UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CLASSIFICAÇÃO LOCAL E ORBITAL DE G-ESPAÇOS E G-APLICAÇÕES: EXISTÊNCIA DE TUBOS

Maria Helena Maia Oltramari

Maio - 1979

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley

Coordenador

Banca Examinadora:

Italo J. Dejter

Prof. Italo José Dejter, Ph.D.

Orientador

Carlos A. A. de Carvalho

Prof. Carlos Alberto Aragão de Carvalho, Ph.D.

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Italo José Dejter pela escolha do assunto de pesquisa e pela orientação capaz e eficiente, sem a qual este trabalho não seria realizado.

Ao Professor William Glenn Whitley pela meticulosa revisão e pelas sugestões apresentadas, contribuindo para o enriquecimento do trabalho.

À COPERT e Universidade Federal de Santa Catarina que forneceram os meios para a realização deste trabalho.

Ao Sr. Carlos Duarte pelo excelente trabalho de datilografia.

À minha filha

Ana Maria

ABSTRACT

This work presents some aspects of the Theory of G-spaces. They guarantee the existence of a tube around each orbit in a G-space, when G is a compact Lie group, and some categorical aspects of G-maps, allowing a comparison criterion of G-orbit types.

RESUMO

Este trabalho apresenta alguns aspectos da Teoria de G-espaços. Eles garantem a existência de um tubo ao redor de cada órbita em um G-espaço, quando G é um grupo de Lie compacto, e alguns aspectos categóricos de G-aplicações, possibilitando um critério de comparação de G-tipos de órbita.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns aspectos da teoria geral de G - espaços topológicos, quando G é um grupo topológico compacto. Serão abordados, em especial, os seguintes tópicos:

1. A classificação de G - aplicações restritas a órbitas, que constituem a base do estudo das G - aplicações em geral. Serão apresentados critérios categóricos de comparação, que dão lugar à noção de G - tipo orbital.
2. O estudo da estrutura local-orbital dos G - espaços, isto é, o Teorema da Existência de Tubos, quando G é um grupo de Lie compacto. Esse resultado é de fundamental importância no estudo das G - variedades diferenciáveis ([1]), já que a noção do tubo é o laço entre o estudo de G - espaços topológicos e a noção de G - vizinhança tubular de uma órbita, numa G - variedade diferenciável. Independentemente desta aplicação, o Teorema da Existência de Tubos garante a validade do Teorema do Levantamento, a G - espaços ligados por uma G - aplicação F, de uma homotopia de espaços orbitais, que preserva os tipos de órbita e a G - aplicação F ([1]). Com isto, a existência de tubos também intervém na classificação de G - espaços de Palais ([12]) e no Teorema da imersão de G - espaços em espaços de representação de G.

Por suas características de detalhe e exemplificação, o presente trabalho tem o intuito de contribuir para o desenvolvimento de uma pesquisa capaz de propiciar a formação de uma equipe, na área de Topologia, na Universidade Federal de Santa Catarina.

CAPÍTULO I

G-ESPAÇOS . G-APLICAÇÕES. TIPOS DE ÓRBITA

1. Operação de um grupo em um conjunto

Definição 1.1

Seja X um conjunto e G um grupo. Por uma operação de G sobre X (à esquerda) entendemos uma aplicação $\Theta : G \times X \to X$, tal que:

(i) $\Theta(g,\Theta(h,x)) = \Theta(gh,x)$, para cada $g,h\in G$ e cada $x\in X$

(ii) $\Theta(e,x) = x$, para todo $x\in X$.

Neste caso, dizemos que G opera sobre X (à esquerda) e que X é um G-conjunto.

Notação

- Representaremos por $g(x)$, ou gx, a imagem do par (g,x) pela aplicação Θ, ou seja:

$$\Theta(g,x) = g(x) = gx, \text{ para } g\in G \text{ e } x\in X.$$

- Também definimos $C(A) = \{ g(x) \mid g\in C \text{ e } x\in A \}$.

Nas condições acima, temos que cada $g \in G$ induz uma aplicação $\Theta_g : X \to X$, definida por $\Theta_g(x) = g(x)$, para todo $x \in X$. Esta aplicação satisfaz às seguintes propriedades:

(i) $\Theta_{gh} = \Theta_g . \Theta_h$, para quaisquer $g,h \in G$.

(ii) Θ_g é inversível para cada $g \in G$, e $(\Theta_g)^{-1} = \Theta_{g^{-1}}$.

Portanto, cada Θ_g é uma permutação em X. Desta forma, a aplicação $g \longmapsto \Theta_g$ é um homomorfismo de G no grupo das permutações de X e, dizemos que G é representado como um grupo de permutações.

<u>Definição 1.2</u>

Definimos o <u>núcleo</u> de Θ, como sendo o núcleo do homomorfismo $g \mapsto \Theta_g$, ou seja, $\mathrm{Ker}\ (\Theta) = \{g \in G \mid g(x) = x,\ \forall\ x \in X\}$, e é um subgrupo normal de G.

<u>Definição 1.3</u>

Sejam X e Y dois G - conjuntos, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é uma <u>aplicação equivariante</u> de G - conjuntos, ou uma <u>G - aplicação</u>, se $f(gx) = g\ f(x)$, para todo $g \in G$ e todo $x \in X$.

<u>Definição 1.4</u>

Seja G um grupo, X um G - conjunto e $x \in X$. Definimos o sub-grupo isotrópico de x, em G, e denotamos por G_x, o conjunto

$$G_x = \{ g \varepsilon G \mid g(x) = x \}$$

Proposição 1.1

Seja G um grupo e X um G - conjunto. Sejam x, $x' \varepsilon X$ e $g \varepsilon G$, tais que $g(x) = x'$. Então, $G_{x'} = g\, G_x g^{-1}$, ou seja, os grupos isotrópicos de x e x' são conjugados.

Prova:

$$g' \varepsilon G_{x'} \Longleftrightarrow g'(x') = x' \Longleftrightarrow g'(g(x)) = g(x)$$

$$\Longleftrightarrow (g'g)(x) = g(x) \Longleftrightarrow (g^{-1}g'g)(x) = x$$

$$\Longleftrightarrow g^{-1}g'g \;\varepsilon\; G_x \Longleftrightarrow g' \;\varepsilon\; gG_xg^{-1} \text{. Logo, } G_{x'} =$$

$$= gG_xg^{-1}.$$

Definição 1.5

Seja G um grupo, X um G - conjunto e $x \varepsilon X$. Definimos a órbita de x sob G como sendo o conjunto $G(x) = \{ g(x) \mid g \varepsilon G \}$.

Proposição 1.2

Seja X um G - conjunto, $x \varepsilon X$ e $G_x = H$. Então, existe uma aplicação bijetora entre G(x) e G/H.

Prova:

Consideremos a aplicação $f : G/H \to G(x)$, definida por $f(gH) = g(x)$.

A aplicação f está bem definida, pois se g_1 e g_2 estão na mesma classe gH, então $g_1 = g_2h$, com $h\varepsilon H$. Portanto:

$$g_1(x) = (g_2h)\ (x) = g_2(h(x)) = g_2(x).$$

Além disso, f é injetora, pois se $f(gH) = f(g'H)$, temos que $g(x) = g'(x)$, ou seja, $x = g^{-1}g'(x)$. Logo, $g^{-1}g'\varepsilon H$ e, neste caso, $g'\varepsilon gH$, ou $gH = g'H$.

Se y é um elemento qualquer de $G(x)$, então $y = g(x)$ para algum $g\varepsilon G$. Portanto, $f(gH) = g(x) = y$, o que mostra que f é sobrejetora.

2. Ações de Grupos Topológicos

Sabemos que um grupo topológico G é um conjunto que possui estrutura de grupo e estrutura de espaço topológico de Hausdorff, de tal forma que as operações do grupo G são contínuas no espaço topológico G ([10]). Na Secção 1, foram apresentados alguns conceitos concernentes a grupos. Nesta, e nas demais secções deste Capítulo, vamos apresentar estes e outros conceitos, vistos, não só do ponto de vista puramente algébrico, mas também do ponto de vista topológico, uma vez que estaremos trabalhando com grupos topológicos.

Definição 2.1

Seja G um grupo topológico e X um espaço de Hausdorff. Seja Θ uma operação de G sobre X, que é contínua. Neste caso, dizemos que Θ é uma ação de G sobre X, ou uma G-ação sobre X, e, a terna (G,X,Θ) é chamada um grupo topológico de transformações. O espaço X é chamado um G-espaço.

Já vimos que a aplicação $\Theta_g : X \to X$, definida por $\Theta_g(x) = g(x)$, é uma bijeção de X. Além disso, Θ_g é contínua, para cada $g \in G$, uma vez que é uma restrição da aplicação contínua Θ, ao conjunto $\{g\} \times X$. Portanto, Θ_g é um homeomorfismo de X e, consequentemente, a aplicação $g \mapsto \Theta_g$ é um homomorfismo de G no grupo dos homeomorfismos de X.

Notação

Se X é um G-espaço, $S \subset X$ e $K \subset G$, usaremos as seguintes notações:

$$KS = \{g(s) \mid g \in K \text{ e } s \in S\}$$

$$gS = \{g(s) \mid s \in S\} \quad , \; g \in G$$

Definição 2.2

Se X é um G-espaço, dizemos que $A \subset X$ é invariante sob G, se $G(A) = A$.

Definição 2.3

Uma ação Θ é dita efetiva, se $Ker(\Theta)$ é trivial, ou seja, $Ker(\Theta) = \{e\}$

Definição 2.4

Uma ação de G em X é dita livre, se G_x é trivial para cada $x \in X$.

Proposição 2.1

Seja (G,X,Θ) um grupo topológico de transformações, com $N = Ker(\Theta)$. Então, Θ induz uma ação efetiva $\Theta/N : G/N \times X \to X$, definida por:

$$(gN)(x) = g(x), \text{ para todo } x \in X$$

Prova:

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\pi \times id_X"'] & X \\ G/N \times X \arrow[ur, "\Theta/N"'] & \end{tikzcd}$$

onde π é a aplicação canônica (V. Apêndice-Def.II-3).

Como π é uma aplicação aberta (V. Apêndice -Prop. II-1) e a ação Θ é contínua, segue que Θ/N é contínua. Além disso, Θ/N é uma ação efetiva, pois:

que $G \times A$ é fechado em $G \times X$, logo $G(A) = \Theta(G \times A)$ é fechado em X, por (i).

(iii) Sendo G compacto e A compacto em X, temos que $G \times A$ é compacto em $G \times X$, logo $G(A) = \Theta(G \times A)$ é compacto em X, pois Θ é contínua.

Definição 2.5

Uma aplicação G - equivariante (ou G - aplicação) entre G - espaços X e Y, é uma aplicação equivariante entre os G - conjuntos X e Y, que é contínua.

De agora em diante, usaremos o termo aplicação, significando aplicação contínua.

Definição 2.6

Dizemos que dois G - espaços X e Y são equivalentes, quando existe uma aplicação equivariante $f : X \to Y$, que é também um homeomorfismo. Neste caso, f é dita uma equivalência entre G - espaços.

Proposição 2.3

Se f é uma equivalência entre G - espaços X e Y, então f^{-1} também é equivariante.

Prova:

Seja $y \in Y$ e $x \in X$ tais que $y = f(x)$. Então $f^{-1}(g(y)) = f^{-1}[g(f(x))] = f^{-1}[f(g(x))] = g(x) = $
$= g(f^{-1}(y))$.

Portanto, f^{-1} é equivariante.

Definição 2.7

Dizemos que dois G - espaços X e Y são fracamente equivalentes se existe um automorfismo $\alpha : G \to G$, contínuo, e um homeomorfismo $f : X \to Y$, tais que $f(g(x)) = \alpha(g)(f(x))$, para todo $g \in G$ e todo $x \in X$.

Exemplos

1) Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo fechado de G. Consideremos a função $L: G \times G/H \to G/H$, definida por

$$L(g, g'H) = gg'H.$$

Mostraremos que L é uma ação de G sobre G/H e determinaremos o núcleo desta ação.

Realmente, temos que

$$L(g, L(g_1, g_2H)) = L(g, g_1g_2H) = g(g_1g_2)H =$$

$$= (gg_1)g_2H = L(gg_1, g_2H)$$, para cada $g, g_1, g_2 \in G$, e também,

$L(e, gH) = egH = gH$, para todo $g \in G$.

A continuidade de L pode ser mostrada considerando o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_G \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "L"'] & G/H \end{tikzcd} ,$$

onde π é a aplicação canônica e T é a multiplicação do grupo. Temos que π é uma aplicação contínua e aberta (V. Apêndice - Prop. II-1) e T é contínua, pela definição de grupo topológico. Além disso, o diagrama acima é comutativo, já que $(\pi.T)(g,g') = \pi(gg') = gg'H = L(g,g'H) = L(id_G \times \pi)(g,g')$.

Logo, L é contínua ([3], p. 122).

Vamos, agora, mostrar que $Ker(L) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

Se $g' \in \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$, temos que $g' \in gHg^{-1}$, para todo $g \in G$.

Neste caso, para cada $g \in G$, existe $h \in H$, tal que $g' = ghg^{-1}$, ou seja, $g'(gH) = (ghg^{-1})gH = gH$. Portanto, $g' \in Ker(L)$. Logo, $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \subset Ker(L)$.

Agora, se $g' \in Ker(L)$, temos que $g'(gH) = gH$, para todo $g \in G$. Portanto, para qualquer $g \in G$, temos

$g^{-1}g'(gH) = H$, ou seja, $g^{-1}(g'g) \in H$, ou ainda, $g' \in gHg^{-1}$. Logo, $g' \in \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Assim, $Ker(L) \subset \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Temos então que

$$Ker(L) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} .$$

2) Seja G um grupo topológico, $H \subset G$ fechado e N(H) o normalizador de H em G. Consideremos a função $R: N(H) \times G/H \to G/H$, definida por:

$$R(n,gH) = gHn^{-1} = gn^{-1}H$$

Mostraremos que R é uma ação de N(H) em G/H, ou seja, que N(H) age sobre G/H por translação à direita. Determinaremos também o núcleo desta ação. Temos, em primeiro lugar, que

$$R(n,R(m,gH)) = R(n,gm^{-1}H) = (gm^{-1})n^{-1}H =$$

$$= g(nm)^{-1}H = R(nm, gH) \quad , \quad e$$

$$R(e,gH) = ge^{-1}H = geH = gH .$$

Consideremos, agora, o diagrama

$$\begin{tikzcd} N(H) \times G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ N(H) \times G/H \arrow[r, "R"'] & G/H \end{tikzcd}$$

onde π é a aplicação canônica e α é definida por $\alpha(n,g) = gn^{-1}$. Sabemos que π é contínua e aberta, e que α é contínua. Além disso, o diagrama é comutativo, pois:

$$(\pi.\alpha)(n,g) = \pi(gn^{-1}) = gn^{-1}H = R(n,gH) =$$

$$= [R.(id \times \pi)](n,g) .$$

Portanto, R é contínua ([3], p. 122). Além disso, temos que $Ker(R) = H$, pois se $h \in H$, então $hH = H = Hh$, ou seja $h \in N(H)$. Portanto, $R(h,gH) = gh^{-1}H = gH$, pois, $h^{-1} \in H$. Logo, $h \in Ker(R)$, ou seja, $H \subset Ker(R)$. Agora, se $n \in Ker(R)$, temos que $n \in N(H)$ e $R(n,gH) = gH$, para todo $g \in G$. Daí, $gn^{-1}H = gH$, portanto, $n^{-1}H = H$, ou seja $n^{-1} \in H$. Logo, $n \in H$ e, assim, $Ker(R) \subset H$. Então, $Ker(R) = H$. Neste caso, pela Proposição 2.1, R induz uma ação efetiva de $N(H)/H$ em G/H, dada por

$$(nH)(gH) = n(gH) = gn^{-1}H.$$

3) Se G é um grupo topológico, então G sempre age em si próprio por conjugação, como segue:

$$C : G \times G \to G, \text{ definida por } g(h) = ghg^{-1}.$$

Realmente, C é uma ação, pois:

$$C(g,C(h,s)) = C(g,hsh^{-1}) = g(hsh^{-1})g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1}$$

$$= C(gh,s), \quad e$$

$$C(e,g) = ege^{-1} = g$$

Além disso, C é contínua, pois é a composição das funções contínuas

$$G \times G \to G \times G \times G \to G$$

$$(g,h) \longmapsto (g,h,g^{-1}) \longmapsto ghg^{-1}.$$

O núcleo desta ação é o centro de G, isto é $Ker(C) = Z(G)$. De fato,

$$\begin{aligned} h \in Ker(C) &\iff h(s) = s, \text{ para todo } s \in G \\ &\iff hsh^{-1} = s, \text{ para todo } s \in G \\ &\iff hs = sh, \text{ para todo } s \in G \\ &\iff h \in Z(G). \text{ Logo, } Ker(C) = Z(G). \end{aligned}$$

3. Subgrupos isotrópicos e órbitas

Se X é um G - espaço e $x \in X$, temos, conforme as definições 1.4 e 1.5, que o subgrupo isotrópico de x é $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ e que a órbita de x sob G é o conjunto $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$.

Proposição 3.1

Seja (G,X,Θ) um grupo topológico de transformações e

$x \in X$. Então, G_x é fechado em G.

Prova:

Seja $\alpha : G \times \{x\} \to X$, a restrição de θ, e $\pi_1 : G \times \{x\} \to G$, a projeção na primeira coordenada.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times \{x\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \\ G \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

onde $\beta : G \to X$ é definida por $\beta(g) = g(x)$. Este diagrama é comutativo. Temos que β é contínua, pois α é contínua e π_1 é aberta. Como $\{x\}$ é fechado em X, segue que $G_x = \beta^{-1}(\{x\})$ é fechado em G.

Proposição 3.2

Seja (G,X,θ) um grupo de transformações. Então,

$$Ker(\theta) = \bigcap_{x \in X} G_x .$$

Prova

$$g \in Ker(\theta) \iff g(x) = x, \ \forall x \in X$$

$$\iff g \in G_x, \ \forall x \in X \iff g \in \bigcap_{x \in X} G_x$$

Proposição 3.3

Se (G,X,Θ) é um grupo topológico de transformações, então $Ker(\Theta)$ é fechado em G.

Prova

É uma consequência direta de 3.1 e 3.2, já que a intersecção arbitrária de fechados é fechada.

Proposição 3.4

Seja $\psi : X \to Y$ uma aplicação equivariante entre G- espaços.

Então, $G_x \subset G_{\psi(x)}$, para todo $x \in X$.

Prova

Se $h \in G_x$, temos que $h(x) = x$. Mas $h(\psi(x)) = \psi(h(x))$, pois ψ é equivariante. Logo, $h(\psi(x)) = \psi(h(x)) = \psi(x)$. Portanto, $h \in G_{\psi(x)}$.

Proposição 3.5

Se X é um G-espaço, então duas órbitas em X ou são iguais, ou são disjuntas.

Prova

Sejam $x, y \in X$, quaisquer. Vamos supor que $G(x) \cap G(y) \neq \phi$ ou seja, que existem $g, h \in G$ tais que $g(x) = h(y)$. Se $z \in G(x)$, então $z = g'(x)$ para algum $g' \in G$. Isto implica que $z = g'(g^{-1}g)(x) = (g'g^{-1})h(y)$. Portanto, $z \in G(y)$. Analogamente, se $z \in G(y)$, existe $h' \in G$, tal que $z = h'(y)$. Logo $z = h'(h^{-1}h)(y) = (h'h^{-1})g(x)$.

Portanto, $z \in G(x)$. Então, $G(x) = G(y)$.

Definição 3.1

Seja X um G-espaço e seja $X/G = \{x^* = G(x) \mid x \in X\}$, isto é, o conjunto de todas as órbitas de X. Seja $\pi : X \to X/G$, definida por $\pi(x) = G(x)$. Atribuimos a X/G a topologia quociente, isto é, S é aberto em X/G, se, e somente se, $\pi^{-1}(S)$ é aberto em X. (V. Apêndice, Def. II-4). Nestas condições, chamamos X/G de espaço orbital de X, em relação a G, e π é chamada aplicação orbital.

Definição 3.2

Seja X um G-espaço e $S \subset X$. Chamamos GS de saturação de S.

Proposição 3.6

Se X é um G-espaço e $S \subset X$, então $\pi^{-1}\{\pi(S)\} = GS$.

Prova

$x \varepsilon \pi^{-1} \{\pi(S)\} \iff \pi(x) \varepsilon \pi(S) \iff \pi(x) = \pi(s)$, para algum $s \varepsilon S \iff G(x) = G(s)$, para algum $s \varepsilon S$ $\iff$ existe $g \varepsilon G$, tal que $x = g(s)$, para algum $s \varepsilon S$ $\iff x \varepsilon G(S)$.

Proposição 3.7

Se X é um G-espaço, então π: $X \to X/G$ é contínua e aberta.

Prova

O fato de que π é contínua é imediato (Ver definição 3.1.). Mostraremos que π é aberta. Seja $U \subset X$, aberto. $G(U) = \bigcup_{g \varepsilon G} g(U)$ é aberto, pois, para cada $g \varepsilon G$, $g(U) = \theta_g(U)$ é aberto em X, uma vez que θ_g é um homeomorfismo. Assim, $\pi^{-1}\{\pi(U)\} = G(U)$ é aberto em X. Logo, $\pi(U)$ é aberto em X/G, (pela definição da topologia de X/G). Portanto, π é aberta.

4. Ações de grupos compactos

As proposições que apresentaremos nesta secção, nos dão algumas propriedades importantes, para o caso em que temos ações de grupos compactos.

Proposição 4.1

Se X é um G-espaço, com G compacto, então para todo $x \in X$, $G(x)$ é compacto em X.

Prova

$G(x)$ é a imagem contínua do compacto $G \times \{x\}$ pela restrição da ação, como segue:

$$G \times \{x\} \to G(x), \quad \text{dada por}$$
$$(g,x) \longmapsto g(x).$$

Portanto, $G(x)$ é compacto em X.

Proposição 4.2

Se X é um G-espaço, com G compacto, então $\pi: X \to X/G$ é uma aplicação fechada.

Prova

Seja $A \subset X$, fechado. Pela Proposição 2.2, temos que $G(A)$ é fechado em X. Mas $G(A) = \pi^{-1}\{\pi(A)\}$, conforme a Proposição 3.6. Portanto, $\pi(A)$ é fechado, pela definição da topologia de X/G. Logo, π é uma aplicação fechada.

Proposição 4.3

Se X é um G-espaço, com G compacto, então X/G é um espaço de Hausdorff.

Prova

Consideremos dois elementos de X/G : $x^* = G(x)$ e $y^* = G(y)$, com $x^* \neq y^*$. De acordo com a Proposição 4.1, $G(x)$ e $G(y)$ são subconjuntos compactos de X.

Como X é um espaço de Hausdorff, existe uma vizinhança aberta U, de x, tal que $\overline{U} \cap G(y) = \emptyset$. Logo, $\pi(y) \notin \pi(\overline{U})$, pois se $\pi(y) = G(y) \in \pi(\overline{U})$, existiria $u \in \overline{U}$, tal que $G(u) = G(y)$, e, consequentemente, existiriam $g, g' \in G$, com $g(u) = g'(y)$, ou seja, $u = g^{-1}g'y$, ou ainda, $u \in G(y)$, o que é um absurdo, pois $\overline{U} \cap G(y) = \emptyset$. Também temos que $\pi(U)$ é aberto, pois π é aberta e $G(x) \in \pi(U)$. Além disso, $\pi(\overline{U})$ é fechado, pois π é fechada. Logo, $V = X/G - \pi(\overline{U})$ é aberto, e $G(y) \in X/G - \pi(\overline{U})$. Além disto, $\pi(U) \cap V = \emptyset$. Portanto, existem abertos disjuntos, separando x^* e y^*, ou seja, X/G é de Hausdorff.

Lema 4.4

Seja $\pi: X \to Y$ uma aplicação fechada, com X e Y espaços de Hausdorff, satisfazendo à seguinte propriedade: para qualquer $y \in Y$, $\pi^{-1}(y)$ é compacto. Então, π é uma aplicação própria, isto é, a imagem inversa de um compacto, por π, é compacto.

Prova

Seja $C \subset Y$, compacto e, seja $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de $\pi^{-1}(C)$. Para cada $y \in C$, temos que $\pi^{-1}(y)$ é compacto, logo existe um subconjunto finito $A_y \subset A$, tal que $\{U_\alpha \mid \alpha \in A_y\}$ cobre $\pi^{-1}(y)$. Sejam:

$$U_y = \bigcup \{U_\alpha \mid \alpha \in A_y\}, \text{ e}$$

$$V_y = Y - \pi(X - U_y).$$

Então:

- V_y é aberto, pois U_y é aberto e π é fechada;
- $\pi^{-1}(V_y) \subset U_y$, pois se $x \in \pi^{-1}(V_y)$, temos $\pi(x) \in V_y$, ou seja $\pi(x) \notin \pi(X - U_y)$, ou ainda, $x \in U_y$;
- $y \in V_y$, pois, caso contrário, $y \in \pi(X - U_y)$ o que implicaria em existir $x \in X - U_y$, tal que $y = \pi(x)$, ou seja, $x \in \pi^{-1}(y)$, ou seja, $x \in U_y$, o que é absurdo.

Logo, $\{V_y \mid y \in C\}$ é uma cobertura aberta de C. Como C é compacto, existe uma subcobertura finita de C. Seja $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ esta cobertura. Então,

$C \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \ldots \cup V_{y_n}$, ou seja,

$$\pi^{-1}(C) \subset \pi^{-1}(V_{y_1}) \cup \pi^{-1}(V_{y_2}) \cup \ldots \cup \pi^{-1}(V_{y_n}) \subset$$

$$\subset U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n} = \bigcup \{U_\alpha \mid \alpha \in A_{y_i},\ i=1,2,\ldots,n\}$$

Logo, $\{U_\alpha \mid \alpha\varepsilon A_{y_i}, i=1,2,\ldots,n\}$ é uma cobertura finita de $\pi^{-1}(C)$. Portanto, $\pi^{-1}(C)$ é compacto.

Proposição 4.5

Se X é um G-espaço, com G compacto, então a aplicação orbital $\pi: X \to X/G$ é uma aplicação própria.

Prova

Segue diretamente do Lema 4.4 e das Proposições 4.1, 4.2 e 4.3, já que $\pi^{-1}(x) = G(x)$, para todo $x\varepsilon X$.

Proposição 4.6

Se X é um G-espaço, com G compacto, então:

(i) X é compacto se, e somente se, X/G é compacto.

(ii) X é localmente compacto se, e somente se, X/G é localmente compacto.

Prova

(i) Segue diretamente do fato de que a aplicação orbital é uma aplicação contínua e própria, pois $\pi^{-1}(X/G) = X$.

(ii) Seja X localmente compacto, e seja $G(x) \varepsilon X/G$. Como $x\varepsilon X$, existe um aberto $U \subset X$, tal que $x\varepsilon U$ e $\overline{U}$ é compacto. Então, $G(x) = \pi(x) \varepsilon \pi(U)$.

Mas, $\overline{\pi(U)}$ $\quad \overline{\pi(\overline{U})} = \pi(\overline{U})$, que é compacto, pois π é contínua. Logo, $\overline{\pi(U)}$ é compacto e, portanto X/G é localmente compacto.

Vamos supor, agora, que X/G é localmente compacto. Seja $x \varepsilon X$ e C uma vizinhança compacta de $\pi(x)$. Como π é própria, temos que $\pi^{-1}(C)$ é compacto. Além disto, $x \varepsilon \pi^{-1}(C)$, pois $\pi(x) \varepsilon C$. Logo, X é localmente compacto.

Se X é um G-espaço, e $x \varepsilon X$, consideremos a aplicação natural:

$$\alpha_x : G/G_x \to G(x), \quad \text{dada por}$$

$$\alpha_x(gG_x) = g(x)$$

De acordo com a Proposição 1.2, α_x está bem definida e é bijetora. Para mostrar a continuidade de α_x, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ G/G_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & G(x) \end{tikzcd}$$

onde π é a aplicação canônica, e β é definida por $\beta(g) = g(x)$. O diagrama é comutativo, pois para todo $g \varepsilon G$, temos $(\alpha_x . \pi)(g) =$ $= \alpha_x(gG_x) = g(x) = \beta(g)$. Como π é aberta e β é contínua (V. prova da Proposição 3.1), segue que α_x é contínua. Entretanto, α_x pode não ser um homeomorfismo.

Contra-exemplo

Seja $S^1 = \{z\varepsilon\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $T^2 = S^1 \times S^1$ e $G = R$ = grupo aditivo dos reais. Consideremos a ação:

$$\Theta : R \times T^2 \to T^2 \text{ , definida por}$$

$$r(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(x + r)}, e^{2\pi i(y + kr)}) \text{ ,}$$

onde k é um irracional (fluxo irracional).

Seja $\beta\varepsilon T^2$. O subgrupo isotrópico de β é:

$$\begin{aligned}
G_\beta &= \{r\varepsilon R \mid r(\beta) = \beta\} = \\
&= \{r\varepsilon R \mid (e^{2\pi i(x+r)}, e^{2\pi i(y+kr)}) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})\} = \\
&= \{r\varepsilon R \mid e^{2\pi i(x+r)} = e^{2\pi ix}, e^{2\pi i(y+kr)} = e^{2\pi iy}\} = \\
&= \{r\varepsilon R \mid e^{2\pi ir} = e^{2\pi ikr} = 1\} = \\
&= \{r\varepsilon R \mid 2\pi ir = 2p\pi i,\ 2\pi ikr = 2p'\pi i,\ p,p'\varepsilon \mathbb{Z}\} = \\
&= \{r\varepsilon R \mid r = p \text{ e } kr = p' \text{ , } p,p'\varepsilon \mathbb{Z}\} = \{0\}, \text{ pois}
\end{aligned}$$

k é irracional. Então $G_\beta = \{0\}$ para todo $\beta\varepsilon T^2$. A órbita de β sob G é

$$\begin{aligned}
G(\beta) &= \{r(\beta) \ \varepsilon\ T^2 \mid r\varepsilon R\} = \\
&= \{(e^{2\pi i(x+r)}, e^{2\pi i(y+kr)}) \mid r\varepsilon R\}
\end{aligned}$$

$G(\beta)$ é, portanto, uma reta enrolada no toro. Entretanto $G/G_\beta =$ $= R/\{0\} = R$. A função $\alpha_\beta : G/G_\beta \to G(\beta)$, definida por

$$\alpha_\beta(r) = r(\beta)$$

não é um homeomorfismo, já que α_β não é aberta, pois $G(\beta)$ é denso em T^2, seu complementar também é denso em T, mas $G(\beta) \neq T^2$.

5. Secções. Extensões Equivariantes

Definição 5.1

Seja X um G-espaço e $\pi: X \to X/G$ a aplicação orbital. Uma secção para π é uma aplicação $\sigma: X/G \to X$, tal que $\pi.\sigma$ é a identidade sobre X/G.

Definição 5.2

Seja X um G-espaço, $\pi : X \to X/G$ a aplicação orbital e $\alpha \varepsilon X/G$. Dizemos que existe uma secção local em α, se existe vizinhança U de α e uma aplicação $\sigma : U \to X$, tal que $\pi.\sigma = id_U$. Neste caso, dizemos que σ é uma secção local em α.

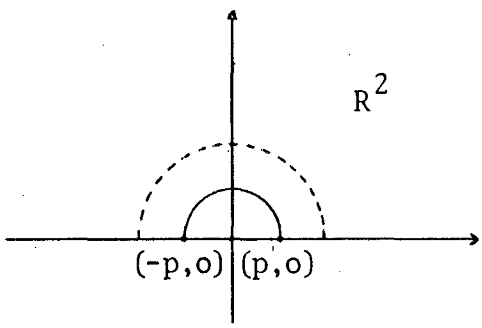
Exemplo

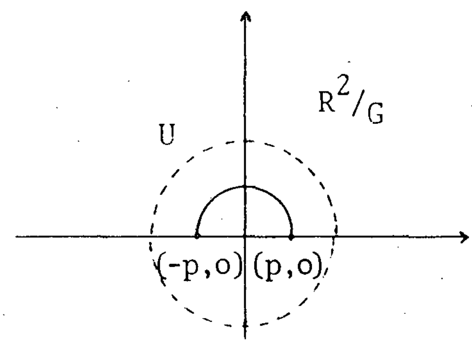
Seja $G = \{I,-I\} \subset O(2)$, agindo sobre R^2 como segue:

$$g(x,y) = \begin{cases} (x,y), \text{ se } g = I \\ \\ (-x,-y), \text{ se } g = -I \end{cases}$$

Se $a = (x,y) \neq 0$, então sua órbita é $G(a) = \{g(a) | g \varepsilon G\} = \{a,-a\}$ e $G(0) = \{0\} = \pi(0)$.

Neste caso, não há secção local ao redor de $\pi(0)$.





Suponhamos que exista uma secção local em $\pi(0)$. Então, existe uma vizinhança U de $\pi(0)$, e existe uma aplicação $\sigma : U \to R^2$ tal que $\pi . \sigma = id_U$. Sendo $\pi^{-1}(U)$ uma vizinhança de 0, ela contém uma bola aberta com centro em 0 e raio 2p. Consideremos, agora, a curva contínua, $r : [0,\pi] \to \pi^{-1}(U)$, definida por $r(t) = (p \cos t, p \operatorname{sen} t)$.

Então, $s = \pi . r$ é uma curva em R^2/G, tal que

$$s(0) = s(\pi) = \{(p,0),(-p,0)\}$$

Além disto, s é injetora em $(0,\pi)$. Seja α a aplicação

$$\alpha : [0,\pi] \to ([0,\pi] \ / \ 0 \equiv \pi) \cong S^1$$

que é contínua, e seja ρ a aplicação

$$\rho : ([0,\pi] \ / \ 0 \equiv \pi) \to U,$$

definida de modo que o diagrama abaixo seja comutativo ([3], p. 123, Teor. 3.2).

$$\begin{tikzcd} {[0,\pi]} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\alpha"'] & U \\ ([0,\pi] \mid 0 \equiv \pi) \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, ρ é contínua. Logo, a composta $\sigma.\rho : ([0,\pi] \mid 0 \equiv \pi) \to R^2$ também é contínua. Mas $\lim_{t\to\overline{\pi}} (\sigma.\rho)(t)$ não existe, pois se t tende a $\overline{\pi}$ por valores crescentes, $(\sigma.\rho)(t)$ tende a (-p,o), mas se t tende a $\overline{\pi}$ por valores decrescentes, então $(\sigma.\rho)(t)$ tende a (p,o).

Logo, $\sigma.\rho$ não é contínua em $\overline{\pi}$, o que é um absurdo. Portanto, não existe secção local em $\pi(0)$.

Proposição 5.1

Seja X um G-espaço, com G compacto. Seja $C\subset X$, fechado, tocando cada órbita em, exatamente, um ponto. Então, a aplicação

$$\sigma : X/G \to X, \text{ definida por}$$

$$\{\sigma(G(x))\} = G(x) \cap C$$

é uma secção. Reciprocamente, a imagem de uma secção é fechada em X.

Prova

Seja $x^* = G(x) \in X/G$. Então,

$$(\pi.\sigma)(x^*) = \pi(\sigma(x^*)) = x^*.$$

Logo, $\pi.\sigma = id_{X/G}$. Vamos mostrar que σ é contínua.

Seja $A \subset C$, fechado. Então $\sigma^{-1}(A) = \pi(A)$, que é fechado, pois π é fechada (Ver Prop. 4.2).

Se $A' \subset X$ é fechado, e $A = A' \cap C \subset C$, então $\sigma^{-1}(A') = \sigma^{-1}(A)$, que é fechado. Logo, σ é contínua. Portanto, σ é uma secção.

Agora, seja $\sigma : X/G \to X$ uma secção e seja $C = \sigma(X/G)$. Consideremos uma rede $\{x_\alpha\}$ em C, que converge para $x \varepsilon X$. Então

$$\lim \pi(x_\alpha) = \pi(x), \quad \text{pois } \pi \text{ é contínua.}$$

Assim, $\lim \sigma\pi(x_\alpha) = \sigma\pi(x) = \sigma(\pi(x)) \varepsilon C$. Mas, $\lim \sigma\pi(x_\alpha) = \lim x_\alpha = x$. Portanto, $x \varepsilon C$, o que mostra que C é fechado em X.

<u>Observação</u>

Tendo em vista este teorema, muitas vezes chamamos de secção o conjunto fechado que é a imagem da secção.

<u>Proposição 5.2</u>

Dados os G-espaços X e Y, com G compacto, seja $C \subset X$, fechado e seja $\Psi : C \to Y$ uma aplicação tal que, se $c \varepsilon C$ e $g(c) \varepsilon C$ para algum $g \varepsilon G$, então $\Psi(g(c)) = g\Psi(c)$. Então, Ψ pode ser extendida, de maneira única, a uma aplicação equivariante

$$\psi : G(C) \to Y$$

Prova

Para $g \varepsilon G$ e $c \varepsilon C$, definimos

$$\psi : G(C) \to Y, \text{ por } \psi(g(c)) = g(\Psi(c))$$

que é a única possibilidade para uma extensão equivariante, pois, se existisse outra ψ', equivariante, teríamos

$$\psi'(g(c)) = g(\psi'(c)) \text{ e } \psi' = \Psi \text{ em } C.$$

Neste caso, $\psi'(g(c)) = g(\psi'(c)) = g(\Psi(c))$, o que implica em $\psi' = \psi$ em $G(C)$.

Além disto, ψ está bem definida, pois se $g(c) = g'(c')$, então $c = g^{-1}g'(c')$, donde $\Psi(c) = (g^{-1}g'(c')) = g^{-1}g' \Psi(c')$, ou seja, $g \Psi(c) = g' \Psi(c')$, ou ainda, $\psi(g(c)) = \psi(g'(c'))$.

Vamos mostrar que ψ é contínua. Seja $\{x_\alpha\}$ uma rede em $G(C)$, que converge para $x \varepsilon G(C)$. Façamos $x_\alpha = g_\alpha(c_\alpha)$. Tomando uma subrede, podemos supor que $\{g_\alpha\}$ converge para $g \varepsilon G$, porque G é compacto ([3], p. 223, Teor. 1.3). Então:

$$\lim c_\alpha = \lim g_\alpha^{-1}(x_\alpha) = g^{-1}(x) = c \varepsilon C,$$ já

que C é fechado. Logo:

$$\lim \psi(x_\alpha) = \lim \psi(g_\alpha(c_\alpha)) = \lim g_\alpha \Psi(c_\alpha) = $$
$$= g\Psi(c) = \psi(g(c)) = \psi(x)$$

ou seja, ψ é contínua.

Corolário 5.1

Dados os G-espaços X e Y, com G compacto, e seja $C \subset X$ uma secção de $\pi: X \to X/G$. Se $\Psi: C \to Y$ é uma aplicação tal que $G_c \subset G_{\Psi(c)}$, para todo $c \in C$, então, existe uma única extensão de Ψ a uma aplicação equivariante $\psi: X \to Y$.

Prova

Se c e g(c) são elementos de C, temos que $g(c)=c$, já que $\pi(g(c)) = \pi(c)$. Logo, $g \in G_c \subset G_{\Psi(c)}$ e, portanto

$$\Psi(g(c)) = \Psi(c) = g\Psi(c)$$

Aplica-se, então, a Proposição 5.2, e temos que Ψ pode ser extendida, de modo único, a uma aplicação equivariante $\psi: G(C) \to Y$. Mas $G(C) = X$, pois C é uma secção e toca cada órbita de X $(C = \sigma(X/G))$. Logo, existe $\psi: X \to Y$, como pedida no enunciado.

Proposição 5.3 - Teorema de Tietze - Gleason

Seja G um grupo compacto agindo sobre um espaço normal X e A um subespaço fechado, invariante, de X. Seja $\rho: G \to Gl(n,R)$ uma representação de G e $\Psi: A \to R^n$ uma aplicação equivariante, isto é, $\Psi(ga) = \rho(g)\,\Psi(a)$, para todo $g \in G$ e $a \in A$. Então, existe uma extensão de Ψ a uma aplicação equivariante $\psi: X \to R^n$.

Prova

Sendo X um espaço normal, e A fechado, pelo Teore ma da extensão de Tietze ([3], p. 149) existe uma extensão contínua de Ψ, Ψ': $X \to R^n$.

Para obtermos uma extensão equivariante, definimos

$$\psi(x) = \int \rho(g^{-1})\Psi'(gx)\, dg$$

onde a integral é a integral normalizada de Haar (V. Apênd. Def. II.10). Então, para todo $h \varepsilon G$, temos:

$$\begin{aligned}
\psi(hx) &= \int \rho(g^{-1})\Psi'(g(hx))\, dg = \\
&= \int \rho(g^{-1})\Psi'((gh)x)\, dg = \\
&= \int \rho(h(gh)^{-1})\Psi'((gh)x)\, dg = \\
&= \int \rho(h)\rho((gh)^{-1})\Psi'((gh)x)\, dg = \\
&= \rho(h)\int \rho(g)^{-1}\Psi'(gx)\, dg = \\
&= \rho(h)\psi(x).
\end{aligned}$$

Portanto, ψ é equivariante. Além disso, ψ é uma extensão de Ψ, pois se $a \varepsilon A$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= \int \rho(g^{-1})\Psi'(ga)\, dg = \\
&= \int \rho(g^{-1})\Psi(ga)\, dg,
\end{aligned}$$

pois $\Psi = \Psi'$ sobre A. Mas, $\rho(g^{-1})\Psi(ga) = \Psi(g^{-1}(ga)) =$

$= \Psi(a)$. Logo,

$$\psi(a) = \int \Psi(a)\, dg = \Psi(a)\int dg = \Psi(a).$$

O fato de que ψ é contínua, segue da Proposição II.2 do Apêndice.

Observação

O Teorema de Tietze - Gleason pode ser estendido para o caso em que X é um espaço completamente regular e A é compacto e invariante. Isto ocorre, porque é possível compactificar X pela Compactificação de Stone - Cech. Seja $\beta(X)$ uma tal compactificação de X. Então $\beta(X)$ é um espaço normal ([3], p. 223) e A, sendo compacto em X, é, com certeza, fechado em $\beta(X)$. Logo, posso aplicar o Teorema da extensão de Tietze e obter uma extensão contínua $\overline{\Psi}$ de Ψ, para $\beta(X)$. A restrição de $\overline{\Psi}$ a X será uma extensão contínua de Ψ a X.

6. Tipos de Órbitas

Definição 6.1

Uma ação de G em X é dita transitiva, se, para todo $x,y \in X$, existe $g \in G$, tal que $y = g(x)$. Neste caso, existe apenas uma órbita, que é o próprio X.

Como exemplo de ação transitiva, consideremos a seguinte ação:

$\theta : G \times G/H \to G/H$, com $H \subset G$, fechado, definida por

$\theta_g(g'H) = gg'H$ (translação à esquerda).

Definição 6.2

Se G age sobre X transitivamente, dizemos que X é um espaço transitivo.

Proposição 6.1

Se G é compacto, $\alpha_x : G/G_x \to G(x)$, definida por $\alpha_x(gG_x) = g(x)$ é uma equivalência de G-espaços transitivos.

Prova

α_x é um homeomorfismo, pois é uma aplicação bijetora de um espaço compacto sobre um espaço de Hausdorff ([3], p. 226, Teor. 2.1). Além disto, α_x é equivariante em relação à translação de G sobre G/G_x e a restrição da ação de G sobre $G(x) \subset X$, pois

$$\alpha_x(gg'G_x) = gg'(x) = g(g'(x)) = g\alpha_x(g'G_x)$$

Logo, α_x é uma equivalência dos G-espaços transitivos G/G_x e $G(x)$.

Consideremos a classe de todos os G-espaços, com G compacto. Esta classe forma uma categoria, cujos morfismos são as aplicações equivariantes. A subcategoria completa, formada pelos G-espaços transitivos é chamada de categoria das G-órbitas. (V. Apêndice - Def. I.3). Cada objeto nesta categoria é isomorfo a um espaço G/H onde, o significado de "isomorfo" na categoria das G-órbitas é de G-equivalente. Neste caso, precisamos caracterizar os morfismos entre estes espaços. A proposição que segue, nos diz sob que condições existe uma aplicação equivariante

$G/H \to G/K$, e qual a forma desta aplicação.

Proposição 6.2

Seja G compacto, e H e K subgrupos fechados de G. Então

(i) Existe uma aplicação equivariante $\psi : G/H \to G/K$ se, e somente se, H é conjugado a um subgrupo de K;

(ii) Se $a \in G$ e $aHa^{-1} \subset K$, seja $R_a^{K,H} : G/H \to G/K$, dada por $R_a^{K,H}(gH) = ga^{-1}K$. Então, $R_a^{K,H}$ é equivariante;

(iii) Se $\psi : G/H \to G/K$ é uma aplicação equivariante, ψ tem a forma $R_a^{K,H}$ para algum $a \in G$, com $aHa^{-1} \subset K$;

e (iv) $R_a^{K,H} = R_b^{K,H}$ se, e somente se, $ab^{-1} \in K$.

Prova

(i) Consideremos uma aplicação qualquer $f : G/H \to G/K$, e seja $f(H) = a^{-1}K$, para algum $a \in G$. Se f é equivariante, temos

$$f(gH) = gf(H) = ga^{-1}K, \text{ para todo } g \in G.$$

Para que f seja definida por esta fórmula, devemos ter:

$$f(ghH) = f(gH), \text{ para todo } h \in H, \text{ pois}$$

$hH = H$.

Portanto, $(gh)a^{-1}K = ga^{-1}K$, para todo $h\varepsilon H$, ou seja, $ha^{-1}K = a^{-1}K$, para todo $h\varepsilon H$. Isto implica em que, para cada $h\varepsilon H$, temos $aha^{-1}K = K$, ou seja, $aha^{-1} \varepsilon K$, ou ainda, $aHa^{-1} \subset K$. Logo, H é conjugado a um subgrupo de K.

A recíproca é verdadeira, pois se H é conjugado a um subgrupo de K, existe $a\varepsilon G$, tal que $aHa^{-1} \subset K$. Neste caso, a aplicação $f : G/H \to G/K$, definida por

$$f(gH) = ga^{-1}K$$

é bem definida e é equivariante, já que

$$f(gH) = ga^{-1}K = gf(H)$$

(ii) Seja $a\varepsilon G$, $aHa^{-1} \subset K$ e $R_a^{K,H} : G/H \to G/K$, definida por $R_a^{K,H}(gH) = ga^{-1}K$. Pela prova da recíproca do item (i), temos que $R_a^{K,H}$ está bem definida e é equivariante.

(iii) Segue imediatamente dos itens (i) e (ii).

(iv) $R_a^{K,H} = R_b^{K,H} \iff R_a^{K,H}(gH) = R_b^{K,H}(gH)$, para todo $g\varepsilon G$

$$\iff ga^{-1}K = gb^{-1}K, \text{ para todo } g\varepsilon G$$

$$\iff a^{-1}K = b^{-1}K \iff ab^{-1}K = K$$

$$\iff ab^{-1} \varepsilon K.$$

Observações

1. Se $K = aHa^{-1}$, então $R_a^{K,H}$ é a translação à direita

$$gH \longmapsto gHa^{-1}, \quad \text{pois:}$$

$$R_a^{K,H}(gH) = ga^{-1}K = ga^{-1}(aHa^{-1}) = gHa^{-1}$$

2. $R_a^{K,H} = R_e^{K,aHa^{-1}} \cdot R_a^{aHa^{-1},H}$, que é a composição da translação à direita $gH \longmapsto gHa^{-1} = (ga^{-1})aHa^{-1}$, com a aplicação natural $f : G/aHa^{-1} \longmapsto G/K$, definida por $f(gK') = gK$, induzida pela inclusão $aHa^{-1} = K' \subset K$. De fato:

$$
\begin{aligned}
(R_e^{K,aHa^{-1}} \cdot R_a^{aHa^{-1},H})(gH) &= \\
= R_e^{K,aHa^{-1}}(R_a^{aHa^{-1},H}(gH)) &= \\
= R_e^{K,aHa^{-1}}(ga^{-1}(aHa^{-1})) &= \\
= (ga^{-1})e^{-1}K = ga^{-1}K &= \\
= R_a^{K,H}(gH) &, \text{ para todo } g \in G.
\end{aligned}
$$

Se $K' = aHa^{-1}$, então $R_e^{K,K'}(gK') = ge^{-1}K = gK$.

3. Toda aplicação equivariante $f : G/H \to G/H$ é uma translação à direita por um elemento de $N(H)$ e é, portanto, uma equivalência de G-espaços. De fato, se $K = H$, temos que $aHa^{-1} \subset H$, portanto, $aHa^{-1} = H$ ([1], p. 4, Prop. 1.9). Neste caso, pela observação

1, f é a translação à direita $gH \mapsto gHa^{-1}$, com $a \in N(H)$, pois $aHa^{-1} = H$. Assim, f é uma equivalência de G-espaços.

4. A aplicação $a \longmapsto R_a^{H,H}$ induz um isomorfismo de $N(H)/H$ sobre o grupo $Homeo^G(G/H)$ (sob composição) de auto equivalências do G-espaço G/H com a topologia compacto aberta. ([3], p. 257). A ação translação à direita $N(H) \times G/H \to G/H$, definida por $a(gH) = gHa^{-1}$, é contínua. Neste caso, a aplicação

$$N(H) \to Homeo^G(G/H), \text{ dada por}$$

$$a \longmapsto R_a^{H,H}$$

também é contínua ([3], p. 261, Teor. 3.1). Além disto, ela é sobrejetora, pela Observação 3, e é um homomorfismo, pois $R_{ab}^{H,H} = R_a^{H,H} . R_b^{H,H}$. Logo, a aplicação induzida

$$N(H)/H \to Homeo^G(G/H)$$

é contínua e bijetora ([1], p. 3, Prop. 1.7). Como N(H) é fechado ([1], p. 4), temos que é compacto pois G é compacto. Portanto, é um isomorfismo de grupos topológicos, e assim, é um homeomorfismo, já que N(H)/H é compacto e X é de Hausdorff ([3], p. 226, Teor. 2.1).

5. Se existem aplicações equivariantes $f : G/H \to G/K$ e $g : G/K \to G/H$, então, cada uma delas é uma equiva -

lência, e H é conjugado a K.

De fato, temos, pela Proposição 6.2 (iii), que existem $a, b \varepsilon G$, tais que $f = R_a^{K,H}$ e $g = R_b^{H,K}$, com $aHa^{-1} \subset K$ e $bKb^{-1} \subset H$.

Consideremos a composição:

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & G/K \arrow[r, "g"] & G/H \end{tikzcd}$$

Sendo h uma aplicação equivariante de G/H em G/H, então, pela Observação 3, temos que h é uma equivalência de G-espaços, e, portanto, f e g são equivalências.

Além disso, $aHa^{-1} \subset K$ e $bKb^{-1} \subset H$, portanto,

$$baHa^{-1}b^{-1} \subset bKb^{-1} \subset H$$

Logo,

(A) $$(ba)H(ba)^{-1} \subset bKb^{-1} \subset H$$

Sendo G compacto e $H \subset G$, fechado, temos que

(B) $$(ba)H(ba)^{-1} = H \text{ ([1], p. 4, Prop.1.9)}$$

De (A) e (B) segue que $bKb^{-1} = H$ e, portanto, H e K são conjugados.

Consideremos a categoria das G-órbitas cujos morfismos são as aplicações equivariantes e, vamos estabelecer uma relação de equivalência , como segue:

$G/H \sim G/H \iff$ existem aplicações equivariantes $f : G/H \to G/K$ e $g : G/K \to G/H$.

Obtemos, desta forma, a <u>categoria dos tipos de G-órbitas</u>, que é a categoria das classes de equivalência das G-órbitas, cujos morfismos são definidos da seguinte forma: Sejam $[A]$ e $[B]$ classes de equivalência de G-órbitas. Então, $[f]: [A] \to [B]$ é um morfismo, se $[f]$ é a classe de equivalência das aplicações equivariantes entre elementos de $[A]$ e $[B]$, com a relação dada como segue. Se $A_1, A_2 \in [A]$, $B_1, B_2 \in [B]$, $f_1: A_1 \to B_1$ e $f_2: A_2 \to B_2$ são equivariantes, então $f_1 \sim f_2$, se existem isomorfismos (categóricos) equivariantes $g_a: A_1 \to A_2$ e $g_b: B_1 \to B_2$, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_a"'] & B_1 \arrow[d, "g_b"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

comuta. A composição de morfismos é feita através da composição de representantes das classes, convenientemente escolhidos, de modo que

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & C_2 \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Definição 6.3

Se X é um G-espaço transitivo, definimos tipo (X) como sendo a classe de equivalência de X, sob homeomorfismos equivariantes.

Propriedades

1. tipo (X) contém um espaço G/H

Prova

Já vimos que X é homeomorfo a algum espaço G/H. (Ver p. 34).

2. tipo (G/H) = tipo (G/K) $\iff$ H e K são conjugados em G.

Prova

tipo (G/H) = tipo (G/K) $\iff$ existem aplicações $G/H \to G/K$ e $G/K \to G/H$ $\iff$ H e K são conjugados (pela Obs. 5).

3. Um morfismo tipo $(G/H) \to$ tipo (G/K) existe $\iff$ existe uma aplicação equivariante $G/H \to G/K$ $\iff$ H é conjugado a um subgrupo de K.

Prova

Segue imediatamente da definição de morfismo e da Proposição 6.2 (i).

Notação

Se existe um morfismo tipo (X) $\to$ tipo (Y), escrevemos

$$\text{tipo } (X) \geqslant \text{tipo } (Y)$$

e, com isto, estabelecemos uma ordenação parcial na classe dos tipos de órbita, com tipo (*) = tipo (G/G) sendo um mínimo, e tipo (G) um máximo.

Exemplo

Sejam $G = SO(3)$, X o espaço das matrizes reais simétricas, 3x3, de traço nulo, e, Y o subespaço topológico do R^3 que consiste das ternas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, com $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Consideremos a ação $\theta : G \times X \to X$, definida por $\theta_g(x) = gxg^{-1}$.

Observemos que x e y estão na mesma órbita desta ação se, e somente se, os autovalores de x e y são os mesmos, contando multiplicidades.

A aplicação $\pi' : X \to Y$, que leva uma matriz x em seus autovalores, na ordem decrescente, é tal que

$$\pi'(x) = \pi'(x') \iff G(x) = G(x') \qquad (A)$$

Além disso, ela tem uma inversa à direita $\sigma: Y \to X$, definida por

$$\sigma(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

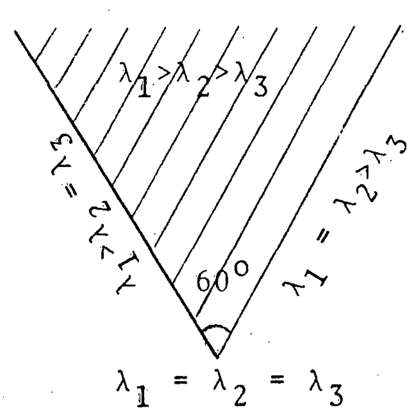
Temos que Y é homeomorfo a X/G, com π' correspondendo à aplicação orbital π, e σ à secção. De fato, consideramos o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "\sigma"] & X \arrow[l, shift left, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"] \\ & X/G \arrow[ul, "f"] \end{tikzcd}$$

Seja $f : X/G \to Y$, definida por $f(G(x)) = \pi'(x)$.

Então, f está bem definida (por (A)) e é um homeomorfismo, pois é contínua, $f \cdot (\pi\sigma) = id_Y$ e $(\pi\sigma) \cdot f = id_{X/G}$.

A representação geométrica de Y é



Consideremos o ponto $x = \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$,

com $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Então:

$$H = G_x = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

H é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)\}$.

Logo, as órbitas destes pontos são $G(x) = SO(3)/\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Para pontos $x = \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, com $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ o grupo isotrópico é formado pelas matrizes do tipo

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$*$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array}\right]$$

onde $* \in O(2)$, com $\det * = \pm 1$, de tal forma que $A \in SO(3)$.

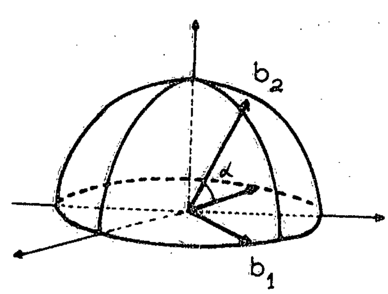
Neste caso, as órbitas de tais elementos serão planos projetivos, pois se $H = G_x$, então $SO(3)/H \approx P^2$. De fato, fixemos $g \in SO(3)$,

$$g = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_1,\ a_2,\ a_3),$$

onde a_1, a_2, a_3 são vetores coluna do R^3, e consideremos a classe gH. Nela existe um elemento

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = (b_1, b_2, b_3) ,$$

tal que $b_{31} = 0$, $b_{32} > 0$ e $b_{33} \geqslant 0$. Portanto, b_1 fica no plano horizontal do R^3 e lhe associamos o elemento t de S^1, correspondente à circunferência unitária deste plano. O vetor b_2 fica no casquete superior da esfera unitária do R^3. Chamaremos de α o ângulo formado por b_2 e o vetor do plano horizontal que está a 90° de b_1 (conforme figura), com $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.



A cada coclasse gH, corresponde pelo menos um par (t,α) como descrito acima. Observemos que para cada $t \varepsilon S^1$, $(t,0)$ e $(-t,0)$ estão determinados por uma mesma coclasse gH e que os pontos $(t, \frac{\pi}{2})$ estão determinados pela mesma coclasse, para todo $t \varepsilon S^1$. Portanto, considerando no espaço produto $S^1 \times [0,\pi/2]$ de pares (t,α), as identificações $(t,0) \sim (-t,0)$, para cada $t \varepsilon S^1$ e $(t,\pi/2) \sim (t',\pi/2)$ para quaisquer $t,t' \varepsilon S^1$, nos dão o plano proje tivo. Portanto, $SO(3)/_H$ se identifica com o plano projetivo P^2.

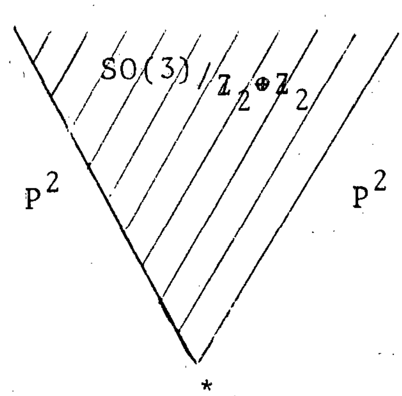
Para pontos $x = \sigma(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, com $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$, o grupo isotrópico é formado pelas matrizes do tipo

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ & & * \\ 0 & & \end{array}\right]$$

onde $* \in O(2)$, com $\det * = \pm 1$, de tal forma que $B \in SO(3)$ e, as órbitas destes elementos também serão planos projetivos.

Finalmente, para pontos $x = \sigma(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, o grupo isotrópico é o próprio $SO(3)$ e, portanto, a órbita é um ponto.

Temos, assim, para esta ação, três tipos de órbitas, que são representadas geomètricamente no seguinte desenho



Definição 6.4

Seja X um G-espaço e $x \in X$. Dizemos que x é um <u>ponto fixo de G sobre X</u>, quando $g(x) = x$, para todo $g \in G$. Neste caso, $G_x = G$ e $G(x) = \{x\}$.

<u>Notação</u>

Representaremos o subespaço dos pontos fixos de G sobre X por:

$$X^G = \{x \varepsilon X \ / \ g(x) = x, \quad g \varepsilon G\}$$

ou também,

$$F(G,X) = X^G .$$

C A P Í T U L O II

TEOREMA DA EXISTÊNCIA DE TUBOS

1. PRODUTO TORCIDO

Definição 1.1

Seja G um grupo topológico, X um G-espaço à direita e Y um G-espaço à esquerda. Neste caso, G age sobre X x Y, por

$$g(x,y) = (xg^{-1},gy)$$

O espaço orbital desta ação é chamado de produto torcido de X e Y, e é representado por $X \times_G Y$.

Segue imediatamente da definição, que o produto torcido $X \times_G Y$ é o espaço quociente de X x Y, pela relação de equivalência

$$(xg,y) \sim (x,gy)$$

A órbita de um ponto (x,y) é a classe de equivalência representada por: $[x,y] = G(x,y)$.

Proposição 1.1

$[x,y] = [x',y']$, se, e somente se, existe $g \in G$, tal que $x' = xg^{-1}$ e $y' = gy$.

Prova

$$[x,y] = [x',y'] \iff (x,y) \in [x',y'] \iff$$

$$\text{existe } g \in G, \text{ tal que } x' = xg^{-1} \text{ e } y' = gy.$$

Segue daí, que $[xg,y] = [x,gy]$.

Dados dois G-espaços à esquerda Y e Y', e uma aplicação equivariante $f : Y \to Y'$, então f induz a aplicação

$$X \times_G f : X \times_G Y \to X \times_G Y'$$

definida por $[x,y] \longmapsto [x,f(y)]$.

Analogamente, se $f : X \to X'$ é uma aplicação equivariante de G-espaços à direita, temos a aplicação induzida

$$f \times_G Y : X \times_G Y \to X' \times_G Y$$

definida por $[x,y] \longmapsto [f(x),y]$.

Portanto, a construção do produto torcido é funtorial.

Proposição 1.2

Seja X um G-espaço à direita, Y, Y' G-espaços à esquerda e $f : Y \to Y'$ uma aplicação aberta. Então, a aplicação induzida $X \times_G f$ também é aberta.

Prova

O diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{X \times f} & X \times Y' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X \times_G Y & \xrightarrow[X \times_G f]{} & X \times_G Y' \end{array}$$

é comutativo, pois

$$(x,y) \xmapsto{X \times f} (x,f(y)) \xmapsto{\pi} [x,f(y)]$$

$$(x,y) \xmapsto{\pi'} [x,y] \xmapsto{X \times_G f} [x,f(y)]$$

Como π e π' são aplicações abertas e contínuas (Ver Prop. 3.7 - Cap. I), temos que dado um aberto $A \subset X \times_G Y$, $\pi^{-1}(A)$ é aberto, $(X \times f)(\pi^{-1}(A))$ é aberto, pois f é aberta, e $\pi'((X \times f)(\pi^{-1}(A)))$ é aberta. Logo, $(X \times_G f)(A)$ é aberto em $X \times_G Y'$.

Exemplo

Seja X um G-espaço à direita, Y um G-espaço à esquerda e $Y' = \{*\}$.

Consideremos $f : Y \to Y'$, definida por $f(y) = *$, para todo $y \in Y$. Então, Y' é um G-espaço à esquerda, pela ação $g(*) = *$, para todo $g \in G$, e f é equivariante, pois:

$$f(g(y)) = * = g(*) = g(f(y))$$

Além disto, f é aberta, pois leva qualquer aberto de Y em $\{*\} = Y'$ que é aberto, pois é o espaço todo.

A aplicação induzida $X \times_G Y \to X \times_G \{*\}$ é, portanto, aberta. Isto pode ser descrito como uma aplicação entre espaços orbitais induzidos pela projeção equivariante $X \times Y \to X$, já que $X \times_G \{*\} \approx X/G$.

Analogamente, temos a aplicação aberta $X \times_G Y \to Y/G$.

Podemos definir uma ação sobre um produto torcido, como segue: Seja X um K-espaço à direita com $K \subset G$, e G-espaço à esquerda, com

$$(gx)k = g(xk), \text{ para qualquer } g \in G,\ x \in X \text{ e } k \in K,$$

e seja Y um K-espaço à esquerda. Definimos uma ação de G em $X \times_K Y$ por

$$g\,[x,y] = [gx,y]$$

Analogamente, se Y é um H-espaço à direita, com $H \subset G$, então $X \times_K Y$ também é por $[x,y]h = [x,yh]$.

<u>Proposição 1.3</u>

Se X é um G-espaço à direita, então X é equivalente ao G-espaço à direita $X \times_G G$.

<u>Prova</u>

Vamos mostrar que a aplicação $X \times_G G \to X$, dada por $\Psi : [x,g] \longmapsto xg$, é um homeomorfismo equivariante, com inversa dada por $\Psi^{-1}(x) = [x,e]$.

As aplicações Ψ e Ψ^{-1} estão bem definidas, pois se $[x,g] = [x',g']$, então existe $h \in G$, tal que $x' = xh^{-1}$ e $g' = hg$, logo $x'g' = (xh^{-1})(hg) = xg$, e se $x = x'$, temos $[x,e] = [x',e]$.

Além disto, $(\Psi . \Psi^{-1})(x) = \Psi([x,e]) = xe = x$, e $(\Psi^{-1}.\Psi)[x,g] = \Psi^{-1}(xg) = [xg,e] = [x,ge] = [x,g]$.

As aplicações Ψ e Ψ^{-1} são contínuas, pois o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times G \arrow[rr, "\pi"', "\text{(aberta e contínua)}"] \arrow[d, "\text{ação (contínua e aberta)}"'] & & X \times_G G \arrow[dll, shift left, "\Psi"] \\
X \arrow[urr, shift left, "\Psi^{-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo nos dois sentidos, já que

$$(\Psi . \pi)(x,g) = \Psi[x,g] = xg \quad , \quad \text{e}$$

$$\Psi^{-1}(xg) = [xg,e] = [x,g] = \pi(x,g).$$

Temos também que Ψ é equivariante, pois

$$\Psi([x,y]g) = \Psi[x,yg] = x(yg) = (xy)g = (\Psi[x,y])g.$$

Logo, Ψ é um homeomorfismo equivariante.

Consideremos a seguinte situação:

X um H-espaço à direita;

Y um H-espaço à esquerda e um K-espaço à direita;

Z um K-espaço à esquerda.

Neste caso, podemos estabelecer um homeomorfismo natural

$$\Psi : (X \times_H Y) \times_K Z \to X \times_H (Y \times_K Z),$$

dado por:

$$\Psi\, [[x,y],z] = [x,[y,z]].$$

Ψ está bem definida, já que, se $[x,[y,z]] = [x',[y',z']]$, então existe $h \in H$, tal que $x' = xh^{-1}$ e $[y',z'] = h[y,z] = [hy,z]$, ou seja, existe $k \in K$, com $y' = hyk^{-1}$ e $z' = kz$.

Logo, $[[x',y'], z'] = [[xh^{-1},hyk^{-1}], kz] =$

$$= [[xh^{-1},hy]\, k^{-1}, kz] = [[x,y], z].$$

Como as aplicações orbitais são abertas e contínuas, e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \times Y) \times Z \arrow[r, "\text{homeo}"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \times (Y \times Z) \arrow[d, "\beta"] \\
(X \times_H Y) \times_K Z \arrow[r, shift left, "\Psi"] & X \times_H (Y \times_K Z) \arrow[l, shift left, "\Psi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

é comutativo nos dois sentidos, sendo $\alpha : ((x,y),z) \longmapsto [[x,y],z]$, $\beta : (x,(y,z)) \longmapsto [x,[y,z]]$ e o homeomorfismo dado por $((x,y),z) \longmapsto (x,(y,z))$, segue que Ψ é um homeomorfismo.

2. FIBRADOS

Consideremos dois espaços topológicos de Hausdorff, X e B, e um grupo topológico K agindo efetivamente à direita sobre um espaço F.

Definição 2.1

Um fibrado é uma aplicação $p : X \to B$ junto com uma coleção Φ de homeomorfismos $\Psi : F \times U \to p^{-1}(U)$, para $U \subset B$, aberto, que satisfazem às seguintes condições:

(1) Para qualquer $\Psi \varepsilon \Phi$, temos que $p.\Psi(x,y) = y$, para todo $x \varepsilon F$ e $y \varepsilon U$.

(2) Todo ponto $b \varepsilon B$ possui uma vizinhança V, tal que existe $\Psi : F \times V \to p^{-1}(V)$, com $\Psi \varepsilon \Phi$.

(3) Se $\Psi : F \times U \to p^{-1}(U)$ está em Φ, e $V \subset U$ é aberto, então a restrição de Ψ a $F \times V$ também está em Φ.

(4) Se Ψ, $\psi : F \times U \to p^{-1}(U)$ estão em Φ, existe uma aplicação $\Theta : U \to K$, tal que

$$\psi(f,u) = \Psi(f\,\Theta(u),u), \text{ para todo } f \varepsilon F \text{ e todo}$$

$u \varepsilon U$.

(5) A coleção Φ é maximal entre todas as famílias que satisfazem as condições acima.

Nas condições da Definição 2.1, chamaremos X de espaço total, B de espaço base, F de fibra, K de grupo estrutural do fibrado, cada $\Psi: F \times U \to p^{-1}(U)$, $\Psi\varepsilon\Phi$, de carta sobre U e Θ de função transição.

Definição 2.2

Uma secção de um fibrado é uma aplicação $f : B \to X$, tal que

$$pf(u) = u \text{ , para todo } u\varepsilon B.$$

Podemos observar, imediatamente, que:

- A função transição é determinada, univocamente, por

$$\Psi^{-1}\psi(f,u) = \Psi^{-1}(\Psi(f\ \Theta(u),u)) =$$

$$= (f\ \Theta(u),u)$$

Se houvesse outra função $\Theta' : U \to K$, satisfazendo a condição de (4), ou seja, $\psi(f,u) = \Psi(f\Theta'(u),u)$, então $(f\ \Theta(u),u) = (f\ \Theta'(u), u)$, para todo $f\varepsilon F$ e todo $u\varepsilon U$. Logo, $f\ \Theta(u) = f\ \Theta'(u)$, para todo $f\varepsilon F$, $u\varepsilon U$. Como a ação de K sobre F é efetiva, segue que $\Theta(u) = \Theta'(u)$, para todo $u\varepsilon U$, ou seja, $\Theta = \Theta'$.

- Se $x\varepsilon B$ e $F_x = p^{-1}(x)$, então cada F_x é homeomorfo a F.

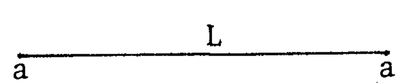
Exemplos ([5], [13])

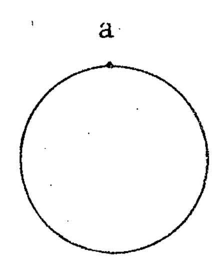
1. Fibrado Produto

Sejam B e F espaços de Hausdorff, $X = B \times F$ e $p : X \to B$, dada por $p(x,y) = x$. Tomando $\Psi = id_{F\times U}$, temos que $p\Psi(f,u) = p(f,u) = f$. p é chamado de fibrado produto, e as secções são as aplicações de $B \to X$. O grupo estrutural K pode ser reduzido apenas à identidade.

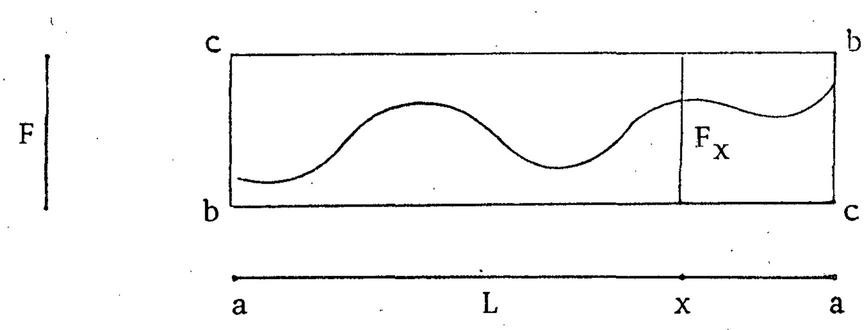
2. Faixa de Möbius

Seja B uma circunferência obtida de um segmento de reta L, por identificação de seus extremos, o espaço base.

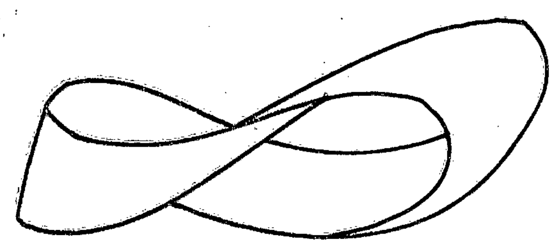




Seja a fibra F um segmento de reta e o espaço total X obtido do produto L x F, identificando os extremos com uma torção, conforme figura:

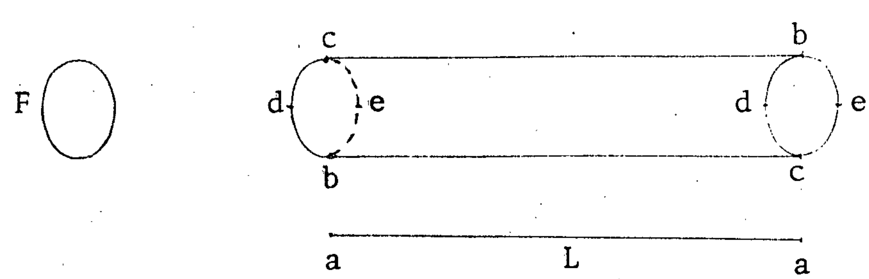


A projeção $L \times F \to L$ induz a projeção $p : X \to B$. Qualquer curva (biunívoca), cujos pontos extremos se identificam, é uma secção. Existem dois homeomorfismos naturais de F_x e F, que diferem por uma aplicação $f: F \to F$, obtida pela reflexão em relação a seu ponto médio. O grupo estrutural K pode ser reduzido ao grupo cíclico de ordem 2, gerado por f.

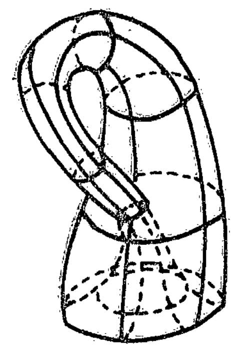


3. Garrafa de Klein

Na construção anterior, substituimos a fibra F por uma circunferência.



Os extremos do cilindro $L \times F$ são identificados, como indicado na figura acima, refletindo no diâmetro de. O grupo estrutural pode ser reduzido ao grupo cíclico de ordem 2, gerado por esta reflexão.



Proposição 2.1

Seja $p : X \to B$ um fibrado com fibra F e grupo estrutural K, e seja G um grupo topológico agindo à esquerda sobre F, de modo que as ações sobre F comutam. Então, existe uma única G-ação sobre X, que cobre a ação trivial sobre B, e tal que cada carta $\Psi : F \times U \to p^{-1}(U)$ é equivariante, com a ação de G sobre $F \times U$ dada por $g(f,u) = (gf,u)$.

Prova

Em primeiro lugar, temos que se Ψ e ψ são cartas sobre U, então $\Psi^{-1}\,\psi : F \times U \to F \times U$ é equivariante, pois para todo $g \in G$, temos que

$$g(\Psi^{-1}\psi(f,u)) = g(f\ \Theta(u),u) = (g(f\ \Theta(u)),u) =$$
$$= ((gf)\ \Theta(u),u) = \Psi^{-1}\,\psi\,(gf,u) =$$
$$= \Psi^{-1}\,\psi\,(g(f,u)).$$

Definiremos, agora, uma ação sobre $p^{-1}(U)$, partindo da ação de G sobre $F \times U$, por $g(x) = \Psi[g\Psi^{-1}(x)]$, pa ra $x \varepsilon p^{-1}(U)$. Então, Ψ é equivariante, pois

$$\Psi^{-1}(g(x)) = g\Psi^{-1}(x)$$

pela definição da G-ação sobre $p^{-1}(U)$. Mas $\Psi^{-1}(x) =$ $= (f,p(x))$, por 2.1(1), logo

$$g(x) = \Psi\Psi^{-1}(g(x)) = \Psi(g\Psi^{-1}(x)) =$$

$$= \Psi(g(f,p(x))).$$

Como $x = \Psi(f,p(x))$, segue que

$$g(\Psi(f,p(x))) = \Psi[g(f,p(x))]\text{, o que mos}$$

tra que Ψ é equivariante. A G-ação sobre $p^{-1}(U)$ é independente da escolha da carta Ψ sobre U, pois, se escolhêssemos outra carta ψ sobre U, para a definição, teríamos

$$g(x) = \psi[g\psi^{-1}(x)] = \Psi[g\Psi^{-1}(x)],$$

pois

$$(\Psi^{-1}\psi)g\psi^{-1}(x) = (\Psi^{-1}\psi)g(f,p(x)) =$$

$$= g(\Psi^{-1}\psi)(f,p(x)) =$$

$$= g\Psi^{-1}(x).$$

Portanto, $\psi(g\psi^{-1}(x)) = \Psi(g\Psi^{-1}(x))$. Como X é a união disjunta de fibras F_u, que são homeomorfas a $p^{-1}(u)$, temos uma ação definida sobre X.

Vamos mostrar que esta G-ação em X, cobre a ação trivial sobre B, $g(b) = b$. Para isto, devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\text{ação}} & X \\ {\scriptstyle id_G \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G \times B & \xrightarrow[\text{ação trivial}]{} & B \end{array}$$

é comutativo, ou seja, que $p(\Psi[g\Psi^{-1}(x)]) = p(x)$.

Com efeito, temos que

$$p(\Psi[g\Psi^{-1}(x)]) = p[\Psi(g(f,p(x)))] =$$

$$= p[\Psi(gf,p(x))] = (p\Psi)(gf,p(x)) = p(x)$$

por 2.1(1).

<u>Definição 2.3</u>

Um fibrado $p : X \to B$, com grupo estrutural G e fibra F, é chamado um <u>G-fibrado principal</u>, se $F = G$, e G opera em si próprio por translação à direita.

Todo fibrado tem associado a ele um fibrado principal, no qual só muda a fibra F, que passa a ser o grupo G. Uma vantagem de passar ao fibrado principal é que, em geral, sua estrutura é mais simples do que a do fibrado original.

Exemplos ([5])

1. A Faixa de Möbius e a Garrafa de Klein são fibrados sobre um círculo, e tem o mesmo fibrado principal, sendo X um círculo e $p : X \to B$ o cobrimento duplo. Este fibrado não admite secção.

2. Seja $Q = \{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4\}$ o espaço dos quaternios e $S^3 = \{q \in Q \mid |q| = 1\}$. Se $q \in S^3$, a transformação $Q \to Q$, dada por $q' \longmapsto qq'$ preserva a norma. Assim, a cada $q \in S^3$, associamos uma transformação ortogonal $f(q)$ em $O(4)$.

   Definimos $p : O(4) \to S^3$ por $p(A) = A(1)$, onde 1 é o quaternio unidade. Temos, então, um fibrado com fibra $O(3)$ e grupo estrutural também $O(3)$, portanto, um fibrado principal. Como

$$pf(q) = f(q)(1) = q1 = q$$

   temos que f é uma secção.

Corolário 2.1

Seja $p : X \to B$ um G-fibrado principal. Então, existe uma G-ação livre (canônica) sobre X, que cobre a identidade sobre B, cujo espaço orbital é homeomorfo a B, através de p.

<u>Prova</u>

Consideremos a ação de G em si próprio por translação à direita, ou seja, $g(g') = g'g$. Esta ação comuta com a translação à esquerda, portanto, aplicando a Proposição 2.1, temos que existe uma G-ação sobre X, que cobre a ação trivial em B, e tal que cada carta $\Psi : G \times U \to p^{-1}(U)$ é equivariante, com a ação de G em $G \times U$ dada por $g(g',u) = (gg',u)$. Esta ação é livre, pois qualquer que seja $x \in X$, temos

$$
\begin{aligned}
G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} &= \\
&= \{g \in G \mid \Psi|g\Psi^{-1}(x)| = x\} = \\
&= \{g \in G \mid g\Psi^{-1}(x) = \Psi^{-1}(x)\} = \\
&= \{g \in G \mid g(g',u) = (g',u)\} = \\
&= \{g \in G \mid (gg',u) = (g',u)\} = \\
&= \{g \in G \mid gg' = g'\} = \{e\} .
\end{aligned}
$$

Além disto, ela cobre a identidade sobre B, já que cobre a ação trivial sobre B.

A aplicação $p : X \to B$ induz um homeomorfismo $X/G \overset{\approx}{\to} B$, dado por $h(G(x)) = p(x)$, conforme o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\
X/G \arrow[rr, "h"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

h está bem definida, pois se $x' \varepsilon G(x)$, $x' = g(x)$, para algum $g \varepsilon G$, logo temos que

$$h(G(x')) = p(x') = p(g(x)) = p(x) = h(G(x))$$

h é injetora, pois se $h(G(x)) = h(G(x'))$, temos que $p(x) = p(x')$ e, portanto, x e x' estão na mesma fibra, logo existe $g \varepsilon G$ tal que $x' = g(x)$, e consequentemente $G(x) = G(x')$.

Para verificar que h é sobrejetora, consideremos $u \varepsilon B$. Então, $u = p(x)$, para algum $x \varepsilon X$ e, neste caso,

$$h(G(x)) = p(x) = u.$$

A continuidade de h segue do diagrama, uma vez que p é contínua e a projeção π é aberta.

Finalmente, temos que h é aberta, pois π é contínua, e p satisfaz a condição (1) da Definição 2.1. Portanto h é um homeomorfismo.

Proposição 2.2

Se $p : X \to B$ é um K-fibrado principal, e F é um K-espaço à direita, então a aplicação definida por $q : F \times_K X \to B$, $q : [f,x] \longmapsto p(x)$, é um fibrado, com fibra F, e grupo estrutural K. Se $\Psi : K \times U \to p^{-1}(U)$ é uma carta do fibrado principal, sobre U, então

$$\overline{\Psi} : F \times U \underset{\alpha}{\overset{\approx}{\to}} (F \times_K K) \times U \underset{\beta}{\overset{\approx}{\to}} F \times_K (K \times U) \underset{\gamma}{\overset{\approx}{\to}}$$

$$\to F \times_K p^{-1}(U) \underset{\delta}{\overset{\approx}{\to}} q^{-1}(U)$$

é uma carta do fibrado q, onde:

$$\alpha : (f,u) \longmapsto ([f,e],u)$$

$$\beta : ([f,k],u) \longmapsto [f,[k,u]]$$

$\gamma = F \times_K \Psi$ e δ é a aplicação induzida pela inclusão $f : p^{-1}(U) \to X$.

Prova

Mostraremos que estas aplicações são homeomorfismos.

(a) O fato de que α é um homeomorfismo, segue diretamente de que a aplicação $F \to F \times_G G$, definida por $\alpha(f) = [f,e]$ é um homeomorfismo, pela Proposição 1.3.

(b) β é a aplicação definida na p. 53, que é um homeomorfismo.

(c) Pela Proposição 1.2, temos que $F \times_K \Psi$ é aberta, já que Ψ é aberta. Além disto, $F \times_K \Psi$ possui uma inversa, que é $F \times_K \Psi^{-1}$, pois

$$(F \times_K \Psi^{-1})\,[f,x] = [f,\Psi^{-1}(x)] =$$

$$= [f,(k,u)]\text{ , para } f \in F \text{ e}$$

$x \in p^{-1}(U)$. Também,

$$(F \times_K \Psi)\ [f,(k,u)] = [f,\Psi(k,u)] =$$

$$= [f,x].$$

Sendo Ψ^{-1} aberta, temos que $F \times_K \Psi^{-1}$ também é aberta, logo γ é um homeomorfismo.

(d) Temos que $[f,x] \in q^{-1}(U) \Longleftrightarrow q[f,x] = u \in U \Longleftrightarrow$

$p(x) = u \in U \Longleftrightarrow x \in p^{-1}(U) \Longleftrightarrow$

$[f,x] \in F \times_K p^{-1}(U)$.

Portanto, $F \times_K p^{-1}(U) = q^{-1}(U)$.

Dada a inclusão $i : p^{-1}(U) \to X$, temos que δ é a aplicação induzida $F \times_K i : F \times_K p^{-1}(U) \to F \times_K X$, que é um homeomorfismo sobre sua imagem $q^{-1}(U)$.

Sendo $\overline{\Psi}$ a composta de homeomorfismos, é também um homeomorfismo, de $F \times U \to q^{-1}(U)$.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} F \times U \arrow[rr, "\overline{\Psi}"] \arrow[dr, "\text{proj.}"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "q"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

é comutativo, pois:

$$(q.\overline{\Psi})(f,u) = q[f,\Psi(e,u)] =$$

$$= p(\Psi(e,u)) = u\ ,$$

pois p é um fibrado.

As condições (2) e (3), da definição de fibrado, são obviamente satisfeitas. Se Ψ e ψ são cartas sobre U, do fibrado principal, e se $\Theta : U \to K$ é a função transição para Ψ e ψ, então

$$\bar{\psi}(f,u) = [f,\psi(e,u)] = [f,\Psi(e\Theta(u),u)] =$$

$$= [f,\Psi(\Theta(u)e,u)] \ .$$

Mas, pela Proposição 2.1, K age sobre X por $k(x) = \Psi[k\Psi^{-1}(x)]$. Como $\Psi(e,u)\varepsilon p^{-1}(U) \subset X$, e $\Theta(u)\varepsilon K$, temos:

$$\Theta(u)\ \Psi(e,u) = \Psi[\Theta(u)\Psi^{-1}(\Psi(e,u))] =$$

$$= \Psi[\Theta(u)\ (e,u)] =$$

$$= \Psi(\Theta(u)\ e,u)$$

Então,

$$\psi(f,u) = [f,\Psi(\Theta(u)e,u)] = [f,\Theta(u)\ \Psi(e,u)] =$$

$$= [f\Theta(u),\Psi(e,u)] = \bar{\Psi}(f\Theta(u),u).$$

Portanto, Θ é a função transição de $\bar{\Psi}$ para $\bar{\psi}$.

Definição 2.4

Sejam X, Y e Z G-espaços e sejam $f : X \to Z$, $h : Y \to Z$ aplicações equivariantes. O produto fibrado (ou pull-back) $X \times_Z Y$, é o subespaço de $X \times Y$ definido por

$$\{(x,y) \mid f(x) = h(y)\}\ .$$

Neste caso, temos que $X \times_Z Y$ é um G-espaço, com a G-ação diagonal definida por $g(x,y) = (gx,gy)$, e as projeções $f' : X \times_Z Y \to Y$, $h' : X \times_Z Y \to X$ são aplicações equivariantes, pois

$$f'(g(x,y)) = f'(gx,gy) = gy = g(f'(x,y))$$

$$h'(g(x,y)) = h'(gx,gy) = gx = g(h'(x,y)).$$

O produto fibrado $X \times_Z Y$ satisfaz a propriedade universal de pull-backs (Ver Apêndice), com a função $\Theta : W \to X \times_Z Y$ dada por $\Theta(w) = (\alpha(w), \beta(w))$, e, portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

é um diagrama pull-back.

Propriedades do diagrama pull-back

1. Se f é sobrejetora, temos que f' também é. O mesmo é válido para h e h'.

Prova

Se f é sobrejetora, temos que para qualquer $y \varepsilon Y$, $h(y) = z \varepsilon Z$, e existe $x \varepsilon X$, tal que $f(x) = z$. Logo, $f'(x,y) = y$, ou seja, f' é sobrejetora. Analogamente, se prova que, se h é sobrejetora, então h' também é,

2. Se f é aberta, f' também é aberta. Se h é aberta, h' também é.

Prova

Seja $(x,y) \varepsilon X \times_Z Y$, isto é, $f(x) = h(y)$, e seja U uma vizinhança aberta de x. Então, $f(U)$ é aberto em Z e $y \varepsilon h^{-1}(f(U))$. Seja $V \subset h^{-1}(f(U))$ uma vizinhança aberta de y. Então, $(X \times_Z Y) \cap (U \times V)$ se projeta, através de f', sobre V, o que mostra que f' é aberta. Analogamente se prova para h e h'.

Proposição 2.3

Seja $p : X \to B$ um K-fibrado principal, F um K-espaço à direita e $q : F \times_K X \to B$ o F-fibrado associado a p. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \times X \arrow[r, "\text{proj.}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
F \times_K X \arrow[r, "q"'] & B
\end{tikzcd}$$

é um diagrama pull-back.

<u>Prova</u>

Consideremos a aplicação Θ, de $F \times X$ no produto fibrado de (X,p) e $(F \times_K X, q)$, induzida pelas aplicações dadas, conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \times X \arrow[rr, "proj."] \arrow[dr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd, "p"] \\
& P \arrow[ur, "q'"] \arrow[dl, "p'"] & \\
F \times_K X \arrow[rr, "q"'] & & B
\end{tikzcd}$$

onde $P = X \times_B (F \times_K X) = \{(x,[f,x']) \mid p(x) =$

$= q\,[f,x']\} = \{(x,[f,x']) \mid p(x) = p(x')\}$

e $\Theta : (f,x) \longmapsto (x,[f,x])$.

Esta aplicação é injetora, sobrejetora e aberta, pois:

- Se $\Theta(f,x) = \Theta(f',x')$, temos que $(x,[f,x]) =$ $= (x',[f',x'])$, ou seja, $x = x'$ e existe $g \varepsilon K$, tal que $x' = xg^{-1}$, $f' = gf$. Como a ação é livre, segue que $g^{-1} = e$, portanto $f' = f$. Então, $(f,x) = (f',x')$. Assim Θ é injetora.

- Seja $(x,[f,y]) \varepsilon P$. Então, $p(x) = p(y)$, ou seja, existe $g \in K$, tal que $x = gy$. Como $[f,y] = [fg^{-1},gy] = [fg^{-1},x]$, temos que $\Theta(fg^{-1},x) = (x,[f,y])$, ou seja Θ é sobrejetora.

- Para mostrar que Θ é aberta, vamos considerar o diagrama localmente em B. Então, se $U \subset B$, aberto, é pequeno, temos

$$\begin{tikzcd} F \times K \times U \arrow[r, "\text{proj.}"] \arrow[d, "\alpha"'] & K \times U \arrow[d, "\text{proj.}"] \\ F \times_K (K \times U) \approx F \times U \arrow[r, "\text{proj.}"'] & U \end{tikzcd}$$

uma vez que $p^{-1}(U) \approx K \times U$, e

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & K \times U \\ U \arrow[ur, "\text{proj.}"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, pela definição de fibrado. Além disto, temos, pela Proposição 2.2, que

$$F \times_K (K \times U) \approx F \times U$$

e a aplicação α é definida por

$$\alpha : (f,k,u) \longmapsto [f,(k,u)] \xmapsto{\text{homeo}} (fk,u).$$

Neste caso, o produto fibrado $X \times_B (F \times_K X)$ é, local - mente, $(K \times U) \times_U (F \times U)$, que é homeomorfo a $F \times K \times U$, através de $((k,u),(f,u)) \longmapsto (f,k,u)$.

A aplicação é, portanto, $\theta : (f,k,u) \longmapsto (fk,k,u)$, a menos de homeomorfismos. A inversa de θ é dada por $\theta^{-1} : (f,k,u) \longmapsto (fk^{-1},k,u)$ que é contínua, logo θ é aberta.

Temos, assim, que θ é um homeomorfismo entre $F \times X$ e $X \times_B (F \times_K X)$. Portanto, o diagrama dado é um diagrama pull-back.

Proposição 2.4

Seja $p : X \to B$ um K-fibrado principal, Y um K-espaço à esquerda e K-espaço à direita pela ação $yk = k^{-1}y$. Seja $q : Y \times_K X \to B$ o Y-fibrado associado ao K-fibrado principal. Então, as aplicações equivariantes f, de X em Y, estão em correspondência biunívoca com as secções $\overline{f}$ de q, através da relação

$$\overline{f}\,(p(x)) = [f(x),x]$$

Prova

Dada uma aplicação equivariante $f : X \to Y$, consideremos a aplicação $h : X \to Y \times_K X$, dada por

$$h(x) = [f(x),x] .$$

Então, h induz uma aplicação $\overline{f} : B = X/K \to Y \times_K X$, definida por $\overline{f}\,(p(x)) = h(x)$, que está bem definida, uma vez que, dados dois elementos da mesma órbita, temos que

$$h(kx) = [f(kx), kx] = [kf(x), kx] =$$

$$= [f(x)k^{-1}, kx] = [f(x), x] = h(x).$$

A aplicação $\overline{f}$ é uma secção para o fibrado associado, já que $(q.\overline{f})(p(x)) = q\ [f(x), x] = p(x)$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dd, "\overline{f}.q"'] \arrow[dr, "\theta"] & & X \arrow[dd, "p"] \\
& Y \times X \arrow[ur, "proj."] \arrow[dl, "\alpha"] & \\
Y \times_K X \arrow[rr, "q"'] & & B
\end{tikzcd}$$

é um diagrama pull-back, pela Proposição 2.3, logo, existe uma única aplicação $\theta : X \to Y \times X$, tal que o diagrama seja comutativo. Então, $proj(\theta(x)) = x$, e, $\alpha(\theta(x)) = (\overline{f}.p)(x) = \overline{f}(p(x)) = [f(x), x]$, sendo α a aplicação orbital. Logo, $\theta(x) = (f(x), x)$, onde f é tal que $\overline{f}(p(x)) = [f(x), x]$.

Até o final desta secção, consideraremos o caso em que G é um grupo compacto, H um subgrupo fechado de G e A um H-espaços à esquerda.

Vamos considerar o produto torcido $G \times_H A$, com G agindo sobre $G \times_H A$ pela ação $g([g',a]) = [gg',a]$. Definimos a aplicação

$$i_e : A \to G \times_H A, \text{ por } i_e(a) = [e,a] .$$

Proposição 2.5

A aplicação $i_e : A \to G \times_H A$ é um mergulho H-equivariante.

Prova

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i_e"'] & G \times A \arrow[d, "\pi"] \\ & G \times_H A \end{tikzcd}$$

onde $\alpha : a \longmapsto (e,a)$ é uma aplicação contínua e fechada, e π é a aplicação orbital, que também é contínua e fechada. Assim, i_e é contínua e fechada. Além disto, i_e é injetora pois, se $[e,a] = [e,a']$, existe $h\varepsilon H$, tal que $e = eh^{-1}$ e $a' = ha$, ou seja, $h = e$ e, portanto, $a = a'$. Logo, i_e é um homeomorfismo sobre sua imagem, ou seja, é um mergulho. O fato de que i_e é equivariante, segue de que

$$i_e(ha) = [e,ha] = [h,a] =$$

$$= h\ [e,a] = h(i_e(a)) .$$

Proposição 2.6

Sejam $K \subset H \subset G$ e B um K-espaço à esquerda. Então, existe um homeomorfismo G-equivariante entre $G \times_K B$ e $G \times_H (H \times_K B)$, dado por

$$f\ [g,b] = [g,[e,b]].$$

Prova

De acordo com a Proposição 1.3, G é equivalente a $G \times_H H$, através do homeomorfismo equivariante $g \to [g,e]$. Portanto, a aplicação $f_1 : G \times_K B \to (G \times_H H) \times_K B$, definida por $f_1[g,b] = [[g,e], b]$, é um homeomorfismo equivariante. Além disso, já vimos que $(G \times_H H) \times_K B$ é homeomorfo a $G \times_H (H \times_K B)$, através de

$$f_2 : [[g,h],b] \longmapsto [g, [h,b]] \qquad \text{(p. 53)}$$

Sendo f a composta de f_2 e f_1, é um homeomorfismo. Além disso, f é G-equivariante, pois

$$\begin{aligned} f(g[g',b]) &= f\ [gg',b] = \\ &= [gg',[e,b]] = \\ &= g[g', [e,b]] = \\ &= g(f[g',b]). \end{aligned}$$

Proposição 2.7

A aplicação $\alpha : G \times_H A \to G/H$, definida por $\alpha[g,a] = gH$ é G-equivariante e $\alpha^{-1}(eH) = i_e(A)$.

Prova

Temos que:

$$\alpha(g[g',a]) = \alpha[gg',a] = gg'H =$$
$$= g(g'H) = g(\alpha[g',a]).$$

Portanto, α é G-equivariante. Além disto, se $[g,a] \in \alpha^{-1}(eH)$, então

$$\alpha[g,a] = H.$$

Logo, $gH = H$ e, portanto, $g \in H$.

Mas, $[g,a] = [e,ga]$, logo $[g,a] \in i_e(A)$.

Por outro lado, $i_e(A) \subset \alpha^{-1}(eH)$, pois

$$\alpha[e,a] = eH, \text{ para todo } a \in A.$$

Então, $\alpha^{-1}(eH) = i_e(A)$.

Proposição 2.8

Seja X um G-espaço. Dada uma aplicação G-equivariante

$$f : X \to G/H,$$

então, $A = f^{-1}(eH)$ é invariante sob H e X é equivalente a $G \times_H A$.

Prova

Para qualquer $h \in H$, e qualquer $a \in A$, temos que

$$f(ha) = h(f(a)) = h(eH) = eH.$$

Logo, $ha \in A$ e, assim, A é invariante sob H. Consideremos a aplicação $\Psi : G \times_H A \to X$, definida por $\Psi[g,a] = ga$. A aplicação está bem definida, pois se $[g,a] = [g',a']$, existe $h \in H$, tal que $g' = gh^{-1}$ e $a' = ha$. Logo, $g'a' = (gh^{-1})(ha) = ga$. A continuidade da Ψ segue do fato de que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times A \arrow[r, "\text{restrição da ação}"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ G \times_H A \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, com π aberta e a ação contínua. Para mostrar que Ψ é injetora, seja

$$\Psi[g,a] = \Psi[g',a']$$

ou seja, $ga = g'a'$. Temos que $gH = g(f(a))$, pois, sendo $A = f^{-1}(eH)$, $f(a) = eH$, para todo $a \in A$. Então,

$$gH = g(f(a)) = f(ga) = f(g'a') =$$
$$= g'(f(a')) = g'H$$

Logo, $h = g^{-1}g' \in H$, ou seja, $g' = gh$. Assim, $ga = g'a' = gha'$, donde $a = ha'$. Portanto,

$$[g'a'] = [g'h^{-1}, ha'] = [g,a].$$

Também temos que Ψ é sobrejetora, pois, se $x \in X$, com $f(x) = gH$, então $f(g^{-1}x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(gH) = eH$ e, assim $g^{-1}x \in A$. Então, $\Psi[g, g^{-1}x] = g(g^{-1}x) = x$.

Vamos mostrar que Ψ é fechada. Sendo G compacto, G/H é de Hausdorff ([1], p. 2, Prop. 1.4), logo todo ponto de G/H é fechado, ou seja, $A = f^{-1}(eH)$ é fechado. Assim, a aplicação $G \times A \to X$ do diagrama é uma aplicação fechada (Prop. 2.2 - Cap. 1). Sendo a aplicação orbital π contínua, temos que Ψ é fechada. Portanto, Ψ é um homeomorfismo. Além disto, Ψ é equivariante, pois $\Psi(g[g',a]) = \Psi[gg',a] = gg'(a) = g(g'a) = g\Psi[g',a]$.

Proposição 2.9

Existe um homeomorfismo entre A/H e $(G \times_H A)/G$, induzido pela inclusão i_e.

Prova

Sabemos que toda aplicação equivariante entre H-espaços, induz uma aplicação que leva toda H-órbita em uma H-órbita. Assim, sendo i_e uma aplicação H-equivariante, ela induz uma aplicação $\alpha : A/H \to (G \times_H A)/G$

tal que toda H-órbita em A é levada em uma H-órbita de $G \times_H A$, ou, como $H \subset G$, em uma G-órbita de $G \times_H A$. A aplicação induzida α é definida, portanto, por $\alpha(H(a)) = G(i_e(a)) = G[e,a]$. Esta aplicação é contínua, pois o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_e"] \arrow[d, "\text{aplic. orbital}"'] & G \times_H A \arrow[d, "\text{aplic. orbital}"] \\ A/H \arrow[r, "\alpha"'] & (G \times_H A)/G \end{tikzcd}$$

é comutativo, i_e é contínua e a aplicação orbital é aberta e contínua. Por outro lado, a projeção $p : G \times A \to A$ é H-equivariante, já que $h(p(g,a)) = ha = p(gh^{-1},ha) = p(h(g,a))$; logo, ela induz uma aplicação contínua $(G \times_H A)/G \to A/H$, definida por $[g,a] \mapsto Ha$, e se fatora como

$$\begin{tikzcd} G \times_H A \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & \\ (G \times_H A)/G \arrow[r, "\beta"'] & A/H \end{tikzcd}$$

onde a aplicação horizontal, definida por $\beta : G[g,a] \to Ha$, é contínua, já que o diagrama é comutativo, e π é aberta. Além disso, β é a inversa de α, pois

$(\alpha.\beta)(G[g,a]) = \alpha(H(a)) = G[e,a] = G[g,a]$

pois $[g,a] = g[e,a]$.

$(\beta.\alpha)(H(a)) = \beta(G[e,a]) = H(a)$.

Portanto, α é um homeomorfismo.

3. Tubos e Fatias

Consideremos um G-espaço X, com G compacto, e $H \subset G$, fechado. Seja $P \subset X$ uma órbita do tipo G/H, ou seja, para qualquer $x \in P$, G_x é conjugado a H.

Definição 3.1

Seja $\Psi : G \times_H A \to X$ um mergulho G-equivariante sobre uma vizinhança aberta de P em X, sendo A um H-espaço. Nestas condições, dizemos que Ψ é um tubo ao redor de P.

Sabemos que $g^{-1}[g,a] = [e,a]$, para todo $g \in G$, portanto toda G-órbita em $G \times_H A$ passa em um ponto da forma $[e,a]$. Então, se $a \in A$, com $x = \Psi[e,a] \in P$, temos que $P = G(x)$. Sendo Ψ um homeomorfismo equivariante sobre sua imagem, temos que $G_x = G_{[e,a]}$. Mas, $G_{[e,a]} = H_a = H$ e G_x é conjugado a H, por hipótese. Logo, por ([1], p. 4, Prop. 1.9) vem que $G_x = H_a = H$. Portanto, a é um ponto fixo sob H.

Proposição 3.1

Se $\Psi : G \times_H A \to X$ é um tubo ao redor de P, então a composta $\Psi . i_e : A \to X$ é um mergulho H-equivariante.

Prova

O fato de que $\Psi . i_e$ é um mergulho H-equivariante é imediato, já que é a composta de mergulhos H-equivariantes.

Tendo em vista a Proposição 3.1, podemos supor que $A \subset X$.

Definição 3.2

Seja X um G-espaço, com G compacto, e seja $x \in S \subset X$, com $G_x(S) = S$. Dizemos que S é uma fatia em x, se a aplicação

$$G \times_{G_x} S \to X$$

definida por $[g,s] \longmapsto gs$ é um tubo ao redor de $G(x)$.

Proposição 3.2

Seja X um G-espaço, com G compacto e $x \in S \subset X$. Nestas condições, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe um tubo $\Psi : G \times_H A \to X$, ao redor de $G(x)$, tal que $\Psi[e,A] = S$, sendo $G_x = H$.

(b) S é uma fatia em x.

(c) $G(S)$ é uma vizinhança aberta de $G(x)$ e existe uma retração equivariante $f : G(S) \to G(x)$, tal que $f^{-1}(x) = S$.

<u>Prova</u>

Vamos supor que existe um tubo satisfazendo as condições de (a). Neste caso, podemos substituir A por S, já que existe um homeomorfismo G-equivariante $A \to [e,A]$, dado por $i_e(a) \to [e,a]$. Além disso, $G_x(S) = S$, já que S é G_x-equivariante. Logo (a) implica (b). Para mostrar que (b) implica em (c), seja S uma fatia em x e, $f : G(S) \to G(x)$ definida de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times_H S \arrow[r, "\Psi", "\approx"'] \arrow[d, "\beta"'] & G(S) \arrow[d, "f"] \\ G/H \arrow[r, "\approx", "\alpha_x"'] & G(x) \end{tikzcd}$$

seja comutativo, sendo $\beta[g,s] = Hg$. A aplicação β está bem definida, já que H é normal em G, logo $Hgh = Hg$. α_x é um homeomorfismo já que G é compacto (Ver Prop. 6.1 Cap. I). Assim, temos que $f(gs) = gx$. Neste caso, $f^{-1}(x) = S$, pois se $s \in S$, $f(s) = f(es) = ex = x$, ou seja $s \in f^{-1}(x)$, e se $\alpha \in f^{-1}(x)$, $f(\alpha) = x$, ou seja, $\alpha = gs$, com $f(gs) = x$. Logo, $gx = x$, portanto $g \in H$, ou seja, $\alpha = gs \in S$.

Temos também que f é uma retração H-equivariante, já que $f(gx) = gx$, e $g(f(s)) = g(ex) = gx = f(gs)$.

Finalmente, se f satisfaz as condições de (c), então $\Psi : G \times_H S \to X$ definida por $\Psi[g,s] = gs$ é um tubo ao redor de $G(x)$, pois

$$(\alpha_x^{-1} \cdot f)^{-1}(eH) = (f^{-1} \cdot \alpha_x)(eH) =$$
$$= f^{-1}(x) = S,$$

$\alpha_x^{-1} \cdot f$ é equivariante, por ser a composta de aplicações equivariantes. Logo, a Proposição 2.8 nos diz que Ψ é um homeomorfismo equivariante sobre sua imagem $G(S)$. Portanto, Ψ é um mergulho equivariante, $G_x(S) = G(S) = S$ e $\Psi[e,S] = S$.

<u>Corolário 3.3</u>

Se S é uma fatia em x, então $g(S)$ é uma fatia em gx.

<u>Prova</u>

Se S é uma fatia em x, temos, pela Proposição 3.2, que $G(S)$ é uma vizinhança aberta de $G(x)$ e existe uma retração equivariante $f : G(S) \to G(x)$, tal que $f^{-1}(x) = S$. Mas, $G(g(S)) = \{g'(g(S)) \mid g' \in G\} = \{g'gs \mid g' \in G \text{ e } s \in S\} = G(S)$ e, analogamente, $G(g(x)) = G(x)$. Logo, $G(g(S))$ é uma vizinhança aberta de $G(g(x))$. A aplicação f é uma retração equivariante de $G(g(S))$ em $G(g(x))$, e $f^{-1}(gx) = g(S)$, pois $f(gs) = gx$. Portanto, por 3.2(c), $g(S)$ é uma fatia em gx.

Proposição 3.4

Se um grupo compacto G age sobre um espaço X, que contém um ponto x, então um conjunto $S \subset X$, com $x \in S$, é uma fatia em x se, e somente se, satisfaz às seguintes condições:

(a) S é fechado em $G(S)$.

(b) $G(S)$ é uma vizinhança aberta de $G(x)$.

(c) $G_x(S) = S$.

(d) Se $S \cap g(S) \neq \emptyset$, então $g \in G_x$.

Prova

Inicialmente, mostraremos que se S satisfaz às condições acima, então S é uma fatia em x. Vamos aplicar a Proposição 5.2, Capítulo I, para $Y = G(x)$, $C = S$ e $\Psi : S \to Y$, definida por $\Psi(s) = x$ (cte.). Para isto, precisamos verificar que Y satisfaz às condições exigidas. Realmente, se s e $g(s)$ estão em S, para algum $g \in G$, então $g \in G_x$, por (d). Neste caso, $\Psi(gs) = x = gx = g\Psi(s)$. Portanto, Ψ pode ser estendida, de modo único, a uma aplicação equivariante $\psi : G(S) \to G(x)$, com $\psi/G(x)$ sendo a identidade em $G(x)$, já que $\psi(gx) = g\Psi(x) = gx$. Logo, Ψ é uma retração equivariante. Além disto, $\psi^{-1}(x) = S$, pois se $x = \psi(gs)$, temos que $x = g(\Psi(s)) = gx$, logo $g \in G_x$ e, assim, $gs \in S$, por (c). Portanto, S é uma fatia em x, pela Proposição 3.2, Cap. II.

Vamos, agora, supor que S é uma fatia em x e provar que, neste caso, S satisfaz às condições (a), (b),

(c) e (d). Sendo S uma fatia em x, temos, pela Proposição 3.2, que $G(S)$ é uma vizinhança aberta de $G(x)$ e existe uma retração equivariante

$$f : G(S) \to G(x),$$

tal que $f^{-1}(x) = S$. Então, $gs \varepsilon S$ se, e somente se, $x = f(gs) = gf(s) = gx$, ou seja, $g \varepsilon G_x$. Além disto, sendo $\alpha : G \times_H A \to G/H$, dada por, $\alpha[g,a] = gH$, contínua e eH fechado, pois G/H é de Hausdorff, vem que $[e,A] = \alpha^{-1}(eH)$ é fechado em $G \times_H A$. Mas, $S = \Psi[e,A]$, e Ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem, logo S é fechado em $G \times_H A$.

Proposição 3.5

Seja G um grupo compacto agindo em um espaço X, e

$$\Psi : G \times_H A \to X$$

um tubo ao redor de $G(x)$. Seja $a \varepsilon A$ e $y = \Psi[e,a]$. Se $\psi : H \times_K B \to A$ é um tubo ao redor de $H(a)$, em A, então a composta $\Theta : G \times_K B \to X$, $\Theta = \Psi.(G \times_H \psi).f_1$, sendo $f_1 : G \times_K B \to (G \times_H (H \times_K B))$ definida por $f_1[g,b] = [g,[e,b]]$, é um tubo ao redor de $G(y)$, em X.

Prova

Pela Proposição 2.6 (II), temos que f_1 é um homeomorfismo G-equivariante e $G \times_H \psi$ é um mergulho H-equivariante, pois ψ é um tubo. Portanto, a composta Θ de mergulhos H-equivariantes, também é um H-mergulho.

Além disto, se $g\varepsilon G_{\Psi[e,a]}$, temos que $g(\Psi[e,a]) = \Psi[e,a]$, ou seja, $\Psi[g,a] = \Psi[e,a]$. Sendo Ψ uma equivalência, $[g,a] = [e,a]$, ou $g\varepsilon G_{[e,a]}$.

Por outro lado, se $g \varepsilon G_{[e,a]}$, então $[g,a] = [e,a]$. Logo, $g\varepsilon G_{\Psi[e,a]}$. Assim, $G_{[e,a]} = G_{\Psi[e,a]} = G_y$. Como $G_{[e,a]} = H_a$, vem que $G_y = H_a$. Mas H_a é conjugado a K, por definição de tubo ao redor de H(a). Logo, G_y é conjugado a K, ou seja, G(y) é do tipo G/K. Portanto, Θ é um tubo ao redor de G(y).

<u>Corolário 3.6</u>

Se X é um G-espaço, S é uma fatia em $x\varepsilon X$, S' é uma fatia em $s\varepsilon S$, para o G_x-espaço S, então S' é uma fatia em s, para o G-espaço X.

<u>Prova</u>

Temos que $s\varepsilon S' \subset X$. Seja $K = G_s$ e $H = G_x$. Como S é uma fatia em x, para o G-espaço X, então, existe um tubo ao redor de G(x), $\Psi : G \times_H S \to X$, tal que $\Psi[e,s] = s$. Se S' é uma fatia em s, para o H-espaço S, então, existe um tubo ao redor de H(s), $\psi : H \times_K B \to S$, tal que $\psi[e,B] = S'$. Logo, pela Proposição 3.5 temos que $\Theta : G \times_K B \to X$ é um tubo ao redor de G(s), em X. Portanto, S' é uma fatia em s, para o G-espaço X, pela Proposição 3.2(i).

Proposição 3.7

Se S é uma fatia em x, no G-espaço X, então a aplicação natural $S/G_x \to X/G$ é um homeomorfismo sobre sua imagem $G(S)/G$.

Prova

Consideremos a aplicação composta

$$f : S/H \overset{\alpha}{\to} (G \times_H S)/G \overset{\beta}{\to} G(S)/G,$$

onde $H = G_x$, α é o homeomorfismo da Proposição 2.9, definido por $H(s) \longmapsto G[e,s]$, β é o homeomorfismo induzido por Ψ, sendo Ψ um tubo ao redor de $G(x)$, cuja existência é garantida pela Proposição 3.2. Logo, $f : H(s) \to G(\Psi[e,s]) = G(s)$ é um homeomorfismo.

4. Existência de Tubos ([9], [11])

Nesta secção vamos apresentar o teorema fundamental deste trabalho, que nos diz sob que condições podemos garantir a existência de uma fatia em x, ou de um tubo ao redor de G(x). Durante esta secção, vamos considerar que G é um grupo de Lie Compacto (V. Apendice - Def. III.9).

Inicialmente, apresentaremos alguns resultados cuja utilização é necessária para a prova do Teorema.

Proposição 4.1

Seja R^n um G-espaço, sob a ação ortogonal e $v \in R^n$. Sejam $H = G_v$, $V \subset R^n$ o espaço normal de G(v), em v. Então, existe uma vizinhança U de eH, $U \subset G/H$, uma secção $\sigma : U \to G$, e um número $\varepsilon > 0$, tais que a restrição da ação,

$$\sigma(U) \times V_\varepsilon \to R^n$$

é um homeomorfismo sobre uma vizinhança aberta de v, em R^n.

Prova

Sendo G um grupo de Lie, então existe, em cada ponto de G/H, uma secção local, diferenciável (V. Apêndice - Prop. III.8). Seja σ uma secção cruzada diferenciável em eH, com $\sigma(eH) = e$, e, seja U uma vizinhança de eH em G/H. Sendo $G \times R^n \to R^n$ uma ação ortogonal, ela é diferenciável.

Então, a aplicação $\theta : G/H \to G(v_o)$, definida por $\theta : gH \longmapsto g(v_o)$ é um difeomorfismo, pois é diferenciável, injetora e com diferencial injetora (V. Apêndice - Prop. III.5). Consideremos a composta

$$\alpha : \sigma(U) \times \{v_o\} \xrightarrow[\text{da ação}]{\text{Restrição}} G(v_o) \approx G/H, \text{ dada por}$$

$\alpha : (\sigma(u), v_o) \longmapsto \sigma(u)v_o \approx \sigma(u)H$ e a aplicação induzida por ela, $\beta : \sigma(U) \to G/H$, $\beta(\sigma(u)) = \sigma(u)H$. Então, β é a inversa de σ, pois é a restrição de π a $\sigma(U)$. Como σ é um difeomorfismo (V. Apêndice - Prop. III.8) so bre sua imagem, então β é um difeomorfismo sobre U. Logo, α é um difeomorfismo sobre U e a diferencial de α em (e,v_o) é um isomorfismo sobre o espaço tangente de $G(v_o) \subset R^n$, em v_o. Além disso, a diferencial de $\gamma : \{e\} \times V \to V$, definida por $\gamma(e,v) = v$, é um isomorfismo sobre V. Então, $F : \sigma(U) \times V \to R^n$, dada por $F(\sigma(u),v) = \sigma(u)(v)$ é a aplicação $\alpha \times \gamma$, logo $dF = d\alpha \times d\gamma$ e $T_{(e,v_o)}(\sigma(U) \times V) = T_e(\sigma(U)) \times T_{v_o}(V)$ (V. Apêndice - Prop. III.3). Logo, a diferencial de F é um isomorfismo sobre o espaço tangente de R^n em v_o. Pelo Teorema da função inversa (V. Apêndice), F é um difeomorfismo de alguma vizinhança de (e,v_o) sobre alguma vizinhança de v_o.

Lema 4.2

Seja V_ε a ε-bola, em R^n, com centro em v_o e seja $U \subset G/H$ a vizinhança de eH determinada pela Proposição 4.1. Então:

(a) $K = G - \sigma(U)H$ é compacto

(b) $K(V_\varepsilon) \cap V_\varepsilon = \emptyset$

Prova

Sendo $\sigma(U)H$ aberto, segue, imediatamente, que K é compacto. Agora, se $v \in K(v_o)$, temos que $v = k(v_o)$, para algum $k \in G$ e $k \notin \sigma(U)H$. Logo, $v \in R^n$ e $v \neq v_o$, pois se $v = v_o$, teríamos $v_o = kv_o$, ou seja, $k \in H$ e, portanto,

$k = \sigma(eH)k \in \sigma(U)H$, o que é absurdo. Logo, $K(v_o) \subset R^n - \{v_o\}$. Temos também que $K(v_o) = \bigcap K(C)$, onde C varia sobre as vizinhanças compactas de v_o, em R^n, pois:

- $v_o = \bigcap C$, já que os C são compactos no R^n e todos contém v_o;

- $\bigcap K(C) \subset K(v_o)$, já que, se $v \in \bigcap K(C)$, então $v \in K(C)$, para todo C. Consideremos, então, uma rêde $\{x_C\}$ em R^n e uma rêde $\{k_C\}$ em K, com $k_C x_C = v$, para todo C e, com $x_C \to v_o$. Logo, $k_C v_o \to v$ e, existe uma subrêde de $\{k_C\}$, que converge para um certo $k \in K$, já que K é compacto. Portanto, $k_C \to k$, ou seja, $kv_o = v$. Assim, $v \in K(v_o)$;

- $K(v_o) \subset \bigcap K(C)$, pois se $v \in K(v_o)$, temos que $v = kv_o$, para algum $k \in K$. Logo, como $v_o \in C$, para todo C, temos que $v \in K(C)$, para todo C, ou, $v \in \bigcap K(C)$.

Sendo os K(C) todos compactos, qualquer vizinhança de $K(v_o)$ deve conter um deles, pois $K(v_o) \cap \{v_o\} = \emptyset$. Isto implica que, para C suficientemente pequeno, temos $K(C) \cap C = \emptyset$. Em particular, $K(V_\varepsilon) \cap V_\varepsilon = \emptyset$, para ε pequeno.

Proposição 4.3

Nas condições da Proposição 4.1, para $\varepsilon>0$, suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo de $G \times_H V_\varepsilon$ sobre uma vizinhança aberta $G(V_\varepsilon)$ de $G(v_o)$, em R^n.

Prova

Consideremos a aplicação $G \times_H V \to R^n$, dada por $[g,v] \mapsto gv$ e seja Ψ a aplicação $G \times_H V_\varepsilon \to G(V_\varepsilon)$ induzida por ela. Vamos mostrar que Ψ é um homeomorfismo e que $G(V_\varepsilon)$ é aberto em R^n. Seja $gv = g'v'$, para $v,v' \varepsilon V_\varepsilon$. Então, $g^{-1}g'(v') = v$, ou seja, $g^{-1}g' \notin K$, pois se pertencesse, teríamos $v \varepsilon K(v')$, o que é absurdo, pois $K(V_\varepsilon) \cap V_\varepsilon = \emptyset$, pelo Lema 4.2. Logo, $g^{-1}g' \varepsilon \sigma(U)H$, isto é, $g' = g\sigma(u)h$, para algum $u \varepsilon U$ e $h \varepsilon H$. Então, $g\sigma(u)h(v') = gv$, ou seja $\sigma(u)(hv') = v$. Mas, $H(V_\varepsilon) = V_\varepsilon$, logo $h(v') \varepsilon V_\varepsilon$. Aplicando a Proposição 4.1, temos que $\sigma(u) = e$ e $hv' = v$, pois a aplicação é injetora. Assim, $[g,v] = [g\sigma(u), hv'] = [g\sigma(u)h, v'] = [g',v']$ e, portanto, Ψ é injetora, para ε pequeno. Além disto, Ψ é contínua e fechada, pois o diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \times V \arrow[r, "\text{ação}"] \arrow[d, "\pi"'] & G(V) \\
G \times_H V \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo π contínua e aberta e a ação contínua e fechada. Por outro lado, $G(V_\varepsilon)$ é a saturação do conjunto aberto $\sigma(U)(V_\varepsilon)$, pela Proposição 4.1, logo ele é aberto no R^n.

—

Corolário 4.4

Nas condições da Proposição 4.3, a aplicação

$$f : G(V_\varepsilon) \to G(v_o),$$

definida por $gv \longmapsto gv_o$, é uma retração equivariante, para ε pequeno.

Prova

Temos que $G(v_o) \subset G(V_\varepsilon)$, pois $v_o \varepsilon V_\varepsilon$, e que $f/G(v_o) = id_{G(v_o)}$, pois $f(gv_o) = gv_o$, para todo $g \varepsilon G$. Além disto, temos que $f(v) = f(ev) = ev_o = v_o$, logo, $g(f(v)) = gv_o = f(gv)$. Portanto, f é uma retração equivariante.

Teorema 4.5 - Teorema da existência de tubos

Seja G um grupo de Lie compacto e X um G-espaço completamente regular. Então, existe um tubo ao redor de qualquer órbita de X.

Prova

Seja $x_o \varepsilon X$ e $H = G_{x_o}$. Então, existe uma representação ortogonal ρ de G, sobre R^n, e um ponto $v_o \varepsilon R^n$, com $G_{v_o} = H$ ([1], p. 24, Teor. 5.2). Consideremos a aplicação

$$\Psi : G(x_o) \overset{\approx}{\rightarrow} G(v_o) \subset R^n$$

definida por $\Psi(gx_o) = gv_o$. Sendo $G(x_o)$ uma órbita, é compacto e invariante. Além disto, Ψ é equivariante, pois

$$\Psi(g(g'x_o)) = \Psi(gg'x_o) = gg'v_o =$$

$$= g(g'v_o) = g(\Psi(g'x_o)).$$

Pelo Teorema de Tietze Gleason, segue que existe $\psi : X \to R^n$, que é uma extensão equivariante de Ψ. Para ε como no Corolário 4.4, seja

$$W = \psi^{-1}(G(V_\varepsilon)) .$$

Então, $G(W) = W$ é aberto em X. Vamos provar esta afirmação. Se $g'x \varepsilon G(W)$, então $\psi(x) = gv$, com $v \varepsilon V_\varepsilon$, pois $x \varepsilon W$. Neste caso, $\psi(g'x) = g'\psi(x) = g'(gv) = (g'g)v \varepsilon G(V_\varepsilon)$. Logo, $g'x \varepsilon \psi^{-1}(G(V_\varepsilon))$. Além disto, $G(V_\varepsilon)$ é aberto, pois V_ε é aberto, logo, sendo ψ contínua, temos que W é aberto em X.

Consideremos a composta

$$\alpha : W \xrightarrow{\psi} G(V_\varepsilon) \xrightarrow{f} G(v_o) \xrightarrow{\Psi^{-1}} G(x_o)$$

onde f é a aplicação do Corolário 4.4. Então α é equivariante, pois é a composta de aplicações equivariantes. Além disto,

$$\alpha(gx_o) = \Psi^{-1}(f(\psi(gx_o))) =$$

$$= \Psi^{-1}(f(\Psi(gx_o))) \ ,$$

pois ψ é uma extensão de Ψ. Mas, $\Psi(gx_o) = gv_o$ que é um elemento de $G(v_o)$ e f é uma retração, logo $f(\Psi(gx_o)) = f(gv_o) = gv_o$. Logo,

$$\alpha(gx_o) = \Psi^{-1}(gv_o) = gx_o.$$

Portanto, α é uma retração equivariante. Façamos $S = \psi^{-1}(V_\varepsilon)$. Então, $W = G(S)$, pois

$$G(S) = G(\psi^{-1}(V_\varepsilon)) = \psi^{-1}(G(V_\varepsilon)) = W.$$

Então, G(S) é uma vizinhança aberta de $G(x_o)$, pois $x_o \varepsilon S$ e W é aberto. Além disto, existe uma retração equivariante $\alpha : G(S) \to G(x_o)$, com $\alpha^{-1}(x_o) = S$, já que

$$\alpha^{-1}(x_o) = \psi^{-1}[f^{-1}[(\Psi^{-1})^{-1}(x_o)]] =$$

$$= \psi^{-1}[f^{-1}(v_o)] =$$

$$= \psi^{-1}(V_\varepsilon) = S.$$

Logo, pela Proposição 3.2, existe um tubo

$$\xi : G \times_H A \to X ,$$

ao redor de $G(x_o)$, tal que $\xi[e,A] = S$.

Exemplo

Seja H o anel de divisão dos quaternios e, consideremos a aplicação $\rho : S(H^n \times H^n) \to D(R \times H)$, da esfera unitária do espaço vetorial quaterniônico $H^n \times H^n$, no disco unitário de $R \times H$, definida por

$$\rho(u,v) = (\|u\|^2 - \|v\|^2, 2 <u,v>)$$

para $u,v \in H^n$, com $\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$, sendo $<u,v> = \Sigma\, \bar{u}_i v_i$, onde soma, produto e conjugação são entendidos no sentido quaterniônico e $\|u\|^2 = <u,u>$.

Esta aplicação está bem definida, já que

$$\|\rho(u,v)\|^2 = (\|u\|^2 - \|v\|^2)^2 + 4 <u,u>^2 =$$

$$= \|u\|^4 + \|v\|^4 - 2 \|u\|^2 \|v\|^2 + 4 <u,v>^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|^4 + \|v\|^4 - 2 \|u\|^2 \|v\|^2 + 4 \|u\|^2 \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^4 + \|v\|^4 + 2 \|u\|^2 \|v\|^2 =$$

$$= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 = 1.$$

Além disso, $\|\rho(u,v)\| = 1$ se, e somente se, $|<u,v>| = \|u\| \|v\|$, ou seja $u = \lambda v$, $\lambda \varepsilon H$.

Consideremos também, a ação diagonal do grupo simplético Sp(n) ([15], p. 20) sobre $H^n \times H^n$. Esta ação é definida como segue: se $(u,v) \in H^n \times H^n$ e $g \in Sp(n)$, $g(u,v) = (gu,gv)$, onde u e v são vetores coluna e gu e gv são produtos de matrizes. Podemos também representar $g(u,v)$ como o produto da matriz g, $n \times n$, pela matriz $n \times 2$, cujas colunas são as componentes de u e v, respectivamente.

Mas $S(H^n \times H^n)$ é invariante por esta ação, já que $Sp(n)$ preserva a norma, ou seja, $g(u,v)$ também é unitário. Portanto, $S(H^n \times H^n)$ é um G-subespaço de $H^n \times H^n$ sob a dada ação de G.

Vamos agora mostrar que a aplicação ρ é sobrejetora. Seja $(r,\xi) \in D(R \times H)$. Se $(r, \xi) \neq (-1,0)$ (respectivamente $(1,0)$), determinaremos elementos de $S(H^n \times H^n)$,

$$(u,v) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(respectivamente } (u',v') = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{)}$$

de modo que $\rho(u,v) = (r, \xi)$ (respec. $\rho(u',v') = (r, \xi)$).

Assim, deveremos ter

$$\rho(u,v) = (\|u\|^2 - \|v\|^2 , 2 \langle u,v\rangle) = (r, \xi)$$

Como $\|u\|^2 = \|a\|^2$, $\|v\|^2 = \|b\|^2 + \|c\|^2$ e $\langle u,v\rangle = \bar{a}\, b$, temos

$$\|a\|^2 - \|b\|^2 - \|c\|^2 = r \quad \text{e} \quad \bar{a}\, b = \xi/_2 .$$

Mas $\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 = 1$, então

$$2 \|a\|^2 = 1 + r$$

ou seja,

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1+r}{2}} .$$

Tomemos $a = \sqrt{\frac{1+r}{2}}$. Então, $\sqrt{\frac{1+r}{2}} \cdot b = \xi$ implica em $b = \left(\frac{1+r}{2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{\sqrt{2(1+r)}}$

O valor de c fica determinado por

$$\|c\|^2 = 1 - \|a\|^2 - \|b\|^2 = 1 - \left(\frac{1+r}{2}\right) - \frac{\|\xi\|^2}{2(1+r)} =$$

$$= \left(\frac{1-r}{2}\right) - \frac{\|\xi\|^2}{2(1+r)}$$

Logo, $\|c\| = \sqrt{\frac{(1-r^2) - \|\xi\|^2}{2(1+r)}}$. Seja $c = \sqrt{\frac{1-r^2-\|\xi\|^2}{2(1+r)}}$

Observemos que $c = 0$ se, e somente se, $\|r\|^2 + \|\xi\|^2 = 1$. Definimos, então, $s_-: D(R \times H) - \{(-1,0)\} \to S(H^n \times H^n)$, por

$$s_-(r,\xi) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{(1+r)}{2}} & \frac{\xi}{\sqrt{2(1+r)}} \\ & \\ 0 & \sqrt{\frac{1-r^2-\|\xi\|^2}{2(1+r)}} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, pode-se ver que, para $(r, \xi) \neq (1,0)$, basta tomar

$$a' = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{2(1-r)}} \quad , \; b' = \sqrt{\frac{(1-r)}{2}} \quad \text{e}$$

$c' = \sqrt{\dfrac{1 - r^2 - \|\xi\|^2}{2(1-r)}}$. Notemos que $c' = 0$ se, e somente se, $\|\xi\|^2 + \|r\|^2 = 1$.

Definimos $s_+ : D(R \times H) - \{(1,0)\} \to S(H^n \times H^n)$, por

$$s_+(r, \xi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\xi}}{\sqrt{2(1-r)}} & \sqrt{\dfrac{1-r}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{1 - r^2 - \|\xi\|^2}{2(1-r)}} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Observações</u>

1. $\rho(u,v) = \rho(gu,gv)$, pois

$$\rho(gu,gv) = (\|gu\|^2 - \|gv\|^2, 2\langle gu,gv\rangle) =$$

$$= (\|u\|^2 - \|v\|^2, 2\langle u,v\rangle) = \rho(u,v),$$

já que $g \in Sp(n)$.

Isto implica que a imagem inversa, através de ρ, de um ponto em $D(R \times H)$, contém órbitas inteiras, ou seja, se $(u,v) \in \rho^{-1}(r,\xi)$, então $g(u,v) \in \rho^{-1}(r,\xi)$. De fato, $\rho(g(u,v)) = \rho(gu,gv) = \rho(u,v) = (r,\xi)$.

2. Em cada órbita existe um ponto do tipo $s_+(r, \xi)$ ou $s_-(r, \xi)$, como descritos anteriormente. Vamos provar esta afirmação.

Seja $G(u,v)$ uma órbita em $S(H^n \times H^n)$, com u e v com componentes u_1 e v_i, respectivamente. Então, devemos determinar $g \in Sp(n)$ de modo que $g.\, s_\pm(r,\xi) = (u,v)$, com $(r,\xi) = \rho(u,v)$, para $(r,\xi) \neq (\pm 1, 0)$. Em primeiro lugar, vamos encontrar $g \in Sp(n)$, $g = (g_1, g_2 \ldots, g_n)$, tal que $g.s_+(r,\xi) = (u,v)$, com $(r,\xi) \neq (1,0)$.

Neste caso, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} a_{11}a + a_{12}c &= u_1 & \qquad a_{11}b &= v_1 \\ a_{21}a + a_{22}c &= u_2 & a_{21}b &= v_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\;\;\vdots & \vdots \quad &\;\;\vdots \\ a_{n1}a + a_{n2}c &= u_n & a_{n1}b &= v_n \end{aligned}$$

Como $b \neq 0$, segue imediatamente que $a_{i1} = v_i b^{-1}$,

$i = 1,2,\ldots,n$.

Consideremos as seguintes situações:

(1) $(r,\xi) \in S(R \times H)$, isto é, $c = 0$.

Para $a = 0$, temos que $(r,\xi) = (-1,0)$ e, neste caso $g_2, g_3, \ldots, g_n$ podem ser quaisquer vetores para os quais $g \in Sp(n)$.

Para $a \neq 0$, temos $a_{i1} = u_i a^{-1}$, para $i = 1,2,\ldots,n$, ou seja, $u = ab^{-1}v$, e $g_2, g_3, \ldots g_n$ são quaisquer vetores, para os quais $g \in Sp(n)$.

(2) $(r,\xi) \in \text{int}\,\{D(R \times H)\}$, isto é $c \neq 0$.

Para $a = 0$, temos $a_{i2} = u_i c^{-1}$, para $i = 1,2,\ldots,n$, e $g_3, g_4, \ldots, g_n$ tais que $g \in Sp(n)$.

Para $a \neq 0$, temos $a_{i2} = (u_i - v_i ab^{-1})c^{-1}$, para $i = 1,2, \ldots, n$ e $g_3, g_4, \ldots, g_n$ tais que $g \in Sp(n)$.

Logo, em qualquer órbita $G(u,v)$, em $S(H^n \times H^n)$, com $\rho(u,v) \neq (1,0)$, existe um único elemento da forma $s_+(r,\xi)$.

Analogamente, determinamos $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in Sp(n)$, tal que $g.s_-(r,\xi) = (u,v)$, com $(r,\xi) \neq$ $\neq (-1,0)$. Neste caso, como $a \neq 0$, segue que $a_{i1} = u_i a^{-1}$, para $i = 1,2,\ldots,n$.

Agora, para as demais colunas de g, ocorrem as seguintes situações:

(1) $(r,\xi) \in S(R \times H)$, isto é, $c = 0$.

Neste caso, $g_2, g_3, \ldots g_n$ são quaisquer vetores tais que $g \in Sp(n)$.

(2) $(r,\xi) \in \text{int}\,\{D(R \times H)\}$, isto é $c \neq 0$.

Para $b = 0$, temos $a_{i2} = v_i c^{-1}$, para $i = 1,2,\dots,n$. e $g_3, g_4, \dots, g_n$ são tais que $g \varepsilon Sp(n)$.
Para $b \neq 0$, temos $a_{i2} = (v_i - u_i b a^{-1}) c^{-1}$, para $i = 1,2,\dots,n$, e $g_3, g_4, \dots, g_n$ tais que $g \varepsilon Sp(n)$.

Logo, em qualquer órbita $G(u,v)$, em $S(H^n \times H^n)$, com $\rho(u,v) \neq (-1,0)$, existe um único elemento da forma $s_-(r,\xi)$.

3. $D(R \times H)$ é homeomorfo a $S(H^n \times H^n) / Sp(n)$.
Consideremos as seguintes aplicações:

$$\Psi_\pm : D(R \times H) - \{(\pm 1,0)\} \to S(H^n \times H^n) / Sp(n),$$

definidas de modo que os diagramas abaixo sejam comutativos

$$\begin{tikzcd} D(R \times H) - \{(\pm 1,0)\} \arrow[r, "\Psi_\pm"] \arrow[d, "s_\pm"'] & S(H^n \times H^n) / Sp(n) \\ S(H^n \times H^n) \arrow[ur, "\pi \quad \text{aplicação orbital}"'] & \end{tikzcd}$$

Então, $\Psi_+(r,\xi) = \pi(s_+(r,\xi))$, para $(r,\xi) \neq (1,0)$ e $\Psi_-(r,\xi) = \pi(s_-(r,\xi))$, para $(r,\xi) \neq (-1,0)$. Pelas observações 1 e 2, temos que $\Psi_+(r,\xi) = \Psi_-(r,\xi)$, para $(r,\xi) \neq (1,0)$ e $(r,\xi) \neq (-1,0)$. Além disto, $\Psi_-(1,0) \neq \Psi_+(-1,0)$. Definimos

$$\Psi : D(R \times H) \to S(H^n \times H^n) / Sp(n) \quad \text{por}$$

$\Psi(r,\xi) = \Psi_+(r,\xi) = \Psi_-(r,\xi)$, para $(r,\xi) \neq (1,0)$ e $(r,\xi) \neq (-1,0)$, $\Psi(1,0) = \Psi_-(1,0)$ e $\Psi(-1,0) = \Psi_+(-1,0)$. Sendo π, s_+ e s_- contínuas, temos que Ψ_+ e Ψ_- são contínuas e, portanto Ψ é contínua ([3], p. 83, Teor. 9.4). Também temos que Ψ é sobrejetora, já que dado um elemento $\beta \in S(H^n \times H^n) / Sp(n)$, existe $(r,\xi) \in D(R \times H)$, com $\Psi(r,\xi) = \beta$, pela observação 2. Além disto, Ψ é injetora, pois se $\Psi(r,\xi) = \Psi(r',\xi')$, com (r,ξ) e (r', ξ') diferente de $(1,0)$ e $(-1,0)$, então $\pi(s_+(r,\xi)) = \pi(s_+(r',\xi'))$, logo $s_+(r,\xi)$ e $s_+(r',\xi')$ estão em uma mesma órbita, portanto, pela observação 2, $(r,\xi) = (r',\xi')$. Assim, Ψ é um homeomorfismo ([3], p. 226, Teor. 2.1).

Temos, então, que $D(R \times H)$ se identifica, através de Ψ, com $S(H^n \times H^n) / Sp(n)$ e ρ se identifica com π.

4. As aplicações s_+ e s_- são secções para ρ.

Vamos determinar os grupos isotrópicos dos elementos de $S(H^n \times H^n)$. Seja $x = s_-(r,\xi)$

$$x = s_-(r,\xi) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $c \neq 0$, o grupo isotrópico de x é o conjunto A constituido dos elementos de $Sp(n)$, da forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & * \end{array}\right] \qquad \text{onde } * \quad Sp(n-2).$$

Para $c = 0$, o grupo isotrópico de x é o conjunto B dos elementos de $Sp(n)$, da forma

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \qquad \text{onde } * \in Sp(n-1).$$

Analogamente, os grupos isotrópicos de $y = s_+(r,\xi)$,

$$y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são os conjuntos A e B, para $c \neq 0$ e $c = 0$, respectivamente. Assim temos que as órbitas destes elementos são, respectivamente, do tipo $Sp(n) / A$ e $Sp(n) / B$. Afirmamos a existência de dois tubos ao redor das órbitas dos pontos $x = s_+(r,\xi)$ e $x = s_-(r,\xi)$, respectivamente, com $(r,\xi) \in S(R \times H)$. Com efeito, consideremos

$$\Psi_\pm : Sp(n) \times_B B\left[s_\pm\left(D(R \times H) - \{(\pm 1,0)\} \right)\right] \to$$

$$\to \quad S(H^n \times H^n) - \rho^{-1}\{(\pm 1,0)\}\,, \qquad \text{definidas} \qquad \text{por}$$

$$\Psi_\pm \quad [g, hs_\pm(r,\xi)] = g\, hs_\pm(r,\xi) \quad \text{(produto de matrizes)}.$$

Mostraremos que ψ_+ é um homeomorfismo. Analogamente, se poderia mostrar que ψ_- também é um homeomorfismo. De fato, temos que ψ_+ está bem definida, pois

$$\begin{aligned}\psi_+[gf,\ f^{-1}hs_+(r,\xi)] &= (gf)\ \ (f^{-1}hs_+(r,\xi)) = \\ &= ghs_+(r,\xi) = \\ &= \psi_+[g,\ hs_+(r,\xi)].\end{aligned}$$

Agora, se

$$\psi_+[g,hs_+(r,\xi)] = \psi_+[g',h's_+(r',\xi')] \ .$$

então $ghs_+(r,\xi) = g'\ h's_+(r',\xi')$, ou seja,

$$s_+(r,\xi) = (gh)^{-1}(g'h')\ s_+(r',\xi').$$

Portanto, $s_+(r,\xi)$ e $s_+(r',\xi')$ estão em uma mesma órbita em $S(H^n \times H^n)$, logo, $(r,\xi) = (r',\xi')$. Então, $s_+(r,\xi) = s_+(r',\xi')$ e, consequentemente, $k = (gh)^{-1}(g'h')$ pertence ao grupo isotrópico de $s_+(r,\xi)$.

Neste caso,

$$\begin{aligned}[g',h's_+(r',\xi')] &= [g'h',s_+(r',\xi')] = \\ &= [(gh)k,s_+(r,\xi)] = \\ &= [gh,k\ s_+(r,\xi)] = \\ &= [gh,s_+(r,\xi)] = [g,hs_+(r,\xi)]\end{aligned}$$

e, portanto ψ_+ é injetora. Por outro lado, se $(u,v) \in S(H^n \times H^n) - \rho^{-1}\{(1,0)\}$, então existe $g \in Sp(n)$, definido na Observação 2, tal que

$$\psi_+[g,(id)\ s_+(r,\xi)] = g.s_+(r,\xi) = (u,v), \quad \text{onde}$$

$(r,\xi) = \rho(u,v)$

Portanto, ψ_+ é sobrejetora. Consideremos, agora, o diagrama

$$\begin{tikzcd} Sp(n) \times B[s_+(D(R \times H) - \{(1,0)\})] \arrow[r, "\substack{\text{aplicação}\\ \text{orbital}}"] \arrow[d, "\alpha"'] & Sp(n) \times_B B[s_+(D(R \times H) - \{(1,0)\})] \arrow[dl, "\psi_+"] \\ S(H^n \times H^n) - \rho^{-1}\{(1,0)\} & \end{tikzcd}$$

onde α, definida por $\alpha(g,hs_+(r,\xi)) = gh\ s_+(r,\xi)$ é contínua, pois as operações envolvidas em sua definição são contínuas. Como a aplicação orbital é aberta, segue que ψ_+ é contínua. Tendo em vista que a aplicação α é a restrição de uma ação de $Sp(n)$ no espaço das matrizes quaterniônicas $n \times 2$, segue que α é fechada (Prop. 2.2 - Cap. 1) e, portanto, ψ_+ é um homeomorfismo.

APÊNDICES

I. Noções elementares de Categorias e Funtores

Referências: [1], [6], [14]

Definição I.1

Uma categoria $\mathcal{a}$, consiste de:

(i) uma coleção de objetos, $Ob(\mathcal{a})$;

(ii) para dois objetos $A,B \in Ob(\mathcal{a})$, um conjunto $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$, chamado conjunto dos morfismos de A em B;

(iii) Para três objetos $A,B,C \in Ob(\mathcal{a})$, uma lei de composição

$$Mor_{\mathcal{a}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{a}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{a}}(A,C)$$

satisfazendo aos seguintes axiomas:

1. Dois conjuntos $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$ e $Mor_{\mathcal{a}}(A',B')$ ou são disjuntos, ou são iguais e, neste caso $A = A'$ e $B = B'$.
2. Para cada objeto A, existe um morfismo $id_A \in Mor_{\mathcal{a}}(A,A)$ que atua como identidade à esquerda e à direita para os elementos de $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$ e $Mor_{\mathcal{a}}(B,A)$, respectivamente, para todo $B \in Ob(\mathcal{a})$.
3. A lei de composição é associativa.

Observação

Quando não houver necessidade de especificação, usaremos Mor (A,B) em lugar de $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$.

Definição I.2

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias. Um funtor covariante F, de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, é uma lei que a cada objeto A em $\mathcal{A}$, associa um objeto F(A), em $\mathcal{B}$, e a cada morfismo $f : A \to B$, associa um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$, tal que:

1. Para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$, temos

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

2. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são morfismos de $\mathcal{A}$, então

$$F(g.f) = F(g).F(f)$$

No caso em que F satisfaz a condição 1. acima, mas na condição 2, vale $F(g.f) = F(f).F(g)$, dizemos que F é um funtor contravariante.

Definição I.3

Dada uma categoria $\mathcal{A}$, uma subcategoria $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ diz-se completa se, dados dois objetos $B,B' \in Ob(\mathcal{B})$, então $Mor_{\mathcal{A}}(B,B') = Mor_{\mathcal{B}}(B,B')$.

Definição I.4

Dizemos que A é um pull-back do diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "\beta"'] \arrow[dr, "\Theta"] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& A \arrow[ur, "proj."] \arrow[dl, "proj."] & \\
Y \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

quando $A \subset X \times Y$, $A = \{(x,y) \mid f(x) = h(y)\}$, $f\alpha = h\beta$, e existe uma única aplicação $\Theta : W \to A$, tal que o diagrama é comutativo . Neste caso, dizemos que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "proj."] \arrow[d, "proj."'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & Z
\end{tikzcd}$$

é um diagrama pull-back.

II. Noções elementares de Topologia e Grupos Topológicos

Referências: [1], [3], [10]

Definição II.1

Dados dois espaços topológicos X e Y, dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é um mergulho, quando f é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Definição II.2

Seja $A \subset B$ e $f : B \to A$. Dizemos que f é uma retração, quando $f/A = id_A$.

Definição II.3

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Por aplicação canônica, ou aplicação quociente, de G em G/H, entendemos a aplicação $\pi : G \to G/H$, definida por $\pi(g) = gH$, para todo $g \varepsilon G$.

Proposição II.1

A aplicação canônica é contínua e aberta.

Definição II.4

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo fechado de G. A topologia quociente é a topologia, atribuida a G/H, que torna a aplicação canônica contínua, isto é, A é um aberto em G/H, quando $\pi^{-1}(A)$ for aberto em G.

Definição II.5

Um espaço de Hausdorff X é dito regular, se cada $x \in X$ e cada conjunto fechado $A \subset X$, $x \notin A$, possuem vizinhanças disjuntas em X.

Definição II.6

Um espaço de Hausdorff X é dito normal, se cada par de subconjuntos fechados de X, disjuntos, possuem vizinhanças disjuntas em X.

Definição II.7

Um espaço de Hausdorff X é dito completamente regular, se para cada ponto $x \in X$ e cada conjunto fechado $A \subset X$, $x \notin A$, existe uma função contínua $f : X \to I$, tal que $f(x) = 1$ e $f(a) = 0$, para todo $a \in A$.

Definição II.8

Se G é um grupo topológico, então uma representação real (complexa) de G, é um homomorfismo contínuo $\rho : G \to Gl(n,R)$, $(Gl(n,C))$.

Definição II.9

Dizemos que G age ortogonalmente sobre R^n, se existe um homomorfismo $\rho : G \to O(n)$, e G age sobre R^n por $g(x) = \rho(g)x$, através do produto de matrizes. Neste caso, dizemos que ρ é uma representação ortogonal de G.

Definição II.10

Seja G um grupo compacto e $F = \{f : G \to R\}$. Para $h \in G$, sejam $R_h f$ e $L_h f$ definidas por $R_h f(g) = f(gh)$ e $L_h f(g) = f(h^{-1}g)$. Definimos a integral de Haar como sendo a função $I : F \to R$ que satisfaz às seguintes condições:

(a) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$

(b) $I(cf) = c\, I(f)$, $c \in R$

(c) Se $f(g) \geqslant 0$, para todo $g \in G$, então $I(f) \geqslant 0$

(d) $I(1) = 1$

(e) $I(R_h f) = I(L_h f) = I(f)$, para todo $h \in G$.

Notação: Usamos a notação $\int f\, dg = I(f)$.

Proposição II.2

Seja $f : G \times A \to R$ contínua, onde A é um espaço topológico e G é um grupo compacto. Então, a função $F : A \to R$, definida por $F(a) = \int f(g,a)\, dg$ é contínua.

III. Noções elementares de Grupos de Lie

Referências: [1], [2], [4], [7], [8]

Definição III.1

Seja $U \subset R^n$, aberto, e f uma aplicação de U em R^m. Dizemos que f é diferenciável, se tem derivadas parciais contínuas, de todas as ordens.

Definição III.2

Seja X um sobconjunto qualquer do R^n, e f uma aplicação de X em R^m. Dizemos que f é diferenciável, se pode ser localmente estendida a uma aplicação diferenciável sobre conjuntos abertos, ou seja, se para todo $x \in X$, existe aberto $U \subset X$, com $x \in U$, e uma aplicação $F : U \to R^m$, tal que F = f sobre $U \cap X$.

Definição III.3

Seja $X \subset R^n$ e $Y \subset R^n$. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é um difeomorfismo, quando f é uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável.

Definição III.4

Seja $X \subset R^n$ e $Y \subset R^n$. Dizemos que $f : X \to Y$ é um difeomorfismo local, se cada $x \in X$ possui uma vizinhança aplicada difeomorficamente, por f, em uma vizinhança de f(x).

Proposição III.1

Se $f : U \to V$ é um difeomorfismo, então $df_x : R^n \to R^n$ é um isomorfismo, para todo $x \in U$.

Proposição III.2

Um difeomorfismo local é um difeomorfismo global sobre sua imagem, se, e somente se, for injetor.

Definição III.5

Seja $X \subset R^n$. Dizemos que X é uma variedade diferenciável, k-dimensional, quando X é localmente difeomorfo a um aberto do R^k, ou seja, cada $x \in X$ possui uma vizinhança V, em X, que é difeomorfa a um aberto U do R^k.

Definição III.6

Nas condições da Definição III.5, um difeomorfismo $\emptyset : U \to V$ é chamado uma parametrização de V e o difeomorfismo inverso $\emptyset^{-1} : V \to U$ é dito um sistema de coordenadas sobre V.

Definição III.7

Seja $X \subset R^n$ e $\emptyset : U \to X$ uma parametrização local em x, sendo $U \subset R^k$, aberto, com $\emptyset_o = \emptyset(0) = x$. Definimos o espaço tangente de X, em x, como sendo a imagem da aplicação $d\emptyset_o : R^k \to R^n$, e representamos por $T_x(X)$.

Definição III.8

O espaço normal de X, em x, representado por $N_x(X)$, é o complemento ortogonal de $T_x(X)$ em R^n.

Proposição III.3

Para quaisquer variedades X e Y, temos

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \times T_y(Y)$$

Proposição III.4

Sejam $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ aplicações diferenciáveis e seja $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ definida por $(x,y) \longmapsto (f(x),g(y))$. Então,

$$d(f \times g)_{(x,y)} = df_x \times dg_y$$

Proposição III.5 - Teorema da função inversa

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação diferenciável, cuja derivada df_x, em um ponto $x \in X$, é um isomorfismo. Então, f é um difeomorfismo local em x.

Definição III.9

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G, com uma estrutura de grupo, de modo que as aplicações

$$(x,y) \longmapsto xy \quad e \quad x \longmapsto x^{-1}$$

são diferenciáveis.

Proposição III.6

A imagem de um homomorfismo contínuo $\psi : H \to G$, entre grupos de Lie, é um grupo de Lie.

Proposição III.7

Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie.

Proposição III.8

Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, e $\pi : G \to G/H$ a aplicação canônina. Então:

(i) π é diferenciável

(ii) Para todo $gH \in G/H$, existe uma vizinhança $U(gH)$ e uma aplicação diferenciável $\sigma : U \to G$, tal que $\pi . \sigma = id_U$.

Dizemos que σ é uma secção local de π.

BIBLIOGRAFIA

[1] BREDON, Glen E. Introduction to compacts transformation groups. New York, Academic Press, 1972.

[2] CARMO, Manfredo do. Notas de um curso de grupos de Lie. Rio de Janeiro, IMPA, 1974.

[3] DUGUNDJI, James. Topology. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4] GUILLEMIN, Victor and POLLACK, Alan. Differential topology. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1974.

[5] HUSEMOLLER, Dale. Fibre bundles. New York, McGraw Hill Book Company, 1966.

[6] LANG, Serge. Álgebra. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

[7] LIMA, Elon Lages. Análise no espaço R^n. Brasília, Editora Universidade de Brasília - Editora Edgard Blücher Ltda, 1970.

[8] LIMA, Elon Lages. Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro, IMPA, 1973.

[9] MONTGOMERY, D. and YANG, C.T. The existence of a slice. Annals of Mathematics 65 (1) : 108-116, 1957.

[10] MONTGOMERY, D. and ZIPPIN, Leo. Topological transformation groups. New York, Interscience Publishers, Inc., 1955.

[11] MOSTOW, G.D. Equivariant embeddings in euclidean space. Annals of Mathematics 65 (3) : 432-446, 1957.

[12] PALAIS, Richard S. The classification of G-spaces. Memoirs of the American Mathematical Society (36), 1960.

[13] STEENROD, Norman. The topology of fibre bundles. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1951.

[14] HILTON, Peter and WU, Yel-Chiang. Curso de álgebra moderna. Barcelona, Editorial Reverté, S.A., 1977.

[15] CHEVALLEY, Claude. Theory of Lie groups. Princeton, Princeton University Press, 1946.