Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final p
Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal
Santa Catarina

Prof. WILLIAN GLENN WHITLEY
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. INDER JEET TANEJA, Ph. D.
Orientador

p/ Prof. WALTER DE BONA CASTELAN, Dr.

Prof. RAJAMANI DORAISWAMI, Ph. D.

CARACTERIZAÇÃO DA ENTROPIA PESADA E SUA GENERALIZAÇÃO

ELMAR WATERKEMPER

Fevereiro - 1980

À minha esposa

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Inder Jeet Taneja pela sua orientação segura e pelo seu apoio, estímulo e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, um agradecimento especial pelo valioso auxílio prestado.

Estendo meus agradecimentos à Universidade Estadual de Maringá.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho, uma Caracterização da Entropia Pesada, onde mostramos que os axiomas de Continuidade, Simetria, Expansibilidade, Aditividade Forte, Normalidade e Decisividade determinam unicamente a função Entropia Pesada; depois, da mesma forma, apresentamos uma Caracterização da Entropia Pesada de Grau β; e, finalmente generalizamos essa Caracterização, substituindo, no axioma de Recursividade, p_k ou p_k^β por uma função geral contínua $f(p)$.

ABSTRACT

We present in this work, a characterization of Weighted Entropy by considering certain axioms viz., Continuity, Simmetry, Expansibility, Strong Additivity, Normality and Decisivity; later in the same way, we present a characterization of Weighted Entropy of Degree β and finally, we generalize this characterization by replacing p_k or p_k^β in the Recursive axiom by a general continuous function $f(p)$.

ÍNDICE

	p.
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I	2
1.1 - Introdução	2
1.2 - Processos de Comunicação	2
1.3 - Medida da Incerteza	4
1.4 - Entropia de Shannon	5
1.5 - Entropia Pesada	8
1.6 - Propriedades da Entropia Pesada	8
1.7 - Caracterização da Entropia Pesada	11
CAPÍTULO II	23
2.1 - Teorema da Inversão	23
2.2 - Uma Caracterização da Entropia Pesada	30
2.3 - Uma Caracterização da Entropia Pesada de Grau β	36
2.4 - Caracterização Generalizada da Entropia Pesada	45
BIBLIOGRAFIA	59

INTRODUÇÃO

Com o presente trabalho temos por objetivo apresentar uma Caracterização da Entropia Pesada e sua Generalização.

Apresentamos inicialmente, no Capítulo I, as noções fundamentais da Medida de Incerteza ou Entropia de Shannon, onde utilizamos extensivamente os conceitos apresentados por J. Aczél e Z. Daróczy ([1]). A seguir apresentamos a definição, algumas propriedades e uma Caracterização da Entropia Pesada, desenvolvida por S. Guiaşu ([5]).

No Capítulo II apresentamos o nosso trabalho, onde, inicialmente desenvolvemos o Teorema da Inversão para a Entropia Pesada e uma Proposição, na qual mostramos a validade do axioma de Recursividade. Apresentamos depois uma Caracterização da Entropia Pesada e, a seguir, com a substituição de p_K por p_K^β no axioma de Recursividade, apresentamos uma Caracterização da Entropia Pesada de Grau β. Finalmente generalizamos esta Caracterização substituindo p_K ou p_K^β por uma função geral contínua $f(p)$.

CAPÍTULO I

1.1 - Introdução

Teoria da Informação é um novo ramo da teoria da probabilidade, com um grande potencial de aplicações nos sistemas de comunicações. Como muitos outros ramos da matemática, teoria da informação teve uma origem física. Ela foi iniciada por cientistas da comunicação que estudavam a estrutura estatística de equipamentos elétricos de comunicações.

A teoria da informação teve origem principalmente com Claude Shannon em 1948, através de duas notáveis contribuições para a teoria matemática da comunicação. Elas foram seguidas por uma grande quantidade de trabalhos de pesquisa, especulando sobre as possíveis aplicações da nova teoria, para muitas áreas de pesquisa, tais como matemática pura, psicologia, semântica, biologia, rádio, televisão e radar.

1.2 - Processos de Comunicação

Os processos de comunicação estão ligados a um fluxo de alguma forma de informação transmitida em qualquer aparato que se destina a transmitir mensagem. Estes aparatos não necessitam ser palpáveis; como por exemplo, o processo pelo qual uma mente afeta outra mente é um processo de comunicação. O envio de uma mensagem por telégrafo, rádio, televisão, a comunicação visual de um artista ao modelo, ou qualquer outro meio pelo qual alguma informação é enviada de um transmissor a um receptor, são sistemas de comunicação.

Um sistema de comunicação envolve, pelo menos, três partes essenciais:

a) transmissor ou fonte
b) canal ou rede de transmissão
c) receptor

$$\boxed{\text{Fonte}} \longrightarrow \boxed{\text{Canal}} \longrightarrow \boxed{\text{Receptor}}$$

Fig. 1.1

Um sistema de comunicação contendo somente estes três elementos é o mais simples que se pode visualizar. Em geral, nos casos práticos, os sistemas de comunicação consistem de fontes, receptores e redes de transmissão mais complexas, tais como:

$$\boxed{\text{Fonte}} \rightarrow \boxed{\text{Codificador}} \rightarrow \boxed{\text{Canal}} \rightarrow \boxed{\text{Decodificiador}} \rightarrow \boxed{\text{Receptor}}$$

Fig. 1.2

onde:

Fonte: é o componente do sistema que é capaz de produzir mensagens;
Codificador: é o componente que transforma a mensagem da linguagem da fonte para a linguagem do canal, sem alterar o conteúdo da informação;
Canal: é o meio através do qual a mensagem é propagada;
Decodificador: é o componente que transforma a mensagem da linguagem do canal para a linguagem do receptor, sem alterar o conteúdo da informação;
Receptor: é o ponto de destino da mensagem.

Os sistemas de comunicação aqui considerados são de natureza estatística, isto é, o comportamento dos sistemas nunca pode ser descrito de uma forma determinística, ele sempre é dado em termos estatísticos. Uma fonte é um aparato que seleciona e transmite seqüências de símbolos ao acaso, embora esta seleção possa ser baseada em alguma regra estatística.

Uma nova aplicação de um modelo de sistema de comunicação como o da Fig. 1.2, foi feita por Wiener e Shannon em suas discussões sobre a natureza estatística da comunicação de mensagens. Eles notaram que um rádio, televisão, teletipo, etc., relacionavam seqüências de mensagens ao acaso, de um alfabeto conhecido mas com probabilidades especificadas. Portanto, em tais modelos de comunicação, a fonte, o codificador, o canal, o decodificador e o receptor devem ser estatisticamente definidos.

1.3 - Medida da Incerteza

De uma forma intuitiva, o conceito de incerteza associada a um evento, está ligado à surpresa maior ou menor que pode nos causar a ocorrência do mesmo. Pode-se dizer que a Medida da Incerteza de um evento comporta-se de forma inversa em relação a sua probabilidade.

Uma notação para este fato pode ser

$$I = I\left(\frac{1}{p}\right)$$

ou, como é mais conhecido,

$$I = h(p)$$

sendo h a função que transforma a probabilidade p de um evento na Medida de sua Incerteza.

Shannon, em 1948, obteve uma Medida de Incerteza chamada Medida de Informação ou Entropia.

A Medida de Informação ou Entropia E de um evento único A com probabilidade $p = p(A) \neq 0$ é definida por

$$E(A) = -\log_2 p(A)$$

ou

$$I = \log_2 \left(\frac{1}{p}\right) = -\log_2 p = h(p)\ ,\ p \in (0, 1].$$

Salvo indicação em contrário, o logaritmo será sempre considerado com base 2.

Esta função h satisfaz as seguintes propriedades:

i) $h(p) \geqslant 0$, isto é, h é não-negativa

ii) $h(pq) = h(p) + h(q)$, isto é, h é aditiva

iii) $h(\frac{1}{2}) = 1$, isto é, h é normalizada.

1.4 - Entropia de Shannon

O conceito de Entropia de um experimento, apresentado por Shannon em 1948, é definido da seguinte forma:

Definição 1.4.1. Seja $\Delta_n = \{p=(p_1, p_2,\dots, p_n); p_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} (p_k=1\}$ o conjunto das distribuições das probabilidades finitas e completas. A Entropia de Shannon é a seqüência das funções:

$$H_n : \Delta_n \to R, \ n = 2, 3, \dots \qquad .$$

definida por:

$$H_n(p) = H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} L(p_k)$$

onde:

$$L(x) = \begin{cases} -x \log x, & \text{para } x \in (0, 1] \\ 0 & , \text{para } x = 0 \end{cases}$$

isto é,

$$H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = - \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k, \quad p_k \in [0, 1]$$

com $0.\log 0 = 0$.

Esta função pode ser interpretada como a média ponderada das entropias dos eventos únicos, tomando suas probabilidades como pesos. Assim, uma experiência E, com os eventos únicos A_1, $A_2,\dots, A_n$, com as respectivas probabilidades $p_1, p_2,\dots, p_n$, tem como entropias:

$h(p_1) = -\log p_1$, $h(p_2) = -\log p_2,\dots, h(p_n) = -\log p_n$, respectivamente.

Portanto,

$$H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$$

$$= \frac{-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_n \log p_n}{1}$$

$$= \frac{p_1 h(p_1) + p_2 h(p_2) + \dots + p_n h(p_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

A Entropia de Shannon $H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) <u>não-negativa</u>:

$H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) \geqslant 0$, com a igualdade se, e somente se, $p_i = 1$ e $p_j = 0$, $i \neq j$, para algum i, $i = 1, 2,\dots, n$; $j = 1, 2,\dots, n$.

(ii) <u>Simetria</u>:

$H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = H_n(p_{k_1}, p_{k_2},\dots, p_{k_n})$, onde

$\{k_1, k_2,\dots, k_n\}$ é uma permutação arbitrária sob $1, 2,\dots, n$. Esta propriedade diz que a entropia não depende da ordem na qual os eventos possíveis são tomados.

(iii) <u>Normalidade</u>:

$$H_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 1$$

(iv) <u>Expansibilidade</u>:

$$H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) = H_{n+1}(p_1, p_2,\dots, p_j, 0, p_{j+1},\dots,p_n);$$

$$j = 1, 2,\dots, n.$$

Esta propriedade mostra que a entropia não altera se acrescentarmos um ou mais eventos com probabilidade zero.

(v) <u>Decisividade</u>:

$$H_2(1, 0) = H_2(0, 1) = 0$$

(vi) <u>Aditividade</u>:

$$H_{nm}(p_1q_1, p_1q_2,\dots, p_1q_m,\dots, p_nq_1, p_nq_2,\dots, p_nq_m) =$$
$$= H_n(p_1, p_2,\dots, p_n) + H_m(q_1, q_2,\dots, q_m),$$

para todos $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, $(q_1, q_2, \ldots, q_m) \in \Delta_m$ e

$(p_1q_1, p_1q_2, \ldots, p_1q_m, \ldots, p_nq_1, p_nq_2, \ldots, p_nq_m) \in \Delta_{nm}$.

Esta propriedade diz que em caso de experimentos independentes, a entropia da combinação de dois experimentos é igual a soma das entropias dos experimentos individuais.

(vii) Recursividade:

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n) +$$

$$+ (p_1 + p_2)\, H_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

com $p_1 + p_2 > 0$.

Esta propriedade diz que se uma escolha é dividida em duas escolhas sucessivas, a entropia original H deve ser a soma ponderada dos valores individuais de H.

(viii) Aditividade forte:

$$H_{nm}(p_1q_{11}, p_1q_{12}, \ldots, p_1q_{1m}, \ldots, p_nq_{n1}, p_nq_{n2}, \ldots, p_nq_{nm})$$

$= H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_m(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{im})$, para todos

$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta_n$ e $(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{im})$ Δ_m, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$(p_1q_{11}, p_1q_{12}, \ldots, p_1q_{1m}, \ldots, p_nq_{n1}, p_nq_{n2}, \ldots, p_nq_{nm}) \in \Delta_{nm}$.

Esta propriedade diz que se dois experimentos X e Y são tais que X depende de Y, então a entropia conjunta H(X, Y) é igual a entropia de X, H(X), mais a entropia condicional H(Y/X).

(ix) Continuidade:

$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é função contínua das n-variáveis.

(x) Maximalidade:

$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq H_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, onde $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ é a distribuição uniforme e $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta_n$ com igualdade se, e somente se, $p_i = \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Esta propriedade afirma que o valor máximo da entropia é alcançado quando todas as probabilidades são iguais.

(xi) Monotonicidade:

$H_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ é função monotônica crescente de n.

1.5 - Entropia Pesada

A Entropia de Shannon é uma medida da incerteza ou informação, fornecida por um experimento probabilístico. Esta medida é função somente das probabilidades com as quais vários eventos ocorrem.

S. Guiaşu ([5]) introduziu um conceito de entropia considerando, além das probabilidades dos eventos, características qualitativas destes eventos, as quais denominou de pesos qualitativos, supondo estes como sendo números reais não negativos e finitos. Também, se um evento é mais relevante, mais útil que outro (com relação a um dado objetivo, ou em relação a um dado ponto de vista qualitativo), o peso do primeiro será maior que o do segundo. Esta entropia é denominada *Entropia Pesada*.

Consideremos um experimento probabilístico cujo espaço das probabilidades correspondentes tem um número finito de eventos elementares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com as respectivas probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, com $p_k \geq 0$, $k=1, 2, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Atribuímos a cada evento x_k um número não negativo w_k, diretamente proporcional à sua importância, utilidade, como mencionado acima. Chamaremos w_k o peso do evento x_k $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 1.5.1:

A Entropia Pesada é dada pela expressão

$$I_n = I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k,$$

onde $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, $w_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1.6 - Propriedades da Entropia Pesada

A Entropia Pesada $I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) =$ $= - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k$, onde $w_k \geq 0$, $p_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\sum p_k = 1$;

satisfaz as seguintes propriedades:

(p1) Não Negativa :

$$I_n(w_1, w_2,\ldots, w_n; p_1\ p_2,\ldots, p_n) \geq 0, \text{ para todos os } w_k \geq 0,$$

e

$$p = (p_1, p_2,\ldots, p_n) \in \Delta_n, \quad k = 1, 2,\ldots, n.$$

(p2) Se $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = w$, então

$I_n(w_1, w_2,\ldots, w_n; p_1, p_2,\ldots, p_n) = -w \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$, a qual é a Entropia de Shannon determinada unicamente por uma constante arbitrária não negativa.

(p3) Decisividade:

Se $p_{k_0} = 1$, $p_k = 0$ $(k = 1, 2,\ldots, n,\ k \neq k_0)$, então

$I_n(w_1, w_2,\ldots, w_n; p_1, p_2,\ldots, p_n) = 0$, quaisquer que sejam os pesos $w_1, w_2,\ldots, w_n$.

(p4) Expansibilidade:

$$I_{n+1}(w_1, w_2,\ldots, w_n, w_{n+1}; p_1, p_2,\ldots, p_n, 0) =$$

$= I_n(w_1, w_2,\ldots, w_n; p_1, p_2,\ldots, p_n)$, quaisquer que sejam os pesos $w_1, w_2,\ldots, w_n, w_{n+1}$ e o sistema completo da probabilidade $p_1, p_2,\ldots, p_n$.

(p5) Linearidade:

Para todo número real não negativo λ, temos:

$$I_n(\lambda w_1, \lambda w_2,\ldots, \lambda w_n; p_1, p_2,\ldots, p_n) =$$

$$= \lambda I_n(w_1, w_2,\ldots, w_n; p_1, p_2,\ldots, p_n).$$

Até aqui não impomos qualquer restrição aos pesos atribuídos aos eventos elementares do experimento probabilístico (exceto que eles sejam não negativos). Vamos supor agora que o peso da união de dois eventos incompatíveis, seja a média ponderada dos pesos dos respectivos eventos, isto é,

$$w(E \cup F) = \frac{p(E)w(E) + p(F)w(F)}{p(E) + p(F)}$$

para quaisquer eventos incompatíveis E, F, onde $w(E)$ e $w(F)$ são os pesos de E, F, respectivamente e $p(E)$, $p(F)$ são as probabilidades de E, F, respectivamente.

(p6) Recursividade:

$$I_{n+1}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w', w''; \; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p', p'') =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n \, I_2(w', w''; \; \frac{p'}{p_n}, \frac{p''}{p_n})$$

onde $w_n = \dfrac{w'p' + w''p''}{p' + p''}$; $\quad p_n = p' + p'' > 0.$

As propriedades (p1) e (p5) são conseqüências imediatas da Definição 1.5.1. Para a propriedade (p6) supõe-se que o peso da união de dois eventos seja a média ponderada dos pesos dos eventos respectivos.

Prova da Propriedade (p6):

Levando em conta a Definição 1.5.1. e escrevendo

$$w_n = \frac{p'w' + p''w''}{p' + p''}; \qquad p_n = p' + p'' > 0$$

nós obtemos:

$$I_{n+1} \; (w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w', w''; \; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p', p'') =$$

$$= - \sum_{k=1}^{n-1} w_k \, p_k \log p_k - w' \, p' \log p' - w'' \, p'' \log p''$$

$$= - \sum_{k=1}^{n-1} w_k \, p_k \log p_k - w_n \, p_n \log p_n + w_n \, p_n \log p_n - w' \, p' \log p' -$$

$$- w'' \, p'' \log p''$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} w_k \, p_k \log p_k + w_n \, p_n \log p_n - w' \, p' \log p' - w'' \, p'' \log p''$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) + (w' \, p' + w'' \, p'') \log p_n -$$

$$- w' \, p' \log p' - w'' \, p'' \log p''$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + w' p' \log p_n + $$

$$+ w'' p'' \log p_n - w' p' \log p' - w'' p'' \log p''$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) - w' p' \log \frac{p'}{p_n} - w'' p'' \log \frac{p''}{p_n}$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n\left(- w' \frac{p'}{p_n} \log \frac{p'}{p_n} - \right.$$

$$\left. - w'' \frac{p''}{p_n} \log \frac{p''}{p_n}\right)$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n I_2\left(w', w''; \frac{p'}{p_n}, \frac{p''}{p_n}\right)$$

1.7 - Caracterização da Entropia Pesada

Considere a seqüência de funções reais não negativas

$$(I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n))_{1 \leqslant n < \infty} ,$$

onde toda I_n é definida sobre o conjunto

$$\{w_k; p_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n} ,$$

com $w_k \geqslant 0$, $p_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ e $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Suponha que estas funções satisfaçam os seguintes axiomas:

(A1) Continuidade:

$I_2(w_1, w_2; p, 1-p)$ é função contínua de p no intervalo $[0, 1]$.

(A2) Simetria:

$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é função simétrica em relação a todo par de variáveis $(w_k; p_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. isto é,

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, \ldots, p_n) =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_j, \ldots, w_i, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$$

$\forall i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$

(A3) Recursividade:

$$\text{Se} \quad w_n = \frac{p'w' + p''w''}{p_n} \quad ; \quad p_n = p' + p'' > 0 \tag{1}$$

então,

$$I_{n+1}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w', w''; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p', p'') =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n I_2(w', w''; \frac{p'}{p_n}, \frac{p''}{p_n}) \tag{2}$$

(A4) Uniformidade:

Se todas as probabilidades são iguais, então:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = \phi(n) \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{n},$$

onde

$\phi(n)$ é um número positivo para qualquer $n > 1$.

Teorema 1.7.1.

As funções $\{I_n\}$ satisfazendo os axiomas (A1) a (A4) são da forma:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \lambda \sum_{k=1}^{n} w_k \, p_k \log p_k \tag{3}$$

onde

λ é uma constante arbitrária positiva.

Prova:

(a) De (A3), para $n = 2$, temos:

$$I_3(w_1, w_2, w_3; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) =$$

$$= I_2(w_1, w_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} I_2(w_2, w_3; 1, 0)$$

Agora:

$$I_3(w_1, w_2, w_3; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) =$$

$$= I_3(w_3,\ w_2,\ w_1;\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}) \quad \text{(por (A2))}$$

$$= I_2(w_3,\ \tfrac{1}{2}(w_1 + w_2);\ \ 0,\ 1) + I_2(w_1,\ w_2;\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}) \quad \text{(por(A3))}$$

Daí,

$I_2(w_2,\ w_3;\ 1,\ 0) = 2I_2(\tfrac{1}{2}(w_1 + w_2),\ w_3;\ 1,\ 0)$ para quaisquer pesos w_1, w_2, w_3.

Em particular, se colocarmos $w_1 = w_2$, obtemos:

$I_2(w_2,\ w_3;\ 1,\ 0) = 2I_2(w_2,\ w_3;\ 1,\ 0)$ para todo par w_2, w_3.

Portanto,

$$I_2(w',\ w'';\ 1,\ 0) = 0, \text{ para quaisquer pesos } w',\ w'' \tag{4}$$

(b) De (A3):

$$I_{n+1}(w_1,\ w_2,\dots,\ w_n,\ w_{n+1};\ p_1,\ p_2,\dots,\ p_n,\ 0) =$$

$$= I_n(w_1,\ w_2,\dots,\ w_n;\ p_1,\ p_2,\dots,\ p_n) + p_n\, I_2\,(w_n,\ w_{n+1};\ 1,\ 0)$$

$$= I_n(w_1,\ w_2,\dots,\ w_n;\ p_1,\ p_2,\dots,\ p_n) \quad \text{(por(4))} \tag{5}$$

(c) Temos também a igualdade:

$$I_{n+m-1}(w_1,w_2,\dots,w_{n-1},w_1',w_2',\dots,w_m';\ p_1,p_2,\dots,$$

$$\dots,\ p_{n-1},\ p_1',\ p_2',\dots,\ p_m') =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) +$$

$$+ p_n\ I_m(w_1',w_2',\dots,w_m';\ \frac{p_1'}{p_n},\ \frac{p_2'}{p_n},\dots,\ \frac{p_m'}{p_n}) \tag{6}$$

onde

$$w_n = \frac{p_1'\ w_1' + p_2'\ w_2' + \dots + p_m'\ w_m'}{p_n}\ ;\ p_n = p_1'+p_2'+\dots+p_m' > 0.$$

Provaremos este fato por indução em relação a m.

Para $m = 2$, (6) fica o axioma (A3).

Suponha que (6) seja verdadeira para m fixado e n qualquer; provaremos a igualdade para $m + 1$.

Considerando (5), podemos supor que $p_i' > 0$ para todo i, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$.

Então, (A3) e (6) implicam:

$$I_{n+m}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}; w_1', w_2', \ldots, w_{m+1}'; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}; p_1', p_2', \ldots, p_{m+1}') =$$

$$= I_{n+1}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w_1', w''; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_1', p'') +$$

$$+ p'' I_m(w_2', w_3', \ldots, w'_{m+1}; \frac{p_2'}{p''}, \frac{p_3'}{p''}, \ldots, \frac{p_{m+1}'}{p''})$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n I_2(w_1', w''; \frac{p_1'}{p_n}, \frac{p''}{p_n}) +$$

$$+ p'' I_m(w_2', w_3', \ldots, w_{m+1}'; \frac{p_2'}{p''}, \frac{p_3'}{p''}, \ldots, \frac{p_{m+1}'}{p''}) \tag{7}$$

onde

$$w'' = \frac{p_2'w_2' + p_3'w_3' + \ldots + p_{m+1}'w_{m+1}'}{p''} \; ; \; p'' = p_2' + p_3' + \ldots + \ldots + p_{m+1}' > 0$$

e

$$w_n = \frac{p_1'w_1' + p''w''}{p_n} \; ; \quad p_n = p_1' + p'' > 0, \text{ ou}$$

$$w_n = \frac{p_1'w_1' + p_2'w_2' + \ldots + p'_{m+1}w'_{m+1}}{p_n} \; ; \; p_n = p_1' + p_2' + \ldots + \ldots + p_{m+1}' > 0$$

Contudo, suponhamos que (6) é verdadeira para m fixo.

Daí,

$$p_n \, I_{m+1}(w_1', w_2', \ldots, w_{m+1}'; \frac{p_1'}{p_n}, \frac{p_2'}{p_n}, \ldots, \frac{p_{m+1}'}{p_n}) =$$

$$= p_n \, I_2(w_1'; w''; \frac{p_1'}{p_n}, \frac{p''}{p_n}) +$$

$$+ p_n \frac{p''}{p_n} \; I_m(w'_2, w'_3, \ldots, w'_{m+1} \; ; \; \frac{p'_2}{p_n}, \frac{p'_3}{p_n}, \ldots, \frac{p'_{m+1}}{p_n}) \tag{8}$$

Por (7) e (8) temos:

$$I_{n+m}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w'_1, w'_2, \ldots, w'_{m+1}; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n+1}) =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) + p_n \, I_{m+1}(w'_1, w'_2, \ldots, w'_{m+1}; \frac{p'_1}{p_n}, \frac{p'_2}{p_n}, \ldots,$$

$$\ldots, \frac{p'_{m+1}}{p_n}$$

onde

$$w_n = \frac{p'_1 w'_1 + p'_2 w'_2 + \ldots + p'_{m+1} \; w'_{m+1}}{p_n}; \; p_n = p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_{m+1} > 0.$$

Portanto, a igualdade (6) é verdadeira para $m+1$, e assim para m arbitrário.

(d) Aplicando a igualdade (6) várias vezes, obtemos o resultado:

$$I_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m_1}, \ldots, w'_{n1}, w'_{n2}, \ldots, w'_{nm_n}; \; p'_{11}, p'_{12},$$

$$\ldots, p'_{1m_1}, \ldots, p'_{n1}, p'_{n2}, \ldots, p'_{nm_n}) =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i \; I_m(w'_{i1}, w'_{i2}, \ldots, w'_{im_i}; \; \frac{p'_{i1}}{p_i}, \frac{p'_{i2}}{p_i}, \ldots, \frac{p'_{im_i}}{p_i}) \tag{9}$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1} \; w'_{i1} + p'_{i2} \; w'_{i2} + \ldots + p'_{im_i} \; w'_{im_i}}{p_i} \quad ; \; p_i = p'_{i1} + p'_{i2} + \ldots$$

$$\ldots + p'_{im_i} > 0.$$

De fato, fazendo

$$w_1 = \frac{p'_{11} w'_{11} + p'_{12} w'_{12} + \ldots + p'_{1m_1} \; w'_{1m_1}}{p_1}, \; p_1 = p'_{11} + p'_{12} + \ldots +$$

$$\ldots + p'_{1m_1} > 0.$$

obtemos:

$$I_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m_1},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p'_{11},p'_{12},\ldots,p'_{1m_1},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) =$$

$$= I_{1+m_2+m_3+\ldots+m_n}(w_1,w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_2},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p_1,p'_{21},p'_{22},\ldots,p'_{2m_2},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) +$$

$$+ p_1\ I_{m_1}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m_1};\ \frac{p'_{11}}{p_1},\ \frac{p'_{12}}{p_1},\ldots,\ \frac{p'_{1m_1}}{p_1}) \tag{10}$$

Em (10) fazendo:

$$w_2 = \frac{p'_{21}w'_{21} + p'_{22}w'_{22} + \ldots + p'_{2m_2}w'_{2m_2}}{p_2}\ ;\quad p_2 = p'_{21} + p'_{22} + \ldots + \ldots + p'_{2m_2} > 0$$

obtemos:

$$I_{1+m_2+m_3+\ldots+m_n}(w_1,w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_2},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p_1,p'_{21},p'_{22},\ldots,p'_{2m_2},\ldots,p'_{n1},\ldots,p'_{nm_n}) =$$

$$= I_{2+m_3+\ldots+m_n}(w_1,w_2,w'_{31},w'_{32},\ldots,w'_{3m_3},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p_1,\ p_2,p'_{31},p'_{32},\ldots,p'_{3m_3},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) +$$

$$+ p_2\ I_{m_2}(w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_2};\ \frac{p'_{21}}{p_2},\ \frac{p'_{22}}{p_2},\ldots,\frac{p'_{2m_2}}{p_2}). \tag{11}$$

Agora, em (11) fazendo:

$$w_3 = \frac{p'_{31}w'_{31}+p'_{32}w'_{32}+\ldots+p'_{3m_3},w'_{3m_3}}{p_3}\ ;\quad p_3 = p'_{31}+p'_{32}+\ldots+p'_{3m_3} > 0$$

obtemos:

$$I_{2+m_3+m_4+\ldots+m_n}(w_1,w_2,w'_{31},w'_{32},\ldots,w'_{3m_2},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p_1,\ p_2,p'_{31},\ldots,p'_{3m_3},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) =$$

$$= I_{3+m_4+\ldots+m_n}(w_1,w_2,w_3,w'_{41},\ldots,w'_{4m_4},w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p_1,p_2,p_3,p'_{41},\ldots,p'_{4m_4},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) \; +$$

$$+ \; p_3 I_{m_3}(w'_{31},w'_{32},\ldots,w'_{3m_3} \; ; \; \frac{p'_{31}}{p_3}, \frac{p'_{32}}{p_3},\ldots,\frac{p'_{3m_3}}{p_3}) \qquad (12)$$

E assim sucessivamente, fazendo:

$$w_n = \frac{p'_{n1}w'_{n1}+p'_{n2}w'_{n2}+\ldots+p'_{nm_n}w'_{nm_n}}{p_n} \; ; \; p_n = p'_{n1}+p'_{n2}+\ldots+p'_{nm_n} > 0$$

obtemos:

$$I_{n-1\,+\,m_n}(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1},w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n} \; ;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm_n}) \; =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n \; ; \; p_1,p_2,\ldots,p_n) \; +$$

$$+ \; p_n \; I_{m_n}(w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n} \; ; \; \frac{p'_{n1}}{p_n}, \frac{p'_{n2}}{p_n},\ldots, \frac{p'_{nm_n}}{p_n}) \qquad (13)$$

Portanto, de (10), (11), (12) e (13), obtemos:

$$I_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m_1},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm_n};$$

$$p'_{11},p'_{12},\ldots,p'_{1m_1},\ldots,p'_{n1},\ldots,p'_{nm_n}) \; =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n \; ; \; p_1,p_2,\ldots,p_n) \; +$$

$$+ \; p_n \; I_{m_n}(w'_{n_1},w'_{n_2},\ldots,w'_{nm_n} ; \frac{p_{n1}}{p_n}, \frac{p'_{n2}}{p_n},\ldots,\frac{p'_{nm_n}}{p_n}) \; +\ldots+$$

$$+ \; p_3 \; I_{m_3}(w'_{31},w'_{32},\ldots,w'_{3m_3} \; ; \; \frac{p'_{31}}{p_3}, \frac{p'_{32}}{p_3},\ldots,\frac{p'_{3m_3}}{p_3}) \; +$$

$$+ \; p_2 \; I_{m_2}(w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_2} \; ; \; \frac{p'_{21}}{p_2}, \frac{p'_{22}}{p_2},\ldots,\frac{p'_{2m_2}}{p_2}) \; +$$

$$+ \; p_1 \; I_{m_1}(w'_{11};w'_{12},\ldots,w'_{1m_1} \; ; \; \frac{p'_{11}}{p_1}, \frac{p'_{12}}{p_1},\ldots,\frac{p'_{1m_1}}{p_1})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1}+p'_{i2}w'_{i2}+\ldots+p'_{im_i}w'_{im_i}}{p_i} \; ; \; p_i = p'_{i1}+p'_{i2}+\ldots+p'_{im_i} > 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Donde:

$$I_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m_1}, \ldots, w'_{n1}, w'_{n2}, \ldots, w'_{nm_n};$$

$$p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{1m_1}, \ldots, p'_{n1}, p'_{n2}, \ldots, p'_{nm_n}) =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n \; ; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i \; I_{m_i} \; (w'_{i1}, w'_{i2}, \ldots, w'_{im_i} \; ; \; \frac{p'_{i1}}{p_i}, \frac{p'_{i2}}{p_i}, \ldots, \; \frac{p'_{im_i}}{p_i})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1} + p'_{i2}w'_{i2} + \ldots + p'_{im_i}w'_{im_i}}{p_i} \; ; \quad p_i = p'_{i1}+p'_{i2}+\ldots+p'_{im_i} > 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

(e) Aplicamos, agora, a última igualdade no caso onde $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, e obtemos:

$$I_{nm}(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m}, \ldots, w'_{n1}, w'_{n2}, \ldots, w'_{nm} \; ;$$

$$p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{1m}, \ldots, p'_{n1}, p'_{n2}, \ldots, p'_{nm}) =$$

$$= I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \; I_m(w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{im} \; ;$$

$$\frac{p_{i1}}{p_n}, \ldots, \frac{p_{im}}{p_n})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1} + p'_{i2}w'_{i2} + \ldots + p'_{im}w'_{im}}{p_i} \; ; \; p_i = p'_{i1}+p'_{i2}+\ldots+p'_{im} > 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Se tormarmos $p'_{ij} = \frac{1}{nm}$ $(i = 1,2,\ldots,n; \; j = 1,2,\ldots,m)$, obtemos:

$p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots, n$, e, portanto:

$$I_{nm}(w'_{11},w'_{12},\dots,w'_{1m},\dots,w'_{n1},w'_{n2},\dots,w'_{nm}\ ;\ \frac{1}{nm},\frac{1}{nm},\dots,\frac{1}{nm}) =$$

$$= I_n(\frac{w'_{11}+w'_{12}+\dots+w'_{1m}}{m},\frac{w'_{21}+w'_{22}+\dots+w'_{2m}}{m},\dots,\frac{w'_{n1}+w'_{n2}+\dots+w'_{nm}}{m}\ ;$$

$$;\ \frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}I_m(w'_{i1},w'_{i2},\dots,w'_{im};\ \frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}).$$

Usando o axioma (A4), obtemos:

$$\phi(nm)\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(w'_{i1}+w'_{i2}+\dots+w'_{im}) = \phi(n)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{w'_{i1}+w'_{i2}+\dots+w'_{im}}{m} +$$

$$+\ \phi(m)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{w'_{i1}+w'_{i2}+\dots+w'_{im}}{m}$$

$$\text{ou}\quad \phi(nm) = \phi(n) + \phi(m) \tag{14}$$

(f) Usando a igualdade (6), temos:

$$I_n(w_1,w_2,\dots,w_n\ ;\ \frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}) = I_2(w_1,\frac{w_2+w_3+\dots+w_n}{n-1};\ \frac{1}{n},\frac{n-1}{n}) +$$

$$+\ \frac{n-1}{n}I_n(w_2,w_3,\dots,w_n\ ;\ \frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1},\dots,\frac{1}{n-1})$$

Aplicando o axioma (A4):

$$\phi(n)\frac{w_1+w_2+\dots+w_n}{n} = I_2(w_1,\frac{w_2+w_3+\dots+w_n}{n-1}\ ;\ \frac{1}{n},\frac{n-1}{n}) +$$

$$+\ \frac{n-1}{n}\phi(n-1)\frac{w_2+w_3+\dots+w_n}{n-1}$$

para todos $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Supondo, agora, $w_1 = 0$, temos:

$$I_2(0,\frac{w_2+w_3+\dots+w_n}{n-1}\ ;\ \frac{1}{n},\frac{n-1}{n}) = \frac{w_2+w_3+\dots+w_n}{n}[\phi(n) - \phi(n-1)]$$

para quaisquer valores de $w_2, w_3, \dots, w_n$.

Tomando $w_2 = w_3 = \dots = w_n = w$, temos:

$0 \leqslant I_2(0,\ w\ ;\ \frac{1}{n},\frac{n-1}{n}) = \frac{n-1}{n}w\,[\phi(n) - \phi(n-1)]$, e, pelo axioma

(A1) e a igualdade (4):

$$0 = I_2(0,\ w;\ 0,\ 1) = \lim_{n\to\infty} I_2(0,\ w;\ \frac{1}{n}\ ,\ \frac{n-1}{n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\ w \quad [\phi(n) - \phi(n-1)]$$

$$= w \lim_{n\to\infty} [\phi(n) - \phi(n-1)]$$

para todo número real não negativo w, i. é,

$$\lim_{n\to\infty} [\phi(n) - \phi(n-1)] = 0 \tag{15}$$

(g) A solução da equação (14), com (15) (referência: Aczél, J. e Daróczy, Z, [1]), é dada por:

$$\phi(n) = \lambda \log n, \tag{16}$$

onde λ é uma constante arbitrária e positiva.

(h) Substituindo na igualdade (9) os valores $n = 2$, $m_1 = r$, $m_2 = s - r$, $p_{ij} = \frac{1}{s}$, obtemos:

$$p_1 = p'_{11}+p'_{12}+\dots+p'_{1r} = \frac{r}{s}\ ;\ p_2 = p'_{21}+p'_{22}+\dots+p'_{2,s-r} = \frac{s-r}{s}$$

$$w_1 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w'_{1i} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{1}{s-r} \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j}$$

Então, (9) fica:

$$I_s(w'_{11},w'_{12},\dots,w'_{1r},w'_{21},w'_{22},\dots,w'_{2(s-r)}\ ;\ \underbrace{\frac{1}{s},\ \frac{1}{s},\dots,\ \frac{1}{s}}_{s\ \text{vezes}}) =$$

$$= I_2(w_1,w_2;\ p_1,p_2) + p_1\ I_r(w'_{11},w'_{12},\dots,w'_{1r};\ \underbrace{\frac{1}{r},\ \frac{1}{r},\dots,\ \frac{1}{r}}_{r\ \text{vezes}}) +$$

$$+ p_2\ I_{s-r}(w'_{21},w'_{22},\dots,w'_{2(s-r)}\ ;\ \underbrace{\frac{1}{s-r},\ \frac{1}{s-r},\dots,\ \frac{1}{s-r}}_{s-r\ \text{vezes}}). \tag{17}$$

Contudo, conforme (A4) e (16), nós temos:

$$I_s(w'_{11};w'_{12};\dots;w'_{1r},w'_{21},w'_{22},\dots,w'_{2(s-r)}\ ;\ \frac{1}{s},\ \frac{1}{s},\dots,\ \frac{1}{s}\ ) =$$

$$= \lambda \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^{r} w'_{1i} + \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j} \right) \log s$$

$$I_r(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1r}; \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}) = \lambda \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w'_{1i} \log r$$

$$I_{s-r}(w'_{21}, w'_{22}, \ldots, w'_{2(s-r)}; \frac{1}{s-r}, \frac{1}{s-r}, \ldots, \frac{1}{s-r}) =$$

$$= \lambda \frac{1}{s-r} \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j} \log (s-r)$$

e daí, (17) nos dá:

$$I_2(w_1, w_2 ; p_1, p_2) = \lambda \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^{r} w'_{1i} + \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j} \right) \log s -$$

$$- \lambda \frac{r}{s} \cdot \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w'_{1i} \log r - \lambda \frac{s-r}{s} \cdot \frac{1}{s-r} \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j} \log (s-r)$$

$$= - \lambda \frac{r}{s} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w'_{1i} \right) \log \frac{r}{s} - \lambda \frac{s-r}{s} \left(\frac{1}{s-r} \sum_{j=1}^{s-r} w'_{2j} \right) \log \frac{s-r}{s}$$

$$= - \lambda w_1 p_1 \log p_1 - \lambda w_2 p_2 \log p_2 .$$

(i) Em (h) provamos a fórmula (3) para $n = 2$. Por indução, provaremos que (3) é verdadeira para n arbitrário.

Suponhamos que a equação (3) vale para n e provemos que vale também para $n + 1$.

De (2) nós temos:

$$I_{n+1} (w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w', w'' ; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p', p'') =$$

$$= - \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i p_i \log p_i - p_n \left(\lambda w' \frac{p'}{p_n} \log \frac{p'}{p_n} + \lambda w'' \frac{p''}{p_n} \log \frac{p''}{p_n} \right) =$$

$$= - \lambda \sum_{i=1}^{n-1} w_i p_i \log p_i - \lambda w_n p_n \log p_n - \lambda w' p' \log p' - \lambda w'' p'' \log p''$$

$$+ \lambda w' p' \log p_n + \lambda w'' p'' \log p_n$$

$$= - \lambda w_1 p_1 \log p_1 - \lambda w_2 p_2 \log p_2 - \ldots - \lambda w_{n-1} p_{n-1} \log p_{n-1} -$$

$$- \lambda w' p' \log p' - \lambda w'' p'' \log p'' - \lambda w_n p_n \log p_n + \lambda (w' p' + w'' p'') \log p_n$$

$$= \lambda w_1 p_1 \log p_1 - \lambda w_2 p_2 \log p_2 - \ldots - \lambda w_{n-1} p_{n-1} \log p_{n-1} - \lambda w' p' \log p'$$

$$- \lambda w'' p'' \log p''.$$

Então, a relação (3) também vale para $n + 1$, consequentemente a relação (3) é verdadeira para n arbitrário.

Portanto,

$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = - \lambda \sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k$, onde λ é uma constante arbitrária positiva.

C.Q.D.

Obs.: O teorema 1.7.1. é devido a Guiaşu ([5]).

CAPÍTULO II

Neste capítulo apresentamos as Caracterizações de Entropia Pesada, objetivo do nosso trabalho. Para o desenvolvimento destas Caracterizações necessitamos do Teorema da Inversão para a Entropia Pesada, que apresentamos na secção 2.1. Nas secções 2.2., 2.3. e 2.4. apresentamos, respectivamente, uma Caracterização da Entropia Pesada, uma Caracterização da Entropia Pesada de Grau β e uma Caracterização Genralizada da Entropia Pesada.

2.1 - Teorema da Inversão

Mostraremos, neste teorema, que as funções I_n que satisfazem os axiomas de Aditividade Forte, Expansibilidade e Decisividade, podem ser escritas como uma função de ϕ, onde ϕ é uma função satisfazendo:

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} w_k}{m} \phi(m) = I_m(w_1, w_2, \ldots, w_m; \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$$

Teorema 2.1.1:

Considere a seqüência de funções reais não-negativas

$$(I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n))_{1 \leqslant n < \infty},$$

onde

$$w_k \geqslant 0; \; p_k \geqslant 0 \; (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ e } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Suponha que as funções I_n satisfaçam os seguintes axiomas:

(B1) Aditividade Forte:

$$I_{nm}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm} \; ; \; p'_{11},p'_{12},\ldots,\; p'_{1m},\ldots, p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm}) =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n; \; p_1,p_2,\ldots,p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \; I_m(w'_{i1},w'_{i2},\ldots,\; w'_{im}; \; \frac{p'_{i1}}{p_i},\frac{p'_{i2}}{p_i},\ldots,\frac{p'_{im}}{p_i})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1} + p'_{i2}w'_{i2} + \ldots + p'_{im}w'_{im}}{p_i} \; ; \; p_i = p'_{i1} + p'_{i2} + \ldots + p'_{im} \neq 0$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

(B2) Expansibilidade:

$$I_{n+1}(w_1,w_2,\ldots,w_n,w_{n+1}; \; p_1,p_2,\ldots,p_n,0) = I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n; \; p_1,p_2,\ldots,p_n).$$

(B3) Decisividade:

$$I_2(w_1,w_2 \; ; \; 1, \; 0) = I_2(w_1,w_2 \; ; \; 0, \; 1) = 0.$$

Se ϕ é uma função satisfazendo

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} w_k}{m} \; \phi\,(m) = I_m(w_1,w_2,\ldots,\; w_n; \frac{1}{m}, \; \frac{1}{m},\ldots,\; \frac{1}{m})$$

e f é uma função definida por:

$f(w,\; w' \; ; \; x) = I_2(w,\; w' \; ; \; 1-x,\; x),$

então,

$$f(w,w'; \; r) = f(w,w'; \; \frac{m_1}{m}) = I_2(w,w'; \; 1 - \frac{m_1}{m}, \; \frac{m_1}{m}) =$$

$$= -\left(1 - \frac{m_1}{m}\right) w\left[\phi(m-m_1) - \phi(m)\right] - \frac{m_1}{m} w' \left[\phi(m_1) - \phi(m)\right],$$

para todos os números racionais $r = \frac{m_1}{m} \in [0,\ 1]$

Prova:

Em (B1) colocando $n = 2$,

$$p'_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{m} \ ; & k = 1,2,\ldots,\ m - m_1 \\ 0 \ ; & k = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2,\ldots,m \end{cases}$$

$$p'_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{m} \ ; & k = 1,2,\ldots,\ m_1 \\ 0 \ ; & k = m_1 + 1,\ m_1 + 2,\ldots,\ m \end{cases}$$

obtemos:

$$I_{2m}(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m},\ w'_{21}, w'_{22}, \ldots, w'_{2m};\ \underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{m-m_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1},$$
$$\underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{m_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-m_1}) =$$

$$= I_2(w, w';\ \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m-m_1},\ \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m_1}) +$$

$$+ p_1 I_m(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m};\ \underbrace{\frac{\frac{1}{m}}{\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m-m_1}}, \ldots, \frac{\frac{1}{m}}{\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m-m_1}}}_{m-m_1},\ \underbrace{0, \ldots,\ 0}_{m_1}) +$$

$$+ p_2 I_m(w'_{21}, w'_{22}, \ldots, w'_{2m};\ \underbrace{\frac{\frac{1}{m}}{\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m_1}}, \ldots, \frac{\frac{1}{m}}{\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{m_1}}}_{m_1},\ \underbrace{0, \ldots,\ 0}_{m-m_1})$$

Por (B2):

$$I_m(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1,m-m_1},w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_1} \; ; \; \frac{1}{m}, \frac{1}{m},\ldots, \frac{1}{m}) =$$

$$= I_2(w,w' ; \frac{m-m_1}{m},\frac{m_1}{m}) + p_1 I_{m-m_1}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1,m-m_1} ; \frac{1}{m-m_1},\frac{1}{m-m_1},\ldots$$

$$\ldots,\frac{1}{m-m_1}) + p_2 I_{m_1}(w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_1} \; ; \; \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1},\ldots, \frac{1}{m_1}).$$

Pela definição de ϕ, temos:

$$\frac{\sum_{k=1}^{m-m_1} w'_{1k} + \sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m} \phi(m) = I_2(w,w' ; 1-\frac{m_1}{m}, \frac{m_1}{m}) +$$

$$+ p_1 \frac{\sum_{k=1}^{m-m_1} w'_{1k}}{m-m_1} \phi(m-m_1) + p_2 \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1} \phi(m_1)$$

ou,

$$\frac{\sum_{k=1}^{m-m_1} w'_{1k} + \sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m} \phi(m) = I_2(w, w' ; 1 - \frac{m_1}{m}, \frac{m_1}{m}) +$$

$$+ (1 - \frac{m_1}{m})\frac{\sum_{k=1}^{m-m_1}}{m-m_1} \phi(m-m_1) + \frac{m_1}{m} \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{1j}}{m_1} \phi(m_1)$$

ou,

$$I_2(w,w' ; 1 - \frac{m_1}{m}, \frac{m_1}{m}) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m-m_1} w'_{1k} + \sum\limits_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m} \phi(m) -$$

$$- \frac{\sum\limits_{k=1}^{m-m_1} w'_{1k}}{m-m_1} (1 - \frac{m_1}{m}) \phi(m-m_1) - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1} \frac{m_1}{m} \phi(m_1)$$

ou ainda,

$$f(w,w' ; \frac{m_1}{m}) = \frac{(m-m_1)w + m_1 w'}{m} \phi(m) -$$

$$- \frac{(m-m_1)w}{m-m_1} (1 - \frac{m_1}{m}) \phi(m-m_1) - \frac{m_1 w'}{m_1} \frac{m_1}{m} \phi(m_1)$$

ou,

$$f(w,w';\frac{m_1}{m}) = \phi(m)\left[(1-\frac{m_1}{m})w + \frac{m_1}{m}w'\right] -$$

$$- (1-\frac{m_1}{m})\,\phi(m-m_1)\,w - \frac{m_1}{m}\,\phi(m_1)\,w'$$

ou,

$$f(w,w';\frac{m_1}{m}) = \phi(m)\,(1-\frac{m_1}{m})\,w + \phi(m)\,\frac{m_1}{m}\,w' -$$

$$- (1-\frac{m_1}{m})\,\phi(m-m_1)\,w - \frac{m_1}{m}\,\phi(m_1)\,w'.$$

E, então

$$f(w,w';\frac{m_1}{m}) = -(1-\frac{m_1}{m})w\,\left[\phi(m-m_1) - \phi(m)\right] - \frac{m_1}{m}w'\,\left[\phi(m_1) - \phi(m)\right].$$

C.Q.D.

<u>Proposição 2.1.2.</u>:

Considere as funções $(I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n))_{1\leq n<\infty}$ onde $w_k\geq 0$, $p_k\geq 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$ e

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

(x1) <u>Expansibilidade</u>:

$$I_{n+1}(w_1,w_2,\ldots,w_n,\ w_{n+1}\ ;\ p_1,p_2,\ldots,p_n,\ 0) =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n\ ;\ p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n)$$

(x2) <u>Aditividade forte</u>:

$$I_{nm}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm};\ p'_{11},p'_{12},\ldots,p'_{1m},\ldots,$$

$$p'_{n1},p'_{n2},\ \ldots,\ p'_{nm}) =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i\ I_m(w'_{i1},w'_{i2},\ldots,\ w'_{im};\ \frac{p'_{i1}}{p_i},\frac{p'_{i2}}{p_i},\ldots,\frac{p'_{im}}{p_i})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1} + p'_{i2}w'_{i2} + \ldots + p'_{im}w'_{im}}{p_i}\ ;\ p_i = p'_{i1}+p'_{i2}+\ldots+p'_{im} > 0,$$

$$i = 1,2,\ldots,\ n.$$

(x3) <u>Decisividade</u>:

$$I_2(w_1,w_2\ ;\ 1,\ 0) = I_2(w_1,w_2;\ 0,\ 1) = 0.$$

Então, as funções $\{I_n\}$ satisfazem também o axioma de Recursividade:

$$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= I_{n-1}(w',w_3,w_4,\ldots,w_n;\ p',p_3,p_4,\ldots,p_n) + p'I_2(w_1,w_2;\frac{p_1}{p'},\frac{p_2}{p'})$$

onde

$$p' = p_1 + p_2 > 0\ ;\quad w' = \frac{p_1w_1 + p_2w_2}{p'}\ .$$

<u>Prova</u>:

Em (x2) colocando $n = m-1$; $p'_{11} = \tilde{p}_1$; $p'_{12} = \tilde{p}_2$; $p'_{1j} = 0$ $(j = 3,4,\ldots,m)$; $p'_{ii} = \tilde{p}_{i+1}$ $(i = 2,3,\ldots,m-1)$; $p'_{ij} = 0(i=2,3,\ldots,m-1\ ;\ j=1,2,\ldots,m)$; $p_1 = \tilde{p}_1+\tilde{p}_2$; $p_i = \tilde{p}_{i+1}$ $(i = 2,3,\ldots,m-1)$;

$$w_1 = \frac{\tilde{p}_1w'_{11} + \tilde{p}_2w'_{12}}{p_1}\ ;\ w_i = w'_{ii}\ (i = 2,3,\ldots,m-1);$$

obtemos:

$$I_{m-1,m}(w'_{11}+w'_{12},\ldots,w'_{1m},\ldots,w'_{m-1,1},w'_{m-1,2},\ldots,w'_{m-1,m};$$

$$\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,0,0,\ldots,0,\tilde{p}_3,0,\ldots,0,\tilde{p}_n) =$$

$$= I_{m-1}\left(\frac{\tilde{p}_1 w'_{11} + \tilde{p}_2 w'_{12}}{p_1},\ w'_{22}, w'_{33}, \ldots, w'_{m-1,m-1};\ \tilde{p}_1+\tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \ldots, \ldots, \tilde{p}_m\right) +$$

$$+ (\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)\ I_m\left(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m};\ \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, \frac{0}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, \ldots, \frac{0}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}\right) +$$

$$+ \tilde{p}_3\ I_m\left(w'_{21}, w'_{22}, \ldots, w'_{2m};\ \frac{0}{\tilde{p}_3}, \frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_3}, \frac{0}{\tilde{p}_3}, \ldots, \frac{0}{\tilde{p}_3}\right) + \ldots +$$

$$+ \tilde{p}_m\ I_m\left(w'_{m-1,1}, w'_{m-1,2}, \ldots, w'_{m-1,m};\ \frac{0}{\tilde{p}_m}, \frac{0}{\tilde{p}_m}, \ldots, \frac{0}{\tilde{p}_m}, \frac{\tilde{p}_m}{\tilde{p}_m}, \frac{0}{\tilde{p}_m}\right).$$

Por (x1), temos:

$$I_m(w'_{11}, w'_{12}, w'_{22}, w'_{33}, \ldots, w'_{m-1,m-1};\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m) =$$

$$= I_{m-1}(\tilde{w},\ w'_{22}, w'_{33}, \ldots,\ w'_{m-1,m-1};\ \tilde{p}, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \ldots, \tilde{p}_m) +$$

$$+ (\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)\ I_2\left(w'_{11}, w'_{12};\ \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}\right) + \tilde{p}_3\ I_2(w'_{21}, w'_{22};\ 0,\ 1) +$$

$$+ \ldots + \tilde{p}_m\ I_2(w'_{m-1,m-1}, w'_{m-1,m};\ 1,\ 0)$$

onde

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{p}_1 w'_{11} + \tilde{p}_2 w'_{12}}{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}\quad ;\quad \tilde{p} = \tilde{p}_1+\tilde{p}_2.$$

Por (x3):

$$I_m(w'_{11}, w'_{12}, w'_{22}, w'_{33}, \ldots, w'_{m-1,m-1};\ \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m) =$$

$$= I_{m-1}(\tilde{w}, w'_{22}, w'_{33}, \ldots, w'_{m-1,m-1};\ \tilde{p}, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \ldots, \tilde{p}_m) +$$

$$\tilde{p}\ I_2\left(w'_{11},\ w'_{12};\ \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}}, \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}}\right)$$

onde

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{p}_1 w'_{11} + \tilde{p}_2 w'_{12}}{\tilde{p}} \; ; \quad \tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 .$$

Isto é:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) = I_{n-1}(w', w_3, w_4, \ldots, w_n ;$$

$$p', p_3, p_4, \ldots, p_n) + p' \, I_2(w_1, w_2 \; ; \frac{p_1}{p'}, \frac{p_2}{p'})$$

onde

$$w' = \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p'} \; ; \quad p' = p_1 + p_2 > 0 .$$

C.Q.D.

2.2 - Uma Caracterização da Entropia Pesada

Vamos mostrar agora que uma função I_n que satisfaz os axiomas de Continuidade, Simetria, Expansibilidade, Aditividade Forte, Normalidade e Decisividade é determinada unicamente como a Entropia Pesada.

Considere a seqüência de funções reais $(I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n))_{1 \leq n < \infty}$, onde toda I_n é definida sobre o conjunto $\{w_k \; ; p_k\}_{1 \leq k \leq n}$, com $w_k \geq 0$, $p_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ e $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Suponha que I_n satisfaz os seguintes axiomas:

(C1) Continuidade:

$$I_2(w, w' \; ; \; p, 1-p)$$

é contínua para

$$0 \leq p \leq 1 \; ; \quad w, w' \geq 0 .$$

(C2) Simetria:

$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n)$ é função simétrica em relação a todo par de variáveis $(w_k;\ p_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$.

(C3) Expansibilidade:

$$I_{n+1}(w_1,w_2,\ldots,w_n,\ w_{n+1};\ p_1,p_2,\ldots,p_n,\ 0) =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n)$$

(C4) Aditividade Forte:

$$I_{nm}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m},\ldots,w'_{n_1},w'_{n_2},\ldots,w'_{nm};$$

$$p'_{11},p'_{12},\ldots,p'_{1m},\ldots,p'_{n_1},p'_{n_2},\ldots,p'_{nm}) =$$

$$= I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i I_m(w'_{i1},w'_{i2},\ldots,w'_{im};$$

$$\frac{p'_{i1}}{p_i},\frac{p'_{i2}}{p_i},\ldots,\frac{p'_{im}}{p_i})$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1} + p'_{i2}w'_{i2} + \ldots + p'_{im}w'_{im}}{p_i}\ ; \quad p_i = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \ldots + p'_{im} > 0$$

$$i = 1,2,\ldots,\ n.$$

(C5) Normalidade:

$$I_2(w_1,w_2;\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}) = \phi(2)\ \frac{w_1 + w_2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(w_1 + w_2) \quad \text{para} \quad \phi(2) = 1.$$

(C6) Decisividade:

$$I_2(w_1,w_2\ ;\ 1,\ 0) = I_2(w_1,w_2\ ;\ 0,\ 1) = 0.$$

. <u>Teorema 2.2.1.</u>:

Uma função I_n satisfazendo os axiomas (C1) a (C6) é determinada unicamente como a entropia pesada:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) = - \sum_{k=1}^{n} w_k \, p_k \log p_k .$$

<u>Prova</u>:

Sabemos que a função ϕ satisfazendo a equação

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} \, \phi(n) = I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}), \quad n \geqslant 2, \quad \phi(1) = 0 \quad \text{e}$$

$\sum_{k=1}^{n} w_k \neq 0$, satisfaz também as seguintes condições:

$$\phi(nm) = \phi(n) + \phi(m) \qquad \text{(pelo Teor. 1.7.1. - e)}$$

$$\phi(n) \leqslant \phi(n+1) \qquad \text{(pelo Teor. 1.7.1. - f)}$$

Além disso, pelo Teor. 1.7.1. - g, existe constante c tal que

$$\phi(n) = c \log n. \tag{1}$$

Para todos os números racionais $r = \frac{n_1}{n} \in [0,1]$, pelo Teor. 2.1.1., temos:

$$f(w, w' ; r) = f(w, w'; \frac{n_1}{n}) = I_2(w, w'; 1 - \frac{n_1}{n}, \frac{n_1}{n}) =$$

$$= - (1 - \frac{n_1}{n}) \, w \left[\phi(n - n_1) - \phi(n)\right] - \frac{n_1}{n} \, w' \left[\phi(n_1) - \phi(n)\right]$$

Então, por (1):

$$f(w, w'; \frac{n_1}{n}) = - (1 - \frac{n_1}{n}) \, w \left[c \log (n - n_1) - c \log n\right] - \frac{n_1}{n} \, w' \left[c \log n_1 - c \log n\right]$$

$$= - c \left[(1 - \frac{n_1}{n}) \, w \log (1 - \frac{n_1}{n}) + \frac{n_1}{n} \, w' \log \frac{n_1}{n}\right]$$

$$= - c (1 - r) \, w \log (1 - r) - c \, r \, w' \log r.$$

Agora, com o axioma (C5):

$$\frac{1}{2}(w + w') = I_2(w,w';\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -c(1-\frac{1}{2})\, w \log (1-\frac{1}{2}) - c\,\frac{1}{2}\, w' \log \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\, c\, w \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, c\, w' \log \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, c\, w \log 2 + \frac{1}{2}\, c\, w' \log 2$$

$$= \frac{1}{2}\, c\, w + \frac{1}{2}\, c\, w'$$

$$= c\,\frac{1}{2}(w + w').$$

Portanto, $c = 1$.

Assim, $f(w, w'; r) = I_2(w, w'; 1-r, r) =$
$= -(1-r)\, w \log (1-r) - r\, w' \log r$ para todos os números racionais $r \in [0, 1]$.

Como I_2 é função contínua (axioma (C1))

$$f(w,w';x) = I_2(w, w'; 1-x, x) = -w(1-x)\log(1-x) - w'\, x \log x \qquad (2)$$

para todos os números reais $x \in [0,1]$.

Sabemos, pela Proposição 2.1.2., que vale:

$$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n; p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= I_{n-1}(w',w_3,w_4,\ldots,w_n; p',p_3,p_4,\ldots,p_n) +$$

$$+ p' I_2(w_1, w_2; \frac{p_1}{p'}, \frac{p_2}{p'}) \qquad (3)$$

onde

$$w' = \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p'} \quad ; \quad p' = p_1 + p_2 > 0.$$

Aplicando, agora, (3) em I_{n-1}, depois em I_{n-2}, e assim sucessivamente, obtemos:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= (p_1+p_2+\ldots+p_n)\ I_2\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{n-1}w_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}, w_n ;\right.$$

$$\left.\frac{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_n}, \frac{p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right) + (p_1+p_2) I_2(w_1, w_2; 1 - \frac{p_2}{p_1+p_2},$$

$$\left.\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) + (p_1+p_2+p_3) I_2\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2}{p_1+p_2}, w_3; 1 - \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}, \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right) + \ldots$$

$$+ \ldots + (p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})\ I_2\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{n-2}w_{n-2}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-2}}, w_{n-1};\right.$$

$$\left.1 - \frac{p_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}, \frac{p_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}\right) .$$

Aplicando (2):

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$(p_1+p_2+\ldots+p_n)\ f\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{n-1}w_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}, w_n; \frac{p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right) +$$

$$+ (p_1+p_2)\ f(w_1, w_2; \frac{p_2}{p_1+p_2}) + (p_1+p_2+p_3)\ f\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2}{p_1+p_2}, w_3;\right.$$

$$\left.\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right) + \ldots + (p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})\ f\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{n-2}w_{n-2}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-2}},\right.$$

$$\left.w_{n-1}; \frac{p_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}\right)$$

Portanto

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (p_1+p_2+\ldots+p_k)\ f\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{k-1}}; w_k; \frac{p_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right) \quad (4)$$

fazendo $p_1+p_2+\ldots+p_k = r_k \Rightarrow r_k - p_k = p_1+p_2+\ldots+p_{k-1} = r_{k-1}$, obtemos:

$$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\; p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} r_k\, f\left(\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1}}{r_{k-1}},\; w_k\;;\; \frac{p_k}{r_k}\right) \tag{5}$$

Em (2), fazendo $x = \frac{p_k}{r_k}$, vem:

$$f\left(w,w';\; \frac{p_k}{r_k}\right) = I_2\left(w,w';\; 1-\frac{p_k}{r_k},\; \frac{p_k}{r_k}\right) =$$

$$= -\left(1-\frac{p_k}{r_k}\right)w\,\log\left(1-\frac{p_k}{r_k}\right) - \frac{p_k}{r_k}\,w'\,\log\frac{p_k}{r_k} \tag{6}$$

Aplicando (6) em (5):

$$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n\;;\; p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} r_k\left[-\left(1-\frac{p_k}{r_k}\right)\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1}}{r_{k-1}}\;\log\left(1-\frac{p_k}{r_k}\right) - \frac{p_k}{r_k}\,w_k\,\log\frac{p_k}{r_k}\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \cancel{r_k}\left[-\left(\frac{r_k-p_k}{\cancel{r_k}}\right)\;\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1}}{r_{k-1}}\;\log\left(\frac{r_k-p_k}{r_k}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{p_k}{\cancel{r_k}}\,w_k\;\log\frac{p_k}{r_k}\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\left[-\;\cancel{r_{k-1}}\;\frac{p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1}}{\cancel{r_{k-1}}}\,\log\frac{r_{k-1}}{r_k} - p_kw_k\,\log\frac{p_k}{r_k}\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\left[-(p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1})\,\log\frac{r_{k-1}}{r_k} - p_kw_k\,\log p_k + p_kw_k\log r_k\right]$$

$$= -\sum_{k=2}^{n} w_k\,p_k\log p_k + \left[\sum_{k=2}^{n} p_kw_k\;\log r_k\; -\right.$$

$$\left. -\sum_{k=2}^{n}(p_1w_1+p_2w_2+\ldots+p_{k-1}w_{k-1})\;\log\frac{r_{k-1}}{r_k}\right]$$

$$= -\sum_{k=2}^{n} w_k\;p_k\;\log p_k \;+\; \left[-\,w_1p_1\;\log r_1\right]$$

$$= - \sum_{k=2}^{n} w_k \, p_k \log p_k \; - \; w_1 \, p_1 \log p_1 .$$

Portanto,

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n \; ; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = - \sum_{k=1}^{n} w_k \, p_k \log p_k$$

que é a Entropia Pesada.

C.Q.D.

2.3 - Uma Caracterização da Entropia Pesada de Grau β

Mostraremos que as funções I_n^β satisfazendo os axiomas de Continuidade, Simetria, Expansibilidade, Aditividade Forte, Normalidade e Decisividade são determinadas unicamente como a Entropia Pesada de Grau β:

$$I_n^\beta (w_1, w_2, \ldots, w_n, \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k \, (p_k^\beta - p_k),$$

onde

$$\beta > 0, \; \beta \neq 1, \quad w_k \geqslant 0, \quad p_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Seja a função $I_n^\beta(W;P)$, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ e $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta n$; $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, com $\{I_n^\beta\}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

(D1) Continuidade:

$I_2^\beta(w_1, w_2; \; 1-p, \; p)$ é contínua para $p \in [0, 1]$.

(D2) Simetria:

$I_n^\beta(w_1, w_2, \ldots, w_n; \; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é função simétrica para todo par $(w_k, \; p_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

(D3) Expansibilidade:

$$I_n^\beta(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},0) = I_{n-1}^\beta(w_1,w_2,\ldots$$
$$\ldots,w_{n-1};\ p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}).$$

(D4) Aditividade Forte:

$$I_{nm}^\beta(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m},\ldots,w'_{n1},w'_{n2},\ldots,w'_{nm};\ p'_{11},p'_{12},\ldots$$
$$\ldots,p'_{1m},\ldots,p'_{n1},p'_{n2},\ldots,p'_{nm}) = I_n^\beta(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} p_i^\beta\ I_m^\beta\left(w'_{i1},w'_{i2},\ldots,w'_{im};\ \frac{p'_{i1}}{p_i},\frac{p'_{i2}}{p_i},\ldots,\frac{p'_{im}}{p_i}\right)$$

onde

$$w_i = \frac{p'_{i1}w'_{i1}+p'_{i2}w'_{i2}+\ldots+p'_{im}w'_{im}}{p_i}\ ;\quad p_i = p'_{i1}+p'_{i2}+\ldots+p'_{im} \neq 0$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

(D5) Normalidade e Decisividade:

$$I_2^\beta(w',w'';\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(w'+w'') \text{ e } I_2^\beta(w',w'';\ 1,0) = 0.$$

Teorema 2.3.1.:

Seja uma função I_n^β, $\beta \neq 1$, $\beta > 0$, satisfazendo os axiomas (D1) a (D5). Então I_n^β é a entropia pesada de grau β:

$$I_n^\beta(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = (2^{1-\beta}-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n} w_k\,(p_k^\beta - p_k)$$

onde $w_k \geq 0$, $p_k \geq 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ e $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Prova:

No axioma (D4), colocando $p'_{ij} = \frac{1}{nm}$, $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m$, obtemos:

$$w_i = \frac{\frac{1}{nm} w'_{i1} + \frac{1}{nm} w'_{i2} + \ldots + \frac{1}{nm} w'_{im}}{p_i} \;;\; p_i = \underbrace{\frac{1}{nm} + \frac{1}{nm} + \ldots + \frac{1}{nm}}_{m \text{ vezes}} = \frac{1}{n}$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

$$\Rightarrow w_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{ij}}{m}, \; i = 1,2,\ldots,n, \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} w'_{ij} = m w_i, \; i = 1,2,\ldots,n.$$

Portanto, (D4) fica:

$$I^{\beta}_{nm}(w'_{11}, w'_{12}, \ldots, w'_{1m}, \ldots, w'_{n1}, w'_{n2}, \ldots, w'_{nm} \;;\; \frac{1}{nm}, \frac{1}{nm}, \ldots, \frac{1}{nm}) =$$

$$= I^{\beta}_{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{1j}}{m}, \frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{2j}}{m}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{nj}}{m}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} I^{\beta}_{m}\left(w'_{i1}, w'_{i2}, \ldots, w'_{im}; \frac{\frac{1}{nm}}{\frac{1}{n}}, \frac{\frac{1}{nm}}{\frac{1}{n}}, \ldots, \frac{\frac{1}{nm}}{\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= I^{\beta}_{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{1j}}{m}, \frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{2j}}{m}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{m} w'_{nj}}{m}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} I^{\beta}_{m}\left(w'_{i1}, w'_{i2}, \ldots, w'_{im}; \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right). \tag{1}$$

Definindo a função ϕ_β satisfazendo a seguinte equação:

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} w_k}{m} \phi_\beta(m) = I^{\beta}_{m}(w_1, w_2, \ldots, w_m, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}) \tag{2}$$

e substituindo em (1), vem:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w'_{ij}}{nm} \phi_\beta(nm) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w'_{ij}}{nm} \phi_\beta(n) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w'_{ij}}{nm} n^{1-\beta}\phi_\beta(m)$$

$$\Rightarrow \phi_\beta(nm) = \phi_\beta(n) + n^{1-\beta}\phi_\beta(m).$$

Como, por simetria (axioma D2), $\phi_\beta(nm) = \phi_\beta(mn)$, temos:

$$\phi_\beta(n) + n^{1-\beta}\,\phi_\beta(m) = \phi_\beta(m) + m^{1-\beta}\,\phi_\beta(n)$$

$$\Rightarrow \phi_\beta(n)\,[1 - m^{1-\beta}] = \phi_\beta(m)\,[1 - n^{1-\beta}]$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_\beta(n)}{1-n^{1-\beta}} = \frac{\phi_\beta(m)}{1-m^{1-\beta}} = c \text{ constante}$$

$$\Rightarrow \phi_\beta(n) = c\,[1 - n^{1-\beta}]$$

para $n = 2$: $\phi_\beta(2) = \dfrac{2}{w_1+w_2}\, I_2^\beta(w_1,w_2\,;\,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ (de (2))

$$= \frac{2}{w_1+w_2}\cdot\frac{w_1+w_2}{2} \qquad \text{(pelo axioma (D5))}$$

$$\Rightarrow \phi_\beta(2) = 1.$$

Portanto,

$$1 = \phi_\beta(2) = c\,[1 - 2^{1-\beta}]$$

$$\Rightarrow c = [1 - 2^{1-\beta}]^{-1}.$$

Então

$$\phi_\beta(n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1}\,[\,1 - n^{1-\beta}\,].$$

Novamente em (D4), colocando $n = 2$,

$$p'_{1j} = \begin{cases} \frac{1}{m}\ ; & j = 1,2,\ldots,m-m_1 \\ 0\ ; & j = m-m_1+1,\ldots,m \end{cases}$$

e

$$p'_{2j} = \begin{cases} \frac{1}{m}\ ; & j = 1,2,\ldots,m_1 \\ 0\ ; & j = m_1+1,\ m_1+2,\ldots,m \end{cases}$$

para $1 \leqslant m_1 < m$, obtemos:

$$p_1 = \frac{m-m_1}{m},\quad p_2 = \frac{m_1}{m},\quad w_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i}}{m-m_1},\quad w_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1} \qquad (4)$$

e, daí,

$$I_m^{\beta}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1,m-m_1},w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_1};\ \underbrace{\frac{1}{m},\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m}}_{m\ \text{vezes}}) =$$

$$= I_2^{\beta}(w_1,w_2;\ \frac{m-m_1}{m},\ \frac{m_1}{m}) + p_1^{\beta}\ I_m^{\beta}(w'_{11},w'_{12},\ldots,w'_{1m};\ \frac{\frac{1}{m}}{\frac{m-m_1}{m}},\ldots,\frac{\frac{1}{m}}{\frac{m-m_1}{m}},\ 0,$$

$$,\ldots,0) + p_2^{\beta}\ I_m^{\beta}(w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m};\ \frac{\frac{1}{m}}{\frac{m_1}{m}},\frac{\frac{1}{m}}{\frac{m_1}{m}},\ldots,\frac{\frac{1}{m}}{\frac{m_1}{m}};\ 0,\ldots,0)$$

$$= I_2^{\beta}(w_1,w_2;\ 1-\frac{m_1}{m},\ \frac{m_1}{m}) + (1-\frac{m_1}{m})^{\beta}\ I_{m-m_1}^{\beta}(w'_{11},w'_{12},\ldots,\ w'_{1,m-m_1};$$

$$\frac{1}{m-m_1},\ldots,\frac{1}{m-m_1}) + (\frac{m_1}{m})^{\beta}\ I_{m_1}^{\beta}(w'_{21},w'_{22},\ldots,w'_{2m_1};\ \frac{1}{m_1},\frac{1}{m_1},\ldots,\frac{1}{m_1})$$

Por (2):

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i} + \sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m}\ \phi_{\beta}(m) = I_2^{\beta}(w_1,w_2;\ 1-\frac{m_1}{m},\ \frac{m_1}{m}) +$$

$$+ (1-\frac{m_1}{m})^{\beta}\ \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i}}{m-m_1}\ \phi_{\beta}(m-m_1) + (\frac{m_1}{m})^{\beta}\ \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1}\ \phi_{\beta}(m_1)$$

$$\Rightarrow I_2^{\beta}(w_1,w_2;\ 1-\frac{m_1}{m},\frac{m_1}{m}) = \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i} + \sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m}\ \phi(m)\ -$$

$$- (1-\frac{m_1}{m})^{\beta}\ \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i}}{m-m_1}\ \phi_{\beta}(m-m_1) - (\frac{m_1}{m})^{\beta}\ \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1}\ \phi_{\beta}(m_1)$$

Por (3):

$$I_2^{\beta}(w_1,w_2;\ 1-\frac{m_1}{m},\ \frac{m_1}{m}) = \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i} + \sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m}\ (1-2^{1-\beta})^{-1}\left[1-m^{1-\beta}\right] -$$

$$- \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)^{\beta} \frac{\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i}}{m-m_1} \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left[1 - (m-m_1)^{1-\beta}\right] -$$

$$- \left(\frac{m_1}{m}\right)^{\beta} \frac{\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j}}{m_1} \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left[1 - m_1^{\,1-\beta}\right]$$

Como

$\sum_{i=1}^{m-m_1} w'_{1i} = (m-m_1)w_1$ e $\sum_{j=1}^{m_1} w'_{2j} = m_1 w_2$ (por (4)), temos:

$$I_2^{\beta}\left(w_1, w_2;\ 1 - \frac{m_1}{m}, \frac{m_1}{m}\right) = \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left\{ \frac{(m-m_1)w_1 + m_1 w_2}{m} (1 - m^{1-\beta}) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)^{\beta} \left[\left(1 - (m-m_1)^{1-\beta}\right]w_1 - \left(\frac{m_1}{m}\right)^{\beta} \left[1 - m_1^{1-\beta}\right] w_2 \right\}$$

$$= \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{m_1}{m}\right) w_1 + \frac{m_1}{m} w_2 - \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)^{\beta} w_1 - \left(\frac{m_1}{m}\right)^{\beta} w_2\right]$$

fazendo $\frac{m_1}{m} = r$:

$$I_2^{\beta}(w_1, w_2;\ 1 - r, r) = \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left[(1-r)w_1 + r w_2 - (1-r)^{\beta} w_1 - r^{\beta} w_2\right]$$

para todos os números racionais $r \in [0, 1]$. Como I_2 é função contínua para todos os números reais $x \in [0, 1]$, então

$$f(w_1, w_2;\ x) = I_2(w_1, w_2;\ 1 - x,\ x) =$$

$$= \left(1 - 2^{1-\beta}\right)^{-1} \left[(1-x)w_1 + x w_2 - (1-x)^{\beta} w_1 - x^{\beta} w_2\right] \qquad (5)$$

para todos os números reais $x \in [0, 1]$.

De modo idêntico ao do Teor. 2.2.1., poderíamos mostrar que:

$$I_n^{\beta}(w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k=2}^{n} (p_1 + p_2 + \ldots +$$

$$+ \ldots + p_k)^{\beta}\, f\left(\frac{p_1 w_1 + \ldots + p_{k-1} w_{k-1}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1}},\ w_k;\ \frac{p_k}{p_1 + \ldots + p_k}\right)$$

Então, usando (5):

$$I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = \sum_{k=2}^{n} (p_1+p_2+\dots+$$

$$+\dots+p_k)^{\beta}\ \Big[(1 - \frac{p_k}{p_1+\dots+p_k}) \frac{p_1w_1+\dots+p_{k-1}w_{k-1}}{p_1+\dots+p_{k-1}} + (\frac{p_k}{p_1+\dots+p_k}) w_k -$$

$$- (1 - \frac{p_k}{p_1+\dots+p_k})^{\beta} \frac{p_1w_1+\dots+p_{k-1}w_{k-1}}{p_1+\dots+p_{k-1}} -$$

$$- (\frac{p_k}{p_1+\dots+p_k})^{\beta} w_k \Big] . (1 - 2^{1-\beta})^{-1}$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1} \sum_{k=2}^{n} (p_1+p_2+\dots+$$

$$+\dots+p_k)^{\beta} . \Big[\frac{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}}{p_1+p_2+\dots+p_k} \frac{p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{k-1}w_{k-1}}{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}} +$$

$$+ \frac{p_k}{p_1+p_2+\dots+p_k} w_k - \frac{(p_1+p_2+\dots+p_{k-1})^{\beta}}{(p_1+p_2+\dots+p_k)^{\beta}} \frac{p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{k-1}w_{k-1}}{p_1+p_2+\dots+p_{k-1}} -$$

$$- \frac{p_k^{\beta}}{(p_1+p_2+\dots+p_k)^{\beta}} w_k \Big]$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1} \sum_{k=2}^{n} \Big[(p_1+p_2+\dots$$

$$+\dots+p_k)^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{k-1}w_{k-1}) + (p_1+p_2+\dots+p_k)^{\beta-1} p_kw_k -$$

$$- (p_1+p_2+\dots+p_{k-1})^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{k-1}w_{k-1}) - p_k^{\beta} w_k \Big]$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1} \Big[(p_1+p_2)^{\beta-1} p_1w_1 +$$

$$+ (p_1+p_2)^{\beta-1} p_2w_2 - p_1^{\beta-1} p_1w_1 - p_2^{\beta} w_2 +$$

$$+ (p_1+p_2+p_3)^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2) + (p_1+p_2+p_3)^{\beta-1} p_3w_3 -$$

$$- (p_1+p_2)^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2) - p_3^{\beta} w_3+\dots+(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})^{\beta-1} (p_1w_1+$$

$$+p_2w_2+\dots+p_{n-2}w_{n-2}) + (p_1+p_2+\dots+p_{n-1})^{\beta-1} p_{n-1}w_{n-1} - (p_1+p_2 +$$

$$+\dots+p_{n-2})^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{n-2} w_{n-2}) - p_{n-1}^{\beta} w_{n-1} +$$

$$+ \underbrace{(p_1+p_2+\dots+p_n)}_{=1}^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2+\dots+p_{n-1}w_{n-1}) +$$

$$+ \underbrace{(p_1+p_2+\dots+p_n)}_{=1}^{\beta-1} p_nw_n - (p_1+p_2+\dots+p_{n-1})^{\beta-1} (p_1w_1+p_2w_2+\dots +$$

$$+\dots+p_{n-1}w_{n-1}) - p_n^{\beta} w_n] .$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1} [- p_1^{\beta} w_1 -$$

$$- p_2^{\beta} w_2 - p_3^{\beta} w_3 -\dots-p_{n-1}w_{n-1}^{\beta} - p_n^{\beta} w_n + p_1w_1 +$$

$$+\dots+p_{n-1}w_{n-1} + p_nw_n]$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1} [- (p_1^{\beta} w_1 +$$

$$+ p_2^{\beta} w_2+\dots+p_n^{\beta} w_n - p_1w_1-p_2w_2-\dots-p_nw_n)]$$

$$\Rightarrow I_n^{\beta}(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) = (1 - 2^{1-\beta})^{-1}[- \sum_{k=1}^{n} (p_k^{\beta} w_k -$$

$$- p_kw_k)]$$

$$\Rightarrow I_n^\beta(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k\ (p_k^\beta - p_k)$$

a qual é a Entropia Pesada de Grau β.

C.Q.D.

<u>Casos</u> <u>Particulares</u>:

I - $\lim_{\beta\to 1} I_n^\beta\ (w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = -\sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k$

que é a entropia pesada.

II - Se $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = w$, então

$$I_n^\beta(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= I_n^\beta(p_1,p_2,\ldots,p_n) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} w \sum_{k=1}^{n} (p_k^\beta - p_k)$$

que é a entropia de grau β para $w = 1$.

(Referência: Daróczy [1970] e Havrda e Charvát [1967]).

2.4 - Caracterização Generalizada da Entropia Pesada

Nesta secção, mostraremos que, se substituirmos p_k ou p_k^β no axioma de Recursividade por uma função contínua geral $f(p)$, com os axiomas de Continuidade, Simetria, Normalidade e Decisividade, obteremos as mesmas medidas das secções 2.2. e 2.3.

Seja a função $I_n^f\ (W;P)$, $P = (p_1,p_2,\dots,p_n) \in \Delta_n$, $W = (w_1, w_2,\dots,w_n)$, $w_k \geqslant 0$ $(k = 1,2,\dots,n)$, satisfazendo os seguintes axiomas:

(E1) $I_n^f\ (w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n)$ é *contínua* para $p_k \geqslant 0$, $w_k \geqslant 0$ $(k = 1,2,\dots,n)$ e

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

(E2) $I_n^f\ (w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n)$ e *simétrica* para todo par $(w_k;\ p_k)$ $(k = 1,2,\dots,n)$.

(E3) $I_n^f\ (W;\ P)$ é *recursiva generalizada*. Isto é,

$$I_{m+n-1}^f(w_1,w_2,\dots,w_{k-1},w_1',w_2',\dots,w_m',w_{k+1},w_{k+2},\dots,w_n;$$

$$p_1,p_2,\dots,p_{k-1},p_1',p_2',\dots,p_m',p_{k+1},p_{k+2},\dots,p_n) =$$

$$= I_n^f(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) + f(p_k)\ I_m^f(w_1',w_2',\dots,w_m';$$

$$\frac{p_1'}{p_k}, \frac{p_2'}{p_k},\dots, \frac{p_m'}{p_k})$$

onde

$$w_k = \frac{p_1'w_1'+p_2'w_2'+\dots+p_m'w_m'}{p_k}\ ; \quad p_k = p_1' + p_2' + \dots + p_m' \neq 0$$

e f é função contínua para $p \in [\ 0,\ 1\ ]$ e $f(0) = 0$.

(E4) $I_2^f\ (w_1,w_2;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(w_1+w_2)$. Isto é, $I_2^f\ (W;\ P)$ é *normalizada*.

(E5) $I_2^f(w_1, w_2;\ 1,\ 0) = 0$. Isto é, $I_2^f\ (W;\ P)$ é *decisiva*.

Teorema 2.4.1.

Se a função I_n^f satisfaz os axiomas (E1) a (E5) então as entropias determinadas pelos axiomas (E1) a (E5) são da forma:

$$I_n(w_1, w_2, \ldots, w_n\ ;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} w_k\ p_k \log p_k$$

ou

$$I_n^{\beta}(w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k (p_k^{\beta} - p_k)$$

com $\beta > 0 \quad \beta \neq 1$.

Provaremos inicialmente três lemas:

Lema 2.4.2:

Se $p_{kj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, m_k$; $\sum_{j=1}^{m_k} p_{kj} = p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$

$\ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $w_k = \dfrac{p_{k1} w_{k1} + p_{k2} w_{k2} + \ldots + p_{km_k} w_{km_k}}{p_k}$, $k = 1, 2, \ldots n$.

Então,

$$I^f_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1m_1}, \ldots, w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nm_n};$$

$$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m_1}, \ldots, p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm_n}) =$$

$$= I_n^f\ (w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\ I^f_{m_k}(w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{km_k};\ \frac{p_{k1}}{p_k}, \frac{p_{k2}}{p_k}, \ldots, \frac{p_{km_k}}{p_k})$$

Prova:

Pelo axioma (E3):

$$I^f_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w_{11},w_{12},\ldots,w_{1m_1},\ldots,w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_{11},p_{12},\ldots,p_{1m_1},\ldots,p_{n1},p_{n2},\ldots,p_{nm_n}) =$$

$$= I^f_{1+m_2+m_3+\ldots+m_n}(w_1,w_{21},w_{22},\ldots,w_{2m_2},\ldots,w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_1,p_{21},p_{22},\ldots,p_{2m_2},\ldots,p_{n1},p_{n2},\ldots,p_{nm_n}) +$$

$$+ f(p_1)\, I^f_{m_1}(w_{11},w_{12},\ldots,w_{1m_1};\frac{p_{11}}{p_1},\frac{p_{12}}{p_1},\ldots,\frac{p_{1m_1}}{p_1}) \qquad \text{(A1)}$$

onde

$$w_1 = \frac{p_{11}w_{11}+p_{12}w_{12}+\ldots+p_{1m_1}w_{1m_1}}{p_1} \; ; \; p_1 = p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1m_1} > 0.$$

Novamente, pelo axioma (E3), temos:

$$I^f_{1+m_2+m_3+\ldots+m_n}(w_1,w_{21},w_{22},\ldots,w_{2m_2},\ldots,w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_1,p_{21},\ldots,p_{2m_2},\ldots,p_{n1},\ldots,p_{nm_n}) =$$

$$= I^f_{2+m_3+m_4+\ldots+m_n}(w_1,w_2,w_{31},w_{32},\ldots,w_{3m_3},\ldots,w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_1,p_2,p_{31},p_{32},\ldots,p_{3m_3},\ldots,p_{n1},p_{n2},\ldots,p_{nm_n}) +$$

$$+ f(p_2)\, I^f_{m_2}(w_{21},w_{22},\ldots,w_{2m_2};\frac{p_{21}}{p_2},\frac{p_{22}}{p_2},\ldots,\frac{p_{2m_2}}{p_2}) \qquad \text{(A2)}$$

onde

$$w_2 = \frac{p_{21}w_{21}+p_{22}w_{22}+\ldots+p_{2m_2}w_{2m_2}}{p_2} \; ; \; p_2 = p_{21}+p_{22}+\ldots+p_{2m_2} > 0.$$

Assim, aplicando sucessivas vezes o axioma (E3), obtemos:

$$I^f_{(n-1)+m_n}(w_1,w_2,\ldots,w_{n-1},w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_{n1},p_{n2},\ldots,p_{nm_n}) =$$

$$= I^f_n(w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) + f(p_n)\ I^f_{m_n}(w_{n1},w_{n2},\ldots,$$

$$\ldots,w_{nm_n};\ \frac{p_{n1}}{p_n}, \frac{p_{n2}}{p_n},\ldots, \frac{p_{nm_n}}{p_n}) \qquad \text{(An)}$$

onde,

$$w_n = \frac{p_{n1}w_{n1}+p_{n2}w_{n2}+\ldots+p_{nm_n}w_{nm_n}}{p_n}\ ;\ p_n = p_{n1}+p_{n2}+\ldots+p_{nm_n} > 0.$$

Então, por (A1), (A2),..., (An) temos:

$$I^f_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(w_{11},w_{12},\ldots,w_{1m_1},\ldots,w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$p_{11},p_{12},\ldots,p_{1m_1},\ldots,p_{n1},p_{n2},\ldots,p_{nm_n}) =$$

$$= I^f_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) + f(p_1)\ I^f_{m_1}(w_{11},w_{12},\ldots,w_{1m_1};$$

$$\frac{p_{11}}{p_1}, \frac{p_{12}}{p_1},\ldots,\frac{p_{1m_1}}{p_1}) + f(p_2)\ I^f_{m_2}(w_{21},w_{22},w_{23},\ldots, w_{2m_2};$$

$$\frac{p_{21}}{p_2},\frac{p_{22}}{p_2},\ldots,\frac{p_{2m_2}}{p_2})+\ldots+ f(p_n)\ I^f_{m_n}(w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nm_n};$$

$$\frac{p_{n1}}{p_n}, \frac{p_{n2}}{p_n},\ldots,\frac{p_{nm_n}}{p_n})$$

onde

$$w_k = \frac{p_{k1}w_{k1}+p_{k2}w_{k2}+\ldots+p_{km_k}w_{km_k}}{p_k}\ ;\ p_k = p_{k1}+p_{k2}+\ldots+p_{km_k} > 0$$

$$k = 1,2,\ldots,n.$$

Então,

$$I^f_{m_1+m_2+\dots+m_n}(w_{11},w_{12},\dots,w_{1m_1},\dots,w_{n1},w_{n2},\dots,w_{nm_n};$$

$$p_{11},p_{12},\dots,p_{1m_1},\dots,p_{n1},p_{n2},\dots,p_{nm_n}) =$$

$$= I^f_n(w_1,w_2,\dots,w_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\ I^f_{m_k}(w_{k1},w_{k2},\dots,w_{km_k};\ p_{k1},p_{k2},\dots,p_{km_k})$$

onde

$$w_k = \frac{p_{k1}w_{k1}+p_{k2}w_{k2}+\dots+p_{km_k}w_{km_k}}{p_k}\ ;\ p_k = p_{k1}+p_{k2}+\dots+p_{km_k} > 0$$

$$k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

C.Q.D.

<u>Lema 2.4.3:</u>

Se F é uma função tal que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} F(n) = I^f_n(w_1,w_2,\dots,w_n;\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\dots,\ \frac{1}{n}),\ \sum_{k=1}^{n} w_k \neq 0; \qquad (1)$$

então, $F(n) = A \log n$ (2)

ou

$$F(n) = B\left[n\ f(\tfrac{1}{n}) - 1\right] \qquad (3)$$

onde A e B são constantes e f é função contínua para

$p \in [0,\ 1]$ e $f(0) = 0$.

<u>Prova:</u>

No Lema 2.4.2., tomando $m_k = m$ e fazendo $p_{kj} = \frac{1}{nm}$,

$k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos:

$$I_{nm}^{f}(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1m}, \ldots, w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nm}; \underbrace{\frac{1}{nm}, \frac{1}{nm}, \ldots, \frac{1}{nm}}_{nm \text{ vezes}}) =$$

$$= I_{n}^{f}(w_1, w_2, \ldots, w_n; \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ vezes}}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n}) \; I_{m}^{f}(w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{km}; \underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{m \text{ vezes}}).$$

Por (1):

$$F(nm) \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{kj}}{nm} = F(n) \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n}) \; F(m) \frac{\sum_{j=1}^{m} w_{kj}}{m}$$

ou

$$F(nm) \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} = F(n) \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{n} + \sum_{k=1}^{n} w_k \; f(\frac{1}{n}) \; F(m)$$

$$\Rightarrow F(nm) = F(n) + n \; f\,(\frac{1}{n}) \quad F(m).$$

Agora, temos dois casos:

CASO I: Se $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, temos:

$$F(nm) = F(n) + F(m) \tag{4}$$

$$I_2^{f}(w, w'; \frac{n}{n+1}, 1 - \frac{n}{n+1}) = I_2^{f}(w, w'; \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1})$$

$$= -\,(1 - \frac{n}{n+1})\; w' \left[F(1) - F(n+1) \right] - \frac{n}{n+1} \; w \left[F(n) - \right.$$

$$\left. - F(n+1) \right] \qquad \text{(pelo (Teor. 2.1.1.))}$$

$$= \frac{1}{n+1} \; w' \; F(n+1) - \frac{n}{n+1} \; w \; F(n) + \frac{n}{n+1} \; w \; F(n+1)$$

$$= \frac{n\,w + w'}{n+1} F(n+1) - \frac{n\,w}{n+1} F(n)$$

Colocando $w = w'$:

$$I_2^f (w,w'; \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}) = w\,F(n+1) - \frac{n}{n+1} w\,F(n)$$

$$= w \left[F(n+1) - \frac{n}{n+1} F(n) \right] .$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w \left[F(n+1) - \frac{n}{n+1} F(n) \right] = \lim_{n\to\infty} I_2^f(w,w'; \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} I_2^f(w, w'; 1 - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) =$$

$$= I_2^f (w, w'; 1, 0) \qquad \text{(por (E1))}$$

$$= 0 \qquad \text{(por (E5))}$$

para $w \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \left[F(n+1) - \frac{n}{n+1} F(n)\right] = 0$ (5)

A equação (4) com a equação (5) nos dá:

$F(n) = A \log n$, onde A é uma constante (referência Aczel e Daroczy - Teor. 0.4.20 - p. 20).

CASO II: Se $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n}$, por simetria (axioma (E2)), temos $F(nm) = F(mn)$.

Então,

$$F(n) + n\,f(\tfrac{1}{n})\,F(m) = F(m) + m\,f(\tfrac{1}{m})\,F(n)$$

$$\Rightarrow F(n) \left[m\,f(\tfrac{1}{m}) - 1 \right] = F(m) \left[n\,f(\tfrac{1}{n}) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{F(n)}{n\,f(\frac{1}{n}) - 1} = \frac{F(m)}{m\,f(\frac{1}{m}) - 1} = B \text{ constante}$$

$$\Rightarrow F(n) = B \left[n\,f(\tfrac{1}{n}) - 1 \right] \quad \text{que é (3).}$$

Lema 2.4.4:

A função f no axioma (E3) satisfaz:

$f(pq) = f(p) \, . \, f(q), \quad \forall\ p,q \ \epsilon \ [0,\ 1]$ números reais.

Prova:

Do axioma (E3) podemos escrever:

$$I^{f}_{m+n-1}\,(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},\ w'_1,w'_2,\ldots,w'_m,\ w_{k+1},w_{k+2},\ldots,\ w_n\ ;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},\ p'_1,p'_2,\ldots,p'_m,\ p_{k+1},p_{k+2},\ldots,p_n) =$$

$$= I^{f}_{n}\,(w_1,w_2,\ldots,w_n\ ;\ p_1,p_2,\ldots,p_n)\ +$$

$$+\ f(p_k)\ I^{f}_{m}\,(w'_1,w'_2,\ldots,w'_m\ ;\ \frac{p'_1}{p_k},\ \frac{p'_2}{p_k},\ldots,\ \frac{p'_m}{p_k})$$

onde

$$w_k = \frac{p'_1w'_1+p'_2w'_2+\ldots+p'_mw'_m}{p_k}\ ;\ p_k = p'_1+p'_2+\ldots+p'_m > 0,\ k = 1,2,\ldots,n.$$

$$\Rightarrow\ I^{f}_{m+n-1}\,(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},\ w'_1,w'_2,\ldots,w'_m,\ w_{k+1},\ldots,w_n\ ;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p'_1,p'_2,\ldots,p'_m,p_{k+1},\ldots,p_n) =$$

$$= I^{f}_{n}\,(w_1,w_2,\ldots,w_n;p_1,p_2,\ldots,p_n)+f(p_k)\Big[\,I^{f}_{2}(w'_1,\bar{w};\ \frac{p'_1}{p_k},\ \frac{\bar{p}}{p_k})\ +$$

$$+\ f(\frac{\bar{p}}{p_k})\ I^{f}_{m-1}(w'_2,w'_3,\ldots,w'_m;\ \frac{p'_2}{\bar{p}},\ \frac{p'_3}{\bar{p}},\ldots,\ \frac{p'_m}{\bar{p}})\,\Big] \qquad (6)$$

onde

$$\bar{w} = \frac{p'_2w'_2+p'_3w'_3+\ldots+p'_mw'_m}{\bar{p}}\ ;\ \bar{p} = p'_2 + p'_3 + \ldots + p'_m > 0.$$

Similarmente,

$$I^f_{m+n-1}(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},w'_1,w'_2,\ldots,w'_m, w_{k+1},\ldots,w_n;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p'_1,p'_2,\ldots,p'_m,p_{k+1},\ldots,p_n) =$$

$$= I^f_{n+1}(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},w'_1,\bar{w},w_{k+1},\ldots,w_n; \ p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p'_1, \bar{p},$$

$$p_{k+1},\ldots,p_n) + f(\bar{p}) \ I^f_{m-1}(w'_2,w'_3,\ldots,w'_m; \frac{p'_2}{\bar{p}}, \frac{p'_3}{\bar{p}},\ldots, \frac{p'_m}{\bar{p}})$$

onde

$$\bar{w} = \frac{p'_2w'_2+p'_3w'_3+\ldots+p'_mw'_m}{\bar{p}} \quad ; \quad \bar{p} = p'_2 + p'_3 +\ldots+ p'_m > 0.$$

Mas, por (E3):

$$I^f_{n+1}(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},w'_1,\bar{w},w_{k+1},\ldots,w_n; \ p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}, p'_1,\bar{p},p_{k+1},$$

$$,\ldots,p_n) = I^f_n(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1}, w_k, w_{k+1},\ldots,w_n;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p_k,p_{k+1},\ldots,p_n) + f(p_k) \ I^f_2(w'_1,\bar{w}; \frac{p'_1}{p_k}, \frac{\bar{p}}{p_k})$$

onde

$$w_k = \frac{p'_1w'_1+\bar{p}\bar{w}}{p_k} \quad ; \quad p_k = p'_1 + \bar{p} > 0$$

Portanto,

$$I^f_{m+n-1}(w_1,w_2,\ldots,w_{k-1},w'_1,w'_2,\ldots,w'_m,w_{k+1},\ldots,w_n;$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},p'_1,p'_2,\ldots,p'_m,p_{k+1},\ldots,p_n) =$$

$$= I^f_n(w_1,w_2,\ldots,w_n; \ p_1,p_2,\ldots,p_n) + f(p_k) \ I^f_2(w'_1,\bar{w},\frac{p'_1}{p_k},\frac{\bar{p}}{p_k}) +$$

$$+ f(\bar{p}) \ I^f_{m-1}(w'_2,w'_3,\ldots,w'_m; \frac{p'_2}{\bar{p}}, \frac{p'_3}{\bar{p}},\ldots, \frac{p'_m}{\bar{p}}) \tag{7}$$

onde

$$\bar{w} = \frac{p'_2 w'_2 + p'_3 w'_3 + \ldots + p'_m w'_m}{\bar{p}} \quad ; \quad \bar{p} = p'_2 + p'_3 + \ldots + p'_m > 0$$

$$w_k = \frac{p'_1 w'_1 + \bar{p}\bar{w}}{p_k} = \frac{p'_1 w'_1 + p'_2 w'_2 + \ldots + p'_m w'_m}{p_k}$$

$$p_k = p'_1 + \bar{p} = p'_1 + p'_2 + p'_3 + \ldots + p'_m > 0$$

Comparando (6) e (7):

$$f(\bar{p}) = f(p_k) \, . \, f\left(\frac{\bar{p}}{p_k}\right)$$

ou

$$f\left(p_k \, . \frac{\bar{p}}{p_k}\right) = f(p_k) \, . \, f\left(\frac{\bar{p}}{p_k}\right)$$

fazendo:

$$p = p_k \quad , \quad q = \frac{\bar{p}}{p_k}$$

temos:

$f(p.q) = f(p).f(q)$, para todos $p.q \in [0, 1]$.

C.Q.D.

Prova (do Teorema 2.4.1):

Seja $p_k = \dfrac{r_k}{m}$; $k = 1,2,\ldots,n$; $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k = m$;

r_k e m inteiros positivos.

Colocando, no Lema 2.4.2, $m_k = r_k$, obtemos:

$$I^f_{r_1+r_2+\ldots+r_n}(w_{11},w_{12},\ldots,w_{1r_1},\ldots, w_{n1},w_{n2},\ldots,w_{nr_n};$$

$$p_{11},p_{12},\ldots,p_{1r_1},\ldots,p_{n1},p_{n2},\ldots, p_{nr_n}) =$$

$$= I_m^f(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1r_1}, \ldots, w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nr_n} ;$$

$$\underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{r_1 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}_{r_n \text{ vezes}}) =$$

$$= I_n^f\,(w_1, w_2, \ldots, w_n \; ; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) \; +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\; I_{r_k}^f\,(w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{kr_k} \; ; \; \underbrace{\frac{1}{r_k}, \frac{1}{r_k}, \ldots, \frac{1}{r_k}}_{r_k \text{ vezes}})$$

onde

$$w_k = \frac{\frac{1}{m}\, w_{k1} + \frac{1}{m}\, w_{k2} + \ldots + \frac{1}{m}\, w_{kr_k}}{p_k} \quad ; \quad p_k = \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{r_k \text{ vezes}} = \frac{r_k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad w_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_{kj}}{r_k}$$

Portanto,

$$I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n ; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = I_m^f(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1r_1}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nr_n} ;$$

$$\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}) - \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\; I_{r_k}^f\,(w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{kr_k} ; \frac{1}{r_k}, \frac{1}{r_k}, \ldots, \frac{1}{r_k})$$

$$\Rightarrow \quad I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n ; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_{kr_k}}{m}\; F(m) \; -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\; \frac{\sum_{j=1}^{n} w_{kj}}{r_k}\; F(r_k)$$

$$\Rightarrow \quad I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n ; \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k p_k \; F(m) \; -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} w_k \, f(p_k) \, F(r_k). \tag{8}$$

(1º) Se $f(p_k) = p_k$, pelo Lema 2.4.3:

$$F(m) = A \log m.$$

Então,

$$I_n^f(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k p_k . A \log m - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log r_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log m - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log (p_k m)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log m - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log m - \sum_{k=1}^{n} w_k p_k A \log p_k$$

$$= - A \sum_{k=1}^{n} w_k \, p_k \log p_k .$$

Como no 2º membro não existe f, isto é; não depende de f:

$$I_n(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = - A \sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k \tag{9}$$

Pelo axioma (E4):

$$\frac{1}{2} (w_1 + w_2) = I_2^f (w_1,w_2;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$= - A w_1 . \frac{1}{2} . \log \frac{1}{2} - A w_2 . \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \qquad \text{(por(9))}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2} A (w_1 \log 2 + w_2 \log 2)$$

$$= \frac{1}{2} A (w_1 + w_2)$$

$$\Rightarrow A = 1.$$

Portanto,

$$I_n^f(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = -\sum_{k=1}^{n} w_k p_k \log p_k$$

que é entropia pesada.

(2º) Se $f(p_k) \neq p_k$, então, pelo Lema 2.4.3:

$$F(m) = B\left[m f\left(\frac{1}{m}\right) - 1\right].$$

Substituindo em (8):

$$I_n^f(w_1,w_2,\ldots,w_n;\ p_1,p_2,\ldots,p_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k p_k B\left[m f\left(\frac{1}{m}\right) - 1\right] - \sum_{k=1}^{n} w_k f(p_k) B\left[r_k f\left(\frac{1}{r_k}\right) - 1\right]$$

$$= B \sum_{k=1}^{n} w_k \left[p_k . m f\left(\frac{1}{m}\right) - p_k - r_k f(p_k) f\left(\frac{1}{r_k}\right) + f(p_k)\right]$$

$$= B \sum_{k=1}^{n} w_k \left[p_k m f\left(\frac{1}{m}\right) - p_k - p_k m f(p_k) . f\left(\frac{1}{r_k}\right) + f(p_k)\right]$$

$$= B \sum_{k=1}^{n} w_k \left[p_k m f\left(\frac{p_k}{r_k}\right) - p_k - p_k m f\left(\frac{p_k}{r_k}\right) + f(p_k)\right]$$

$$= B \sum_{k=1}^{n} w_k \left[f(p_k) - p_k\right] \qquad (10)$$

onde $f(p_k) \neq p_k$

Pelo axioma (E4):

$$\frac{1}{2}(w_1 + w_2) = I_2^f\left(w_1, w_2;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= B\left\{w_1\left[f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + w_2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]\right\} \qquad \text{(por (10))}$$

$$= B\left\{(w_1 + w_2)\left[f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = (w_1 + w_2)\, B\left[f(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = B\left[f(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow B\left[2\, f(\tfrac{1}{2}) - 1\right] = 1$$

$$B = \left[2\, f(\tfrac{1}{2}) - 1\right]^{-1}$$

Portanto,

$$I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= \left[2\, f(\tfrac{1}{2}) - 1\right]^{-1} . \sum_{k=1}^{n} w_k \left[f(p_k) - p_k\right], \quad f(p_k) \neq p_k$$

onde f satisfaz

$$f(pq) = f(p).f(q)\ , \quad p,q \quad [0,\ 1] \tag{11}$$

A solução geral estritamente monotômica de (11) (referência: Aczél e Daróczy - Corolário 0.3.35 - p. 14) é

$$f(p) = p^{\beta},\ \beta > 0,\ \beta \neq 1 \text{ e para todo } p \in [0,\ 1]\ .$$

Portanto,

$$I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left[2(\tfrac{1}{2})^{\beta} - 1\right]^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k (p_k^{\beta} - p_k)$$

$$\Rightarrow I_n^f(w_1, w_2, \ldots, w_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} w_k (p_k^{\beta} - p_k)$$

para $\beta > 0,\ \beta \neq 1$

a qual é a entropia pesada de grau β.

C.Q.D.

BIBLIOGRAFIA

(1) ACZÉL, J.; DARÓCZY, Z. *On Measure of Information and their Characterization.* Academic Press, London, 1975.

(2) AGGARWAL, N. L.; PICARD, C. F. *Functional Equations and Information Measures with Preference.* Colloque Funktionalgleichungen, 22-28 Mai, 1977, Oberwolfach.

(3) ASH, R. B. *Information Theory.* Interscience Publishers, New York, 1965.

(4) EMPTOZ, M. H.; PETIAU, M. G. Information de Type β Intégrant un Concept d'Utilité. *C. R. Acad. Sc. Paris, 282:* 911-914, 1976.

(5) GUIAŞU, S. *Information Theory with Applications.* McGraw-Hill, New York, 1975.

(6) LONGO, G. A. Noiseless Coding Theorem for Sources having Utilities. *SIAM, J. Appl. Math., 30:* 739-748, 1976.

(7) TANEJA, I. J. On the Branching Property of Entropy. *Annales Polonici Mathematici, XXXV,* 67-75, 1977.