ell}\ \bar{\beta}^{K-\ell}\ \cdot$$

$$\cdot\ [\frac{1}{(K-\ell)!}-\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ |\beta/\alpha|^2+\frac{(n-K)(n-k-1)\ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ \cdot$$

$$\cdot\ |\beta/\alpha|^4-\dots]=\left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2}\alpha^{n-K}\bar{\alpha}^{\ell}\bar{\beta}^{K-\ell}\ \cdot$$

V.1 $$\cdot\ [\frac{1}{(K-\ell)!}-\frac{(n-K)\ell}{(K-\ell+1)!}\ |\beta/\alpha|^2+\frac{(n-K)(n-K+1)\ell(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}\ |\beta/\alpha|^4-\dots]$$

Vamos desenvolver III.6.4.1, identificando

u com n/2

n com (n/2)- K ,

m com (n/2)- ℓ , onde u,n,m do lado esquerdo são variáveis de III.6.4.1 , enquanto que n,K,ℓ do lado direito são variáveis de IV.3.1.

Utilizaremos o mesmo elemento genérico de SU(2), ou seja, $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{bmatrix}$. Para adequação de IV.3.1 à III.6.4.1 é conveniente usar esta matriz em vez da matriz $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{bmatrix}$ usada em V.

$$T^{u}_{nm}(A) = T^{n/2}_{(\frac{n}{2}-K)(\frac{n}{2}-\ell)}(A) = \left[\frac{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-\ell)!\,(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+K)!}{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-K)!\,(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+\ell)!} \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\alpha^{n-K}\,\bar\alpha^{\ell}\,\bar\beta^{-\ell+K}}{\Gamma(\frac{n}{2}-\ell-\frac{n}{2}+K+1)} \cdot {}_2F_1(-n+K,-\ell;-\ell+K+1;-|\beta/\alpha|^2) =$$

$$= \left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^{n-K}\,\bar\alpha^{\ell}\,\bar\beta^{-\ell+K}}{\Gamma(K-\ell+1)} \left[1+\frac{(-n+K)(-\ell)}{1(-\ell+K+1)}\cdot -|\beta/\alpha|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(-n+K)(-n+K+1)(-\ell)(-\ell+1)}{1(-\ell+K+1)(-\ell+K+2)}|\beta/\alpha|^4 + \ldots\right] =$$

$$= \left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^{n-K}\,\bar\alpha^{\ell}\,\bar\beta^{-\ell+K}}{(K-\ell)!}$$

$$\left[1 - \frac{(n-K)(\ell)}{1(K-\ell+1)}|\beta/\alpha|^2 + \frac{(n-K)(n-K-1)\ell(\ell-1)}{1(K-\ell+1)(K-\ell+2)}|\beta/\alpha|^4 - \ldots\right] =$$

$$= \left[\frac{(n-\ell)!K!}{(n-K)!\ell!}\right]^{1/2} \alpha^{n-K}\,\bar\alpha^{\ell}\,\bar\beta^{K-\ell}\left[\frac{1}{(K-\ell)!} - \frac{(n-K)(\ell)}{(K-\ell+1)!}|\beta/\alpha|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-K-1)(\ell)(\ell-1)}{(K-\ell+2)!}|\beta/\alpha|^4 - \ldots\right] \qquad \text{V.2}$$

Comparando V.1 com V.2 verificamos a equivalência, conforme pretendíamos mostrar.

V.3- Exemplo

Mostraremos o caso das matrizes 3 x 3 , ou seja,

$$F_2 : SU(2) \rightarrow SU(3)$$

Seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$, $A \in SU(2)$.

Aplicando III.6.4.1 encontraremos:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{10} & T_{1-1} \\ T_{01} & T_{00} & T_{0-1} \\ T_{-11} & T_{-10} & T_{-1-1} \end{bmatrix}$$

$$T_{11}(A) = \left[\frac{2!}{2!}\ \frac{0!}{0!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^2\ \overline{\alpha}^0\ \overline{\beta}^0}{\Gamma(1)}\ {}_2F_1(-2,0;1;-|\beta/\alpha|^2) = \alpha^2.$$

$$T_{00}(A) = \left[\frac{1!}{1!}\ \frac{1!}{1!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^1\ \overline{\alpha}^1\ \overline{\beta}^0}{\Gamma(1)}\ {}_2F_1(-1,-1;1;-|\beta/\alpha|^2) =$$

$$= \alpha\overline{\alpha}(1 + \frac{(-1)(-1)}{1.1} \cdot -|\beta/\alpha|^2 = |\alpha|^2 - |\beta|^2 .$$

$$T^1_{-1-1}(A) = \left[\frac{0!}{0!}\ \frac{2!}{2!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^0\ \overline{\alpha}^2\ \overline{\beta}^0}{\Gamma(1)}\ {}_2F_1(0,-2;1;-|\beta/\alpha|^2) = \overline{\alpha}^2.$$

$$T^1_{01}(A) = \left[\frac{2!}{1!}\ \frac{1!}{0!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^1\ \overline{\alpha}^0\ \overline{\beta}^1}{\Gamma(2)}\ {}_2F_1(-1,0;2;-|\beta/\alpha|^2) = \sqrt{2}\ \alpha\ \overline{\beta}.$$

$$T^1_{-11}(A) = \left[\frac{2!}{0!}\ \frac{2!}{0!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^0\ \overline{\alpha}^0\ \overline{\beta}^2}{\Gamma(3)}\ {}_2F_1(0,0;3;-|\beta/\alpha|^2) = \overline{\beta}^2 .$$

$$T^1_{-10}(A) = \left[\frac{1!}{0!}\ \frac{2!}{1!}\right]^{1/2} \frac{\alpha^0\ \overline{\alpha}^1\ \overline{\beta}^1}{\Gamma(2)}\ {}_2F_1(0,-1;2;-|\beta/\alpha|^2) = \sqrt{2}\ \overline{\alpha}\ \overline{\beta}.$$

Obtivemos a matriz $\begin{bmatrix} \alpha^2 & * & * \\ \sqrt{2}\alpha\overline{\beta} & |\alpha|^2-|\beta|^2 & * \\ \overline{\beta}^2 & \sqrt{2}\ \overline{\alpha}\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}^2 \end{bmatrix} = B$

Como $B \in SU(3)$, $B\ \overline{B}^t = E_3$ e $\det B = 1$.

Mediante alguns cálculos determina-se a parte superior de B.

Se aplicarmos o teorema (IV.3) determinamos:

$$F_2(\alpha-\beta j)=F_2\left(\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha^2 & -\sqrt{2}\,\alpha\beta & \beta^2\\ \sqrt{2}\,\alpha\,\overline{\beta} & |\alpha|^2-|\beta|^2 & -\sqrt{2}\,\overline{\alpha}\beta\\ \overline{\beta}^2 & \sqrt{2}\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta} & \overline{\alpha}^2\end{bmatrix}= B.$$

Bibliografia

[1] MILLER, Willard Jr. Symmetry groups and their aplications. New York, Academic Press, 1972.

[2] BRICKELL, F. and CLARK, R. S. Differentiable manifolds. An introduction. London, Van Mostrand Reinhold Company, 1970.

[3] MONTOGOMERY, D. and ZIPPIN, L. Topological transformation groups. New York, Interscience Publishers, 1955.

[4] BREDON, Glen E. Introduction to compact transformation groups. New York, Academic Press,1972.

[5] GREENBERG, Marvin J. Lectures on algebraic topology. London, Amsterdam, Don Mills, Ontário, Sydney, Tokyo, Advanced Book Program, 1967.

[6] HERSTEIN, I. N. Tópicos de álgebra. USP, Editora Polígono, 1970.

[7] MONTEIRO, Jacy. Elementos de álgebra. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1974.

[8] CHEVALLEY, Claude. Theory of Lie groups. United States of America, Princeton University Press, 1946.

[9] CARTAN, Henri. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. Paris, Éditeurs des sciences et des arts,1963.

[10] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Equações diferenciais e funções especiais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1963.

[11] MICALI, Artibano y VILLAMAYOR, Orlando E. Estructuras algebraicas IV (algebra multilineal). Washington, D. C., The General Secretariat of the Organization of American States, 1976.

[12] ADAMS, J. Frank. Lectures on Lie groups. New York, Amsterdan, University of Manchester, 1969.