Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

" MESTRE EM CIÊNCIAS "

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Italo José Dejter, Ph.D.
Orientador

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Prof. Teófilo Abuabara Saad, Dr.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UM ENFOQUE DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS COM APLICAÇÕES A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Selma Veiga Korb

Junho - 1980

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Italo José Dejter por sua valiosa orientação durante a elaboração deste trabalho.

Aos Colegas do Departamento de Matemática pelo incentivo , apoio e colaboração:

Ao Henrique, ao Sídnei e ao Maurício pelas horas que deles tirei para poder realizar este trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

A meu irmão

Edson

ABSTRACT

By establishing differentiable structures in general sets we get a treatment of differentiable manifolds and with this we get back the under lying topological properties.

This way we develop differential equations of the / first and second order in manifolds, especially sprays and / the exponential map.

RESUMO

Estabelecendo estruturas diferenciáveis em conjuntos gerais conseguimos um tratamento das variedades diferenciáveis, com o qual recuperamos as propriedades topológicas subjacentes.

Assim conseguimos tratar equações diferenciais de primeira e segunda ordem em variedades, em especial sprays e a aplicação exponencial.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Na análise clássica tratamos de funções com valores reais definidas em $\mathbb{R}^n$. Para definir uma função contínua entre conjuntos mais gerais é necessário dar a estes conjuntos uma estrutura topológica. Neste trabalho essa idéia vai mais além, seguindo o roteiro estabelecido por F. Brickell e S. Clark / ([7]). De fato, para definir uma função diferenciável entre dois conjuntos gerais, damos a estes conjuntos uma "estrutura diferenciável" com a qual eles se tornam variedades diferen - ciáveis. Isto é o começo para algumas extensões de longo alcance da matemática clássica, tanto em Análise como em Geometria.

Neste trabalho pretendemos atingir alguns desses objetivos. Em particular, o estudo das propriedades topológicas de variedades e aplicações diferenciáveis, com alguns exemplos relevantes, entre eles exemplos de estruturas diferentes em um mesmo conjunto, campos de vetores, operadores diferenciáveis , fibrados tangentes, variedades paralelizáveis, orientabilidade e conexões lineares. Como aplicação deste desenvolvimento , trataremos no capítulo IV equações diferenciais de primeira e segunda ordem sobre variedades, terminando com a aplicação exponencial do fibrado tangente de uma variedade nessa mesma variedade.

CAPÍTULO O

Notação e Terminologia

O tratamento da teoria das variedades diferenciáveis veis simplifica-se grandemente, usando a seguinte modificação na definição de função.

Definição 1

Dados dois conjuntos A e B, uma função $f: A \longrightarrow B$ é uma correspondência que a cada elemento a de um subconjunto de A (denotado dom (f)) corresponde um único elemento fa de B.

fa é o valor da f em a. A expressão "f em a" escreveremos f_a .

Definição 2

Se o domínio da $f: A \longrightarrow B$ é A, diremos que f é uma função em A e a chamaremos de função global.

Portanto a notação $f:A \longrightarrow B$ não é necessariamente global.

Definição 3

Dada uma função $f:A \longrightarrow B$ e um subconjunto $V \subset B$, denotaremos por $f^{-1} V$ o conjunto

$$f^{-1} V = \{ a \in A, \text{ tal que } fa \in V \}$$

f é uma injeção quando $fa = fa_1$ somente se $a=a_1$

Definição 4

Uma injeção $f:A \longrightarrow B$ cujo domínio é A e cuja imagem é B, é chamada uma bijeção.

Definição 5

Dado um subconjunto V de A que intercepta o domínio U da f, definimos uma nova função

$f|V : A \longrightarrow B$ com domínio $U \cap V$ pela mesma lei $a \longmapsto fa$

$f|V$ é chamada a restrição da f.

Definição 6

Se a imagem de $f:A \longrightarrow B$ é B, diremos que f tem valores em B e é uma função sobrejetiva.

Definição 7

Sejam $f:A \longrightarrow B$ e $g:B \longrightarrow C$

Seja A_1 o conjunto de elementos a de A tal que fa está definida e pertence ao domínio da g

Se A_1 é não-vazio, definimos a função

$gof : A \longrightarrow C$ com domínio A_1

tal que:

$a \longmapsto g(fa)$

Para existir $g o f$ precisamos que a imagem da f interseção com o domínio da g não seja vazio.

Definição 8

Uma função f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em um ponto z de seu domínio se cada derivada parcial da f existe e é contínua em alguma vizinhança de z

Sejam as funções projeções $p_\alpha : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$

Uma função $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ é de classe C^∞ em z se as funções de valores reais

$f^\alpha = p_\alpha o f$ $(= 1,\ldots,\ell)$ são de classe C^∞ em z.

f será chamada uma função C^∞ se ela é de classe C^∞ em cada ponto de seu domínio. O domínio de tais funções são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 9

Um difeomorfismo $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma injeção tal que f e f^{-1} são funções C^∞. Seus domínios não precisam ser todo o $\mathbb{R}^n$.

Definição 10

Uma função C^∞ $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente um difeomorfismo se cada ponto z de seu domínio admite uma vizinhança V, tal que $f|V$ é um difeomorfismo.

Definição 11

Uma função diferenciável $f:M \longrightarrow M'$ é uma imersão se o posto da f é igual à dimensão de M em cada ponto do seu domínio.

A função derivada em cada espaço tangente é portanto / uma injeção.

Se o domínio da f é todo M, f é chamada uma imersão de M em M', onde M e M' são variedades diferenciáveis.

Definição 12

Uma variedade diferenciável M é uma subvariedade de uma variedade diferenciável M' se M é um subconjunto de M' e se a injeção natural $j:M \longrightarrow M'$ é uma imersão.

CAPÍTULO I

1. Variedades diferenciáveis

Definição 1.1

Seja M um conjunto qualquer e $U \subset M$

Uma injeção $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com domínio U, cuja imagem é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é chamada uma carta n - dimensional.

Definição 1.2

Sejam $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções projeções.

Uma carta n - dimensional x define em seu domínio U um conjunto de funções coordenadas

$$x^i = p_i \circ x \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

O conjunto das coordenadas de um ponto $m \in U$, é denotado na carta x por deno

$$xm = (x^1m, \ldots , x^nm)$$

Em geral, não é possível construir uma carta adequada para um conjunto M cujo domínio é todo M. O melhor que podemos usualmente fazer é definir uma coleção A de cartas n - dimensional para M, cujos domínios cobrem M.

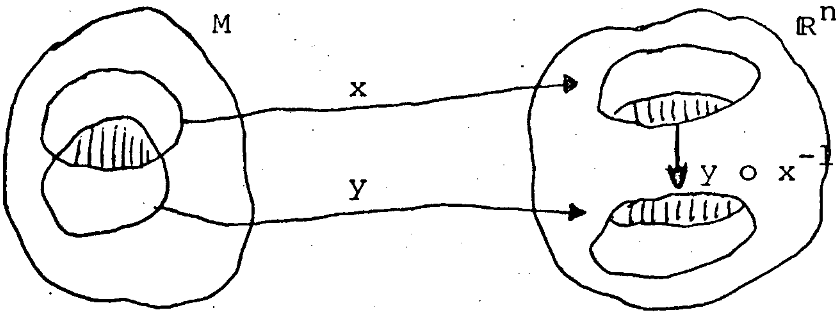
Definição 1.3

Seja A uma coleção de cartas n - dimensional cujos domínios cobrem M.

Sejam x e y duas cartas quaisquer de A cujos domínios U e V se interceptam.

A coleção A é chamada um atlas C^{∞} de M em $\mathbb{R}^n$ se a mudança de coordenadas

$y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo (Cap.0-Def.9)



Exemplo 1.1

. S^1 o conjunto dos pontos do círculo unitário em $\mathbb{R}^2$.
Seja $U = \{(\text{sen } 2\pi s, \cos 2\pi s), 0<s<1\}$ um subconjunto de S^1.

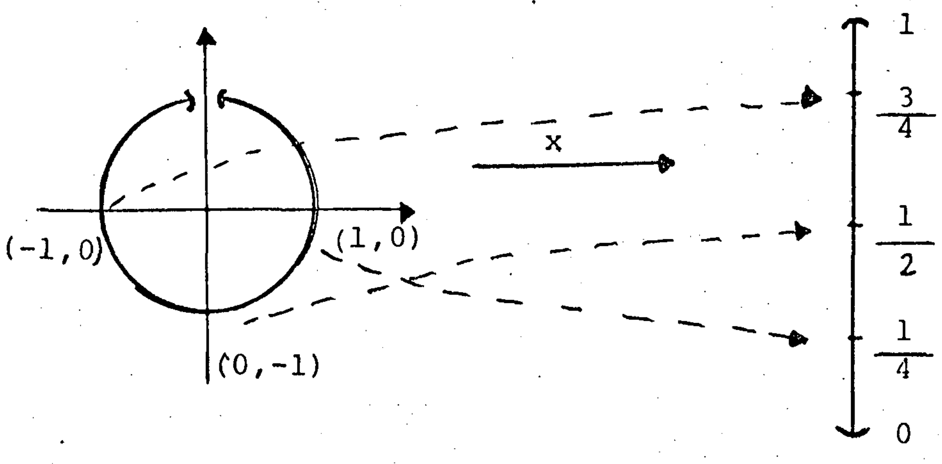
A função

$x : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em U por

$(\text{sen } 2\pi s, \cos 2\pi s) \longmapsto s$ é uma injeção sobre o subconjunto aberto $(0,1)$ de $\mathbb{R}$.

Portanto x é uma carta para S^1.

Ela está representada como segue



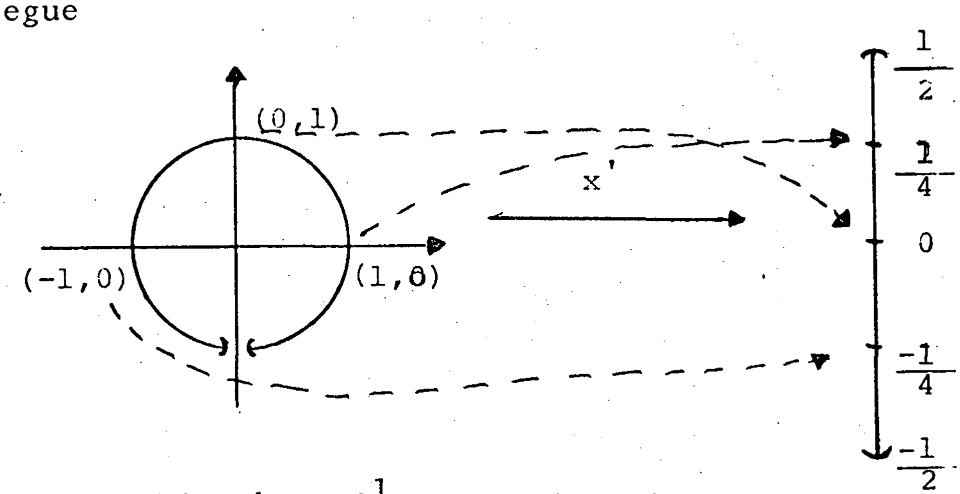
Seja $U' = \{(\text{sen } 2\pi s, \cos 2\pi s)\}, \ -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$ outro subconjunto de S^1.

A função

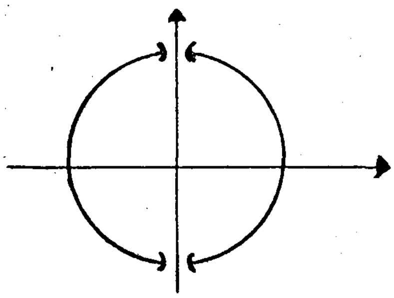
$x' : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em U' por

$(\text{sen } 2\pi s, \cos 2\pi s) \longmapsto s$ é outra carta de S^1

como segue



U e U' cobrem S^1 e U e U' se interceptam como segue



Assim:

$x' = x \quad , \quad 0 < x < \frac{1}{2}$

$x' = x - 1 \quad , \quad \frac{1}{2} < x < 1$

As mudanças de coordenadas $x' \circ x^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são:

$$(x' \circ x^{-1})\, s = \begin{cases} s, & s \in (0, \frac{1}{2}) \\ s-1, & s \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Portanto $x' \circ x^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo e assim as cartas x e x' formam um atlas C^{∞} de S^1 em $\mathbb{R}$.

<u>Definição 1.4</u>

Um conjunto M pode admitir mais que um atlas C^{∞} em $\mathbb{R}^n$. Se a união de duas coleções de cartas de dois atlas C^{∞} é um atlas C^{∞}, então eles são ditos <u>equivalentes</u>.

<u>Definição 1.5</u>

Um Atlas C^{∞} de um conjunto M é dito <u>completo</u> se ele não está contido em nenhum outro Atlas C^{∞} de M.

<u>Proposição 1.1</u>

Cada Atlas C^{∞} de M em $\mathbb{R}^n$ está contido em exatamente um Atlas C^{∞} completo.

<u>Prova</u>

Seja A um atlas C^{∞} de M em $\mathbb{R}^n$.

Seja U o domínio de uma carta $x_{\alpha} \in A$.

Consideremos o conjunto $A+$ de todas as cartas $y: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que se U intercepta o domínio V da carta y, então $y \circ x_{\alpha}^{-1}$ é um difeomorfismo.

Vejamos que:

A+ é um atlas C^∞ de M em $\mathbb{R}^n$.

De fato

Escolhamos duas cartas y, $y' \in$ A+ cujos domínios V e V' se interceptam.

Se z é um ponto de y $(V \cap V')$ existe uma carta $x_\alpha \in A$ cujo domínio contém $y^{-1}z$.

Por hipótise $y \circ x_\alpha^{-1}$ e $x_\alpha \circ y'^{-1}$ são difeomorfismos e então

$$(y \circ x_\alpha^{-1}) \circ (x_\alpha \circ y'^{-1})$$

é um difeomorfismo cujo domínio é uma vizinhança de z (o domínio é uma restrição de $y \circ y'^{-1}$).

Portanto

$y \circ y'^{-1}$ é localmente um difeomorfismo.

Mas $y \circ y'^{-1}$ é uma injeção e, assim, é um difeomorfismo. Portanto A+ é um atlas C^∞ .

Vejamos que

A+ é um atlas completo.

Qualquer atlas A' , tal que $A \subset A'$ deve estar contido em A+, isto é:

$A \subset A' \subset A+$

Portanto A+ é um atlas completo e é único.

<u>Definição 1.6</u>

Seja M um conjunto.

Se M possui um atlas C^∞ completo de M em $\mathbb{R}^n$, dizemos que M possui uma estrutura C^∞ de dimensão n.

A proposição 1.1 mostra que uma estrutura C^∞ é determinada em M por qualquer atlas C^∞ de M. Portanto não precisamos especificar um atlas completo de M para determinar tal estrutura.

Atlas C^∞ <u>equivalentes</u> pertencem ao mesmo atlas completo e assim determinam a mesma estrutura C^∞ em M.

De fato

A equivalente a A' implica que $A \cup A'$ é um atlas C^∞ . segue pela proposição 1.1 que

$$(A \cup A') \subset A+$$

Portanto

$$A \subset A+ \quad e \quad A' \subset A+$$

Atlas C^∞ <u>não-equivalentes</u> pertencem a atlas completos diferentes e assim determinam estruturas C^∞ diferentes.

Ilustraremos com um exemplo.

<u>Exemplo 1.2</u>

A função $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em $\mathbb{R}$ por $s \longmapsto s^3$ é uma carta que determina uma estrutura C^∞ em $\mathbb{R}$ a qual é diferente de sua estrutura C^∞ padrão (definida abaixo).

Vejamos que y determina uma estrutura C^∞ em $\mathbb{R}$.

De fato

O domínio da carta y é todo $\mathbb{R}$ e assim fornece um atlas C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Pela proposição 1.1 este atlas determina uma estrutura C^∞ de dimensão 1 em $\mathbb{R}$.

Do mesmo modo a função $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $s \longmapsto s$, determina uma estrutura C^∞ em $\mathbb{R}$, chamada <u>estrutura C^∞ padrão</u>.

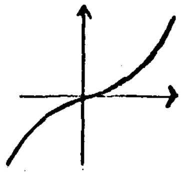
Vejamos que

Os atlas A e A', determinados pelas cartas y e x, respectivamente não são equivalentes.

Temos que

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad e \qquad x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto s^3 \qquad\qquad\qquad s \longmapsto s \;,$$

representadas por

$\mathbb{R} \xrightarrow{\;y\;}$  $\qquad \mathbb{R} \xrightarrow{\;x\;} \mathbb{R}$,

Desde que

$(x \circ y^{-1})s = x(y^{-1}s) = x\sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{s}$, então

$x \circ y^{-1}$ não é C^∞ em $s=0$, portanto não é um difeomorfismo.

Segue que $A \cup A'$ não é um atlas C^∞ em $\mathbb{R}$, portanto A e A' não são equivalentes.

Atlas C^∞ não-equivalentes estão contidos em Atlas C^∞ completos diferentes, portanto A e A' determinam estruturas C^∞ diferentes em $\mathbb{R}$.

<u>Definição 1.7</u>

Um conjunto M com uma estrutura C^∞ de dimensão n é chamada uma <u>variedade diferenciável</u> (ou variedade) <u>de dimensão n</u>.

Uma carta do atlas completo que determina esta estrutura é chamada uma carta da variedade diferenciável M e seu domínio é chamado domínio coordenado da variedade diferenciável M.

Uma carta em um ponto $m \in M$, significa dizer uma carta da variedade M cujo domínio U contém m. U é chamada vizinhança coordenada de m.

2. Funções diferenciáveis entre duas variedades

Definição 2.1

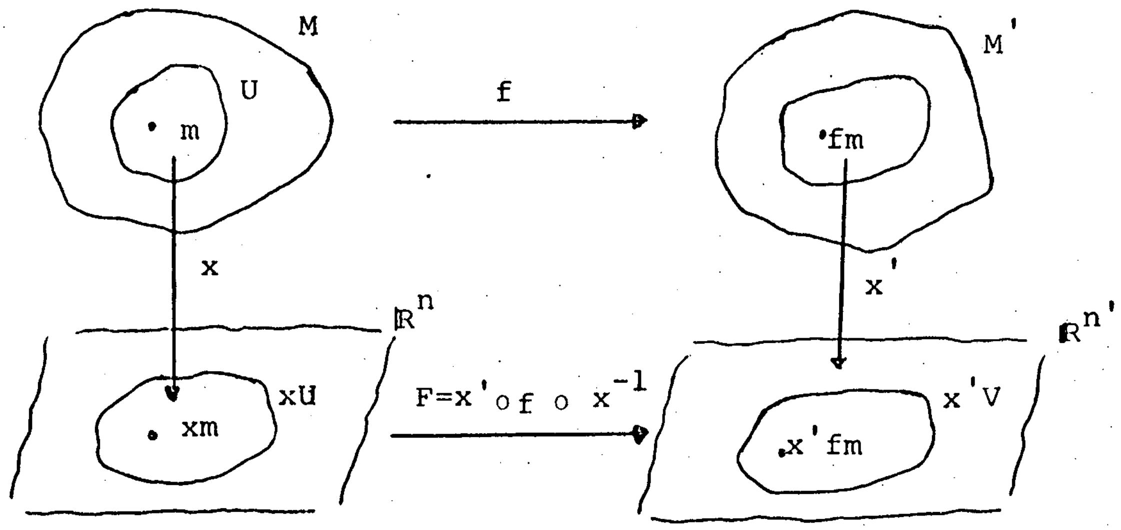
Sejam M e M' variedades diferenciáveis de dimensão n e n', respectivamente.

Seja $f : M \longrightarrow M'$ e m um ponto no domínio da f.

Consideremos duas cartas x e x' em m e fm, respectivamente.

A função

$F = x' \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ é chamada um representante coordenado da f.



$f : M \longrightarrow M'$ é <u>diferenciável em m</u> se $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ é de classe C^∞ em xm.

Vejamos que

Esta definição é independente da escolha do <u>representante coordenado</u>.

De fato

Suponhamos que $G = y' \circ f \circ y^{-1}$ seja outro representante coordenado da f.

Então a restrição da G a um subconjunto aberto B do domínio A de G, com $A \cap B \neq \emptyset$ é da forma

$G|_B = y' \circ x'^{-1} \circ x' \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ y^{-1}$ e é de classe C^∞

desde que

$(y' \circ x'^{-1}) \circ x' \circ f \circ x^{-1} \circ (x \circ y^{-1}) =$

$=(y' \circ x'^{-1}) \circ F \circ (x \circ y^{-1})$ é de classe C^∞.

De fato

$y' \circ x^{-1}$ e $x \circ y^{-1}$ são difeomorfismos (portanto de classe C^∞) e F é de classe C^∞ em xm, segue que

$G = y' \circ f \circ y^{-1}$ é de classe C^∞ em ym.

Uma função $f : M \longrightarrow M'$ é diferenciável se é diferenciável em cada ponto de seu domínio.

As estruturas diferenciáveis em muitas variedades são mencionadas para construir funções diferenciáveis.

<u>Exemplo</u> <u>2.1</u> ([10])

Seja o produto $M_1 \times M_2$ de duas variedades diferenciáveis M_i de dimensões n_1 , n_2, respectivamente.

Sejam as projeções $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ definidas por $\pi_i(p_1,p_2) = p_i$

Vamos definir uma estrutura C^∞ em $M_1 \times M_2$ a qual torna cada π_i diferenciável.

Se x_1 e x_2 são duas cartas de M_1, M_2 com domínios U_1 e U_2 respectivamente, a função

$x_1 \times x_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, dada por $x_1 \times x_2(p_1 , p_2) = (x_1p_1 , x_2p_2)$ é uma injeção cuja imagem $(x_1U_1) \times (x_2U_2)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Portanto é uma carta para $M_1 \times M_2$ com domínio $U_1 \times U_2$

Se $y_1 \times y_2$ é uma outra carta cujo domínio $V_1 \times V_2$ intercepta $U_1 \times U_2$, a mudança de coordenadas

$$(y_1 \times y_2) \circ (x_1 \times x_2)^{-1} = (y_1 \times y_2) \circ (x_1^{-1} \times x_2^{-1}) =$$

$= (y_1 \circ x_1^{-1}) \times (y_2 \circ x_2^{-1})$ é um difeomorfismo desde que produto de difeomorfismo é um difeomorfismo. Portanto o conjunto de todas tais cartas é um atlas C^∞ e assim define uma estrutura C^∞ de dimensão $n_1 + n_2$ em $M_1 \times M_2$.

Vejamos que

π_i são diferenciáveis e temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\quad \pi_i \quad} & M_i \\ {\scriptstyle x_1 \times x_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_i} \\ \mathbb{R}^{n_1+n_2} & \xrightarrow{F = x_i \circ \pi \circ (x_1 \times x_2)^{-1}} & \mathbb{R}^{n_i} \end{array}$$

Onde

$x_1 \times x_2 \; (p_1 \; , \; p_2) = (x_1 p_1 \; , \; x_2 p_2)$, isto é ,

$x_1 \times x_2 = (x_1 \circ \pi_1 \; , \; x_2 \circ \pi_2)$

Assim

$F_i = x_i \circ \pi_i \circ (x_1 \times x_2)^{-1} : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \_\_\_\_ \mathbb{R}^{n_i}$ são os representantes coordenados de π_i.

Segue que

F_i são funções projeções que são de classe C^∞ .

Portanto cada π_i é diferenciável.

<u>Exemplo</u> <u>2.2</u>

Seja $M(n \times n, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes quadradas reais $n \times n$.

Vamos definir uma estrutura diferenciável em $M(n \times n, \mathbb{R})$ a qual torna a função determinante

det: $M\,(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Seja a injeção x: $M(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{nn}$ definida por

$$[a_{ij}] \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$$

Esta função é sobre $\mathbb{R}^{nn}$ que é aberto e portanto é uma carta cujo domínio é todo o conjunto M (n x n, $\mathbb{R}$). Tal carta x define então um atlas C^∞ de M(n x n, $\mathbb{R}$) em R^{nn} o qual determina uma estrutura C^∞ em M (n x n, $\mathbb{R}$).

Usando as cartas x e identidade para M (n x n, $\mathbb{R}$) e $\mathbb{R}$, respectivamente, temos:

$$\mathbb{R}^{nn} \xrightarrow{x^{-1}} M\,(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{det} \mathbb{R} \xrightarrow{id} \mathbb{R}$$

$F = id \circ det \circ x^{-1} : \mathbb{R}^{nn} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial a qual é o representante coordenado da função determinante.

Como F é de classe C^∞ então a função determinante é diferenciável.

Definição 2.2

Um difeomorfismo f: M $\longrightarrow$ M' é uma injeção tal que f e f^{-1} são ambas funções diferenciáveis.

Definição 2.3

Uma função f: M $\longrightarrow$ M' é localmente um difeomorfismo, se cada ponto m de seu domínio tem uma vizinhança V_m tal que $f|V_m$ é um difeomorfismo.

Duas variedades diferenciáveis M,M' são difeomórficas se existe um difeomorfismo global de M em M'.

Exemplo 2.3

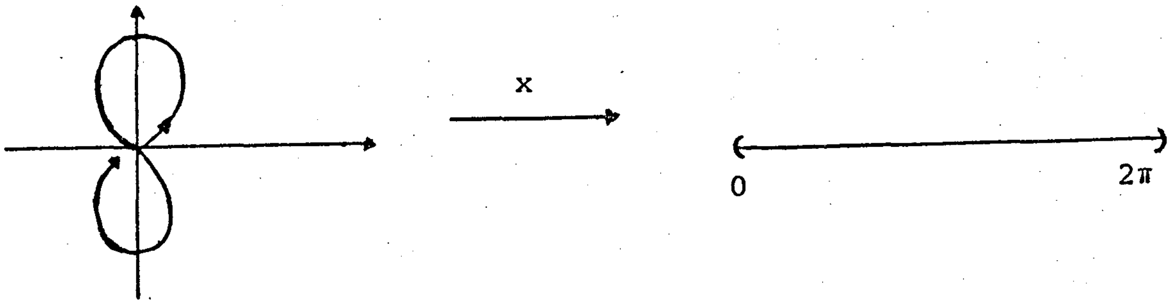
O conjunto E de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ da forma (sen 2s, sen s), s $\in \mathbb{R}$ é chamado a Figura OITO representada abaixo.

A injeção x : E $\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x(\text{sen } 2s, \text{sen } s) = s \ , \ \text{se } 0 < s < 2\pi$$

é sobre o intervalo aberto $(0, 2\pi)$ de $\mathbb{R}$ e assim x é uma carta cujo domínio é todo E e portanto $x \circ x^{-1}$ é a identidade em $(0,2\pi)$.

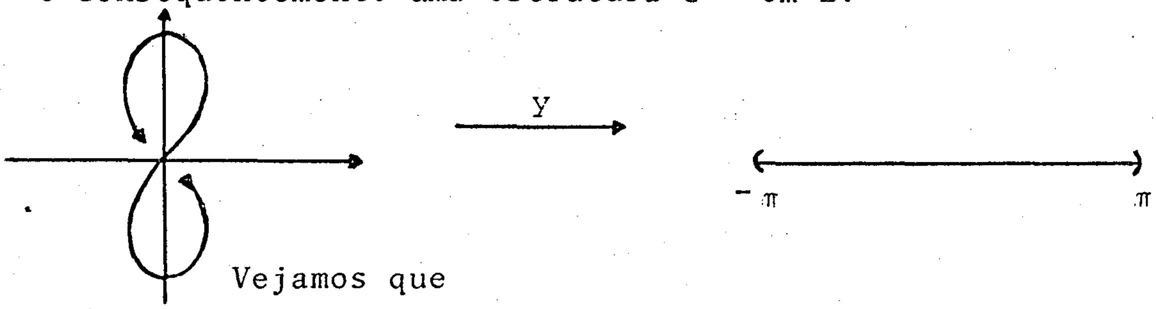
Segue que x fornece um atlas C^{∞} de E em $\mathbb{R}$ e fica definida uma estrutura C^{∞} em E.



Seja $y: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$y(\text{sen } 2s, \text{ sen } s) = s \quad , \text{ se } -\pi < s < \pi$$

y é uma injeção sobre o intervalo aberto $(-\pi,\pi)$ de $\mathbb{R}$ e seu domínio é todo E. Portanto fornece um outro atlas C^{∞} de E em $\mathbb{R}$ e consequentemente uma estrutura C^{∞} em E.

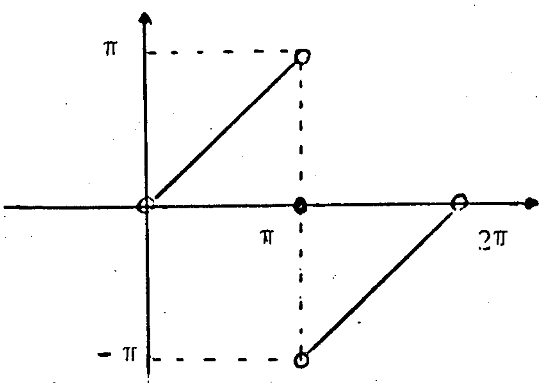


Vejamos que

A união destes dois Atlas C^{∞} não é um Atlas C^{∞}, desde que, $y \circ x^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é um difeomorfismo.

De fato

$$(y \circ x^{-1})s = y(x^{-1}s) = y(\text{sen } 2s, \text{ sen } s) = \begin{cases} s \ , & 0<s<\pi \\ 0 \ , & s = \pi \\ s-2\pi \ , & \pi<s<2\pi \end{cases}$$



$y \circ x^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua em $s = \pi$ portanto não é diferenciável. Segue que $y \circ x^{-1}$ não é um difeomorfismo e os dois Atlas não são equivalentes.

Assim as cartas x e y determinam estruturas diferenciáveis diferentes sobre a Figura OITO. Segue que temos duas variedades E,E'.

Vejamos que

E e E' são variedades difeomórficas.

Para mostrar a afirmação devemos exibir um difeomorfismo global $f: E \longrightarrow E'$

A função $f: E \longrightarrow E'$ definida por

$$(\text{sen } 2s, \text{ sen } s) \longmapsto [\text{sen } 2(s-\pi), \text{ sen } (s-\pi)]$$

é um difeomorfismo desde que o seu representante coordenado F em termos das cartas x e y de E,E' respectivamente é a translação $s \longmapsto s - \pi$ sobre o intervalo aberto $(0, 2\pi)$ de $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & E' \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ (0,\pi) & \xrightarrow[s \longmapsto s-\pi]{F = y \circ f \circ x^{-1}} & (-\pi,\pi) \end{array}$$

$$Fs = (y \circ f \circ x^{-1})\, s = y\, f\, (x^{-1}s) = yf\, (\text{sen}2s\ , \text{ sen } s) =$$

$$= y[\text{sen } 2(s-\pi), \text{ sen}(s-\pi)] = s-\pi$$

Assim as injeções F e F^{-1} são funções C^{∞} sobre $(0,2\pi)$ e $(-\pi,\pi)$ respectivamente e portanto são diferenciáveis.

Segue que f é um difeomorfismo global de E em E' e assim E e E' são variedades diferenciáveis difeomórficas.

3. A topologia de uma variedade

Proposição 3.1

A coleção dos domínios coordenados de uma variedade M, formam uma base para uma topologia no conjunto M.

Prova

É suficiente mostrar que a interseção não-vazia de qualquer par de domínios coordenados da variedade M é também um domínio coordenado ([3]).

Sejam x e y cartas de M, cujos domínios U e V se interceptam . Então

a) $y \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo cujo domínio $x(U \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

b) $(U \cap V) \subset U$.

Vamos mostrar que $x|U \cap V$ é uma carta da variedade M.

Como x é uma carta da variedade M, x é uma injeção de M em $\mathbb{R}^n$ com domínio U e cuja imagem é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Segue que

$x | U \cap V$ é uma carta do conjunto M.

Como $(x|_{U \cap V}) \circ y^{-1}$ é uma restrição do domínio do difeomorfismo $x \circ y^{-1}$,

$(x | U \cap V) \circ y^{-1}$ também é um difeomorfismo.

Segue que $X|_{U\cap V}$ é uma carta do atlas completo que define a estrutura C^∞do conjunto M, com domínio $U\cap V$. Portanto $U\cap V$ é um domínio coordenado da variedade diferenciável M. Consequentemente temos que uma estrutura C^∞em um / conjunto M induz uma topologia sobre M.

Definição 3.1

A topologia induzida no conjunto M por sua estrutura C^∞é chamada topologia da variedade M.

Com a topologia induzida no conjunto M, por sua estrutura C^∞, um subconjunto U não vazio de M é aberto se e só se cada ponto de U tem uma vizinhança coordenada contida em U. Consequentemente a topologia da variedade $\mathbb{R}^n$ é a topologia padrão de $\mathbb{R}^n$.

A proposição 3.1 mostra que cada variedade diferenciável tem uma estrutura topológica induzida.

Proposição 3.2

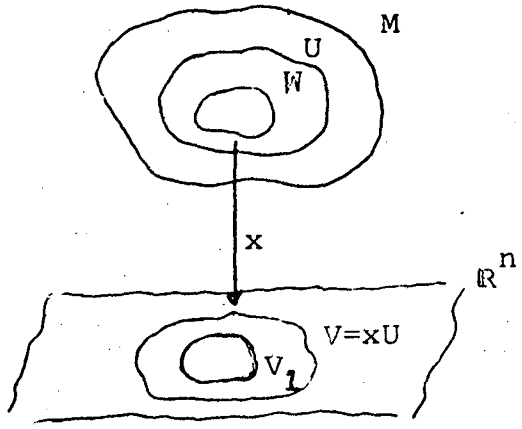
Suponhamos que a um conjunto M é dado uma estrutura topológica e uma estrutura C^∞. A topologia induzida em M coincide com a topologia dada se e só se as cartas de um atlas de M são homeomorfismos relativoa à topologia dada.

Prova

A condição é necessária.

Para ver isto, devemos mostrar que qualquer carta x de M é contínua e aberta. Suponhamos que U e V sejam os domínio e imagem, respectivamente, da carta x.

a) Seja V_1 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $W=x^{-1}V_1$.



Desde que $xW = V_1 \cap V$ então $x|_W$ é uma carta de M com domínio $U \cap W = W$. Segue que W é aberto em M. Portanto x é contínua.

b) Seja $U' \subset U$ aberto básico. Então U' é o domínio de uma carta y de M.

$y \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^n$ e seu domínio / $x(U \cap U') = x\,U'$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Qualquer subconjunto aberto de M é a união de conjuntos abertos básicos e assim sua imagem sob x é aberto em $\mathbb{R}^n$. Segue que xU é aberto em $\mathbb{R}^n$ e portanto x é aberta.

Vejamos agora que

A condição é suficiente.

Seja $\mathcal{U}$ a coleção de conjuntos abertos na topologia dada e $\mathcal{W}$ a coleção de conjuntos abertos na topologia induzida.

Vamos mostrar que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$.

a) Seja $V \in \mathcal{W}$ e x uma carta de um atlas cujo domínio W intercepta V. Então $V \cap W$ é aberto relativo à topologia induzida.

Como x é um homeomorfismo relativo à topologia induzida então $x\,(V \cap W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Mas por hipótise x é um homeomorfismo relativo à topologia dada e assim $V \cap W$ é um aberto de $\mathcal{U}$. Segue que V é a união de elementos de $\mathcal{U}$ e assim $V \in \mathcal{U}$.

$V \in \mathcal{V}$ e $V \in \mathcal{U}$ então $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

b) Seja $U \in \mathcal{U}$ e x uma carta de um atlas cujo domínio W intercepta U.

$W \in \mathcal{V}$ então $W \in \mathcal{U}$ pois vimos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Segue que $U \cap W \in \mathcal{U}$ e assim $x\,(U \cap W)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ pois x é um homeomorfismo na topologia dada.

$W \in \mathcal{V}$, x é uma carta de um atlas portanto x é um homeomorfismo relativo à topologia induzida.

Como $x(U \cap W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ segue que $U \cap W$ é aberto relativo à topologia induzida e assim U é a união de elementos de $\mathcal{V}$.

Portanto $U \in \mathcal{V}$.

Como $U \in \mathcal{U}$ e $U \in \mathcal{V}$ então $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Por a) e b) $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Definição 3.2

Uma variedade M é <u>conexa</u> se, com sua topologia induzida, ela é um espaço topológico conexo.

Definição 3.3

A topologia de uma variedade diferenciável satisfaz os axiomas T_1 e o Primeiro axioma da enumerabilidade ([4]).

Uma variedade cuja topologia satisfaz o axioma T_2 ([4]) é chamada uma <u>variedade de Hausdorff</u>.

Proposição 3.3

Se M é uma variedade de Hausdorff e m é um ponto no domínio de uma função diferenciável $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma função global $G: M \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincide com a g em alguma vizinhança de m.

Prova

Seja x uma carta de M, cujo domínio U contém m e m está no domínio da g .

Sejam B e B_1 bolas abertas com centro em $xm \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$B \subset \overline{B} \subset B_1 \subset \overline{B}_1 \subset xU$$

a) Como qualquer carta x da variedade diferenciável M é um homeomorfismo, x é contínua e aberta (fechada) e portanto se $V = x^{-1}B$ e $V_1 = x^{-1}B_1$,

$$\overline{V} = x^{-1}B \quad e \quad \overline{V}_1 = x^{-1}\overline{B}_1$$

b) Como a variedade $\mathbb{R}^n$ é normal, existe uma função diferenciável $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F = 1$ em $\overline{B}$ e $F = 0$ em $\mathbb{R}^n - B_1$

([4]) - Teorema de P. Urysohn).

c) A função diferenciável $(F \circ x) g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com domínio U e a função zero no conjunto aberto $M - \overline{V}_1$ concordam na interseção $U - \overline{V}_1$ de seus domínios e assim fica definida uma função diferenciável $G : M \longrightarrow \mathbb{R}$, a qual coincide com a g em uma vizinhança de m.

4. Diferenciação em uma variedade

A derivada de uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ em um ponto z de seu domínio é definida como sendo uma função linear $(Df)_z : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$. Usando base natural a matriz desta função é a matriz Jacobiana $J_f z$.

Estenderemos esta idéia para funções diferenciáveis $\emptyset: M \longrightarrow M'$. Com este objetivo introduziremos a noção de espaço vetorial tangente em cada ponto de uma variedade e então, definiremos uma função linear derivada entre espaços tangentes.

Definição 4.1

Seja x uma carta com domínio U, de uma variedade diferenciável M.

Uma função diferenciável $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ com domínio V, tem um representante coordenado F tal que em relação às cartas x e identidade em $\mathbb{R}$,

$$f = F \circ x \ , \text{ em } U \cap V.$$

Assim $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e portanto possui derivados parciais que denotaremos por $F,_i$, $(i=1,\ldots,n)$.

Definimos funções diferenciáveis com domínio $U \cap V$ por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = F,_i \circ x : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Quando $M = \mathbb{R}^n$ e x é a carta identidade tais funções são as derivadas parciais.

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão n, o conjunto de funções diferenciáveis $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, cujos domínios incluem $m \in M$, será denotado por $\mathcal{F}(m)$. Uma função $\mathbb{R}$- linear em $\mathcal{F}(m)$ será chamada <u>operador linear</u> em $\mathcal{F}(m)$.

<u>Definição 4.2</u>

Uma <u>derivação</u> em $\mathcal{F}(m)$ é um <u>operador linear</u> $\Lambda : \mathcal{F}(m) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$\Lambda(fg) = (fm)(\Lambda g) + (\Lambda f)(gm)$.

<u>Proposição 4.1</u>

Se f, g são funções diferenciáveis de valores reais <u>em M</u> e se α, $\beta \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(\alpha f + \beta g) = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^i} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial x^i}$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(fg) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x^i}$

<u>Prova</u>

(i) Usando uma carta x com domínio U e a carta identidade em $\mathbb{R}$, temos os seguintes diagramas comutativos.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "x"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "G"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha f + \beta g"] \arrow[d, "x"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\alpha F + \beta G"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

f e g são funções diferenciáveis em M com domínios V e V' respectivamente e assim possuem representantes coordenados F e G tal que:

$f = F \circ x$ em $U \cap V$
$g = G \circ x$ em $U \cap V'$

Então o domínio de $\alpha f + \beta g$ é $(U \cap V) \cap (U \cap V')$ e como é uma função diferenciável em M, possui um representante coordenado $\alpha F + \beta G$.

Usando a definição 4.1, temos em $(U \cap V) \cap (U \cap V')$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha f + \beta g) = (\alpha F + \beta G)_{,i} \circ x$$
$$= (\alpha F_{,i} + \beta G_{,i}) \circ x$$
$$= \alpha (F_{,i} \circ x) + \beta (G_{,i} \circ x)$$
$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

onde $(\alpha F + \beta G)_{,i}$ e $(\alpha F_{,i} + \beta G_{,i})$ são os representantes coordenados para $\frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha f + \beta g)$ e $\alpha \frac{\partial f}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x^i}$, respectivamente.

(ii) De modo análogo temos FG como representante coordenado para fg e

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(fg) = (FG)_{,i} \circ x$$
$$= (FG_{,i} + GF_{,i}) \circ x$$
$$= (FG_{,i}) \circ x + (GF_{,i}) \circ x$$
$$= (F \circ x)(G_{,i} \circ x) + (G \circ x)(F_{,i} \circ x)$$
$$= f \frac{\partial g}{\partial x^i} + g \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Como consequência desta proposição temos que se x é uma carta de M cujo domínio inclui um ponto m, a função

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m : \mathcal{F}(m) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por: } f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m$$ é uma derivação em $\mathcal{F}(m)$.

Definição 4.3

O conjunto de todas as derivações em $\mathcal{F}(m)$ é um espaço vetorial real o qual chamaremos espaço tangente $T_m M$ em m.

Cada derivação em $\mathfrak{F}(m)$ é um elemento deste espaço e a chamaremos um <u>vetor tangente</u> em m.

<u>Definição 4.4</u>

Se x é uma carta de M cujo domínio inclui um ponto m, os vetores $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$, (i = 1,...,n), formam uma base para T_m M , chamada <u>base canônica</u> para T_m M <u>associada com a carta x.</u> Portanto T_m M tem dimensão n.

Cada derivação Λ em $\mathfrak{F}(m)$ pode ser escrita na forma:

$$\Lambda = \sum (\Lambda x^i) \; (\frac{\partial}{\partial x^i})_m$$

Portanto se y é uma outra carta de M cujo domínio inclui m, uma base para $T_m M$ é dada por:

$$(\frac{\partial}{\partial y^j})_m = \sum (\frac{\partial x^i}{\partial y^j})_m \; (\frac{\partial}{\partial x^i})_m$$

<u>Definição 4.5</u>

Seja $\emptyset : M \longrightarrow M'$ uma função diferenciável, <u>m</u> um ponto no domínio da $\emptyset$ e $m' = \emptyset m$

Se $f \in \mathfrak{F}(m')$, $f \circ \emptyset \in \mathfrak{F}(m)$.

A função definida por $f \longmapsto \upsilon\,(f \circ \emptyset)$ é uma <u>derivação</u> em $\mathfrak{F}(m')$, onde υ é um vetor de $T_m M$, desde que:

$$(af + bg) \circ \emptyset = a(f \circ \emptyset) + b(g \circ \emptyset), \; a, b, \in \mathbb{R}$$

$$(fg) \circ \emptyset = (f \circ \emptyset)\,(g \circ \emptyset)$$

Esta derivação é portanto um vetor de $T_m M'$ e representamos por $\emptyset_{*m}\upsilon$.

A função

$$\emptyset_{*m} : T_m M \longrightarrow T_{m'} M'$$

definida deste modo é chamada <u>função linear derivada</u> em $T_m M$.

Vamos mostrar que ela satisfaz a definição 4.2.

$$(\emptyset_{*m} \upsilon)\, fg = \upsilon((fg) \circ \emptyset) = \upsilon[(f \circ \emptyset)(g \circ \emptyset)] =$$

$$= (f \circ \emptyset) m . \upsilon(g \circ \emptyset) + \upsilon(f \circ \emptyset) \cdot (g \circ \emptyset)\, m =$$

$$= f(\emptyset m) . \emptyset_{*m} g + \emptyset_{*m} f . g(\emptyset m) =$$

$$= f\, m' \cdot \emptyset_{*m} g + \emptyset_{*m} f . g m'$$

<u>Definição 4.6</u>

Sejam x,y cartas de M e M' em m e $\emptyset m$, respectivamente.

Como cada derivação Λ em $\mathcal{F}(m)$ é da forma $\Lambda = \sum \Lambda x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$, então o vetor $w = \emptyset_{*m} \upsilon$ de $T_{m'} M'$ é representado por:

$$w = \emptyset_{*m} \upsilon = \sum w\, y^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset m}$$

onde por definição:

$$w\, y^\alpha = (\emptyset_{*m} \upsilon)\, y^\alpha = \upsilon(y^\alpha \circ \emptyset)$$

Consequentemente a função linear $\emptyset_{*m} : T_m M \longrightarrow T_{\emptyset m} M'$ aplicada aos vetores da base para $T_m M$ fica definida por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m \longmapsto \sum_\alpha \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_m \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset m}$$

Com esta base a matriz da função linear $\emptyset_{*m}$ é:

$$\left[\left(\frac{\partial(y^{\alpha} \circ \emptyset)}{\partial x^{i}}\right)_m\right] = J_{\Phi}(xm)$$

onde J_{Φ} é a matriz Jacobiana do representante coordenado do $\Phi = y \circ \emptyset \circ x^{-1}$ da função $\emptyset$.

Exemplo 4.1

Se $e_1, e_2, \ldots, e_n$ é uma base para um espaço vetorial real A, o isomorfismo $A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\sum \alpha^i e_i \longmapsto (\alpha^1 \ldots \alpha^n)$ é uma carta que define a estrutura padrão C^{∞} para o espaço vetorial real A.

Dado qualquer vetor $a \in A$ definimos um isomorfismo canônico $J_a : A \longrightarrow T_aA$ por $e_i \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$

Suponhamos agora que A e B são espaços vetoriais reais com sua estrutura diferenciável padrão e que $\emptyset : A \longrightarrow B$ é uma função diferenciável.

Se a é um ponto no domínio de $\emptyset$, temos definida uma / função linear

$$\emptyset_{*a} : T_aA \longrightarrow T_{\emptyset a}B$$

Isto dá origem a uma função linear chamada derivada da $\emptyset$ no ponto a, representada por $(D\emptyset)_a$ e definida por:

$$(D\emptyset)_a = J^{-1}_{\emptyset a} \circ \emptyset_{*a} \circ J_a \quad : A \longrightarrow B$$

Então se $\{e_i\}$ e $\{E_{\alpha}\}$ são bases para A e B respectivamente e se x,y são as correspondentes cartas padrões, temos:

$$A \xrightarrow{J_a} T_aA \xrightarrow{\emptyset_{*a}} T_{\emptyset a}B \xrightarrow{J^{-1}_{\emptyset a}} B$$

$$e_i \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a \longmapsto \sum_\alpha \left(\frac{\partial(y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset a} \longmapsto \Sigma\left(\frac{\partial(y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_a E_\alpha$$

Assim

$$(D\emptyset)_a e^i = J^{-i}_{\emptyset a}\left(\emptyset_{*a}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a\right)$$

$$= J^{-1}_{\emptyset a}\left(\Sigma\left(\frac{\partial(y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset a}\right)$$

$$= \Sigma\left(\frac{\partial(y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_a E_\alpha$$

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma\gamma^i e_i \in A & \xrightarrow{\quad\emptyset\quad} & B \ni \Sigma\beta^\alpha E_\alpha \\
\Big\downarrow x & & \Big\downarrow y \\
(\gamma^1,\ldots,\gamma^n) \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi = y \circ \emptyset \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^\ell \ni (\beta^1,\ldots,\beta^\ell)
\end{array}$$

onde $x(\Sigma(\gamma^i e_i) = (\gamma^1,\ldots,\gamma^n)$ e $y(\Sigma\beta^\alpha E_\alpha) = (\beta^1,\ldots\beta^\ell)$

Portanto a matriz da transformação linear $(D\emptyset)_a$ correspondente a escolha das bases $\{e_i\},\{E_\alpha\}$ é $J_\Phi a$, onde

$$\Phi = y \circ \emptyset \circ x^{-1}$$

Exemplo 4.2

Sejam A e B espaços vetoriais reais de dimensão finita e $\emptyset : A \longrightarrow B$ uma função linear.

Então para todo $\upsilon \in A$

$$\emptyset_* \, (J_a \upsilon) = J_{\emptyset a} \, (\emptyset \upsilon) \quad e \quad (D\emptyset)_a = \emptyset$$

onde J_a é o isomorfismo definido no exemplo anterior.

Vamos mostrar que $\emptyset_* \, (J_a \upsilon) = J_{\emptyset a}(\emptyset \upsilon)$ e no decorrer da demonstração ficará explícito que $(D\emptyset)_a = \emptyset$.

Sejam x e y as cartas padrões para A e B respectivamente.

Seja $\upsilon = \sum \upsilon^i e_i \in A$. Então $J_a \, (\upsilon) = \sum \upsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$.

$$\emptyset_* \, (J_a \upsilon) = \emptyset_{*a} \left(\sum \upsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a \right) = \sum \upsilon^i \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i}\right)_a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset a}$$

$\emptyset$ é uma função entre dois espaços vetoriais de dimensão finita. Então:

$$\emptyset \upsilon = \emptyset \sum \upsilon^i e_i = \sum \emptyset \, (\upsilon^i e_i) = \sum \upsilon^i (\emptyset \, e_i) = \sum \upsilon^i \, E_\alpha$$

Como $\sum \upsilon^i \, E_\alpha$ é um vetor de B, em relação as cartas x e y ele é da forma $\sum \upsilon^i \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i} \right)_a E_\alpha$

Portanto:

$$J_{\emptyset a}(\emptyset \upsilon) = J_{\emptyset a}\left(\sum \upsilon^i E_\alpha\right) = J_{\emptyset a} \left(\sum \upsilon^i \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i} \right)_a E_\alpha \right)$$

$$= \sum \upsilon^i \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i} \right)_a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\emptyset a}$$

E assim:

$$\emptyset_*(J_a \upsilon) = J_{\emptyset a}(\emptyset \upsilon)$$

E portanto

$$(D\emptyset)_a \upsilon = \emptyset \upsilon$$

<u>Proposição 4.2</u>

Se $\emptyset : M \longrightarrow M'$ e $\psi : M' \longrightarrow M''$ são funções diferenciáveis e se $\underline{m}$ pertence ao domínio de $\psi \circ \emptyset$, então

$$(\psi \circ \emptyset)_{*m} = \psi_{*\emptyset} \circ \emptyset_{*m}$$

<u>Prova</u>

É imediata usando a definição 4.5 da função linear derivada.

<u>Proposição 4.3</u>

Sejam as projeções:

$$p : M \times M' \longrightarrow M$$

$$p' : M \times M' \longrightarrow M'$$

A função

$$\lambda : T_{(a,a')}(M \times M') \longrightarrow T_a M \oplus T_{a'} M'$$

definida por $w \longmapsto (p_*, p'_*)\, w$ é um isomorfismo.

Prova

Construiremos uma função inversa para λ, definindo as funções diferenciáveis $\rho_a : M' \longrightarrow M \times M'$ e $\rho_{a'} : M \longrightarrow M \times M'$

por : $\quad m' \longmapsto (a,m')$ e $\quad m \longmapsto (m,a')$

Consideremos a função global

$$\chi : T_aM \oplus T_{a'}M' \longrightarrow T_{(a,a')}(M \times M')$$

definida por $(u,u') \longmapsto \rho_{a'*}\mu + \rho_{a*}\mu'$.

Como $p \circ \rho_{a'}$, $p' \circ \rho_a$ são funções identidade e $p \circ \rho_a$, $p' \circ \rho_{a'}$ são funções constantes, segue pela proposição 4.2 que $\chi(u,u')$ projeta-se sob p_*, p'_* a u, u' respectivamente. Portanto $\lambda \circ \chi$ é a função identidade em $T_aM \oplus T_{a'}M'$.

Como λ e χ são funções lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão, λ e χ são funções inversas uma da outra.

Definição 4.7

O posto de uma função diferenciável $\emptyset : M \longrightarrow M'$ em um ponto m de seu domínio é o posto da função linear derivada $\emptyset_{*m} : T_mM \longrightarrow T_{\emptyset m}M'$, isto é, é a dimensão da imagem da função linear $\emptyset_{*m}$.

Definição 4.8

Uma função diferenciável $\emptyset : M \longrightarrow M'$ é uma submersão se

posto $\emptyset$ = dim M' em cada ponto de seu domínio. Segue que a função derivada em cada espaço tangente é sobjetiva.

Se o domínio da $\emptyset$ é todo M, $\emptyset$ é chamada uma submersão de M em M'.

Definição 4.9

Uma fibra de uma função $\emptyset : M \longrightarrow M'$ é o conjunto $\emptyset^{-1}p$, onde p é um ponto na imagem de $\emptyset$.

Definição 4.10

Seja ρ uma relação de equivalência sobre uma variedade de M. Representamos por $M/_{\rho}$ o conjunto das classes de equivalência, isto é, o conjunto quociente.

Seja $\mu : M \longrightarrow M/_{\rho}$ a sobrejeção natural que leva cada ponto de M em sua classe de equivalência.

Se ao conjunto $M/_{\rho}$ é dada a estrutura de uma variedade diferenciável M' tal que $\mu : M \longrightarrow M'$ é uma submersão, então M' é chamada uma variedade quociente de M.

As classes de equivalência de ρ são as fibras da sobrejeção natural $\mu : M \longrightarrow M/_{\rho}$.

Proposição 4.4

Seja $\emptyset$ uma submersão de M em M'.
Se $\psi : M' \longrightarrow M''$ é tal que $\psi \circ \emptyset$ é diferenciável, então ψ é diferenciável.

Prova

Seja p um ponto no domínio de $\psi \circ \emptyset$.
Existem cartas x, y de M, M' em p e $\emptyset p = m$ tal que o representante coordenado $\phi = y \circ \emptyset \circ x^{-1}$ é $(z,w) \longmapsto z$.

Seja q a carta de M'' em ψm.

Supondo que o domínio da carta x está contido no domínio de $y \circ \emptyset$, então se Φ, F são os representantes coordenados para $\emptyset$, ψ respectivamente.

$F \circ \Phi = G$ é o representante coordenado para $\psi \circ \emptyset$.

Seja U x V uma vizinhança de xp=(a',a'') na qual G é diferenciável.

Se $z \in U$,

$$G(z,a'') = F(\Phi(z,a'')) = Fz \quad ,$$

portanto F é diferenciável em U e consequentemente ψ é diferenciável em m.

Definição 4.11

Uma transformação de uma variedade diferenciável M é um difeomorfismo de M sobre M.

Definição 4.12

Dizemos que um grupo G age em M como um grupo de transformação se temos uma função global.

$\Phi : G \times M \longrightarrow M$, tal que

(i) A função $\emptyset_g$, definida para algum $g \in G$ por

$$m \longmapsto \Phi(g,m) \text{ é uma transformação de M.}$$

$\emptyset_g m$ poderá ser representado por gm.

(ii) Se g, h $\in$ G

$$\emptyset_g \circ \emptyset_h = \emptyset_{gh}$$

Assim

$$\begin{array}{llll} \emptyset_g : M \longrightarrow M & & , \quad \emptyset_h : M \longrightarrow M & \\ \quad m \longmapsto \Phi\,(g,m) & & \quad m \longmapsto \Phi\,(h,m) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \emptyset_{gh} : M \longrightarrow M \\ \quad m \longmapsto \Phi\,(gh,m) \end{array}$$

onde gh é a operação definida no grupo G.

<u>Definição</u> <u>4.13</u>

Um grupo de transformação G em uma variedade M é dito <u>descontínuo</u> se cada ponto $m \in M$ tem uma vizinhança U tal que

$U \cap (\emptyset_g\ U)$ é o conjunto vazio a menos que g seja o elemento neutro <u>e</u>.

CAPÍTULO II

1. Campos de vetores

Definição 1.1

A união de todos os espaços tangente T_mM, a medida que m varia em M, é chamada fibrado tangente TM da variedade diferenciável M. Portanto TM é o conjunto de todos os vetores tangentes à variedade M.

TM admite uma projeção

$\pi : TM \longrightarrow M$, definida por

$\pi_\upsilon = m$ se e só se $\upsilon \quad T_mM$.

Definição 1.2

Uma função diferenciável $\emptyset : M \longrightarrow M'$ determina uma função

$$\emptyset_* : TM \longrightarrow TM' \text{ definida por}$$

$$\upsilon \longmapsto \emptyset_{*_m} \upsilon \text{ , onde } m = \pi\upsilon$$

Esta função é chamada diferencial da função $\emptyset$.

Definição 1.3

Sejam funções quaisquer $\emptyset : M \longrightarrow M'$ e $\psi : M' \longrightarrow M$.

Se $\emptyset \circ \psi$ é a função identidade no domínio da ψ, então ψ é chamada uma <u>secção da função</u> $\emptyset$.

<u>Definição 1.4</u>

Uma secção $X : M \longrightarrow TM$ da função $\pi : TM \longrightarrow M$ associa a cada ponto m do seu domínio $U \subset M$ um vetor tangente Xm em m. Quando U intercepta o domínio V de uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos uma função

$$Xf : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{em} \quad U \cap V, \text{ por:}$$

$$m \longmapsto (Xm)f$$

A secção X é chamada um <u>campo de vetores em M</u> se todas as funções Xf são diferenciáveis. Seus domínios são necessáriamente subconjuntos abertos de M.

<u>Exemplo 1.1</u>

No domínio de uma carta x de M a função $\frac{\partial}{\partial x^i}$ definida por

$$m \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$$, é um campo de vetores , já que pelo capítulo I-4

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$. Assim o campo de vetores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é uma derivação em $\mathcal{F}(m)$ (pela proposição I-4.1).

Exemplo 1.2

Sejam X e Y campos de vetores em M e α , β funções diferenciáveis reais em M.

A função $\alpha X + \beta Y$ definida na interseção de seus domínios por $m \longmapsto (\alpha m)(Xm)+(\beta m)(Ym)$ é uma secção de π e é um campo de vetores.

Como os vetores $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$, (i = 1, ... ,n), formam uma base para T_mM (definição I-4.4), qualquer campo de vetores X cujo domínio V intercepta o domínio U da carta x, é da forma

$$X = \sum A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{em } U \cap V,$$

onde $A^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas em $U \cap V$ e $A^i = Xx^i$ são funções diferenciáveis, desde que Xx^i é a função projeção na i-ésima coordenada de $x = (x^1, \ldots , x^n)$.

Se y é outras carta de M, cujo domínio W intercepta U, segue pela definição I-4.4

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{em } U \cap W, \ (i,j = 1, \ldots ,n)$$

2 - Operador diferencial

No capítulo I-4 definimos um vetor em um ponto $m \in M$ como sendo uma derivação em $\mathcal{F}(m)$.

É possível caracterizar um campo de vetores de uma forma similar por sua ação em funções de valores reais.

Definição 2.1

Seja M uma variedade diferenciável e U um subconjunto aberto de M.

Denotemos por $\mathcal{F}_U$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, cujos domínios interceptam U.

Um operador diferencial χ (de primeira ordem) em U é uma função global $\mathbb{R}$-linear

$$\chi : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_U \quad \text{tal que se } f,g \ \mathcal{F}_U ,$$

(i) O domínio de χf é a interseção de U com o domínio da f.

(ii) $\chi(fg)=f(\chi g)+(\chi f)g$

onde os domínios das funções envolvidas não são vazios.

Portanto se X é um campo de vetores em U, a função $f \longmapsto Xf$ é um operador diferencial em U, pois X é uma função global linear e satisfaz as condições (i),(ii).

Reciprocamente, temos:

Proposição 2.1.

Um operador diferencial χ em um subconjunto aberto U de M surge de um único campo de vetores em U.

Prova

Seja $m \in U$ e $h \in \mathcal{F}(m)$

Se $h \in \mathcal{F}(m)$, h é uma função diferenciável de M em $\mathbb{R}$ que inclui o ponto m. Então pela condição (i) o número real $(\chi h)m$ está definido.

Pela condição (ii) a função $h \longmapsto (\chi h)m$ satisfaz a definição I-4.2, portanto é uma derivação em $\mathcal{F}(m)$ e a representaremos por X_m.

A função $X : U \longrightarrow TM$ definida por $m \longrightarrow X_m$ é uma secção de π.

Se $f \in \mathcal{F}_U$, $Xf = \chi f$ e assim Xf é diferenciável. Portanto X é um campo de vetores em U.

Definiremos agora um operador diferencial $L = [X,Y]$ em um conjunto aberto $U \subset M$, chamado Colchete de Lie dos campos de vetores X e Y.

Definição 2.2

Suponha que X,Y são campos de vetores em M, cujos domínios interceptam um conjunto aberto U de M.

Vejamos que a função global

$L : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_U$, definida por

$Lf = X(Yf) - Y(Xf)$ é um operador diferencial.

Suponhamos que o domínio de Lf é a interseção de U com o domínio da f.

Se a interseção dos domínios das funções f e g encontram U, temos:

$$X(Y(fg)) = X\,[f(Yg)+(Yf)g]$$
$$= f\,(X(Yg))+X(Yf)g+(Xf)(Yg)+(Xg)(Yf)$$
$$Y(X(fg)) = Y\,[f(Xg)+(Xf)g]$$
$$= f(Y(Xg))+Y(Xf)g+(Yf)(Xg)+(Yg)(Xf)$$

Então:

$$X(Y(fg))-Y(X(fg)) = \{X(Yf)-Y(Xf)\}\ g+f\ \{X(Yg)-Y(Xg)\}$$
$$L(fg) = (Lf)g + f(Lg)$$

Se $a, b \in R$, temos que:

$$L(af+bg) = a(Lf) + b\,(Lg)$$

Portanto L é um operador diferencial em U e surge de um único campo de vetores em U.

Definição 2.3

Seja F^1_M o conjunto de todos os campos de vetores em M.

A função

$F^1_M \times F^1_M \longrightarrow F^1_M$ definida por

$(X,Y) \longmapsto [X,Y]$ é $\mathbb{R}$-bilinear isto é,

$(a_1X_1 + a_2X_2, Y) \longmapsto a_1\,[X_1,Y] + a_2\,[X_2,Y]$.

O domínio do campos de vetores $[X,Y]$ é a interseção dos domínios de X e Y.

<u>Proposição 2.2</u>

Se X,Y são campos de vetores em M e se U é um subconjunto aberto de M, então:

$$[X \mid U, Y \mid U] = [X,Y]\mid U$$

<u>Prova</u>

Por definição:

$$[X \mid U, Y \mid U] \; f = X|U \, (Y|U \; f) - Y|U \, (X|U \; f)$$

Então:

$$([X|U, \; Y] - [X,Y])f = X|U \, (Yf) - Y(X|U \; f) -$$

$$- X(Yf)+Y(Xf) = (X|U - X)(Yf)+Y(Xf-X|U \; f) = 0$$

desde que $X|U - X$ é o campo de vetores zero em U e $Xf = X|U \; f$, em $U \cap V$. Observemos que

$$[X|U, \; Y] \; f = [X,Y] \; |Uf = X|U \; (Yf) - Y(X|U \; f)$$

Segue que:

$$([X|U,Y|U] - [X,Y]|U)f = X|U \; (Y|U \; f) - Y|U \; (X|U \; f) - X|U \; (Yf) + Y \; (X|U \; f)$$

$$= X|U(Y|U \; f - Yf)+(Y-Y|U)(X|U \; f) = 0$$

desde que $Y|U \; f = Yf$ e $(Y - Y|U)(X|U \; f) = 0$

Portanto

$$[X|U, \; Y|U] = [X,Y]\,|U$$

Propriedades do operador $[X,Y]$

(i) Se X, Y, Z são campos de vetores em M

$$[X, [Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \text{ (identidade de Jacobi)}$$

(ii) Se x é uma carta de M com domínio U, e X,Y são campos de vetores em M, então:

$$[X,Y] \Big| U = \sum (X(Yx^i) - Y(Xx^i)) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(iii) Se X,Y são campos de vetores e f,g são funções diferenciáveis <u>reais</u> em M, então

$$[fX, gY] = fg\,[X,Y] + f(Xg)\,Y - g(Yf)X$$

<u>Prova</u>

(i) Suponha que os domínios X, Y, Z interceptam-se em um conjunto aberto U de M.

Se $f \in \mathcal{F}_U$, então:

$$[X, [Y,Z]]f = X([Y,Z]\, f) - [Y,Z]\, (Xf)$$

$$= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - (Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf))$$

$$= X(Y(Zf) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))$$

Desenvolvendo $[Y, [Z,X]]$ e $[Z, [X,Y]]$ temos:

$$\{[X\ [Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z, [X,Y]]\}_f = 0$$

Desde que isto é verdadeiro para todo $f \in \mathcal{F}_U$, o campo de vetores $\{\ \ \}$ em U deve ser zero.

(ii) Sejam V e W domínios dos campos de vetores X e Y, respectivamente.

Então $U \cap V \cap W$ é o domínio do campo de vetores $[X,Y]\,|U$.

Se m pertence ao domínio de $[X,Y]\,|U$ então $xm = (x^1 m, \ldots, x^i m, \ldots x^n m)$ onde x^i são funções diferenciais definidas em $U \cap V \cap W$.

Portanto:

$$Y\,|\,U = \sum Yx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad X\,|\,U = \sum Xx^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Pela proposição 2.2 $[X,Y]\,|U = [X\,|\,U\,,\,Y|U]$.

Por definição:

$$[X|U, Y|U]\, f = X|U(Y|U\ f) - Y|U(X|U\ f) \text{ onde } f \in \mathcal{F}_U.$$

Como $x^i \in \mathcal{F}_U$ segue que:

$$[X,Y]\,|U\ x^i = \sum (X(Yx^i) - Y(Xx^i)) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

(iii) Suponha que os domínios da f, g e h se interceptam em um conjunto aberto U de M, onde $f,g,h \in \mathcal{F}_U$.

$$\begin{aligned}
[f\,X\,,\,g\,Y]\,h &= f\,X(g.Yh) - g\,Y\,(f.Xh) \\
&= f\,[Xg.(Yh(m)) + g(m)(X(Yh))] - g\,[Yf.(Xh(m)) + \\
&+ fm(Y(Xh))] \\
&= f\,(Xg)\ Yh(m) - g(Yf)Xh(m) + (fg(m)(X(Yh)) - \\
&- gf(m)(Y(Xh))) \\
&= f(Xg)\ Yh(m) - g(Yf)Xh(m) + fg(m)\,[X,Y]\,h.
\end{aligned}$$

3. O fibrado tangente e sua estrutura padrão C^∞

Vimos que uma secção $X : M \longrightarrow TM$ de π é um campo de vetores se e só se as funções $Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis em $U \cap V$, onde U é o domínio de X e V o domínio da função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nosso objetivo agora é caracterizar um campo de vetores X como uma secção diferenciável de $\pi : TM \longrightarrow M$.

Para isto devemos exibir um representante coordenado F para X que seja diferenciável.

Definição 3.1

Seja x uma carta de M com domínio U.

Então cada vetor $\nu \in \pi^{-1}U$ pode ser representado como $\nu = \sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$, onde $a = (a^1 \ldots , a^n) \in \mathbb{R}^n$ e assim podemos definir uma injeção

$$\begin{aligned} (\tilde{x}, y) : TM &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \nu &\longmapsto (xm, a) \end{aligned}$$

As funções coordenadas são definidas por:

$$\tilde{x}^i \nu = x^i (\pi\nu) = x^i m \quad , \quad y^i \nu = \nu x^i \quad (i=1,\ldots,n)$$

νx^i dá a projeção de ν na i-ésima coordenada.

O domínio de $(\tilde{x},y)$ é $\pi^{-1}U$ e a imagem é o conjunto aberto $x\,U \times \mathbb{R}^n$.

A injeção $(\tilde{x},y) : TM \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ será chamada a <u>carta padrão</u> de TM associada com a carta x.

Vamos mostrar agora que o conjunto destas cartas padrões formam um atlas que define uma estrutura C^∞ de dimensão 2n no fibrado tangente TM.

Seja x' uma outra carta de M com domínio U' e $(\tilde{x}'y')$ a carta padrão associada de TM a qual intercepta o domínio de $(\tilde{x},y)$.

Então os domínios de x e x' se interceptam e a mudança de coordenadas $f=x' \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo.

Usando a equação $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)_m \left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_m$ (def.I-4.4.) segue que a correspondente <u>mudança de coordenadas</u> em TM está definida em $x\,(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ por:

$$(z,a) \longmapsto (fz, [J_f z]\, a)$$

onde $J_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow M\,(n \times n, \mathbb{R})$ é a matriz Jacobiana da função C^∞ , $f = x' \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Segue que esta mudança de coordenadas é um difeomormismo, pois ela é o produto de um difeomorfismo com um isomorfismo linear. Portanto as cartas padrões formam um atlas que define uma estrutura C^∞ de dimensão 2n no fibrado tangente TM.

Usando qualquer carta x de M com domínio U e a correspondente carta padrão de TM, π é representada por uma função $(z,a) \longmapsto z$, cujo domínio é $x\,U \times R^n$.

<u>Proposição 3.1</u>

Se $\emptyset : M \longrightarrow M'$ é uma função diferenciável, sua di ferencial $\emptyset_*$: TM $\longrightarrow$ TM' é também diferenciável.

Prova

Seja v um ponto no domínio de $\emptyset_*$ e as cartas x,x' de M, M' cujos domínios incluem πv, $\emptyset$ (πv) respectivamente.

Seja $\emptyset = x' \circ \emptyset \circ x^{-1}$.

Usando as correspondentes cartas padrões de TM e TM' e desde que:

$\emptyset_{*m} : T_mM \longrightarrow T_{m'}M'$ foi definida em I-4.6 por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m \longmapsto \sum_\alpha \frac{\partial (x'^\alpha \circ \emptyset)}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\right)_{\emptyset m} ,$$

segue que o representante coordenado para $\emptyset_*$ fica definido em uma vizinhança de $(\check{x}v, yv)$ por:

$(z,a) \longmapsto (\phi z, \left[J_\Phi\ z\right] a)$ e portanto é diferenciável neste ponto.

Estamos agora preparados para mostrar que o fibrado tangente de M x M' é naturalmente difeomórfico ao produto TM x TM'.

Proposição 3.2

Sejam as projeções:

p: M x M' $\longrightarrow$ M
p': M x M' $\longrightarrow$ M'

A função $\lambda = (p_*, P'_*)$ é um difeomorfismo de $T(M\ M')$ em $(TM)x(TM')$.

Prova

$\lambda : T_{(m,m')}M \times M' \longrightarrow T_m M' \oplus T_{m'} M'$ é a função definida por $(u,u') \longmapsto (p_*,\ p'_*)\ (u,u')$, portanto λ é diferenciável. A proposição I-4.3 mostra que λ é uma bijeção.

Basta mostrar que λ^{-1} é diferenciável.

Sejam x, x' cartas de M,M' com domínios U,U'. No domínio das cartas padrões associada com a carta $w = x \times x'$ de $M \times M'$, λ é dada por

$$\sum \left(a^i \frac{\partial}{w^i} + b^i \frac{\partial}{\partial w^{i+n}} \right)_{(m,m')} \longmapsto \left(\sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m , \sum b^i \left(\frac{\partial}{\partial x'^i} \right)_{m'} \right)$$

$(i=1,\ldots,n)$.

Usando esta carta padrão e o produto das cartas padrões associadas com x e x', λ^{-1} tem representante coordenado

$$(z,a,z',b) \longmapsto (z,z',a,b) \text{ onde}$$

$$z \in xU\ ,\ z' \in x'U'\ ,\ a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Como esta função e diferenciável, λ é um difeomorfismo de $T(M \times M')$ em $(TM) \times (TM')$.

Proposição 3.3

Uma secção $X : M \longrightarrow TM$ de π é um campo de vetores se e só se X é diferenciável.

Prova

Seja x uma carta de M cujo domínio U intercepta o domínio W de X.

Desde que X é um campo de vetores, então o campo de vetores

$X|U = \sum A^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$, onde as funções $A^i = Xx^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$

tem domínio $U \cap W$, é um campo de vetores se e só se

$A = (A^1, \ldots , A^n) = (Xx^1, \ldots , Xx^n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$

é diferenciável. Portanto X é um campo de vetores se e só se $X | U$ é um campo de vetores para cada carta x.

Por outro lado, usando a carta x e a correspondente carta padrão de TM, X tem como representante coordenado a função F definida em $x(U \cap W)$ por $z \longmapsto (z, A(x^{-1}z))$. F é diferenciável se e só A é diferenciável.

4 - Variedades paralelizáveis

Definição 4.1

Um conjunto finito de campos de vetores $X_1, \ldots, X_r$ em um subconjunto aberto U de M é chamado <u>independente</u> se, em <u>cada</u> ponto $m \in U$, $X_1m, \ldots , X_rm$ são vetores <u>linearmente independentes</u> de T_mM.

Em particular um único campo de vetores é independente se e só se ele não se anula em nenhum ponto.

Exemplo 4.1

Os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots , \frac{\partial}{\partial x^n}$ no domínio de uma carta x é um conjunto independente. Consequentemente campos de vetores existem em qualquer domínio coordenado.

Exemplo 4.2

As cartas x e x' que formam um atlas C^∞ do círculo S^1 em $\mathbb{R}$ (descrito no exemplo I-1.1), em $U \cap U'$, estão assim relacionadas:

$$x' = x \quad \text{se } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$x' = x-1 \text{ se } \frac{1}{2} < x < 1$$

Portanto

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_m = 1 \quad \text{se} \quad m \in U \cap U'.$$

Segue que os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x}$ em U e $\frac{\partial}{\partial x'}$ em U' coincidem em $U \cap U'$ e assim, conjuntamente, eles definem um campo de vetores em S^1 que não se anula em nenhum ponto, isto é , fica definido em S^1 um campo de vetores independente.

Definição 4.2

Um conjunto ordenado de n-campos de vetores independentes X_1 , ... , X_n , em um subconjunto aberto U de uma variedade M de dimensão n, é chamado uma paralelização em U.

Se $p,q \in U$, U aberto em M, o isomorfismo

$$T_pM \longrightarrow TqM \text{ , definido por}$$

$$X_ip \longmapsto X_iq \qquad (i=1, \ldots ,n)$$

generaliza o paralelismo usual em $\mathbb{R}^n$.

Uma variedade que admite uma paralelização <u>global</u> é chamada <u>paralelizável</u>.

<u>Exemplo 4.3</u>

Os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ formam uma paralização no domínio da carta x.

Portanto, uma variedade cuja estrutura C^∞ é determinada por uma carta <u>global</u> é paralelizável. Por exemplo o conjunto $M(r \times s, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $r \times s$, é uma variedade paralelizável pois a injeção:

$$M(r \times s, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{rs} \text{ definida por}$$

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \longmapsto (a_{11}, \ldots, a_{1s}, a_{21}, \ldots, a_{2s} \ldots, a_{rs})$$

se aplica sobre todo o conjunto $\mathbb{R}^{rs}$ que é aberto e assim fica determinado um atlas C^∞ de $M(r \times s, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{rs}$, por uma única carta cujo domínio é todo o conjunto $M(r \times s, \mathbb{R})$.

De um modo geral a questão da existência de campos de vetores sobre esferas está relacionado rigorosamente à Teoria da Algebra Linear.

Isto é mostrado na proposição seguinte, a qual pode ser usada para obter um número máximo de campo de vetores independente em uma esfera ([5]).

<u>Proposição 4.1</u>

Se $v : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma função $\mathbb{R}$ - bilinear tal que

(i) $v(\nu, z) = 0$ implica que $\nu = 0$ ou $z = 0$.

(ii) existe $\underline{e} \in \mathbb{R}^{k+I}$, tal que $v(e,z)=z$ para todo $z \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Então S^n admite k campos de vetores independentes.

<u>Prova</u>

Seja $\nu \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Um campo de vetores V' é definido em $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$z \longmapsto J_z\,(v(\nu,z))$ onde J_z é o isomorfismo canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $T_z\mathbb{R}^{n+1}$ descrito no exemplo I-4.1.

Seja $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow S^n$ a função deferenciável definida para todo $z \neq 0$, por

$$z \longmapsto z/_{|z|} \text{ e seja } j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

a injeção natural.

a) mostraremos que o núcleo de $\sigma_* z$ é o subespaço de $T_z\,\mathbb{R}^{n+1}$ expandido por $J_z z$.

Se i é a função identidade em S^n , então $\sigma \circ j = i$ e assim $\sigma_{*z} \circ j_* z$ é a função identidade em $T_z S^n$.

Portanto σ_{*z} é uma sobrejeção e ela tem posto n. Segue que o núcleo de σ_{*z} tem dimensão <u>um</u> e assim temos somente que encontrar um vetor não-nulo $\nu \in T_z\,\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\sigma_{*z} = 0$.

Seja x a carta identidade em $\mathbb{R}^{n+1}$ e consideramos o vetor

$$J_z z = \sum z^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z$$

Sejam U_a e U_{a+n+1} os conjuntos dos pontos de S^n, para os quais $z_a > 0$ e $z_a < 0$ respectivamente, onde $a=1,\dots,n+1$. Temos assim definido um atlas para S^n com $2(n+1)$ cartas definidas por

$$y_a = \theta_a \circ j \,|\, U_a \quad , \quad y_{a+n+1} = \theta_a \circ j \,|\, U_{a+n+1}$$

onde

$\theta_a : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$z \longrightarrow (z_1 , \dots , \hat{z}_a, \dots , z_{n+1})$, onde $\hat{z}_a$ é o ponto omitido.

Seja y uma destas cartas cujo domínio inclui o ponto z tal que $J_z z = \sum z^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z$.

Então

$$\sigma_{*z}\left(J_z z\right) = \sum_{i,\alpha} \left(\frac{\partial (y^\alpha \circ \sigma)}{\partial x^i}\right)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\sigma_z} .$$

Desde que cada $y^\alpha \circ \sigma$ é uma função homogênea de grau zero, o Teorema de Euler mostra que este vetor é zero.

Portanto o núcleo de σ_{*z} é o subespaço de $T_z \mathbb{R}^{n+1}$ expandido por $J_z z$.

b) Seja $v = \sigma_* \circ V' \circ j = \sigma_* \circ J_z \circ j$

Segue pelo exemplo I-4.2 que

$$v = J_{\sigma_z} \circ \sigma \circ j$$

Como $\sigma \circ j = i$, segue que v define um campo de vetores em S^n.

c) Sejam $e_1, \ldots, e_k$ elementos de $\mathbb{R}^{k+1}$, tal que juntamente com $\underline{e} \in \mathbb{R}^{k+1}$ formam uma base para $\mathbb{R}^{k+1}$.

Mostraremos que os correspondentes campos de vetores $E_1, \ldots, E_k$ em S^n são independentes.

Suponhamos que existem números reais a^α, $(\alpha=1,\ldots,k)$, tal que para algum $z \in S^n$,

$$\sum a^\alpha (E_\alpha z) = 0$$

Como o núcleo de $_*z$ é o subespaço de $T_z\,\mathbb{R}^{n+1}$ gerado por $J_z z$, então

$$J_z^{-1}\left(\sum a^\alpha (E'_\alpha z)\right) = az \quad \text{para algum } a \in \mathbb{R}.$$

Substituindo az por $v(ae,z)$ e usando a definição de E'_α, isto é $E'_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$, temos

$$\sum a^\alpha (e_\alpha z) = v(ae,z)$$

$$v\left(\sum a^\alpha e_\alpha - ae, z\right) = 0$$

Como $z \neq 0$, implica que

$$\sum a^\alpha e_\alpha - ae = 0$$

Mas $e, e_1, \ldots, e_k$ são linearmente independentes, então $a^\alpha = 0$, $(\alpha=1, \ldots, k)$.

Proposição 4.2

As esferas S^1, S^3 e S^7 são paralelizáveis.

Prova

Vamos usar a proposição 4.1. Devemos então definir uma função $\mathbb{R}$-bilinear $v: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ $(n=1,3,7)$ satisfazendo as condições (i), (ii).

Para a esfera S^1, identificamos $\mathbb{R}^2$ com os números complexos e definimos a função $\mathbb{R}$-bilinear como segue:

$$v: \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$$

$$(a+bi, c+di) \longmapsto (a+bi)(c+di) =$$

$$= (ac - bd) + (ad+bc)i \quad \text{satisfaz}$$

$$\text{(i)}, \text{(ii) onde } e = 1+0i$$

Portanto S^1 admite <u>um</u> campo de vetores independente.

Para a esfera S^3, identificamos $\mathbb{R}^4$ com os quatérnios ([3]), sendo que um quatérnio q é da forma $q=a_0 1+a_1 i+a_2 j+a_3 k$ ou $q=(a_0+a_1 i)+(a_2+a_3 i)j$, com as propriedades

$$e_0 . e_i = e_i . e_0 = e_i$$

$$e_i^2 = -e_0 = -1$$

$$e_i . e_j = -e_j . e_i = e_k$$

onde $e_0=1$, $e_1=i$, $e_2=j$, $e_3=k$, $1 \leq i, j, k \leq 3$, $i \neq j \neq k$.

Definimos então a função R - bilinear
$v : \mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{R}^{3+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3+1}$ como sendo também a função produto e concluimos que S^3 admite tres campos de vetores independentes.

Para a esfera S^7, identificamos $\mathbb{R}^8$ com os números de Cayley. Um número de Cayley $c=(q_1,q_2)$ é um par ordenado de quatérnios e a multiplicação é definida por ([11])

$$(q_1,q_2)(q'_1,q'_2)=(q_1q'_1 - \bar{q}'_2 \; q_2,\; q'_2q_1 + q_2\bar{q}'_1)$$

onde

$\bar{q} = a_0-a_1i-a_2j-a_3k$ é o conjungado de um quatérnio q.

Definimos novamente a função R-bilinear

$v: \mathbb{R}^{7+1} \times \mathbb{R}^{7+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{7+1}$ como sendo a função produto e concluimos que S^7 admite sete campos de vetores independentes.

<u>Proposição 4.3</u>

Qualquer esfera de dimensão <u>impar</u> admite um campo de vetores <u>global</u> que não se anula em nenhum ponto.

<u>Prova</u>

Usaremos a proporsição 4.1 definindo uma função $\mathbb{R}$-bilinear $v: \mathbb{R}^{1+1} \quad \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde n+1=2h é um inteiro <u>par</u>.

Identificamos $\mathbb{R}^2$ com os números complexos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^{2h}$ com $\mathbb{C}^h$. Então defininos $v:\mathbb{C} \times \mathbb{C}^h \longrightarrow \mathbb{C}^h$ por:

$$(p,q_1, \ldots , q_h) \longmapsto (pq_1,pq_2, \ldots , pq_h)$$

Esta função satisfaz (i),(ii) e portanto S^n, n impar, admite um campo de vetores independente que não é nulo em nenhum ponto , desde que um único campo de vetores é independente se e só se ele não é nulo em nenhum ponto.

Proposição 4.4

Se variedades M,M' admitem k,k' campos de vetores global independentes respectivamente, então $M \times M'$ admite k+k' campos de vetores global independentes.

Prova

Sejam X_α ,(α=1, ... , k) e X'_β , (β =1, ... , k')

Campos de vetores independentes em M, M', respectivamente.

Sejam 0,0' os campos de vetores zero em M e M'.

Seja λ a função $\lambda = (p_*, p'_*)$. Foi mostrado na proposição 3.2 que λ é um difeomorfismo de $T(M \times M')$ em $TM \times TM'$. Segue que $\lambda^{-1} \circ (X \times X')$ é uma função diferenciável de $M \times M'$ em $T(M \times M')$ e portanto um campo de vetores em $M \times M'$.

Devemos mostrar que os campos de vetores $\lambda^{-1} \circ (X_\alpha \times 0')$ e $\lambda^{-1} \circ (0 \times X'_\beta)$ são independentes.

Se (m,m') é um ponto de M×M', a função

$T_m M \times T_{m'} M' \longrightarrow T_{(m,m')}(M \times M')$ induzida por λ^{-1} é um isomorfismo.

Consequentemente se existem números reais a^α tal que:

$$\sum a^\alpha \lambda^{-1}(X_\alpha m, 0'm') + \sum b^\beta \lambda^{-1}(0m, X'_\beta m')$$

é o vetor zero de $T_{(m,m')}(M \times M')$, então:

$$\left(\sum a^{\alpha}(X_{\alpha}m) \; , \sum b^{\beta}(X'_{\beta}m')\right)$$

deve ser o vetor zero de $T_m M \oplus T_{m'} M'$ e como X_α, X'_β são independentes, $a^\alpha=0$ e $b^\beta=0$, portanto $M \times M'$ admite k+k' campos de vetores independentes.

Consequências da proposição

(i) Se M e M' são variedades paralelizáveis então $M \times M'$ é paralelizável.

(ii) Se M' admite um campo de vetores global que não se anula em nenhum ponto então $M \times M'$ também admite tal campo de vetores para qualquer variedade M.

Exemplo

O toro $T^2=S^1 \times S^1$ é uma variedade diferenciável de dimensão dois (Exemplo I-2.1).

Segue pela condição (ii) que T^2 admite um campo de vetores global independente.

5 - Variedades Orientáveis

Definição 5.1

Um conjunto ordenado $e_1, \ldots, e_n$ de vetores linearmente independentes de um espaco vetorial real V é chamado um n-referencial e em V. Sejam e,e' dois tais referenciais de um espaço vetorial real V de dimensão n.

Então qualquer dois n-referenciais estão relacionados por:

$$e'_j = \sum A^i_j \; e_i \; , \quad (i,j = 1, \ldots , n)$$

onde $A = \left[A^i_j \right]$ é uma matriz não-singular.

A relação de equivalência

$$e \sim e' \Longleftrightarrow \det A > 0$$

separa os n-referenciais em duas classes de equivalência e cada classe é chamada uma orientação em V.

Definição 5.2

Uma orientação em uma variedade diferencial M é uma função

$\theta : m \longmapsto \theta_m$, onde θ_m é uma orientação do espaço vetorial real T_mM, que satisfaz a seguinte condição de diferenciabilidade:

Cada ponto no domínio da θ admite uma vizinhança U , na qual os valores da θ ficam determinados pelos valores de uma paralelização em U.

Definição 5.3

Se uma variedade admite uma orientação global ela é dita orientável.

Exemplo 5.1

Pela definição 5.2, qualquer paralelização determina uma orientação em seu domínio. Uma variedade paralelizável /

(após definição 4.2) é portanto orientável.

Exemplo 5.2

Já que os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}$, ... , $\frac{\partial}{\partial x^n}$ formam uma paralelização que denotamos por $\frac{\partial}{\partial x}$ no domínio U de uma carta x de uma variedade M, então $\frac{\partial}{\partial x}$ determina uma orientação em U. Do mesmo modo uma orientação é determinada no domínio V de uma carta y de M por $\frac{\partial}{\partial y}$.

Como em $U \cap V$, $\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^j}$, segue que as duas orientações concordam em $U \cap V$ se e só se

$$\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} = \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right] > 0$$

e então juntamente elas definem uma orientação em $U \cup V$.

Segue que uma orientação pode ser determinada em uma variedade M por um atlas de cartas x_α de M com domínios U_α, tal que $\left|\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right| > 0$ em cada interseção $U_\alpha \cap U_\beta$.

Exemplo 5.3

Consideremos o círculo S^1.

Consideramos o atlas com duas cartas somente, obtidas pela projeção estereográfica de S^1 através dos pontos(0,1) e (0,-1) sobre o plano $z_2=0$.

Sejam U e U', obtidos de S^1, omitindo os pontos (0,1) e (0,-1) respectivamente.

Sejam as injeções:

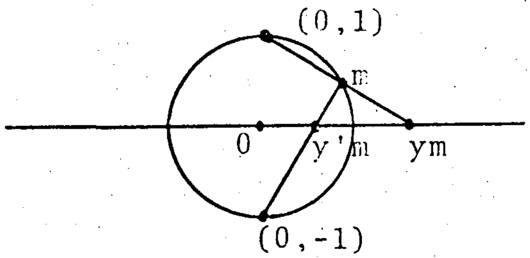
$$y : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad , \quad y' : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

definidas em U, U', por:

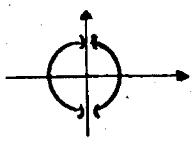
$$yz = \frac{z_1}{1-z_2} \quad , \quad y'z = \frac{z_1}{1+z_2}$$

A mudança de coordenadas em $U \cap U'$ é o difeomorfismo definido em $\mathbb{R}^1 - 0$ por:

$$y' = \frac{y}{(y)^2} = \frac{1}{y}$$



Portanto em $U \cap U'$



$$\left| \frac{\partial y'}{\partial y} \right| = - \frac{1}{y^2} < 0$$ e assim este atlas não define uma orientação em S^1.

Mas se trocarmos a carta y' pela carta $y'' = -y' = \dfrac{-z^1}{1+z_2}$, as cartas y e y'' formam um atlas equivalente de S^1 que define uma orientação, pois na interseção de seus domínios a mudança de coordenadas é o difeomorfismo definido em $\mathbb{R}^1-0$ por:

$$y'' = - \frac{z^1}{1+z_2} = - y' = - \frac{1}{y}$$

Portanto

$$\left|\frac{\partial y''}{\partial y}\right| = \frac{1}{y^2} > 0$$

Este argumento pode ser estendido para mostrar que a esfera S^n é orientável.

Definimos as cartas $y : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $y' : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em U e U' por

$$y^i z = \frac{z_i}{1- z_{n+1}} \quad , \quad y'^i_z = \frac{z_i}{1+z_{n+1}}$$ e usamos o atlas

C^∞ determinado pelas cartas y e $y''=(-y'^1, y'^2, \ldots , y'^n)$.

mas quando $n > 1$, isto é uma consequência do próximo exemplo.

<u>Exemplo 5.4</u>

Qualquer variedade M que admite um atlas consistindo de duas cartas y,y' é orientável se a interseção $U \cap U'$ de seus domínios é conexo (Definição I-3.2).

Já que $\left|\frac{\partial y'}{\partial y}\right|$ não se anula em nenhum ponto no conjunto conexo $U \cap U'$, ele deve portanto conservar seu sinal.

Se $\left|\frac{\partial y'}{\partial y}\right| > 0$ então o atlas dado determina uma orientação em M.

Se $\left|\frac{\partial y'}{\partial y}\right| < 0$ trocamos y' pela carta $y''=(-y'^1, y'^2, \ldots , y'^n)$ e então o atlas y,y'' determina uma orientação em M.

Vimos que um espaço vetorial real admite justamente duas orientações e se ξ é uma delas, denotamos a outra por $-\xi$.

Seja θ; $m \longmapsto \theta_m$ uma orientação global em uma variedade M. Então a função $-\theta$ definida por $m \longmapsto -\theta_m$ é também uma orientação global em M.

Proposição 5.1

Seja θ uma orientação em uma variedade M e seja θ' uma orientação em M com domínio U.

Se U é conexo então θ' é uma restrição ou de θ ou de $-\theta$.

Prova

Seja S o conjunto dos pontos $m \in U$ para os quais $\theta'_m = \theta_m$, onde θ'_m e θ_m são orientações em $T_m M$.

Seja $s \in S$.

As funções θ e θ' são determinadas em vizinhanças V,V' de s por paralelizações X_i, X'_i (i=1, ... , n) respectivamente.

Em $V \cap V'$

$$X'_j = \sum A^i_j X_i \text{ , onde } \det \left[A^i_j\right] : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função diferenciável tal que $(\det A)s > 0$.

Como $\det A > 0$ em alguma vizinhança de s então $\theta = \theta'$ nesta vizinhança. Consequentemente S é um subconjunto aberto de M e portanto do subespaço U.

O conjunto U-S é o conjunto dos pontos $m \in U$ para os quais $\theta'_m = -\theta_m$ e o mesmo argumento mostra que ele é um conjunto aberto em U.

Como U é conexo, S é ou o conjunto vazio ou é U. Consequentemente θ^* é uma restrição ou de $-\theta$ ou de θ.

Proposição 5.2

Uma variedade orientável conexa admite justamente duas orientações.

Prova

Basta tomar U=M na proposição 5.1.

A proposição seguinte dá uma condição necessária / útil para orientabilidade.

Proposição 5.3

Se x e y são duas cartas de uma variedade orientável M cujos domínios U, V são conexos, e $U \cap V \neq \emptyset$ então $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ tem um sinal constante em $U \cap V$.

Prova

As paralelizações $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ determinam orientações $\emptyset$, Ψ em U e V respectivamente.

A proposição 5.1 mostra que podemos escolher uma orientação θ em M tal que $\emptyset = \theta$ em U e também $\Psi = \theta$ ou $\Psi = -\theta$ em V. Portanto $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| > 0$ ou $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| < 0$ $U \cap V$.

Exemplo 5.5

A fita de Moebius não é orientável.

O grupo aditivo dos inteiros Z age livremente e descontinuamente como um grupo de transformação (Def. I-4.12) em $\mathbb{R}^2$ se sua ação é determinada pela função global.

$\Phi: \mathbb{R}^2 \times Z \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$((z_1, z_2), n) \longmapsto (z_1 + n, (-1)^n z_2)$$

Assim, as transformaçoes $\phi_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(z_1, z_2) \longmapsto \Phi((z_1, z_2), n)$ formam um grupo gerado pela única transformação

$$(z_1, z_2) \longmapsto (z_1 + 1, -z_2)$$

Neste caso vamos mostrar que $\mathbb{R}^2/Z$ tem a estrutura de uma variedade quociente (Def. I-4.10) de dimensão dois e que não é orientável.

Consideramos a sobrejeção natural $\mu: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/Z$ μ é injetiva nos conjuntos abertos U_1, U_2 consistindo dos pontos $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ para os quais:

$$0 < z_1 < 1 \quad , \quad -\frac{1}{2} < z_1 < \frac{1}{2}$$

Usando a carta identidade x em $\mathbb{R}^2$ temos então cartas $y_i = (\mu | U_i)^{-1}$, $(i=1,2)$, com domínios $V_i = \mu U_i$ as quais formam um atlas de $\mathbb{R}^2/Z$ em $\mathbb{R}^2$.

Portanto $V_1 \cap V_2$ tem duas componentes conexas W_1, W_2 que são as imagens sob μ dos conjuntos de pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < z_1 < \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < z_1 < 1$$

A mudança de coordenadas $y_2 \circ y_1^{-1}$ em y_1W_1 é dada por $(z_1,z_2) \longmapsto (z1,z2)$ e ela surge da transformação ϕ_0.

$$(0,1) \xrightarrow{y_1^{-1}} (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \xrightarrow{y_2} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Em y_1W_1 : $(0, \frac{1}{2}) \xrightarrow{y_1^{-1}} (1,\frac{3}{2}) \xmapsto{y_2} (0, \frac{1}{2})$

Segue que

$$\left|\frac{\partial y1}{\partial y2}\right| = 1$$

A mudança de coordenadas em y_1W_2 é dada por

(z_1,z_2) ______ (z_1-1,z_2) e ela nasce da transformação ϕ_{-1}

$$(\frac{1}{2}, 1) \xmapsto{y^{-1}} (\frac{3}{2}, 2) \xmapsto{y_2} (-\frac{1}{2}, 0)$$

Então $\left|\frac{\partial y_1}{\partial y_2}\right| = -1$

Como V_1 e V_2 são conexos e $\left|\frac{\partial y_1}{\partial y_2}\right|$ não tem um sinal constante em $V_1 \cap V_2$ segue pela proposição 5.3 que a variedade quociente $\mathbb{R}^2/_Z$, chamada fita de Moebius, não é orientável.

CAPÍTULO III

1. Conexões lineares em uma variedade diferenciável

Descrevemos primeiramente, o caso particular de uma conexão em $\mathbb{R}^n$.

Se X_m é um vetor tangente em $\mathbb{R}^n$ e se f é uma função real C^∞ em uma vizinhança de m, definimos

$X_m f = X_m \cdot (\nabla f)_m$ onde ∇f é o campo de vetores gradiente da f.

Então:

$$Xf = X.\nabla f = a_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

e Xf é a derivada direcional da f na direção de X.

Quando $a_1, \ldots, a_n$ são funções C^∞ em $\mathbb{R}^n$ (possivelmente funções constantes) então X é um campo de vetores C^∞ e Xf é uma função C^∞ com valores reais em $\mathbb{R}^n$([6]).

Seja X um vetor em $p \in \mathbb{R}^n$ e $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ um campo C^∞ sobre p, assim cada y_i é uma função de valores reais no domínio de Y que contém p.

Definimos a <u>derivada covariante</u> de Y na direção de X, ou <u>conexão</u> em $\mathbb{R}^n$ como sendo o vetor em p,

$$\nabla_X Y = (X_p y_1, \ldots, X_p y_n)$$

Se X e Y são campos C^∞ com o mesmo domínio A então $\nabla_X Y$ é um campo de vetores com domínio A e seu colchete de Lie $[X,Y]$ é um campo de vetores C^∞ em A, definido por ([6])

$$[X,Y]_p f = X_p\,(Yf) - Y_p(Xf)$$

Neste trabalho, um vetor tangente de uma variedade M em um ponto m foi definido como sendo uma derivação

$v : \mathcal{F}(m) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathcal{F}(m)$ é o conjunto de funções diferenciáveis com valores reais, cujos domínios incluem m.

Neste capítulo introduziremos uma operação semelhante em campos de vetores.

<u>Definição 1.1</u>

Denotemos por $\mathcal{F}^1(m)$ o conjunto de campos de vetores em M, cujos domínios incluem um ponto m.

Este conjunto tem estrutura $\mathbb{R}$-linear, já que se X, Y são campos de vetores em M e se α, β são funções diferenciáveis reais em M, a função $\alpha X+\beta Y$ definida na interseção dos domínios de X e Y por

$m \longmapsto (\alpha m)(Xm)+(\beta m)(Ym)$ é uma secção de π.

Como α e β são funções diferenciáveis, $\alpha X+\beta Y$ é um / campo de vetores em M e satisfaz as condições (i),(ii) da definição II-2.1.

Uma <u>conexão linear</u> em m é uma função que associa a cada $v \in T_m M$ uma função $\mathbb{R}$-linear

$\nabla_v : \mathcal{F}^1(m) \longrightarrow T_m M$, tal que se $w \in T_m M$, a e b $\in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(m)$ e $Y \in \mathcal{F}^1(m)$, então

(i) $\nabla_{a\nu+bw} = a\,\nabla_{\nu} + b\nabla_{w}$ e

(ii) $\nabla_{\nu}(fY) = (fm)\nabla_{\nu}Y + (\nu f)Y_m$

Desde que ∇_{ν} é $\mathbb{R}$-linear temos a

Proposição 1.1

Se os campos de vetores $Y, W \in \mathcal{J}^1(m)$ concordam em alguma vizinhança de m então

$$\nabla_{\nu}Y = \nabla_{\nu}W$$

Prova

Seja U uma vizinhança de m tal que

$$Y|U = W|U.$$

Então, já que X-X|U é a função zero e ∇_{ν} é linear, segue que

$$\begin{aligned}\nabla_{\nu}X - \nabla_{\nu}(X|U) &= \nabla_{\nu}(X-X|U)\\ &= \nabla_{\nu}(0\{X-X|U\})\\ &= 0\nabla_{\nu}(X-X|U)=0\end{aligned}$$

De modo análogo

$$\nabla_{\nu}W - \nabla_{\nu}(W\,|\,U)=0$$

Segue que

$$\nabla_{\nu}X = \nabla_{\nu}(X|U) = \nabla_{\nu}(W|U) = \nabla_{\nu}W$$

Definição 1.2

Uma conexão linear em M é uma função ∇ que associa a cada ponto de seu domínio uma conexão linear $\nabla_{(m)}$ em m tal que se X,Y são campos de vetores em M então a função

$$\nabla_X Y : m \longrightarrow \nabla_{(m)X_m}Y$$

é um campo de vetores na interseção dos domínios de X,Y e ∇.

Segue por esta definição e pela proposição 1.1 , que se ∇ é uma conexão linear em M, com domínio U e se os campos de vetores X e Y concordam respectivamente com os campos de vetores X' e Y' em algum subconjunto aberto V de M então temos a igualdade de campos de vetores

$$\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y' \text{ em } U \cap V.$$

Seja $\mathcal{J}^1_U$ o conjunto de todos os campos de vetores em M cujos domínios encontram um subconjunto aberto U de M.

Se ∇ é uma conexão linear em M com domínio U e se $X \in \mathcal{J}^1_U$, a função

$$\nabla_X : \mathcal{J}^1_U \longrightarrow \mathcal{J}^1_U$$ é uma função $\mathbb{R}$-linear

com as seguintes propriedades:

Se $Y \in \mathcal{J}^1_U$ e $f,g \in \mathcal{J}_U$ então,

(i) O domínio de $\nabla_X Y$ é a interseção dos domínios X, Y e ∇.

(ii) $\nabla_{fX+gY} = f\,\nabla_X + g\,\nabla_Y$

(iii) $\nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + (Xf)Y$

onde em cada caso os domínios das funções envolvidas não são vazios.

Vamos usar estas propriedades para caracterizar uma conexão linear.

Proposição 1.2

Uma função $\mathbb{R}$-linear $\nabla_X : \mathcal{J}^1_U \longrightarrow \mathcal{J}^1_U$ definida para cada $X \in \mathcal{J}^1_U$ que satisfaz as propriedades (i), (ii), (iii), surge de uma única conexão linear em M com domínio U.

Prova

Seja m um ponto de U e ν um vetor de T_mM.

Seja Z um campo de vetores tal que $Zm = \nu$. Definimos

$\nabla_{(m)\nu} : \mathcal{J}^1(m) \longrightarrow T_mM$ como sendo a função

$$Y \longmapsto (\nabla_Z Y)m = \nabla_{(m)Zm} Y = \nabla_{(m)\nu} Y$$

Isto independe da escolha de Z, pois pela propriedade (ii) implica que se $Zm = Z'm$,

$$\nabla_{1z+(-1)z'} = 1\nabla_z - 1\,\nabla_{z'} = 0 \text{ e então}$$

$$(\nabla_z Y)m = (\nabla_{z'} Y)m$$

Se X,Y são campos de vetores em M, a função

$m \longmapsto \nabla_{(m)Xm} Y$ é o campo de vetores $\nabla_X Y$

e assim $m \longmapsto \nabla_{(m)}$ é uma conexão linear em M com domínio U.

Exemplo 1.1

Com qualquer carta x de M com domínio U, podemos associar uma conexão linear em M com domínio U.

Se A, B são campos de vetores em M e se $B = b^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ em U, definimos

$$\nabla_A B = (A\, b^h) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Vejamos que ∇_A satisfaz as condições da proposição 1.2.

(i) É decorrência da definição de ∇_A

$$\text{(ii)} \quad \nabla_{fA+gB} B = \sum \left[(fA+gB)b^h\right] \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= \sum (fA)b^h \frac{\partial}{\partial x^h} + \sum (gB)b^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= f\sum (Ab^h) \frac{\partial}{\partial x^h} + g\sum (B\, b^h) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= f\, \nabla_A B + g\, \nabla_B B$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla_A(fB) = \sum \left[A(fb^h)\right] \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= \sum \left[f(Ab^h) + (Af)b^h\right] \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= f\sum (Ab^h)\ \frac{\partial}{\partial x^h} + Af\sum b^h\ \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$= f\ \nabla_A B\ +\ (Af)\ B$$

. Exemplo 1.2

Uma conexão linear pode ser definida em qualquer variedade paralelizável M (Def II-3.3) escolhendo uma paralelização global $X_1, \ldots, X_n$. Neste caso se B é um campo de vetores em M, ele pode ser expresso unicamente como $B=\sum b^h X_h$ e definimos

$$\nabla_A\ B = \sum (Ab^h) X_h$$

2 - Curvatura e torsão de uma conexão linear

Se ∇ é a conexão linear canônica em $\mathbb{R}^n$ (associada com a carta identidade) e se X, Y são campos de vetores em $\mathbb{R}^n$, então (III-1),

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

Mas em geral isto não é verdadeiro. Surge então a definição:

Definição 2.1

Seja ∇ uma conexão linear em uma variedade M.

Dados os campos de vetores X,Y em M então temos um campo de vetores

$T\ (X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ na interseção de seus domínios.

A função

$$\mathcal{J}^1_M \times \mathcal{J}^1_M \longmapsto \mathcal{J}^1_M$$ definida por

$(X,Y) \longmapsto T\,(X,Y)$ é $\mathcal{J}_M$-bilinear e é chamada <u>forma de torsão da conexão ∇</u>.

<u>Proposição 2.1</u>

Os campos de vetores $T(X,Y)$ e $T(X'Y')$ concordam em um ponto m se X e Y concordam respectivamente com X' e Y' em m.

<u>Prova</u>

Seja x uma carta de M cujo domínio U inclui <u>m</u> e suponhamos que

$$X \mid U = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad Y \mid U = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Usando o mesmo argumento na prova da proposição II-2.2 podemos mostrar que:

$$T(X,Y) \mid U = T(X \mid U, Y \mid U)$$

Como T é $\mathcal{J}_M$-bilinear segue que:

$$T(X,Y) \mid U = \sum_{i,j} X^i\, Y^j\, T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$T(X',Y') \mid U = \sum_{i,j} X'^i\, Y'^j\, T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Então como X e Y concordam respectivamente com X' e Y', T(X,Y) e T(X',Y') também concordam em m.

Definição 2.2

Suponha ∇ uma conexão linear em M.

Os coeficientes de ∇ associados a uma carta x de M são as funções diferenciáveis

$\Gamma^h_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i,j,h = 1, \ldots ,n)$ definidas no domínio de x pelas equações.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Como $\left[\frac{\partial}{\partial x^i} , \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ desde que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i} , \frac{\partial}{\partial x^j}\right] f = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0,$$

Então:

$$T \left(\frac{\partial}{\partial x^i} , \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

ou seja:

$$T \left(\frac{\partial}{\partial x^i} , \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum (\Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Como consequência temos a seguinte

Definição 2.3

Pela equação acima, concluimos que ∇ tem torsão zero se é só se seus coeficientes são simétricos nos seus índices. Uma tal conexão é chamada conexão simétrica.

Se ∇ é a conexão linear canônica em $\mathbb{R}^n$ e X, Y, Z são campos de vetores em $\mathbb{R}^n$, então

$$\nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]} Z \qquad ([6])$$

Mas em geral isto não é verdadeiro. Surge então a definição:

Definição 2.4

Suponha que ∇ é uma conexão linear em uma variedade M. Dados os campos de vetores X,Y,Z em M, com interseção de dois quaisquer não vazia, então temos um campo de vetores

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

na interseção se seus domínios.

A função

$$\mathcal{F}^1_M \times \mathcal{F}^1_M \times \mathcal{F}^1_M \longrightarrow \mathcal{F}^1_M \text{ definida por}$$

$$(X,Y,Z) \longmapsto R(X,Y)Z \text{ é } \mathcal{F}_M\text{-trilinear.}$$

Ela é chamada a forma de curvatura para a conexão ∇.

Já que temos uma função $\mathcal{F}_M$-trilinear cujo domínio é a interseção dos domínios de X,Y,Z então usando procedimento análogo da prova da proposição 2.1, podemos mostrar que se X, Y e Z concordam respectivamente com X',Y' e Z' em um ponto m, então R'(X,Y)Z e R'(X',Y')Z' concordam em m.

Exemplo 2.1

A curvatura de uma conexão linear simétrica em M , satisfaz a seguinte identidade de Bianchi

$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y=0$ para todos as triplas de campos de vetores X,Y,Z em M, para os quais o lado à esquerda está definido.

Prova

Uma conexão linear simétrica tem torsão zero , então

$$T(A,B) = \nabla_A B - \nabla_B A - [A,B] = 0$$

Segue que

$$\nabla_A B - \nabla_B A = [A,B]$$

Consequentemente

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = \nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z +$$

$$+ \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_Z(\nabla_X Y) - \nabla_X(\nabla_Z Y) - \nabla_{[Z,X]} Y =$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X -$$

$$- \nabla_{[Z,X]} Y =$$

$$= \nabla_X [Y,Z] + \nabla_Y [Z,X] + \nabla_Z [X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y$$

Mas

$$\nabla_A [B,C] - \nabla_{[B,C]} A = [A,[B,C]]$$. Segue que

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 ,$$

já demonstrado em II-2 (pela propriedade (i) do operador $[X,Y]$)

Exemplo 2.2

A conexão ∇ definida por uma paralelização / $X = (X_1, \ldots , X_n)$ em uma variedade M tem curvatura zero.

Prova

$$R(X_i , X_j)X_k = \nabla_{X_i} (\nabla_{X_j} X_k) - \nabla_{X_j} (\nabla_{X_i} X_k) - \nabla_{[X_i , X_j]} X_k ,$$

$(i,j,k = 1, \ldots ,n)$.

Pela definição dada no exemplo III-1.2 segue que se Y é qualquer campo de vetores em M, então:

$\nabla_Y X_i = 0$. Consequentemente $R(X_i,X_j)X_k=0$ para todo $i,j, k=1, \ldots ,n$.

CAPITULO IV

1 - Equações diferenciais de primeira ordem em uma variedade M.

Definição 1.1

Uma curva c em uma variedade M é uma função diferenciável

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

Cujo domínio J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Dada uma curva c em uma variedade M podemos então definir uma curva $\dot{c}$ em TM com domínio J como segue.

Definição 1.2

Seja t a carta identidade em $\mathbb{R}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ o correspondente campo de vetores em $\mathbb{R}$. Pela proposição II-3.1, a função

$$c_* : T\,\mathbb{R} \longrightarrow TM \text{ é diferenciável.}$$

Segue então que:

$$\dot{c} = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} : \mathbb{R} \longrightarrow TM$$

é uma curva em TM com domínio J e satisfaz a equação

$$\pi \circ \dot{c} = cJ$$

A curva $\dot{c}$ assim definida é chamada o levantamento canônico de c em TM.

Se X é um campo de vetores em M, então

$$\dot{c} = X \circ c$$

é uma <u>equação diferencial de primeira</u> ordem em M.

Uma curva C em M satisfazendo a condição $\dot{c} = X \circ c$, tal que $c0=m$ é chamada uma <u>solução</u> com condição inicial m ou <u>curva integral partindo de m</u> do campo de vetores X.

2 - Existência de curvas integrais

Para mostrar a existência de curvas integrais para algum campo de vetores em uma variedade diferenciável, citaremos primeiro o teorema da existência da teoria clássica de equações diferenciais.

<u>Proposição 2.1</u> ([10]- pág. 215)

Suponha que $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável e que $\underline{a}$ é um ponto em seu domínio.

Existe uma vizinhança V de $\underline{a}$ em $\mathbb{R}^n$ e um intervalo aberto J em $\mathbb{R}$ tal que para algum ponto $z \in V$, existe uma única curva C em $\mathbb{R}^n$ com domínio J partindo de z tal que:

$$\frac{dC^i}{dt} = f^i\,(C^1, C^2, \ldots, C^n)\ , \quad i=1, \ldots, n$$

Se denotarmos esta curva por C_z, a função

$$\emptyset : J \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definida em } J \times V \text{ por}$$

$$(s,z) \longmapsto C_z s \quad , \text{ é diferenciável.}$$

Podemos então enunciar uma propriedade local fundamental de curvas integrais.

Proposição 2.2

Suponhamos que X é um campo de vetores em uma variedade M e que m_0 seja um ponto de M.

Existe uma vizinhança V_0 de m_0 e um intervalo aberto J_0 de $\mathbb{R}$ tal que existe uma curva integral de X com domínio J_0 partindo de qualquer ponto dado m de V_0.

Qualquer curva integral com domínio J_0 partindo de m deve coincidir com esta curva em alguma vizinhança de 0.

Prova

Seja x uma carta de M cujo domínio U inclui m_0 e suponhamos que

$$X \mid U = \sum f^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável em xU.

Na proposição 2.1, seja $a = xm_0$. Então existe uma vizinhança $V_0 = x^{-1}V$ de m_0 em M e um intervalo aberto $J_0 = J$ de $\mathbb{R}$ tal que existe uma única curva $c = x^{-1} \circ C$ com domínio J_0 partindo de um ponto $m \in V_0$.

A curva $c = x^{-1} \circ C$ é uma curva integral de X já que (ver diagrama abaixo)

$$X \mid U \circ c = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e}$$

$$c0 = (x^{-1}_{\circ} C_{xm})\, 0 = x^{-1} C_{xm} 0 = x^{-1} xm = m$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial t}"'] \arrow[dr, "c_* \circ \frac{\partial}{\partial t}"] & M \arrow[d, "X"] \\ T\mathbb{R} \arrow[r, "c_*"] & TM \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "t"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "x^{-1}"] & M \arrow[d, "X"] \\ \mathbb{R} \arrow[rr, "X \circ (x^{-1} \circ C)"] & & TM \end{tikzcd}$$

Antes de apresentarmos alguns exemplos, veremos como encontrar uma solução ou uma curva integral c de X, cuja imagem cJ intercepta o domínio U de uma carta x de M.

Seja x uma carta de M, cujo domínio U intercepta cJ e seja $C = x \circ c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com domínio J.

$$\dot{c} = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} : \mathbb{R} \longrightarrow TM$$

onde t é a carta identidade em $\mathbb{R}$, $c : \mathbb{R} \longrightarrow TM$ é uma função diferenciável, portanto segue pelo Capítulo I-4 que se $s \in C^{-1}U$

$$\dot{c}s = \sum \left(\frac{dC^i}{dt}\right)_s \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{cs}$$

Pela definição II-3.1 cada vetor $v \in \pi^{-1}U$ pode ser representado unicamente como $\sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$ onde $a = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos então que no domínio U da carta x

$$X = \sum f^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

função diferenciável em x U.

Então se c é uma curva integral de X

$$\frac{dC^i}{dt} = f^i(C^1, \ldots, C^n)$$

Qualquer curva cuja imagem está em U pode ser encontrada resolvendo este conjunto de equações.

Exemplo 2.1

Seja o campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ definido em termos da carta identidade x por

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Portanto $f^1(x^1,x^2) = x^1$

$$f^2(x^1,x^2) = x^2$$

e $f^1(C^1,C^2) = C^1$

$$f^2(C^1,C^2) = C^2$$

A curva $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$c=(C^1,C^2)$ é uma curva integral de X se e só se:

$$\frac{dC^1}{dt} = f^1(C^1,C^2) = C^1$$

$$\frac{dC^2}{dt} = f^2(C^1,C^2) = C^2$$

Segue que

$$\frac{dC^1}{C^1} = dt$$

$$\ln C^1 = t + A_1$$

$$C^1 = \exp\,(t + A_1)$$

$$C^1 = (\exp\,t\,)(\exp\,A_1)$$

$$C^1 = A\,(\exp\,t)$$

e $$C^2 = B\,(\exp\,t)$$

Assim existe uma curva integral com domínio $\mathbb{R}$

$c = (a(\exp\,t)\ ,\ b(\exp\,t))$ partindo de algum ponto dado (a,b) de $\mathbb{R}^2$ já que $c\,0=(a,b)$.

O campo de vetores no ponto $(0,0)$ é o campo de veto- res zero, portanto a curva integral partindo de $(0,0)$ é uma constante. Existe exatamente uma curva, partindo de qualquer ponto, cujo domínio é todo o conjunto $\mathbb{R}$.

veto

Definição 2.1

Seja m um ponto do domínio de um campo de vetores X de M. Se $Xm = 0$, m é chamado um ponto crítico do campo de vetores X.

Definição 2.2

Seja X um campo de vetores em uma variedade M. Se o domínio das curvas integrais de X, partindo de um ponto dado m é todo o $\mathbb{R}$, X é chamado campo de vetores completo.

Exemplo 2.2

Seja o campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ definido em termos da carta identidade x por

$$X = (\exp\,x^1)^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x^1}$$

A curva $c = (C^1, C^2)$ é uma curva integral de X se e só se

$$\frac{dC^1}{dt} = (\exp C^1)^{-1} \quad , \quad \frac{dC^2}{dt} = 0$$

Existe tal curva e ela é

$c = (\log (t + \exp), b)$ partindo de qualquer ponto dado (a,b) de $\mathbb{R}^2$ cujo domínio é o intervalo aberto $(-\exp a, \infty)$ e portanto o campo de vetores não é completo.

Não existe ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que o campo de vetores seja zero e portanto o campo de vetores não tem pontos críticos,

Exemplo 2.3

Sejam x,y as cartas com domínios U,V do atlas estereográfico em S^2.

Os campos de vetores

$$(x^1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{em } U$$

$$(-y^1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y^1} + (y^1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y^2} \quad \text{em } V$$

concordam na interseção $U \cap V$ de seus domínios e assim, juntamente, eles definem um campo de vetores X em S^2.

Os pontos críticos de X são os pontos $(0,0,\pm 1)$ de $\mathbb{R}^3$ e assim a imagem de cada curva integral não-constante está em $U \cap V$. Uma tal curva c é definida por $x \circ c = (C^1, C^2)$ onde

$$\frac{dC^1}{dt} = C^1 - C^2 \quad , \quad \frac{dC^2}{dt} = C^1 + C^2$$

Segue que

$$x \circ c = (a\cos(t+b)\exp t, a \operatorname{sen}(t+b)\exp t)$$

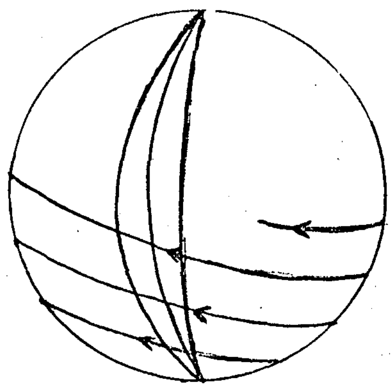
onde os números reais a,b são determinados unicamente pela condição que $c0$ é um ponto escolhido de $U \cap V$. O domínio de cada curva integral é $\mathbb{R}$ e portanto o campo de vetores X é completo. (definição 2.2).

Vejamos que

A imagem da projeção $x \circ c$ de uma curva integral não-constante c em S^2 do ponto (0,0,1) sobre o plano $z_3=0$ é uma espiral equiangular ou seja, ela corta as linhas do plano que passam pelo ponto (0,0,0) em um ângulo fixo.

Notemos que a projeção estereográfica é uma aplicação conforme ([2]).

Em particular a imagem de c toca os círculos máximos de S^2, através de $(0,0,\pm 1)$ em um ângulo fixo (Veja figura):



Usando as cartas x e y do atlas estereográfico em S^2 também os campos de vetores

$$(ax^1 - bx^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + (bx^1 + ax^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$(-ay^1 - by^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + (by^1 - ay^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

onde a,b são números reais, conjuntamente, definem um campo de vetores em S^2.

Veremos que qualquer campo de vetores em S^2 é completo.

Esta afirmação será justificada na secção seguinte desde que S^2 é uma variedade de Hausdorff compacta.

3 - Curvas integrais máximas

Apresentamos agora, algumas propriedades de campos de vetores em uma variedade de Hausdorff. Poderemos então caracterizar uma curva integral máxima partindo de um ponto m.

Definição 3.1

Se $\emptyset : M \longrightarrow M'$ é uma função diferenciável global, então os campos de vetores X,X' em M,M' respectivamente são $\emptyset$ - relacionados se

$$\emptyset_* \circ X = X' \circ \emptyset$$

Definição 3.2

Um campo de vetores em uma variedade M é invariante sob uma transformação $\emptyset$ de M, se X é $\emptyset$ - relacionado com ele mesmo, isto é,

$$\emptyset_* \circ X = X \circ \emptyset$$

Lema 3.1

Seja c uma curva integral com domínio J de um cam po de vetores X.

Se s é um ponto de J e $\lambda_s : a \longmapsto a + s$ é a correspondente translação em $\mathbb{R}$, a curva $c' = c \circ \lambda_s$ é uma curva integral de X com domínio $J' = \lambda_{-s}J$ partindo de cs.

Prova

Devemos mostrar que $\dot{c}' = X \circ c'$ e $c'0 = cs$

Recordando que

$$\dot{c}' = c'_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \quad , \; c' = c \circ \lambda_s \quad \text{e} \quad \dot{c} = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Segue que

$$c'_* = c_* \circ \lambda_{s*} \quad \text{e} \quad \dot{c}' = c_* \circ \lambda_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Mas o campo de vetores $\frac{\partial}{\partial t}$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $T\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ e λ_s é uma translação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujo domínio é todo o conjunto $\mathbb{R}$; portanto $\frac{\partial}{\partial t}$ é invariante sob uma translação λ_s isto é:

$$\lambda_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \circ \lambda_s$$

Portanto

$$\dot{c}' = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \lambda_s = \dot{c} \circ \lambda_s = X \circ c \circ \lambda_s = X \circ c'.$$

c é uma curva integral de X partindo de $m \in M$, portanto $c0 = m$ e assim seu domínio $J = (a,b)$ deve conter o zero.

$c'0 = (c \circ \lambda_s)\, 0 = c(\lambda_s 0) = cs$ implica que o domínio J' de c' deve conter o zero. Portanto

$$J' = \lambda_{-s} J = \lambda_{-s}(a,b) = (a-s, b-s) \text{ é o domínio de } c' .$$

Proposição 3.1

Seja X um campo de vetores em uma variedade de Hausdorff M (Def. I-3.3).

Se curvas integrais c_1 , c_2 com domínios J_1 , J_2 partem ambas do mesmo ponto de M, elas devem coincidir em $J_1 \cap J_2$.

Prova

Seja S o comjunto de números reais s tal que

$$c_1 s = c_2 s$$

Consideramos $J_1 \cap J_2$ como um subespaço de $\mathbb{R}$, isto é, a sua topologia é a topologia relativa e portanto cada aberto $\tilde{U}$ de $J_1 \cap J_2$ é a interseção de um aberto U em $\mathbb{R}$ com $J_1 \cap J_2$.

Seja um ponto $s \in S$.

Pelo Lema 3.1 , $c'_1 = c_1 \circ \lambda_s$ e $c'_2 = c_2 \circ \lambda_s$ são curvas integrais de X partindo de $c_1 s$ e $c_2 s$.

Como $s \in S$, $c_1 s = c_2 s$.

Segue pela Proposição 2.2 que c'_1 e c'_2 devem coincidir em alguma vizinhança de 0 e assim c_1 e c_2 devem coincidir em alguma vizinhança de s, isto é, dado um $\varepsilon > 0$

$$c'_1 (0 + \varepsilon) = c_1 \circ \lambda_s (0 + \varepsilon) = c_1 (0 + \varepsilon + s) = c_1 (\varepsilon + s)$$

$$c'_2 (0 + \varepsilon) = c'_2 \lambda_s (0 + \varepsilon) = c_2 (\varepsilon + s)$$

Como $c_1(\varepsilon+s) = c_2(\varepsilon+s)$ segue que s tem uma vizinhança inteiramente contida em S, e consequentemente S é um subconjunto aberto de $J_1 \cap J_2$.

Mostraremos que o complementar de S também é aberto em $J_1 \cap J_2$.

Seja r um ponto no complementar de S; então $c_1 r \neq c_2 r$.

Como M é uma variedade de Hausdorff, $c_1 r$ e $c_2 r$ tem vizinhanças disjuntas em M.

c_1 e c_2 são funções contínuas, então em uma vizinhança de r, $c_1 \neq c_2$, portanto esta vizinhança pertence ao complementar de S em $J_1 \cap J_2$. Segue que o complementar de S é aberto em $J_1 \cap J_2$ e assim S é fechado em $J_1 \cap J_2$. Como S contém o ponto 0, ele não é vazio. Consequentemente S deve ser todo o espaço $J_1 \cap J_2$.

A proposição 3.1 não é verdadeira para variedades não -Hausdorff. Isto é ilustrado em

Exemplo 3.1

Seja M o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que consiste do conjunto U de todos os pontos $(z_1, z_2, 0)$ onde z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ e do ponto $(0,0,1)$.

Seja V o conjunto obtido de U substituindo $(0,0,0)$ por $(0,0,1)$.

As cartas x,y de M em $\mathbb{R}^2$ com domínio U, V, definidas por

$$x\,(z_1\,,\,z_2\,,\,0) = (z_1\,,\,z_2)$$

$$y\,(z_1\,,\,z_2\,,\,0) = (z_1\,,\,z_2) \neq 0\;;\; y(0,0,1)=(0,0)$$

determinam uma estrutura C^∞ em M. A mudança de coordenadas correspondente é a função identidade em $\mathbb{R}^2-(0,0)$.

Os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}$ em U e $\frac{\partial}{\partial y^1}$ em V coincidem em $U \cap V$ e assim, conjuntamente, definem um campo de vetores $X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}$ em M.

A curva c_1 em M com domínio $\mathbb{R}$ definida por $c_1 s =$ $=(s-1,0,0)$ é uma curva integral de X partindo de $(-1,0,0)$ já que qualquer curva integral de X é da forma $c=(t+k_1,t+k_2,k_3)$.

A curva c_2 em M com domínio $\mathbb{R}$ definida em $\mathbb{R}$ por $c_2 s=$ $=(s-1,0,0)$ se $s \neq 1$ e $c_2 1 = (0,0,1)$ também é uma curva integral de X partindo de $(-1,0,0)$ pois $c_2 0 = (-1,0,0)$. Mas $c_1 1 = (0,0,0)$ e $c_2 1 = (0,0,1)$.

Portanto estas duas curvas partem do mesmo ponto, mas não coincidem no ponto 1 da interseção de seus domínios.

Definição 3.3

A união dos domínios de todas as curvas integrais de um campo de vetores, que partem de um ponto m de uma variedade de Hausdorff é um intervalo aberto $J(m)$ de $\mathbb{R}$. Pela proposição 3.1 fica definida no intervalo $J(m)$ uma curva integral máxima γ_m partindo de m.

No caso de curvas integrais máximas, o Lema 3.1 pode ser extendido como segue:

Proposição 3.2

Seja γ_m a curva integral máxima partindo de m, de um campo de vetores X em uma variedade de Hausdorff.

Seja s um ponto de $J(m)$.

A curva $\gamma_m \circ \lambda_s$ é a curva integral máxima partindo de $\gamma_m s$ e seu domínio é $\lambda_{-s} J(m)$.

Prova

Se γ_m é a curva integral máxima partindo de m, seu domínio $J(m)$ é a união dos domínios de todas as curvas integrais partindo de m.

Pelo Lema 3.1, $\gamma_m \circ \lambda_s$ é uma curva integral de X com domínio $\lambda_{-s} J(m)$ partindo de $\gamma_m s = m'$, $s \in J(m)$.

Seja $\gamma_{m'}$ a curva integral <u>máxima</u> partindo de $m' = \gamma_m s$, cujo domínio $J(m'$ é a união dos domínios de todas as curvas integrais partindo de $m' = \gamma_m s$.

Como as curvas integrais $\gamma_m \circ \lambda_s$ e $\gamma_{m'}$ partem do mesmo ponto m', elas devem coincidir, pela proposição 3.1, em $\lambda_{-s}\ J(m) \cap J(m')$. Mas $\gamma_{m'}$ é uma curva integral máxima, então

$$\lambda_{-s}\ J(m) \subset J(m')$$

Segue que $-s \in J(m')$ e pelo Lema 3.1

$\gamma_{m'} \circ \lambda_{-s}$ é uma curva integral com domínio $\lambda_s J(m')$ partindo de $\gamma_{m'}(-s) = \gamma_{\gamma_m s}(-s) = m$

As curvas integrais $\gamma_{m'} \circ \lambda_{-s}$ e γ_m partem do mesmo ponto m, então elas devem coincidir em $\lambda_s\ J(m') \cap J(m)$. Como γ_m é uma curva integral <u>máxima</u>, $\lambda_s\ J(m') \subset J(m)$

O domínio de $\gamma_m \circ \lambda_s$ é portanto igual ao domínio $J(m')$ de $\gamma_{m'}$ e assim $\gamma_m \circ \lambda_s = \gamma_{m'}$ é uma curva integral máxima partindo de $\gamma_m s = m'$.

<u>Definição 3.4</u>

Um campo de vetores em uma variedade de Hausdorff M é <u>completo</u> se $J(m) = \mathbb{R}$ para cada ponto $m \in M$.

Definição 3.5

Uma variedade M é compacta se, com sua topologia induzida (def.I-3.1), ela é um espaço topológico compacto.

Proposição 3.3

Um campo de vetores em uma variedade de Hausdorff M é completo se e só se existe uma vizinhança I de 0 em $\mathbb{R}$ tal que cada curva integral máxima está definida em I.

Prova

a) Que a condição é necessária segue da definição 3.1 e da definição 2.2.

b) Para provar que a condição é suficiente, suponhamos que exista a vizinhança I de 0 em $\mathbb{R}$ tal que cada curva integral máxima está definida em I. Então existe um número real positivo ε tal que o domínio de cada curva integral máxima contém o intervalo fechado $[-\varepsilon , \varepsilon]$.
Vamos supor que $J(m) \neq \mathbb{R}$ para algum ponto m e mostraremos que isto leva a uma contradição.

a) Se $J(m)$ tem um menor limitante superior b, segue que $b-\varepsilon \in J(m)$.
Se $m' = \gamma_m(b-\varepsilon)$ segue pela proposição 3.2 que o domínio da curva integral máxima partindo de m' é

$J(m') = \lambda_{-b+\varepsilon} J(m)$ tal que cada elemento de $J(m')$ é menor que ε e $J(m')$ não conterá $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

b) Se $J(m)$ tem um maior limitante inferior $\underline{a}$, consi- consi
deremos $m' = \gamma_m(a+\varepsilon)$. Então

$J(m'') = \lambda_{-a-\varepsilon}J(m)$ tal que cada elemento de $J(m'')$ é maior que ε e $J(m'')$ não conterá $[-\varepsilon\ \varepsilon]$.

Por a) e b) chegamos a uma contradição.

Portanto o domínio de cada curva integral máxima é todo o $\mathbb{R}$.

Esta proposição será usada para provar a seguinte

<u>Proposição 3.4</u>

Cada campo de vetores em uma variedade de Hausdorff <u>compacta</u> M é completo.

<u>Prova</u>

Seja X um campo de vetores em M, então pela proposição 2.2 para cada ponto $m_0 \in M$ existe uma vizinhança V_0 e um intervalo aberto J_0 de $\mathbb{R}$ contendo 0, tal que existe uma curva integral com domínio J_0 partindo de algum ponto de V_0.

M é compacto, então podemos cobrir M com um número finito de tais conjuntos abertos V_0. Então a interseção dos intervalos correspondentes é uma vizinhança I de 0. Como $J(m)$ é a união dos domínios de todas as curvas integrais que partem de m, I está contida em $J(m)$ para cada ponto $m \in M$. Segue que cada curva integral máxima partindo de m está definida em I. Pela proposição 3.3 X é completo.

4 - Fluxo de um campo de vetores

Vimos que em qualquer campo de vetores X de uma variedade de Hausdorff M existe uma curva integral máxima γ_m com domínio $J(m)$ partindo de um ponto $m \in M$.

Definição 4.1

Se D é o conjunto dos pontos (s,m) de $\mathbb{R} \times M$ tal que $s \in J(m)$, a função

$\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ com domínio D definida por

$(s,m) \longmapsto \gamma_m s$ é chamada o <u>fluxo do campo de vetores X</u>.

Vamos mostrar que a curva integral máxima partindo de $\gamma_m s$ é

$$\Phi\,(r+s,m) = \Phi\,(r, \Phi\,(s,m))$$

Sejam $\beta(r) = \Phi\,(r+s,m)$, $\delta\,(r) = \Phi\,(r, \Phi\,(s,m)) =$

$$= \gamma_m\,(r+s) = \gamma_m \circ \lambda_s$$

Como $\Phi\,(s,m) = \gamma_m s$, então

$$\Phi(0,m) = \gamma_m 0 = m$$

$$\beta\,(0) = \Phi\,(0+s,m) = \Phi\,(s,m) = \gamma_m s$$

$$\delta\,(0) = (0, \Phi\,(s,m)) = \Phi\,(0, \gamma_m s) = \gamma_{\gamma_m s} 0 = \gamma_m s$$

Portanto

$$\beta(r) = \delta(r)$$

Como consequência da Proposição 2.1, segue o

Lema 4.1

O fluxo de um campo de vetores em uma variedade de de Hausdorff M é diferenciável em uma vizinhança de $(0,m)$ onde m é um ponto de m.

Esta propriedade local pode ser estendida pela seguinte

Proposição 4.1

O fluxo de um campo de vetores em uma variedade de de Hausdorff é uma função diferenciável.

Prova

Seja S o conjunto dos pontos $s \in J(m_0)$, onde $J(m_0)$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ no qual está definida uma curva integral máxima γ_{m_0} partindo de um ponto $m_0 \in M$.

Seja Φ diferenciável em (s,m_0). Então S é um subconjunto aberto do subespaço $J(m_0)$ de $\mathbb{R}$. Pelo Lema 4.1, S contém 0.

Vamos mostrar que S também é um subconjunto fechado de $J(m_0)$ e portanto $S = J(m_0)$.

Seja $\bar{s}$ um ponto do fecho do subconjunto S de $J(m_0)$. Aplicando o Lema 4.1 ao ponto $(0,m_1)$ onde $m_1 = \Phi(\bar{s}, m_0)$, existe uma vizinhança J de 0 e uma vizinhança V de m_1 tal que Φ é diferenciável em $J \times V$.

Como $\Phi(s,m_0)$ é diferenciável então a curva integral $s \longmapsto \Phi(s,m_0) = \gamma_{m_0} s$ é contínua. Segue que existe uma vizinhança N de $\tilde{s}$ tal que $\Phi(s',m_0) \subset V$, se $s' \in N$.

Podemos escolher s', tal que $\tilde{s} - s' \in J$ e $s' \in S$.

Como $s' \in S$ então a função $f: \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ definida no conjunto D dos pontos (s,m) tal que $s \in J(m)$ por $(s,m) \longmapsto (s-s', \Phi(s',m))$ é diferenciável em $(\tilde{s}, m_0)$.

Como $\tilde{s}-s' \in J$ e $\Phi(s',m_0) \in V$, então pelo Lema 4.1, Φ é diferenciável em $(\tilde{s}-s', \Phi(s',m_0))$.

Pela propriedade de Φ, dada após a definição 4.1

$$
\begin{aligned}
(\Phi \circ f)(\tilde{s}, m_0) = \Phi f(\tilde{s},m_0) &= \Phi(\tilde{s}-s', \Phi(s',m_0)) \\
&= \Phi(\tilde{s}-s'+s', m_0) \\
&= \Phi(\tilde{s},m_0)
\end{aligned}
$$

Segue que Φ é diferenciável em $(\tilde{s},m_0)$ e assim $\tilde{s} \in S$. Portanto S é um subconjunto fechado de $J(m_0)$.

Em seguida descreveremos um exemplo de uma equação diferencial em uma variedade quociente (Def. I-4.10). Para isto precisamos da

<u>Definição 4.2</u>

Se $\phi : M \longrightarrow M'$ é uma função diferenciável global e c é uma curva em uma variedade M, o levantamento canônico da curva $\emptyset \circ c$ em TM' é $\emptyset_* \circ \dot{c}$, onde $\dot{c} = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t}$ é o levantamento canônico em TM (Def. 1.2).

Proposição 4.2

Seja $\emptyset : M \longrightarrow M'$ uma função diferenciável global e X,X' campos de vetores $\emptyset$ - relacionados (Def. 3.1) em M,M' respectivamente.

Se c é uma curva integral de X então $\emptyset \circ c$ é uma curva integral de X'.

Prova

Como X,X' são $\emptyset$ - relacionados então pela definição 3.1

$$\emptyset_* \circ X = X' \circ \emptyset$$

Pela definição 4.2 o levantamento canônico de $\emptyset \circ c$ é $\emptyset_* \circ \dot{c}$.

Devemos mostrar que $\emptyset_* \circ \dot{c} = X' \circ (\emptyset \circ c)$

Se c é uma curva integral de X, então $\dot{c} = X \circ c$. Segue que o levantamento canônico de $\emptyset \circ c$ é

$$\emptyset_* \circ \dot{c} = \emptyset_* \circ (X \circ c) = (\emptyset_* \circ X) \circ c = (X' \circ \emptyset)) \circ c$$

$$= X' \circ (\emptyset \circ c).$$

Definição 4.3

Seja ρ uma relação de equivalência em M. Suponhamos que o conjunto quociente M/ρ admita a estrutura de uma variedade quociente M' (Def. I-4.12) e $\mu : M \longrightarrow M'$ seja a sobrejeção natural.

Um campo de vetores X em M é <u>projetável</u> se a função

$\mu_* \circ X : M \longrightarrow TM'$ é um invariante da relação de equivalência, isto é, $(\mu_* \circ X)m_1 = (\mu_* \circ X)m_2$ se $(m_1, m_2) \in \rho$.

$\mu_* \circ X$ induz uma única função global ([4] - Cap. VI-3), $X' : M' \longrightarrow TM'$ tal que $\mu_* \circ X = X' \circ \mu$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mu \circ X"] \arrow[d] & T\mathbb{R}^2/Z \times Z \\
\mathbb{R}^2/Z \times Z \arrow[ur, dashed, "X'"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\mu_* \circ X$ é diferenciável, então $X' \circ \mu$ é diferenciável. Segue que X' é diferenciável pela Proposição I-4.4.

Já que X' é diferenciável e é uma secção de $\pi' : TM' \longrightarrow M'$ (definição II-1.3), então X' é um campo de vetores em M'. X' é chamado a <u>projeção</u> de X e como $\mu_* \circ X = X' \circ \mu$, eles são μ-relacionados.

Consequentemente se M' é uma variedade quociente de M e $\mu : M \longrightarrow M'$ é a sobrejeção natural, um campo de vetores X é <u>projetável</u> em M' se e só se existe um campo de vetores X' em M' que é μ-relacionado a X.

Na Proposição 4.2, suponhamos que M' é uma variedade quociente de M e $\mu : M \longrightarrow M'$ a sobrejeção natural e consequentemente uma submersão de M em M'. Suponhamos também que X,X' são campos de vetores em M,M', respectivamente, μ-relacionados e portanto X é projetável em M'. Segue que se c é uma curva integrável do campo de vetores projetável X então $\mu \circ c$ é uma curva integral da projeção X' de X.

Exemplo 4.1

$Z \times Z$ age em $\mathbb{R}^2$ como um grupo de transformação descontínuo (Def. I-4.12 e 4.13).

As transformações em $\mathbb{R}^2$ formam um grupo composto pelas transformações $\emptyset_g$, $g \in Z \times Z$ onde para $g=(1,0)$ respectivamente $g=(0,1)$, $\emptyset_g$ opera em $\mathbb{R}^2$ por

$$(z_1 , z_2) \longmapsto (z_1 + 1, z_2) \text{ respectivamente}$$

$$(z_1 , z_2) \longmapsto (z_1 , z_2 + 1)$$

Estas duas transformações geram as restantes $\emptyset_g$ com $g \in Z \times Z$.

Elas determinam uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$.

m_1 , $m_2 \subset \mathbb{R}^2$ são equivalentes se e sõ se $m_2=\emptyset_g m_1$

para algum $g \in Z \times Z$.

$\mathbb{R}^2/Z \times Z$ tem a estrutura de uma variedade quociente de dimensão dois. Vamos obter um atlas que define esta estrutura, considerando a sobrejeção natural

$\mu: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/Z \times Z$ que leva cada ponto de $\mathbb{R}^2$ em suas classes de equivalência.

Sejam U_1 , U_2 , U_3 , U_4 os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ para os quais respectivamente

$$0 < z_1 < 1 \quad , \quad 0 < z_2 < 1$$

$$-\frac{1}{2} < z_1 < \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < z_2 < 1$$

$$0 < z_1 < 1 \quad , \quad -\frac{1}{2} < z_2 < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < z_1 < \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} < z_2 < \frac{1}{2}$$

μ é injetiva nestes abertos.

As cartas $y_i = (\mu/U_i)^{-1}$ com domínios $V_i = \mu U_i$ formam um atlas, o qual define uma estrutura de variedade quociente em $\mathbb{R}^2/Z \times Z$.

Seja o conjunto $\bar{F}$ dos pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \leq z_i \leq 1$, $i=1,2$. Obtemos um espaço topológico homeomórfico a $\mathbb{R}^2/Z \times Z$, identificando pontos equivalentes $(0,z_2)$ e $(1,z_2)$, $(z_1,0)$ e $(z_1,1)$ no bordo de $\bar{F}$

Um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$, definido em termos da carta identidade x por

$$f^1(x^1,x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + f^2(x^1,x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$ é invariante sob ambas as transformações se e só se

$$f^\alpha(x^1+1\ ,\ x^2) = f^\alpha(x^1,x^2) = f^\alpha(x^1,x^2+1);\ (\alpha=1,2).$$

Um campo de vetores, desta espécie, em $\mathbb{R}^2$ é portanto projetável pela definição 4.3.

Vamos mostrar que tal campo de vetores é projetável na variedade quociente $\mathbb{R}^2/Z \times Z$, considerando o campo de vetores

$X = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$, onde a^1 e a^2 são números reais diferentes de zero.

As curvas integrais c de X são definidas em $\mathbb{R}$ por $c=(z_1+a^1t\ ,\ z_2+a^2t)$.

Como X é projetável, então a função

$(\mu_* \circ X) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2/_{Z \times Z}$ induz uma função global(Def.4.3)

$X' : \mathbb{R}^2/_{Z \times Z} \longrightarrow T\,\mathbb{R}^2/_{Z \times Z}$ tal que

$\mu_* \circ X = X' \circ \mu$, e X' é um campo de vetores em $\mathbb{R}^2/_{Z \times Z}$ o qual é a projeção de X.

Segue pela proposição 4.2 que $\mu \circ c$ é uma curva integral da projeção X' de X.

Como $\mu \circ c = \mu \circ (z_1 + a^1t,\ z_2 + a^2t)$, então 7

$(\mu \circ c)0 = \mu(z_1\ ,\ z_2)$ determinam as curvas partindo de um ponto em $\mathbb{R}^2/_{Z \times Z}$.

5 - Equações diferenciáis de segunda ordem em uma variedade M

Vimos que um campo de vetores em uma variedade M, determina uma equação diferencial de primeira ordem em M.

Veremos agora que uma certa classe de campo de vetores em TM determina uma equação diferencial de segunda ordem em M.

Na secção 6, definiremos um tipo especial de equação diferencial de segunda ordem em um campo de vetores em TM, cujas soluções são as geodésicas deste campo de vetores.

Se S é uma superfície de dimensão n contida em $\mathbb{R}^{n+1}$, uma geodésica é uma curva que prossegue reta na superfície, isto é, uma geodésica não tem componente de aceleração tangente à superfície ([8]).

Os campos de vetores em TM que estamos interessados, ficarão caracterizados em

Proposição 5.1

Cada curva integral de um campo de vetores ξ em TM é o levantamento canônico de uma curva em M se e só se

$\pi_* \circ \xi$ é a função identidade em TM.

$$TM \xrightarrow{\xi} T(TM) \xrightarrow{\pi_*} TM$$

Prova

Uma curva k em TM é o levantamento canônico de uma curva c em M se e só se (definição 1.2)

$$k = \dot{c} = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} : \mathbb{R} \longrightarrow TM$$

Segue que k é o levantamento canônico de uma curva em M se e só se

$$k = (\pi \circ k)_* \circ \frac{\partial}{\partial t} = \pi_* \circ k_* \circ \frac{\partial}{\partial t} = \pi_* \circ \dot{k}$$

Isto é visto em

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "\pi \circ k"'] & TM \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd} \text{, então}$$

$$\pi_{*} \circ k_{*} = (\pi \circ k)_{*} : T\,\mathbb{R} \longrightarrow TM$$

Consequentemente

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} T\,\mathbb{R} \xrightarrow{k_{*}} T(TM) \xrightarrow{\pi_{*}} TM$$

$$k_{*} \circ \frac{\partial}{\partial t} = \dot{k} \quad \text{e} \quad k = \pi_{*} \circ \dot{k}$$

Portanto cada curva integral de um campo de vetores ξ: $TM \longrightarrow T(TM)$ é um levantamento canônico de uma curva em M se e só se

$k = \pi_{*} \circ \xi \circ k$ para todas as curvas integrais k.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{k} TM \xrightarrow{\xi} T(TM) \xrightarrow{\pi_{*}} TM$$

Desde que existe uma curva integral partindo de algum ponto v de TM, então

$k0 = v$, e assim $k = \pi_{*} \circ \xi \circ k$ se e só se

$k0 = (\pi_{*} \circ \xi \circ k)\, 0 = v$

Segue que

$k0 = \pi_{*}\,(\xi(k0)) = v$

$= \pi_{*}\,(\xi v) = v$

$= (\pi_{*} \circ \xi)\, v = v$ se e só se

$\pi_{*} \circ \xi$ é a função identidade em TM.

Definição 5.1

Na definição 1.2, $\dot{c}$ é o levantamento canônico em TM de uma curva c em M. Representaremos por $\ddot{c}$ o levantamento canônico de $\dot{c}$ em $T(TM)$.

Definição 5.2

Se ξ é um campo de vetores em TM tal que $\pi_* \circ \xi$ é a função identidade em TM, então

$\ddot{c} = \xi \circ \dot{c}$ é uma equação diferencial de segunda ordem em M.

Definição 5.3

Uma curva c em M que satisfaz a condição $\ddot{c} = \xi \circ \dot{c}$ e tal que $\dot{c}\,0 = v$, é chamada uma solução com condição inicial v ou uma curva integral partindo de v do campo de vetores ξ.

6 - Equações diferenciais definidas por um Spray

Pelo Lema 3.1, se c é uma solução de uma equação diferencial $\dot{c} = X \circ c$ então $c \circ \lambda$ também é uma solução, onde $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma translação. Um resultado semelhante é verdadeiro para uma equação diferencial de segunda ordem $\ddot{c} = \xi \circ \dot{c}$, desde que sejam impostas certas condições ao campo de vetores ξ.

Consideremos a mudança de parâmetro $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma

$s \longmapsto \alpha s + \beta \quad , \alpha \neq 0$

A diferencial $\sigma_* : T\,\mathbb{R} \longrightarrow T\,\mathbb{R}$ é determinada por

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s \longmapsto \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\sigma s}$ e assim se $c' = c \circ \sigma$,

$$\dot{c}' = c_* \circ \sigma_* \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Desde que $\frac{\partial}{\partial t}$ é invariante sob uma translação,

$$\dot{c}' = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma = \dot{c} \circ \sigma = \alpha\dot{c} \circ \sigma$$

Consequentemente se $\alpha_* : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ representa a diferencial da função α: $TM \longrightarrow TM$ tal que $v \longmapsto \alpha v$,

$$\ddot{c}' = \dot{c}'_* \circ \frac{\partial}{\partial t} = (\alpha\dot{c} \circ \sigma)_* \circ \frac{\partial}{\partial t} =$$

$$= \alpha_* \circ \dot{c}_* \circ \sigma_* \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Segue que

$$\ddot{c}' = \alpha_* \circ \dot{c}_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma = \alpha_* \circ \ddot{c} \circ \sigma =$$

$$= \alpha\alpha_* \circ \ddot{c} \circ \sigma$$

Portanto se $c' = c \circ \sigma$ é solução da equação diferencial $\ddot{c}' = \xi \circ \dot{c}'$, c' deve satisfazer esta equação ou seja, deve satisfazer a equação

$$\alpha\alpha_* \circ \ddot{c} \circ \sigma = \xi \circ (\alpha\dot{c} \circ \sigma)$$

$$\alpha\alpha_* \circ (\xi \circ \dot{c}) \circ \sigma = \xi \circ (\alpha\dot{c} \circ \sigma)$$

$$\alpha\alpha_* (\xi (\dot{c} \circ \sigma)) = \xi (\alpha(\dot{c} \circ \sigma))$$

Pela definição 1.2 $\dot{c}$ é o levantamento canônico de uma curva c em M, portanto $\dot{c} \circ \sigma$ é o levantamento canônico de $c' = c \circ \sigma$.

Portanto, pela definição 5.3, $c' = c \circ \sigma$ satisfaz a equação $\alpha\alpha_*(\xi(\dot{c} \circ \sigma)) = \xi(\alpha(\dot{c} \circ \sigma))$ se e só se

$$\alpha\alpha_*(\xi v) = \xi(\alpha v)$$

para todo $v \in TM$ e $\alpha \in \mathbb{R}-0$.

Definição 6.1

Um campo de vetores ξ em TM é chamado um spray sobre M se ξ satisfaz as condições $\xi(\alpha v) = \alpha\alpha_*(\xi v)$ e $\pi_*(\xi v) = v$.

As soluções da equação diferencial definidas por um spray são chamadas as geodésicas do spray.

7 - Spray associado a uma conexão linear ∇

Definição 7.1

Um vetor $w \in T(TM)$ é vertical se e só se $\pi_* w = 0$

Definição 7.2

Seja ∇ uma conexão linear em M.

Seja o subespaço n-dimensional H_v de $T_v(TM)$, definido para cada $v \in$ TM, por $H_v = Y_*(T_m M)$, onde $Y \in \mathcal{J}^1(m)$ (definição III-1.1) , tal que

$Ym = v$, $\nabla_z Y=0$ para todo $z \in T_m M$ e a função derivada Y_* leva um vetor tangente em m a um vetor tangente em v.

Estes subespaços são chamados horizontais. Eles não possuem nenhum vetor vertical diferente de zero.

Estes subespaços possuem as seguintes propriedades

(i) $\pi_* H_v = T_{\pi v} M$

(ii) $\alpha_* H_v = H_{\alpha v}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}-0$

Definição 7.3

Se $v \in TM$, temos um isomorfismo do subespaço horizontal H_v em $T_{\pi v}M$ definido por

$$w \longmapsto \pi_* w$$

Consequentemente existe um único vetor horizontal ξ_v em v tal que

$$\pi_* \xi_v = v \quad .$$

A função

$$\xi : v \longmapsto \xi_v \text{ , definida por}$$

$$\xi = \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - \sum_{i,j,k} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi)\, y^i y^k \frac{\partial}{\partial y^i}$$

vamos mostrar, na proposição seguinte, que é um spray sobre M.

Ela é um spray associado a uma conexão linear ∇, chamado spray geodésico.

Suas geodésicas são chamadas as geodésicas da conexão.

Proposição 7.1

A função $\xi : v \longmapsto \xi_v$ é um spray sobre M, onde ξ_v é um vetor horizontal em v tal que $\pi_* \xi_v = v$.

Prova

Seja x uma carta de M com domínio U.

Seja $(\tilde{x},y)$ a corespondente carta padrão de TM, definida em II-3.1.

Suponhamos que no domínio da carta $(\tilde{x},y)$

$$\xi = \sum y^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} + \sum f^i (\tilde{x},y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

onde $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável na imagem de $(\tilde{x},y)$.

Se $\pi v \in U$,

$$\pi_*(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i})_v + = (\frac{\partial}{\partial x^i})_{\pi v} \quad , \quad \pi_*(\frac{\partial}{\partial Y^i})_v = 0, \text{ já que}$$

$(\frac{\partial}{\partial y^i})_v$ é vertical.

Sejam $E_1, \ldots , E_n$ vetores horizontais em $\pi^{-1}U$, definidos por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - \sum_{h,j} y^h (\Gamma^j_{ih} \circ \pi) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$E_1 v, \ldots , E_n v$ formam uma base para H_v se $v \in \pi^{-1}U$.

Segue que

$\pi_* (E_i v) = (\frac{\partial}{\partial x^i})_{\pi v}$ e assim em $\pi^{-1}U$,

$$\xi = \sum_i y^i E_i = \sum y^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - \sum_{i,j,k} (\Gamma^i_{jk} \circ \pi) y^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Portanto ξ é um spray sobre M, já que satisfaz as condições

$$\pi_*(\xi v) = v \quad \text{e} \quad \alpha\alpha_*(\xi v) = \xi(\alpha v)$$

8 - A aplicação exponencial para um spray

Nesta secção suporemos que M é uma variedade de Hausdorff e consequentemente TM também é uma variedade de Hausdorff.

Definição 8.1

O fluxo de um campo de vetores ξ em TM é uma função diferenciável (pela proposição 4.1)

$$\Phi : \mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM, \text{ definida por}$$

$$(s,v) \longmapsto \Phi(s,v) = \gamma_v s$$

onde γ_v é uma curva integral máxima partindo de v.

Lema 8.1

Seja γ_v uma curva integral máxima de um spray ξ.

Se s,z são números reais tais que sz pertence ao domínio $J(v)$ de γ_v, então z pertence ao domínio $J(sv)$ de γ_{sv} e $\gamma_{sv}z = s\,\gamma_v(sz)$.

Prova

Vamos supor $s \neq 0$

Seja γ' uma curva em TM definida por $z \longmapsto s\gamma_v(sz)$.

Seja $\sigma_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$z \longmapsto sz$.

Então:

$$\dot{\gamma}' = (s\gamma_v \circ \sigma_s)_* \circ \frac{\partial}{\partial t} = s\gamma_{v*} \circ \sigma_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Se $s_* : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ é a diferencial da função $s : TM \longrightarrow TM$ definida por $v \longmapsto sv$,

$$\dot{\gamma}' = s_* \circ \gamma_{v*} \circ \sigma_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

Mas $\qquad \sigma_{s*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{sz} = s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{sz} \qquad$ e

$$s\,\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_s)_z = s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{sz}$$

Segue que

$$\sigma_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t} = s\,\frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma_s \quad \text{e então}$$

$$\dot{\gamma}' = s_* \circ \gamma_{v*} \circ s\,\frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma_s$$

Como por hipótise sz pertence ao domínio J(v) de γ_v, então

$$\dot{\gamma}'z = (s_* \circ \gamma_{v*} \circ s \frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma_s) z$$

$$= (s_* \circ \gamma_{v*} \circ s \frac{\partial}{\partial t}) \sigma_s z$$

$$= (s_* \circ \gamma_{v*} \circ s \frac{\partial}{\partial t}) sz$$

$$= (s_* \circ \gamma_{v*}) s (\frac{\partial}{\partial t})_{sz}$$

$$= s_* (\gamma_{v*}(s(\frac{\partial}{\partial t})_{sz})$$

$$= s_* (s\gamma_{v*} (\frac{\partial}{\partial t})_{sz})$$

$$= ss_* (\gamma_{v*} (\frac{\partial}{\partial t})_{sz})$$

Portanto

$$\dot{\gamma}' = ss_* \circ \gamma_{v*} \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \sigma_s$$

$$= ss_* \circ \dot{\gamma}_v \circ \sigma_s$$

Já que, por hipótese γ_v é uma curva integral de TM, $\dot{\gamma}_v = \xi \circ \gamma_v$ e portanto

$$\dot{\gamma}' = ss_* \circ \xi \circ \gamma_v \circ \sigma_s$$

Como ξ é um spray

$$\dot{\gamma}' = \xi \circ \gamma' \quad \text{e} \quad ss_* (\xi v) = \xi(sv)$$

Portanto γ' é uma curva integral de ξ partindo de sv e assim γ' deve concordar com a curva integral máxima γ_{sv}.

Consequentemente

$$\gamma' z = \gamma_{sv} z = s\gamma_v(sz) \quad \text{se} \quad sz \in J(v)$$

Definição 8.2

Seja W o conjunto dos pontos $w \in TM$ tal que $(1,w)$ pertence ao domínio do fluxo Φ de um apray.

W é aberto já que o domínio de Φ é um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times TM$.

W inclui os elementos zero de TM, já que estes são pontos críticos do spray e assim as curvas integrais partindo destes pontos estão definidas em $\mathbb{R}$.

Como W é aberto em TM, temos uma função diferenciável definida em

Definição 8.3

Se m é um ponto de M, T_mM é uma subvariedade de TM (Cap. 0-Def. 12) e assim a injeção natural $j : T_mM \longrightarrow TM$ é diferenciável. Segue que a função $\text{Exp.} \circ j : TM \longrightarrow M$, representada por $\text{Exp}_m : TM \longrightarrow M$ é diferenciável e seu domínio é uma vizinhança do elemento zero em T_mM.

Proposição 8.1

Seja ξ um spray sobre uma variedade de Hausdorff e m é qualquer ponto de M.

Se v é um ponto em T_mM, então Exp_m leva a linha parametrizada $s \longmapsto sv$, $s \in J(v)$ à geodésica em M com condição inicial v.

<u>Prova</u>

. Pelo Lema 8.1, se $s \in J(v)$ então $1 \in J(sv)$ e

$$\gamma_{sv}1 = s\gamma_v s$$

Segue que

$$Exp_m(sv) = \pi(\Phi(1,sv)) = \pi(\gamma_{sv}1) = \pi(\gamma_v s)$$

R E F E R Ê N C I A S

[1] - H A E F L I G E R A. and R E E B, G. Variétés (non separees) à une dimension et structures feuilletées du plan. Enseign. Math. 3(1957)

[2] - A H L F O R S, Lars V. . Complex Analysis. New York, McGraw-Hill, Inc., 1966.

[3] - C H E V A L L E Y, Claude. Theory of Lie groups. Princeton, Princeton University Press, 1946.

[4] - D U G U N D U I, James. Topology., Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1966

[5] - H U S E M O L L E R, Dale. Fibre bundles. New York, McGraw Hill Book Company, 1966.

[6] - H I C K S, Noel J. Notes on differential geometry. London, Van Nostrand Reinhold Company, 1971

[7] - B R I C K E L L, F. and C L A R K, S. Differentiable Manifolds. London, Van Nostrand Reinhold Company Ltd., 1970.

[8] - T H O R P E, J.A. Elementary Topics in Differential Geometry

[9] - M I L N O R, J.W. On manifolds homeomorphic to the 7 - sphere. Annals of mathematics 64, 1956.

[10] - S O T O M A Y O R, Jorge. Lições de equações diferenciais ordinárias. Rio de Janeiro, IMPA, 1979.

[11] - S T E E N R O D, Norman. The topology of fibre bundles. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1951.

[12] - S P I V A K, M. Calculus on manifolds. Barcelona, Editorial Rerverté. S.A., 1975.