Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

Especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

William G. Whitley

Prof. WILLIAM GLENN WHITLEY, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora:

Walter de Bona Castelan

Prof. Dr. WALTER DE BONA CASTELAN

Orientador

Prof. Dr. PLÁCIDO ZOEGA TÁBOAS

Prof. Dr. TEÓFILO ABUABARA SAAD

CONVERGÊNCIA DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS PERTURBADAS

JOÃO CARLOS SELL DUARTE

Junho - 1979

A minha esposa e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Walter de Bona Castelan, Orientador deste trabalho, pela segurança, dedicação, incentivo, bem como pelos caminhos novos que nos mostrou, nossos agradecimentos.

Ao Professor Dr. Teófilo Abuabara Saad, pelas sugestões formuladas e pela boa vontade que sempre teve em discutir conosco assuntos relacionados com este trabalho, nossos agradecimentos.

Estendo meus agradecimentos à Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Neste trabalho estudamos as propriedades de convergência das soluções de equações diferenciais perturbadas não lineares, através da fórmula integral de Alekseev-Shanholt.

Os resultados obtidos são generalizações naturais de resultados anteriores para equações diferenciais ordinárias.

RESUME

In this work we study, using the integral formula of Alekseev-Shanholt, the convergence properties of solutions of perturbed nonlinear functional differential equations.

The results obtained are natural generalizations of previous results for ordinary differential equations.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{y} = f(t,y) + g(t,y) \qquad (*)$$

perturbado do sistema não linear

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (**)$$

onde f e g são funções contínuas de $\mathbb{R}^+ \times D$ em $\mathbb{R}^n$ e D é uma região do $\mathbb{R}^n$.

Diversos autores tem usado a fórmula de variação das constantes para estudar estabilidade, equivalência assintótica e convergência de soluções do sistema acima.

Marlin e Struble, em [10], estudam relações assintóticas entre as soluções de (*) e (**).

Brauer, em [1], [2] e [3], estuda a estabilidade e o comportamento assintótico entre as soluções dos sistemas (*) e (**).

Molfetta, em [11], mostrou a estabilidade uniforme das soluções do sistema perturbado (*) de um sistema não linear (**).

Hallam, em [8], estuda a convergência das soluções do sistema (*) perturbado do sistema não linear (**).

Consideremos o caso de sistemas de equações diferenciais funcionais com retardamento,

$$\dot{y}(t) = f(t,y_t) + g(t,y_t) \qquad (***)$$

perturbado do sistema não linear

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \qquad (****)$$

onde $f,g\colon \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$ são contínuas.

Botura, em [4], generaliza os resultados obtidos por Molfetta [11] para os sistemas (***) e (****)

Monteiro, em [12], generaliza os resultados obtidos por Brauer em [1], [2] e [3] para os sistemas (***) e (****).

Hermínio, em [5], generaliza o de Marlin e Struble, para sistemas de equações diferenciais com retardamento perturbado de um sistema de equações diferenciais não linear.

O objetivo de nosso trabalho é generalizar os resultados obtidos por Thomas G. Hallam [8] para os sistemas de equações diferenciais funcionais com retardamento (***) e (****).

Para alcançarmos esse objetivo, utilizamos a fórmula integral de Alekseev-Shanholt, que é uma generalização da fórmula de variação das constantes para equações diferenciais funcionais não lineares retardadas.

No capítulo I, damos alguns resultados básicos da teoria das equações diferenciais funcionais com retardamento, os quais serão utilizados no desenvolvimento de nosso trabalho, que estão contidos em [7] e [13].

No capítulo II, generalizamos os resultados obtidos por Thomas G. Hallam [6], para equações diferenciais funcionais com retardamento.

CAPÍTULO I

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

§ 1 - Resultados básicos

Neste capítulo, daremos alguns resultados básicos da teoria de equações diferenciais com retardamento, que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

Sejam r e ρ números reais com $r \geq 0$, $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial n - dimensional com norma $|\cdot|$ e $C = C([-r,0], \mathbb{R}^n)$, o espaço de Banach das funções contínuas definidas no intervalo $[-r,0]$ e tomando valores no $\mathbb{R}^n$, munido da topologia da convergência uniforme. Denotaremos a norma de um elemento $\phi \in C$, por:

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$$

Seja $a \leq b$, e x uma função em $C([a-r,b], \mathbb{R}^n)$; então para cada $t \in [a,b]$, denotamos por x_t o elemento do espaço C definido por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \ \forall\theta \ , \ -r \leq \theta \leq 0$$

Seja $\Gamma = (\rho \ , \infty) \times \Lambda$, onde Λ é um aberto de C, e $f: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ uma dada função.

Uma equação diferencial funcional com retardamento é uma relação da forma

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \tag{1}$$

onde $\dot{x}(t)$ indica a derivada à direita da função $x(u)$ no ponto $u=t$.

Se $r = o$, então (1) representa uma equação diferencial ordinária.

Dado $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$, dizemos que uma função x é uma solução de (1) passando por (t_o, ϕ) se e somente se, existe um número real A, $o < A \leq \infty$ tal que:

(i) $x \varepsilon C([t_o-r, t_o+A), \mathbb{R}^n)$

(ii) $x_{t_o} = \phi$, isto é, $x_{t_o}(\theta) = \phi(\theta)$ para $-r \leq \theta \leq o$.

(iii) $\dot{x}(t)$ satisfaz a equação (1) para todo t em $[t_o, t_o+A)$.

Denotemos por $x(t_o,\phi)$ qualquer solução de (1) passando por $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$ e por $x_t(t_o,\phi)$ os correspondentes elementos de C.

Seja $f(t,\phi)$ contínua em Γ; então para todo $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$, existe ao menos uma solução de (1) passando por (t_o,ϕ).

Ainda mais, se $f(t,\phi)$ é localmente Lipschitziana em relação a ϕ em cada subconjunto compacto de Γ, então para todo $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$, existe uma única solução $x(t_o,\phi)$ de (1) passando por (t_o,ϕ) e a solução $x(t_o,\phi)(t)$ é contínua em (t,t_o,ϕ) no seu domínio de definição. Para uma prova de existência, unicidade e continuidade em relação aos dados ini ciais, da solução, ver por exemplo [7].

Os fatos básicos da teoria geral de equações diferenciais com retardamento, acima considerados, podem ser desenvolvidos com adaptações óbvias tomando-se condições iniciais contínuas por partes e a topologia do sup essencial no espaço de fase.

Consideremos alguns exemplos de equações diferenciais funcionais:

(I) A equação $\dot{x}(t) = g(t,x(t-r))$, com $r > o$ fixo, é uma equação diferencial funcional. De fato, basta tomar $f(t, \Psi) = g(t, \Psi(-r))$ com $\Psi \in C([-r,o], R^n)$, e assim temos $x(t)=f(t,x_t)$.

(II) A equação $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + D(t)\, g(t,x_t)$ onde $A(t)$ e $D(t)$ são matrizes nXn cujas componentes são funções de t, é uma equação diferencial com retardamento. De fato, tomando $t_o = o$ e $f(t,\Psi) = A(t)\,\Psi(o) + D(t)\, g(t,\Psi)$ com $\Psi \in C((t-r,o]), R^n)$ obtemos $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$.

(III) A equação $\dot{x}(t) = g(t,x(t), x(t-t_1) \ldots, x(t-t_k))$ onde $o \leq t_i \leq r < \infty$, $i = 1,2, \ldots\ldots k$, é uma equação diferencial com retardamento. De fato, se tomarmos:
$f(t,\Psi) = g(t,\Psi(o), \Psi(-t_1),\ldots\ldots,\Psi(-t_k))$ com $\Psi \in C([-r,o], R^n)$
obtemos $x(t) = f(t,x_t)$.

<u>LEMA 1 - 1 :</u> Seja $x \in C([t_o-r,t_o+A], R^n)$. Então x_t é contínua em t para todo $t \in [t_o, t_o + A]$.

Prova: Sendo x contínua sobre $[t_o-r,t_o+A]$, então x é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > o$, existe um $\delta=\delta(\varepsilon)>o$ tal que $|t-\sigma|< \delta$ implica que

$$| x(t) - x(\sigma) | < \varepsilon$$

Dessa maneira, para $t,\sigma \in [t_o,t_o+A]$, com $|t-\sigma|<\delta$, resulta que $|x(t+\theta)-x(\sigma+\theta)| < \varepsilon$ para todo $\theta \in [-r,o]$.

Em consequência x_t é contínua para $t\varepsilon[t_o,t_o+A]$.

LEMA I-2: Sejam $(t_o,\phi)\varepsilon \Gamma$, e $f:\Gamma \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então, mostrar que a equação (1) tem uma solução passando por (t_o,ϕ) é equivalente a mostrar que equação integral

$$x(t) = \phi(o) + \int_{t_o}^{t} f(s,x_s)ds, t\geq t_o$$

$$x_{t_o} = \phi$$

tem uma solução.

Prova: Usando o Lema I-1, a prova deste Lema é imediata.

Denotamos por E o espaço dos operadores lineares contínuos de C em $\mathbb{R}^n$. Seja $A(\cdot):(\rho , \infty) \to E$ contínua. Então, resulta que:

(i) $\| A(t)\|$ é uma função contínua de (ρ , ∞) em $\mathbb{R}$

(ii) $|A(t)\phi| \leq \| A(t)\| \; \|\phi\| \;\; \forall(t,\phi)\varepsilon\Gamma$.

Em consequência segue que, para qualquer $(t_o,\phi)\varepsilon\Gamma$, a equação diferencial funcional linear

$$\dot{y}(t) = A(t)y_t \tag{2}$$

tem uma única solução $y(t_o,\phi)$ definida e contínua em $[t_o-r,\infty)$, [7].

Também, para todo $t\geq t_o$, $t_o \in (\rho, \infty)$, a aplicação

$$y(t_o,\cdot)(t) : C \to \mathbb{R}^n$$

é um operador linear contínuo, [7].

Desta maneira, podemos associar à equação (2) uma família de operadores lineares contínuos

$$T(t,t_o) : C\to C, \quad t\geq t_o > \rho, \quad \phi\in C$$

definida por:

$$T(t,t_o)\phi = y_t(t_o,\phi) \tag{3}$$

A família de operadores $T(t,t_o)$ tem as seguintes propriedades, [7]:

(a) A família $\{T(t,t_o)\,|\,t\geq t_o\}$ é um semi-grupo de transformações lineares, isto é,

$$T(t+s,t_o) = T(t,t_o).T(s,t_o), \quad \rho < t_o\leq t<\infty, \quad s \geq t_o$$

(b) O semi-grupo $\{T(t,t_o)\,|\,t\geq t_o\}$ é fortemente contínuo para $\rho < t_o \leq t < \infty$, isto é,

$$\lim_{s\to t} \| T(t,t_o)\phi - T(s,t_o)\phi \| = o$$

$$\forall\, t,s \geq t_o, \quad \forall\, \phi \in C$$

(c) $T(t,t) = I$, onde I é o operador identidade.

Seja $\psi: [-r,o] \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua por par tes. Então podemos definir uma solução da equação linear (2) passando através de (t_o,ψ)

Em consequência, dada a função matricial

$$Y_o:\theta \to Y_o(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } -r \leq \theta < o \\ I & \text{se } \theta = o \end{cases} \tag{4}$$

o operador $T(t,t_o)$ pode ser definido sobre as colunas de Y_o.

Consideremos a equação diferencial funcional

$$\dot{z}(t) = A(t)z_t + g(t,z_t) \tag{5}$$

onde $g:\Gamma \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua.

Uma função $z(t)$ é solução da equação (5) passando por (t_o,ϕ), $(t_o,\phi) \in \Gamma$, se e somente se, $z(t)$ satifaz a equação integral

$$z_t = T(t,t_o)\phi + \int_{t_o}^{t} T(t,s)Y_o g(s,z_s)ds, \forall t \geq t_o \tag{6}$$

A equação (6) é uma equação integral no espaço $\mathbb{R}^n$, e, deve ser interpretada como

$$z_t(\theta) = [T(t,t_o)\phi](\theta) + \int_{t_o}^{t} [T(t,s)Y_o](\theta)\ g(s,z_s)ds$$

para $t \geq t_o$, $-r \leq \theta \leq o$ [7].

§ 2 - Fórmula Integral de Alekseev-Shanholt

É possível mostrar que existe uma relação entre as soluções da equação não perturbada

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \tag{1}$$

e da equação perturbada

$$\dot{y}(t) = f(t,y_t) + g(t,y_t) \tag{7}$$

Vamos supor que:

(i) $f,g\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas

(ii) $f(t,\phi)$ tem derivada de Fréchet em relação a ϕ, $\frac{\partial f}{\partial \phi}(t,\phi)$, contínua em Γ.

Observamos que em geral as soluções de (7) não são únicas. Denotamos por $y(t_o,\phi)$ qualquer solução de (7) passando por $(t_o,\phi) \in \Gamma$.

Sendo $\frac{\partial}{\partial \phi} f(t,\phi)$ contínua em Γ, então $f(t,\phi)$ é localmente Lipschitziana em ϕ em cada subconjunto compacto de Γ. Em consequência, as soluções da equação (1), não somente existem, mas são únicas e contínuas em seus três argumentos, [7].

Para cada $(t_o,\phi) \in \Gamma$, denotaremos por $J=J(t_o,\phi)$ o intervalo maximal de existência da solução $x(t_o,\phi)$.

A cada solução $x(t_o,\phi)$ da equação (1) associemos a seguinte equação diferencial funcional linear:

$$\dot{z}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial \phi}(t,x_t(t_o,\phi))\right] z_t\,, \quad t \in J \tag{8}$$

A equação (3) é denominada equação Variacional Linear da equação (1) em relação à solução $x(t_o,\phi)$.

Daqui por diante, denotaremos por $T(t,t_o:\phi)$, $t \geq t_o$, a família de operadores lineares associados à equação (3).

Se $\frac{\partial f}{\partial \phi}(t,\phi)$ é contínua em Γ, então a família

$$\{T(t,t_o:\phi) \mid t \geq t_o\}$$

satisfaz a seguinte propriedade de continuidade: para cada $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$, para cada $A > o$ escolhido de modo que $[t_o,t_o+A] \subset J$, e para cada $\varepsilon > o$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon,t_o,\phi,A) > o$ tal que para todo $\psi \varepsilon \Lambda$, $\| \phi - \psi \| < \delta$ implica em que

$$\| T(t,t_o:\phi) - T(t,t_o:\psi) \| < \varepsilon$$

uniformemente em t, para $t \varepsilon [t_o,t_o+A]$, [13]

<u>LEMA I-3</u>: Seja Λ um aberto de C e consideremos o conjunto:

$\Lambda_p = \{\phi \varepsilon \Lambda \mid \dot{\phi}(\theta)$ existe, é limitada e contínua por partes em $[-r,o)\}$

Se $\phi \varepsilon \Lambda_p$, então para todo $t_o \varepsilon (\rho , \infty)$ tem-se que:

$$\lim_{h\to o^+} \frac{1}{h} (x_{t_o+h}(t_o,\phi)-\phi) = \lim_{h\to o^+} \frac{1}{h}(x_{t_o}(t_o-h,\phi)-\phi)$$

$$= \begin{cases} f(t_o,\phi) & \text{se } \theta = o \\ \dot{\phi}(\theta) & \text{se } -r \leq \theta < o \end{cases}$$

Deste modo para $h \to o^+$, tem-se que:

$$\| x_{t_o+h}(t_o,\phi)-\phi \| , \| x_{t_o}(t_o-h,\phi)-\phi \| = o(h)$$

<u>Prova</u>: Para $-r \leq \theta \leq -h < o$, temos

$$x_{t_o+h}(t_o,\phi)(\theta) - \phi(\theta) = \phi(\theta+h) - \phi(\theta)$$

$$= x_{t_o}(t_o-h,\phi)(\theta) - \phi(\theta)$$

e o limite para $\theta \in [-r,o)$ é imediato. Para $\theta = o$,

$$x_{t_o+h}(t_o,\phi)(o) - \phi(o) = \int_{t_o}^{t_o+h} f(s,x_s(t_o,\phi))ds$$

e

$$x_{t_o}(t_o-h,\phi)(o) - \phi(o) = \int_{t_o-h}^{t_o} f(s,x_s(t_o-h,\phi))ds$$

Portanto, da continuidade de f temos o limite desejado para $\theta = o$.

Seja $K = \max(\sup_{-r\leq\theta<o} |\dot{\phi}(\theta)|, |f(t,\phi)|)$;

então para $h>o$ suficientemente pequeno

$$\| x_{t_{o+h}}(t_o,\phi)-\phi \| , \| x_{t_o}(t_o-h,\phi)-\phi \| \leq 2kh.$$

Donde concluimos a prova do Lema.

TEOREMA 1 - 1:

(i) Para qualquer $(t_o,\phi) \varepsilon \Gamma$ e para cada $t \varepsilon J$, a derivada de Fréchet da função $x_t(t_o,\phi)$ em relação a ϕ, $\frac{\partial}{\partial \phi} x_t(t_o,\phi)$, existe e é igual a $T(t,t_o:\phi)$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} x_t(t_o,\phi) = T(t,t_o:\phi)$$

(ii) Se $\phi \varepsilon \Lambda_p$, então

$$\frac{\partial}{\partial t_o} x_t(t_o,\phi) = T(t,t_o:\phi)\, \varepsilon \tag{9}$$

onde ε é a função definida por:

$$\varepsilon(\theta) = \begin{cases} -f(t_o,\phi) & \text{se } \theta = o \\ -\dot{\phi}(\theta) & \text{se } -r \leq \theta < o \end{cases}$$

Prova: Seja $a > o$, tal que $I = [t_o,t_o+a] \subset J$. Para provarmos que a derivada de Fréchet da função $x_t(t_o,\phi)$ em relação a ϕ é $T(t,t_o:\phi)$, devemos mostrar que para cada $\varepsilon > o$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, a, t_o,\phi) > o$ tal que $\|\psi\| \leq \delta$ implica que $\|\omega_t\| \leq \varepsilon\|\psi\|$ para todo $t \varepsilon I$, onde

$$\omega = x(t_o,\phi + \psi) - x(t_o,\phi) - z(t_o,\psi) \tag{10}$$

e $z(t_o,\psi)$ satisfaz (9). Como $f(t,\phi)$ é diferenciável continuamente em ϕ,

$$f(t,\phi+\psi) = f(t,\phi) + f'(t,\phi)\psi + g(t,\phi\ ,\ \psi) \qquad (11)$$

onde $g(t,\ \phi\ ,\ \psi\ )$ é contínua em $(t,\ \phi\ ,\ \psi\ )$, $g(t,\ \phi\ ,\ o\ )=o$, e

$$|g(t,\phi\ ,\psi_1\ )-g(t,\ \phi,\ \psi_2)|\leq\eta(t,\phi,\beta)\,||\,\psi_1-\psi_2\,|| \quad \text{para}$$

$(t,\phi)\ \varepsilon\ \Gamma$, $||\,\psi_i\,||\ \leq\ \beta$, $\eta(t,\phi\ ,\ \beta)$ é contínua em $(t,\phi,\ \beta)$ para $(t,\phi)\ \varepsilon\ \Gamma$, $\beta\ \geq\ o$ e $\eta(t,\phi,o)\ =\ o$.

Seja $\varepsilon > o$, e seja

$$L = \text{máx}\left[\sup_{t\varepsilon I}\ ||\,f'(t,x_t(t_o,\phi))||,\ \sup_{(t,\beta)\varepsilon I\times[\,o,1\,]}\ \eta(t,x_t(t_o,\phi),\beta)\right]$$

Sendo η contínua, podemos escolher um $\delta_1 > o$ de modo que $o\ \leq\ \beta\ \leq\ \delta_1$ implica que

$$\eta(t,x_t(t_o,\phi),\beta)\leq e^{-3La}\ \varepsilon,\ t\ \varepsilon\ I.$$

Como Λ é aberto e as soluções de (1) dependem continuamente da condição inicial, existe um $\delta > o$, $\delta\leq e^{-2La}\delta_1$, tal que $\{\phi + \psi \; ; \|\psi\| \leq \delta\} \subset \Lambda$, e

$$\|x_t(t_o,\phi + \psi) - x_t(t_o,\phi)\| \leq 1, \quad t \in I.$$

Vamos mostrar agora que

$$\|x_t(t_o,\phi + \psi) - x_t(t_o,\phi)\| \leq e^{2L(t-t_o)} \|\psi\|, \; t \in I, \; \|\psi\| \leq \delta \quad (12)$$

Segue de (1) e (11) que para $t \geq t_o$,

$$x(t_o,\phi + \psi) - x(t_o,\phi) = \psi(o) + \int_{t_o}^{t} \{f'(s,x_s(t_o,\phi))[x_s(t_o,\phi+\psi) - x_s(t_o,\phi)]$$

$$+ g(s,x_s(t_o,\phi),x_s(t_o,\phi+\psi) - x_s(t_o,\phi))\}ds$$

Assim, para $\|\psi\| \leq \delta$, $t \geq t_o$,

$$|x(t_o,\phi+\psi) - x(t_o,\phi)| \leq \|\psi\| + \int_{t_o}^{t} [\|f'(s,x_s(t_o,\phi))\| +$$

$$+ \eta(s,x_s(t_o,\phi),1)] .$$

$$. \|x_s(t_o,\phi+\psi) - x_s(t_o,\phi)\| ds$$

$$\leq \|\psi\| + 2L \int_{t_o}^{t} \|x_s(t_o,\phi+\psi) - x_s(t_o,\phi)\| ds$$

Pelo fato que $x_{t_o}(t_o,\phi+\psi) - x_{t_o}(t_o,\phi) = \phi+\psi-\phi = \psi$

mostrou-se que

$$\| x_t(t_o,\phi+\psi)-x_t(t_o,\phi)\| \leq \|\psi\|+2L\int_{t_o}^{t} \| x_s(t_o,\phi+\psi)-x_s(t_o,\phi)\| ds$$

para $\|\psi\| \leq \delta$, $t \geq t_o$.

Usando-se a desigualdade de Gronwall, concluimos (12).

De (1), (9), (10) e (11), mostra-se que

$$\omega=\int_{t_o}^{t} [f'(s,x_s(t_o,\phi))\omega_s+g(s,x_s(t_o,\phi),x_s(t_o,\phi+\psi)-x_s(t_o,\phi))]ds$$

$t \in I$, $\omega_{t_o} = o$. Desta forma, para $\|\psi\| \leq \delta$, $t \geq t_o$, de (12)e da representação acima, temos que

$$|\omega| \leq \int_{t_o}^{t} [L\|\omega_s\| + \eta(s,x_s(t_o,\phi),e^{2La}\|\psi\|)e^{2La}\|\psi\|]ds$$

$$\leq \varepsilon e^{-aL}\|\psi\| + L\int_{t_o}^{t}\|\omega_s\| ds.$$

Donde para $t \in I$, $\|\psi\| \leq \delta$,

$$\|\omega_t\| \leq \varepsilon e^{L(t-t_o-a)}\|\psi\| \leq \varepsilon \|\psi\| ,$$

e portanto, a derivada de Fréchet de $x_t(t_o,\phi)$ é $T(t,t_o:\phi)$.

Para obtermos a relação (9), notemos que a unicida de das soluções de (1) implica que, para qualquer número positivo h suficientemente pequeno e para todo $t \in I$

$$x_t(t_o+h,\phi)-x_t(t_o,\phi)=x_t(t_o+h,\phi)-x_t(t_o+h,x_{t_o+h}(t_o,\phi))$$

$$=T(t,t_o+h:\phi)\left[\phi-x_{t_o+h}(t_o,\phi)\right]+o(\| x_{t_o+h}(t_o,\phi)-\phi\|)$$

e

$$x_t(t_o-h,\phi)-x\ (t_o,\phi)=x_t(t_o,x_{t_o}(t_o-h,\phi)-x_t(t_o,\phi))$$

$$=T(t,t_o:\phi)\left[x_{t_o}(t_o-h,\phi)-\phi\right]+o(\| x_{t_o}(t_o-h,\phi)-\phi\|)$$

Segue da continuidade forte de T e do Lema 3, que

$$\lim_{h\to o^+}\frac{1}{h}\ (x_t(t_o+h,\phi)-x_t(t_o,\phi)=\lim_{h\to o+}(x_t(t_o-h,\phi)-x_t(t_o,\phi))=$$

$$=T(t,t_o:\phi)\varepsilon$$

Isto completa a prova do teorema 1.

<u>TEOREMA1-2:</u>Seja $\hat{\Lambda}$ um subconjunto convexo de Λ. Seja (t_o,ϕ) um elemento qualquer de $(\rho,\infty)\times\hat{\Lambda}$ e $J(t_o,\phi)=[t_o,\infty)$. Se (t_o,ϕ_1), $(t_o,\phi_2)\varepsilon(\rho,\ \infty)\times\hat{\Lambda}$, então:

$$\| x_t(t_o,\phi_1)-x_t(t_o,\phi_2)\| \leq \sup_{\zeta\varepsilon\hat{\Lambda}}\| T(t,t_o:\zeta)\|\ \ \|\phi_1-\phi_2\|$$

<u>Prova</u>: Seja $\zeta(\lambda)$ a linha reta de ϕ_1 para ϕ_2 dada por:

$\zeta(\lambda) = \phi_1 + \lambda(\phi_2 - \phi_1)$, $o \leq \lambda \leq 1$. Como $\hat{\Lambda}$ é convexo, $\zeta(\lambda) \in \hat{\Lambda}$, $o \leq \lambda \leq 1$. Então [6, pág. 155]

$$\frac{d}{d\lambda} x_t(t_o, \zeta(\lambda)) = T(t, t_o : \zeta(\lambda)) \frac{d\zeta}{d\lambda} = T(t, t_o : \zeta(\lambda))(\phi_2 - \phi_1)$$

Integrando a equação acima em relação a λ, de $\lambda = o$ a $\lambda = 1$, obtemos:

$$x_t(t_o, \phi_2) - x_t(t_o, \phi_1) = \int_o^1 T(t, t_o : \zeta(\lambda))(\phi_2 - \phi_1) d\lambda$$

Donde concluimos que

$$\| x_t(t_o, \phi_2) - x_t(t_o, \phi_1) \| \leq \sup_{\zeta \in \hat{\Lambda}} \| T(T(t_o : \zeta) \| \quad \| \phi_2 - \phi_1 \|$$

Vamos agora apresentar uma relação entre as soluções da equação não perturbada (1) e da equação perturbada (7), a qual é muito importante para o nosso trabalho. Esta relação é denominada "Fórmula Integral de Alekseev-Shanholt".

<u>TEOREMA I-3</u>: Suponhamos que, para qualquer $(t_o, \phi) \in (\rho, \infty) \times \Lambda_p$, as soluções $x_t(t_o, \phi)$ e $y_t(t_o, \phi)$ das equações (1) e (7), res-

pectivamente, estejam definidas em $[t_o - r, \bar{t})$, $t_o < \bar{t} \leq \infty$. Suponhamos que a solução $x_s(s, y_s(t_o,\phi))$ de (1) existe em $[t_o - r, \bar{t})$ para todo s, $t_o \leq s < \bar{t} \leq \infty$. Então

$$\bar{y}_t(t_o,\phi) = x_t(t_o,\phi) + \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\phi)Y_o\, g(s,y_s(t_o,\phi))ds \quad (13)$$

para $t_o \leq t < \bar{t}$

Prova: Para t em um intervalo no qual $y_t(t_o,\phi)$ existe, $\phi \in \Lambda_p$, do teorema 1-1 e de [6, pág. 173], mostra-se que:

$$\frac{d}{ds}\, x_t(s,y_s(t_o,\phi)) = T(t,s:y_s(t_o,\phi))\psi_s + T(t,s:y_s(t_o,\phi))\,\varepsilon_s$$

onde

$$\psi(s+\theta) = \begin{cases} -f(s,y_s(t_o,\phi)), & \text{se } \theta = o \\ -\dot{y}(t_o,\phi)(s+\theta), & \text{se } -r \leq \theta < o \end{cases}$$

$$\varepsilon(s+\theta) = \dot{y}(t_o,\phi)(s+\theta), \text{ se } -r \leq \theta \leq o$$

Desta forma, usando as equações (4) e (7), temos que:

$$\frac{d}{ds}\, x_t(s,y_s(t_o,\phi)) = T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o[\dot{y}(t_o,\phi)(s) - f(s,y_s(t_o,\phi))]$$

$$\vdots$$

$$=T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o g(s,y_s(t_o,\phi))$$

Integrando a equação acima em relação a s, de t_o a t, temos:

$$x_t(t,y_t(t_o,\phi))-x_t(t_o,y_{t_o}(t_o,\phi))=\int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\phi))ds$$

Donde concluimos,

$$y_t(t_o,\phi) = x_t(t_o,\phi)+\int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\phi))\ ds$$

O que completa a prova de teorema.

<u>Observação</u>: A relação (13) é uma generelização da fórmula de variação das constantes (6),

$$z_t = T(t,t_o)\phi + \int_{t_o}^{t} T(t,s)Y_o\ g(s,z_s)ds \ , \ t \geq t_o.$$

O próximo teorema garante que a relação (13) é válida para todo $\phi \in \Lambda$ desde que as soluções da equação (7) sejam únicas.

<u>TEOREMA1-4</u>: Se, para cada $(t_o,\phi) \in \Gamma$, $J(t_o,\phi) = [t_o,\infty)$, então:

$$y_t(t_o,\phi) = x_t(t_o,\phi) + \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\phi))\, ds$$

para todo (t_o,ϕ) para o qual $y_t(t_o,\phi)$ é única.

A demonstração deste teorema é dada em [13].

CAPÍTULO II

Convergência de soluções de sistemas de equações diferenciais funcionais perturbados.

Consideremos o sistema de equações diferenciais funcionais não perturbado

$$\dot{x}(t) = f(t\ ,\ x_t) \qquad (1)$$

e o sistema perturbado,

$$\dot{y}(t) = f(t,y_t) + g(t,y_t) \qquad (7)$$

onde $f,g: \mathbb{R}^+ \times C \to$ são contínuas, e, $f(t,\phi)$ tem derivada de Fréchet em relação a ϕ, $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}(t,\phi)$, contínua em $\mathbb{R}^+ \times C$. Além disso, vamos supor que as soluções do sistema perturbado (7) satisfaçam uma condição de unicidade.

Neste capítulo investigaremos a convergência de soluções de sistemas de equações diferenciais funcionais não lineares perturbados, através do uso da fórmula integral de Alekseev-Shanholt.

Inicialmente daremos algumas definições.

DEFINIÇÃO II-1: A solução $x = o$ de (1) é uniformemente estável em variação se para cada $\alpha > o$, existe uma cons tante $M(\alpha) > o$, tal que

$$\| T(t,t_o:\phi) \| \leq M(\alpha), \forall t \geq t_o, \ \| \phi \| \leq \alpha$$

Na definição acima $T(t,t_o:\phi)$: $C \to C$, $t \geq t_o$, é a família de operadores lineares associados à equação Variacional Linear da equação (1).

DEFINIÇÃO II-2: O sistema (1) é denominado convergente se

$$\lim_{t \to +\infty} x_t(t_o,\phi) = \lambda(t_o,\phi) \text{ existe para cada}$$

$(t_o,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$, onde $\lambda(t_o,\phi)$ é um elemento de $C=C([-r,o],\mathbb{R}^n)$.

Observação 1: Se (1) é convergente então para cada $(t_o,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$ existe uma constante $\beta=\beta(t_o,\phi) > o$ tal que

$$\| x_t(t_o,\phi) \| < \beta\ (t_o,\phi), \forall t \geq t_o.$$

De fato, fixado $(t_o,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$ e dado $\varepsilon > o$, existe $t^* > t_o$, tal que

$$\| x_t(t_o,\phi) \| = \| x_t(t_o,\phi)-\lambda(t_o,\phi)+\lambda(t_o,\phi)) \|$$

$$\leq \| x_t(t_o,\phi)- \lambda(t_o,\phi) \| + \| \lambda(t_o,\phi) \|$$

$$< \varepsilon + \| \lambda(t_o,\phi) \| \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(t_o,\phi) \quad \forall t \geq t^* .$$

Pelo Lema I-1, $x_t(t_o,\phi)$ é contínua em t, e portanto $\| x_t(t_o,\phi) \|$ é contínua em t, $t \in [t_o, t^*]$. Então existe o máximo de $\| x_t(t_o,\phi) \|$ em $[t_o, t^*]$, o qual denotamos por $\beta_2(t_o,\phi)$.

Seja $\beta(t_o,\phi) = \text{máx}\{\beta_1(t_o,\phi), \beta_2(t_o,\phi)\}$

então, $\| x_t(t_o,\phi) \| \leq \beta(t_o,\phi) \quad \forall t \geq t_o$.

<u>DEFINIÇÃO II-3</u>: O sistema (1) é denominado equi-convergente se ele é convergente, e para cada $\varepsilon > o$, $\alpha > o$, $t_o \geq o$, existe um número real $V = V(t_o,\alpha,\varepsilon)$ tal que

$$\| x_t(t_o,\phi) - \lambda(t_o,\phi) \| < \varepsilon, \ \forall t > t_o + V(t_o,\alpha,\varepsilon), \ \| \phi \| \leq \alpha.$$

<u>DEFINIÇÃO II-4</u>: O sistema (1) é denominado equi-uniformemente convergente se ele é equi-convergente e o V da definição II-3 depende somente de α e ε .

<u>DEFINIÇÃO II-5</u>: O sistema (1) é denominado coalescente se ele é convergente e $\lambda(o,\phi)$ é uma função constante.

<u>DEFINIÇÃO II-6</u>: O sistema (1) é denominado exponencialmente assintòticamente estável em variação se para cada $\alpha > o$, existem constantes positivas a_α e c_α, tal que,

$$\| T(t,t_o:\phi)\| \leq c_\alpha \exp\left[-a_\alpha(t-t_o)\right], \forall t \geq t_o \geq o,$$

$\|\phi\| \leq \alpha.$

DEFINIÇÃO II-7: O sistema (1) é denominado equi-uniformemente convergente em variação se para cada $\varepsilon > o$ e cada $\alpha > o$, existe um número real $V=V(\alpha,\varepsilon)$ e um operador $L: \mathbb{R}^+ \times C \to \mathcal{L}(C,C)$ contínuo em $\mathbb{R}^+ \times C$, o qual leva limitados de C em limitados de $\mathcal{L}(C,C)$, tal que

$$\| T(t,t_o:\phi)-L(t_o,\phi)\| < \varepsilon, \; \forall t > t_o + V(\alpha,\varepsilon),$$

$t_o \in \mathbb{R}^+$, $\|\phi\| \leq \alpha.$

TEOREMA II-1: Consideremos os sistemas de equação diferenciais funcionais (1) e (7), satisfazendo as seguintes hipóteses :

(i) O sistema (1) é convergente e equi-uniformemente convergente em variação.

(ii) Para cada $\alpha > o$, seja $h_\alpha(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua em $\mathbb{R}^+$, tal que

$$|g(t,\phi)| \leq h_\alpha(t), \; \forall t \in \mathbb{R}^+, \; \|\phi\| \leq \alpha \tag{14}$$

e

$$\int_o^\infty h_\alpha(t)dt < \infty \tag{15}$$

Então para cada $\psi \in C$, existe um número real $W = W(\psi)$ tal que se $t_o \geq W(\psi)$, a solução $y_t(t_o,\psi)$ de (7) é convergente.

<u>Prova</u>: Como (1) é equi-uniformemente convergente em variação, então para cada $\varepsilon > o$ e cada $\alpha > o$, existe um número real $V = V(\alpha,\varepsilon)$ e um operador $L=L(t_o,\phi)$ que é contínuo em $\mathbb{R}^+ \times C$, e $L(o,.)$ leva limitados de C em limitados de $\mathcal{L}(C,C)$, tal que

$$\| T(t-t_o,\alpha:\phi)-L(o,\phi)\| < \varepsilon, \ \forall t > t_o + V(\alpha,\varepsilon),$$

$t_o \in \mathbb{R}^+$, $\|\phi\| \leq \alpha$. Portanto existe uma constante $M_1(\alpha) > o$ tal que $\|L(o,\phi)\| \leq M_1(\alpha)$, $\forall \|\phi\| < \alpha$.

Segue então que (1) é uniformemente estável em variação. De fato, devido à unicidade da solução $x_t(t_o,\phi)$ de (1), temos

$$x_t(t_o,\phi) = x_{t-t_o}(o,\phi), \ \forall t \geq t_o, \ \phi \in C$$

Pelo teorema 1-1, resulta

$$T(t,t_o:\phi) = \frac{\partial}{\partial\phi} x_t(t_o,\phi) = \frac{\partial}{\partial\phi} x_{t-t_o}(o,\phi) = T(t-t_o,o:\phi)$$

$\forall t \geq t_o$, $\phi \in C$. Assim,

$$\| T(t,t_o:\phi)\| = \|T(t-t_o,o:\phi)\|$$

$$= \| T(t-t_o,o:\phi)-L(o,\phi)+L(o,\phi) \|$$

$$\leq \| T(t-t_o,o:\phi)-L(o,\phi) \| + \| L(o,\phi) \|$$

$$< \varepsilon + M_1(\alpha), \quad \forall t > t_o + V(\alpha,\varepsilon),$$

$t_o \in \mathbb{R}^+$, $\|\phi\| \leq \alpha$.

Tomemos $M_2(\alpha) = \sup\limits_{\substack{t_o \leq t \leq t_o+V(\alpha,\varepsilon) \\ \|\phi\| \leq \alpha}} \| T(t-t_o,o:\phi)-L(o,\phi) \|$

Seja $M(\alpha) = \text{Máx}\{\varepsilon + M_1(\alpha), M_2(\alpha)\}$

Então, $\| T(t,t_o:\phi) \| \leq M(\alpha)$, $\forall t \geq t_o$, $t_o \in \mathbb{R}^+$, $\|\phi\| \leq \alpha$

Como (1) é convergente então para cada $(t_o,\phi) \in R^+ \times C$, existe uma constante $\beta = \beta(t_o,\psi)$ (Observação 1) tal que,

$$\| x_t(t_o,\psi) \| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_o.$$

Seja $\alpha = 2\beta$. Vamos escolher $\omega = \omega(\psi)$ suficiente - mente grande de tal maneira que a desigualdade

$$\int_{\omega}^{\infty} h_{2\beta}(t)\, dt < \frac{\beta}{M(2\beta)} \tag{16}$$

seja satisfeita. Esta escolha de $\omega = \omega(\psi)$ sempre é possível em vista de (15).

Vamos mostrar que,

$$\| y_t(t_o,\psi) \| < 2\beta, \ \forall t > t_o \geq \omega(\psi) \qquad (17)$$

De fato, suponhamos que a desigualdade (17) não é verdadeira. Decorre que existe um primeiro t_1 , $t_1 > t_o$, tal que,

$$\| y_{t_1} (t_o,\psi) \| = 2\beta.$$

Usando a fórmula integral de Alekseev-Shanholt(I-13), temos:

$$y_{t_1} (t_o,\psi) = x_{t_1} (t_o,\psi) + \int_{t_o}^{t_1} T(t_1,s:y_s(t_o,\psi)Y_o g(s,y_s(t_o,\psi))ds$$

Portanto

$$\| y_{t_1}(t_o,\psi) \| \leq \| x_{t_1}(t_o,\psi) \| + \int_{t_o}^{t_1} \| T(t_1,s:y_s(t_o,\psi)) \| \, |g(s,y_s(t_o,\psi))| ds$$

De (14) e (16), temos que:

$$2\beta = \| y_{t_1}(t_o,\psi) \| \leq \beta + M(2\beta) \int_{t_o}^{t_1} h_{2\beta}(s) \ ds$$

$$< \beta + M(2\beta)\int_{\omega(\psi)}^{\infty} h_{2\beta}(s)\, ds$$

$$< \beta + M(2\beta) . \frac{\beta}{M(2\beta)}$$

$$< 2\beta$$

Dessa maneira, chegamos a um absurdo. Concluímos então que $\| y_t(t_o,\psi) \| < 2\beta$, $\forall t \geq t_o \geq \omega(\psi)$.

Vamos agora estabelecer a convergência da solução $y_t(t_o,\psi)$.

Primeiramente, mostraremos que:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o\psi))\, ds =$$

$$= \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))\, Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi))\, ds \qquad (18)$$

Quaisquer que sejam $t_o \in \mathbb{R}^+$, $t \geq t_o$, $\| \phi \| \leq \alpha$, temos que $\| T(t,t_o:\phi) \| \leq M(\alpha)$ (*)

Da hipótese (i), temos que

$\| T(t,t_o:\phi)-L(t_o,\phi) \| < \varepsilon$, $\forall t > t_o+V(\alpha,\varepsilon), t_o \in \mathbb{R}^+$, $\| \phi \| \leq \alpha$. Então, para cada $(t_o,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$,

$$\lim_{t\to\infty} T(t,t_o:\phi) = L(t_o,\phi).$$

Logo, fazendo t tender a + ∞ em (*), temos que,

$$\| L(t_o,\phi)\| \leq M(\alpha),\ \forall t \geq t_o,\ t_o \in \mathbb{R}^+,\ \|\phi\| \leq \alpha$$

Consequentemente, a integral do lado direito de (13) pode ser majorada pela integral

$$\int_{t_o}^{\infty} M(2\beta)\ h_{2\beta}(s)\ ds.$$

Seja $\varepsilon >$ o dado. Escolhemos um número real S_o suficientemente grande tal que,

$$\int_{S_o}^{\infty} h_{2\beta}(s)\ ds < \frac{\varepsilon}{3M(2\beta)} \tag{19}$$

Esta escolha de S_o sempre é possível em vista de (15).

Como (1) é equi-uniformemente convergente em variação, então existe um número real $S_1 = S_1(\alpha,\varepsilon)$, $S_1 \geq S_o$, tal que para $t \geq S_1$, temos:

$$\| T(t,s:y_s(t_o,\psi))-L(s,y_s(t_o,\psi))\| < \frac{\varepsilon}{3S_oK} \tag{20}$$

onde $K = \max\limits_{\substack{\|y_t\| \leq 2\beta \\ t_0 \leq t \leq S_0}} |g(t, y_t)|$

De (19) e (20) nós obtemos para $t \geq S_1$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} T(t,s:y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds - \int_{t_0}^{\infty} L(s,y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{S_0} T(t,s:y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds - \int_{t}^{S_0} T(t,s:y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{S_0} L(s,y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds - \int_{S_0}^{\infty} L(s,y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{S_0} \left[T(t,s:y_s(t_0,\psi)) - L(s,y_s(t_0,\psi)) \right] Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))\, ds - \right.$$

$$\left. - \int_{t}^{S_0} T(t,s:y_s(t_0,\psi))Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds - \int_{S_0}^{\infty} L(s,y_s(t_0,\psi)Y_0\, g(s,y_s(t_0,\psi))ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{S_0} \| T(t,s:y_s(t_0,\psi)) - L(s,y_s(t_0,\psi)) \| \;\; |g(s,y_s(t_0,\psi))| ds +$$

$$+ \int_{S_0}^{\infty} \| T(t,s:y_s(t_0,\psi)) \| \;\; |g(s,y_s(t_0,\psi))| \, ds$$

$$+ \int_{S_o}^{\infty} \| L(s,y_s(t_o,\psi)) \| \ | g(s,y_s(t_o,\psi) | \ ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{3S_oK} \quad KS_o + 2 \ M(2\beta) \int_{S_o}^{\infty} |g(s,y_s(t_o,\psi)) | \ ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2 \ M(2\beta) \int_{S_o}^{\infty} h_{2\beta} (s) \ ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + M(2\beta) . \frac{\varepsilon}{3M(2\beta)} = \varepsilon \tag{21}$$

Portanto, mostramos que o limite (18) é válido. Como (1) é convergente, vamos denotar o limite

$$\lim_{t\to\infty} x_t(t_o,\psi) \ \text{por} \ \lambda_x(t_o,\psi).$$

Tomando os limites de ambos os lados na fórmula integral de Alekseev-Shanholt (1.13), e, usando (18), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t_o,\psi) = \lambda_x(t_o,\psi) + \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))Y_o \ g(s,y_s(t_o,\psi)) \ ds$$

Assim $\lim_{t\to\infty} y_t(t_o,\psi)$ existe, o qual denotamos por $\lambda_y(t_o,\psi)$, e, portanto temos

$$\lambda_y(t_o,\psi) = \lambda_x(t_o,\psi) + \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi))\, ds \qquad (22)$$

Isto completa a prova do teorema II-1.

Seja $\psi \in C$ fixo e $\omega_o(\psi)$ o ínfimo de todos os $\omega(\psi)$ para os quais o teorema II-1 é válido. Seja D o conjunto definido por

$$D = \{(t,\psi) \mid \psi \in C,\ t > \omega_o(\psi)\}$$

TEOREMA II-2: Consideremos os sistemas de equações diferenciais funcionais (1) e (7), satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) O sistema (1) é equi-convergente e equi-uniformemente convergente em variação.

(ii) As desigualdades (14) e (15) são válidas.

Então o sistema (7) é equi-convergente em D.

Prova: Primeiramente vamos mostrar que se $(t_o,\psi) \in D$, com $\|\psi\| \leq \alpha$, então existe um $\beta = \beta(\alpha)$ de modo que,

$$\|x_t(t_o,\psi)\| \leq \beta\ ,\ \forall t \geq t_o.$$

Sendo (1) equi-convergente, temos que é convergente. Portanto se $x_t(o,o)$ é a solução de (1) passando por (o,o), segue que $x_t(o,o)$ é limitada, isto é, existe $k > o$, tal que $\| x_t(o,o) \| \leq k$, para todo $t \geq o$.

Seja $\hat{\Lambda} = \{\psi \in \Lambda \mid \|\psi\| \leq \alpha\}$. $\hat{\Lambda}$ é um subconjunto convexo de Λ.

Pelo teorema I-2 resulta

$$\| x_{t-t_o}(o,\psi) - x_{t-t_o}(o,o) \| \leq \sup_{\phi \in \hat{\Lambda}} \| T(t-t_o,o:\phi) \| \; \| \psi \| ,$$

$\forall t \geq t_o$, $\psi \in \hat{\Lambda}$. Assim, devido à unicidade da solução $x_t(t_o,\phi)$ de (1), temos:

$$\| x_t(t_o,\psi) \| = \| x_{t-t_o}(o,\psi) \|$$

$$\leq \| x_{t-t_o}(o,\psi) - x_{t-t_o}(o,o) \| + \| x_{t-t_o}(o,o) \|$$

$$\leq \sup_{\phi \in \hat{\Lambda}} \| T(t,o:\phi) \| \; \| \psi \| + \| x_{t-t_o}(o,o) \|$$

Sendo (1) equi-uniformemente convergente em variação, vimos na prova do teorema I-1 que (1) é uniformemente estável em variação, isto é, dado $\alpha > o$, existe $M(\alpha)$ tal que,

$$\| T(t,t_o:\phi) \| \leq M(\alpha), \; \forall t \geq t_o, \; t_o \in \mathbb{R}^+, \| \phi \| \leq \alpha$$

Logo :

$$\sup_{\phi \in \hat{\Lambda}} \| T(t,o:\phi) \| \leq M(\alpha)$$

Donde concluimos que,

$$\| x_t(t_o,\psi) \| \leq M(\alpha)\ \alpha + k \stackrel{def}{=} \beta\ (\alpha),\ \forall t \geq t_o, \| \psi \| < \alpha$$

Da fórmula integral de Alekseev-Shanholt, (I-13) temos que:

$$y_t(t_o,\psi) = x_t(t_o,\psi) + \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\psi))\ ds \tag{23}$$

Usando (22) e (23), obtemos:

$$y_t(t_o,\psi) - \lambda_y(t_o,\psi) = \left[x_t(t_o,\psi) + \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\psi))\ ds\right] -$$

$$- \left[\lambda_x(t_o,\psi) + \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))\ Y_o\ g(s,y_s(t_o,\psi))\ ds\right]$$

$$= x_t(t_o,\psi) - \lambda_x(t_o,\psi) +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\psi))ds - \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))Y_o\ g(s,y_s(t_o,\psi))ds \tag{24}$$

Vimos na demonstração do teorema II-1 que

$$\left\| \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi))ds - \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi)) \right\|$$

$$< \varepsilon/2 \quad \forall t \geq S_1 \geq S_o .$$

Sendo (1) equi-convergente, então (1) é convergente e para cada $\varepsilon > o$, $\alpha > o$, $t_o \geq o$, existe um número real $V^* = V^*(t_o,\alpha,\varepsilon)$ tal que

$$\| x_t(t_o,\psi)-\lambda(t_o,\psi) \| < \varepsilon, \ \forall t > t_o+V^* (t_o,\alpha,\varepsilon),$$

$\| \psi\| \leq \alpha$.

Tomemos $t \geq Q = \text{máx} \{t_o+V^*(t_o,\alpha,\varepsilon),\ S_1\}$.

Portanto de (24), obtemos:

$$\| y_t(t_o,\psi) - \lambda_y(t_o,\psi) \| = \| x_t(t_o,\psi) - \lambda_x(t_o,\psi) \| +$$

$$+\left\| \int_{t_o}^{t} T(t,s:y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi))ds - \int_{t_o}^{\infty} L(s,y_s(t_o,\psi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\psi))ds \right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall t \geq Q \ , \ \| \psi\| \leq \alpha.$$

Consequentemente, o sistema (7) é equi-convergente em D.

<u>TEOREMA II-3</u>: Consideremos o sistema de equações diferenciais funcionais (1) e (7), satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) O sistema (1) é equi-uniformemente convergente e equi - uniformemente convergente em variação.

(ii) As desigualdades (14) e (15) são válidas.

Então o sistema (7) é equi-uniformemente convergente em D.

<u>Prova</u>: É feita de maneira análoga à prova do teorema II-2, sendo que agora o número real V depende somente de α e ε, isto é, $V=V(\alpha,\varepsilon)$.

<u>TEOREMA II-4</u>: Consideremos o sistema de equações diferenciais funcionais (1) satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) O sistema (1) é coalescente para uma função $\Psi \in C$.

(ii) Para cada $\alpha > o$, seja $h_\alpha(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua em $\mathbb{R}^+$, tal que

$$|g(t,\phi)| \leq h_\alpha(t) \; , \; t \in \mathbb{R}^+ \; , \; \forall\phi \; , \text{ com } \|\phi\| \leq \alpha$$

(iii) Para cada $\alpha > 0$, seja $\eta_\alpha: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, tal que

$$\| T(t,t_o:\phi) \| \leq \eta_\alpha(t,t_o), \quad \forall t \geq t_o \geq 0, \| \phi \| \leq \alpha$$

(iiii) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \eta_\alpha(t,s) h_\alpha(s)\, ds = 0$ para cada $\alpha > 0$.

Então, toda solução convergente de (7) é coalescente para a função Ψ.

<u>Prova</u>: Tomando os limites de ambos os lados na fórmula integral de Alekseev-Shanholt, [1-13], resulta que para qualquer solução convergente $y_t(t_o,\phi)$ de (7), temos

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t_o,\phi) = \lim_{t\to\infty} x_t(t_o,\phi) + \lim_{t\to\infty} \int_{t_o}^t T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\phi))ds, \quad (25)$$

Como $y_t(t_o,\phi)$ é convergente, existe uma constante $\beta = \beta(t_o,\phi)$ (observação 1) tal que

$$\| y_t(t_o,\phi) \| < \beta, \quad \forall t \geq t_o.$$

Usando as hipóteses (ii) e (iii), concluimos que

$$\left\| \int_{t_o}^t T(t,s:y_s(t_o,\phi))Y_o\, g(s,y_s(t_o,\phi))ds \right\| \leq \int_{t_o}^t \| T(t,s:y_s(t_o,\phi)) \| \, |g(s,y_s(t_o,\phi))| ds$$

$$\leq \int_0^t \eta_\beta(t,s)\, h_\beta\,(s)\, ds$$

Consideremos a equação (25) para $t_o = o$

$$\lambda_y(o,\phi) = \Psi + \lim_{t\to\infty} \int_0^t T(t,s:y_s(o,\phi))Y_o\; g(s,y_s(o,\phi))ds$$

Usando a hipótese (iiii), concluimos que $\lambda_y(o,\phi)$ é uma função constante.

Logo toda solução convergente de (7) é convergente para uma função Ψ.

TEOREMA II-5: Consideremos o sistema de equações diferenciais funcionais (1), satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) O sistema (1) é convergente

(ii) $\dot{z}(t) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial \phi}(t,x_t(o,\phi))\right] z_t$, $t \in [t_o,\infty)$ é uniformemente coalescente para zero, isto é, $T(t,o:\phi) \to o$ quando $t \to \infty$ uniformemente em ϕ.

Então o sistema (1) é coalescente.

Prova: Como (1) é convergente, então

$\lim_{t\to\infty} x_t(t_o,\phi) = \lambda(t_o,\phi)$ existe para cada $(t_o,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times C$.

Da hipótese (ii), segue que

$$T(t,o:\phi) \to o \text{ uniformemente em } \phi .$$

Logo

$$\left[\frac{\partial}{\partial\phi} x_t(o,\phi)\right] \to o \text{ uniformemente em } \phi$$

Assim temos que,

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\phi} x_t(o,\phi)\right] = o \text{ uniformemente em } \phi \quad ,$$

Disto resulta que,

$$\left[\frac{\partial}{\partial\phi} \lim_{t\to\infty} x_t(o,\phi)\right] = o \quad .$$

Logo

$$\left[\frac{\partial}{\partial\phi} \lambda(o,\phi)\right] = o$$

Portanto, $\lambda(o,\phi)$ é uma função constante. Logo o sistema (1)é coalescente.

<u>Corolário</u>: Consideremos os sistemas de equações diferenciais funcionais (1) e (7), satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) O sistema (1) é exponencialmente assintóticamente está - vel em variação.

(ii) h_α satisfaz $\lim\limits_{t\to\infty} \int_t^{t+1} h_\alpha(s)ds = o, \quad \forall\alpha > o$

(iii) Para cada $\alpha > o$, seja $h_\alpha(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contí nua em $\mathbb{R}^+$, tal que

$$|g(t,\phi)| \leq h_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\phi, \text{ com } \|\phi\| \leq \alpha$$

Então toda solução convergente de (7) é coalescente .

Prova: Como (1) é exponencialmente assintóticamente estável em variação, então, para cada $\alpha > o$, existem constantes positivas a_α e c_α, tais que

$$\|T(t,t_o:\phi)\| \leq c_\alpha \exp[-a_\alpha(t-t_o)], \quad \forall t \geq t_o \geq o, \|\phi\| \leq \alpha.$$

Portanto, $\lim\limits_{t\to\infty} T(t,t_o:\phi) = o$ uniformemente em ϕ. Donde concluímos, pelo teorema II-5 que (1) é coalescente para uma função $\Psi \in C$.

Além disso, $\lim\limits_{t\to\infty} \int_o^t c_\alpha \exp[-a_\alpha(t-t_o)] h_\alpha(s)ds = o$

Pela hipótese (ii), $\lim\limits_{t\to\infty} \int_t^{t+1} h_\alpha(s)ds = o, \ \forall \alpha > o$

Donde concluímos de [9, pág. 113] que

$$\lim_{t\to\infty} \int_o^t \exp\left[-a_\alpha(t-s)\right] h_\alpha(s)ds = o$$

O corolário é agora uma consequência do teorema II-4.

BIBLIOGRAFIA

[1] - BRAUER, F.-Perturbations of nonlinear systems of differential equations, I. J. Math. Anal. Appl., 14 (1966), 198-206.

[2] - ________-Perturbations of nonlinear systems of differential equations, II, J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), 418-434.

[3] - ________-Perturbations of nonlinear systems of differential equations III, J. Math. Anal. Appl. 31, (1970), 37-48

[4] - BOTURA F., Décio - Estabilidade uniforme de sistemas perturbados não lineares de equações diferenci - ais com retardamento - Dissertação de mestrado ' apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da U.S.P. (1977).

[5] - CASSAGO J., Hermínio - Comportamento assintótico de sistemas de equações diferenciais funcionais não lineares. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da U.S.P. (1974).

[6] - DIEUDONNÉ, J. -Foundations of Modern Analysis, vol. 1. Academic Press, New York, 1969.

[7] - HALE, J. K. - Theory of Functional differential equations, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, 3 , 1976.

[8] - HALLAM, T.G. - Convergence of solutions of perturbed nonlinear differential equations. Ann. di Mat. Pura ed Appl IV, 94 (1972), pág. 275-281.

[9] - LAKSHIMIKANTHAM, V. and LEELA, S. - Differential and integral inequalities, Theory and aplications. New York, Academic Press, 1969, Vol. I-II.

[10] - MARLIN, J. A. and Struble, R. A. - Asymptotic equivalence of nonlinear systems, J. Differential equations, 6 (1969), 578-596.

[11] - MOLFETTA, N. A. - Alekseev's Integral formula and applications in stability problems. An. Acad. brasil. Ciênc., pp. 303-308, 1969, 41 (3).

[12] - MONTEIRO, Paulo Adão - Comportamento Assintótico e estabilidade em variação de conjuntos auto-invariantes de equações diferenciais com retardamento. Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da U.S.P. (1976).

[13] - SHANHOLT, G.A. - A nonlinear variation - of - constants formula for functional differential equations. Mathematical Systems Theory, Vol. 6, nº 4, pp. 343 -352 , 1973.