Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"M E S T R E   E M   C I Ê N C I A S"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

William G. Whitley

Professor William Glenn Whitley, Ph.D.
Coordenador

Banca Examinadora:

Italo J. Dejter

Professor Ítalo José Dejter, Ph.D.
Orientador

Donald Morison Silberger

Professor Donald Morrison Silberger, Ph.D.

Tarcisio Praciano

Professor Tarcísio Praciano Pereira, Ph.D.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY

ZILÃ MARIA DA SILVA E SOUZA

dezembro/1980

À minha mãe,
Maria Virginia.

AGRADECIMENTOS:

- Ao Professor Ítalo José Dejter pela valiosa orientação e amizade.
- Ao Pedro Paulo, Daniel, Rafael, Carolina e Tia Zezé pelo apoio e carinho.
- Aos colegas de departamento pela amizade e estímulo.
- À Universidade Federal de Santa Catarina.

R E S U M O

Este trabalho trata das classes de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial, sua existência, unicidade e aplicação.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

Este trabalho oferece uma apresentação axiomática das classes de Stiefel-Whitney definidas como certas classes de cohomologia associadas a fibrados vetoriais sobre espaços topológicos, seguindo as idéias de J.W.Milnor em [9] . A existência e unicidade das classes de Stiefel-Whitney assim definidas e dada ao final do trabalho, sendo que o objetivo fundamental é o de usar as propriedades de tais classes e dos números de Stiefel-Whitney que elas determinam para estabelecer o teorema de Thom, o que é atingido no Capítulo III.

FIBRADOS VETORIAIS

1.1 - Definição: Um fibrado vetorial real ξ sobre um espaço topológico fixo B, chamado espaço base, consiste de:

i) um espaço topológico E chamado espaço total.

ii) uma aplicação contínua $\pi : E \longrightarrow B$ chamada aplicação projeção.

iii) para cada $b \in B$ a estrutura de uma espaço vetorial sobre os reais no conjunto $\pi^{-1}(b)$.

Satisfazendo a seguinte restrição:

Para cada ponto $b \in B$ existirá uma vizinhança $\mathcal{U} \subset B$, um inteiro $n \geqslant 0$ e um homeomorfismo $h: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ tal que, para cada $b \in \mathcal{U}$, a correspondência $x \longrightarrow h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

1.2 - Definição: Um sistema de coordenadas locais para ξ é um par $(\mathcal{U}, h)$ numa vizinhança de $b \in B$.

1.3 - Definição: Se é possível escolher $\mathcal{U}$ igual ao espaço básico inteiro então ξ será chamado um fibrado trivial.

1.4 - Definição: O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado fibra sobre b. Denotaremos por F_b.

1.5 - Definição: A dimensão n de F_b é função de b. Em muitos casos de interesse esta função é constante, então falamos num $\mathbb{R}^n$-fibrado.

1.6 - Definição: Fibrado vetorial diferenciável - é um fibrado vetorial onde B e E são variedades diferenciáveis, π é uma aplicação diferenciável e para cada $b \in B$ existe um sistema de coordenadas locais $(\mathcal{U}, h)$ com $b \in \mathcal{U}$ tal que h é difeomorfismo.

1.7 - Definição: Fibrados isomórficos.

Sejam dois fibrados vetoriais ξ e η sobre o mesmo espaço B. ξ é isomórfico a η, $\xi \cong \eta$, se existe um homeomorfismo $f: E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ entre os espaços totais, que mapeia cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$.

1.8 - <u>Exemplo</u>: $\mathcal{E}^n_B$-fibrado trivial com espaço total $B \times \mathbb{R}^n$ com a aplicação $\pi(b, x) = b$ e com a estrutura de espaço vetorial nas fibras definidas por: $t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2)$

1.9 - <u>Afirmação</u>: Um $\mathbb{R}^n$-fibrado sobre B é trivial se e somente se é isomórfico a $\mathcal{E}^n_B$.

<u>Prova</u>: i) Se ξ é um $\mathbb{R}^n$-fibrado trivial B, então $\xi \cong \mathcal{E}^n_B$.

Seja ξ um $\mathbb{R}^n$-fibrado trivial sobre B então $B = \mathcal{U}$ e, pela condição de trivialidade local temos que o homeomorfismo

$h: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(B)$ nada mais é que um homeomorfismo que leva: $E(\mathcal{E}^n_B) \longrightarrow E(\xi)$, logo: $\xi \cong \mathcal{E}^n_B$.

ii) Por outro lado se $\mathcal{E}^n_B \cong \xi$ temos que existe homeomorfismo

$f: E(\mathcal{E}^n_B) \longrightarrow E(\xi)$, ou seja, $f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\xi) = \pi^{-1}(B)$.

Logo a condição de trivialidade satisfeita nos dá $B = \mathcal{U}$.

Assim: ξ é um $\mathbb{R}^n$-fibrado.

1.10 - <u>Exemplo</u>: $\mathcal{T}_M$-fibrado tangente de uma variedade diferenciável M.

Espaço total de $\mathcal{T}_M$-variedade DM consistindo de todos os pares (x, v) com $x \in M$ e v tangente a M em x.

Aplicação projeção - $\pi(x, v) = x$

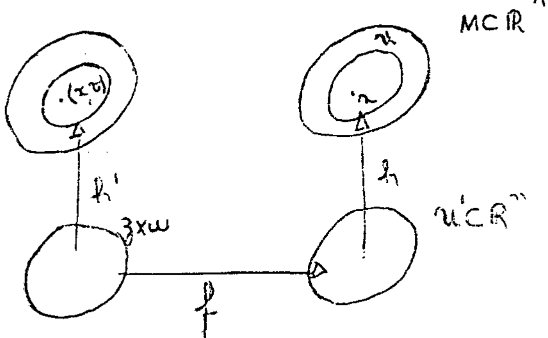
Espaço base - M

a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ é definida por:

$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$.

Verifiquemos a condição de trivialidade local:

Como M é uma variedade diferenciável temos que para cada $x \in M$ existe função diferenciável $h: \mathcal{U}' \longrightarrow \mathbb{R}^A$, definida sobre um aberto $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$ e tal que h mapeia $\mathcal{U}'$ difeomorficamente sobre uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x em M. Da mesma forma existirá h' que mapeará $\mathfrak{z} \times w$ difeomorficamente sobre uma vizinhança (x, v) em DM, conforme desenho abaixo:



localmente teremos qie se $x \in M$ e $\mathcal{U} \subset M$ é um aberto contendo x então a aplicação $H: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow D\mathcal{U}$ será um difeomorfismo pois h' é um difeomorfismo. Assim, considerando a correspondência $x \longrightarrow H(b, x)$ teremos um isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e $\pi^{-1}(x)$.

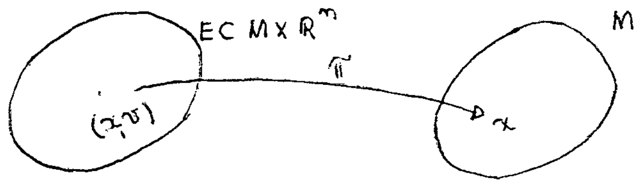
Observação: $\mathcal{J}_M$ é um exemplo de um fibrado vetorial diferenciável, porque M e DM são variedades diferenciáveis, π é aplicação diferenciável e H é difeomorfismo.

1.11 - Exemplo: Fibrado normal γ de uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definição: Espaço normal - para cada $x \in M$ o espaço normal de M em x é o complemento ortogonal de DM_x em $\mathbb{R}^n$. O denotaremos por $N_x(M)$.

Definição: Fibrado normal é definido como sendo o conjunto:

$$\gamma(M) = \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n,\ v \in N_x(M)\}$$



onde a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ é dada por:

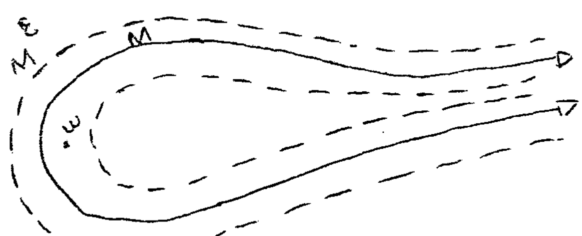
$\pi(x,v) = x$; $t_1(x,v_1) + t_2(x,v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$

Usaremos este fibrado com o objetivo de provar o Teorema da ε-vizinhança:

Teorema da ε-vizinhança:

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade sem bordo compacta e sejam dados número positivo ε e M^ε o conjunto aberto dos pontos em $\mathbb{R}^n$ com distância menor do que ε de M.

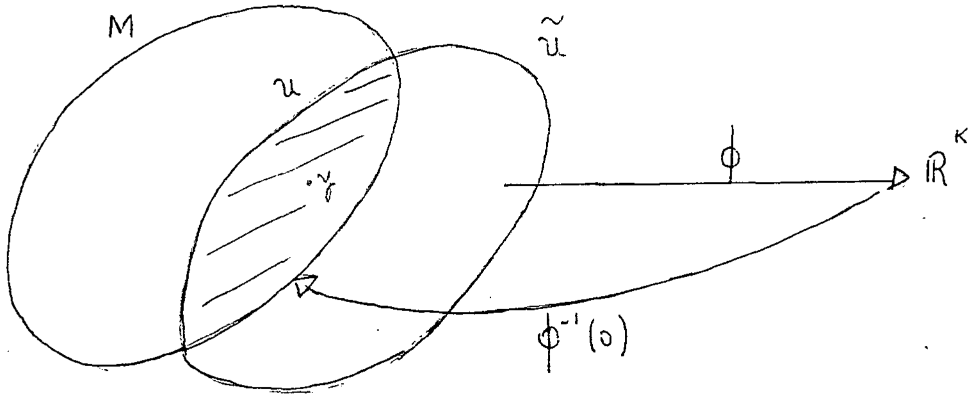
Se ε é sufientemente pequeno, então cada ponto $w \in M^\varepsilon$ possui um único ponto mais próximo em M, denotado por $\varphi(w)$. Além disso a aplicação: $\varphi : M^\varepsilon \longrightarrow M$ é uma submersão [4, pág. 70]. Quando M não é compacta, existe ainda uma submersão $\varphi : M^\varepsilon \longrightarrow M$ que é a identidade sobre M, mas agora ε é uma função diferenciável positiva sobre M e Y^ε é definido como: $\{w \in \mathbb{R}^n;\ |x-y| < \varepsilon(y)$ para algum $y \in M\}$



Proposição: Se $M \subset \mathbb{R}^N$ então γ (M) é uma variedade de dimensão N e a projeção $\sigma : \gamma(M) \longrightarrow M$ é uma submersão.

Prova: Definamos M localmente:

ao redor de qualquer ponto de M, ache um conjunto aberto $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathbb{R}^N$ e uma submersão $\phi : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ onde K = codim M, tal que: $U = M \cap \tilde{\mathcal{U}} = \phi^{-1}(0)$



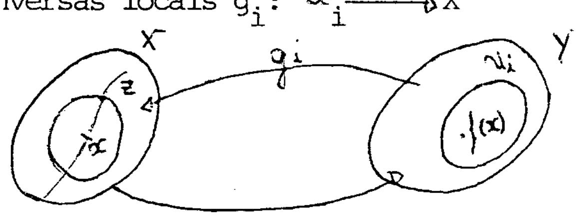
O conjunto $N(\mathcal{U}) = \gamma(M) \cap (\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n)$ é aberto em γ (M). Para cada $y \in \mathcal{U}$; $d\phi_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^K$ é sobrejetiva, já que ϕ é submersão e tem kernel $T_y(M)$, pela definição da ϕ . Portanto sua transposta leva $\mathbb{R}^K$ isomorficamente sobre $\gamma_y(M)$. [4, pág. 71].
A aplicação $\psi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^K \longrightarrow N(\mathcal{U})$ definida por:
$\psi(y, v) = (y, d\phi_y^t v)$, onde $d\phi_y^t$ é a transposta de $d\phi_y$ é portanto bijetiva e é um mergulho de $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^K$ em $M \times \mathbb{R}^n$, isto é, ψ é um homeomorfismo. Logo $N(\mathcal{U})$ é uma variedade parametrizada pela ψ com dimensão igual a $\dim \mathcal{U} + K = \dim M + \text{codim } M = n$ [4, pág. 24] já que todo ponto de γ (M) tem uma vizinhança então γ (M) é uma variedade. E como $\sigma \circ \psi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathcal{U}$ coincide com a submersão canônica então σ é uma submersão.

Passemos à prova do teorema da ε-vizinhança:

Prova : Seja $h: \gamma(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $h(y, v) = y + v$, h é regular em todo ponto de $M \times \{o\}$ em $\gamma(M)$ já que h é uma submersão em todo ponto de $M \times \{o\}$, pois através de (y, o) passam duas variedades complementares de $\gamma(M)$, $M \times \{o\}$ e $\{y\} \times N_y(M)$. A derivada de h em (y, o) mapeia o espaço tangente de M x {o}em (y, o) sobre $T_y(M)$ e o espaço tangente de {y} x $N_y(M)$ sobre $N_y(M)$. Logo ela mapeia sobre $T_y(M) + N_y(M) = \mathbb{R}^n$. Sabemos que h mapeia M x {o} difeomorficamente sobre M e é regular em cada (y, o), então h deve levar uma vizinhança de M x {o} difeomorficamente sobre uma vizinhança de M em $\mathbb{R}^n$, já que:

Afirmação: Suponha que a derivada de f: X ⟶ Y é um isomorfismo quando x pertence à subvariedade Z ⊂ X e suponha que f mapeia Z difeomorficamente sobre f(Z). Então f mapeia uma vizinhança de Z difeomorficamente sobre uma vizinhança de f(Z).

Prova: Achemos inversas locais $g_i: \mathcal{U}_i \longrightarrow X$



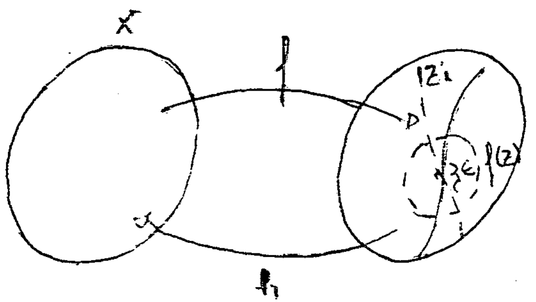
onde { U_i } é uma coleção localmente finita de subconjuntos abertos de Y cobrindo f(Z).

Seja w ={ y∈ U_i, para algum i, tal que $g_i(y) = g_j(y)$ sempre que y ∈ $U_i \cap U_j$ }

e g: w ⟶ X

Basta provarmos que w contém uma vizinhança aberta de f(Z).

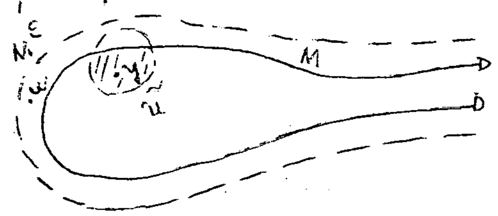
Por absurdo: suponhamos que w não contém vizinhança aberta de f(Z). Deve existir z ∈ f(Z) e uma sequência Z_i que converge a Z; $Z_i \notin$ W.



Existe uma única inversa local h de f que coincide com todos os g_i definidos em Z_i então existe uma única g_j definida em Z_i. Mas todos os Z_i pertencem ao mesmo U_i então Z_i ∈ w.

Agora qualquer vizinhança de M contém algum M^{ε}, isto é claro quando M é compacta pois neste caso teremos que qualquer cobertura admite uma subcobertura finita o que implica na existência de M . Pensando em termos gerais teremos que mostrar que qualquer $\tilde{U}$ de M em $\mathbb{R}^n$ contém algum Y^{ε} e além disso, se M é compacta ε pode ser tomado como uma constante.

i) Qualquer vizinhança $\tilde{U}$ de M em $\mathbb{R}^n$ contém algum M^{ε} onde $M^{\varepsilon} = \{ w \ \mathbb{R}^n, |w-y| < \varepsilon$, para algum $y \in M \}$



Seja uma vizinhança $\tilde{U}$ de M em $\mathbb{R}^n$. Sempre podemos fixar um ε conveniente tal que se $x \in \tilde{U}$ e $x \notin M$ se tenha que existe um conjunto aberto cujos pontos x estejam de $y \in M$ a uma distância menor que . Assim existe M^{ε} .

ii) M é compacto então toda cobertura admite uma subcobertura finita. Assim tomamos para M a cobertura aberta $\{ U_{\alpha} \} \subset M$. Pelo teorema da partição da unidade [4, pág. 52] existem funções diferenciáveis $\{\theta_i\}$ sobre X subordinadas aos $\{ U_{\alpha} \}$. Pela afirmação i existe ε_{α} tal que ; $U_{\alpha}^{\varepsilon_{\alpha}} \subset \tilde{\mathcal{U}}$.

Assim $\sum \theta_i \varepsilon_i = \varepsilon$, porque para qualquer $y \in M$ teremos que: $U_{\alpha}^{\varepsilon_{\alpha}} \subset \tilde{\mathcal{U}}$.

Assim $\sum \theta_i \varepsilon_i = \varepsilon$, porque para qualquer $y \in M$ teremos que: $\sum \theta_i(y) = 1$ e $0 \leq \theta_i \leq 1$ donde:

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i \theta_i \leq (\text{máx } \varepsilon_i) (\sum \theta_i) = \text{máx } \varepsilon_i . 1.$$

.-.-.-.-.-.-.-.-.-.

Utilizamos, assim, o fibrado normal de uma variedade para provar o Teorema da ε -vizinhança. Com relação a γ (M) nos faltaria mostrar que vale a condição de trivialidade local, fato este que será comentado em 2.12.

1.12 - <u>Exemplo</u>: γ_n^1 - fibrado linha canônico sobre P^n.

O espaço projetivo P^n pode ser definido como o conjunto de todos os pares $\{ -x, x \}$, com x variando sobre a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e topologizado como um espaço quociente de S^n. [8, pág. 134]

Sejam: 1) $E(\gamma_n^1)$ - subconjunto de $P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ consistindo de todos os pares $(\{\pm x\}, V)$ tal que V é múltiplo de x - este é o espaço total.

2) $\pi : E(\gamma_n^1) \longrightarrow P^n$; $\pi(\{\pm x\}, V) = \{\pm x\}$ - é a projeção.

3) P^n - espaço base.

Assim cada fibra $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ pode ser identificada com a linha através de x e $-x$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, que tem a sua estrutura usual de espaço vetorial.

Condição de trivialidade local para γ_n^1:

Seja $\mathcal{U} \subset S^n$ qualquer conjunto aberto suficientemente pequeno para não conter nenhum par de pontos antipodais e U_1 a imagem de U em P^n. Então o homeomorfismo $h: U_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$ é definido por:

$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx)$, para cada $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$.

Assim, conforme definição 1.2 o par (U_1, h) é um sistema de coordenadas locais para γ_n^1, logo γ_n^1 é localmente trivial.

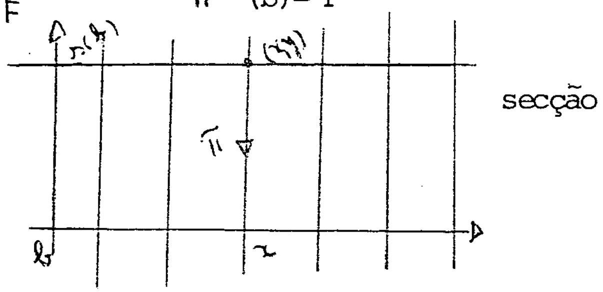
1.13 - Definição: Uma secção de um fibrado vetorial ξ com espaço base B é uma função contínua: $s: B \longrightarrow E(\xi)$

que leva cada $b \in B$ na fibra correspondente $F_b(\xi)$ e tal que

$\pi \circ s(b) = b$ para cada $b \in B$.

Exemplo - Fibrado produto

Consideremos o fibrado $(B \times F, \pi, B)$, onde π é a projeção sobre o primeiro fator e a fibra é F. Fixando F, definimos $s(b) = (b, F)$ onde $s: B \longrightarrow B \times F$. Assim $\pi : B \times F \longrightarrow B$ e $\pi^{-1}(b) = F$



1.14 - Definição - Campo de vetores

Seja uma secção $s: M \longrightarrow DM$ da função $\pi : DM \longrightarrow M$, que associa a cada ponto m do seu domínio $U \subset M$ um vetor tangente s_m em m. Quando U intercepta o domínio V de uma função diferenciável $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos uma função:

$$s_f: M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ em } U \cap V \text{ por}$$

$$m \longrightarrow (s_m)_f \qquad [6, \text{ pág. } 38]$$

a secção s é chamada <u>campo de vetores</u> em M, se todas as funções s_f são diferenciáveis. Seus domínios são necessariamente abertos em M.

1.15 - <u>Definição</u> - <u>Variedade pararelizável</u>

Um conjunto ordenado de n-campos de vetores independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em um subconjunto aberto U de uma variedade M de dimensão m é chamado uma <u>paralelização em U</u>.

- Uma variedade que admite uma paralelização global é chamada <u>paralelizável</u>. [6, pág. 51]

1.16 - <u>Afirmação</u> - γ_n^1 não tem secção.

Prova - Suponhamos, por absurdo, que γ_n^1 admita uma secção $s: P^n \to E(\gamma_n^1)$ e consideremos a composição:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & P^n \arrow[r, "s"] & E(\gamma_n^1) \end{tikzcd}$$

tal que $\varphi : S^n \longrightarrow E(\gamma_n^1)$ e

$(\{\pm x\}, t(x)\,x) \in E(\gamma_n^1)$ onde $t(x)$ é uma função contínua (exemplo 1.12). Além disso, como trabalhamos em P^n, $t(-x) = -t(x)$.

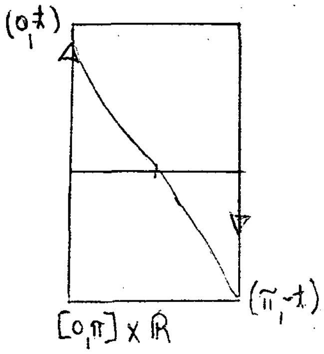
Levando-se em conta o fato da conexidade de S^n temos garantido pelo Teorema do valor médio que deve existir um x_o tal que: $t(x_o) = 0$.

Conclusão: $s(\{\pm x_o\}) = (\{\pm x_o\}, 0)$, ou seja, γ_n^1 não tem secção, pois havíamos suposto existir secção distinta de zero.

Assim, em outras palavras, provamos que γ_n^1 é não trivial, pois não admitindo secção distinta de zero implica que não podemos supor $P^n = U$, ou seja, a não trivialidade de γ_n^1.

Por exemplo, examinando em especial o espaço $E(\gamma_1^1)$ com $S^1 \xrightarrow{\pi'} P^1$, temos que cada ponto pode ser escrito

$\left[\pm (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\right]$ com $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ e $t \in \mathbb{R}$;
esta representação é única exceto aquela que o ponto
$\left[\pm (\cos 0, \operatorname{sen} 0), t(\cos 0, \operatorname{sen} 0)\right]$ é igual a
$\left[\pm (\cos\pi, \operatorname{sen}\pi), -t(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)\right]$, para cada t.
Ou seja, o espaço total $E(\gamma^1_1)$ pode ser obtido identificando-se a fronteira da mão esquerda $[0] \times \mathbb{R}$ com a fronteira da mão direita $[\pi] \times \mathbb{R}$ sob a correspondência $(0, t) \longrightarrow (\pi, -t)$. Assim $E(\gamma^1_1)$ é uma faixa de Moebius aberta.



Esta descrição nos dá uma prova alternativa de que γ^1_1 é não trivial, pois sobre esta faixa para irmos de -x a x forçosamente passamos por zero o que torna γ^1_1 não trivial.

1.17 - <u>Definição</u>: As secções $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são independentes se, para cada $b \in B$, os vetores $s_1(b), s_2(b), \ldots, s_n(b)$ são linearmente independentes.

1.18 - <u>Lema</u> - Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre B e $f: E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ uma função contínua que mapeia cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial $F_b(\eta)$. Então f é necessariamente um homeomorfismo. Portanto $\xi \cong \eta$.

Prova - [9, pág. 19].

1.19 - <u>Teorema</u> - Um $\mathbb{R}^n$-fibrado ξ é trivial se e somente se ξ admite n-secções $s_1, s_2, \ldots, s_n$ independentes.

Prova: i) Sejam $s_1, s_2, \ldots, s_n$ secções de ξ independentes

Definimos $f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ por:

$$f(b, x) = x_1\, s_1(b) + x_2\, s_2(b) + \ldots + x_n\, s_n(b)$$

f é contínua porque é uma combinação linear dos vetores linearmente independentes $s_1(b), s_2(b), \ldots, s_n(b)$.

Pela maneira como foi definida ela mapeia cada fibra de ε^n_B numa fibra de ξ, e pela mesma razão como $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ são linearmente independentes em $E(\xi)$ a aplicação f é 1-1 e sobre, já que associa o par $(b, x) \in B \times \mathbb{R}^n$ a $x_1 s_1(b) + \ldots + x_n s_n(b) \in E$.

Assim f é um isomorfismo de fibrados e ξ é trivial (afirmação 1.9).

ii) Agora suponhamos que ξ é trivial, com sistema de coordenadas (B, h).

Definindo $s_i(b) = h\left[b(o, \ldots, o, 1, o, \ldots, o)\right] \in F_b(\xi)$ com o 1 na i-ésima posição então

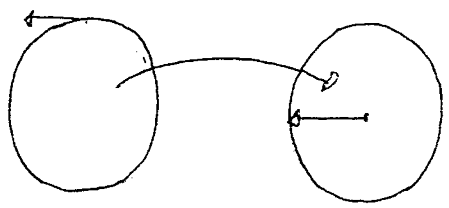
$s_1, s_2, \ldots, s_n$ são independentes.

Ilustrando:

Seja $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $TS^1 = \{(x, y), x \in S^1, y \in T_x S^1\}$ o seu fibrado tangente.

Seja $\sigma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, com $\sigma(S^1) \subseteq T S^1$ tal que:

$\sigma(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, e^{i(\theta + \pi/2)})$



onde σ por construção é função contínua. Assim σ é secção de $T S^1$ distinta de zero, ou seja, S^1 admite um campo de vetores, logo S^1 é paralelizável. Da mesma forma se usarmos a fórmula de Moivre teremos:

$$e^{i\theta} = (x, y) \quad \text{e} \quad e^{i(\theta + \pi/2)} = (-y, x)$$

então: $\sigma(x) = \left[(x, y), (-y, x)\right]$

****

<u>Fibrados vetoriais euclidianos:</u>

1.20 - <u>Definição</u>: Dizemos que a função de valores reais μ sobre um espaço vetorial de dimensão finita V é quadrática se μ puder ser expresso sob a forma:

$$\mu(v) = \sum \ell_i(v)\, \ell'_i(v) \text{ com } \ell_i \text{ e } \ell'_i \text{ lineares.}$$

Assim temos que uma função quadrática determina um par simétrico e bilinear $v, w \longrightarrow v.\, w$ de $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

onde $v.\, w = \frac{1}{2}\left[\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)\right]$ é o produto interno.

- μ é dita definida positiva se $\mu(v) > o$; $v \neq o$.

1.21 - <u>Definição</u>: Um espaço vetorial euclidiano é um espaço vetorial real V finito com uma função quadrática definida positiva.

$$\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

1.22 - <u>Definição</u>: Um fibrado vetorial euclidiano é um fibrado vetorial real junto com uma função contínua $\mu : E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que a restrição de μ para cada fibra de ξ é definida positiva e quadrática.

<u>Observação</u>: 1) μ será chamada uma métrica euclidiana sobre o fibrado vetorial ξ.

2) seja $\mathcal{T}_M$ o fibrado tangente de uma variedade M então uma métrica euclidiana $\mu : DM \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada <u>Métrica Riemaniana</u> e M com a métrica μ é dita uma <u>Variedade Riemaniana</u>.

Como um exemplo podemos utilizar o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$, que é trivial, temos que $\mathbb{R}^n$ possui uma métrica Riemaniana padrão o que implica, se consideramos uma outra variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ sob a composição $D\,M \subset D\,\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$, que a variedade M também é uma variedade Riemaniana.

1.23 - <u>Lema</u> - Seja ξ um fibrado vetorial trivial de dimensão n sobre B μ e qualquer métrica euclidiana sobre ξ. Então existe n secções $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de ξ que são normais e ortogonais no sentido de que:

$$s_i(b)\ s_j(b) = \delta_{ij} \quad \text{(delta de Kronecker)}$$

$$\text{para cada } b \in B.$$

Portanto ξ é trivial também como um fibrado vetorial euclidiano. Este lema, em outras palavras, nos garante que os conceitos de trivialidade para fibrados vetoriais e fibrados vetoriais euclidianos coincidem.

Prova: Sejam $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$ n quaisquer secções independentes então $s'_1(b), s'_2(b), \ldots, s'_n(b)$ são vetores linearmente independentes e portanto uma base para $F_b(\xi)$. Aplicando o processo de Gram-Schmidt, já que μ é métrica euclidiana sobre ξ, obtemos $s^*_1(b), \ldots, \ldots, s^*_n(b)$ que será uma base ortogonal para $F_b(\xi)$, dividindo correspondentemente pelas normas destes vetores obtemos:

$s_1(b)$, $s_2(b)$,..., $s_n(b)$ que será uma base ortogonal para $F_b(\xi)$ ou seja: $s_1(b)\ s_j(b) = \delta_{ij}$.

****
* * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * *
****

CONTRUÇÃO DE NOVOS FIBRADOS VETORIAIS À PARTIR DE FIBRADOS CONHECIDOS

2.1 - Restrição de um fibrado a um subconjunto do espaço base:

Seja ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi : E \longrightarrow B$ e $\bar{B} \subset B$. Fazendo $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$ e $\bar{\pi} = \bar{E} \longrightarrow \bar{B}$ obtemos um novo fibrado vetorial que será denotado por $\xi\Big|_{\bar{B}}$ e chamado: Restrição de ξ a $\bar{B}$

Cada fibra $F_b(\xi|_{\bar{B}})$ é igual a correspondente fibra $F_b(\xi)$ e tem a mesma estrutura de espaço vetorial.

Exemplo: Sejam: M - variedade diferenciável

- subconjunto aberto de M.

Tomando o fibrado tangente desta variedade, teremos:

M - espaço básico

DM - espaço total e $\pi : DM \longrightarrow M$

Seja aberto $\mathcal{U} \subset M \Rightarrow V = \pi^{-1}(\mathcal{U})$, tomando $\pi\Big|_V = \bar{\pi}$

teremos $\bar{\pi} : V \longrightarrow \mathcal{U}$ assim $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}_M$

2.2 - Fibrados induzidos:

Sejam ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi = E \longrightarrow B$ e B_1, um espaço topológico arbitrário. Para qualquer $f: B_1 \longrightarrow B$ construimos o chamado Fibrado induzido $f^*\xi$ sobre B_1, da seguinte forma:

Espaço total de $f^*\xi$ - $E_1 \subset B_1 \times E$, que consiste de todos os pares (b, e) com $f(b) = \pi(e)$.

Projeção de $f^*\xi$ - $\pi : E_1 \longrightarrow B_1$ definida por $\pi_1(b, e) = b$.

Espaço básico de $f^*\xi$ - B_1.

Assim o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(b,\ e) & E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] & (e) \\
(b) & B_1 \arrow[r, "f"] & B & (b)
\end{tikzcd}$$

com $\hat{f}(b, e) = e$ é comutativo (diagrama de pull-back) pois:

$$\pi\left[\hat{f}(b, e)\right] = \pi(e) = b \quad \text{e} \quad f\left[\pi_1(b, e)\right] = f(b) = b$$

e a estrutura de espaço vetorial sobre $\pi^{-1}(b)$ é dada por:

$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1 e_1 + t_2 e_2)$.

Assim a função $\hat{f}(b, e)$ leva cada espàço vetorial de $F_b(f^*\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial $F_{f(b)}(\xi)$.

Se $(\mathcal{U}, h)$ é um sistema de coordenadas locais de ξ tomando $\mathcal{U}_1 = f^{-1}(\mathcal{U})$, definimos:

$h_1: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi_1^{-1}(\mathcal{U}_1)$ por:

$h_1(b, x) = \{ b, h\,[f(b), x] \}$

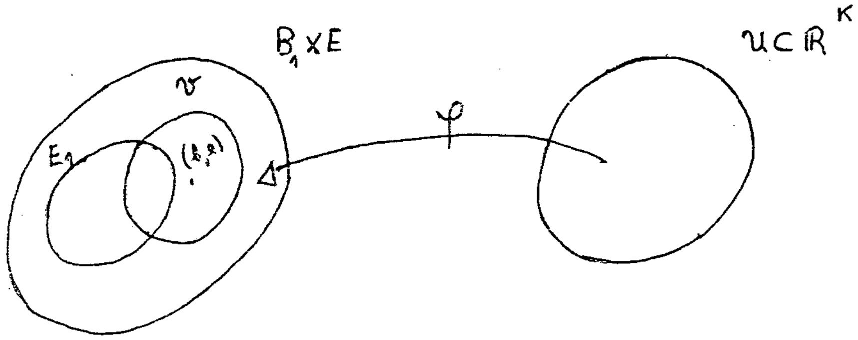
Temos que $(\mathcal{U}_1, h_1)$ é sistema de coordenadas locais para $f^*\xi$ ou seja: $f^*\xi$ é localmente trivial.

2.3 - Afirmação: Se ξ é um fibrado vetorial diferenciável e f uma aplicação diferenciável, então E_1 é uma subvariedade diferenciável de $B_1 \times E$

Prova: i) $B_1 \times E$ é variedade diferenciável:

E é variedade diferenciável e B_1 espaço topológico arbitrário com $f: B_1 \longrightarrow B$ uma função diferenciável e B variedade diferenciável então B_1 também é variedade diferenciável. Assim: $B_1 \times E$ é variedade diferenciável [2, pág. 5].

ii) E_1 é variedade diferenciável:



Como $B_1 \times E$ é variedade diferenciável k-dimensional então para cada ponto $(b, e) \in B_1 \times E$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ em $B_1 \times E$ que é difeomórfica a um conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$. Tomando $\varphi|_{E_1}$ então E_1 é variedade diferenciável.

Assim, como $E_1 \subset B_1 \times E$ temos que E_1 é subvariedade de $B_1 \times E$.

Sejam ξ e η fibrados vetoriais:

2.4 - Definição: Uma aplicação fibrada de η para ξ é uma função contínua:

$g: E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$, que carrega cada espaço vetorial $F_b(\eta)$

isomorficamente sobre um dos espaços vetoriais $F_{b'}(\xi)$.

Fazendo $\bar{g}(b) = b'$ temos no diagrama de pull-back:

$$\begin{tikzcd} E(\eta) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}_1"'] & E(\xi) \arrow[d, "\widetilde{\pi}_2"] \\ B(\eta) \arrow[r, "\bar{g}"] & B(\xi) \end{tikzcd}$$

A função resultante: $\bar{g} : B(\eta) \longrightarrow B(\xi)$ é contínua porque $\bar{g} = \widetilde{\pi}_1^{-1} \circ g \circ \widetilde{\pi}_2$.

2.5 - Lema: Se $g: E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$ é uma aplicação fibrada e se $\bar{g} : B(\eta) \longrightarrow B(\xi)$ é a correspondente aplicação dos espaços bases, então η é isomórfico ao fibrado induzido $\bar{g}^* \xi$.

Prova: Definamos $h: E(\eta) \longrightarrow E(\bar{g}^* \xi)$ por:

$h(e) = (\widetilde{\pi}(e), g(e))$, onde $\widetilde{\pi}$ é a aplicação projeção de η.

h é contínua porque $\widetilde{\pi}$ e g o são e mapeia cada fibra $F_b(\eta)$ isomorficamente sobre a fibra correspondente $F_b(\bar{g}^* \xi)$ então $\eta \cong \bar{g}^*$ (Lema 2.3).

2.6 - Produtos cartesianos - Dados dois fibrados vetoriais ξ_1 e ξ_2 com aplicações projeções: $\widetilde{\pi}_i : E_i \longrightarrow B_i$; $i = 1, 2$ o produto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ é definido como sendo o fibrado com projeção $\widetilde{\pi}_1 \times \widetilde{\pi}_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ em que cada fibra tem a estrutura de um espaço vetorial e a condição de trivialidade local é visível pela própria construção do fibrado.

Exemplo: M_1, M_2 - variedades diferenciáveis.

Seja a variedade $M = M_1 \times M_2$ e tomemos o seu fibrado tangente $\mathcal{T}_M$. Assim existe $f = id$ (que é um homeomorfismo sempre) que mapeia cada espaço $F_b(\mathcal{T}_M)$ sobre o correspondente espaço vetorial $F_{(b_1, b_2)}(\mathcal{T}_{M_1} \times \mathcal{T}_{M_2})$ então:

$$\mathcal{T}_M \cong \mathcal{T}_{M_1} \times \mathcal{T}_{M_2}$$

Condição de trivialidade local:

Seja $(\mathcal{U}, h)$ sistema de coordenadas para M_1 e $(\mathcal{V}, g)$ sistema de coordenadas para M_2, se tomamos um aberto $w = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ de

$M_1 \times M_2$ podemos achar uma função $\varphi = h \times g$ tal que: (w, φ) será um sistema de coordenadas para $\mathcal{T}_{M_1} \times \mathcal{T}_{M_2}$

2.7 - Somas de Whitney:

Consideremos dois fibrados ξ_1 e ξ_2 sobre o mesmo espaço básico B. Seja $d: B \longrightarrow B \times B$ o mergulho diagonal definido por: $b \xrightarrow{d} (b, b)$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{d}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\ B \arrow[r, "d"] & B \times B \end{tikzcd}$$

Denominamos $d^*(\xi_1 \times \xi_2) = \xi_1 \oplus \xi_2$ - a soma de Whitney de ξ_1 e ξ_2. Assim, cada fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ é isomórfica à soma direta $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$.

2.8 - Definição - Subfibrado

Sejam dois fibrados vetoriais ξ e η sobre o mesmo espaço B com $E(\xi) \subset E(\eta)$, então ξ é um subfibrado de η se cada fibra $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial da correspondente fibra $F_b(\eta)$.

Escrevemos: $\xi \subset \eta$

2.9 - Lema - Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de η tal que cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é igual à soma direta de dois subespaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$. Então η é isomórfica à soma de Whitney $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Prova: Como $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ definimos f tal que:

$f: E(\xi_1 \oplus \xi_2) \longrightarrow E(\eta)$ e $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$

i) $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$ é função contínua já que leva elementos $(b, (e_1, e_2))$ de $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ em $e_1 + e_2$ onde $e_1 \in F_b(\xi_1)$ e $e_2 \in F_b(\xi_2)$, pois:

$F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, e, para qualquer b temos que ela associará o par $(b, (e_1, e_2))$ à soma $e_1 + e_2$.

ii) f é transformação linear pois:

a) $(e_1 + e_2) + (e_1' + e_2') = f\left[b, (e_1, e_2)\right] + f\left[b, (e_1', e_2')\right] = f\left[b, (e_1 + e_1', e_2 + e_2')\right]$ e

b) $f\left[c(b, (e_1, e_2))\right] = c\, f\left[b, (e_1, e_2)\right]$

e por definição f é bijetiva, logo:

f leva cada fibra de $F_b(\eta)$ isomorficamente sobre a correspondente fibra de $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$, assim:

pelo Lema 2.3 $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

2.10 - Complementos ortogonais:

Nosso objetivo agora é: dado um subfibrado ξ de η, ou seja, $\xi \subset \eta$, vamos encontrar um outro subfibrado $\xi^{\perp}$ de ξ tal que este se decomponha como uma soma de Whitney, ou seja: $\eta = \xi \oplus \xi^{\perp}$

Considerando η provido de uma métrica euclidiana então cada somando complementar pode ser construído como segue:

$F_b(\xi^{\perp})$ - subespaço de $F_b(\eta)$ consistindo de todos os vetores v tal que v. w = o, para todo $w \in F_b(\xi)$.

$E(\xi^{\perp}) \subset E(\eta)$ - a união dos $F_b(\xi^{\perp})$, para todo $b \in B(\eta)$.

2.11 - Teorema: $E(\xi^{\perp})$ é o espaço total de um subfibrado $\xi^{\perp} \subset \eta$. Além disso

$$\eta \cong \xi \oplus \xi^{\perp}$$

Prova: cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é a soma direta dos subespaços $F_b(\xi)$ e $F_b(\xi^{\perp})$ pela própria construção, portanto o único problema consiste em verificarmos a condição de trivialidade local para $\xi^{\perp}$.

Assim, dado qualquer ponto $b_o \in B$, seja U vizinhança de b_o suficientemente pequena de modo que $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são triviais. Sejam $s_1, s_2, \ldots, s_m$ secções ortogonais normais de $\xi|_U$ e $s'_1, \ldots, s'_n$ secções ortogonais normais de $\eta|_U$ onde m e n são as dimensões das respectivas fibras (Lema 2.4). Portanto a matriz m x n

$\left[s_i(b_o) . s'_j(b_o) \right]$ tem posto m, com $n > m$.

Renumerando os s'_j, se necessário, podemos supor que as primeiras m colunas são linearmente independentes.

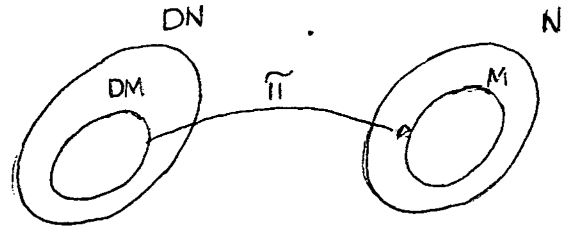
Seja $V \subset U$ o conjunto aberto que consiste de todos os pontos b para os quais as primeiras m colunas da matriz $\left[s_i(b) . s'_j(b) \right]$ são linearmente independentes. Então as n.secções:

$s_1, s_2, \ldots, s_m, s'_{m+1}, \ldots, s'_n$ de $\eta|_U$ são linearmente independentes em qualquer ponto de V. Aplicando novamente o Processo de Gram-Schmidt a esta sequência de secções obtemos secções normais ortogonais $s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}, \ldots, s_n$ de $\eta|_V$. Nosso objetivo é provar a condição de trivialidade local, assim um sistema de coordenadas locais para $\xi^{\perp}$, (w, h) com $h: v \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow E(\xi^{\perp})$ é dado por: $h(b, x) = x_1 s_{m+1}(b) + \ldots + x_{n-m} s_n(b)$.

Supondo $e \in E(\xi^{\perp})$ temos que a igualdade:

$h^{-1}(e) = [\pi e, (e. s_{m+1}(\pi e), \ldots, e. s_n(\pi e)$ é uma identidade. Assim, h é um homeomorfismo.

Como exemplo tomemos duas variedades diferenciáveis M, N com $M \subset N \subset \mathbb{R}^A$ e N com uma métrica Riemaniana.



então: $\widetilde{\mathcal{T}}_x N = \widetilde{\mathcal{T}}_x M \oplus \widetilde{\mathcal{T}}_x M^{\perp}$ com $\widetilde{\mathcal{T}}_x M^{\perp} \subset \widetilde{\mathcal{T}}_x N$

Assim $\widetilde{\mathcal{T}} N = \widetilde{\mathcal{T}} M \oplus \widetilde{\mathcal{T}} M^{\perp}$, $\widetilde{\mathcal{T}} M^{\perp} \subset \widetilde{\mathcal{T}} N$

onde $\widetilde{\mathcal{T}} M^{\perp}$ é chamado fibrado normal γ de M em N.

2.12 - Corolário - Para alguma subvariedade diferenciável M de uma variedade diferenciável Riemaniana N o fibrado normal γ é definido e:

$$\mathcal{T}_M \oplus \gamma \cong \mathcal{T}_N \Big|_M$$

Observação: Agora, com este corolário nos é possível falar na condição de trivialidade local para o fibrado vetorial γ visto sabermos que a mesma vale para $\mathcal{T}_M$ e $\mathcal{T}_N \Big|_M$, o que nos leva a afirmar que ela também vale para γ.

Ainda sobre o corolário 2.12 para generalizarmos esta idéia suponhamos que M e N são variedades diferenciáveis, sendo N Riemaniana e $f: M \longrightarrow N$ uma imersão. Então para cada $x \in M$ o espaço tangente $DN_{f(x)}$ decompõe-se como a soma direta da imagem $Df_x(DM_x)$ e seu complemento ortogonal. Da mesma forma o fibrado induzido pela f, $f^* \mathcal{T}_N$ sobre M se parte como a soma de Whitney de um subfibrado isomórfico a $\mathcal{T}_M$ e um subfibrado complementar γ_f. Logo:

2.13 - Corolário - Para qualquer imersão $f: M \longrightarrow N$ com N Riemaniana, existe uma decomposição em soma de Whitney:

$$f^* \mathcal{T}_N \cong \mathcal{T}_M \oplus \gamma_f$$

2.14 - Funtores contínuos de espaços vetoriais e fibrados vetoriais:

Seja V a categoria consistindo de todos os espaços vetoriais reais de dimen-finita e todos os isomorfismos entre tais espaços vetoriais.

2.15 - Definição: Uma operação $T: V \times V \longrightarrow V$ que associa:

1) a cada par $v, w \in V$ de espaços vetoriais um espaço vetorial $T(v, w) \in V$ e

2) a cada par $f: v \longrightarrow v'$; $g: w \longrightarrow w'$ de isomorfismos um isomorfismo:

$T(f, g) = T(v, w) \longrightarrow T(v', w')$ tal que:

3) $T(I_v, I_w) = I_{T(v, w)}$ e

4) $T(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) = T(f_1, g_1) \circ T(f_2, g_2)$ é chamada um Funtor.

- Um funtor é contínuo se $T(f, g)$ depende continuamente de f e g.

- O conceito de funtor contínuo $T: V \times V \times \ldots \times V$ em K variáveis é definido similarmente.

Exemplo: a cada par v, w de espaços vetoriais reais associamos o espaço vetorial dos homomorfismos de v em w ($\mathrm{Hom}(v, w)$).

Fibrado $T(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_k)$:

Seja $T: V \times V \times \ldots \times V$ um funtor contínuo de k variáveis e $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_k$ fibrados vetoriais sobre uma base comum B.

Construímos um novo fibrado vetorial sobre B como segue:

Para cada $b \in B$ seja $F_b = T(F_b(\xi_1), \ldots, F_b(\xi_k))$ e E a união disjunta dos espaços vetoriais F_b e definimos: $\pi : E \longrightarrow B$ por $\pi(F_b) = b$.

Assim, partindo do funtor dualidade $V \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ obtemos o funtor ξ —— $(\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$ que associa a cada fibrado vetorial seu fibrado vetorial dual.

CAPÍTULO III

CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY

Neste capítulo usaremos $H^i(B, \mathbb{Z}/2)$ que é o i-ésimo grupo de cohomologia singular de B com coeficientes no grupo dos inteiros módulo 2.

Nosso objetivo é definir as classes de Stiefel-Whitney e o faremos de forma axiomática, não nos preocupando, por ora, com problemas relativos à sua existência e unicidade, a tratar nos últimos dois capítulos deste trabalho.

Axioma 1: A cada fibrado vetorial ξ corresponde uma sequência de classes de cohomologia

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}/2);\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

chamadas "CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY" de ξ.

Além disso: i) $w_o(\xi)$ - é o elemento unidade $1 \in H^o(B(\xi), \mathbb{Z}/2)$

ii) $w_i(\xi) = o$ para $i > n$ se ξ é um $\mathbb{R}^n$-fibrado.

Axioma 2: Naturalidade

Se $f\colon B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ é coberto por uma aplicação fibrada de ξ em η, então:

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$$

Axioma 3: Teorema do produto de Whitney

Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então:

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=o}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

onde $\cup$ é o produto cup de classes de cohomologia [3, pág. 143].

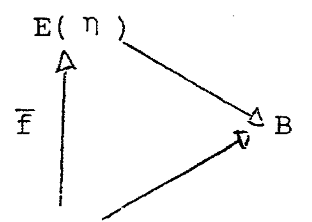
Axioma 4: A classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha canônico γ_1^1 sobre o círculo P^1, $w_1(\gamma_1^1) \neq o$.

γ_1^1 é o fibrado introduzido no exemplo 1.12.

Consequências dos quatro axiomas:

Como consequência imediata do axioma 2, temos:

3.1 - Proposição: Se ξ é isomórfico a η então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.



Se $\xi \cong \eta$ existe homeomorfismo $\bar{f}: E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ que leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$, logo $\bar{f}$ é uma aplicação fibrada (definição 2.4).

Assim $f: B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ é coberta por uma aplicação fibrada, ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"'] & E(\eta) \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] \\ B(\xi) \arrow[r, "f"] & B(\eta) \end{tikzcd} \qquad \text{ou} \qquad \begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[rr] \arrow[dr] & & E(\eta) \arrow[dl] \\ & B(\xi) = B(\eta) & \end{tikzcd}$$

onde $f: B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ induz em cohomologia

$$f^*: H^i(B(\eta)) \longrightarrow H^i(B(\xi)).$$ Temos, pelo axioma 2 que $w_i(\xi) = f^* w_i(\eta)$.

Supondo $f = id$ temos: $\underline{w_i(\xi) = w_i(\eta)}$

já que $(id)^* = id$.

3.2 - Proposição: Se ε é um fibrado vetorial trivial então $w_i(\varepsilon) = o$, para $i > o$.

Prova: ε é trivial, então:

$$\begin{tikzcd} E(\varepsilon) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & V \arrow[d] \\ B(\varepsilon) = \mathcal{U} \arrow[r, "f"] & x \end{tikzcd}$$

existe uma aplicação de fibrado de ε para um fibrado vetorial η sobre um ponto.

Assim fica induzido um homomorfismo de grupos:

$$f^*: H^i(x) \longrightarrow H^i(B(\varepsilon)).$$

Logo $w_i(\varepsilon) = f^*(w_i(\eta)) = o$ para $i > o$ por ser $B(\eta) = x$ um ponto cuja homologia é nula se $i > o$.

3.3 - Proposição: Se ε é trivial então $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$.

Prova: $w_k(\varepsilon \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{K} w_i(\varepsilon) \cup w_{k-1}(\eta)$ - pelo axioma 3,

mas $w_i(\varepsilon) = o$, para $i > o$ - pelo axioma 2, donde

$w_k(\varepsilon \oplus \eta) = w_o(\varepsilon)\, w_k(\eta) + w_1(\varepsilon)\, w_{k-1}(\eta) + w_2(\varepsilon) w_{k-2}(\eta) +$
$+ \dots + w_k(\varepsilon)\, w_o(\eta)$.

Logo $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$.

3.4 - Proposição: Se ξ é um $\mathbb{R}^n$-fibrado com uma métrica euclidiana que possui uma secção não nula em todo lugar então $w_n(\xi) = o$.

Se ξ possui k secções independentes então:

$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \ldots = w_n(\xi) = o.$

Prova: Pelo teorema 3.3 e pelo lema 2.4 segue que ξ se parte como uma soma de Whitney $\varepsilon + \varepsilon^{\perp}$ onde ε é trivial e $\varepsilon^{\perp}$ tem dimensão n-k.

Assim $\xi^n = \varepsilon^k \oplus \varepsilon^{\perp}$, $n-k+1 < s < n$ e

$w_{n-k+s}(\xi^n) = w_{n-k+s}(\varepsilon^k \oplus \varepsilon^{\perp}) = \sum w_i(\varepsilon^k) \cup w_{n-k+(s-i)}(\varepsilon^{\perp}) =$

(onde para que $w_{n-k+(s-i)}(\varepsilon^{\perp}) = o$ teremos que ter:

$n-k+(s-i) > n-k;\ s-i > o;\ s > i.$)

Assim com mais razão $s+1 > i$. Voltando à igualdade:

$= \sum_{i=n+1}^{n-k+1} w_{s+1}(\varepsilon^k) \cup w_{n-k+s-(s+1)}(\varepsilon^{\perp}) =$

$= \sum_{i=n+1}^{n-k+1} w_{s+1}(\varepsilon^k) \cup w_{n-k+1}(\varepsilon^{\perp})$; onde:

a) $w_{s+1}(\varepsilon^k) = o$, porque $s+1 > o$ e ε^k é fibrado trivial (proposição 3.2).

b) $w_{n-k+1}(\varepsilon^{\perp}) = o$, porque $n-k+1 \geqslant n-k$, que é a dimensão de ε (axioma 1).

Com o mesmo procedimento temos demonstrado o teorema.

Observação: Quando a soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ é trivial, temos:

$*$ $w_1(\xi) + w_1(\eta) = o$

$**$ $w_2(\xi) + w_1(\xi)\, w_1(\eta) + w_2(\eta) = o$

$***$ $w_3(\xi) + w_2(\xi)\, w_1(\xi) + w_1(\xi)\, w_2(\eta) + w_3(\eta) = o$, etc....

Utilizando estas igualdades podemos obter $w_i(\eta)$ expressado como um polinômio nas classes de Stiefel-Whitney de ξ.

Assim: $w_1(\eta) = -w_1(\xi)$, substituindo em $**$

$w_2(\xi) - w_1(\xi)\, w_1(\xi) + w_2(\eta) = o$

donde $w_2(\eta) = w_1(\xi)\, w_1(\xi) - w_2(\xi)$

que substituida em $***$ dará:

$w_3(\xi) - w_2(\xi)\, w_1(\xi) + w_1(\xi)\left[w_1(\xi)\, w_1(\xi) - w_2(\xi)\right] + w_3(\eta) = o$

então:

$w_3(\eta) = -w_3(\xi) + w_2(\xi) w_1(\xi) - w_1(\xi)\, w_1(\xi) + w_1(\xi)\, w_2(\xi)$

com procedimento análogo chegamos a $w_i(\eta)$.

É conveniente introduzir o seguinte formalismo:

3.5 - Definição: $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$ denotará o anel consistindo de todas as séries infinitas formais:

$a = a_o + a_1 + a_2 + \ldots$, com $a_i \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$

onde a operação neste anel é dada por:

$(a_o+a_1+a_2+\ldots)(b_o+b_1+b_2+\ldots)=(a_ob_o+a_1b_o+a_ob_1)+(a_2b_o+a_1b_1+a_ob_2)+\ldots$

3.6 - Definição: Classe total de Stiefel-Whitney

A classe total de Stiefel-Whitney de um $\mathbb{R}^n$-fibrado ξ sobre B é definida como sendo o elemento:

$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \ldots + w_n(\xi) + o + \ldots$

do anel $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$.

Nota: Utilizando esta notação formal no teorema do Produto de Stiefel-Whitney, teremos:

$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta)$.

3.7 - Lema: A coleção de todas as séries formais infinitas

$w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots \in H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}/2)$

com o primeiro termo 1 forma um grupo comutativo com relação à multiplicação.

Prova: i) Propriedade comutativa:

Sejam: $w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots$ e $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots$

então: $w\bar{w} = 1 + (\bar{w}_1 + w_1) + (\bar{w}_2 + w_1\bar{w}_1 + w_2) + \ldots$

e $\bar{w}w = 1 + (w_1 + \bar{w}_1) + (w_2 + \bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2) + \ldots$

$\Longrightarrow w\bar{w} = \bar{w}w$

ii) Existência de elemento neutro: $w^* = 1 + o + o + \ldots$

$w w^* = (1 + w_1 + w_2 + \ldots)(1 + o + o + \ldots) =$

$= 1 + (o + w_1) + (o + o + w_2) + (o + o + o + w_3) + \ldots = w$

iii) Propriedade associativa: Sejam

$w = 1+w_1+w_2+\ldots$, $\bar{w} = 1+\bar{w}_1+\bar{w}_2+\ldots$, $w^*= 1+ w_1^*+w_2^* +\ldots$

$(w\bar{w})w^* = 1+ w^*_1+(\bar{w}_1+ w_1) + w_2^* +(\bar{w}_1+ w_1)w_1^* +(\bar{w}_2+w_1\bar{w}_1+ w_2) +\ldots$

$w(\bar{w}w^*) = 1+ (w_1^*+ \bar{w}_1)+ w_1 + w_2^* + \bar{w}_1w_1^*+ \bar{w}_2+ w_1(w_1^*+ \bar{w}_1)+ w_2 +\ldots$

$\Longrightarrow (w\bar{w})w^* = w(\bar{w}w^*)$

iv) A inversa $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots$ de um dado elemento

$w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots$ é:

$\bar{w} = 1 - w_1 + (w_1^2 - w_2) + (- w_1^3 + 2\, w_1 w_2 - w_3) + \ldots$

que também pode ser computada pela expansão em série de potências

$\left[1 + (w_1 + w_2 + \ldots)\right]^{-1}$

Consideremos dois fibrados ξ e η sobre o mesmo espaço básico. Do Lema 3.7 temos que: $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta)$ pode ser resolvida univocamente como:

$w(\eta) = \bar{w}(\xi)\, w(\xi \oplus \eta)$

e, em particular, se $\xi \oplus \eta$ é trivial, então:

$w(\eta) = \bar{w}(\xi)$

porque: $w(\xi \oplus \eta)$ é a classe total de Stiefel-Whitney do $\mathbb{R}^n$-fibrado $\xi \oplus \eta$ que pode ser escrita como uma série formal:

$w(\xi + \eta) = 1 + w_1(\xi + \eta) + w_2(\xi + \eta) + \ldots$

Como $\xi + \eta$ é trivial, pela proposição 2, temos que:

$w(\xi \oplus \eta) = 1 + o + o + \ldots$

3.8 - Lema: Teorema da dualidade de Whitney

Se $\mathcal{T}_M$ é o fibrado tangente de uma variedade M no espaço euclidiano e γ é o fibrado normal, então:

$w_i(\gamma) = \bar{w}_i(\mathcal{T}_M)$

Este resultado se deve ao fato de podermos olhar o fibrado $\gamma \oplus \mathcal{T}_M$ como um fibrado trivial já que os seus componentes são sempre linearmente independentes, podendo os mesmos serem pensados como geradores de uma base para o espaço todo.

A seguir faremos a computação de classe de Stiefel-Whitney para alguns casos:

Exemplo 1: Seja $\mathcal{T}$ o fibrado tangente da esfera unitária S^n. Então a classe $w(\mathcal{T}) = w(S^n)$ é igual a 1, em outras palavras, o fibrado tangente de S^n do ponto de vista de classes características não pode ser distinguido do fibrado trivial de S^n.

Prova: Seja h o mergulho padrão $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O fibrado normal γ de S^n é trivial porque podemos tomar S^n como sendo o aberto U do fibrado e o mergulho h como a função que levará $U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$.

Como $w(\tau)\, w(\gamma) = 1$ porque $w_i(\gamma) = \bar{w}_i(\tau_M)$ pelo Lema 3.8 e já que γ é trivial, então: $w(\gamma) = 1$.

Assim: $w(\tau) = 1$.

<u>Exemplo 2</u>: A classe de Stiefel-Whitney total do fibrado linha canônico γ_n^1 (exemplo 1.12) sobre P^n é dada por: $w(\gamma_n^1) = 1 + a$.

<u>Prova</u>: Seja a inclusão padrão $j\colon P^1 \longrightarrow P^n$ (exemplo 1.12), j é coberta pela aplicação de fibrado de γ_1^1 para γ_n^1.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"'] & P^n \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S^n \end{tikzcd}$$

Logo, utilizando os axiomas 2 e 4, temos:

$$j^* w_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

logo $w_1(\gamma_n^1)$ não pode ser zero, portanto deve ser igual a algum $a \neq 0$.

Como as classes de Stiefel-Whitney restantes de γ_n^1 são determinadas pelo axioma 1, temos:

$$w(\gamma_n^1) = 1 + a$$

<u>Exemplo 3</u>: O fibrado linha canônico γ_n^1 sobre P^n é um subfibrado do fibrado trivial ε^{n+1} por ser fibrado ortogonal ao fibrado tangente de γ_n^1.

Seja $\gamma^\perp$ o complemento ortogonal de γ_n^1 em ε^{n+1}, ou seja, o espaço total $E(\gamma^\perp)$ que consiste de todos os pares:

$(\{\pm x\}, v) \in P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ com $v \perp x$.

Logo $w(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

<u>Prova</u>: Como $\varepsilon^{n+1} = \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é trivial, temos:

$$w(\gamma^\perp) = \bar{w}(\gamma_n^1) = (1 + a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

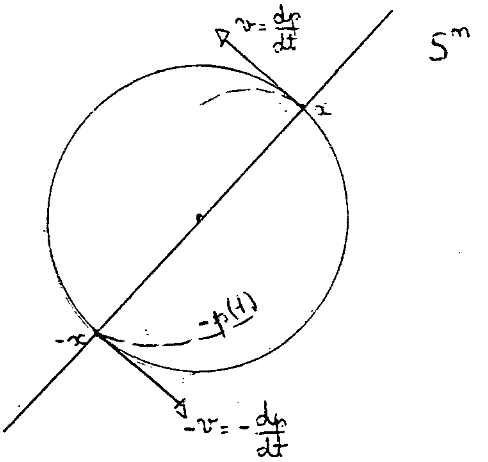
Este exemplo mostra que todas as n classes de Stiefel-Whitney de um $\mathbb{R}^n$-fibrado podem ser não nulas.

3.9 - <u>Lema</u>: O fibrado tangente τ de P^n é isomórfico a $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.

<u>Prova</u>: Seja L uma linha através da origem em $\mathbb{R}^{n+1}$ interceptando S^n nos pontos $\pm x$, e seja $L^t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o n-plano complementar. Seja $f\colon S^n \longrightarrow P^n$ a aplicação

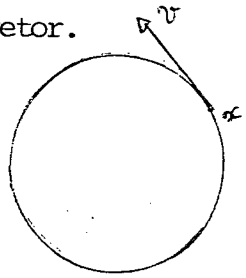
canônica $f(x) = \{\pm x\}$

Assim a imagem pela $Df: DS^n \longrightarrow DP^n$ de dois vetores (x, v) e $(-x, -v)$ é a mesma, pois por Df estaremos trabalhando com planos paralelos, e se v é o



vetor tangente a um arco regular p por x então $-v$ é o vetor tangente do arco regular $-p$ por $-x$.

Portanto a variedade tangente DP^n pode ser identificada com o conjunto de todos os pares $\{(x, v), (-x, -v)\}$ satisfazendo $x.x = 1$ e $x.v = o$, já que $x \in L$ pode ser pensado como um vetor.



Assim cada par $\{(x, v), (-x, -v)\}$ determina univocamente uma transformação:

$\ell : L \longrightarrow L^{\perp}$; $\ell(x) = v$.

Assim, ℓ associa a cada x um vetor v, ou seja, o espaço tangente de P^n em $\{\pm x\}$ é isomórfico ao espaço vetorial $\mathrm{Hom}(L, L^{\perp})$ por um isomorfismo

$j_{\{\pm x\}}: \mathcal{T}_x P^n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\gamma^1_{n,x}, \gamma^{\perp}_x)$

<u>Conclusão</u>: O fibrado $\mathcal{T}$ é isomórfico ao fibrado $\mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^{\perp})$, pelo isomorfismo de fibrados cuja restrição sobre $\{\pm x\}$ é $j_{\{\pm x\}}$.

3.10 - <u>Teorema</u>: A soma de Whitney $\mathcal{T} \oplus \varepsilon^1$ é isomórfica a $(n + 1)$-vezes a soma de Whitney: $\gamma^1_n \oplus \gamma^1_n \oplus \ldots \oplus \gamma^1_n$. Portanto a classe total de Stiefel-Whitney de P^n é dada por:

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} a + \binom{n+1}{2} a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a^n .$$

<u>Prova</u>: O fibrado $\mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^1_n)$ é trivial já que é um fibrado linha com uma secção que não se anula em nenhum lugar, basta tomarmos $id_{L_x} \in \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^1_n)$ em x, a aplicação que associa $x \longrightarrow id_{L_x}$ e que não é nula.

Portanto: $\mathcal{T} \oplus \varepsilon^1 \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n \oplus \gamma^1_n) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^1_n)$ (1)

porque pelo lema 3.9: $\mathcal{T} \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^{\perp})$ e como ε^1 é trivial, então $\varepsilon^1 \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^1_n)$ - ver afirmação 1.9.

(1) é isomórfico a:

$\mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^\perp \oplus \gamma^1_n) \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \varepsilon^{n+1})$

e portanto: $\mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \varepsilon^1 \oplus \varepsilon^1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon^1) \cong$

$\cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \varepsilon^1)$.

Veremos em 3.11 a seguir que γ^1_n tem uma métrica euclidiana o que implica, no nosso caso, que $\mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \varepsilon^1) \cong \gamma^1_n$.

Assim: $\gamma \oplus \varepsilon^1 \cong \gamma^1_n \oplus \ldots \oplus \gamma^1_n$.

3.11 - Afirmação: Se um fibrado vetorial ξ possui uma métrica euclidiana ξ é isomórfico a seu fibrado dual $\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$, onde:

$\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$ é o espaço fibrado vetorial de todas as aplicações fibrado $f: \xi \longrightarrow \varepsilon^1$ (ver K-Theory - Atyak).

Aplicando a definição de espaço vetorial dual temos que o dual de $F_b(\xi)$ é o espaço vetorial dos operadores lineares de $F_b(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde a estrutura de espaço vetorial do dual é obtida de forma natural da soma e produto em $F_b(\xi)$.

Em particular, dado $x \in F_b(\xi)$ temos o operador linear L_x produzido pelo produto escalar de x por elementos de $F_b(\xi)$, produto este garantido pela métrica euclidiana de ξ. De fato todos os operadores lineares de $F_b(\xi)$ em $\mathbb{R}$ são obtidos deste jeito, observando-se que a cada x corresponde um L_x. Além disso esta correspondência é um isomorfismo fibra por fibra [7, p. 124]. É claro que a correspondência achada é um isomorfismo de fibrados.

Consideremos a correspondência que a cada $(b, x) \in \xi$ faz corresponder (b, L_x). Vejamos que este é um isomorfismo L de ξ e $\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$.

Por construção vemos que L_x é um isomorfismo de $F_b(\xi)$ em $F_b(\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)) = \mathrm{Hom}(F_b(\xi), \mathbb{R})$, falta-nos ver que é um homeomorfismo (é claro que $\mathbb{R} = F_b(\varepsilon^1)$).

Em particular, a correspondência L estabelecida é uma bijeção e portanto induz uma topologia em $\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$ que é a topologia padrão deste fibrado. Portanto, L é naturalmente um homeomorfismo.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Usando o teorema do produto de Whitney, temos:

$$w(\tilde{\mathcal{T}}) = w(\gamma \oplus \mathcal{E}^1) = w(\gamma_n^1) \dots w(\gamma_n^1)$$

$$w(\tilde{\mathcal{T}}) = (1 + a)^{n+1} \qquad \text{ou}$$

$$w(\tilde{\mathcal{T}}) = 1 + \binom{n+1}{1} a + \binom{n+1}{2} a^2 + \dots + \binom{n+1}{n} a^n .$$

Precisamos, para efeitos de cálculo em $H^*(P^n, \mathbb{Z}/2)$ da seguinte tabela de coeficientes binomiais módulo 2:

	1										
	1	1									
P_1	1	0	1								
P_2	1	1	1	1							
P_3	1	0	0	0	1						
P_4	1	1	0	0	1	1					
P_5	1	0	1	0	1	0	1				
P_6	1	1	1	1	1	1	1	1			
P_7	1	0	0	0	0	0	0	0	1		
P_8	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
P_9	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1

O lado direito deste triângulo pode ser ignorado já que para calcular os $w(P^n)$ tem-se que $H^{n+1}(P^n, \mathbb{Z}/2) = 0$. Por exemplo:

$w(P^8) = 1 + a + a^8$

3.12 - Corolário - (Stiefel) - A classe $w(P^n)$ é igual a 1 se e somente se $n+1$ é uma potência de 2.

Portanto os únicos espaços projetivos que se podem paralelizar são P^1, P^3, P^7, P^{15}, ...

Prova: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mód. 2

$$\Longrightarrow (1 + a)^{2r} = 1 + a^{2r}$$

Portanto se $n+1 = 2^r$, então:

$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + a^{n+1} = 1 + 0$ porque $n+1 > n$

Da mesma forma quando: $n+1 = 2^r m$, m ímpar, $m > 1$ temos

$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r m} = (1 + a^{2r})^m$ logo

$(1 + a^{2r})^m = 1 + m a^{2r} + \frac{m(m-1)}{2} a^{2.2r} + \dots \neq 1$

já que : $2^r < n+1$

3.13 - Teorema (Stiefel) - Suponhamos que exista uma operação bilinear $p: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sem divisores de zero. Então o espaço projetivo P^{n-1} é paralelizável e portanto n deve ser uma potência de 2.

Prova: Seja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ base padrão para o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. A correspondência: $y \xrightarrow{\quad v \quad} p(y, b_1)$

define um isomorfismo do $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, já que:

i) $y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow p(y, b_1) \in \mathbb{R}^n$ logo, a cada y corresponde um $p(y,b_1)$ e vice-versa, assim a correspondência é biunívoca.

ii) $y = v(p\ (y, b_1))$; $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ v é uma transformação linear, assim esta correspondência define um isomorfismo de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

A igualdade $v_i\left[p(y, b_1)\right] = p(y, b_i)$ define uma aplicação de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:

i) $v_i\left[p(x + y, b_1)\right] = p\ (x + y, b_i) = p(x, b_i) + p\ (y, b_i) =$

$= v_i(\ p(x, b_1)) + v_i(\ p(x, b_1))$.

ii) $k\ v_i(p\ (y, b_1)) = k\ p(\ y, b_i) = p\ (\ k\ (y, b_i)) =$

$= v_i\left[k\ p\ (y, b_1)\right]$, assim v_i é linear.

Como p é bilinear, sejam:

$x = p(y, b_1)$ e $o = \alpha_1\ v_1(x) + \alpha_2\ v_2(x) + \ldots + \alpha_n\ v_n(x) =$

$= \alpha_1\ p(y, b_1) + \ldots + \alpha_n\ p(y, b_n) =$

$= p\ (y, \alpha_1\ b_1 + \ldots + \alpha_n\ b_n) \Longrightarrow \alpha_1\ b_1 + \ldots + \alpha_n\ b_n = o$

porque $y \neq o$ e p não tem divisores de zero, logo:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = o$.

Conclusão: $v_1(x), v_2(x) \ldots v_n(x)$ são linearmente independentes para $x \neq o$.

Além disso $v_1(x) = x$.

As funções $v_2 \ldots v_n$ dão origem a $(n-1)$ secções do fibrado vetorial, ou seja, para cada linha L através da origem podemos definir uma transformação linear:

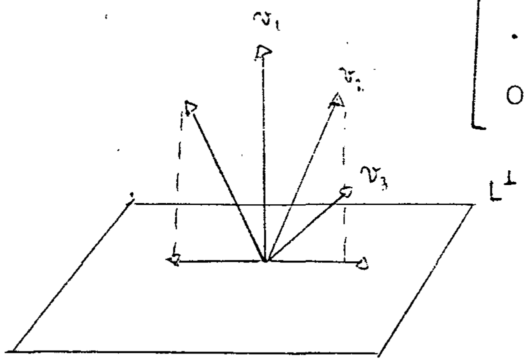
$\bar{v}_i : L \longrightarrow L^{\perp}$, tal que para $x \in L$, temos $\bar{v}_i(x)$ a imagem da $v_i(x)$ sob a projeção ortogonal $\mathbb{R}^n \longrightarrow L^{\perp}$.

Portanto $\bar{v}_i \circ v_i = id_L$, ou seja, $v_2 \ldots v_n$ são secções.

Assim $\bar{v}_1 = o$ porque ele será a projeção sob a origem. Esta projeção sobre $L^{\perp}$ dá origem, a menos de uma mudança de coordenadas, a uma matriz de posto $n-2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

que provem da projeção ortogonal no plano perpendicular a v_1 na origem da matriz de posto $n-1$ cujas colunas são os vetores colunas $v_2, v_3, \dots, v_n$.



Assim $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ são independentes. Pelo teorema 1.20 $\mathcal{T}_{n-1}$ é fibrado vetorial trivial, portanto P^{n-1} é paralelizável donde, pelo corolário 3.11, n deve ser uma potência de 2.

x x x x x

Imersões

Se uma variedade M de dimensão n pode ser imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$ então o teorema da dualidade de Whitney:

$$w_i(\gamma) = \bar{w}_i(\mathcal{T}_M)$$

implica que o dual das classes de Stiefel-Whitney $\bar{w}_i(\mathcal{T}_M)$ são zero para $i > k$, já que a classe w_i de um fibrado de dimensão k (no caso γ) é nula por ser de dimensão maior que a dimensão do fibrado (axioma 1). Consideremos o espaço projetivo P^9. Então:

$$w(P^9) = (1 + a)^{10} = 1 + a^2 + a^8 \quad \text{(tabela da página 28)}$$

e usando expansão em série de potências temos que:

$\bar{w}(P^9) = (1 + a^2 + a^8)^{-1} = 1 + a^2 + a^4 + a^6$, ou seja, se P^9 pode ser imerso em $\mathbb{R}^{9+k}$ então k é no mínimo 6 porque a partir de $\bar{w}_6(P^9)$ temos que as outras classes se anulam.

Os mais surpreendentes resultados sobre P^n são obtidos quando utilizamos $n = 2^r$.

Agora:

$$w(P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + a + a^n$$

e $$\bar{w}(P^n) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

Então:

3.14 - Teorema - Se P^{2^r} pode ser imerso em $\mathbb{R}^{2^r+k}$ então k deve ser, no mínimo, 2^r-1.

Em 1944 Whitney provou que toda variedade diferenciável compacta de dimensão $n > 1$ podia ser imersa em $\mathbb{R}^{2n-1}$.

O teorema acima nos dá uma melhor aproximação. Por exemplo, como, segundo Whitney, P^7 não pode ser imerso em $\mathbb{R}^{12}$ segue, por este teorema, que P^8 também não pode ser imerso em $\mathbb{R}^{12}$.

Em [5] Hirsh trabalha com imersões em espaços euclidianos e utilizando noções tais como: fibrados, variedades paralelizáveis, classes de Stiefel-Whitney ele prova os teoremas: - Se M é paralelizável ele é imersível em E^{k+1}.

- Se M é imersível em E^n (n qualquer) com fibrado normal trivial ela é imersível em E^{k+1}.
- Toda variedade compacta de dimensão 3 é imersível em E^4.
- Toda variedade compacta de dimensão 5 é imersível em E^8.

Além disso, trabalhando com espaços projetivos P^n ele prova resultados que refinam os conseguidos por Whitney. São eles:

- As seguintes imersões são possíveis: $P^3 \longrightarrow E^4$, $P^5 \longrightarrow E^7$, $P^6 \longrightarrow E^7$, $P^7 \longrightarrow E^8$, $P^9 \longrightarrow P^{16}$.
- Se k é par, P^k é imersível em E^{k+1} então P^{k+1} é paralelizável.

NÚMEROS DE STIEFEL-WHITNEY

Aqui teremos contacto com os chamados números de Stiefel-Whitney definidos envolvendo as classes de Stiefel-Whitney e que nos permitirão comparar variedades diferentes.

Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional.

Usando coeficientes módulo 2, existe uma única classe fundamental de homologia:

$$\mu_M \in H_n(M;\ \mathbb{Z}/2) - [9, \text{pág. } 273].$$

Portanto, para qualquer classe de cohomologia

$v \in H^n(M;\ \mathbb{Z}/2)$ o índice de Kronecker

$$\langle v,\ \mu_M\rangle : H^n(M,\ \mathbb{Z}/2) \otimes H_n(M) \longrightarrow Z/2$$

está bem definido [13, pág. 93].

Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ inteiros não negativos com:

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n.$$

Então correspondendo a qualquer fibrado vetorial ξ podemos formar o monômio:

$$w_1(\xi)^{r_1} \ldots w_n(\xi)^{r_n} \text{ em } H^n(B(\xi); \mathbb{Z}/2)$$

3.15 - Definição: O correspondente inteiro módulo 2 $\left\langle w_1(\mathcal{T}_M)^{r_1} \ldots\ldots w_n(\mathcal{T}_M)^{r_n}, \mu_M \right\rangle$ é chamado NÚMERO DE STIEFEL-WHITNEY de M associado com o monômio $w_1^{r_1} \ldots\ldots w_n^{r_n}$.

Sejam duas variedades M e M'.

M e M' tem o mesmo número de Stiefel-Whitney se:

$$\left\langle w_1(\mathcal{T}_M)^{r_1} \ldots\ldots w_n(\mathcal{T}_M)^{r_n}, \mu_M \right\rangle = \left\langle w_1(\mathcal{T}_{M'})^{r_1} \ldots w_n(\mathcal{T}_{M'})^{r_n}, \mu_{M'} \right\rangle$$

para todo monômio $w_1^{r_1} \ldots\ldots w_n^{r_n}$ de dimensão total n.

Como ilustração podemos examinar os números de Stiefel-Whitney para a variedade que nos é mais familiar, P^n.

Seja $\mathcal{T}$ o fibrado tangente de P^n, se tomarmos n par temos que $w_n(\mathcal{T}) = \binom{n+1}{n} a^n = (n+1) a^n$ que é não nula, o que implica na não nulidade do número de Stiefel-Whitney.

Assim também como $w_1(\mathcal{T}) = (n+1)\, a \neq 0$ então $\left\langle w_1^n (P^n) \right\rangle \neq 0$.

Examinemos o caso em que n é uma potência de 2:

$w(\mathcal{T}) = 1 + a + a^n$, segundo a tabela da página 28, sendo os outros números zero.

Os outros números podem ser computados mesmo que n não seja uma potência de 2, como produtos de coeficientes binomiais.

Examinemos o caso em que n é ímpar da forma 2k-1 $\Longrightarrow w(\mathcal{T}) = (1 + a)^{2k} = (1+a^2)^k$ (corolário 3.12),

como $w(P^1) = 1$

$w(P^3) = 1$

$w(P^5) = 1 + a^2 + a^4$

$w(P^7) = 1$

$w(P^9) = 1 + a^2 + a^8 \ldots$, conforme tabela da página 28, então existirá j ímpar tal que: $w_j(\mathcal{T}) = 0$.

Assim , todos os números de Stiefel-Whitney de P^{2k-1} são zero, já que todo monômio de dimensão 2k-1 deve conter um fator w_j de dimensão ímpar.

APLICAÇÃO DOS NÚMEROS DE STIEFEL-WHITNEY:

3.16 - Teorema. [Pontrjagin]

Se B é uma variedade (n + 1) dimensional diferenciável e compacta com bordo igual a M então os números de Stiefel-Whitney são todos nulos.

Prova: Seja a classe de homologia fundamental:

$\mu_B \in H_{n+1}(B, M)$, com coeficiente em $\mathbb{Z}/2$ e consideremos o homomorfismo:

$\partial : H_{n+1}(B, M) \longrightarrow H_n(M)$,

que leva μ_B a μ_M. [3, pág. 57]

Agora consideremos qualquer classe $v \in H^n(M)$ e denotemos por δ o homomorfismo que leva $H^n(M) \longrightarrow H^{n+1}(B, M)$

Assim: $\langle v, \partial\mu_B \rangle = \langle \delta v, \mu_B \rangle$ [13, pág. 93]

Consideremos o fibrado τ_B restrito a M bem como o subfibrado τ_M. Utilizando uma métrica euclidiana sobre τ_B, como τ_B e γ_M são complementares temos que: a cada $x \in M$ podemos associar: vetor exterior normal a M em x, de modo que teremos uma aplicação do tipo $M \longrightarrow \gamma_M \subseteq M \times \mathbb{R}^n$, contínua e diferenciável. Portanto, podemos falar em um único campo vetorial normal ao longo de M, gerando um fibrado trivial ε^1. (Teorema 1.20). Assim, segue que:

$$\tau_B\big|_M \cong \tau_M \oplus \varepsilon^1.$$

Pensando em termos de classes de Stiefel-Whitney e considerando ε^1 trivial podemos afirmar que:

as classes de Stiefel-Whitney de τ_B restritas a M são iguais as classes de Stiefel-Whitney de τ_M, pois:

$w_i(\tau_B) = w_j(\tau_M \oplus \varepsilon^1) = w_j(\tau_M)$.

Tomemos a sequência:

1) $H^n(B) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M)$ onde i^* é o homomorfismo restrição. 1) faz parte da sequência exata do par (B, M) [13, pág. 19] portanto ela é exata, ou seja: im i^*=Ker

Assim temos que: $\delta(w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}) = 0$ e portanto:

$$\left\langle w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}, \partial\mu_B \right\rangle = \left\langle \delta(w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}, \mu_B \right\rangle = 0$$

Conclusão: Todos os números de Stiefel-Whitney de M são zero.

3.17 - Teorema - [Thom] - Se todos os números de Stiefel-Whitney de M são zero, então M pode ser realizada como o bordo de alguma variedade diferenciável compacta.

Prova - A prova deste teorema não é fácil. Utilizando-se [12] podemos chegar a ela.

3.18 - Definição - Duas n-variedades diferenciáveis fechadas M_1 e M_2 pertencem a mesma classe de cobordismo se e somente se sua união disjunta $M_1 \cup M_2$ é o bordo de uma variedade compacta $(n + 1)$-dimensional e diferenciável.

Dos teoremas 3.15 e 3.16 temos:

3.19 - Corolário - Duas n-variedades fechadas e diferenciáveis pertencem a mesma classe de cobordismo se e somente se todos os seus correspondentes números de Stiefel-Whitney são iguais.

* * *

CAPÍTULO IV

EXISTÊNCIA DAS CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY

Seja ξ um $\mathbb{R}^n$-fibrado qualquer com espaço total E, espaço básico B e aplicação projeção $\widetilde{\pi}$.

Consideremos: E_o - o conjunto de todos os elementos não nulos de E.

F_o - o conjunto de todos os elementos não nulos de uma fibra típica $F = \widetilde{\pi}^{-1}(b)$.

Como $F \subset E$ temos: $F_o = F \cap E_o$.

Vejamos a seguir que usando resultados conhecidos teremos:

$$H^i(F, F_o; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} 0 \text{ para } i \neq m \\ \mathbb{Z}/2 \text{ para } i = m \end{cases}$$

Já que F é um espaço vetorial isomórfico ao $\mathbb{R}^n$ (definição de fibrado vetorial) teremos:

$$H^i(F, F_o; \mathbb{Z}/2) \cong H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\} ; \mathbb{Z}/2)$$

utilizando o Teorema da Dualidade de Poincaré [3, pág. 164] :

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\} ; \mathbb{Z}/2 \cong H_{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\} ; \mathbb{Z}/2) \quad [13, \text{pág. } 149]$$

$$H_{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\} ; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \text{ ; para } n-i = m \\ 0 \text{ ; para } n-i \neq m \end{cases} \quad [3, \text{pág. } 111]$$

logo:

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\} ; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} 0; \ i \neq m \\ \mathbb{Z}/2 \ ; \ i = m \end{cases}$$

Queremos ver que:

$$H^i(E, E_o; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} 0 \text{ para } i < n \\ H^{i-n}(B, \mathbb{Z}/2) \text{ para } i \geqslant n \end{cases}$$

Para tanto precisamos mostrar que $E \cong B$:

Seja $\varphi : E \times I \longrightarrow E$ onde $(b, v) \in E$ e $B = \{(b, 0_b)\}$

$$\varphi_t(b, v) = (b, tv)$$

$$\varphi_o(b, v) = (b, 0_b) \qquad \Longrightarrow \varphi_1 = id_E \text{ e } \varphi_o : E \longrightarrow E - E_o$$

$$\varphi_1(b, v) = (b, v)$$

Assim: $E \xrightarrow{\varphi_o} E - E_o \xrightarrow{\widetilde{\pi}|_{E-E_o}} B$. Basta vermos que:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_E"'] & B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "id_B"] & E \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

como $\pi\big|_{E-E_o} : E - E_o \longrightarrow B$ é um homeomorfismo, temos:

Sejam $f = \pi\big| \circ \varphi_o$ e $g = (\pi\big|)^{-1}$ então:

1) $g \circ f = \varphi_o \sim \varphi_1 = id_E$

2) $\pi\big| \circ \varphi_o \circ (\pi\big|)^{-1} = id_B$

Assim, usando [9, pág. 106] com $j + n = i$ para $i \geqslant n$ temos:

$$H^{i-n}(B; \mathbb{Z}/2) \cong H^i(E, Eo; \mathbb{Z}/2)$$

Da mesma forma para $i < n$ temos $i-n < o$, logo:

$$H^{i-n}(B ; \mathbb{Z}/2) = 0$$

4.1 - <u>Teorema</u> - O grupo $H^i(E, E_o)$ é zero para $i < n$ e $H^n(E, E_o)$ contém uma única classe μ tal que para cada fibra $F = \pi^{-1}(b)$ a restrição: $\mu\big|_{(F, F_o)} \in H^n(F, F_o)$ é a única classe não nula em $H^n(F, F_o)$.

Além disso a correspondência $x \longrightarrow x \cup \mu$ define um isomorfismo $H^k(E) \longrightarrow H^{k+n}(E, E_o)$, $\forall$ k.

<u>Prova</u>: [9, pág. 110].

4.2 - <u>Definição</u> - O isomorfismo de Thom $\Phi : H^k(B) \longrightarrow H^{k+n}(E, E_o)$ é definido como sendo a composição de dois isomorfismos:

$$H^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E) \xrightarrow{\mu k} H^{k+n}(E, E_o).$$

Com o objetivo de verificarmos os axiomas relativos às classes de Stiefel-Whitney introduzimos aqui os axiomas básicos para os "Quadrados de Steenrood" [11, pág. 1] aplicados a $H^*(E, E_o)$.

1) Para todos os inteiros $i \geqslant o$ e $q > o$, existe uma transformação natural de funtores que é um homomorfismo

$$S_q^i : H^n(X, A) \longrightarrow H^{n+i}(X, A);\ n \geqslant o$$

2) Naturalidade:

Se $f: (X, A) \longrightarrow (X', A') \implies S_q^i \circ f^* = f^* \circ S_q^i$

3) Se $a \in H^n(X, A) \Longrightarrow S_q^n(a) = a \cup a$ para dim $a = n$

4) Se $i >$ dim a; $S_q^i(a) = 0$

5) Fórmula de Cartan:

$$S_q^k(a \cup b) = \sum_{i=0}^{k} S_q^i(a) \cup S_q^i(b), \text{ se } a \cup b \text{ está definido.}$$

Com o auxílio destes axiomas e do isomorfismo de Thom Φ podemos agora definir as classes de Stiefel-Whitney como:

(1) $$w_i(\xi) = \Phi^{-1} S_q^i \left[\Phi(1)\right]$$

Assim: $w_i(\xi)$ é a única classe de cohomologia em $H^i(B)$ tal que:

$\Phi_i\left[w_i(\xi)\right] = \widetilde{\Pi}^* w_i(\xi) \cup \mu$ é igual a $S_q^i\left[\Phi(1)\right] = S_q^i(\mu)$

onde $H^i(B) \xrightarrow{\widetilde{\Pi}^*} H^i(E) \xrightarrow{\mu\, i} H^{i+k}(E, E_o)$.

Introduzindo a operação quadrado total:

$$S_q(a) = a + S_q^1(a) + S_q^2(a) + \ldots + S_q^n(a) \quad \text{com } a \in H^n(S, A)$$

assim a fórmula da Cartan pode ser escrita:

$$S_q(a \cup b) = (S_q a) \cup (S_q b)$$

Da mesma forma a correspondente equação para o produto cruz [13, pág. 110] usando:

$$S_q(a \times b) = S_q(a) \times S_q(b) \qquad [11, \text{pág. } 2]$$

e a fórmula (1) fica:

$$w(\xi) = \Phi^{-1} S_q \Phi(1) = \Phi^{-1} S_q(\mu).$$

4.3 - <u>Verificação dos axiomas</u>:

Axioma 1 - Como $\Phi : H^i(B) \longrightarrow H^{i+n}(E, E_o)$

e $w_i(\xi) = \Phi^{-1} S_q^i \Phi(1)$ então $w_i(\xi) \in H^i(B)$

$w_o(\xi) = \Phi^{-1} S_q^o \Phi(1) = \Phi^{-1} S_q(\mu) = 1$

e $w_i(\xi) = \Phi^{-1} S_q^i \Phi(1) = \Phi^{-1}(o) = o$, para $i > n$.

Axioma 2 - Seja $f: \xi \longrightarrow \xi'$ uma aplicação de fibrados então ela induzirá uma aplicação $g: (E, E_o) \longrightarrow (E', E'_o)$.

Se μ' denota a classe de cohomologia fundamental em $H^n(E', E'_o)$ então a induzida $g^*(\mu')$ é igual a classe $\mu \in H^n(E, E_o)$ pela definição de μ (Teorema 4.1).

Segue que os isomorfismos de Thom Φ e Φ' satisfazem a condição de naturalidade $g^* \circ \Phi' = \Phi \circ \bar{f}^*$

$$\begin{tikzcd}
H^k(B) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[rr, bend left, "\Phi"] & H^k(E) \arrow[r, "\cup k"] & H^{k+n}(E, E_o) \\
H^k(B') \arrow[u, "\bar{f}^*"] \arrow[r, "\pi'^*"] \arrow[rr, bend right, "\Phi'"'] & H^k(E') \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\cup' k"] & H^{k+n}(E', E'_o) \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

a partir desta igualdade e da propriedade 2, teremos:

$\bar{f}^* w_i(\xi') = \bar{f}^* \Phi'^{-1} S_q^i \Phi'(1)$, mas $f^* \Phi'^{-1} = \Phi^{-1} g^*$

$= \Phi^{-1} g^* S_q^i \Phi'(1)$, mas $g^* S_q^i = S_q^i g^*$

$= \Phi^{-1} S_q^i g^* \Phi'(1)$, mas $g^* \Phi' = \Phi \bar{f}^*$

$= \Phi^{-1} S_q^i \Phi \bar{f}^*(1)$, mas $\bar{f}^*(1) = 1$

$= \Phi^{-1} S_q^i \Phi(1)$, mas $\Phi^{-1} S_q^i \Phi(1) = w_i(\xi)$

$= w_i(\xi)$.

Axioma 3 - Consideremos o fibrado produto $\xi'' = \xi \times \xi'$ com projeção

$\pi \times \pi' : E \times E' \longrightarrow B \times B'$

e sejam $\mu \in H^m(E, E_o)$, $\mu' \in H^n(E', E'_o)$ as classes fundamentais de ξ e ξ'.

Como E_o é aberto em E e E'_o é aberto em E' o produto cruz:

$\mu \times \mu' \in H^{m+n}(E \times E', E \times E'_o \cup E_o \times E')$ [9, pág. 266]

está definido.

Seja $(E \times E'_o) \cup (E_o \times E') \subset E'' = E \times E'$ então:

$(E \times E'_o) \cup (E_o \times E') = E''_o$ porque esta união nos dá exatamente $E_o \times E'_o$, que serão os vetores não nulos de E".

Nosso objetivo é mostrar que $\mu \times \mu'$ definido acima é exatamente a classe fundamental $\mu'' \in H^{m+n}(E'', E''_o)$ e para isso é suficiente mostrarmos que a restrição $\mu \times \mu' \big|_{(F'', F''_o)}$ é a classe de cohomologia não nula em $H^{m+n}(F'', F''_o)$ para toda fibra $F'' = F \times F'$

de ξ'' (teorema 4.1). Porém esta restrição é igual ao produto cruz de $\mu\Big|_{(F,\ F_o)}$ e $\mu'\Big|_{(F',\ F'_o)}$ onde μ e μ' são geradores de espaços, logo diferente de zero. Assim $\mu \times \mu'$ é não nula [9, pág. 266].

Agora se $\bar{a} = \widetilde{\pi}^*(a) \in H^*(E)$ e $\bar{b} = \widetilde{\pi}'^*(b) \in H^*(E')$ então segue da equação com coeficientes em $\mathbb{Z}/2$, portanto sem sinal:

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cup (\mu \times \bar{\mu}) = (\bar{a} \cup \mu) \times (\bar{b} \cup \mu')$ [10, pág.]

que $\Phi''(a \times b) = \Phi(a) \times \Phi'(b)$, onde:

$$\Phi'': H^k(E) \longrightarrow H^{k+n}(E,\ E').$$

Assim, agora podemos computar as classes de Stiefel-Whitney para ξ'' usando a fórmula:

$$\Phi''[w(\xi'')] = S_q(\mu'') = S_q(\mu \times \mu') = S_q(\mu) \times S_q(\mu') =$$

$$= \Phi[w(\xi)] \times \Phi'[w(\xi)] = \Phi''[w(\xi) \times w(\xi')]$$

$$\Longrightarrow \Phi''[w(\xi'')] = \Phi''[w(\xi) \times w(\xi')]$$

$$\Phi''^{-1}\ \Phi''[w(\xi'')] = \Phi''^{-1}\ \Phi''[w(\xi) \times w(\xi')]$$

logo, $w(\xi \times \xi') = w(\xi) \times w(\xi')$.

Supondo que ξ e ξ' são fibrados sobre o mesmo espaço base B tomamos o mergulho diagonal conforme foi feito na página 16 (Somas de Whitney) e obtemos:

$$w(\xi \oplus \xi') = w(\xi) \cup w(\xi').$$

Axioma 4 - Seja γ_1^1 o fibrado linha canônico assim o espaço de vetores de comprimento menor ou igual que 1 no seu espaço total é uma faixa de Moebius M, limitada pelo círculo $\dot{M}$.

Sejam $(E_o,\ E_o) \times I \longrightarrow (M,\ E_o)$; tal que

$([x,\ s],\ t) \xrightarrow{\varphi} [x,\ ts + (1-t)\,\lambda(s)]$ com

$(M,\ M_o) \xrightarrow{i} (E,\ E_o)$ logo: $\varphi \circ i \simeq id_{(M,\ M_o)}$ e

$i \circ \varphi \simeq id_{(E,\ E_o)}$ logo: M é um retrato de deformação de E.

$$\text{Com}\quad \lambda(s) = \begin{cases} \exp.\ (-1/s^2)\ ; & s \geq 0 \\ -\exp.\ (-1/s^2)\ ; & s < 0 \end{cases}$$

Da mesma forma: Se $(M, M_o) \longrightarrow (M, \dot{M})$

com $M_o \xrightarrow{\varphi_1} M_o$; onde $M_o = M - \{\text{conjunto de } (x, o),\ x \in S'\}$

Φ_1 = identidade

e $([x, s], t) \xrightarrow{\Phi_o} \left[x, \frac{s}{|s|}(1-t) + s\,t\right]$

então Φ_o é uma retração e $\dot{M} \cong M_o$.

Assim o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & E_o \arrow[dr] & \\
\dot{M} \arrow[r, "\cong"] & M_o \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr] & & E \\
 & & M \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

implica $H^*(E, E_o) \cong H^*(M, M_o) \cong H^*(M, \dot{M})$

temos que: $H^*(E, E_o) \cong H^*(M, \dot{M})$.

Por outro lado se mergulharmos o disco D^2 em P^2 então $P^2 - D^2$ é homeomórfico a M, pois:

trabalhando no plano complexo teremos que o disco D^2 é dado por:

$\{x + iy\} = \{\rho\, e^{i\theta},\ \rho < 1\}$,

onde $x + iy = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$

Seja a função f que associa:

$P^2 - D^2 : S'/Z_2 \longrightarrow S'$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overset{e^{i\theta}}{S'} \arrow[r] \arrow[d, "\text{aplicação identificação}"'] & \overset{e^{2i\theta}}{S'} \\
S'/Z_2 \arrow[ur, dashed, leftrightarrow, "\text{homeomorfismo (transgressão)}"'] &
\end{tikzcd}$$

[2, pág. 121]

onde $Z_2 e^{i\theta} = \{1, -1\}\ e^{i\theta} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\} = \{e^{i\theta}, e^{i(\theta + \pi)}\}$

já que: $\{1, -1\} = \{e^{o}, e^{\pi}\}$.

Usaremos o teorema da Excisão:

Seja (X, A) um par de espaços e $U \subseteq A$ um subconjunto com $\overline{U} \subseteq \operatorname{Int} A$. Então a aplicação de pares:

$i: (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$

induz um isomorfismo:

$i^* : H^*(X, A; G) \longrightarrow H^*(X - U, A - U, G)$

Prova: [1]

Assim, teremos: $H^*(M, \dot{M}) \cong H^*(P^2, D^2)$.

Portanto existem isomorfismos naturais:

$$H^i(E, E_o) \longrightarrow H^i(M, \dot{M}) \longleftarrow H^i(P^2, D^2) \longrightarrow H^i(P^2)$$

para toda dimensão $i \neq o$.

Como $\mu \in H^i(E, E_o)$ não é zero, pois ela é classe fundamental, deve corresponder ao gerador $a \in H^1(P^2)$ sob o isomorfismo composto.

Logo $S_q^1(\mu) = \mu \cup \mu$ deve corresponder a $S_q^1(a) = a \cup a$.

Mas $a \cup a \neq o$ pelo teorema 4.1.

Segue que:

$w_1(\gamma_1^1) = \Phi^{-1} S_q^1(\mu)$ deve também ser não nulo.

***

CAPÍTULO V

UNICIDADE DAS CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n no espaço coordenado $\mathbb{R}^{n+k}$. A cada ponto $x \in M$ associamos o espaço tangente $DM_x \subset \mathbb{R}^{n+k}$ e tomamos DM_x como um ponto num novo espaço topológico $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

5.1 - Definição - $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é chamado "Variedade de Grassmann" e consiste do conjunto de todos os planos n-dimensionais através da origem do espaço coordenado $\mathbb{R}^{n+k}$.

5.2 - Definição - A variedade de Grassmann infinita $G_n = G_n(\mathbb{R}^{\infty})$ é o conjunto de todos os subespaços lineares n-dimensionais de $\mathbb{R}^{\infty}$, topologizado como o limite direto [3, pág. 155] da sequência:

$G_n(\mathbb{R}^n) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \dots$

Observação: o espaço projetivo infinito $P^{\infty} = G_1(\mathbb{R}^{\infty})$ é igual ao limite direto da sequência $P^1 \subset P^2 \subset \dots$

5.3 - Fibrado Universal γ^n - Sejam:

1) $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}$ o conjunto de todos os pares: (n-plano em $\mathbb{R}^{\infty}$, vetor deste n-plano), topologizado como um subconjunto do produto cartesiano.

2) $\pi : E(\gamma^n) \longrightarrow G_n$, tal que: $\tilde{\pi}(X, x) = X$ e definir as estruturas de espaço vetorial nas fibras como fizemos anteriormente.

5.4 - Lema - γ^n satisfaz a condição de trivialidade local.

Prova: [9, pág. 64].

Unicidade das classes de Stiefel-Whitney:

5.5 - Teorema - Existe, no máximo, uma correspondência $\xi \longrightarrow w(\xi)$ que associa a cada fibrado vetorial sobre um espaço básico paracompacto uma sequência de classes de cohomologia satisfazendo os quatro axiomas para classes de Stiefel-Whitney.

Prova: Suponhamos que existam duas correspondências:

$$\xi \longrightarrow w(\xi) \quad \text{e} \quad \xi \longrightarrow \tilde{w}(\xi).$$

Utilizando o fibrado linha canônico γ_1^1 , sobre P^1, temos:

$w(\gamma_1^1) = \tilde{w}(\gamma_1^1) = 1 + a$

Mergulhando γ_1^1 no fibrado linha γ^1 sobre o espaço projetivo P^∞ :

$$\begin{tikzcd} E(\gamma_1^1) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"'] & E(\gamma^1) \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] \\ P^1 \arrow[r, "i"] & P \end{tikzcd}$$

teremos que: $w(\gamma^1) = \tilde{w}(\gamma^1) = 1 + a$, porque por [3, pág. 90] temos que $H^*(P^\infty, \mathbb{Z}/2)$ é uma álgebra polinomial sobre $\mathbb{Z}/2$ com um gerador a e chamemos:

$$w(\gamma^1) = 1 + a$$

Passando para o n-produto cartesiano:

$\xi : \gamma^1 \times \gamma^1 \times \ldots \times \gamma^1$ e tomando os a_i, como as imagens $\tilde{\pi}_i^*(a)$ induzidas pelas aplicações projeções:

$\tilde{\pi}_i : X \longrightarrow P^\infty$, teremos:

$\xi : \gamma^1 \times \gamma^1 \times \ldots \times \gamma^1 \cong (\tilde{\pi}_1 \gamma^1) \oplus \ldots \oplus (\tilde{\pi}_n^* \gamma^1)$

Assim, pelo axioma 2:

$\xi \cong \gamma^1 \oplus \gamma^1 \oplus \ldots \oplus \gamma^1$

e $w(\xi) = \tilde{w}(\xi) = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$. Lema 3.8.

Por teorema [9, pág. 65] existe uma aplicação de fibrados:

$\xi \longrightarrow \xi^n$ e sabendo-se que $H^*(G_n)$ é injetado monomorficamente em $H^*(P^\infty \times \ldots \times P^\infty)$, já que:

$\bar{g}^* : H^*(G_n) \longrightarrow H^*(P^\infty \times \ldots \times P^\infty)$ é um homomorfismo [9, pág. 85]. Então:

$$w(\gamma^n) = \tilde{w}(\gamma^n)$$

Agora utilizemos o teorema citado acima para um n-plano fibrado qualquer sobre um espaço base para compacto, escolhendo uma aplicação de fibrados f: $\eta \longrightarrow \gamma^n$.

Pelo axioma 2 teremos:

$$w(\eta) = \bar{f}^* w(\gamma^n) = \bar{f}^* \tilde{w}(\gamma^n) = \tilde{w}(\eta).$$

+ +

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - BALSTER, M. H. Cordeiro - O Invariante de Hopf em Cohomologia Singular. Tese de Mestrado - UFSC, 1980.

2 - DUGUNDJI, James - Topology. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

3 - GREENBERG, Marwin J. - Lectures on Algebraic Topology. Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., 1967.

4 - GUILLEMIN, Victor e POLLACK, Alan - Diferential Topology. Prentice-Hall, New Jersey.

5 - HIRSCH, Morris W. - Immersions of Manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242-276.

6 - KORB, Selma V. - Um Enfoque de Variedades Diferenciáveis com Aplicações a Equações Diferenciais. Tese de Mestrado - UFSC, 1980.

7 - LANG, Serge - Álgebra Linear. Editora Universidade de Brasilia, 1971.

8 - LIMA, Elon Lages - Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro, I.M.P.A., 1973.

9 - MILNOR, John W. and STASHEFF - Characteristic Classes. Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.

10- SPANIER, Edwin H. - Algebraic Topology. New York, McGraw-Hill, 1966.

11- STEENROD, N. and EPSTEIN, D.B.A. - Cohomology Operations. Princeton, Princeton University Press, 1962.

12- STONG, Robert E. - Notes on Cobordism Theory. Princeton University Press and The University of Tokyo Press, 1968.

13- VICK, James W. - Homology Theory. Academia Press, New York, 1972.