UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

EQUAÇÕES FUNCIONAIS EM TEORIA DA INFORMAÇÃO

REGINA FLEMMING DAMM

OUTUBRO - 1980

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

I. J. Taneja

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.
Orientador

Donald Morison Silberger

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

Prof. Teófilo Abuabara Saad, Dr.

A meu pai

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Inder Jeet Taneja, por sua orientação segura, pelo seu apoio, compreensão e amizade durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas de magistério pelo incentivo, apoio e colaboração na elaboração deste trabalho.

Ao Werner, ao Marcelo, à Luciane e ao Rodrigo pelas horas que deles tirei para realizar este trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Trabalhamos com soluções gerais e contínuas das equações funcionais ligadas à Teoria da Informação. Estas equações caracterizam a Entropia de Shannon, a Entropia de Grau β, a Entropia de Grau (α,β) e a Entropia de Seno. Estas equações funcionais também foram generalizadas para duas variáveis, que caracterizam em particular as Medidas de Kullbach e Kerridge e suas generalizações.

ABSTRACT

We work with general and continuons solutions of the functional equations in information theory. These equations characterize Shannon's entropy, entropy of degree , entropy of degree (,) and sine entropy. These functional equations are also generalized for two variables e which give, it particular measures of Kullback and Kerridge and their generalizations.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudarmos algumas Equações Funcionais em Teoria da Informação.

No Capítulo I, daremos alguns conceitos e resultados básicos nesta área, os quais serão utilizados no desenvolvimento deste estudo.

No Capítulo II apresentaremos inicialmente um Lema, demonstrado por P. Nath [1979] que auxilia a demonstração de dois teoremas. Nestes teoremas encontraremos as soluções gerais e contínuas de duas equações funcionais. O primeiro teorema dá caracterizações da Entropia de Shannon e da Entropia de grau β. No segundo teorema, encontraremos as soluções da equação funcional através de três generalizações da Entropia de Shannon que são a α-log-entropia, entropia de grau (α,β) e a entropia de seno.

No Capítulo III, o objetivo é estudarmos medidas associadas com um par de distribuições de uma variável aleatória discreta. Faremos uma generalização do Lema de P. Nath, agora para duas variáveis utilizando esta generalização na demonstração- de dois teoremas, encontraremos as soluções reais e contínuas de duas equações funcionais. No primeiro deles iremos caracterizar duas medidas, a logaritmica e a outra de forma de potência. No segundo encontramos as soluções de uma equação funcional, através de caracterizações das medidas de Kerridge e Kullback e suas generalizações.

CAPÍTULO I

A Teoria da Informação teve origem em 1948, com Claude Shannon, que com seus estudos criou resultados fundamentais nesta área.

Este novo ramo de estudos tem muita importância e aplicações variadas. Ele vem criando profundas aplicações em muitas áreas como: Ciências Físicas e Biológicas, Psicológicas, Lingüística, Economia, Química, Ciência de Computação, Ecologia, etc.

É muito importante uma re-examinação e reformulação de idéias básicas para buscar novos significados e generalizações.

1.1. Caracterização da Entropia de Shannon

$$\text{Seja } \Delta_m = \{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_m);\ p_i > 0,\ i = 1,2,\ldots, m;\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \}$$

o conjunto de distribuições de probabilidades discretas.

Seja $H_m : \Delta_m \to R$, $m = 1,2,\ldots$ uma seqüência de funções tal que

$$H_m (p_1, p_2,\ldots, p_m) = - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i \tag{1.1}$$

Esta medida $H_m (p_1, p_2,\ldots, p_m)$ é chamada de Entropia de Shannon da distribuição de probabilidade $(p_1, p_2,\ldots, p_m) \in \Delta_m$

<u>Observação</u>:

Para todo este trabalho usaremos logaritmos de base dois.

Faça $f : [0,1] \to R$ definido como

$$f(p) = \begin{cases} -p \log p & , \quad p \in (0,1] \\ 0 & , \quad p = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

f é contínua em $[0,1]$

Também

$H_m\ (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ pode ser escrita da forma

$$H_m\ (p_1, p_2, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^{m} f(p_i) \tag{1.3}$$

onde f é uma função contínua em $[0,1]$.

A propriedade (1.3) é chamada <u>propriedade da soma</u> da entropia H(p).

Diversas propriedades algébricas e analíticas da Entropia de Shannon são conhecidas e, uma discussão detalhada das mesmas pode ser encontrada nos livros de J.Aczel e Z.Daroczy [1975] e Mathai e Rathie [1975].

Uma das propriedades algébricas da Entropia de Shannon é

$$H_{mn}\ (p_1q_1, p_1q_2, \ldots, p_1q_n\ ; p_2q_1, p_2q_2, \ldots, p_2q_n\ ,$$

$$p_mq_1, \ldots, p_mq_n) = H_m\ (p_1, p_2, \ldots, p_m) + H_n\ (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$m,n = 1,2,\ldots \tag{1.4}$$

que é a aditividade sobre independência estatística de duas variáveis aleatórias com distribuições das probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ a qual com auxílio de (1.3) dá origem a equação funcional

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^{m} f(p_i) + \sum_{j=1}^{n} f(q_j) \tag{1.5}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \ , \ p_i \geq 0 \ , \ q_j \geq 0$$

$$i = 1,2,\ldots,m \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

A equação funcional (1.5) foi estudada pela primeira vez por T.W. Chaundy e J.B. McLeod [1960] que encontraram as soluções contínuas para todos os números positivos m e n.

A solução continua mais geral obtida por Chaundy e McLeod [1960] é dada por

$$h(p) = A\, p \log p$$

onde A é uma constante arbitrária.

Impondo a condição adicional que $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, temos A= -1.

Isto nos leva para uma caracterização da entropia de Shannon (1.1) sob a propriedade da soma (1.3).

Existem outras caracterizações da Entropia de Shannon (refer. J. Aczel e Z. Daroczy [1975]) feitas com outras condições de regularidade.

1.2. Equações funcionais para medidas não aditivas sob a propriedade da soma

Uma generalização da Entropia de Shannon que irá nos interessar é

$$H_m^\beta (p_1,p_2,\ldots,p_m) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{m} p_i^\beta - 1\right] \qquad (1.6)$$

$$\beta \neq 1 \quad , \quad \beta > 0$$

que foi introduzido por J. Havrda e F. Charvat [1967] e por Z. Daroczy [1970].

Definindo

$f_\beta : [0,1] \to R$ por

$$f_\beta (p) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} (p^\beta - p)$$

então (1.6) também admite uma representação da forma

$$H_m^\beta (p_1,\ldots,p_m) = \sum_{i=1}^{m} f_\beta (p_i) \qquad (1.7)$$

A entropia $H_m^\beta (p_1,p_2,\ldots,p_m)$ definida por (1.6) possue a seguinte propriedade não aditiva

$$H_{mn}^\beta (p_1q_1,\ p_1q_2,\ldots,\ p_1q_n\ ;\ p_2q_1,\ p_2q_2,\ldots,\ p_2q_2\ ,$$

$$p_mq_1,\ p_mq_2,\ldots,p_m,q_n) = H_m^\beta (p_1,p_2,\ldots,p_m) +$$

$$+ H_n^\beta (q_1,\ldots,q_n) + (2^{1-\beta} - 1)\ H_m^\beta (p_1,\ldots,p_m)\ H_m^\beta (q_1,\ldots,q_n)$$

$$(1.8)$$

para todos $p_i \geqslant 0$, $q_i \geqslant 0$ e $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

$i = 1,2,\ldots, m$

$j = 1,2,\ldots, n$

Consideremos funções F, G, H e K tendo a propriedade da soma, satisfazendo a relação

$$H\,(p_1q_1,\, p_1q_2,\ldots,\, p_1q_n\, ;\, p_2q_1,\, p_2q_2,\ldots,\, p_2q_n\, ;$$
$$p_mq_1,\ldots,\, p_mq_n) = F\,(p_1,\ldots,p_m)\; G\,(q_1,\ldots,q_n)\; +$$
$$+\; K\,(p_1,\ldots,p_m) \tag{1.9}$$

Esta é uma generalização de (1.8) tendo no lugar de H quatro diferentes funções, que com auxílio de (1.3) pode ser expressada por

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h(p_i,q_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(p_i)\; g(q_j) + \sum_{i=1}^{m} k(p_i) \tag{1.10}$$

onde m e n são inteiros positivos e

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad , \quad p_i \geqslant 0 \; , \; q_j \geqslant 0$$

Esta equação (1.10) da uma caracterização conjunta da Entropia de Shannon e Entropia de grau β estudada por Taneja [1976]

Consideremos ainda funções H e G com a propriedade da soma, satisfazendo a relação:

$$H\,(p_1q_1,\ldots,\, p_1q_n\, ;\, p_2q_1,\ldots,\, p_2q_n\, ;\ldots;\, p_mq_1,\ldots,p_mq_n) =$$
$$= G\,(q_1,\ldots,q_n)\; H\,(p_1,\ldots,p_m) + G\,(p_1,\ldots,p_m)\; H\,(q_1,\ldots,q_n) \tag{1.11}$$

É evidente que quando $G(P) = G(Q) = 1$ (1.11) reduz-se para (1.5) a qual é uma caracterização da Entropia de Shannon.

A relação (1.11) surgiu da generalização da propriedade básica (1.4) que é a aditividade, de medidas estudadas por Shannon [1948], Rény [1961], Ac zel-Doroczy [1975].

Tendo em vista, que as funções H e G satisfazem a propriedade da soma, a relação (1.11) obedece a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h(p_i q_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(p_i)\, h(q_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(qj)\, h(pi) \qquad (1.12)$$

onde m e n são números inteiros positivos e

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad , \quad p_1 \geqslant 0 \quad , \quad q_j \geqslant 0$$

Esta equação foi estudada por Sharma e Taneja [1977] e dá as seguintes medidas

$$H_1^{\alpha}(P) = -\, 2^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{m} p_i^{\alpha} \log p_i \; , \; \alpha > 0 \qquad (1.13)$$

$$H_p^{(\alpha,\beta)}(P) = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta})^{-1} \sum_{i=1}^{m} (p_i^{\alpha} - p_i^{\beta}) \qquad (1.14)$$

$$\alpha \neq \beta,\ \alpha > 0\ ,\ \beta > 0$$

$$H_s^{(\alpha,\beta)}(P) = \frac{-2^{\alpha-1}}{\operatorname{sen} \beta} \sum_{i=1}^{m} p_i^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \log p_i) \qquad (1.15)$$

$$\beta \neq 0 \quad , \quad \alpha > 0$$

para $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \Delta_m$.

sendo (1.13) denominado a α - log entropia, (1.14) entropia de grau (α,β) e (1.15) a entropia de seno.

1.3. Medidas de Kullback e de Kerridge e suas generalizações

A Entropia de Shannon associa uma medida de informação com uma única distribuição de probabilidade. Veremos agora medidas que são associadas com um par de distribuições de uma variável aleatória.

Consideremos as medidas

$$H(P,U) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 \left(\frac{p_i}{u_i}\right) \tag{1.13}$$

$$H(P/U) = - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 u_i \tag{1.14}$$

Estas medidas foram propostas, a primeira por Kullback-Leibler [1951] e a segunda por Kerridge [1961], respectivamente.

Estas medidas são generalizações da Entropia de Shannon para duas distribuições de probabilidades. Elas são mais gerais que a Entropia de Shannon, inclusive com aplicações em Estatística e Economia.

Se $P,U \in \Delta_m$, Q, $V \in \Delta_m$ então podemos verificar que as medidas de Kullback's e Kerridge's são ambas aditivas, isto é

$$I(P * Q, U * V) = I(P,U) + I(Q,V) \tag{1.15}$$

Outra propriedade adicional chamada propriedade da soma é dada por

$$I(P,U) = \sum_{i=1}^{m} h(p_i, u_i) \qquad (1.16)$$

onde

$$h(p,u) = p \log_2 (\frac{p}{u}) \quad \text{ou} \quad h(p,u) = -p \log_2 u$$

Isto foi considerado idéia fundamental de Kannapan's [1972] para caracterização das medidas de Kullback e Kerridge através da equação funcional

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h(p_i q_j, u_i v_j) = \sum_{i=1}^{m} h(p_i, u_i) + $$

$$+ \sum_{j=1}^{n} h(q_j, v_j) \qquad (1.17)$$

onde

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \; , \; \sum_{i=1}^{m} u_i \leqslant 1 \; , \; \sum_{j=1}^{n} v_j \leqslant 1 \; ,$$

$$u_i; v_j \geqslant 0 \; , \; p_i; q_j \geqslant 0$$

com convenientes condições de regularidade.

Em correspondência com as distribuições $P, U \in \Delta_m$ consideremos as medidas

$$I(P,U) = A \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i + B \sum_{i=1}^{m} p_i \log u_i \qquad (1.18)$$

$$I^{(\alpha,\beta)}(P,U) = C^{-1} (\sum_{i=1}^{m} p_i^{\alpha} u_i^{\beta} - 1) \qquad (1.19)$$

onde A, B e C ($\neq 0$) são constantes arbitrárias e α e β são parâmetros.

As medidas (1.18) e (1.19) sob as condições

$$I\ (1,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 1 \quad e \quad I\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 0 \tag{1.20}$$

se reduzem, respectivamente para

$$_1I\ (P,U) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log \left(\frac{p_i}{u_i}\right) \tag{1.21}$$

e

$$_1I^{\alpha}(P,U) = (2^{\alpha-1} - 1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i^{\alpha} u_i^{1-\alpha} - 1\right) \quad (\alpha \neq 1) \tag{1.22}$$

Quando $\alpha \to 1$, (1.22) se reduz para (1.21) que é a medida de Kullback caracterizada por vários pesquisadores.

Novamente, as medidas (1.18) e (1.19) sob as condições

$$I\ (1,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 1 \quad , \quad I\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 1 \tag{1.23}$$

se reduzem respectivamente para

$$_2I\ (P,U) = - \sum_{i=1}^{m} p_i \log u_i \tag{1.24}$$

e

$$_2I^{\beta}\ (P,U) = (2^{-\beta} - 1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\ u_i^{\beta} - 1\right),\ \beta \neq 0 \tag{1.25}$$

Quando $\beta \to 0$, (1.25) reduz-se para (1.24) que é a medida de Kerridge caracterizada por vários pesquisadores.

A medida (1.19) satisfaz a relação não aditiva na seguinte forma

$$I^{(\alpha,\beta)}(P * Q;\ U * V) = I^{(\alpha,\beta)}(P,U) +$$

$$+ I^{(\alpha,\beta)}(Q,V) + C I^{(\alpha,\beta)}(P,U)\ I^{(\alpha,\beta)}(Q,V) \qquad (1.26)$$

A propriedade (1.15) está contida em (1.26) para C = 0.

Consideremos quatro funções F, G, I e K todos tendo a propriedade da soma e satisfazendo uma relação dada por:

$$I\ (P * Q;\ U * V) = F\ (P;U)\ G\ (Q,\ V) + K\ (P,U) \qquad (1.27)$$

A propriedade da soma usada em (1.27) ocasiona a seguinte equação funcional

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h(p_i q_j,\ u_i v_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(p_i,\ u_i)\ g(q_j,\ v_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} k(p_i,\ u_i) \qquad (1.28)$$

onde $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\ ,\quad p_i \geq 0\ ,\quad q_j \geq 0$

$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq 1\ ,\quad \sum_{j=1}^{n} v_j \leq 1\ ,\quad u_i \geq 0\ ,\quad v_j \geq 0$

Esta equação (1.28) foi estudada por Taneja [1974] e dá as medidas de Kullback e Kerridge e suas generalizações (1.22) e (1.25) respectivamente.

Vamos considerar a não aditividade na forma seguinte:

$$I(P * Q;\ U * V) = I(P;U)\ G(Q;V) + I(Q;V)\ G(P;V) \qquad (1.29)$$

A relação (1.29) pode ser vista como uma generalização não aditiva das medidas de Kerridge e de Kullback.

Supondo que I (P;U) satisfaça a propriedade da soma (1.16) e G (P,U) possue a propriedade da soma escrita por

$$G\ (P;U) = \sum_{i=1}^{m} g(p_i,\ u_i) \tag{1.30}$$

As propriedades (1.16) e (1.30) utilizadas em (1.29) dão origem a equação funcional

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(p_i q_j;\ u_i v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(p_i;\ u_i)\ g(q_j,\ v_j) + $$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(q_j,\ v_j)\ g(p_i,\ u_i) \tag{1.31}$$

onde $p_i,\ q_j,\ u_i,\ v_j \in (0,1]$

Esta equação funcional foi estudada por Sharma e Gupta [1976] e correspondendo para suas soluções reais e contínuas as três medidas de Kullback que satisfazem a generalização (1.29) podem ser apenas de uma das três seguintes formas :

$$H^I\ (P;Q:\ \alpha,\beta) = 2^{\beta} \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha}\ q_i^{\beta} \log_2 \frac{p_i}{q_i}\ ,\ \alpha > 0,\ \beta \geqslant 0 \tag{1.32}$$

$$H^p\ (P;Q:\ \alpha,\beta,\gamma) = (2^{\alpha-\beta} - 2^{\gamma-\beta})^{-1} \sum_{i=1}^{n} (p_i^{\alpha}\ q_i^{\beta-\alpha} - p_i^{\gamma}\ q_i^{\beta-\gamma}) \tag{1.33}$$

$$\beta > \alpha \geqslant 0\ ,\quad \beta \geqslant \gamma > 0\ ,\quad \alpha \neq \gamma\ ;$$

$$H^s\ (P;Q:\ \alpha,\beta,\gamma) = \frac{2^{\beta}}{\text{sen}\ \gamma} \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha}\ q_i^{\beta}\ \text{sen}\ (\gamma \log_2 \frac{p_i}{q_i})\ , \tag{1.34}$$

$$\alpha > 0\ ,\quad \beta \geqslant 0,\quad \gamma \neq 0$$

onde α, β e γ são constantes reais arbitrárias.

Ainda, correspondendo para as soluções contínuas de (1.31), as três medidas de Kerridge podem ser apenas de uma das três seguintes formas

$$H^e\left(\frac{P}{Q} : \alpha,\beta\right) = -2^{\beta}\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} q_i^{\beta}\log_2 q_i\ ,\quad \alpha>0,\ \beta\geqslant 0, \tag{1.35}$$

$$H^p\left(\frac{P}{Q} : \alpha,\beta,\gamma\right) = (2^{-\beta}-2^{-\gamma})^{-1}\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha}(q_i^{\beta}-q_i^{\gamma})\ , \tag{1.36}$$

$$\alpha>0\ ,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0,\ \beta\neq\gamma,$$

$$H^s\left(\frac{P}{Q} : \alpha,\beta,\gamma\right) = -\frac{2^{\beta}}{\operatorname{sen}\gamma}\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} q_i^{\beta}\operatorname{sen}(\gamma\log_2 q_i)\ , \tag{1.37}$$

$$\alpha>0\ ,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\neq 0.$$

onde α, β e γ são constantes reais arbitrárias.

CAPÍTULO II

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE UMA VARIÁVEL

Neste capítulo encontaremos as soluções reais e contínuas das equações funcionais (1.10) e (1.12) se i e j não tomarem necessariamente todos os valores positivos de um em diante.

Isto é, encontraremos as soluções das equações funcionais

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} h(p_i q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=m_o}^{n} f(p_i)\, g(q_j) + \sum_{i=m_o}^{m} k(p_i) \qquad (2.1)$$

e

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} h(p_i q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(p_i)\, h(q_j) + \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(q_j)\, h(p_i) \qquad (2.2)$$

onde $(p_{m_o},\ldots,p_m) \in \delta_{m-m_o+1}$

e $(q_{m_o},\ldots,q_n) \in \delta_{n-n_o+1}$

e $\delta_{m-m_o+1} = \{(p_{m_o},\, p_{m_o+1},\ldots,p_m) : p_i > 0 ,$

$i = m_o, m_o+1,\ldots,m \; ; \; \sum_{i=m_o}^{m} p_i = 1 \}$

e sendo m_o e n_o números inteiros determinados.

Inicialmente provaremos um lema que iremos utilizar neste capítulo.

Lema 2.1: (refer.: P. Nath [1979])

A condição necessária e suficiente para que uma função $G: I \times I \to R$, $I = [0,1]$ contínua em cada variável satisfaça a equação:

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} G(p_i, q_j) = 0 \tag{2.1}$$

$$p_i \geq 0,\ q_j \geq 0\ ;\ \sum_{i=m_o}^{m} p_i = \sum_{j=n_o}^{n} q_j = 1$$

$$i = m_o,\ m_o+1, \ldots, m\ ;\ j = n_o,\ n_o+1, \ldots,\ n$$

para todos os números inteiros positivos $m > m_o$, $n > n_o$, m_o e n_o sendo números inteiros positivos, arbitrários e para todas as distribuições de probabilidades $(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m) \in \delta_{m-m_o+1}$ e $(q_{n_o}, q_{n_o+1}, \ldots, q_n) \in \delta_{n-n_o+1}$ é que G seja da forma

$$G(x,y) = 0\ ,\quad x \in I\ ,\quad y \in I \tag{2.2}$$

Demonstração:

Demonstraremos a parte relativa "à necessária" procedendo da seguinte maneira:

Escolha arbitrariamente o número inteiro positivo $m > m_o$ e fixe-o.

Escolha a distribuição de probabilidade $(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m) \in \delta_{m-m_o+1}$ arbitrariamente e fixe-a.

Defina uma função

$$G: I \to R \text{ como } g(y) = \sum_{i=m_o}^{m} G(p_i, y) \tag{2.3}$$

Então, (2.1) reduz-se para

$$\sum_{i=n_o}^{n} g(q_j) = 0 \quad , \quad q_j \geqslant 0 \tag{2.4}$$

$$j = n_o,\ n_o+1, \ldots, n \quad , \quad \sum_{j=n_o}^{n} q_j = 1$$

A equação (2.4) é válida para todos os números positi - vos $n > n_o$.

Vamos escrever $u-r+1$ para $n-n_o+1$ em que $r < u$ e r e u são números inteiros positivos maiores que n_o. Vamos escolher ainda r e u de tal modo que $r - n_o+1$ e $u - n_o+1$ sejam números inteiros positivos, sem fatores comuns.

Então $\dfrac{r - n_o+1}{u - n_o+1}$ é um número positivo, racional em (0,1). Isto entretanto não significa que $\dfrac{r}{u}$ seja uma fração irredutível pois r e u podem ter um fator comum.

Vamos agora escolher

$$q_{n_o} = \frac{r - n_o+1}{u - n_o+1} \quad e \quad q_{n_o+1} = q_{n_o+2} = \ldots = q_n = \frac{1}{u - n_o+1}$$

Então, de (2.4) resulta

$$g\left(\frac{r - n_o+1}{u - n_o+1}\right) + (u - r)\, g\left(\frac{1}{u - n_o+1}\right) = 0 \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) obtemos

$g\left(\dfrac{r - n_o+1}{u - n_o+1}\right) = 0$,. desta forma $g(y) = 0$ para todos os racionais em (0,1), pois cada racional em (0,1) pode ser expresso na forma $\dfrac{r - n_o+1}{u - n_o+1}$.

Uma vez que G é uma função contínua de y, g é também, por (2.3) uma função contínua de $y \in I$, pois $g(y) = \sum_{i=n_o}^{n} G(p_i, y)$ e a soma de funções contínuas é uma função contínua.

Então, pela continuidade de g, $g(y) = 0$ para todos os $y \in I$, de modo que (2.3) dá

$$\sum_{i=m_o}^{m} G(p_i, y) = 0 \tag{2.7}$$

$$p_i \geqslant 0 \ , \ i = m_o, m_o+1, \ldots, m \ , \quad \sum_{i=m_o}^{m} p_i = 1.$$

Uma vez que m e $(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m)$ foram escolhidos arbitrariamente, (2.7) é válido para todos os números positivos $m > m_o$ e para todos

$$(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m) \in \delta_{m-m_o+1}.$$

Se escrevermos $m = v - s + 1$, $s < v$, sendo s e v números inteiros positivos maiores que m_o e, procedendo como acima resulta (2.2). Isto completa a prova do Lema 1, relativa a parte necessária.

A demonstração relativa a suficiência é uma simples verificação.

Soluções das Equações Funcionais Generalizadas de uma variável

A equação que estudaremos a seguir é uma generalização da equação funcional de Chaundy e McLeod [1960] utilizando caracterizações da entropia de Shannon e da entropia de grau β de Havrda-Charvat-Daróczy

Teorema 2.1:

Vamos supor $f: I \to R$, $g: I \to R$, $h: I \to R$ e $k: I \to R$ quatro funções contínuas que satisfazem a equação funcional

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(p_i)\, h(q_j) + \sum_{i=m_o}^{m} k(p_i) \quad (2.8)$$

para todos os inteiros positivos $m > m_o$ e $n > n_o$; m_o e n_o sendo números inteiros positivos arbitrários.

As soluções contínuas de (2.8) para todas as distribuições de probabilidades

$$(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m) \in \delta_{m-m_o+1} \quad \text{e}$$

$$(q_{n_o}, q_{n_o+1}, \ldots, q_n) \in \delta_{n-n_o+1}$$

são dadas pelos dois conjuntos abaixo

1º Conjunto de Soluções

$$h(p) = Bp + Ap \log p \quad (2.9)$$

$$f(p) = Cp \quad (2.10)$$

$$g(p) = Dp + \frac{A}{C}\, p \log p \quad (2.11)$$

$$k(p) = (B - CD)p + Ap \log p \quad (2.12)$$

2º Conjunto de Soluções

$$h(p) = \overset{B}{3}p + A(p^\beta - p) \quad (2.13)$$

$$f(p) = Cp^\beta \quad (2.14)$$

$$g(p) = Dp + \frac{A}{C}\,(p^\beta - p) \quad (2.15)$$

$$k(p) = (B - A)p + (A - CD)\, p^\beta \quad (2.16)$$

onde A, B, C e D são constantes arbitrárias e $\beta(\neq 1, > 0)$ é o parâmetro. Além disto, através destes conjuntos de soluções, obtemos também as soluções triviais

$$h(p) = Bp\,,\ f(p) \text{ arbitrário}\,,$$

$$g(p) = Dp \text{ e } k(p) = Bp - Dp\, f(p)$$

Demonstração:

Vamos definir M da seguinte maneira

$$M(p,q) = f(p,q) - g(p)\,h(q) - q\,k(p)$$

$$p \in I \quad \text{e} \quad q \in I \tag{2.17}$$

Aplicando a propriedade da soma, temos

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} M(p_i,q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i\, q_j) -$$

$$- \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(p_i)\, h(g_j) - \underbrace{\sum_{j=n_o}^{n} q_j}_{=1} \cdot \sum_{i=1}^{m} k(p) \tag{2.17.a}$$

Usando (2.8), (2.17.a) reduz-se para (2.1), isto é

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} M(p_i,q_j) = 0$$

Por hipótese as funções f, g, h e k são contínuas, logo M é contínua.

Então, pelo Lema 2.1

$$M(p,q) = 0$$

Portanto

$$f(p,q) = g(p)\ h(q) + q\ k(p) \tag{2.18}$$

dividindo ambos os lados de (2.18) por pq, ($p \neq 0$, $q \neq 0$) temos:

$$\frac{f(pq)}{pq} = \frac{g(p)}{p}\ \frac{h(q)}{q} + \frac{k(p)}{q} \tag{2.19}$$

Agora, colocando

$$\frac{f(a)}{a} = f_1(a) \quad , \quad \frac{g(a)}{a} = g_1(a) \quad ,$$

$$\frac{h(a)}{a} = h_1(a) \quad , \quad \frac{k(a)}{a} = k_1(a) \tag{2.20}$$

em (2.19), obtemos

$$f_1(pq) = g_1(p)\ h_1(q) + k_1(p) \tag{2.21}$$

Fazendo p = 1 e, em seguida q = 1 em (2.21) obtemos

$$f_1(q) = g_1(1)\ h_1(q) + k_1(1) \tag{2.22}$$

e

$$f_1(1) = g_1(1)\ h_1(1) + k_1(1) \tag{2.23}$$

Se $g_1(1) = 0$, (2.22) e (2.23) resultam

$$f_1(q) = k_1(1) = f_1(1)$$

$$f(q) = f_1(1)q = Bq$$

A função f torna-se neste caso uma função linear homogênea. Agora, se $g(1) \neq 0$, (2.22) que escrevemos

$$h_1(q) = \frac{f_1(q) - k_1(1)}{g_1(1)}$$

em (2.21) resulta em

$$f_1(pq) = g_1(p) \left(\frac{f_1(q) - k_1(1)}{g_1(1)} \right) + k_1(p)$$

ou

$$f_1(pq) = \frac{g_1(p)\ f_1(q)}{g_1(1)} + k_1(p) - \frac{g_1(p)\ k_1(1)}{g_1(1)} \qquad (2.24)$$

Colocando

$$\frac{g_1(t)}{g_1(1)} = g_2(t) \quad e \quad k_1(t) - \frac{g_1(t) - k_1(t)}{g_1(1)} = k_2(t) \qquad (2.25)$$

em (2.24) obtemos

$$f_1(pq) = g_2(p)\ f_1(q) + k_2(t) \qquad (2.26)$$

As soluções contínuas, mais gerais da equação funcional (2.26) (refer.: J. Aczcl [1966], pag. 148-151) são dados por

$$h_1(p) = h_o(p) + \alpha, \quad g_2(p) = 1$$

$$k_2(p) = h_o(p) \qquad (2.27)$$

e

$$h_1(p) = \gamma\, e^{h_o(p)} + \alpha, \quad g_2(p) = e^{h_o(p)}$$

$$k_2(p) = \alpha(1 - e^{h_o(p)}) \qquad (2.28)$$

Com a solução trivial adicional

$$h_1(p) = \alpha\ , \quad g_2(p) \text{ arbitrário },$$

$$k_2(p) = \alpha\ (1 - f_2(p)) \qquad (2.29)$$

onde $\gamma \neq 0$ e α são constantes arbitrárias e h_o é uma solução arbitrária da equação funcional de Cauchy:

$$h(x,y) = h(x) + h(y) \tag{2.30}$$

A solução contínua mais geral de (2.30) (refer. J. Aczel [1966]) é

$$h_o(p) = A \log p \tag{2.30a}$$

onde A é uma constante arbitrária.

Deste modo as soluções (2.27), (2.28) e (2.29) juntamente com (2.31), (2.25), (2.23), (2.22) e (2.20) dão os conjuntos de soluções pedidas no teorema.

Aqui (2.9) e (2.13) com $h(\frac{1}{h}) = 1$ e $h(1) = 1$ e propriedade de soma dá a entropia de Shannon e a entropia de grau β.

Estudaremos agora a equação funcional seguinte, através de três generalizações da Entropia de Shann n que são a α-log entropia, entropia de grau (α,β) e a entropia de seno.

Teorema 2.2:

Sejam $f: I \to R$ e $\phi: I \to R$ funções contínuas que satisfazem a equação funcional

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i\, q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} \phi(p_i)\, f(q_j) + $$

$$+ \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} \phi(q_j)\, f(p_i) \tag{2.31}$$

para todos os números inteiros positivos $m > m_o$ e $n > n_o$, arbitrários e para todas as distribuições de probabilidades

$$(p_{m_o}, p_{m_o+1}, \ldots, p_m) \in \delta_{m-m_o+1}$$

e

$$(q_{n_o}, q_{n_o+1}, \ldots, q_n) \in \delta_{n-n_o+1}$$

As soluções reais e contínuas de (2.31) são dadas por

$$f(p) = A p^{\alpha} \log p \quad , \quad \phi(p) = p^{\alpha}, \ \alpha > 0 \qquad (2.32)$$

$$f(p) = \frac{1}{B}(p^{\alpha} - p^{\beta}) \quad , \quad \phi(p) = \frac{1}{2}(p^{\alpha} + p^{\beta}) \qquad (2.33)$$

$$f(p) = \frac{p^{\alpha}}{C} \text{ sen } (\beta \log p) \ , \ \phi(p) = p^{\alpha} \cos(\beta \log p) \quad (2.34)$$

onde A, B e C são constantes arbitrárias reais não nulas e α e β são parâmetros reais.

<u>**Prova**</u>:

Defina g como sendo

$$g(p,q) = f(pq) - \phi(p)\, f(q) - \phi(q)\, f(p) \quad \text{para}$$

$p \in I$, $q \in I$

Aplicando a propriedade da soma

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(p_i, q_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i\, q_j) -$$

$$- \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} \phi(p_i)\, f(q_j) - \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} \phi(q_j)\, f(p_i) \qquad (2.35)$$

Usando (2.31), (2.35) reduz-se para (2.1), isto é,

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} g(p_i, q_j) = 0$$

Sendo f e ϕ contínuas, então g também é contínua e então, pelo Lema 2.1

$$g(p, q) = 0$$

Logo

$$f(pq) = \phi(p)\, f(q) + \phi(q)\, f(p) \tag{2.36}$$

para $p \in I$, $q \in I$.

No lema seguinte mostraremos uma solução geral da equação funcional (2.31).

<u>Lema 2.2</u>: (refer. Aczel [1966], pag. 205)

As soluções complexas mais gerais da equação funcional (2.31) são dadas por:

$$f(p) = 0 \quad , \quad \phi(p) \text{ arbitrário} \tag{2.37}$$

$$f(p) = e_o(p)\, a(p) \quad , \quad \phi(p) = e_o(p) \tag{2.38}$$

e

$$f(p) = \frac{1}{2k}\,(e_1(p) - e_2(p)) \quad , \quad \phi(p) = \frac{1}{2}\,(e_1(p) + e_2(p)) \tag{2.39}$$

onde $k \neq 0$ é uma constante complexa arbitrária sendo que, ou é real ou imaginário puro e $a(p)$ e $e_t(p)$ $(t = 0,1,2)$ são funções arbitrárias satisfazendo

$$a(pq) = a(p) + a(q) \tag{2.40}$$

e

$$e(pq) = e_t(p)\, e_t(q) \tag{2.41}$$

$$(t = 0,1,2)$$

respectivamente.

Soluções Reais

Agora, iremos procurar soluções reais e contínuas. Devemos para isto, nos preocupar com soluções reais e contínuas f e ϕ de (2.31) definidas em $[0,1]$.

As soluções contínuas de (2.40) onde $p \in (0,1]$ são dadas por

$$a(p) = A \log p \tag{2.42}$$

que é real exceto quando a constante A é complexa.

As soluções complexas contínuas de (2.41) são dadas por

$$e_t(p) = p^{\alpha t} \quad , \quad p \in [0,1], \quad (t = 0,1,2) \tag{2.43}$$

onde a constante α_t $(t = 0,1,2)$ com $\operatorname{Re} \alpha_t > 0$, pode em geral assumir valores complexos.

Então as soluções (2.38) e (2.39) podem ser escritas por

$$f(p) = Ap^{\alpha_o} \log p \ , \quad \phi(p) = p^{\alpha_o} \tag{2.44}$$

$$\operatorname{Re} \alpha_o > 0$$

$$f(p) = \frac{1}{2k}\,(p^{\alpha_1} - p^{\alpha_2}) \;,\; \phi(p) = \frac{1}{2}\,(p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2}) \tag{2.45}$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha_1 > 0 \quad , \quad \mathrm{Re}\,\alpha_2 > 0$$

onde A, α_o, α_1, α_2 são constantes reais ou complexas e $k \neq 0$ é uma constante ou real ou complexa (uma das duas).

Agora, é evidente que $\phi(p)$ em (2.44) é real e contínua em $[0,1]$ se α_o é real e, consequentemente $f(p)$ em (2.44) será real se ambos A e α_o são reais.

Desse modo, um conjunto de soluções reais e contínuas de (2.36) é dado por

$$f(p) = Ap^{\alpha_o} \log p \;,\; \phi(p) = p^{\alpha_o} \tag{2.46}$$

onde A e α_o são constantes reais tal que $\alpha_o > 0$.

Em seguida, por (2.45), $\phi(p)$ será real:

- se, e somente se $p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2}$ é real

- se, e somente se ambos p^{α_1} e p^{α_2} são reais ou, um é complexo conjugado do outro.

Agora, desde que p é real g(p) será real se, e somente se:

(i) ambos α_1 e α_2 são reais, ou

(ii) α_1 e α_2 são pares complexos conjugados.

Desde que $f(p)$ e $\phi(p)$ são reais, examinaremos a situação para formas reais de $f(p)$ para os quais $\phi(p)$ é real.

Quando α_1 e α_2 são reais, $f(p)$ é também real se k é real e então, outro conjunto de soluções reais e contínuas são dadas por

$$f(p) = \frac{1}{2k} (p^{\alpha_1} - p^{\alpha_2}) \ , \ \phi(p) = \frac{1}{2} (p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2}) \qquad (2.47)$$

$$\alpha_1 > 0 \ , \ \alpha_2 > 0$$

À seguir se $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1 = \alpha + i\,\beta$

$$\phi(p) = \frac{1}{2} (p^{\alpha + i\beta} + p^{\alpha - i\beta}) = p^{\alpha} \left(\frac{e^{i\,\beta \log_e p} + e^{-i\,\beta \log_e p}}{2}\right) =$$

$$= p^{\alpha} \cos (\beta \log_e p)$$

de tal forma que $f(p)$ será agora um real se k é imaginário puro, da forma $k = i\,c$ onde c é real.

Portanto o terceiro conjunto de soluções reais e contínuas é dado por

$$f(p) = \frac{p^{\alpha}}{C} \text{sen } (\beta \log_e p) \qquad (2.50)$$

$$\phi(p) = p^{\alpha} \cos (\beta \log_e p) \ , \ \alpha > 0$$

onde α, β e $C \neq 0$ são constantes reais (por conveniente escolha de β, a base dos logaritmos é tomada 2).

Finalmente, os três conjuntos de soluções contínuas e reais da equação funcional (2.36) são escritos por

$$f(p) = A p^{\alpha} \log p \ , \quad \phi(p) = p^{\alpha} \ , \ \alpha > 0 \qquad (2.32)$$

$$f(p) = \frac{1}{B} (p^{\alpha} - p^{\beta}) \ , \quad \phi(p) = \frac{1}{2} (p^{\alpha} + p^{\beta}) \qquad (2.33)$$

$$\alpha \ , \ \beta > 0$$

e

$$f(p) = \frac{p^{\alpha}}{C} \text{ sen } (\beta \log p) \quad , \quad \phi(p) = p^{\alpha} \cos (\beta \log p) \tag{2.34}$$

$$\alpha > 0$$

onde A, B e C são constantes arbitrárias não nulas e, α e β são parâmetros reais.

Em (2.32), (2.33) e (2.34) com $f(\frac{1}{2}) = 1$ para soluções de f, e aplicando a propriedade da soma temos as três medidas de entropia (1.13), (1.14) e (1.15) respectivamente.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES FUNCIONAIS GENERALIZADAS DE DUAS VARIÁVEIS

Neste capítulo estudaremos medidas associadas com um par de distribuições de uma variável aleatória discreta.

Iremos encontrar as soluções reais e contínuas das equações funcionais (1.28) e (1.31) quando i e j não tomam necessariamente todos os valores positivos de um em diante.

Vamos encontrar as soluções reais e contínuas das equações funcionais

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} h(p_i q_j,\ u_i v_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, u_i)\ g(q_j, v_j) + \sum_{i=m_o}^{m} k(p_i, u_i)$$

e

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} L(p_i q_j,\ u_i v_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, u_i)\ g(q_j, v_j) + \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(q_j, v_j)\ g(p_i, u_i)$$

onde $\sum_{i=m_o}^{m} p_i = \sum_{j=n_o}^{n} q_j = 1$, $\sum_{i=m_o}^{m} u_i \leqslant 1$ e $\sum_{j=n_o}^{n} v_j \leqslant 1$

sendo m_o e n_o números inteiros arbitrariamente determinados.

Inicialmente demonstraremos um teorema que iremos utilizar em demonstrações posteriores.

Teorema 3.1:

A condição necessária e suficiente para que uma função $G: I^2 \times I^2 \to R$, $I = [0,1]$, contínua em cada variável, satisfaça a equação

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} G(p_i, q_j) = 0 , \quad p_i \geq 0 , \quad q_j \geq 0 \tag{3.1}$$

$$p_i = (p_{1i}, p_{2i}), \quad \sum_{i=m_o}^{m} p_{1i} = 1 , \quad \sum_{i=m_o}^{m} p_{2i} = 1 , \quad i = m_o, \ldots, m$$

$$q_j = (q_{1j}, q_{2j}), \quad \sum_{j=n_o}^{n} q_{1j} \leq 1, \quad \sum_{j=n_o}^{n} q_j \leq 1, \quad j = n_o, \ldots, n$$

para todos os números inteiros positivos e para todas as distri - buições de probabilidades

$$(p_{im_o}, p_{im_o+1}, \ldots + p_{im_o}) \in \delta_{m-m_o+1} \qquad i = 1,2$$

$$(q_{im_o}, q_{im_o+1}, \ldots + q_{im}) \in \delta_{m-m_o+1} \qquad i = 1,2$$

e que G seja da forma

$$G(\underline{x}, \underline{y}) = 0 , \quad \underline{x} \in I^2 , \quad \underline{y} \in I^2 \tag{3.2}$$

Demonstração:

Inicialmente provaremos a condição necessária

- Escolha o número inteiro positivo $m > m_o$ e fixe-o. Escolha a distribuição de probabilidade

$$(p_{im_o}, p_{im_o+1}, \ldots, p_{im}) \in \delta_{m-m_o+1}$$
$$i = 1,2$$

arbitrariamente e fixe-a.

Defina uma função

$G: I^2 \times I^2 \to R$ como

$$g(\underset{\sim}{y}) = \sum_{i=m_o}^{m} G(\underset{\sim}{p}_i, \underset{\sim}{y}) \qquad (3.3)$$

sendo

$p_i = (p_{1i}, p_{2i}), \quad i = m_o, \ldots, m$

$\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2)$

Então (3.1) reduz-se para

$$\sum_{j=n_o}^{n} g(\underset{\sim}{q}_j) = 0 \qquad (3.4)$$

$\underset{\sim}{q}_j > 0$, sendo $\underset{\sim}{q}_j = (q_{1j}, q_{2j})$

$j = n_o, n_o+1, \ldots, n \;, \quad \sum_{j=n_o}^{n} q_{1j} \leq 1 \;, \quad \sum_{j=n_o}^{n} q_{2j} \leq 1$

então

$$\sum_{j=n_o}^{n} g(q_{1j}, q_{2j}) = 0$$

Escolhendo

$$q_{1j} = \frac{1}{n-n_o+1} \qquad \text{e} \qquad q_{2j} = \frac{1}{s-s_o+1}$$

sendo $n-n_o \geq s-s_o$ (3.4) dará

$$(n - n_o+1)g\left(\frac{1}{n-n_o+1} , \frac{1}{s-s_o+1} \right) = 0$$

isto é

$$g\left(\frac{1}{n-n_o+1}, \frac{1}{s-s_o+1}\right) \tag{3.5}$$

para todos os inteiros positivos da forma $n - n_o+1$ e $s - s_o+1$ que satisfazem as condições colocadas acima.

Vamos escrever $u - r+1$ para $n - n_o+1$ e $j - x+1$ para $s - s_o+1$ em que $r < u$ e $x < y$ são números inteiros positivos maiores que n_o.

Escolha r e u, x e y de tal modo que $r - n_o+1$ e $u - n_o+1$, $x - n_o+1$ e $y - n_o+1$ sejam números positivos sem fatores comuns

Então $\dfrac{r - n_o+1}{u - n_o+1}$ e $\dfrac{x - n_o+1}{y - n_o+1}$ são números positivos, racionais em $(0,1)$.

Isto não implica que $\frac{r}{u}$ e $\frac{x}{y}$ sejam frações irredutíveis, pois elas podem ter um fator comum.

Seja $Z \geqslant \dfrac{(u - r)(y - n_o+1)}{y - x}$

Agora escolha

$$q_{1n_o} = \frac{r - n_o+1}{r - n_o+1}, \; q_{1\,n_o+1} = \dots = q_{1n} = \frac{1}{u - n_o+1}$$

$$q_{2n_o} = \frac{x - n_o+1}{y - n_o+1}, \; q_{2\,n_o+1} = \dots = q_{2n} = \frac{1}{Z}$$

Então, de (3.4) resulta

$$g\left(\frac{r + n_o+1}{u - n_o+1}, \frac{x - n_o+1}{y - n_o+1}\right) + (u - r)\, g\left(\frac{1}{u - n_o+1}, \frac{1}{Z}\right) = 0 \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6) obtemos

$$g\left(\frac{r - n_o+1}{u - n_o+1} , \frac{x - n_o+1}{y - n_o+1} \right) = 0$$

Então

$g(y) = 0$ para todos os vetores com componentes racionais em y em $(0,1)x(0,1)$. Podemos concluir isto pois cada racional em $(0,1)$ pode ser escrito nas formas $\frac{r - n_o+1}{u - n_o+1}$ e $\frac{x - n_o+1}{y - n_o+1}$.

Sendo G uma função contínua de $\underline{y}$, então g também é uma função contínua de $\underline{y} \in I^2$.

Portanto, pela continuidade de g, $g(y) = 0$ para todos os $\underline{y} \in I^2$, de modo que

$$\sum_{i=m_o}^{m} G\,(\underline{p_i}, \underline{y}) = 0 \quad , \quad \underline{p_i} = (p_{1i}, p_{2i}) \; , \tag{3.7}$$

$p_{1i} \geq 0$, $p_{2i} \geq 0$, $i = m_o, m_o+1, \ldots, m$

$$\sum_{i=m_o}^{m} p_{1i} = 1 \quad , \quad \sum_{i=m_o}^{m} p_{2i} = 1$$

Sendo m e $(p_{1m_o}, p_{1m_o+1}, \ldots, p_{1m}, p_{2m_o}, \ldots, p_{2m})$ escolhidos arbitrariamente (3.7) é válido para todos os números inteiros $m > m_o$ e para todos

$$(p_{im_o}, p_{im_o+1}, \ldots, p_{im}) \in \delta_{m-m_o+1}$$

$$i = 1,2$$

Simultaneamente, escrevendo $m = v - k + 1$ $k < v$, sendo k e v números inteiros positivos maiores que m_o e, procedendo de maneira análoga resulta (3.2). Assim, demonstramos a condição necessária.

A prova da condição suficiente é uma simples verificação.

Soluções das Equações Funcionais Generalizadas de duas variáveis

Partindo com uma propriedade aditiva para distribuições de duas variáveis aleatórias estatisticamente independente em termos de diferentes funções com a propriedade da soma, iremos caracterizar duas medidas associadas com duas distribuições de uma variável aleatória discreta.

Uma destas medidas é a logaritmica, enquanto a outra é em forma de potências.

Teorema 3.2:

Sejam f, g, h e k : $[0,1] \times [0,1] \to R$ funções contínuas que satisfazem a equação funcional

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} h(p_i q_j,\ u_i v_j) = \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, u_i)\ g(q_j, v_j) + \sum_{i=m_o}^{m} k(p_i,\ u_i) \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=m_o}^{m} p_i = \sum_{j=n_o}^{n} q_j = 1 \ , \ \sum_{i=m_o}^{m} u_i \leq 1, \ \sum_{j=n_o}^{n} v_j \leq 1$$

As soluções contínuas de (3.8) são dadas através dos dois conjuntos seguintes de soluções:

<u>1º Conjunto de Soluções</u>

$$h(p,u) = Lp + Ap \log p + Bp \log u \tag{3.9}$$

$$f(p,u) = Mp \tag{3.10}$$

$$g(p,u) = Np + \left(\frac{A}{M}\right)p \log p + \left(\frac{B}{M}\right)p \log u \tag{3.11}$$

$$k(p,u) = (L - MN)p + Ap \log p + Bp \log u \tag{3.12}$$

<u>2º Conjunto de Soluções</u>

$$h(p,u) = Lp + \mu(p^2 u^\beta - p) \tag{3.13}$$

$$f(p,u) = Mp^2 u^\beta \tag{3.14}$$

$$g(p,u) = Np + \left(\frac{\mu}{M}\right) (p^2 u^\beta - p) \tag{3.15}$$

$$k(p,u) = (L - MN)p^2 u^\beta + (\mu - L)(p^\alpha u^\beta - p) \tag{3.16}$$

onde L, M, N, A, B e $\mu\ (\neq 0)$ são constantes arbitrárias e α e β são parâmetros

$$(\alpha \neq 1 \ , \ \beta \neq 0, \ \ \alpha, \beta > 0)$$

<u>Observação</u>:

Existem outras soluções de (3.8) que não aparecem no enunciado do teorema em virtude de sua trivialidade.

São elas

(i) $h(p,u) = Lp$, $f(p,u) = 0$, $g(p,u)$ arbitrário

e $k(p,u) = Lp$

(ii) $h(p,u) = Lp$, $f(p,u)$ arbitrário ,

$$g(p,u) = 0 \quad e \quad k(p,u) = Lp$$

<u>Demonstração</u>:

Vamos definir M como sendo

$$M(pq,\ uv) \doteq h(pq,\ uv) - f(p,u)\ g(q,v) - $$
$$- qk(p,u) \qquad (3.17)$$

com p, q $\in [0,1]$ e u, v $\in (0,1]$.

Aplicando a propriedade da soma, temos

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} M(p_i q_j,\ u_i v_j) =$$

$$= \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} h(p_i q_j,\ u_i v_j) - \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, u_i)\ g(q_j, v_j) -$$

$$- \sum_{j=n_o}^{n} q_j \sum_{i=m_o}^{m} M\ (p_i q_j,\ u_i v_j) = 0$$

Temos, por hipótese que as funções h, f, g e k são contínuas, então M também é contínua e, pelo teorema 3.1, conclui-se que

$$M\ (pq,\ uv) = 0$$

Então

$$h(pq,\ uv) = f(p,u)\ g(q,v) + qk(p,u) \qquad (3.19)$$

para todos os números reais

$$p,q \in [0,1] \quad e \quad u,v \in (0,1]$$

Colocando p = u = 1 em (3.19) obtemos

$$h(q,v) = f(1,1)\ g(q,v) + qk(1,1) \quad (3.20)$$

Colocando ainda $q = v = 1$, e a seguir $p = u = 1$ em (3.19), obtemos

$$h(p,u) = f(p,u)\ g(1,1) + k(p,u) \quad (3.21)$$

e

$$h(1,1) = f(1,1)\ g(1,1) + k(1,1) \quad (3.22)$$

Ainda, com $f(1,1) = 0$ (3.22) e (3.20) dá

$$h(q,v) = qh(1,1)$$

ou

$$h(s,r) = ph(1,1)$$

Então, para este caso, g arbitrário e $h = k$ é uma solução.

Simultaneamente, por simetria a outra solução é mencionada na observação.

Assim, $h(p,u)$ vem a ser uma função linear homogênea.

Quando $f(1,1) \neq 0$ (3.19) juntamente com (3.20) - (3.22) dá

$$h(pq,\ uv) = \frac{f(p,u)}{f(1,1)} \left[h\ (q,v) - qh\ (1,1) \right] + $$
$$+ qh\ (p,u)$$

isto é

$$h_1(pq,\ uv) = \frac{f(p,u)}{f(1,1)}\ h_1(q,v) + qh_1\ (p,u) \quad (3.24)$$

onde

$$h_1(p,u) = h(p,u) - ph(1,1)$$

Agora, em virtude da simetria temos

$$h_1(pq,\ uv) = h_1(qp,\ vu)$$

Colocando

$$f_1(p,u) = f(p,u) - pf(1,1)$$

isto dá

$$f_1(p,u)\ h_1(q,v) = f_1(q,v)\ h_1(p,u) \tag{3.25}$$

isto é

$$f_1(p,u) = \lambda\, h_1(p,u) \tag{3.26}$$

onde λ é uma constante arbitrária.

Agora, irão seguir três casos:

<u>1º Caso</u>:

Quando $\lambda = 0$ (3.26) dá (3.10).

Pois

$$f_1(p,u) = 0 \rightarrow f(p,u) = pf(1,1) = M$$

Neste caso (3.24) vem a ser

$$h_1(pq,\ uv) = qh_1(p,u) + ph_1(q,v) \tag{3.27}$$

pois $p = \dfrac{f(p,u)}{f(1,1)}$

ainda, dividindo (3.27) por pq e, escrevendo

$$\frac{h_1(p,u)}{p} = \phi(p,u)$$

temos

$$\frac{h_1(pq,\ uv)}{pq} = \frac{qh_1(p,u)}{pq} + \frac{ph_1(q,v)}{pq}$$

$$\phi(pq,\ uv) = \phi(p,u) + \phi(q,v) \tag{3.28}$$

A solução contínua mais geral, de (3.28) é (refer.: Aczel [1966])

$$\phi(p,u) = A \log p + B \log u \tag{3.29}$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

O primeiro conjunto de soluções é dado pelas equações (3.24) e (3.20) - (3.22).

De (3.29) consegue-se a solução (3.9):

$\phi(p,u) = A \log p + B \log u$ é (3.29)

mas, $\phi(p,u) = \dfrac{h_1\ (p,u)}{p}$

e $h_1(p,u) = h(p,u) - ph(1,1)$.

Portanto

$$\frac{h(p,u) - ph(1,1)}{p} = A \log p + B \log u$$

ou

$$h(p,u) = Mp + Ap \log p + Bp \log u$$

que é (3.9).

De (3.20) - (3.22) consegue-se (3.11) e (3.12).

Temos por (3.9) que

$$h(p,u) = Lp + Ap \log p + Bp \log u$$

De (3.20) temos

$$h(q,v) = f(1,1)\ g(q,v) + qk(1,1)$$

então

$$Lq + Aq \log q + Bq \log v - qk(1,1) = f(1,1)\, g(q,v)$$

$$g(q,v) = \frac{Lq - Aq \log q + Bq \log v - qk(1,1)}{f(1,1)}$$

ou

$$g(q,v) = \frac{L}{M}\, q + (\frac{A}{M}) q \log q + (\frac{B}{M}) q \log v$$

ainda

$$g(q,v) = Nq + (\frac{A}{M}) q \log q + (\frac{B}{M}) q \log v \quad \text{que é (3.11).}$$

De maneira análoga, consegue-se (3.12).

<u>2º Caso</u>:

Quando $\lambda \neq 0$, $h_1(p,u) \neq 0$ (3.14) juntamente com (3.36) dá

$$h_1(pq,\, uv) = ph_1(q,v) + qh_1(p,u) + \mu^{-1} h_1(p,u)\, h_1(q,v) \tag{3.30}$$

onde $\mu = \frac{q(1,1)}{\lambda} \quad (\neq 0)$

Pois

(3.24) é $h_1(pq,\, uv) = \frac{f(p,u)}{f(1,1)}\, h_1(q,v) + qh_1(p,u)$

Colocando

$$f_1(p,u) = f(p,u) - pf(1,1)$$

e tendo ainda que

$$f_1(p,u) = \lambda\, h_1(p,u) \tag{3.26}$$

Logo

$$f(p,u) = \lambda h_1(p,u) + pf(1,1)$$

$$h_1(pq,\ uv) = \frac{\lambda h_1(p,u) + (pf(1,1)}{f(1,1)} h_1(q,v) + qh_1(p,u)$$

$$h_1(pq,\ uv) = \frac{\lambda h_1(p,u)}{f(1,1)} h_1(q,v) + ph_1(q,v) + qh_1(p,u)$$

$$h_1(pq,\ uv) = ph_1(q,v) + qh_1(p,u) + \mu^{-1} h_1(p,u)\ h_1(q,v)$$

que é (3.30) onde $\mu = \dfrac{f(1,1)}{\lambda}$ $(\neq 0)$

Agora, escrevendo

$$p + \mu^{-1} h_1(p,u) = E(p,u)$$

em (3.30), obtemos

$$E(pq,\ uv) = E(p,u)\ E(q,v) \tag{3.31}$$

Pois

$$h_1(p,u) = \frac{E(p,u) - p}{\mu^{-1}} \quad \text{em } (3.30)$$

$$\frac{E(pq,\ uv) - pq}{\mu^{-1}} = p\left(\frac{E(q,v) - q}{\mu^{-1}}\right) + q\left(\frac{E(p,u) - p}{\mu^{-1}}\right) + \\ + \mu^{-1}\left(\frac{E(p,u) - p}{\mu^{-1}}\right)\left(\frac{E(q,v) - q}{\mu^{-1}}\right)$$

$$E(pq,\ uv) - pq = p\ E(q,v) - pq + q\ E(p,u) - pq +$$

$$+ E(p,u)\ E(q,v) - q\ E(p,u)\ -$$

$$- q\ E(q,v) + pq$$

Logo

$$E(pq,\ uv) = E(p,u)\ E(q,v) \quad \text{que é} \quad (3.31)$$

A solução mais geral de (3.31) é dada por

$$E(p,u) = p^{\alpha}u^{\beta} \quad \text{e} \quad E(p,u) = 0$$

onde α e β são parâmetros arbitrários.

Agora a solução $E(p,u) = p^{\alpha}u^{\beta}$ em (3.31) dá (3.13)

Sendo $E(p,u) = p + \mu^{-1}h(p,u)$ e

$$h_1(p,u) = h(p,u) - ph(1,1)$$

temos

$$p + \mu^{-1}[h(p,u) - ph(1,1)] = p^{\alpha}u^{\beta}$$

ou

$$h(p,u) = ph(1,1) + \mu\,(p^{\alpha}u^{\beta} - p)$$

isto é

$$h(p,u) = Lp + \mu(p^{\alpha}u^{\beta} - p)$$

que é (3.13).

Temos ainda que (3.31) juntamente com (3.20) - (3.22) e (3.26) dá (3.14) e (3.16)

3º Caso

Quando $h_1(p,u) = 0$, isto é, $h(p,u) = h(1,1)p$, neste caso, temos uma função linear homogênea, convertendo-se num caso particular de soluções já obtidas.

As soluções (3.9) e (3.13) com propriedade de soma e com condição de limite das medidas de Kullback e Kerridge e suas generalizações respectivamente (ref. sec. 1.3).

Encontraremos a seguir, as soluções reais e contínuas da equação funcional abaixo através de caracterização das medidas de Kullback e Kerridge.

Teorema 3.3:

Sejam $f,g: [0,1] \times [0,1] \to R$ duas funções contínuas que satisfazem a equação funcional

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i q_j, u_i v_j) =$$

$$= \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i,u_i)\, g(q_j,v_j) + \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(q_j,v_j)\, g(p_i,u_i) \tag{3.31}$$

para todos os números $m > m_o$ e $n > n_o$.

m_o e n_o são números inteiros positivos arbitrariamente determinados.

$$\sum_{i=m_o}^{m} p_i = \sum_{j=n_o}^{n} q_j = 1 \text{ e } \sum_{i=m_o}^{m} u_i \leqslant 1, \quad \sum_{j=n_o}^{n} v_j \leqslant 1$$

As soluções reais e contínuas são dadas por três conjuntos de soluções.

1º Conjunto de Soluções

$$f(p,q) = p^\alpha q^\beta (c_1 \log p + c_2 \log q) \tag{3.32}$$

$$g(p,q) = p^\alpha q^\beta$$

onde $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ e c_1, c_2 são constantes reais arbitrárias.

2º Conjunto de Soluções

$$f(p,q) = \left(\frac{1}{2k}\right) (p^\alpha q^\beta - p^\gamma q^\delta) \tag{3.33}$$

$$g(p,q) = \frac{1}{2} (p^\alpha q^\beta + p^\gamma q^\delta)$$

onde α, β, γ e δ todos não negativos e k é uma constante real arbitrária.

3º Conjunto de Soluções

$$f(p,q) = \frac{1}{R} p^\alpha q^\beta \operatorname{sen} (\gamma \log p + \delta \log q) \tag{3.34}$$

$$g(p,q) = p^\alpha q^\beta \cos (\gamma \log p + \delta \log q)$$

onde $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, γ, δ e R são todas constantes reais.

Demonstração:

Vamos definir M como sendo

$$M(pq,\ uv) = f(pq,\ uv) - f(p,q)\ g(u,v) - g(p,q)\ .f(u,v)$$

onde $p,\ q,\ u,\ v \in [0,1]$.

Aplicando a propriedade da soma, temos

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} M(p_i q_j,\ u_i v_j) =$$

$$= \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i q_j,\ u_i v_j) - \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, q_j)\ g(u_i v_j) -$$

$$- \sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} f(p_i, q_j)\ q(u_i, v_j)$$

Usando (3.31), (3.35) reduz-se para (3.1) e então

$$\sum_{i=m_o}^{m} \sum_{j=n_o}^{n} M(p_i q_j,\ u_i v_j) = 0$$

Por hipótese temos que as funções f e g são contínuas, então M também é contínua.

Então, pelo teorema (3.1), temos

$$M(pq,\ uv) = 0$$

Portanto

$$f(pq,\ uv) = f(p,q)\ g(u,v) + g(p,q)\ f(u,v) \qquad (3.35)$$

para todos os números reais $p,\ q,\ u,\ v \in [0,1]$.

As soluções de (3.36) são dadas por (3.32), (3.33) e (3.34) [refer: B.D Sharma e H.C. Güpta [1976]].

As soluções (3.32), (3.33) e (3.34) com propriedade da soma e com condição de limites dão medidas generalizadas de Kerridge e Kullback [sec. 1.3].

BIBLIOGRAFIA

ACZÉL, J. (1966). Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York.

ACZÉL, J. & DARÓCZY, Z. (1975). On measures of information and Their characterizations. Academic Press, New York.

CHAUNDY, T.W. & McLEOD, I.B. (1960). On a functional equation. Proc. Edinburgh Math. Soc. Notes, 43, 7-8.

DARÓCZY, Z. (1970). Generalized information functions. Information and Control, 16, 36-51.

HAVRDA, J. & CHARVÁT, F. (1967). Quantification method of classification processes: Concept of structural α-entropy Kybernetika, 3, 30-35.

KANNAPPAN, Pl. (1972). On Shannon's entropy, directed - divergence and inaccusacy. Z. Wahr. Verw. Geb., 22, 95-100.

KERRIDGE, D.F. (1961). Inaccuracy and inference. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 23, 184-194.

KULLBACK, S. & LEIBLER, R.A. (1951). On information and sufficiency. Ann. Math. Statist., 22, 79-86.

MATHAI, A.M. & RATHIE, P.N. (1975). Basic Concepts in Information Theory and Statistics. Wiley Eastern Limited. New Delhi.

NATH, P. (1977). On some functional Equations Connected with Various Entropies in Information Theory. Nanta Mathematica, Vol. 12. nº 1, p. 48-61.

RÉNYI, A. (1961). On measures of entropy and information. Berkeley Symp. Math. Statist. and Probl., 1960, University of California Press, 1961, Vol. 1, 547-561.

SHANNON, C.E. (1948). A mathematical theory of comunication. Bell System Tech. J., 27, 379-423, 623-656.

SHARMA, B.D. & TANEJA, I.J. (1977). Three Generalized - Additive Measures of Entropy. Eik 13, 7/8, 419-433.

SHARMA, B.D. & GUPTA, H.C. (1976). Sub Additive Measures of Relative Information and Inaccuracy. Metrika, Band 23, 155-165.

TANEJA, I.J., (1975). A Joint Characterization of Shannon's and Daróczy's Entropy of Type β through a Functional Equation. Urvashi Press, India.