Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora :

Donald Morison Silberger

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

Orientador

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Prof. Ítalo José Dejter, Ph.D.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SOLETRAÇÃO INVERSA DE PALAVRAS FPrt-UNIVERSAIS DE COMPLEXIDADE TRÊS.

DIANA DOS SANTOS

AGOSTO - 1980

AGRADECIMENTOS

Obrigada, Senhor, porque tudo é Seu!

A tanta gente boa que colaborou comigo, meus sinceros agradecimentos.

Pela oportunidade que me deram de realizar este estudo, agradeço à UFSC e a minha família.

Especialmente a todos meus Mestres, desde Mamãe, a minha PRIMEIRA professora, até o Orientador deste trabalho, o Professor Donald Morison Silberger, Ph.D., muita gratidão.

Para três amores:

Ana Lúcia

Luciano Amaury

Luciana Maria

RESUMO

Esta dissertação estabelece que se a palavra $A^nB^mA^j$ é FPrt-universal, então também o é a palavra $A^jB^mA^n$. Além disso mostra condições necessárias para que as funções f e g satisfaçam a equação $r_k = f^m g^n f^j$.

ABSTRACT

This dissertation establishes that if the word $A^nB^mA^j$ is FPrt-universal, them so is the word $A^jB^mA^n$, and also exhibits necessary conditions for functions f and g to satisfy the equation $r_k = f^mg^nf^j$.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Eis um estudo sobre alguns aspectos de palavras FPrt-universais.

O capítulo I apresenta as definições, propriedades e notações básicas que são usadas no transcorrer de todo o trabalho.

O capítulo II inicia com uma perspectiva histórica e apresenta, depois, dois teoremas que sugerem uma área de utilidade, em álgebra, de nossas descobertas, apresentadas posteriormente.

O primeiro teorema, usando o Axioma da Escolha, afirma que se a equação $y = W(x_1,\ldots,x_n)$ tem solução $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ em um semigrupo de funções, para cada função y finita, injetiva, e bigraficamente conexa, então esta equação também tem solução para cada $y \in \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A}$ é o conjunto das funções f tais que para todo $x \in Dom(f)$, x é elemento de um ciclo f ou $x \in \{f^i(b) : i \in \omega\}$ para algum $b \notin Rng(f)$, e que $\{f^i(x) : x \in \omega\}$ é finito.

O segundo teorema do capítulo II afirma que se $y = W(x_1,\ldots,x_n)$ tem solução para toda função y finita , injetiva e conexa, então a equação também tem solução para cada função finita. Como é esperado, no caso finito a demonstração é conseguida sem o uso do Axioma da Escolha.

O objeto central da tese aparece no capítulo III, onde é mostrado que, se uma palavra $W(A, B)$, da forma $A^nB^mA^k$ representa, no sentido mencionado nos parágra fos anteriores, toda função finita, então a palavra $A^k B^m A^n$ também tem esta propriedade. Este resultado estende um resultado análogo, mas já conhecido, para palavras da forma $A^n B^m$.

No capítulo III investigamos, também, as condições para $y = x_1^n\, x_2^m\, x_1^k$ ter solução $\langle x_1, x_2 \rangle$ para cada y da forma

$$0 \longmapsto 1 \longmapsto \ldots \longmapsto k-1.$$

CAPÍTULO I. Generalidades.

Preliminares. Constarão deste capítulo notações e convenções que aparecem no transcorrer do trabalho. Também definições e propriedades específicas correlacionadas com o nosso estudo.

Conjuntos e números. A letra $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros e ω, o conjunto de todos os inteiros não negativos. O número 0 denota tanto o inteiro zero, como o conjunto vazio. Para $k \in \omega\setminus 1$, o símbolo k denota o conjunto $\{0,1,\ldots,k-1\}$. Para $\{m,n\} \subseteq \omega$ com $n \in m$, é claro que $m\setminus n = \{n,n+1,\ldots,m-1\}$. Assim, por exemplo, $0 = \phi$; $3 = \{0,1,2\}$; e $3\setminus 1 = \{x: x \in 3 \wedge x \notin 1\} = \{1,2\}$.

Sejam $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$. A expressão $n|m$ significa que n é divisor de m, isto é, que existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $m = nq$. Quando tivermos que n não é divisor de m, então poderemos escrever $n \nmid m$. Para $i \in \omega$, quando $n^i|m$, mas $n^{i+1} \nmid m$, então dizemos que n^i divide exatamente m e anota-se $n^i \| m$.

Para um inteiro $x>1$, a expressão $S(x)$ denota o mínimo fator primo de x, e $M(x)$ designa o mínimo múltiplo comum dos inteiros $2,\ldots,x$.

Para um conjunto arbitrário X, o cardinal de X será expresso por $|X|$. Segue que $|k| = k$ e que $|\omega| = \aleph_0$.

Relações e funções. Quando f é uma relação binária qualquer, isto é, um subconjunto de X x X para algum conjunto X, então f^{-1} denota $\{<y,x> ; <x,y> \varepsilon f\}$; Dom(f) denota $\{x: \exists y <x,y> \varepsilon f\}$; Rng(f) denota $Dom(f^{-1})$, também chamado de amplitude de f; \$(f) denota $Dom(f) \cup Rng(f)$. Temos $f \upharpoonright A$ designando $(A \times Rngf) \cap f$ e indicamos por $id \upharpoonright X$ ao conjunto $\{<x,x> : x \varepsilon X\}$. O conjunto $\{y: <x,y> \varepsilon f \wedge x \varepsilon A\}$ onde A é o Dom(f), é denotado por $f[A]$.

O grafo direto, também chamado mais brevemente de "dígrafo" representa uma relação binária f em um diagrama, onde uma seta $x \longmapsto y$ é seta de tal dígrafo, se e somente se $<x,y> \varepsilon f$.

A composição das relações binárias f e g será simplesmente expressa por fg. Assim fg denota a relação $\{<x,y> : \exists z <x,z> \varepsilon g \wedge <z,y> \varepsilon f\}$.

Chamamos uma relação binária f de função, se e somente se $\{<x,y> , <x',y>\} \subseteq f$ implicar em $x = x'$ para x,y e x' elementos quaisquer. Para f uma função, e para $x \varepsilon Dom(f)$, o único elemento do conjunto $f[\{x\}]$ é chamado de imagem de x sob f. Representamos essa imagem de x sob f por uma das expressões $f(x)$, f_x e x^f.

Quando u e v são relações binárias, escrevemos $u \leq v$ para significar que existe uma função h tal que $u = \{<h(x), h(y)> : <x,y> \varepsilon v\}$ e escrevemos $u \simeq v$ para exprimir que existe uma injeção p tal que $u = \{<p(x), p(y)> : <x,y> \varepsilon v\}$.

Quando $n \varepsilon \omega \backslash 2$, então r_n significa a função $\{<i,i+1> : i \varepsilon n-1\}$ e C_n significa $r_n \cup \{<n-1, 0>\}$.

Chamamos r_n de ramo canônico. Se $f \simeq r_n$, então chamamos f de ramo de comprimento $n-1$. Chamamos C_n de permutação canônica cíclica do conjunto n. Se $f \simeq C_n$ então diremos que f é um ciclo de comprimento n.

Quando $|\{x_i : i \in n+1\}| = n > 0$, então é claro que a função $\{<x_i, x_{i+1}> : i \in n\}$ é um ramo de comprimento n; escrevemos esta função na forma $(x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Um ramo de comprimento um é chamado de ramo trivial. É óbvio que $(x_0, x_1, \ldots, x_n] \simeq r_n$.

O ciclo $(x_0, x_1, \ldots, x_n] \cup \{<x_n, x_0>\}$ de comprimento $n+1$, escrevemos na forma $(x_0, \ldots, x_n)$.

Quando g é uma função qualquer, escrevemos $f: x \longmapsto y$ para indicar que $y = f(x)$. Uma expressão do tipo $f: y_1 \longmapsto y_2 \longmapsto y_3$ indica que $f: y_1 \longmapsto y_2$ enquanto que $f: y_2 \longmapsto y_3$. Assim temos que $f^2(y_1) = y_3$ ou que $f^2: y_1 \longmapsto y_3$.

Quando g é uma relação binária, então os elementos em $\mathrm{Dom}(g) \setminus \mathrm{Rng}(g)$ são chamados de brotos de g.

Seja f uma função não vazia. Escrevemos que $f \in \mathbb{A}$ se, e somente se para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tivermos $\{f^i(x) : i \in \omega\}$ finito e ou $\exists\, i \in \omega$ tal que $f^i(x) = x$ ou $\exists$ broto b de f e $\exists\, j \in \omega$ tal que $f^i(b) = x$.

É claro que $C_k \in \mathbb{A}$ para todo $k \in \omega \setminus 1$. Também $r_k \in \mathbb{A}$ para todo $k \in \omega \setminus 2$.

Seja X um conjunto arbitrário. Temos $\mathrm{Prt}(X)$ para denotar o conjunto $\{f: f$ é função e $\$(f) \subseteq X\}$. Chamamos de ${}^X X$ ao conjunto das funções $f \in \mathrm{Prt}(X)$ tais que $X = \mathrm{Dom}(f)$. $\mathrm{Sym}(X)$ é o conjunto de todas as permutações de X.

<u>Termos universais</u>. Seja Σ^* o monóide livre gerado pelo alfabeto finito $\Sigma = \{ A, B, \ldots \}$. Seja $\alpha \in \Sigma^*$. Seja S um semigrupo e $x \in S$. Escrevemos que $(\alpha \downarrow x)S$ para expressar que existe um homomorfimo $\Sigma^* \longrightarrow S$ tal que $\alpha \longmapsto x$ (Ver fig. 1 e 2 no apêndice). Quando $(\alpha \downarrow x)S$ dizemos que α representa x em S.

Dizemos que α é universal para S, ou escrevemos $\alpha\downarrow\downarrow S$ se, e sòmente se, para qualquer $y \in S$ tivermos que $(\alpha \downarrow y)S$.

Quando $\mathcal{S}$ é uma família de semigrupos, dizemos que uma palavra α é $F\mathcal{S}$-universal se, e só se $\alpha\downarrow\downarrow S$ para cada elemento finito $S \in \mathcal{S}$; dizemos que α é $I\mathcal{S}$-universal se, e sòmente se $\alpha\downarrow\downarrow S$ para cada elemento infinito $S \in \mathcal{S}$; e dizemos que α é $\mathcal{S}$-universal se, e sòmente se α for ambos $F\mathcal{S}$-universal e $I\mathcal{S}$-universal.

Interessamo-nos principalmente pelas seguintes famílias de monóides: Prt = { Prt(X): X é conjunto}; Myc = $\{{}^{X}X$: X é conjunto}; Sym = { Sym(X): X é conjunto} .

Em nosso trabalho, Rep(α, f, X) designa a família de todos os homomorfismos $\Sigma^* \longrightarrow$ Prt(X) tais que $\alpha \longmapsto f$.

Quando escrevemos Rep(α , f, X) $\neq \phi$, dizemos o mesmo que $(\alpha \downarrow f)$Prt(X). Apenas a primeira forma tem precedência histórica.

O símbolo $\underline{\alpha}$ denotará a ordem parcial na família de todos os homomorfismos de Σ^* em Prt(X) como segue: $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$ se, e só se, $\mathcal{H}(\beta) \subseteq \mathcal{K}(\beta)$ para todo $\beta \in \Sigma^*$.

Quando $\{\alpha,\beta\} \subseteq \Sigma^*$ então $\alpha\beta$ significa a palavra formada pela concatenação de α e β . Por exemplo, se α = AB e β = BAA então $\alpha\beta$ = ABBAA enquanto que $\beta\alpha$ = AABBA.

Para $\alpha \in \Sigma^*$ a expressão $|\alpha|$ denota o comprimento de α. Por exemplo, quando α = ABBAB, então $|\alpha|$ = 5. É claro que $|\beta\gamma| = |\beta|+|\gamma|$ para $\{\beta,\gamma\} \subseteq \Sigma^*$. A palavra vazia é escrita ϕ. Certamente $\beta\phi=\beta=\phi\beta$ para $\beta \in \Sigma^*$ e $|\gamma|$ = 0 se, e só se, $\gamma = \phi$. Para $n \in \omega$ e $\beta \in \Sigma^*$ temos que $|\beta^n| = n\,|\beta|$.

Chamamos β de segmento de $\alpha \in \Sigma^*$, se e somente se, $\alpha = \lambda\beta\delta$ para algum $\{\lambda,\delta\} \subseteq \Sigma^*$. Diremos que β é segmento à direita (esquerda) de α , se e só se, $\alpha = \lambda\beta$ $(\alpha = \beta\lambda)$. respectivamente, para algum $\lambda \in \Sigma^*$. Se β é segmento de α tal que $0 < |\beta| < |\alpha|$, dizemos que β é segmento próprio de α.

Dizemos que β é bordo de α, se e somente se, β é, simultaneamente, sgmento próprio à direita e à esquerda de α. Dizemos que uma palavra é bordada se tiver bordo. Por exemplo, se $\alpha = A^2B^4CBA^2B$ então A^2B é bordo de α e α é bordada. Uma palavra $\beta \neq \phi$ é dita bordo curto de $\alpha \in \Sigma^*$ se, e somente se, $\alpha = \beta\gamma\beta$ para algum $\gamma \in \Sigma^*$. Por exemplo, se α = ABABABA então ABA e A são bordos curtos.

A complexidade de uma palavra α é igual ao número de blocos de ocorrência contínua de uma letra uma ou mais vezes. Os exemplos no parágrafo abaixo dão bem esta idéia, no entanto, quem desejar mais formalidade poderá reportar-se a Milton Luiz Valente, em sua Tese de Mestrado [11] .

Quando α = AAABBAAAAB, isto é, quando $\alpha = A^3B^2A^4B$, então α tem complexidade quatro; A^mB^n tem complexidade dois; $A^mB^nA^j$ tem complexidade três. As palavras de complexidade três, no alfabeto $\{A,B\}$, são objeto principal de estudo em nosso trabalho.

Quando $\alpha \in \Sigma^*$ e $L \in \Sigma$, então o número de ocorrências da letra L na soletração de α chama-se multiplicidade de L em α. A expressão gdc(α) denota o maior divisor comum das multiplicidades das letras em α. Se gcd(α) = 1, então α é chamada de relativamente prima.Por exemplo, se $\alpha = A^2B^3A^4B$ então gcd(α) é o maior fator comum de 6 e 4, isto é, gcd(α) = 2, neste caso.

Soletração inversa de α é denotada por $\overline{\alpha}$ e significa a palavra α escrita em sentido contrário. Temos, por exemplo, que se $\alpha = A^2B^3A$, então $\overline{\alpha} = AB^3A^2$ e, se $\beta = AB^2C^3A$, então $\overline{\beta} = AC^3B^2A$.

Sejam $\{\alpha,\beta\} \subseteq \Sigma^*$. Chamamos de conjugado cíclico de α e escrevemos $\alpha\sim\beta$ se, e somente se existir $\{\mu,\lambda\} \subseteq \Sigma^*$ tal que $\alpha = \mu\lambda$ enquanto $\beta = \lambda\mu$. Por exemplo, $A^2B^3A\sim AB^3A^2\sim B^3A^3\sim B^2A^3B\sim BA^3B^2\sim A^3B^3$. Por [10, Proposição 1.18] temos que $\sim$ é uma relação de equivalência em Σ^*.

CAPÍTULO II. Termos universais.

Uma perspectiva histórica. As primeiras noções de "Termo Universal" surgiram com Jan Mycielski por volta de 1964.

Em 1960 J. R. Isbell [3] publica o primeiro trabalho sobre o assunto. Ele chama uma palavra α de bordada, se e somente se existe palavras $\beta \neq \phi$ e τ tal que $\alpha = \beta\tau\beta$.

Primeiro Teorema de Isbell: Se α não é bordada, então α é IMyc-universal.

Segue que B^nA^m é IMyc-universal para todo $\{n,m\} \subseteq \omega\backslash 1$.

Uma permutação h de X é chamada de involução de X se, e somente se $h^2 = id\lceil X$.

Segundo Teorema de Isbell: Seja $n = p^k$ para p primo e $k \in \omega$. Seja X finito. Seja $g \in {}^XX$. Então existe $f \in {}^XX$ e uma involução h de X tais que $g = f^n \circ h$.

Facilmente segue do Segundo Teorema de Isbell que $A^{2i}B^nA^{2j+1}$ e $A^{2j+1}B^nA^{2i}$ são FMyc-universais para todo $\{i,j\} \subseteq \omega$ quando $n = p^k$ com p primo e $k\in\omega$. Vimos também que B^uA^v é Myc-universal sempre que u e v forem, um ímpar e outro inteiro da forma p^k, com p primo.

Respondendo às perguntas de Mycielski,

Isbell observou, pelo Primeiro Teorema dele, que B^2A^2 é IMyc-universal, mas não é FMyc-universal, pois B^2A^2 não representa c_2 em ${}^2 2$. Ele observou pelo seu Segundo Teorema que A^2B^2A e FMyc-universal. Ele também observou que A^2B^2A não é IMyc-universal, pois A^2B^2A não representa s_+ em ${}^{\omega}\omega$, onde s_+ denota $\{<x,x+1> : x \varepsilon \omega\}$.

Isbell mostra que BA^2BA e BAB^2A são FMyc-universais, e pergunta se são Myc-universais.

Em 1972, na tese de doutorado, G. F. McNulty [5] faz uma generalização do Primeiro Teorema de Isbell que enunciamos abaixo:

Seja X infinito. Seja $J \subseteq \Sigma^* \setminus \{\phi\}$ tal que cada elemento de J é não bordado, e tal que para $\{\alpha,\beta\} \subseteq J$, com $\alpha \neq \beta$, acontece que nem α é segmento de β nem existe $\mu \neq \phi$ tal que μ é, ao mesmo tempo, segmento à direita de α e segmento à esquerda de β. Seja $\mathfrak{K} : J \longrightarrow {}^X X$ função arbitrária. Então existe um homomorfismo $\mathfrak{K}$: $\Sigma^* \longrightarrow {}^X X$ tal que $\mathfrak{K} \restriction J = \mathfrak{K}$.

Em 1973, D. M. Silberger, [8] e [9], generaliza o Segundo Teorema de Isbell na outra direção, com o seguinte teorema:

Seja α uma palavra que não possa ser escrita $\alpha = \beta\rho = \lambda\beta$ para $\phi \neq \beta \neq \alpha$. Então α é IPrt-universal.

Em 1974, Silberger e McNulty provam o teorema:

. Sejam X infinito e $J \in \Sigma^* \setminus \{\phi\}$, J não contendo palavras bordadas e tal que para $\{\alpha, \beta\} \subseteq J$, com $\alpha \neq \beta$, acontece que, nem α é segmento de β, nem existe $\mu \neq \phi$ tal que μ é, ao mesmo tempo, segmento à direita de α e segmento à esquerda de β. Seja $\mathcal{K}: J \longmapsto$ Prt (X) função arbitrária. Então existe um homomorfismo K: $\Sigma^* \longmapsto$ Prt (X) tal que $K \upharpoonright J = \mathcal{K}$.

Vários autores concordam, entre eles , Sierpinski e R. A. McKenzie, que na caracterização das palavras IMyc-universais, basta estudar o alfabeto $\Sigma = \{A, B\}$ de duas letras. Silberger [8] demonstra que o mesmo vale para palavras IPrt-universais.

Silberger, no teorema principal de [9] dá uma contribuição de importância central em nossa tese:

Teorema: Seja $\alpha \in \Sigma^*$. Então α é Prt-universal se, e somente se, α representa f em Prt ($f) para cada f injetiva e conexa.

Entre as conseqüências deste teorema, encontram-se em [9] as que listamos abaixo.

Em [9], s denota $\{\langle n, n+1 \rangle : n \in \mathbb{Z}\}$; s_+ denota $s \upharpoonright \omega$; p_+ denota s_+^{-1}; s_n denota o ciclo (0 1 ...

... n-1) para cada inteiro $n \geq 1$ e p_k denota $p_+ \restriction k$ para cada inteiro $k \geq 2$. $\mathcal{B}$ denota $\{s, s_+, p_+\} \cup \{s_n : n \geq 1\} \cup \{p_n : n \geq 2\}$. Então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$, e cada elemento em $\mathcal{I}$ é isomorfo como um dígrafo a exatamente um elemento em $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{I}$ denota o conjunto das funções injetivas conexas.

Os resultados comprometidos são:

1) Seja $1 < m \leq \aleph_0$. Seja Rep $(\alpha, f, \$f) \neq \phi$ para cada $f \in \mathcal{B}$ com $|f| \leq m$. Então α é Prt(k)-universal para cada $k \leq m$.

2) Seja $1 < m \leq \aleph_0$. Seja $\mathrm{Rep}(\alpha, p_n, \$p_n) \neq \phi$ sempre que $2 \leq n < m$. Seja $k < m$. Seja $g \in \mathrm{Prt}(k)$ tendo a propriedade de que cada componente do dígrafo tem um vértice que não é elemento da amplitude de g. Então Rep $(\alpha, g, k) \neq \phi$.

3) Seja $\mathrm{Rep}(\alpha, p_n, \$p_n) \neq \phi \neq \mathrm{Rep}(\alpha, p_+, \omega)$. Seja g qualquer função cujos dígrafos componentes têm um vértice que não está na aplitude de g. Então Rep $(\alpha, g, \$g) \neq \phi$.

4) α é FPrt-universal se, e só se α é universal para <Point X,o> para cada conjunto X. Aqui, a expressão Point(X) denota o conjunto de todas $f \in {}^{X \cup \{X\}}(X \cup \{X\})$ tais que $f(X) = X$. (Note que $X \notin X$, e que estas funções f são justamente as transformações de $X \cup \{X\}$ que fixam o ponto X.)

5) Seja $1 \leq n < \aleph_0$ e seja $(n, \gcd(\alpha)) = 1$. Então $\mathrm{Rep}(\alpha, s_n, n) \neq \phi$.

6) Se $\gcd(\alpha) = 1$ então $\mathrm{Rep}(\alpha,\ s_n, n) \neq \phi$,n) para cada $n \geq 1$ e além disso $\mathrm{Rep}(\alpha,\ s,\ \mathbb{Z}) \neq \phi$.

7) Seja $\gcd(\alpha)$ um inteiro par. Então Rep $(\alpha,\ s_{2n},\ 2n) = \phi$ para cada inteiro positivo $n \geq 1$.

8) Seja X qualquer conjunto, e seja α representando f em Sym X. Então $\overline{\alpha}$ representa f em Sym X.

9) Seja β qualquer conjugado cíclico de α Para cada $n \geq 1$ de $\mathrm{Rep}(\alpha,\ s,\ n) \neq \phi$, então $\mathrm{Rep}(\beta, s_n, n) \neq$ $\neq \phi$ e, se α representa s em Sym $\mathbb{Z}$, então β também representa s em Sym ($\mathbb{Z}$).

10) Seja Rep $(\beta\gamma\beta, s,\ \mathbb{Z}) \neq \phi$.Então $(\gamma\beta^2, s\ \mathbb{Z})$ $\neq \phi \neq \mathrm{Rep}(\beta^2\gamma, s,\ \mathbb{Z})$.

11) Seja α bordada. Então $\alpha = \beta\sigma\beta$ para algum σ e para algum β não bordada e não vazia.

12) $(AB)^n A$ é Prt-universal para cada $n \in \omega$.

13) $B(BA)^k$ é Prt-universal para cada $k \in \omega$.

14) $(BA)^k A$ é Prt-universal para cada $k \in \omega$.

15) B^3A^2 é Prt-universal.

16) B^2A^3 é Prt-universal.

17) B^xA^y é FPrt-universal sempre que x e y são inteiros positivos ímpares.

18) Seja $n \geq 1$. Então $B^nAB^{n+1}A$ é Prt-universal.

19) Seja $n \geq 1$. Então $BA^{n+1}BA^n$ é Prt-universal.

Em 18) e 19) encontra-se a resposta fortemente afirmativa à pergunta de Isbell com respeito às palavras BA^2BA e BAB^2A, pois claramente Prt(X)-universal implicará em ${}^{X}X$-universal para todo conjunto X e, portanto, Prt-universal implica Myc-universal.

20) Seja $k \in \omega \setminus 2$. Seja $p_k = f^2.g^2.f$ onde $\{f, g\} \subseteq Prtk$. Então $f \in Sym\ k$, $f^3(0) = k-1$ e $g \in Sym(k \setminus \{f(0)\})$.

Seja τ a palavra A^2B^2A. Então:

21) $Rep(\tau, p_3, 3) = \phi$

$Rep(\overline{\tau}, p_+, \omega) = \phi$

$Rep(\overline{\tau}, p_3, 3) = \phi$

22) Seja $k \geq 1$. Seja $p_k = f.g^2.f^2$ onde $\{f, g\} \subseteq$ Prtk. Então $f \in$ Sym k, $f^3(0) = k-1$, e $g \in$ Sym $(k \setminus \{f^2(0)\})$.

Entre os resultados acima transcritos, os números 20, 21 e 22 são especialmente importantes em nosso trabalho. De fato, o nosso teorema 3.1 é uma generalização das afirmações 20 e 22.

Observemos que A^2B^2A e AB^2A^2 são FMyc-universais, mas não são Prt(3)-universais, conforme a afirmação 21 acima.

Em 1977 A. Ehrenfeucht e D. M. Silberger [1] estabelecem o teorema seguinte, estendendo o método de Isbell a fim de melhorar seu Segundo Teorema.

Seja n inteiro positivo, tendo um menor fator primo ímpar p. Seja k o maior inteiro tal que $n|2^k$ seja um inteiro. Então as duas seguintes afirmações são equivalentes:

I) $2^{k+1} < p$

II) Para cada X finito e para cada $f \in {}^XX$ existe $g \in {}^XX$ e uma involução h de X tal que $f = g^n h$.

Os mesmos autores em [2] destacam o teorema e o corolário que seguem:

a) Seja $\{n, m\} \subseteq \omega \setminus 2$. Então as três afirmações são equivalentes:

I) $M(S(m)) \nmid n$ e $M(S(m)) \nmid m$;

II) B^nA^m é Myc-universal;

III) B^nA^m é FSym-universal.

b) Seja $s > 1$. Sejam $L_1, L_2, \ldots L_s$ letras distintas. Seja $n(j) > 1$ para todo j. Seja α a palavra de comprimento $\Sigma^*_{i=1}\, n(i)$ denotada por $\alpha = L_1^{n(1)} L_2^{n(2)} \ldots L_s^{n(s)}$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:

I) Existe inteiros i e j tais que $1 \leq i < j \leq s$ e tais que $M(S(n(i))) \nmid n(j)$ e $M(s(n(j))) \nmid n(i)$.

II) α é Myc-universal;

III) α é FSym-universal.

Transcreveremos, agora, a generalização do teorema imediatamente anterior. Isto é, o teorema principal de um dos mais recentes trabalhos de Silberger [7]:

Seja $\{n, m\} \subseteq \omega\backslash 2$. As afirmações seguintes são equivalentes:

I) $M(S(n)) \nmid m$ e $M(S(m)) \nmid n$;

II) B^nA^m é Prt-universal;

III) B^nA^m é Myc-universal;

IV) B^nA^m é Sym-universal.

É de especial interesse mencionar aqui o trabalho de Margaret Weems Harriss [12], que em sua tese de mestrado, em 1977, chegou ao resultado:

Para todas as palavras de complexidade dois, se uma palavra é FPrt-universal, então sua soletração inversa também o é.

Resultado semelhante acabamos de conseguir no teorema principal, o último deste trabalho, para palavras de complexidade três.

Os lemas, definições e proposições imediatamente a seguir, isto é, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5, com as respectivas demonstrações são traduções da autora.

Eles serão utilizados na demonstração dos teoremas que seguem, neste mesmo capítulo.

LEMA 2.1 [9, Lemma 2.1] . Seja $f \in Prt(X)$, seja $\{f_j : j \in J\}$ a família de todas as componentes conexas do dígrafo f, e para cada $j \in J$ seja $\mathcal{R}_j$ um elemento em $Rep(\alpha, f_j, \$f_j)$. Para cada $L \in \Sigma$ seja $\mathcal{R}(L)$ denotando $\cup\{\mathcal{R}_j(L) : j \in J\}$. Então $\{\mathcal{R}(L) : L \in \Sigma\} \subseteq Prt(X)$, o homomorfismo $\mathcal{R} : \Sigma^* \longrightarrow Prt(X)$, unicamente gerado por $\{\mathcal{R}(L) : L \in \Sigma\}$, é um elemento em $Rep(\alpha, f, X)$, e $\mathcal{R}_j \overset{\alpha}{=} \mathcal{R}$ para todo $j \in J$. Então o axioma da Escolha implica que, se $Rep(\alpha, f_j, \$f_j) \neq \phi$ para todo $j \in J$, então $Rep(\alpha, f, X) \neq \phi$.

Demonstração. Como a família $\{\$f_j : j \in J\}$ é disjunta aos pares temos que $\{\mathcal{H}(L) : L \in \Sigma\} \subseteq Prt(X)$ conforme afirmado, e então que o homomorfismo $\mathcal{H}$ está realmente em $Prt(X)$. Claramente $\mathcal{H}_j(\beta) \subseteq \mathcal{H}(\beta)$ para todo $\beta \in \Sigma^*$, e então $\mathcal{H}_j \underline{\alpha} \mathcal{H}$ como afirmado, para todo $j \in J$.

Seja $x \in X$. Se $x \in Domf$, então existe um único $i \in J$ tal que $x \in Domf_i$, e daí que $f(x) = f_i(x) = \mathcal{H}_i(\alpha)(x) = \alpha^{\mathcal{H}}(x)$. Assim vemos que $f \subseteq \alpha^{\mathcal{H}}$.

Por outro lado, se $x \in Dom\alpha^{\mathcal{H}}$, então $x \in Dom\alpha(d)^{\mathcal{H}} = Dom \cup \{\mathcal{H}_j(\alpha(d)) : j \in J\} = \cup \{Dom\,\mathcal{H}_j(\alpha(d)) : j \in J\}$, e então $x \in Dom\,\mathcal{H}_t(\alpha(d)) \subseteq \$f_t$ para um único $t \in J$. Segue que $x \in Dom\,\mathcal{H}_t(\alpha)$, e daí que $\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \mathcal{H}_t(\alpha)(x) = f_t(x) = f(x)$. Por esta razão $\alpha^{\mathcal{H}} \subseteq f$ e então $\alpha^{\mathcal{H}} = f$. Concluímos que $\mathcal{H} \in Rep(\alpha, f, X)$.

□

O lema que segue é uma generalização do processo no qual "costuramos $\mathcal{H}_C$ e $\mathcal{H}_D$". (Ver figuras números 3 e 4 no apêndice).

LEMA 2.2. |9, Lemma 2.3|. Sejam C e D conjuntos e seja f uma função tal que $C \cap (D \cup f|D|) = \phi$ e tal que exista exatamente um $x \in C$ para o qual $f(x) \in D \cup f[D]$. Seja $z \in D$ tal que $f(z) = f(x)$. Seja $\mathcal{H} \in Rep(\alpha, f\restriction(C \setminus \{x\}), C)$, e seja $\mathcal{K} \in Rep(\alpha, f\restriction D, D \cup f[D])$. Então existe $\mathcal{V} \in Rep(\alpha, f\restriction(C \cup D), C \cup D \cup f[D])$ tal que $\mathcal{H} \underline{\alpha} \mathcal{V}$ e tal que $\mathcal{K} \underline{\alpha} \mathcal{V}$.

Demonstração. Existe um inteiro positivo $q \leq d$ tal que $\alpha(q+1)^{\mathscr{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathscr{H}}(x) \in C \setminus \mathrm{Dom}\ \alpha(q)^{\mathscr{H}}$. Para cada $L \in \Sigma$ definimos $L^{\vartheta} \in \mathrm{Prt}(C \cup D \cup f[D])$ como segue. Se $L \neq \alpha(q)$ então L^{ϑ} será $L^{\mathscr{H}} \cup L^{\mathscr{K}}$, mas $\alpha(q)^{\vartheta}$ será $\alpha(q)^{\mathscr{H}} \cup \alpha(q)^{\mathscr{K}} \cup \{\langle \alpha(q+1)^{\mathscr{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathscr{H}}(\alpha),\ \alpha(q))^{\mathscr{K}}(x) \circ \alpha(q+1)^{\mathscr{K}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathscr{K}}(z) \rangle\}$. Então seja $\vartheta : \Sigma^* \longmapsto \mathrm{Prt}$ $(C \cup D \cup f[D])$ o único homomorfismo gerado pela família $\{ L^{\vartheta} : L \in \Sigma \}$.

Para cada $t \neq x$ com $t \in (C \cup D) \cap \mathrm{Dom} f$, nós obviamente temos que $\alpha^{\vartheta}(t) = f(t)$. Além disso, $\alpha^{\vartheta}(x) = \alpha(1)^{\vartheta} \circ \ldots \circ \alpha(q-1)^{\vartheta} \circ \alpha(q)^{\vartheta} \circ \alpha(q+1)^{\mathscr{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathscr{H}}(x) = \alpha(1)^{\vartheta} \circ \ldots \circ \alpha(q-1)^{\vartheta} \circ \alpha(q)^{\mathscr{K}} \circ \alpha(q+1)^{\mathscr{K}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathscr{K}}(z) = \alpha^{\mathscr{K}}(z) = f(z) = f(x)$. Então, como $\mathrm{Dom}\ \alpha^{\vartheta} = (C \cup D) \cap \mathrm{Dom} f = \mathrm{Dom} f \restriction (C \cup D)$, temos que $\alpha^{\vartheta} = f \restriction (C \cup D)$, e então que $\vartheta \in \mathrm{Rep}(\alpha,\ f \restriction (C \cup D),\ C \cup D \cup f[D])$. E, pela definição de ϑ temos que $\mathscr{H}\ \underline{\alpha}\ \vartheta$ e que $\mathscr{K}\ \underline{\alpha}\ \vartheta$.

Nós evitamos a demonstração fácil do seguinte:

LEMA 2.3. [9, Lemma 2.4]. Sejam F e G duas quaisquer famílias de relações. Então $(\bigcup F) \circ (\bigcup G) = \bigcup \{ f \circ h : f \in F \text{ e } h \in G \}$.

DEFINIÇÃO 2.4. [9, Definition 2.5] . Seja h uma relação qualquer. Seja H denotando $\$h$. Um conjunto C é dito preenchido por h se e somente se ambas as inclusões $C \setminus h[C] \subseteq H \setminus h[H]$ e $C \setminus h^{-1}[C] \subseteq H \setminus h^{-1}[H]$ são satisfeitas. A expressão $\Phi(h)$ designa a família de todos os conjuntos que são preenchidos por h.

LEMA 2.5. [9, Lemma 2.6]. Seja h uma relação qualquer. Seja $F \varepsilon \Phi(h)$. Seja $\mathcal{F} \subseteq \Phi(h)$. Então $F \subseteq h[F] \cup h^{-1}[F] \subseteq \$h$. Além disso, $\cup \mathcal{F} \varepsilon \Phi(h)$. Finalmente, se h é uma função, então $h[F] \subseteq F$.

Demonstração. Seja H designando $\$h$. Como $F\backslash(h[F] \cup h^{-1}[F]) = (F\backslash h[F]) \cap (F\backslash h^{-1}[F]) \subseteq (H\backslash h[H]) \cap (H\backslash h^{-1}[H]) = H\backslash(h[H] \cup h^{-1}[H]) = H\backslash H = \phi$, temos que $F \subseteq h[F] \cup h^{-1}[F] \subseteq H$, conforme afirmado.

É fácil ver que $\cup\mathcal{F}\backslash h[\cup\mathcal{F}] = \cup\mathcal{F}\backslash\cup\{h[E] : E \varepsilon \mathcal{F}\} \subseteq \cup\{E\backslash h[E] : E \varepsilon \mathcal{F}\} \subseteq H\backslash h[H]$. Analogamente podemos ver que $\cup\mathcal{F}\backslash h^{-1}[\cup\mathcal{F}] \subseteq H\backslash h^{-1}[H]$. Então, $\cup\mathcal{F} \varepsilon \Phi(h)$.

Agora suponha que h é uma função. Assuma que o conjunto $h[F]\backslash F$ contém um elemento x..

Segue que $x = h(y)$ para algum $y \varepsilon F$. Mas, se $y \varepsilon h^{-1}[F]$, então $x \varepsilon h[h^{-1}[F]] \subseteq F$. Assim devemos inferir que $y \varepsilon F\backslash h^{-1}[F] \subseteq H\backslash h^{-1}[H]$, e alcançamos o absurdo $y \notin h^{-1}[H] = \text{Dom } h$. Então concluímos que $h[F]\backslash F = \phi$ e daí que $h[F] \subseteq F$.

$\square$

COROLÁRIO 2.6. Seja g uma função. Seja $\{M, N\} \subseteq \Phi(g)$. Então M = N se, e só se $g \restriction M = g \restriction N$.

Demonstração. É claro que se $M = N$ então $g\restriction M = g\restriction N$. Suponhamos agora que $g\restriction M = g\restriction N$. Segue que $g[M] = g[N]$ e também que $M \cap g^{-1}[G] = N \cap g^{-1}[G]$. Pelo Lema 2.5 temos que $g[M] \subseteq M$ e daí que $g[M] = g[M] \cap g[G] \subseteq M \cap g[G]$. E, para qualquer elemento $x \in M \cap g[G]$, temos que $x \notin G \setminus g[G] \supseteq M \setminus g[M]$, e então que $x \in g[M]$. Assim $M \cap g[G] \subseteq g[M]$. Inferimos que $g[M] = M \cap g[G]$. De forma análoga vemos que $g[N] = N \cap g[G]$. Pelo Lema 2.5 temos que $M \subseteq \$g = G$. E, colecionando fatos temos que $M = M \cap G = M \cap (g[G] \cup g^{-1}[G]) = (M \cap g[G]) \cup (M \cap g^{-1}[G]) = g[M] \cup (M \cap g^{-1}[G]) = g[N] \cup (N \cap g^{-1}[G] = (N \cap g[G]) \cup (N \cap g^{-1}[G]) = N \cap (g[G] \cup g^{-1}[G] = N \cap G = N$.

□

Os seguintes lemas, isto é, 2.7 e 2.8, com as respectivas demonstrações são parecidos com [10, theorem 1].

LEMA 2.7. Sejam f e g relações binárias Então $f \simeq g$ se e somente se existe bijeção $h: \$f \longmapsto \$g$ tal que $g = hfh^{-1}$.

Demonstração. Seja $f \simeq g$. Então existe uma bijeção $v: \$f \longrightarrow \$g$ tal que $g = \{\langle v(x), v(y)\rangle : \langle x,y\rangle \in f\}$. Vamos mostrar que $g = vfv^{-1}$.

Seja $\langle p, q\rangle \in g$. Então $\langle p, q\rangle = \langle v(p'), v(q')\rangle$ para algum $\langle p',q'\rangle \in f$. Desde que $\langle q',v(q')\rangle \in v$ temos agora que $\langle p', q\rangle = \langle p', v(q')\rangle \in vf$. Mas $\langle p',p\rangle \in v$. Portanto, $\langle p, p'\rangle \in v^{-1}$ e $\langle p', q\rangle \in vf$. Logo $\langle p,q\rangle \in vfv^{-1}$. Então $g \subseteq vfv^{-1}$.

Agora seja $\langle i, j\rangle \in vfv^{-1}$. Sejam $i' = v^{-1}(i)$ e $j' = v^{-1}(j)$. Então, desde que $\langle i', i\rangle \in v$ e $\langle i, j\rangle \in vfv^{-1}$, inferimos que $\langle i', j\rangle \in vfv^{-1}v = vf$. Portanto, desde que $\langle j, j'\rangle \in v^{-1}$, segue que $\langle i', j'\rangle \in v^{-1}vf = f$. Portanto $\langle i, j\rangle = \langle v(i'), v(j')\rangle \in g$. Concluimos que $vfv^{-1} \subseteq g$ e portanto, finalmente que $g = vfv^{-1}$.

Para demonstrar o recíproco, vamos agora supor que $g = hfh^{-1}$ para alguma bijeção $h:\$f \longmapsto \$g$. Seja $H = \{\langle h(x), h(y)\rangle : \langle x, y\rangle \in f\}$. Basta mostrar que $g = H$.

Seja $\langle r, s\rangle \in g$. Sejam $r' = h^{-1}(r)$ e $s' = h^{-1}(s)$. Assim temos que $\langle r', r\rangle \in h$ e $\langle r, s\rangle \in hfh^{-1}$. Inferimos que $\langle r', s\rangle \in hfh^{-1}h = hf$. Desde que $\langle s, s'\rangle \in h^{-1}$ segue que $\langle r', s'\rangle \in h^{-1}hf = f$. Portanto $\langle r, s\rangle = \langle h(r'), h(s')\rangle \in g$, e então $\langle r, s\rangle \in \{\langle h(x), h(y)\rangle : \langle x,y\rangle \in f\} = H$. Assim $g \subseteq H$.

Seja $\langle a, b\rangle$ qualquer elemento de H. Assim $\langle a, b\rangle = \langle h(a'), h(b')\rangle$ para algum $\langle a', b'\rangle \in f$. Desde que $\langle b', h(b')\rangle \in h$ temos agora que $\langle a', b\rangle = \langle a', h(b')\rangle \in hf$. Mas $\langle a', a\rangle \in h$. Portanto $\langle a, a'\rangle \in h^{-1}$ e $\langle a', b\rangle \in hf$. Logo $\langle a, b\rangle \in hfh^{-1} = g$. Assim temos que $H \subseteq g$. Concluimos que $g = h$, e portanto que $g \simeq f$.

$\square$

LEMA 2.8. Sejam f e g funções, com $f \simeq g$. Seja $\alpha \in \Sigma^*$ com $(\alpha \downarrow f)\mathrm{Prt}(\$f)$. Então $(\alpha \downarrow g)\mathrm{Prt}(\$g)$.

Demonstração: Então existe um homomorfismo $\mathcal{H}: \Sigma^* \longrightarrow \mathrm{Prt}(\$f)$ tal que $\mathcal{H}(\alpha) = f$. Pelo Lema 2.7, existe uma bijeção $t: \$f \longrightarrow \$g$ tal que $tft^{-1} = g$.

Definimos uma função h com $\mathrm{Dom}(h) = \Sigma^*$ da seguinte forma: para todo $\sigma \in \Sigma^*$ seja $h(\sigma) = t\mathcal{H}(\sigma)t^{-1}$

Afirmo que $\mathrm{Rng}(h) \subseteq \mathrm{Prt}(\$g)$. Seja $\sigma \in \Sigma^*$. É claro que $h(\sigma)$ é uma função, porque t, $\mathcal{H}(\sigma)$ e t^{-1} são funções. Seja $x \in \mathrm{Dom}\ h(\sigma)$. Então $x \in \mathrm{Dom}(t^{-1}) = \$(g)$. Segue que $t^{-1}(x) \in \$f$. Se não fosse o caso que $t^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}(\sigma)$, então $h(\sigma)(x) = t\mathcal{H}(\sigma)(t^{-1}(x)) = t(\infty) = \infty$ e teríamos uma contradição da escolha de $x \in \mathrm{Dom}\ h(\sigma)$. Segue que $t^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}(\sigma)$, e então que $\mathcal{H}(\sigma)(t^{-1}(x)) \in \$f$ e que $h(\sigma)(x) = t(\mathcal{H}(\sigma)t^{-1}(x)) \in \$g$. Portanto $h(\sigma) \in \mathrm{Prt}(\$g)$. A afirmação está provada.

Para $\{\sigma,\tau\} \subseteq \Sigma^*$ temos que $h(\sigma,\tau) = t\mathcal{H}(\sigma\tau)t^{-1} = t\mathcal{H}(\sigma)\mathcal{H}(\tau)t^{-1} = t\mathcal{H}(\sigma)(id\restriction\$f)\mathcal{H}(\tau)t^{-1} = t\mathcal{H}(\sigma)t^{-1}t\mathcal{H}(\tau)t^{-1} = h(\sigma)h(\tau)$, e portanto que $h: \Sigma^* \longrightarrow \mathrm{Prt}(\$g)$ é um homomorfismo. Além disso $h(\alpha) = t\mathcal{H}(\alpha)t^{-1} = tft^{-1} = g$.

$\square$

TEOREMA 2.9. Seja que $(\alpha \nrightarrow C_k)Sym(k)$ e que $(\alpha \nrightarrow r_k)Prt(k)$ para todo $k \in \omega\backslash 2$. Então para cada $f \in \mathbb{A}$ temos que $(\alpha \nrightarrow f)Prt(\$f)$.

Demonstração: Seja $g \in \mathbb{A}$ e $\$g = G$. Olhemos a função g como um dígrafo, cujo conjunto de vértices é G. (Como g é uma função, neste dígrafo, de cada vértice parte apenas uma seta).

Em vista do Lema 2.1 podemos supor que o dígrafo g é conexo. Também podemos supor que $g \neq \phi$.

Seja Rep denotando $\{Rep(\alpha, g\restriction M, M) : M \in \Phi(g)\}$. Seja $\mathbb{E}$ denotando $\bigcup Rep$.

Pelo Corolário 2.6 temos que $M = N$ se, e sòmente se $g\restriction M = g\restriction N$ sempre que $\{M, N\} \subseteq \Phi(g)$. Segue que a família Rep é disjunta aos pares. Assim vemos que para cada $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ existe exatamente um elemento $S_{\mathcal{E}} \in \Phi(g)$ para o qual $\mathcal{E} \in Rep(\alpha, g\restriction S_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{E}})$.

Afirmação. Existe $M_o \in \Phi(g)$ tal que $Rep(\alpha, g\restriction M_o, M_o) \neq \phi$. Para estabelecer esta afirmação consideremos dois casos:

I. Existem $x \in \$g$ e $i \in \omega$ tal que $x = g^{i+1}(x)$. Então, seja $M_o = \{g^i(x) : i \in \omega\}$. Desde que $g \in \mathbb{A}$ temos que M_o é finito e de fato que $g\restriction M_o \simeq C_k$ para algum $k \in \omega\backslash 1$. Segue, pela hipótese junto com o Lema 2.8, que $Rep(\alpha, g\restriction M_o, M_o) \neq \phi$. Também desde que $g[M_o] = M_o \subseteq \bar{g}^{i}[M_o]$ segue pela definição 2.4 que $M_o \in \Phi(g)$.

função tal que $\mathrm{Dom}(\mathcal{V}) = \Sigma^*$ e tal que $\mathrm{Rng}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Prt}(G)$. Além disso, quando $\{\sigma, \tau\} \subseteq \Sigma^*$, então pelo Lema 2.3 temos que $(\sigma\tau)^{\mathcal{V}} = \bigcup\{(\sigma\tau)^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \mathbb{C}\} = (\bigcup\{\sigma^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \mathbb{C}\}) \circ (\bigcup\{\tau^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \mathbb{C}\}) = \sigma^{\mathcal{V}} \circ \tau^{\mathcal{V}}$. Segue que $\mathcal{V}$ é um homomorfismo.

Agora afirmamos que $\mathcal{V} \in E_0$. A fim de estabelecer a afirmação, seja V denotando $\bigcup\{S_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \mathbb{C}\}$. Então como $\{S_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \mathbb{C}\} \subseteq \Phi(g)$, temos pelo Lema 2.5 que $V \in \Phi(g)$. Então, como $\mathcal{E}_0 \ \underline{\alpha}\ \mathcal{V}$, fica sòmente para mostrar que $\mathcal{V} \in \mathrm{Rep}(\alpha, g\restriction V, V)$.

Seja β um elemento qualquer em Σ^*. Seja $\langle x, y\rangle$ um elemento arbitrário em $\beta^{\mathcal{V}}$. Então $\langle x, y\rangle \in \beta^{\mathcal{H}}$ para algum $\mathcal{H} \in \mathbb{C}$. Então como $\beta^{\mathcal{H}} \subseteq S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}} \subseteq V \times V$, e como $\mathcal{V}$ é um homomorfismo de Σ^* em $\mathrm{Prt}(G)$, segue que $\mathcal{V}$ é um homomorfismo de Σ^* em $\mathrm{Prt}(V)$.

Agora seja $\langle x, y\rangle$ um elemento arbitrário em $\alpha^{\mathcal{V}}$. Então $\langle x, y\rangle \in \alpha^{\mathcal{U}} = g\restriction S_{\mathcal{U}} \subseteq g\restriction V$ para algum $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$. Segue que $\alpha^{\mathcal{V}} \subseteq g\restriction V$.

Por outro lado, se tomarmos $\langle x, y\rangle \in g\restriction V$ então $x \in V$ e então $x \in S_{\mathcal{L}}$ para algum $\mathcal{L} \in \mathbb{C}$, e conseqüentemente $\langle x, y\rangle \in g\restriction S_{\mathcal{L}} = \alpha^{\mathcal{L}} \subseteq \alpha^{\mathcal{V}}$. Inferimos que $g\restriction V \subseteq \alpha^{\mathcal{V}}$, e daí que $\alpha^{\mathcal{V}} = g\restriction V$. Então segue que $\mathcal{V} \in \mathrm{Rep}(\alpha, g\restriction V, V) \subseteq \mathbb{E}$. Finalmente, como $\mathcal{E}_0 \ \underline{\alpha}\ \mathcal{V}$, estabelecemos que $\mathcal{V} \in \mathbb{E}_0$.

Como $\mathcal{H} \ \underline{\alpha}\ \mathcal{V}$ para cada $\mathcal{H} \in \mathbb{C}$ vemos que $\mathcal{V}$ é um limite superior de $\mathbb{C}$. Segue pelo Lema de Zorn *

(*) Por [4, Theorem 25] isto é equivalente ao Axioma da Escolha.

que a família $\mathbb{E}_0$ contém um elemento $\mathfrak{I}$ que é maximal sob a ordem parcial $\underline{\alpha}$.

Afirmação: $S_{\mathfrak{I}} = G$ e então $\mathfrak{I} \in Rep(\alpha, g, G)$.

Lembremos que $S_{\mathfrak{I}} \subseteq G$, pelo Lema 2.5. Assuma que $S_{\mathfrak{I}} \neq G$. Então o conjunto $G \setminus S_{\mathfrak{I}}$ contém um elemento z. Como $S_{\mathfrak{I}} \in \Phi(g)$, segue pelo Lema 2.5 que $g[S_{\mathfrak{I}}] \subseteq S_{\mathfrak{I}}$. Portanto, supondo para $j \in \omega$ arbitrário que $g^j[S_{\mathfrak{I}}] \subseteq S_{\mathfrak{I}}$, segue que $g^{j+1}[S_{\mathfrak{I}}] = g[g^j[S_{\mathfrak{I}}]] \subseteq g[S_{\mathfrak{I}}] \subseteq S_{\mathfrak{I}}$, e portanto pela indução, temos que $g^i[S_{\mathfrak{I}}] \subseteq S_{\mathfrak{I}}$ para cada $i \in \omega$. Então, como g é um dígrafo conexo e como $\phi \neq M_0 \neq S_{\mathfrak{I}}$ temos que $g^m(z) \in S_{\mathfrak{I}}$ para algum menor inteiro m. Seja x_0 denotando o elemento $g^{m-1}(z)$ no conjunto $G \setminus S_{\mathfrak{I}}$. Como $g(x_0) \in S_{\mathfrak{I}}$, então, se $g(x_0) \notin g[S_{\mathfrak{I}}]$ poderia acontecer que $g(x_0) \in S_{\mathfrak{I}} \setminus g[S_{\mathfrak{I}}] \subseteq G \setminus g[G]$. E daí o absurdo $g(x_0) \notin g[G]$. Assim vemos que $g(x_0) \in g[S_{\mathfrak{I}}]$.

Existe um broto $x_n \in G \setminus g[G]$ de g tal que $g^n(x_n) = x_0$ para algum $n \in \omega$. Seja T designando $\{g^i(x_n) : i \in n+1\}$. Como ou $g\restriction(T \setminus \{x_0\}) = \phi$ ou $g\restriction(T \setminus \{x_0\}) \simeq r_n$ com $n \in \omega \setminus 2$ temos pela hipótese e pelo Lema 2.8 que $Rep(\alpha, g\restriction(T \setminus \{x_0\}), T) \neq \phi$. Pelo Lema 2.5 segue que $T \cap (S_{\mathfrak{I}} \cup g[S_{\mathfrak{I}}]) = T \cap S_{\mathfrak{I}} = \phi$.

Observe que $(T \cup S_{\mathfrak{I}}) \setminus g[T \cup S_{\mathfrak{I}}] = (T \setminus g[T \cup S_{\mathfrak{I}}] \cup (S_{\mathfrak{I}} \setminus g[T \cup S_{\mathfrak{I}}]) \subseteq (T \setminus g[T] \cup (S_{\mathfrak{I}} \setminus g[S_{\mathfrak{I}}] = \{x_n\} \cup (S_{\mathfrak{I}} \setminus g[S_{\mathfrak{I}}]) \subseteq G \setminus g[G]$, pois $x_n \in G \setminus g[G]$ e $S_{\mathfrak{I}} \in \Phi(g)$. Daí temos que $(T \cup S\ ) \setminus g[T \cup S_{\mathfrak{I}}] \subseteq G \setminus g[G]$. Observe também que $(T \cup S_{\mathfrak{I}}) \setminus g^{-1}[T \cup S_{\mathfrak{I}}] \subseteq$

$(T \setminus g^{-1}[T] \cup S\ ) \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g^{-1}[S_{\mathcal{F}}]) = \phi \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g^{-1}[S_{\mathcal{F}}]) \subseteq g \setminus g^{-1}[G]$. Assim vemos que $T \cup S_{\mathcal{F}} \in \Phi(g)$.

Lembremos que $\mathcal{F} \in \mathrm{Rep}(\alpha, g\lceil S_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{F}})$. Então como $g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$ temos que $\mathrm{Rep}(\alpha, g\lceil S_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}]) = \mathrm{Rep}(\alpha, g\lceil S_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{F}}) \neq \phi \neq \mathrm{Rep}(\alpha, g\lceil(T\setminus\{x_0\}), T)$.

Além disso, como $T \cap g^{-1}[S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}]] = T \cap g^{-1}[S_{\mathcal{F}}] = \{x_0\}$ e como $g(x_0) \in g[S_{\mathcal{F}}]$, segue pelo Lema 2.2 que existe $\mathcal{W} \in \mathrm{Rep}(\alpha, g\lceil(T \cup S_{\mathcal{F}}), T \cup S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq \mathbb{E}$, e também que $\mathcal{E}_0 \underline{\alpha}\ \mathcal{F}\ \underline{\alpha}\ \mathcal{W}$, e portanto que $\mathcal{W} \in \mathbb{E}_0$. Então $\mathcal{W} \neq \mathcal{F} \underline{\alpha}\ \mathcal{W}$, e contradizemos a maximalidade de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{E}_0$. Então concluimos que $S_{\mathcal{F}} = G$.

$\square$

O nosso próximo teorema indica que, com as hipóteses do Teorema 2.9, é possível demonstrar a conclusão máxima nos casos finitos.

LEMA 2.10. Seja f uma função e $g = f \cup \{\langle x,y\rangle\}$ onde x é um broto e $y = f(z)$ para algum $z \in \mathrm{Dom} f$. Seja $(\alpha \downarrow f)\mathrm{Prt}(\$f)$. Então $(\alpha \downarrow g)\mathrm{Prt}(\$g)$.

Demonstração. Existe homomorfismo $H : \Sigma^* \dashrightarrow \mathrm{Prt}(\$f)$ tal que $\mathcal{H}(\alpha) = f$. Podemos escrever $\alpha = L_1L_2 \ldots L_p$ onde $p = |\alpha|$ e $\{L_1, L_2, \ldots, L_p\} \subseteq \Sigma$. Assim acontece que $f = H(\alpha) = \alpha^H = L_1^H o L_2^H o \ldots o L_p^H$.

Definimos $K : \Sigma^* \dashrightarrow \mathrm{Prt}(\$g)$ assim : $L_p^K = L_p^H \cup \{\langle x, L_p^H(z)\rangle\}$; e $M^K = M^H$ para toda letra $M \in \Sigma \setminus \{L_p\}$.

Seja $K : \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$g)$ o homomorfismo gerado por $\{L^K : L \in \Sigma\}$.

A fim de concluir que $(\alpha \downarrow g) Prt(\$f)$, basta mostrar que $\alpha^K = g$.

Seja $t \in Dom(f)$. Então $g(t) = f(t) = \alpha^H(t) = \alpha^K(t)$, pois claramente $\beta^H \subseteq \beta^K$ para todo $\beta \in \Sigma^*$. Também $g(x) = f(z) = \alpha^H(z) = L_1^H \circ \ldots \circ L_{p-1}^H \circ L_p^H(z) = L_1^H \circ L_2^H \circ \ldots L_{p-1}^H \circ L_p^K(x) = L_1^K \circ L_2^K \circ \ldots \circ L_p^K(x) = \alpha^K(x)$. Assim vimos que $g(v) = \alpha^K(v)$ para todo $v \in Dom(g)$ e, conseqüentemente que $g \subseteq \alpha^K$.

Se $v \notin Dom(g)$, então $v \neq x$ e $v \notin Dom(f)$. Portanto, $v \notin Dom(\alpha^H)$, e existe q com $1 \leq q \leq p$ tal que $L_{q+1}^H \circ \ldots \circ L_p^H(v) \in (\$f) \setminus Dom(L_q^H) \subseteq (\$f) \setminus Dom(L_q^K)$. Mas $L_{q+1}^K \circ \ldots \circ L_p^K(v) = L_{q+1}^H \circ \ldots \circ L_p^H(v)$ para $v \in Dom(\alpha^H)$ e portanto $L_{q+1}^K \circ \ldots \circ L_p^K(v) \in (\$f) \setminus Dom(L_p^K)$ para tal v. Segue que $\alpha^K(v) = L_1^K \circ L_2^K \circ \ldots \circ L_{q-1}^K \circ L_q^K \circ (L_{q+1}^K \circ \ldots \circ L_p^K(v)) = L_1^K \circ \ldots \circ L_{q-1}^K(\infty) = \infty$. Assim vimos que $g = \alpha^K$ desde que certamente α^K é uma função.

$\square$

LEMA 2.11. Seja f qualquer função. Seja b um broto de f, e j o menor inteiro tal que $|f^{-1}[\{f^j(b)\}]| > 1$. Seja $T = \{f^i(b) : i \in j\}$. Seja $S = (\$f) \setminus T$. Entaõ $\$(f \restriction S) = S \cup f[S]$.

Demonstração. Seja $x \in \$(f \restriction S)$. Se $x \in Dom(f \restriction S)$, então $x \in S \subseteq S \cup f[S]$. Por outro lado, se $x \in Rng(f \restriction S)$, então existe $t \in S \cap Dom(f)$ tal que $x = f(t) \in f[S] \subseteq S \cup f[S]$. Segue-se que $\$(f \restriction S) \subseteq S$

$\cup$ f[S].

Seja $x \in S \cup f[S]$. Então $x \in S$ ou $x \in f[S]$.

Se $x \in f[S]$, existe $g \in Dom(f\lceil S)$ tal que $f(y) = x$, e então $x \in Rng(f\lceil S) \subseteq \$(f\lceil S)$. Portanto podemos supor que $x \in S$. Então $x \in (\$f)\setminus T$; isto é, $x \in (Dom(f) \cup Rnf(f)\setminus T$. Aqui temos dois casos

1) $x \in Dom(f)\setminus T \subseteq Dom(f)$ e $x \in S$. Então $x \in Dom(f\lceil S) \subseteq \$(f\lceil S)$.

2) $x \in Rng(f)\setminus T$ e $x \in S$. Afirmanos que existe $z \in S \cap Dom(f)$ tal que $x = f(z)$. Desde que $x \in Rng(f)$, temos que x não é um broto de f. Portanto $f^{-1}[\{x\}] \neq \phi$. Então $x \in \{x\} = f[f^{-1}[\{x\}]]$.

Admitamos que $S \cap f^{-1}[\{x\}] = \phi$. Então $f^{-1}[\{x\}] \subseteq T$. Portanto $x \in f[T]$. Mas $x \in S$. Assim temos que $x \in f[T] \cap S = \{f^j(b_k)\}$. Mas $T \cap f^{-1}[\{f^j(b_k)\}] = \{f^{j-1}(b_k)\}$. Por escolha de j temos $|f^{-1}[\{f^j(b_k)\}]| > 1$. Portanto existe $u \in f^{-1}[\{f^j(b_k)\}] \setminus \{f^{j-1}(b_k)\}$, e então $u \in (Dom(f))\setminus T \subseteq (\$f)\setminus T = S$. Assim temos que $u \in Dom(f\lceil S)$. Portanto $x = f(u) \in Rng(f\lceil S) \subseteq \$(f\lceil S)$.

$\square$

TEOREMA 2.12. Seja que $(\alpha \downarrow c_k)Sym(k)$ e que $(\alpha \downarrow r_k)Prt(k+1)$ para cada $k \in \omega\setminus 1$. Então α é FPrt-universal.

Demonstração. Como no Teorema 2.9, basta considerar funções conexas. Para cada $j \in \omega$, seja

$\Gamma(j)$ a seguinte afirmação: Para qualquer função f finita e conexa que tem exatamente j brotos, acontece que $(\alpha \downarrow f)$ Prt($f).

Se f não tem broto algum, então existe $k \varepsilon\ \omega \setminus 1$ tal que $f \simeq C_k$. Segue pelo Lema 2.8, juntamente com nossas hipóteses, que $(\alpha \downarrow f)$ Prt($f), neste caso. Portanto $\Gamma(0)$.

Escolhamos $k \varepsilon\ \omega$ e suponhamos que $\Gamma(k)$. Basta mostrar que $\Gamma(k+1)$, para concluir por indução o teorema.

Seja f uma função finita com exatamente k+1 brotos distintos: $b_0, b_1, \ldots, b_k$. Escrevemos $D_i = f^{-1}[\{f^i(b_k)\}]$ para cada $i\ \varepsilon\ \omega$. Examinaremos dois casos.

1º caso: Para todo $i \varepsilon\ \omega$ acontece que $|D_i| \leq 1$. Sejam $T = \{f^i(b_k) : i\ \varepsilon\ \omega\}$ e $S = (\$f) \setminus T$. É claro que $f \restriction T$ é um ramo, pois f é finito.

Então existe $i\ \varepsilon\ \omega \setminus 2$ tal que $f \restriction T \simeq r_i$. Assim, pelo Lema 2.8 segue que $(\alpha \downarrow f \restriction T)$Prt $\$(f \restriction T)$ e, portanto, que existe homomorfismo $h'': \Sigma^* \longrightarrow \text{Prt}\ \$(f \restriction T)$, tal que $h''(\alpha) = f \restriction T$.

Visto que $f \restriction S$ é uma função finita, tendo exatamente k brotos distintos $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$, pela hipótese indutiva, temos que $(\alpha \downarrow f \restriction S)$ Prt$\$(f \restriction S)$. Isto é, existe homomorfismo $h': \Sigma^* \longrightarrow \text{Prt}\ \$(f \restriction S)$ tal que $h'(\alpha) = f \restriction S$.

Desde que $S \cap T = \emptyset$, e que $f = (f \upharpoonright S) \cup (f \upharpoonright T)$, pois $f \upharpoonright T$ é uma componente de f, podemos definir $h\colon \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$f)$ da seguinte maneira: $h(\beta) = h'(\beta) \cup h''(\beta)$ para todo $\beta \in \Sigma^*$. Naturalmente $h(\alpha) = h'(\alpha) \cup h''(\alpha) = (f \upharpoonright S) \cup (f \upharpoonright T) = f$.

2º caso: Existe um menor $j \in \omega$ tal que $|D_j| > 1$. Desde que $D_o = \emptyset$ temos que $j > 0$. Seja $T = \{ f^i(b_k) : i \in j\}$ e seja $S = (\$f) \setminus T$. Como no primeiro caso, pela hipótese indutiva, existe homomorfismo $h'\colon \Sigma^* \longrightarrow Prt\$(f \upharpoonright S)$ tal que $h'(\alpha) = f \upharpoonright S$.

Subcaso: $j = 1$. A função $f \upharpoonright T = (b_k\ f(b_k))$ é um ramo trivial, e também $f = (f \upharpoonright S) \cup (f \upharpoonright T) = (f \upharpoonright S) \cup \{<b_k, f(b_k)>\}$. Portanto, pelo Lema 2.10 temos que $(\alpha \downarrow f)\ Prt(\$f)$.

Subcaso: $j > 1$. Seja $W = T \setminus \{f^{j-1}(b_k)\}$. Observe que $\$(f \upharpoonright W) = T$. É claro que $f \upharpoonright W$ é um ramo de comprimento $j-1$. Portanto segue-se pelo Lema 2.8 que $(\alpha \downarrow f \upharpoonright W)\ Prt\ T$. Isto é, existe homomorfismo $h''\colon \Sigma^* \longrightarrow Prt\ T$ tal que $h''(\alpha) = f \upharpoonright W$.

Assim temos que $Rep(\alpha, f \upharpoonright (T \setminus \{f^{j-1}(b_k)\}), T) = Rep(\alpha, f \upharpoonright W, T) \neq \emptyset$.

Pelo lema 2.11 e pela hipótese indutiva temos que $Rep(\alpha, f \upharpoonright S, S \cup f[S]) = Rep(\alpha, f \upharpoonright S, \$(f \upharpoonright S)) \neq \emptyset$.

Afirmação 1 : $T \cap f^{-1}[S] = \{ f^{j-1}(b_k) \}$.

É claro que $f^{j-1}(b_k) \in T \cap f^{-1}[S]$.

Seja $a \in T \cap f^{-1}[S]$. Então existe $i \in j$ tal que $a = f^i(b_k)$, pois $T = \{ f^t(b_k) : t \in j\}$, e $a \in T$. Segue também que $a \notin S$, pois $S \cap T = \emptyset$. Por outro lado, desde que $f^{i+1}(b_k) = f(a) \in S$, temos que $f^{i+1}(b_k) \notin T$, e portanto que $i+1 > j-1$. Desde que $i \leqslant j-1$, inferimos que $i = j-1$. Isto é, $a = f^{j-1}(b_k)$. Segue que $\{a\} \subseteq T \cap f^{-1}[S] \subseteq \{f^{j-1}(b_k)\}$. Portanto temos que $\{f^{j-1}(b_k)\} = T \cap f^{-1}[S]$.

Afirmação 2 : Existe $z \in S$ tal que $f(z) = f(f^{j-1}(b_k))$.

Se $f^t(b_k) \in T \cap D_j$ para $t \in \omega$, então $f^{t+1}(b_k) = f(f^t(b_k)) \in f[D_j] = \{ f^j(b_k)\} \subseteq S$, e portanto $f^t(b_k) \in T \cap f^{-1}[S] = \{f^{j-1}(b_k)\}$. Assim vemos que $f^{j-1}(b_k)$ é o único elemento de D_j que também é elemento de T. Mas lembremos que D_j contém pelo menos dois elementos distintos. Portanto existe $z \in D_j \setminus T \subseteq (\$f) \setminus T = S$. Desde que $z \in D_j$, temos que $f(z) = f^j(b_k)$. A afirmação 2 segue.

Afirmação 3: $(S \cup f[S]) \cap T = \emptyset$.

Seja $f^t(b_k)$ um elemento qualquer em T . Então $t \in j$. Mostraremos agora que $f^t(b_k) \notin f[S]$.

Admita que $f^t(b_k) \in f[S]$. Então existe $u \in S$ tal que $f(u) = f^t(b_k)$. Então $u \in D_t$. Mas $|D_t| \leqslant 1$, pois $t < j$. Desde que $D_0 = \emptyset$ podemos supor que $t > 0$. Então $f^{t-1}(b_k) \in T \cap D_t$. Segue que $u = f^{t-1}(b_k)$. Mas $u \notin T$. Desta contradição concluimos que $f^t(b_k) \notin f[S]$. A afirmação 3 segue, pois, $T \cap S = \emptyset$.

Concluimos pelo Lema 2.2 que existe $h \in \mathrm{Rep}(\alpha, f \restriction (S \cup T), T \cup S \cup f[S]) = \mathrm{Rep}(\alpha, f, \$f)$. Concluimos $\Gamma(k+1)$. O teorema segue por indução.

$\square$

CAPÍTULO III. Sobre ramos representados por $A^mB^nA^j$

Preliminares. O primeiro resultado deste capítulo generaliza [8, Lemmas 6.21 e 6.25]. Continuamos demonstrando que se $A^mB^nA^j$ é FPrt-universal então $A^jB^nA^m$ também o é. E, concluimos com um resumo das perguntas abertas imediatamente ligadas com os nossos resultados.

TEOREMA 3.1. Seja $r_k = f^n g^m f^j$ para $\{f, g\} \subseteq \mathrm{Prt}(k)$, para $\{m, k\} \subseteq \omega \setminus 2$ e para $\{n, j\} \subseteq \omega \setminus 1$. Então:

1. $f \in \mathrm{Sym}(k)$
2. $g \in \mathrm{Sym}(k \setminus \{f^j(k-1)\})$.
3. $f^{n+j}(k-1) = 0$

Demonstração. Obviamente $k-1 = \mathrm{Dom}\, r_k = \mathrm{Dom}\, f^n g^m f^j \subseteq \mathrm{Dom}\, f$. Como r_k é injetiva em $k-1$ temos que f é injetiva em $k-1$. Além disso $k \setminus 1 = r_k[k-1] = f^n g^m f^j[k-1] = f[f^{n-1} g^m f^j[k-1]] \subseteq f[k]$.

Admita que $k-1 \notin \mathrm{Dom}\, f$. Então temos que $f[k-1] = f[k] \supseteq k \setminus 1$. Mas, também, $|f[k-1]| \leq |k-1| = k-1 = |k \setminus 1|$. Portanto $f \restriction (k-1)$ é bijeção de $k-1$ sobre $k \setminus 1$. Admitindo ainda que $k-1 \notin \mathrm{Dom}\, f$ vemos que $k \setminus 1 = r_k[k-1] = f^n[g^m f^j[k-1]] \subseteq f^n[k] = f^n[k-1] = f^{n-1}[k \setminus 1] = f^{n-1}[(k \setminus 1) - 1]$ e daí que $k-1 = |k \setminus 1| = |f^{n-1}[(k \setminus 1) - 1]| < |(k-1)-1| = k-2$, o que é impossível. Segue que $k-1 \in \mathrm{Dom}\, f$.

Agora, se supusermos que $f(k-1) = f(j)$ para algum $j \in k-1 = \mathrm{Dom}\ r_k$, então desde que $r_k = f^n g^m f^j$ nós concluimos que $k-1 \in \mathrm{Dom}\ r_k$, o que é falso. Assim inferimos que f é injetiva em k. Portanto como k é finito, f é sobrejetiva em k.

Obtemos assim a primeira conclusão desejada:

1. $f \in \mathrm{Sym}\ (k)$

Como $f \in \mathrm{Sym}(k)$ temos que $f[k-1] = f[k \setminus \{k-1\}] = f[k] \setminus \{f(k-1)\} = k \setminus \{f(k-1)\}$, e daí que $f^j[k-1] = f^{j-1}[k \setminus \{f(k-1)\}] = f^{j-1}[k] \setminus \{f^j(k-1)\} = k \setminus \{f^j(k-1)\}$. Assim vemos que $k \setminus \{f^j(k-1)\} = f^j[k-1] \subseteq \mathrm{Dom}\ g \subseteq k$. Desde que $\mathrm{Dom}\ r_k = k-1 \subset k$ e que $\mathrm{Dom}\ f = k$, é claro que $\mathrm{Dom}\ g \neq k$. Portanto $\mathrm{Dom}\ g = k \setminus \{f^j(k-1)\}$.

Suponha que $g[k \setminus \{f^j(k-1)\}] \neq k \setminus \{f^j(k-1)\}$. Então como temos $|g[k \setminus \{f^j(k-1)\}]| = k-1$, segue que $g[k \setminus \{f^j(k-1)\}] = k \setminus \{z\}$ para algum $z \in k \setminus \{f^j(k-1)\}$. Então como $f^j(k-1) \notin \mathrm{Dom}\ (g)$ temos que $k \setminus 1 = r_k[k-1] = f^n g^m [k \setminus \{f^j(k-1)\}] = f^n g^{m-1}[k \setminus \{z, f^j(k-1)\}]$ e daí que $k-1 \leq |k \setminus \{z, f^j(k-1)\}| = k-2$, absurdo.

Assim podemos concluir que

2. $g \in \mathrm{Sym}\ (k \setminus \{f^j(k-1)\})$.

Finalmente, desde que $k \setminus 1 = r_k[k-1] = f^n g^m[k \setminus \{f^j(k-1)\}] = f^n[k \setminus \{f^j(k-1)\}]$, e como $f \in \mathrm{Sym}(k)$ inferimos que

3. $f^{n+j}(k-1) = 0$.

$\square$

TEOREMA 3.2. Se $A^nB^mA^j$ é FPrt-universal, então $A^jB^mA^n$ também é FPrt-universal.

Demonstração. Suponhamos que $A^nB^mA^j$ é FPrt-universal. Então temos, para todo $k \in \omega \setminus 2$ que $(A^nB^mA^j \downarrow c_k)\mathrm{Prt}(k)$ e que $(A^nB^mA^j \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$. Desde que $(A^nB^mA^j \downarrow c_k)\mathrm{Prt}(k)$, temos por |6, Lema 1.2| que $(A^nB^mA^j \downarrow c_k)\mathrm{Sym}(k)$, e portanto por [10, Corolário 3.10] que $(A^jB^mA^n \downarrow c_k)\mathrm{Sym}(k)$, o que implica que $(A^jB^mA^n \downarrow c_k)\mathrm{Prt}(k)$. Assim vemos que basta mostrar que $(A^jB^mA^n \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$.

Tendo já que $(A^nB^mA^j \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$, podemos escolher $\{f, g\} \subseteq \mathrm{Prt}(k)$ tal que $r_k = f^ng^mf^j$. Pelo Teoremoa 3.1 temos $f \in \mathrm{Sym}(k)$. Então segue que $f^jg^mf^n = f^jf^{n-n}g^mf^{j-j}f^n = f^{(j-n)}f^ng^mf^jf^{-(j-n)} = f^{(j-n)}r_kf^{-(j-n)} \simeq$ $\simeq r_k$ pelo Lema 2.7. Portanto, desde que $(A^jB^mA^n \downarrow f^jg^mf^n)$ $\mathrm{Prt}(k)$ temos pelo Lema 2.8 que $(A^jB^mA^n \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$.

Conclusão e problemas abertos

Ainda não sabemos para quais 4-uplas $< k, n, m, j>$ acontece que $(A^mB^nA^j \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$. Em [8, Corollaries 6.24 e 6.26] temos que para $\alpha = A^2B^2A$, $(\alpha \not\downarrow r_3)$ 2
$\mathrm{Prt}(3)$ e $(\bar{\alpha} \not\downarrow r_3)\mathrm{Prt}(3)$. Mas, em [12, Table 3] temos que $(\alpha \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$ sempre que $3 \neq k \in \omega \setminus 2$. Nosso último Teorema 3.2 mostra que $(\bar{\alpha} \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$ sempre, se $3 \neq k \in \omega \setminus 2$.

PROBLEMA 3.3. $(A^mB^nA^j \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$ para todo $k \in \omega \setminus 2$ se e só se $k \neq m+j$?

PROBLEMA 3.4. Para quais 5-uplas $<k,m,n,j,q>$ teremos que $(B^m A^n B^j A^q \downarrow r_k)$ Prt(k)?

PROBLEMA 3.5. Para $\alpha = B^n A^m B^j A^q$ teremos que $(\alpha \downarrow r_k)$Prt(k) implica em $(\tilde{\alpha} \downarrow r_k)$Prt(k)?

Apêndice

As figuras 1 e 2 são adaptações de desenhos semelhantes em [11].

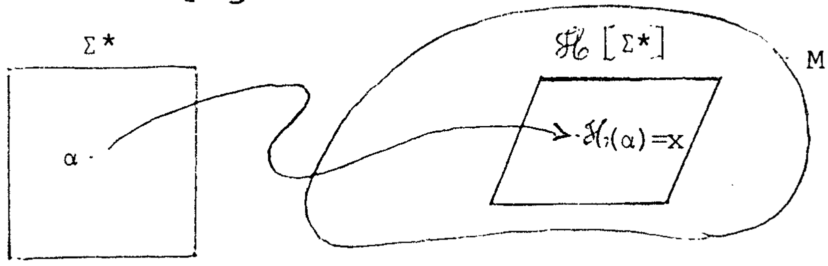


Figura 1

$(\alpha \downarrow x)M$ por $\mathcal{H}: \Sigma^* \longrightarrow M$

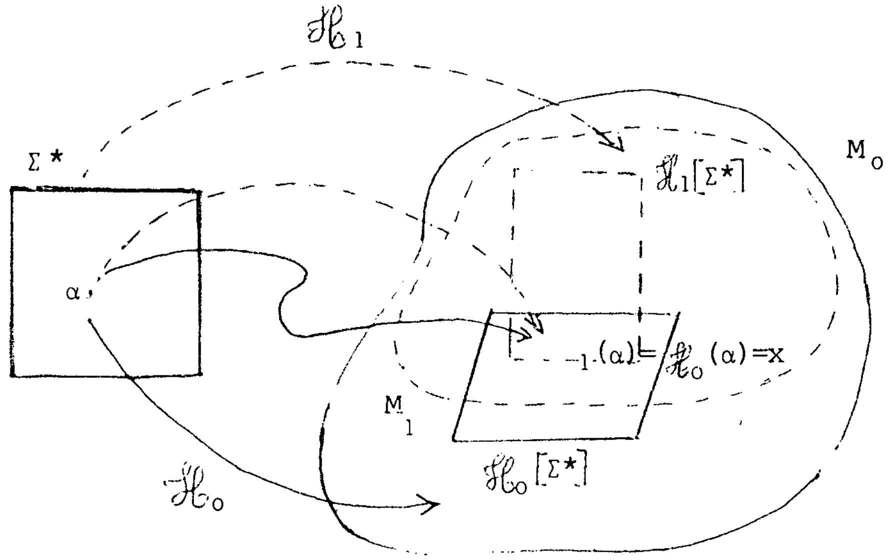
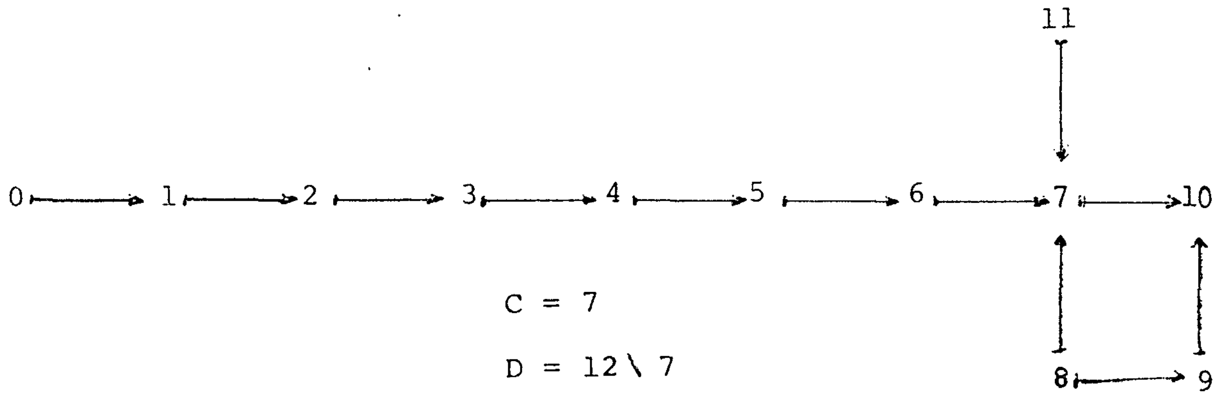


Figura 2

Observe que $(\alpha \downarrow x)M_0$ por $\mathcal{H}_0$. $\mathcal{H}_0$ é representado por linhas contínuas. Veja que $(\alpha \downarrow x)M_1$ por $\mathcal{H}_0$ não vale, pois $\mathcal{H}_0[\Sigma^*] \not\subseteq M_1$. Mas $(\alpha \downarrow x)M_1$ por $\mathcal{H}_1$, representado por linhas tracejadas. M_1 é subsemigrupo de M_0 e está representado por linhas tracejadas bem como $\mathcal{H}_1$.



C = 7

D = 12 \ 7

D ∪ C = 12

Figura 3

Seja a palavra B^2A^3, isto é, BBAAA. Este dígrafo representa $f \upharpoonright (C \cup D)$ onde $C \cup D \subseteq \$f$ para alguma transformação parcial f .

Observe a figura 4.

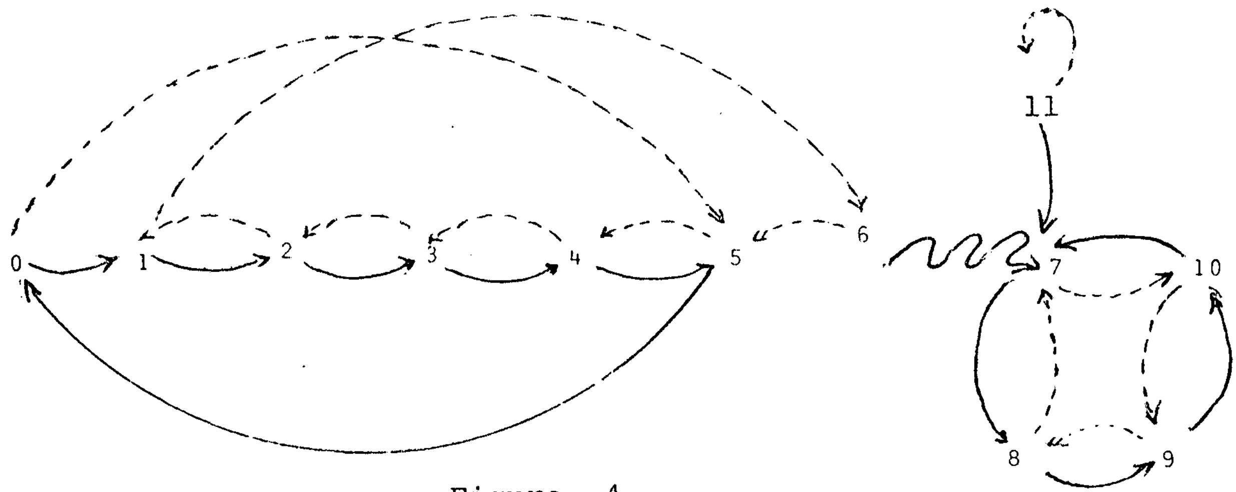


Figura 4

$(\mathcal{H}_D \cup \mathcal{H}_C)(A)$ e $(\mathcal{H}_D \cup \mathcal{H}_C)(B)$

A ———————— B - - - - - - - - - -

BIBLIOGRAFIA

[1] Ehrenfeucht, A. e Silberger, D. M., Decomposing a transformation with an involution, Algebra Universalis, 7 (1977), 179-190.

[2] Ehrenfeucht, A. e Silberger, D. M., Universal terms of the form B^nA^m, Algebra Universalis, 10 (1980), 96-116.

[3] Isbell, J. R., On the problem of universal terms, Bull de L'Academie Polonaise de Sciences, XIV (1966), 593-595.

[4] Kelley, J. L., General Topology, New York, 1959.

[5] McNulty, G. F., The decision problem for equational bases of algebras, Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1972. (Ver também Annals of Math. Logic).

[6] Momm, Osvaldo, Sobre a representação de ramos pelas palavras de complexidade dois, Tese de Mestrado, UFSC , Florianópolis, SC, Brasil, 1980.

[7] Silberger, D. M., B^nA^m is universal iff point-universal, Algebra Universalis. (A ser publicado.)

[8] Silberger, D. M., Point-universal terms in a free semigroup, Doctoral Dissertation, University of Washington, Seattle, 1973.

[9] Silberger, D. M., When is a term point-universal ?, Algebra Universalis, Vol. 10, nº 2, 1978.

[10] Silberger, D. M., When is gf isomorphic to fg ? (A ser publicado.)

[11] Valente, M. L., Sobre a universalidade de palavras para grupos simétricos, Tese de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil, 1979.

[12] Weems (Harriss), M., Reverse spellings represent spikes for words of complexity two, Master's thesis, Jackson State University, Jackson, Mississipi, 1977.