UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

O INVARIANTE DE HOPF EM COHOMOLOGIA SINGULAR

Maria Helena Cordeiro Balster

Agosto - 1980

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. William Gleen Whitley, Ph.D.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Italo José Dejter, Ph.D.
Orientador

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Prof. Tarcisio Praciano Pereira, Ph.D.

Aqueles a quem devo tudo:

Meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Italo José Dejter por sua valiosa orientação.

Aos Colegas do Departamento de Matemática que de alguma forma me incentivaram e apoiaram na elaboração deste trabalho.

Ao Edwin, ao Alexandre, ao Jorge e à Olga Maria pelas horas que deles tirei para poder realizar este trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Este trabalho descreve o invariante de Hopf por meio do produto "cup" em cohomologia singular, e desenvolve algumas propriedades relacionadas.

ABSTRACT

This work describes the Hopf invariant by means of the cup product in singular cohomology, and develops some related properties.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A Topologia Algébrica traduz situações de problemas topológicos em problemas algébricos. Desta forma, a espaços topológicos e aplicações contínuas correspondem grupos abelianos - ou mais geralmente R-Módulos - e homomorfismos compatíveis. Observa-se nesta direção que a homologia e a cohomologia singular são invariantes homotópicos. A partir de um desenvolvimento elementar destas ferramentas, tratamos com certo detalhe o curso de idéias que levam a estrutura do anel de cohomologia, através do produto "cup", o que nos permite abordar o relevante invariante de Hopf [9, 13], em cohomologia singular. Especial atenção temos tido em aplicações do Método dos modelos acíclicos, especialmente na prova do teorema de Eilenberg Zilber e a Fórmula de Künneth. Isto nos permite abordar os produtos que nos levam à compreensão do anel de cohomologia. Além disso, diversos exemplos foram intercalados para melhor entendimento das ferramentas desenvolvidas.

CAPÍTULO I

TEORIA DA HOMOLOGIA SINGULAR

1.1. Definição

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, o fecho convexo de A é a interseção de todos os conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$, que contém A.

1.2. Definição

Um p-simplexo s em $\mathbb{R}^n$ é o fecho convexo de uma coleção de (p + 1) - pontos $\{x_o,\ldots x_p\}$ em $\mathbb{R}^n$ no qual $x_1 - x_o,\ldots, x_p - x_o$ formam um conjunto linearmente independente. Observamos que este conjunto independe da escolha de x_o.

1.3. Definição

Se os vértices de s tem uma ordem específica, então s é um simplexo ordenado. Seja s um simplexo ordenado com vértices $x_o,x_1,\ldots,x_p$. Definimos σ_p como o conjunto de todos os pontos $(t_o,t_1,\ldots,t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ com $\Sigma t_i = 1$ e $t_i \geqslant 0$, para qualquer i. Se a função f: $\sigma_p \to s$ for dada por $f(t_o,t_1,\ldots,t_p) = \Sigma t_i x_i$, então f será contínua. Por outro lado da unicidade das representações e do fato de que σ_p e s são espaços de Hausdorff compactos segue que f é um homeomorfismo. Assim cada p-simplexo ordenado é a imagem homeomórfica natural de σ_p. Observemos que σ_p é um p-simplexo com vértices $x_o' = (1,0,\ldots,0)$, $x_1' = (0,1,\ldots,0),\ldots,$ $x_p'=(0,0,\ldots,1)$. σ_p é chamado p-simplexo padrão com ordenação natural.

1.4. **Definição**

Um p-simplexo singular em X é uma função contínua $\phi: \sigma_p \to X$. Observemos que o 0-simplexo singular pode ser identificado com os pontos de X, o 1-simplexo singular com os caminhos em X, o 2-simplexo singular com os triângulos em X (incluindo o seu interior), o 3-simplexo singular com os tetraedros em X, e assim por diante.

1.5. **Definição**

Se ϕ é um p-simplexo e $i \in \mathbb{Z}$ com $0 \leqslant i \leqslant p$, definimos $\partial_i \phi$, um (p-1)-simplexo singular em X, por

$$\partial_i \phi(t_0,t_1,\ldots,t_{p-1}) = \phi(t_0,t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{p-1})$$

$\partial_i\phi$ é a i-ésima face de ϕ.

1.6. **Definição**

Se $f: X \to Y$ é uma função contínua e ϕ é um p-simplexo singular em X, definimos um p-simplexo singular $f_\#(\phi)$ em Y por $f_\#(\phi) = f \circ \phi$. Observemos que, se $g: Y \to W$ é contínua e $id: X \to X$ é a aplicação identidade, $(g \circ f)_\#(\phi) = g_\#(f_\#(\phi))$ e $(id)_\#(\phi) = \phi$.

1.7. **Definição**

Se X é um espaço topológico definimos $S_n(X)$ como sendo o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todos os n-simplexos singulares de X. Os elementos de $S_n(X)$ são chamados n-cadeias singulares de X, e são combinações lineares formais $\sum_\phi n_\phi \cdot \phi$ onde n_ϕ é um inteiro, igual a zero para todos menos um número fi-

nito de ϕ. Uma vez que o operador i-ésima face ∂_i é uma função de um conjunto de n-simplexos singulares em um conjunto de (n-1)-simplexos singulares, existe uma única extensão para um homomorfismo $\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ dado por $\partial_i(\Sigma\, n_\phi . \phi) = \Sigma\, n_\phi . \partial_i\, \phi$.
Definimos o operador bordo como o homomorfismo $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ dado por $\partial = \partial_o - \partial_1 + \partial_2 + \ldots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \partial_i$.
O bordo de uma 0-cadeia é definido como sendo 0.

1.8. Proposição

A composição $\partial \circ \partial$ em $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$ é zero. [4].

Geometricamente esta afirmação diz simplesmente que o bordo de qualquer n-cadeia é uma (n-1)-cadeia não tendo bordo.

1.9. Definições

Um elemento $c \in S_n(X)$ é um n-ciclo se $\partial(c) = 0$. Um elemento $d \in S_n(X)$ é um n-bordo se $d = \partial(e)$ para algum $e \in S_{n+1}(X)$. Como ∂ é um homomorfismo, seu Kernel, o conjunto de todos os n-ciclos é um subgrupo de $S_n(X)$ denotado por $Z_n(X)$. De modo análogo, a imagem de ∂ em $S_n(X)$ é o subgrupo $B_n(X)$ de todos os n-bordos. A proposição 1.8 implica que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ é um subgrupo. O grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X) / B_n(X)$ é o n-ésimo grupo de homologia singular de X. Dois ciclos são equivalentes se sua diferença forma um bordo de uma cadeia de dimensão imediatamente mais alta.

1.10. Definição

Um complexo de cadeia é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

na qual a composição $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, para cada n. Equivalentemente, um complexo de cadeia é um grupo graduado $C = \{C_i\}$ junto com um homomorfismo $\partial: C \to C$ de grau -1, tal que $\partial \circ \partial = 0$. Se C e C' são complexos de cadeia com operadores bordos ∂ e ∂', uma aplicação de cadeia de C em C' é um homomorfismo $\Phi: C \to C'$ de grau zero tal que $\partial' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial$ para cada n. Denotando por $Z_*(C)$ e $B_*(C)$ o Kernel e imagem de ∂, respectivamente, a homologia de C é o grupo graduado $H_*(C) = Z_*(C) / B_*(C)$. Notemos que, se Φ é uma aplicação de cadeia $\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*C')$ e $\Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C')$. Portanto Φ induz um homomorfismo sobre grupos de homologia

$$\Phi_*: H_*(C) \to H_*(C')$$

Neste sentido o grupo graduado $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ torna-se um complexo de cadeia sobre o operador bordo ∂, de modo que o grupo de homologia de X é a homologia deste complexo de cadeia. Se $f: X \to Y$ é uma função contínua e ϕ é um n-simplexo singular em X, existe o n-simplexo singular $f_\#(\phi) = f \circ \phi$ em Y. Existe uma única extensão $f_\#: S_n(X) \to S_n(Y)$ para todo n. Assim $f_\#: S_n(X) \to S_n(Y)$ é uma aplicação de cadeia e existe induzido um homomorfismo de grau zero $f_*: H_*(X) \to H_*(Y)$. Notemos que isto é convenientemente funtorial no sentido de que para uma função contínua $g: Y \to W$ e a identidade $id: X \to X$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e id_* é o homomorfismo identidade.

1.10.1. Exemplo

Seja X o espaço topológico constituído de um único ponto. Existe um único p-simplexo singular $\phi_p: \sigma_p \to X$ (aplicação constante em X)

Portanto

$$\partial(\phi_p) = \begin{cases} \phi_{p-1} & , \text{ p par} \\ 0 & , \text{ p ímpar} \end{cases}$$

Para p par: $\partial(n\ \phi_p) = n\ \partial\ \phi_p = n\ \phi_{p-1}$. Como $(n\ \phi_p)$ é um ciclo, então $\partial(n\ \phi_p) = 0$ de onde $n\ \phi_{p-1} = 0$. Daí os ciclos são zero e $Z_p = 0$. O bordo é numa dimensão mais alta $\partial(n\ \phi_{p+1}) =$ $= n\ \partial\ \phi_{p+1} \overset{(p+1)\text{ímpar}}{=} n.0 = 0$ de onde $B_p = 0$. Portanto para p par $B_p = Z_p = 0$.

Para p ímpar: $\partial(n\ \phi_p) = n\ \partial\ \phi_p = n.0$ e $\partial(n\ \phi_p) = 0$ de onde qualquer simplexo é ciclo e $Z_p = S_p$. $\partial(n\ \phi_{p+1}) =$ $= n\ \partial\ \phi_{p+1} = n\ \phi_p$. Portanto qualquer simplexo é bordo e $B_p = S_p$

Concluimos então que $Z_p = B_p = \begin{cases} 0 & , \text{ p par} > 0 \\ S_p & , \text{ p ímpar} \end{cases}$

Logo $Z_n(pt) = B_n(pt)$ para $n > 0$. Contudo $Z_o(pt) = S_o(pt)$ é cíclico infinito enquanto $B_o(pt) = 0$. Lembrando que $H_n(pt) = Z_n(pt)$ / $B_n(pt)$ temos:

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

1.11. Proposição

Se X é um espaço não vazio, conexo por caminhos, então temos o isomorfismo

$$H_o(X) \approx \mathbb{Z} \; . \qquad [1]$$

1.12. Proposição

Se X é um espaço e $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ são componentes por caminhos de X, então

$$H_k(X) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha) \qquad [1]$$

1.13. Definição

Suponhamos que $C = \{C_i, \partial\}$ e $C' = \{C_i, \partial'\}$ são complexos de cadeias e $T: C \to C'$ é um homomorfismo de grupos graduados de grau um (mas não necessariamente uma aplicação de cadeia). Então consideremos o homomorfismo $\partial'T + T\partial : C \to C'$ de grau zero, que é uma aplicação de cadeia [1]. Dadas aplicações de cadeias f e $g : C \to C'$, f e g são homotópicas por cadeias se existe um homomorfismo $T : C \to C'$ de grau um com $\partial'T + T\partial = f - g$. T é denominada homotopia de cadeias. Dados espaços X e Y, duas aplicações f_o, $f_1 : X \to Y$ são homotópicas se existe uma aplicação

$$F : X \times I \to Y \quad , \quad I = [0,1] \; ,$$

com $F(x,0) = f_o(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação F é uma homotopia entre f_o e f_1.

Equivalentemente, uma homotopia é uma família de aplicações

$\{f_t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ de X em Y, variando continuamente com t.

Seja f: X → Y e g: Y → X aplicações de espaços topológicos. Se as composições f o g é homotópica a identidade em Y e g o f é homotópica a identidade em X, então f e g são homotopias inversas uma da outra. Uma aplicação f: X → Y é uma equivalência de homotopia se f tem uma homotopia inversa. Neste caso X e Y são ditos terem o mesmo tipo de homotopia.

1.14. <u>Teorema</u>

Se f_o , f_1 : X → Y são aplicações homotópicas, então $f_{o*} = f_{1*}$ como homomorfismos de $H_*(X)$ em $H_*(Y)$.

<u>Demonstração</u>:

Vamos usar o teorema dos modelos acíclicos (ver apêndice). Sejam X espaço topológico, I = $[0,1]$ e f_o , f_1 : X → Y aplicações homotópicas.

Consideremos F: X x I → Y uma homotopia entre f_o e f_1. Definamos aplicações g_o, g_1 : X → X x I por $g_o(x) = (x,0)$ e $g_1(x) = (x,1)$. Então no diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "g_o"'] \arrow[dr, "f_o"] & \\
X \times I \arrow[r, "F"] & Y \\
X \arrow[u, "g_1"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

cada triângulo é comutativo, isto é, $f_o = F \circ g_o$ e $F_1 = F_o\, g_1$.

Consideremos as aplicações de cadeias $g_{o\#}$, $g_{1\#}$: $S_*(X) \to S_*(X \times I)$. Para σ_n o n-simplexo padrão, denotamos por $\tau_n \in S_n(\sigma_n)$ o elemento representado pela aplicação identidade. Notemos que, se $f: \sigma_n \to X$ é um n-simplexo singular em X, então o homomorfismo induzido $f_\# : S_n(\sigma_n) \to S_n(X)$ tem $f_\#(\tau_n) = f \circ \tau_n = f$. Sejam T e T' os funtores covariantes tais que $(X,f) \overset{T}{\to} (S_*(X), f_\#)$ e $(X,f) \overset{T'}{\to} (S_*(X \times I, (f \times id_I)_\#)$. Do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "f \times id_I"] \\ Y \arrow[r] & Y \times I \end{tikzcd}$$

obtemos a equivalência natural

$$\begin{tikzcd} H_o(X) \arrow[d, "f_*"'] \arrow[r, shift right] & H_o(X \times I) \arrow[l, shift right, "\Phi"'] \arrow[d, "(f \times id_I)_*"] \\ H_o(Y) \arrow[r, shift left, "\Phi"] & H_o(Y \times I) \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Uma base de $S_*(X)$ será $\{T(f)\ (e_n)\ ;\ f : \sigma_n \to X\} = \{f_\#(e_n)\}$ = $= \{f_o\ e_n : \sigma_n \overset{id}{\to} \sigma_n \overset{f}{\to} X\}$ e $T_n = 0 = T'_n$ para $n < 0$. O conjunto $\{T(f)(e)\} = S_*(X)$ é tal que $H_i(T\ (\sigma_n)) = H_i\ (S_*(\sigma_n)) = H_i(\sigma_n) = 0$ para $i > 0$. Então $T(\sigma_n) = M_\alpha$ são modelos acíclicos. Podemos então tomar como segue: $T(.) = S_*(.)$ e $T'(.) = S_*(. \times I)$ onde . é um espaço topológico. Por outro lado $g_\#: T \to T'$ induz Φ. Sabemos pelo

Teorema dos modelos acíclicos que cada par de ϕ que elevam ϕ são homotópicas por cadeias. Para isto ser aplicado, sejam f, g_o e g_1 definidas como anteriormente. Então temos

$$\begin{array}{ccc}
S_*(X) & \overset{g_{o\#} = \phi}{\underset{g_{1\#}}{\rightrightarrows}} & S_*(X \times I) \\
S_*(f) = f\# \downarrow & & \downarrow S_*(f \times I) = (f \times id_I)\# \\
S_*(Y) & \overset{g_{o\#} = \phi}{\underset{g_{1\#}}{\rightrightarrows}} & S_*(Y \times I)
\end{array}$$

Em nível zero $g_{o*} = g_{1*}$

$$\begin{array}{ccc}
H_o(X) & \xrightarrow{g_{o*} = g_{1*}} & H_o(X \times I) \\
f_* \downarrow & & \downarrow (f \times id_I)_* \\
H_o(Y) & \longrightarrow & H_o(Y \times I)
\end{array}$$

Como em nível zero ambas g_{o*} e g_{1*} coincidem então g_{o*} e g_{1*} são homotópicas por cadeias.

1.15. Definições

1.15.1. Tripla Exata

Uma tripla $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ de grupos abelianos e homomorfismos é exata se a imagem da f é igual ao Kernel da g.

1.15.2. Seqüência Exata

Uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$ é exata se cada tripla é exata. Isto é, $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$, para cada i.

1.15.3. Seqüência Exata Curta

Uma sequência exata da forma $0 \to C \to D \to E \to 0$ é chamada de exata curta. Para a seqüência exata curta $0 \to C \xrightarrow{f} D \to 0$, onde f é um monomorfismo, $C' = f(C) \subseteq D$ e g é um epimorfismo com Kernel C', a menos de um isomorfismo posso escrever:

$0 \to C' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\pi} D/C' \to 0.$

Exemplo:

Seja $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$ o monomorfismo definido por $f(\bar{0}) = \bar{0}$ e $f(\bar{1}) = \bar{1}$. Seja a seqüência exata curta $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_6 \to 0$. A menos de um isomorfismo posso escrever $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_6/f(\mathbb{Z}_2) \to 0$

Como $\mathbb{Z}_6/f(\mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_3$ obtemos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3 \to 0$$

onde g é o epimorfismo com Kernel $f(\mathbb{Z}_2)$.

1.15.4. Homomorfismo de Conexão

Sejam $C = \{C_n\}$; $D = \{D_n\}$, $E = \{E_n\}$ complexos de cadeias e $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ é uma seqüência exata curta onde f e g são aplicações de cadeia de grau zero. Para cada p existe uma tripla associada de grupos de homologia $H_p(C) \xrightarrow{f^*} H_p(D) \xrightarrow{g^*} H_p(E)$. Consideremos um diagrama infinito em que as linhas são seqüências exatas curtas e cada quadrado é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & D_n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & D_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-2} \arrow[r, "f"] & D_{n-2} \arrow[r, "g"] & E_{n-2} \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Seja $z \in Z_n(E)$, isto é, $z \in E_n$ e $\partial z = 0$. Como g é um epimorfismo, existe $d \in D_n$ com $g(d) = z$, e do fato de g ser uma aplicação de cadeia temos $g(\partial d) = \partial(g(d)) = \partial z = 0$. A exatidão implica que ∂d está na imagem da f, assim seja $c \in C_{n-1}$ com $f(c) = \partial d$, então $f(\partial c) = \partial(f(c)) = \partial(\partial d) = 0$. Mas f é monomorfismo, então $\partial c = 0$ e $c \in Z_{n-1}(C)$. Mostremos agora que a correspondência associada sobre os grupos de homologia é um homomorfismo bem definido. Sejam $z, z' \in Z_n(E)$ ciclos homólogos, isto é, que diferem por um bordo. Então existe $e \in E_{n+1}$ com $\partial(e) = z-z'$. Sejam $d, d' \in D_n$ com $g(d) = z$, $g(d') = z'$ e $c, c' \in C_{n-1}$ com $f(c) = \partial d$, $f(c') = \partial d'$. Mostremos que c e c' são ciclos homólogos. Existe um elemento $a \in D_{n+1}$ com $g(a) = e$, pois g é um epimorfismo. Pela comutatividade do diagrama $g(\partial a) = \partial g(a) = \partial c = z-z'$. Sabemos da definição de d que $g(d-d') = z-z'$ e isto implica que $g((d-d') - \partial a) = 0$. Como neste nível a seqüência é exata, existe $b \in C_n$ tal que $f(b) = (d-d') - \partial a$ e do fato do diagrama ser comutativo, temos: $f(\partial b) = \partial f(b) = \partial(d-d' - \partial a) = \partial d - \partial d' = f(c) - f(c') = f(c-c')$. Como f é monomorfismo, temos que $c-c' = \partial b$ e c e c' são ciclos homólogos. Portanto a correspondência induzida sobre os grupos de homologia é bem definida e deve ser um homomorfismo. Este homomorfismo é denotado por

$$\Delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$

e é chamado homomorfismo de conexão para a seqüência exata curta $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$.

1.16. <u>Teorema</u>

Se $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ é uma seqüência exata curta de complexos de cadeia e aplicações de cadeia de grau zero, então a seqüência longa

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \cdots$$ é exata. [4]

1.17. <u>Definição</u>

Seja X um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X é uma cobertura de X, ou recobrimento de X, se $X \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. O interior de $\mathcal{U}$ (Int $\mathcal{U}$) é a união de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em $\mathcal{U}$. Trabalharemos com os conjuntos $\mathcal{U}$ tais que Int $\mathcal{U}$ é um recobrimento de X. Para qualquer recobrimento $\mathcal{U}$ de X, denotemos por $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ o subgrupo de $S_n(X)$ gerado pelos n-simplexos singulares $\phi: \sigma_n \to X$ para os quais $\phi(\sigma_n)$ está em algum $U \in \mathcal{U}$. Então a Imagem de $\partial_i \phi$ está contida na Imagem de ϕ para qualquer i e $\partial: S_n^{\mathcal{U}}(X) \to S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Associado com qualquer recobrimento $\mathcal{U}$ de X existe um complexo de cadeia $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ e a inclusão natural $i: S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*(X)$ é uma aplicação de cadeia. Observemos que se $\mathcal{V}$ é um recobrimento de um espaço Y e $f: X \to Y$ é uma aplicação tal que para cada $U \in \mathcal{U}$, $f(U)$ está contida em algum V de $\mathcal{V}$, então existe uma aplicação de cadeia $f_\#: S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*^{\mathcal{V}}(Y)$ e $f_\# \circ i_X = i_Y \circ f_\#$.

1.18. <u>Teorema</u>

Se $\mathcal{U}$ é uma família de subconjuntos de X tal que Int $\mathcal{U}$ é um recobrimento de X, então $i_*: H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(X)$ é um isomorfismo para cada n. [1]. Uma das aplicações deste teorema será o desenvolvimento de uma técnica para o estudo da homologia de um espaço X em termos da homologia das componentes de um recobrimento $\mathcal{U}$ de X. Num caso mais simples não trivial, o recobrimento $\mathcal{U}$ consiste de dois subconjuntos U e V tal que Int U $\cup$ Int V = X. Dado um conjunto arbitrário A, podemos construir um grupo abeliano livre com base A que designamos por F(A). Sejam A' o conjunto de todos os n-simplexos singulares em U e A'' o conjunto de todos os n-simplexos singulares em V. Façamos $S_n(U) = F(A')$, $S_n(V) = F(A'')$, $S_n(U \cap V) = F(A' \cap A'')$, $S_n^{\mathcal{U}}(X) = F(A' \cup A'')$.

Notemos que existe um homomorfismo natural $h: F(A') \oplus F(A'') \to F(A' \cup A'')$ dado por $h(a_i', a_j'') = a_i' + a_j''$ que é um epimorfismo. E ainda o homomorfismo $g: F(A' \cap A'') \to F(A') \oplus F(A'')$ onde $g(b_i) = (b_i, -b_i)$ que é um monomorfismo. Então $h \circ g = 0$. Suponhamos que $h(\Sigma n_i a_i', \Sigma m_j a'') = 0$, isto é, $\Sigma n_i a_i' + \Sigma m_j a_j'' = 0$. Isto implica que $a_i' = a_j''$ para algum j, e $m_j = -n_i$ de onde $a_i' \in A' \cap A''$ e se $x = \Sigma n_i a_i'$ então $\Sigma m_j a_j'' = -x$ e temos

$x \in F(A' \cap A'')$ e $g(x) = (\Sigma\, n_i a_i', \Sigma\, m_j a_j'')$. Portanto $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Im}(g)$ e conseguimos a seqüência exata curta

$0 \to F(A' \cap A'') \xrightarrow{g} F(A') \oplus F(A'') \xrightarrow{h} F(A' \cup A'') \to 0$ ou seja

$0 \to S_n(U \cap V) \xrightarrow{g\#} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h\#} S_n^{\mathcal{U}}(X) \to 0$. Definimos um complexo de cadeia $S_*(U) \oplus S_*(V)$ colocando $(S_*(U) \oplus S_*(V))_n =$ $= S_n(U) \oplus S_n(V)$ e pondo o operador bordo como o bordo usual sobre cada componente. Então a seqüência acima torna-se uma seqüência exata curta de complexos de cadeia e aplicações de cadeia de grau zero. Pelo teorema 1.16 existe associada uma seqüência exata longa de grupos de homologia

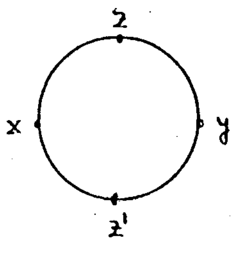
$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \to \ldots$$

Pela definição de complexo de cadeia é evidente que $H_n(S_*(U) \oplus S_*(V))$ é isomorfo a $H_n(U) \oplus H_n(V)$ e pelo teorema 1.17 temos $H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X))$ é isomorfo a $H_n(X)$. Colocando esses isomorfismos na seqüência exata longa temos estabelecida a <u>SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS</u>

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \to \ldots$$

1.18.1. <u>Exemplo</u>

Sejam $X = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$; z = polo norte; z' = polo sul ; x e y = pontos do equador ; $U = S^1 - \{z'\}$; $V = S^1 - \{z\}$.



Então $\{U,V\}$ é recobrimento aberto de S^1 e $U \cup V = S^1$. Na seqüência de Mayer-Vietoris associada com este recobrimento temos:

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

O primeiro termo é zero pois U e V são contráteis (1.10.1 - Exemplo). Assim Δ é monomorfismo e $H_1(S^1) \approx \mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Ker}(g_*)$. Um elemento de $H_0(U \cap V) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ pois $U \cap V = S^1 - \{z,z'\}$ é conexo por caminhos e possui duas componentes conexas (Prop. 1.12), pode ser escrito na forma $ax + by$, $a,b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U \cup V = X \\ & V \arrow[ur, "\ell"'] & \end{tikzcd}$$

$h_*(y,z) = k_*(y) + \ell_*(z)$, $g_*(x) = (i_*(x)\ , -j_*(x))$

$g_*(ax + by) = (i_*(ax + by), -j_*(ax + by))$. Como U e V são conexos por caminhos, $i_*(ax + by) = 0$ se e somente se $a = -b$ e analogamente para j_*. Assim, $\mathrm{Ker}(g_*)$ é o subgrupo de $H_0(U \cap V)$ consistindo de todos os elementos da forma $ax - ay = a(x - y)$, que é um subgrupo cíclico infinito gerado por $x - y$. Podemos concluir então, que $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$. Geometricamente, um gerador w para o grupo $H_1(S^1)$ será representado pela soma de duas cadeias $c + d$, onde $c \in U$ e $d \in V$ tal que $\partial(c) = x - y = -\partial(d)$. De fato, consideremos o diagrama infinito

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_n(U \cap V) \arrow[r, "g\#"] \arrow[d] & S_n(U) \oplus S_n(V) \arrow[r, "h\#"] \arrow[d] & S_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(U \cap V) \arrow[r, "g\#"] \arrow[d] & S_{n-1}(U) \oplus S_{n-1}(V) \arrow[r, "h\#"] \arrow[d] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-2}(U \cap V) \arrow[r, "g\#"] & S_{n-2}(U) \oplus S_{n-2}(V) \arrow[r, "h\#"] & S_{n-2}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Seja $z = c + d \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$, um ciclo. Então $\partial(c + d) = \partial(c) + \partial(d) = 0$. Como $h_\#$ é epimorfismo pela exatidão das seqüências curtas, existe $d \in S_n(U) \oplus S_n(V)$ tal que $h_\#(d) = c + d$. Do fato de $h_\#$ ser aplicação de cadeias $h_\#(\partial d) = \partial(h_\#(d)) = \partial(c + d) = 0$. A exatidão implica que ∂d é imagem de algum elemento de $S_{n-1}(U \cap V)$. Chamemos este elemento de $c = x - y$ com $g_\#(c) = \partial d$. Notemos que $g_\#(\partial c) = dg_\#(c) = \partial(\partial d) = 0$ e como $g_\#$ é monomorfismo, pela exatidão das seqüências $\partial c = 0$ e $c \in Z_{n-1}(U \cap V)$, isto é, c é um ciclo em $S_{n-1}(U \cap V)$. Para $n > 1$ a porção da seqüência de Mayer-Vietoris

$$H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h*} H_n(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V)$$

tem $H_n(U) \oplus H_n(V) = 0$ e $H_{n-1}(U \cap V) = 0$ pois U, V e $U \cap V$ são contráteis (Ex. 1.10.1). Portanto $H_n(S^1) = 0$. Então temos completado

$$H_n(S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

1.19. **Teorema**

Para cada inteiro $n \geqslant 0$, $H_*(S^n)$ é um grupo abeliano livre com dois geradores, um na dimensão zero e um na dimensão n.

Demonstração:

Lembremos que $S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1});\ x_i \in \mathbb{R}, \Sigma x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e que na forma usual $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ como o conjunto dos pontos $(x_1,\ldots,x_n,0)$. Vamos usar a indução para o cálculo da homologia de S^n para cada n. Sob a inclusão $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $S^{n-1} \subseteq S^n$ como o "equador". Sejam $z = (0,\ldots,0,1)$ e $z' = (0,\ldots,0,-1)$ polo norte e sul de S^n. Pela projeção estereográfica $S^n - \{z\} \approx \mathbb{R}^n$ $S^n - \{z'\} \approx \mathbb{R}^n$. Além disso $S^n - \{z \cup z'\} \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Afirmação:

S^{n-1} é um retrato deformado (ver apêndice) de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Então a seqüência de Mayer-Vietoris para $U = S^n - \{z\}$; $V = S^n - \{z'\}$ tal que $U \cap V = S^n - \{z,z'\}$ é:

$$H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{h_*} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

Para $m > 1$, $H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) = 0$ e $H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n) = 0$ (contráteis, 1.10.1). Então Δ é um isomorfismo, de onde $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Ker}(g_*)$ e $H_m(S^n) \approx H_{m-1}(S^{n-1})$.

Para $m = 1$, $n > 1$, g_* e Δ são monomorfismos de onde $H_1(S^n) = 0$.

Portanto

$$H_m(S^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0\ ,\ n \\ 0 & m \neq 0\ ,\ n \end{cases}$$

1.20. Aplicação da Seqüência de Mayer-Vietoris

Nesta altura vamos aplicar a seqüência de Mayer-Vietoris para calcular a homologia de alguns espaços topológicos.

1.20.1. Cálculo da Homologia da Adjunção N de S^1

Seja $a_i \in S^1$ um ponto na i-ésima coordenada de $(S^1)^n$. Então definimos

$\underset{n}{V} S^1 = (S^1 x\{a_2\}x\ldots x\{a_n\}) \cup (\{a_1\}xS^1x\{a_3\}x\ldots x\{a_n\}) \cup \ldots \cup$

$(\{a_1\}x\ldots x\{a_{n-1}\}x\ S^1)$

Vamos mostrar que

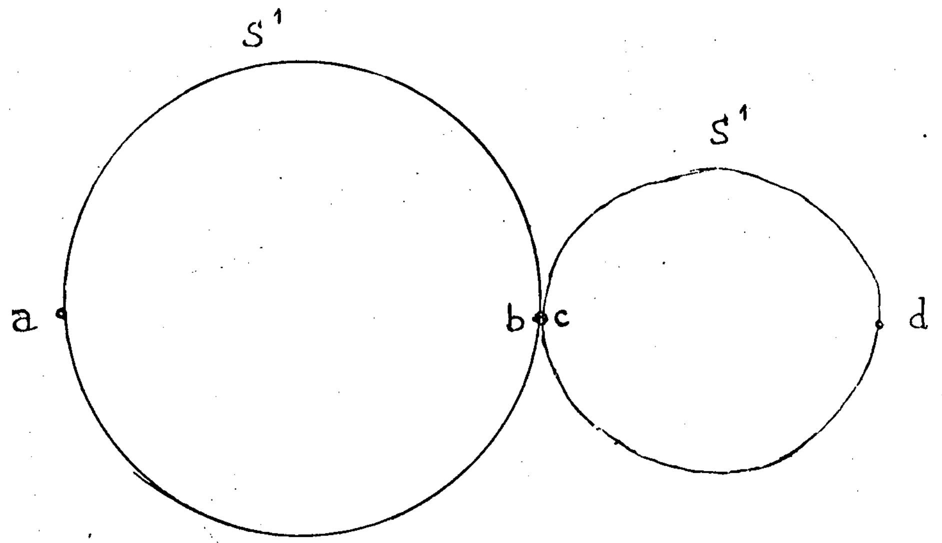
$$H_m(\underset{n}{V}\ S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ n\mathbb{Z} & m = 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

usando indução.

Para $n = 2$, $\underset{2}{V}\ S^1 = S^1 V S^1 = (S^1\ x\ \{a_2\}) \cup (\{a_1\}\ x\ S^1)$

$$H_m(S^1\ V\ S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ 2\mathbb{Z} & m = 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

Para tanto representemos $S^1\ V\ S^1$



e denotemos $V = S^1 \vee S^1 - \{a\}$ $\quad U = S^1 \vee S^1 - \{d\}$. Notemos que $U \simeq S^1$, $V \simeq S^1$ e $U \cap V \simeq$ ponto, onde o símbolo $\simeq$ é lido como homotópico. Assim temos a seqüência exata de Mayer-Vietoris:

$$\ldots \to H_m(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{\beta} H_m(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(U \cap V) \to \ldots$$

Mas $H_m(U \cap V) = H_m(\text{ponto})$ e $H_m(U) = H_m(V) = H_m(S^1)$.

Para $m = 0$, como $S^1 \vee S^1$ é conexo por caminhos temos $H_o(S^1 \vee S^1) \approx \mathbb{Z}$

Para $m = 1$, a seqüência acima tem a forma

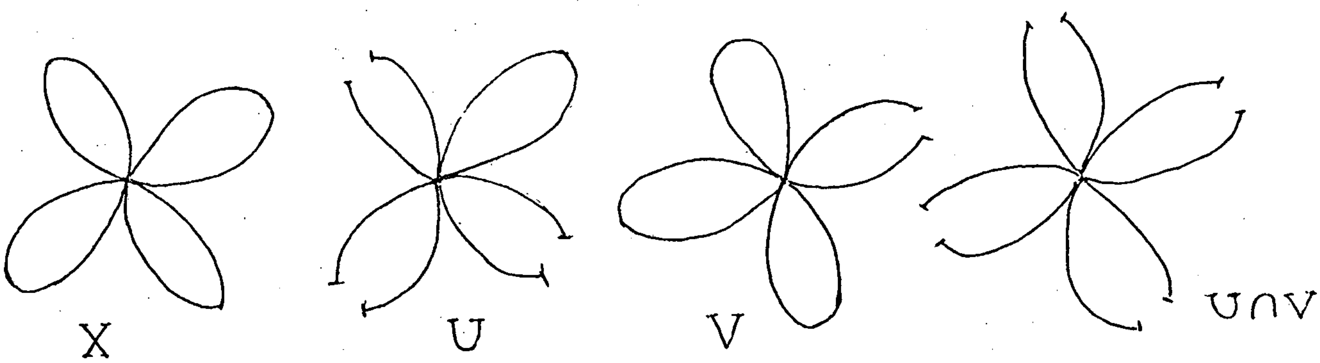
$0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} H_1(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z}$. Observe-se que β é um monomorfismo (pela exatidão) e que β é um epimorfismo. Logo β é um isomorfismo de onde $H_1(S^1 \vee S^1) \approx \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. Para $m > 1$, a seqüência acima tem a forma $0 \xrightarrow{\alpha} 0 \xrightarrow{\beta} H_m(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\Delta} 0$ de onde se conclui que $H_m(S^1 \vee S^1) = 0$. Vamos supor que seja verdadeiro

$$H_m(\bigvee_{n-1} S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ (n-1)\mathbb{Z} & m = 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

Usando as hipóteses de indução vamos provar que

$$H_m(\bigvee_n S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ n\,\mathbb{Z} & m = 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

Sejam $X = \bigvee_n S^1$, $U = S^1$, $V = \bigvee_{n-1} S^1$ e $U \cap V =$ ponto. A seguir ilustramos estes espaços para $n = 4$.



Assim temos a seqüência de Mayer-Vietoris

$$\ldots \to H_m(U \cap V) \overset{\alpha}{\to} H_m(U) \oplus H_m(V) \overset{\beta}{\to} H_m(\bigvee_n S^1) \overset{\Delta}{\to} H_{m-1}(U \cap V) \to \ldots$$

para $m = 0$, como $\bigvee_n S^1$ é conexo por caminhos temos $H_o(\bigvee_n S^1) \approx \mathbb{Z}$. Para $m = 1$, a seqüência acima tem a forma

$$0 \overset{\alpha}{\to} \mathbb{Z} + (n-1)\mathbb{Z} \overset{\beta}{\to} H_1(\bigvee_n S^1) \to \mathbb{Z}$$

β é monomorfismo, pela exatidão, e β é epimorfismo. Logo β é isomorfismo, e podemos então concluir que $H_1(\bigvee_n S^1) \approx n\,\mathbb{Z}$. Para $m > 1$, a seqüência acima tem a forma

$$0 \overset{\alpha}{\to} 0 \oplus 0 \overset{\beta}{\to} H_m(\bigvee_n S^1) \overset{\Delta}{\to} 0$$

β é monomorfismo e epimorfismo, pela exatidão, logo β é isomorfismo e concluimos que $H_m(\bigvee_n S^1) = 0$.

1.20.2. Cálculo da Homologia do Toro (T_1)

Consideremos as seguintes figuras:

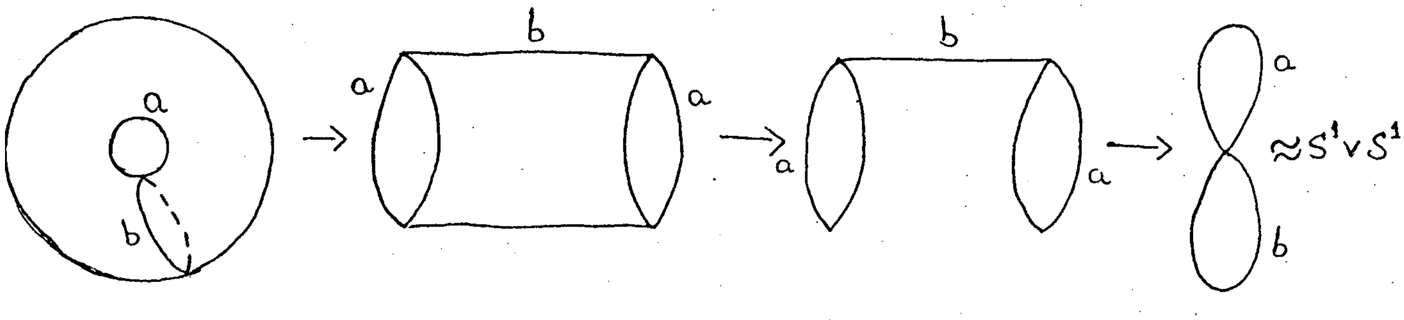
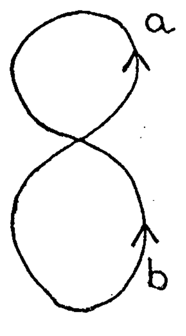
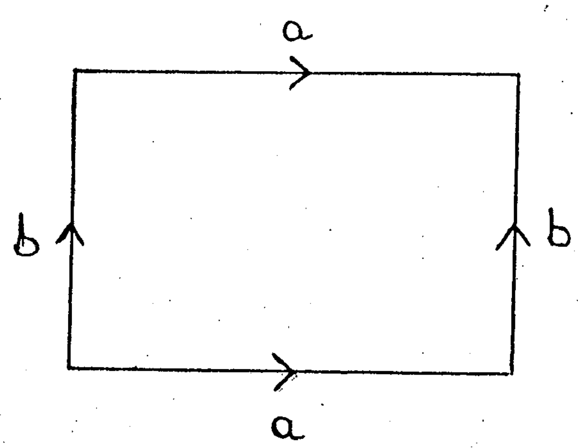


fig (I) fig (II) fig (III) fig (IV)

O toro representado na fig(I) é obtido do cilindro na fig(II) por identificação conveniente das componentes conexas de seu bordo, que são círculos. Neste cilindro temos como subespaço o espaço representado na fig(III) que corresponde no toro da fig(II) a um subconjunto homeomórfico a $S^1 \vee S^1$ como ilustra a fig(IV). Reciprocamente, o toro 2-dimensional obtém-se de $S^1 \vee S^1$ por adjunção de uma 2-célula. Podemos considerar a 2-célula como sendo o quadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ desde que existe um homeomorfismo deste X com o disco $D^2 = \{(x_1,x_2);\ x_i \in \mathbb{R}^2;\ \Sigma x_i^2 \leq 1\}$, sob o qual se correspondem os bordos, respectivamente. Basta então definir uma aplicação f do bordo ∂X em $S^1 \vee S^1$ que produza por adjunção o T_1, como ilustra as seguintes figuras:



$S^1 \vee S^1$



$S^1 V S^1 = (S^1 X \{x\} \cup (\{y\}) \, X \, S^1) \subseteq S^1 X S^1$. $[0,1] \, X \, [0,1]$

Então $f\colon \partial X \to S^1 \vee S^1$ é definida por $f(i,s) = (s,x)$ e $f(t,i) = (y,t)$ onde $i = 0,1$. Vê-se que o espaço de adjunção induzido por esta aplicação é homeomórfico ao T_1, já que lados opostos do retângulo X se identificam por meio de f, ao processar a adjunção a $S^1 \vee S^1$. Seja $U \subseteq X \subseteq X \cup_f (S^1 \vee S^1)$ (1.22) um quadrado $(c,d) \times (g,h)$ com $0 < c < d < 1$ e $0 < g < h < 1$, e seja $V = T_1 - \{p\}$ onde p corresponde ao ponto $(1/2, 1/2) \in X$, pela inclusão de X em $X \cup_f (S^1 \vee S^1)$. Então $\{U,V\}$ é um recobrimento de T_1, para o qual a seqüência de Mayer-Vietoris é:

$$\dots \to H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\beta} H_2(T_1) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\beta} H_1(T_1) \to \dots$$

Sabemos que $U \cup V = T_1$, $U \simeq pt$ (U é contrátil), $V \simeq S^1 \vee S^1$ e $U \cap V = U - \{p\} \simeq S^1$. $H_o(T_1) \approx \mathbb{Z}$, pois T_1 é conexo por caminhos. Sabemos ainda que

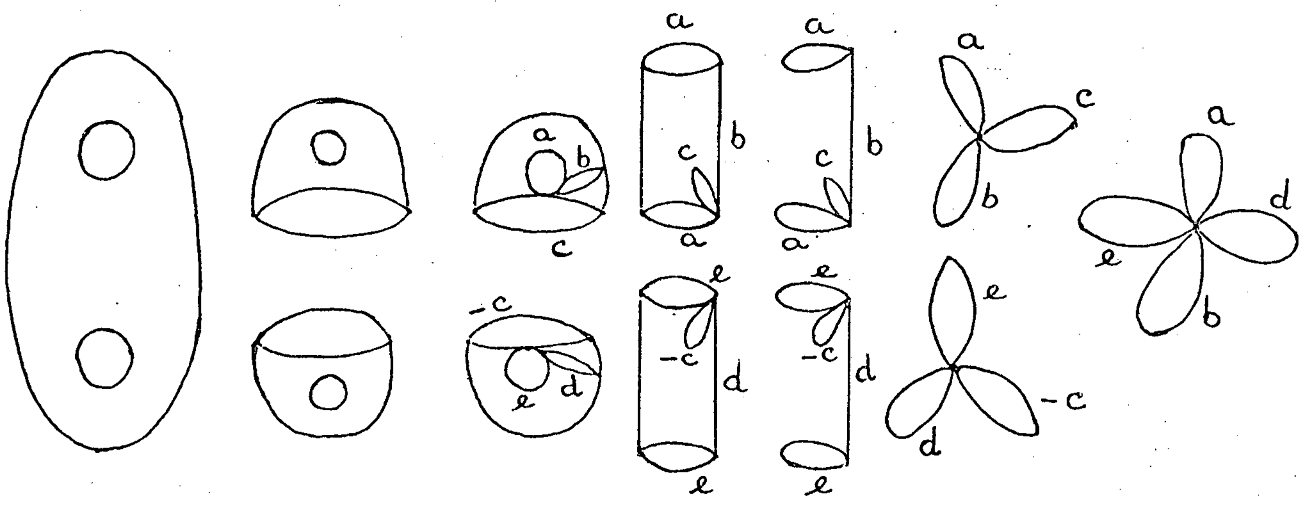
$$H_2(U) \oplus H_2(V) = 0, \; H_1(S^1) \approx \mathbb{Z} \text{ e que } H_1(S^1 \vee S^1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Como β é um epimorfismo, o Kernel de α é $\mathbb{Z}$, e a imagem de α é zero. O Kernel de β é igual a imagem de α que é igual a zero. Logo β é monomorfismo. Como β é epimorfismo e monomorfismo, β é isomorfismo e temos $H_1(T_1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por outro lado Δ é monomorfismo, pela exatidão, e Δ epimorfismo pois $\mathrm{im}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathbb{Z}$. Portanto Δ é um isomorfismo e concluímos que $H_2(T_1) \approx \mathbb{Z}$. Logo $H_o(T_1) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(T_1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_2(T_1) \approx \mathbb{Z}$

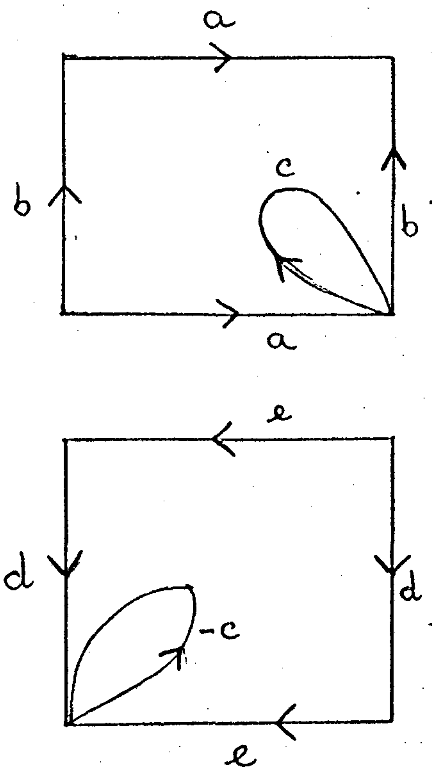
1.20.3. Cálculo da Homologia do Bi-Toro (T_2)

O processo de decomposição do Bi-Toro se ilustra nas figuras seguintes, o qual mostra que o Bi-Toro pode se obter de

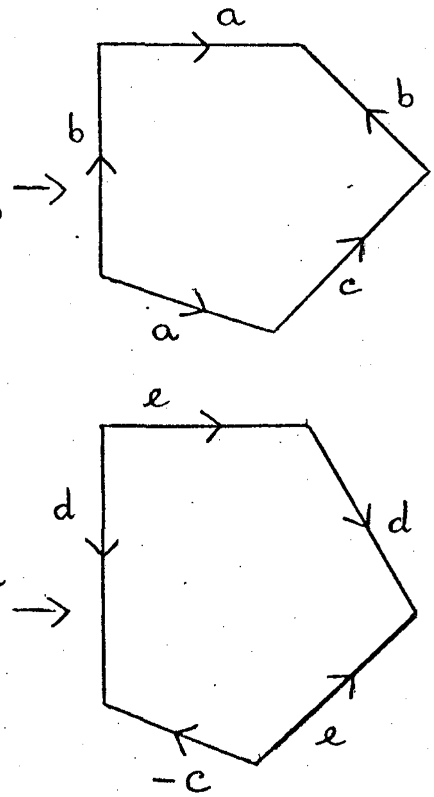
$\vee_{4} S^1$ por adjunção de uma 2-célula em uma forma conveniente.



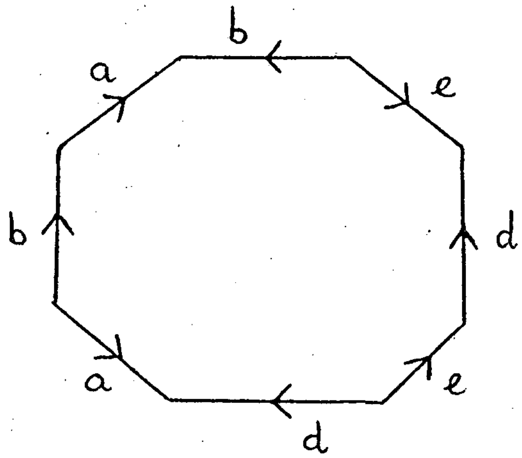
O processo de recomposição do Bi-Toro que permite o cálculo de sua homologia se ilustra nas seguintes figuras, cada uma das quais mostra uma forma diferente de tal composição, sendo a última delas mais explícita em função do cálculo da homologia, usando a seqüência de Mayer-Vietoris.



fig(V)



fig(VI)



fig(VII)

Seja X o espaço mostrado na figura (VII). Seja U um subespaço contido no interior de X, $V = T_2 - \{p\}$ onde $p \in U \subset X$. Então $\{ U,V \}$ é um recobrimento de T_2, para o qual a seqüência de Mayer-Vieroris é:

$$\ldots \xrightarrow{\alpha} H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\beta} H_2(T_2) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\beta} H_1(T_2) \rightarrow \ldots$$

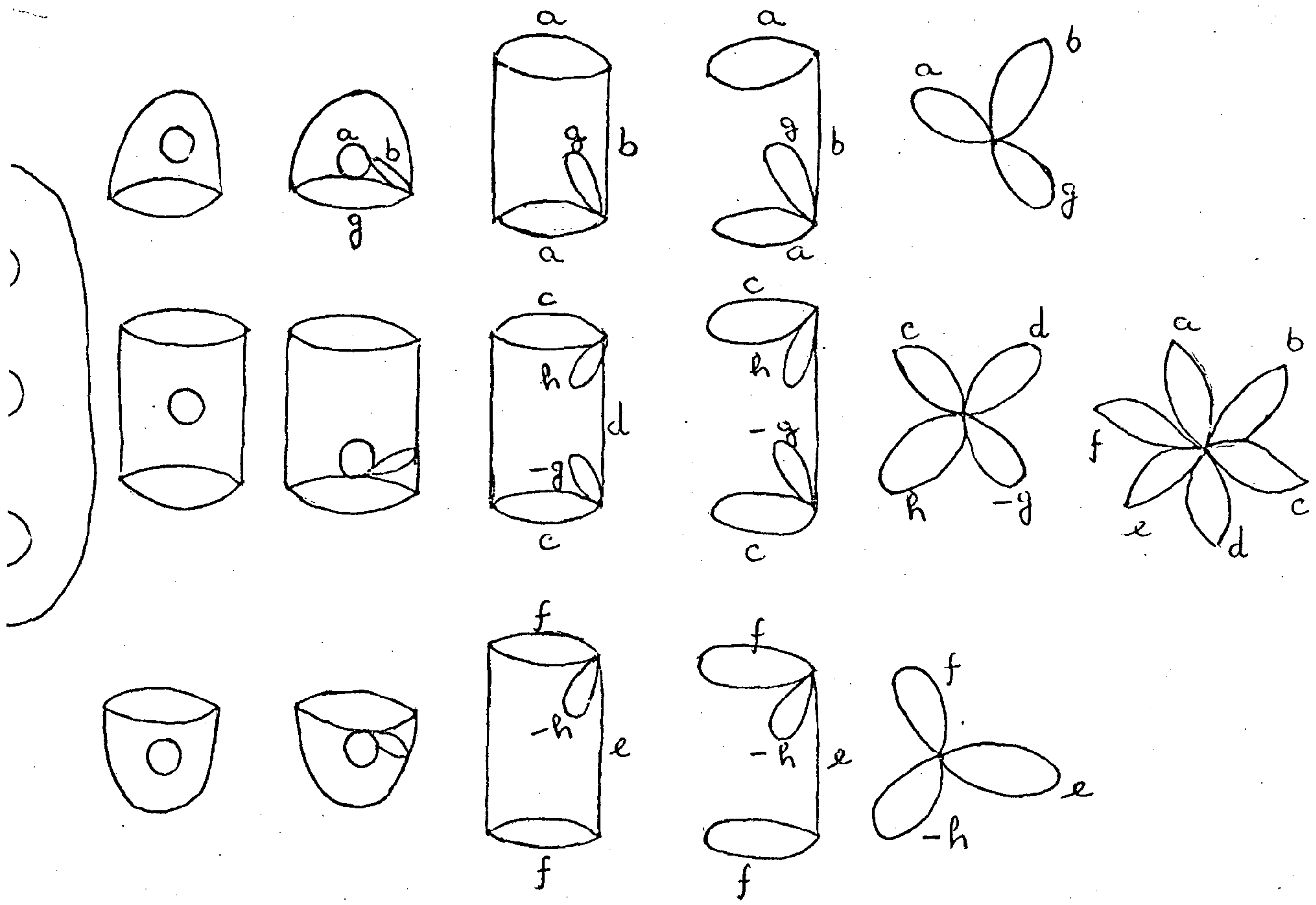
Sabemos que $U \cap V = U - \{p\} \simeq S^1$, $U \simeq pt$, $V \simeq \underset{4}{\vee} S^1$. Sabemos ainda que $H_2(U) \oplus H_2(V) = 0$, $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(U) = 0$ e $H_1(\underset{4}{\vee} S^1) \approx 4\mathbb{Z}$.

$H_o(T_2) \approx \mathbb{Z}$, pois T_2 é conexo por caminhos. Como β é epimorfismo, então $Ker(\alpha) = \mathbb{Z}$ e $im(\alpha) = 0$. O $Ker(\beta) = im(\alpha) = 0$, então β é monomorfismo. Como β é monomorfismo e epimorfismo, então β é isomorfismo e concluimos que $H_1(T_2) \approx 4\mathbb{Z}$. Δ é monomorfismo, pela exatidão e Δ é epimorfismo, pois $im(\Delta) = Ker(\alpha) = \mathbb{Z}$. Logo Δ é isomorfismo e temos $H_2(T_2) \approx \mathbb{Z}$.

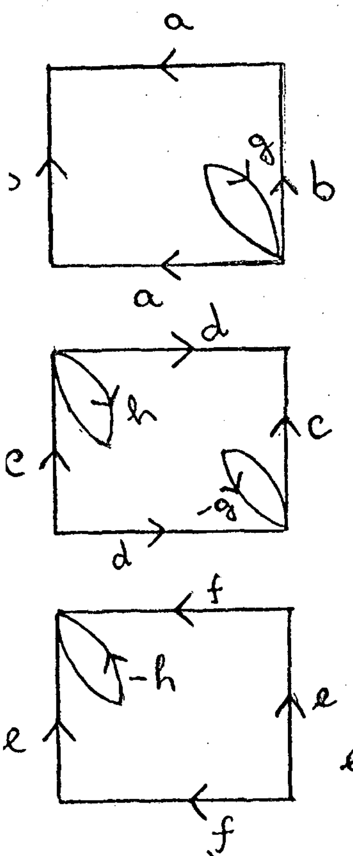
Portanto $H_o(T_2) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(T_2) \approx 4\mathbb{Z}$ e $H_2(T_2) \approx \mathbb{Z}$.

1.20.4. Cálculo da Homologia do Tri-Toro (T_3)

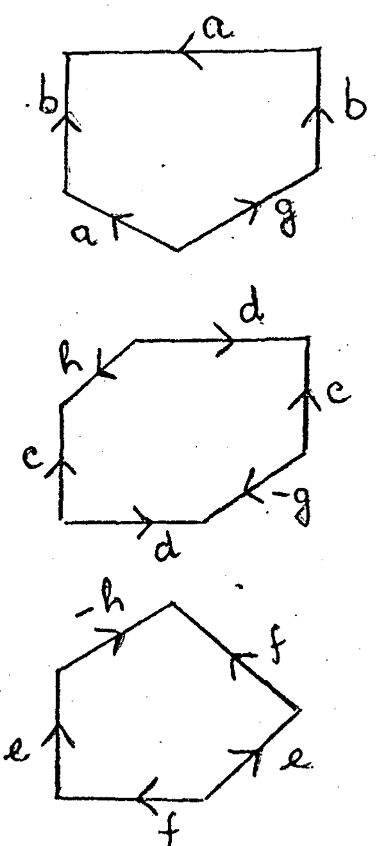
O processo de decomposição do Tri-Toro se ilustra nas figuras seguintes:



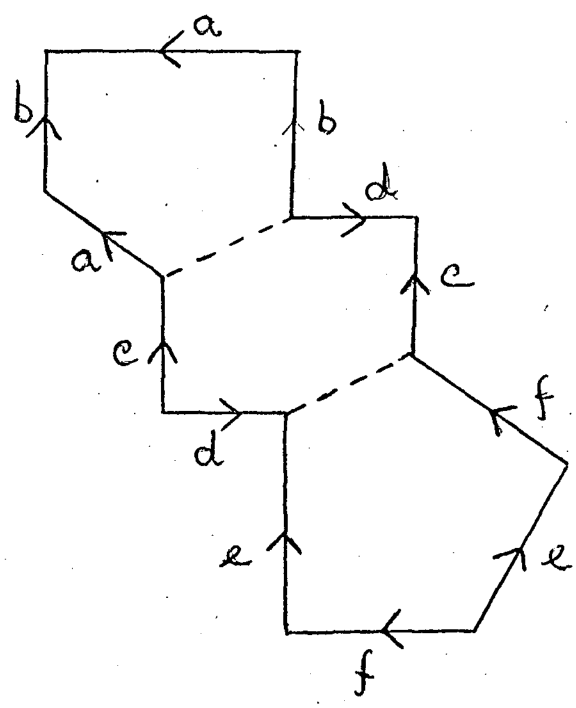
O processo de recomposição do tri-toro que permite o cálculo de sua homologia se ilustra nas seguintes figuras:



fig(VIII)



fig(IX)



fig(X)

Seja X o espaço mostrado na fig (X) que é homeomorfo a T_3. Seja U o subespaço contido no interior de X, $V = T_3 \setminus \{p\}$ onde $p \in U \subset X \simeq T_3$. Então $\{U,V\}$ é um recobrimento de T_3, para o qual a seqüência de Mayer-Vietoris é:

$$\cdots \to H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\beta} H_2(T_3) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\beta} H_1(T_3) \to \cdots$$

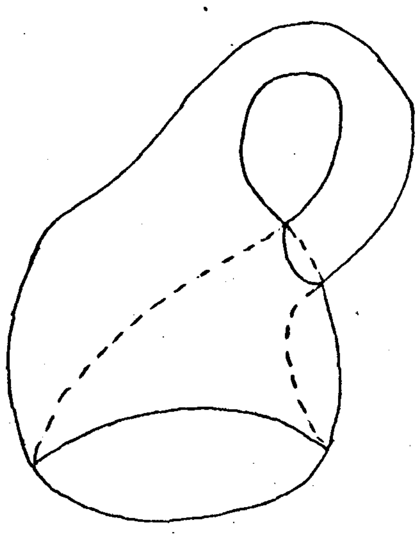
Sabemos que $U \simeq pt$, $V \simeq \underset{6}{\vee} S^1$ e $U \cap V = U - \{p\} \simeq S^1$. Sabemos ainda que $H_2(U) = 0$, $H_2(V) = 0$, $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(U) = 0$ e $H_1(V) \approx 6\,\mathbb{Z}$.

Sabemos ainda que T_3 é conexo por caminhos e concluindo de maneira análoga as anteriores (para o toro e o bi-toro) que β e Δ são isomorfismos, podemos afirmar que

$$H_0(T_3) \approx \mathbb{Z} \qquad H_1(T_3) \approx 6\,\mathbb{Z} \qquad H_2(T_3) \approx \mathbb{Z}$$

1.20.5. Cálculo da Homologia da Garrafa de Klein (K)

A garrafa de Klein K, que é uma superfície fechada em $\mathbb{R}^4$ [4], pode ser obtida por adjunção de uma 2-célula a $S^1 \vee S^1$. De fato, cortando convenientemente a garrafa de Klein K, se obtém a figura (XI),



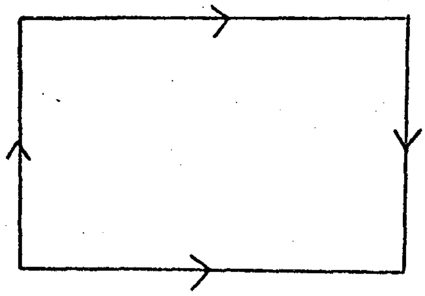


fig (XI)

onde os lados opostos se identificam com as direções indicadas. Este espaço obtido da garrafa de Klein por dessecação, representado pela fig (XI) seja denotado por X. Então K se obtém de $S^1 \vee S^1$ por adjunção conveniente da célula X.

Consideremos U como sendo um subespaço contido no interior de X, $V = K - \{p\}$ onde $p \in U \subseteq X$. Então $\{U,V\}$ é um recobrimento de K, para o qual a seqüência de Mayer-Vietoris é:

$$\cdots \to H_2(U) \oplus H_2(V) \to H_2(K) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\beta} H_1(K) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \to$$

$$\to H_0(U) \oplus H_0(V) \to \cdots$$

Sabemos que $U \cap V = U - \{p\} \simeq S^1$, $U \simeq pt$, $V \simeq S^1 \vee S^1$. Sabemos ainda que $H_2(U) \oplus H_2(V) = 0$, logo Δ é monomorfismo, ou seja, $H_2(K)$ é isomorfo à $Im(\Delta) = Ker(\alpha) = 0$. Temos $H_1(U \cap V) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(U) = 0$, $H_1(V) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_0(U \cap V) \approx \mathbb{Z}$, $H_0(U) \approx \mathbb{Z}$ e $H_0(V) \approx \mathbb{Z}$. Como $Ker(\alpha) = 0$ então $Im(\alpha) = Ker(\beta) = 0 \oplus 2\mathbb{Z}$ onde $2\mathbb{Z} = \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$. Por outra parte β é epimorfismo já que $Im(\Delta) = 0$. Então pelo teorema do isomorfismo,

$$H_1(K) \approx H_1(U) \oplus H_1(V)/Ker(\beta) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 0 \oplus 2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx$$

$$\approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Como a garrafa de Klein é conexa por caminhos $H_0(K) \approx \mathbb{Z}$. Logo

$$H_0(K) \approx \mathbb{Z} \qquad H_1(K) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad H_2(K) \approx 0$$

1.21. **Definições**

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que $f\colon S^n \to S^n$ é uma aplicação contínua. Escolhemos um gerador α de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ e notemos que o homomorfismo induzido pela f sobre $H_n(S^n)$ tem $f_*(\alpha) = m\alpha$ para algum inteiro m. Este inteiro é independente da escolha do gerador pois $f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m\alpha = m(-\alpha)$. O inteiro m é o grau da f, denotado por gr(f). O grau de uma aplicação é uma generalização direta do "número de voltas" associado com uma aplicação do círculo nos números complexos não nulos. As seguintes propriedades básicas do grau de uma aplicação são conseqüências imediatas de nossos resultados anteriores:

a) gr(id) = 1

b) se f e g: $S^n \to S^n$ são aplicações, gr(f o g) = = gr(f) . gr(g)

c) gr(aplicação constante)= 0

d) se f e g são homotópicas, então gr(f) = gr(g)

e) se f é uma equivalência homotópica então gr(f) = $\pm$ 1

1.22. <u>Definições</u>

Suponha A, X e Y espaços com $A \subseteq X$ e $X \cap Y = \emptyset$. Seja f: $A \to Y$ uma função contínua e $X \cup Y$ um espaço topológico no qual X e Y são ambos abertos e fechados, carregando suas topologias originais. Seja $\sim$ a menor relação de equivalência sobre $X \cup Y$ tal que $x \sim f(x)$ para todo $x \in A$. O espaço de identificação $X \cup Y/\sim$ é o espaço obtido por colagem de X em Y via f: $A \to Y$ e é costumeiramente denotado por $X \cup_f Y$. Um caso de importância é quando $X = D^n$ e $A = S^{n-1} = \partial D^n$. O espaço $D^n \cup_f Y$ é chamado o espaço obtido por colagem duma n-célula a Y via f.

1.22.1. <u>Exemplo</u>

Seja $X = D^2$, $A = S^1 = \partial D^2$ e Y uma cópia de S^1 disjunta de X. Seja $f: A \to Y$ a aplicação padrão de grau dois dada em coordenadas complexas por $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$. O espaço de identificação $X \cup_f Y$ é então o plano real projetivo $\mathbb{R}P(2)$.

1.22.2. Exemplo

Seja $f: S^{2n-1} \to S^{2n-1}/\sim\ = \mathbb{C}P(n-1)$ a aplicação identificação. Mostremos que o espaço formado pela colagem de uma 2n-célula a $\mathbb{C}P(n-1)$ via f é homeomorfo a $\mathbb{C}P(n)$. Seja o diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & D^{2n} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ \mathbb{C}P(n-1) \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}P(n) \end{tikzcd}$$

A aplicação inclusão i leva o elemento $[z_1,\ldots,z_n]$ em $[0,z_1,\ldots,z_n]$. Definimos $\bar{f}$ extendendo f por: $\bar{f}(z) = [\sqrt{1-|z|^2}, z_1,\ldots,z_n]$ onde $z = (z_1,\ldots,z_n) \in D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$, $|z| \leqslant 1$. Suponhamos que $|z| < 1$ e $|w| \leqslant 1$ para $w \in D^{2n}$. Se $\bar{f}(z) = \bar{f}(w)$ então $(\sqrt{1 - |z|^2}, z_1,\ldots,z_n)$ $= e^{i\theta}(\sqrt{1 - |w|^2}, w_1,\ldots,w_n)$. Como $\sqrt{1 - |z|^2}$ é real maior do que zero e $\sqrt{1 - |w|^2}$ é real maior ou igual a zero, devemos ter $e^{i\theta} = 1$, $z = w$. Assim $\bar{f}$ restrita a célula aberta $\overset{o}{D}{}^{2n}$, aplica injetivamente, e sua imagem é $\mathbb{C}P(n) - \mathbb{C}P(n-1)$. Por outro lado, $\bar{f}$ é uma aplicação fechada de D^{2n} em $\mathbb{C}P(n)$, de onde sua restrição a $\overset{o}{D}{}^{2n}$ é uma aplicação fechada em $\mathbb{C}P(n) - \mathbb{C}P(n-1)$, isto é, é um homeomorfismo. Aplicando a proposição 12 (ver apêndice) concluimos que $\mathbb{C}P(n)$ é obtido por colagem de uma 2n-célula a

$\mathbb{C}P(n-1)$ via a projeção $f\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}/\sim$. Para $n = 2$, $\mathbb{C}P(1) = S^3/\sim = S^2$.

1.23. Grupos de Homologia Relativa

Este conceito é análogo ao do quociente de um grupo por um subgrupo. Se A é um subespaço de X dizemos que duas cadeias de X são iguais módulo A, se sua diferença é uma cadeia em A. Em particular, uma cadeia em X é um ciclo módulo A se seu bordo está contido em A. Para introduzir a Álgebra Homológica necessária para este conceito, seja $C = \{C_n, \partial\}$ um complexo de cadeia. $D = \{D_n, \partial\}$ é um subcomplexo de C se $D_n \subsetneq C_n$ para cada n e o operador bordo para D é a restrição do operador bordo de C. Defina o complexo de cadeia quociente $C/D = \{C_n/D_n, \partial'\}$ onde $\partial'\{c\} = \{\partial c\}$ para $\{c\}$ a classe lateral contendo c. Em outra notação $\partial'(C + D_n) = \partial C + D_{n-1}$. Existe uma seqüência exata curta natural de complexos de cadeia e aplicações de cadeia

$$0 \to D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/D \to 0$$

onde i é a inclusão e π a projeção. Pelo Teorema 1.16, esta leva a uma seqüência exata longa de grupos de homologia

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(D) \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{\pi_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Para maior clareza denotemos por $\{\ \}$ a relação de equivalência em C/D e por $<>$ a relação de equivalência em homologia. Seja $\{c\}$ um ciclo em $Z_n(C/D)$. Para determinar $\Delta(<\{c\}>)$ representemos $\{c\}$ por um elemento $c \in C_n$ com $\partial c \in D_{n-1}$. Certamente $\partial c \in Z_{n-1}(D)$ e assim representa uma classe em $H_{n-1}(D)$.

$$\Delta(<\{c\}>) = <\partial c> \in H_{n-1}(D)$$

Mais geralmente, se $E \subseteq D \subseteq C$ são complexos de cadeia a subcomplexos de cadeia, existe uma seqüência exata curta de complexos de cadeia a aplicações de cadeia $0 \to D/E \to C/E \to C/D \to 0$. Em correspondência existe uma seqüência exata longa em homologia

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(D/E) \to H_n(C/E) \to H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D/E) \to \cdots$$

onde o homomorfismo de conexão é dado por $\Delta'(<\{c\}>) = <\{\dot{c}\}>$ onde $<\{c\}> = c + C_n$ e $<\{\partial c\}> = \partial c + E_{n-1}$. Por um par de espaços (X,A) entendemos um espaço X junto com um subespaço $A \subseteq X$. Se (X,A) é um par de espaços $S_*(A)$ pode ser visto como um subcomplexo de $S_*(X)$. O complexo de cadeia singular de X módulo A é definido por $S_*(X,A) = S_*(X)/S_*(A)$. A homologia deste complexo de cadeia, a homologia relativa singular de X módulo A, é dada por $H_n(X,A) = H_n(S_*(X)/S_*(A))$. Pelas observações anteriores qualquer par (X,A) tem uma seqüência exata de homologia

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

i_* é um isomorfismo de grupos graduados se e somente se $H_n(X,A) = 0$. Dados os pares (X,A) e (Y,B) uma aplicação de pares $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ é uma função contínua $f\colon X \to Y$ para a qual $f(A) \subseteq B$.

1.24. <u>Lema dos Cinco</u>

Se

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_4 & \longrightarrow & C_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & D_5
\end{array}$$

é um diagrama de grupos abelianos e homomorfismos no qual as linhas são exatas e cada quadrado é comutativo, e ainda:

i) Se f_2, f_4 são epimorfismos e f_5 é um monomorfismo, então f_3 é um epimorfismo.

ii) Se f_2, f_4 são monomorfismos e f_1 é um epimorfismo, então f_3 é um monomorfismo. [4]

Note que como um caso especial deste lema, se f_1, f_2, f_4 e f_5 são isomorfismos, então f_3 é um isomorfismo.

1.25. <u>Teorema da Excisão</u>

Se (X,A) é um par de espaços e U é um subconjunto de A com $\bar{U}$ contido no interior de A, então a aplicação inclusão

$$i: (X - U, A - U) \rightarrow (X,A)$$

induz um isomorfismo sobre grupos de homologia relativa

$$i_*: H_*(X - U, A - U) \rightarrow H_*(X,A)$$

Isto é, tal conjunto U pode ser excindido sem alterar o grupo de homologia relativa.

<u>Demonstração</u>:

Denotemos por $\mathcal{U}$ o recobrimento de X dado por dois conjuntos X-U e Int A. Por suposição, seus interiores cobrem X. Sendo assim, seus interiores também cobrem A. Chamemos este recobrimento de A, de $\mathcal{U}' = \{A-U, \text{Int } A\}$. Então pelo Teorema: "Se $\mathcal{U}$ é uma família de subconjuntos de X tal que Int $\mathcal{U}$ é um recobrimento de X, então $i_*: H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ é um isomorfismo para cada n" [1].

O homomorfismo inclusão de cadeias $i: S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*(X)$ e $i': S_*^{\mathcal{U}'}(A) \to$ $\to S_*(A)$ ambos induzem um isomorfismo sobre homologia. Considerando $S_*^{\mathcal{U}'}(A)$ como um subcomplexo de $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ existe uma aplicação de cadeia e complexos de cadeia $j: S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A) \to S_*(X)/S_*(A) =$ $= S_*(X,A)$. As aplicações de cadeia i, i' e j dão lugar ao seguinte diagrama de grupos de homologia

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "i'_*"] & H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"] & H_{n-1}(S_*^{\mathcal{U}'}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "i'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como i'_* e i_* são isomorfismos, segue pelo lema dos cinco (1.24) que j_* é um isomorfismo. Podemos escrever $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ como a soma de dois subgrupos $S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X-U) + S_*(\text{Int } A)$, mas não necessariamente como uma soma direta. Similarmente $S_*^{\mathcal{U}'}(A) = S_*(A-U) +$ $+ S_*(\text{Int } A)$. Então pela teoria elementar de grupos, $S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A) \approx$ $S_*(X-U)/S_*(A-U) = S_*(X-U,\ A-U)$. Compondo este isomorfismo com a aplicação de cadeia j existe induzido em homologia o isomorfismo desejado $H_*(X-U,\ A-U) \to H_*(X,A)$.

1.26. Definição

Uma seqüência exata curta de grupos abelianos e homomorfismos

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é exata decomponível se $f(A)$ é um somando direto de B.

CAPÍTULO II

TEORIA DA COHOMOLOGIA SINGULAR

2.1. Definição

Se A, B e C são grupos abelianos, uma aplicação ϕ: AxB $\rightarrow$ C é bilinear se: $\phi(a_1 + a_2,b) = \phi(a_1,b) + \phi(a_2,b)$

e $\phi(a,b_1 + b_2) = \phi(a,b_1) + \phi(a,b_2)$

Se AxB é a usual estrutura de grupo produto ϕ não será homomorfismo, exceto em casos especiais.

2.2. Definição

Seja F(AxB) o grupo abeliano livre gerado por AxB. Um elemento de F(AxB) tem a forma $\Sigma n_i(a_i,b_i)$ onde a soma é finita, $a_i \in A, b_i \in B$ e n_i é um inteiro. Seja R(AxB) o subgrupo de F(AxB) gerado por elementos da forma $(a_1+a_2,b) - (a_1,b) - (a_2,b)$ ou $(a,b_1 + b_2) - (a,b_1) - (a,b_2)$ onde $a,a_1,a_2 \in A$ e $b,b_1,b_2 \in B$. O Produto Tensorial de A e B é definido por

$$A \otimes B = F(AxB)/R(AxB)$$

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$$

$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

Se ϕ: AxB $\rightarrow$ C é uma função então existe uma única extensão de ϕ para um homomorfismo ϕ': F(AxB) $\rightarrow$ C. $\phi'(\Sigma\, n_i(a_i,b_i)) = \Sigma\, n_i\phi(a_i,b_i)$. Além disso, se ϕ é uma aplicação bilinear, então $\phi'(R(AxB)) = 0$ já que $\phi'((a_1 + a_2,b) - (a_1,b) - (a_2,b) = 0$ e então existe induzi do um homomorfismo ϕ'': $A \otimes B \to C$ que é univocamente determinado por ϕ. Isto fornece a seguinte propriedade universal com respeito a aplicações bilineares, que pode ser usada para caracterizar o produto tensorial. Existe uma aplicação bilinear τ: $AxB \to A \otimes B$ dada por $(a,b) \mapsto a \otimes b$ onde $a \otimes b$ é a classe lateral contendo (a,b). Dada uma aplicação bilinear ϕ: $AxB \to C$ existe um único homomorfismo ϕ'': $A \otimes B \to C$ tal que a comutatividade vale no diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & C \\ & A \otimes B \arrow[ur, "\phi''"'] & \end{tikzcd}$$

Como os elementos (a,b) geram $F(AxB)$, segue que os elementos $a \otimes b$ geram $A \otimes B$. Em $A \otimes B$ temos $n(a \otimes b) = na \otimes b = a \otimes nb$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ $0 \otimes b = 0 = a \otimes 0$ para qualquer a,b e $(a_1 + a_2) \otimes (b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) \otimes b + (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_1 + a_1 \otimes b_2 + a_2 \otimes b_2$.

2.3. <u>Proposição</u>

Existe um único isomorfismo Θ: $A \otimes B \approx B \otimes A$ tal que $\Theta\,(a \otimes b) = (b \otimes a)$

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\tau"'] & & B \otimes A \arrow[dl, dashed, bend right, "\phi'"'] \\ & A \otimes B \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

[1]

2.4. <u>Proposição</u>

Dados homomorfismos $f: A \to A'$, $g: B \to B'$ existe um único homomorfismo $f \otimes g: A \otimes B \to A' \otimes B'$ com $f \otimes g\,(a \otimes b) =$
$= f(a) \otimes g(b)$

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\tau"'] & & A' \otimes B' \\ & A \otimes B \arrow[ur, "\phi = f \otimes g"'] & \end{tikzcd}$$ [1]

2.5. <u>Proposições</u>

(a) Se $f: A \to A'$, $f': A' \to A''$ e $g: B \to B'$, $g': B' \to B''$ então

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) \; ;$$

(b) Se $A \approx \oplus A_j$ então $A \otimes B \approx \oplus (A_j \otimes B)$

(c) Se existe homomorfismo $f_j: A \to A'$, para cada $j \in J$ tal que para qualquer $a \in A$, $f_j(a)$ é não nulo para um número finito de valores de j, então podemos definir $\Sigma f_j: A \to A'$. Para qualquer homomorfismo $g: B \to B'$ segue que

$$(\Sigma f_j) \otimes g = \Sigma (f_j \otimes g)$$

(d) Para qualquer grupo abeliano A, $\mathbb{Z} \otimes A \approx A$.

(e) Se A é um grupo abeliano livre com base $\{a_i\}$ e B é um grupo abeliano livre com base $\{b_j\}$, então $A \otimes B$ é um grupo abeliano livre com base $\{a_i \otimes b_j\}$. [1]

Exemplo:

Veremos que $\mathbb{Z}p \otimes \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}(p,q)$, onde $(p,q) = \text{m.d.c.}\{p,q\}$
Seja $r = (p,q)$ tal que $p = rs$, $q = rt$, $(s,t) = 1$

$\mathbb{Z}p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ onde $p\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ é o subgrupo divisível por p.

$$\mathbb{Z}p \otimes \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \, 0 \, \mathbb{Z}/\operatorname{im}(i_1 \otimes id) + \operatorname{im}(id \otimes i_2)$$
$$\approx \mathbb{Z}/\operatorname{im}(i_1) + \operatorname{im}(i_2) \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$$
$$\approx \mathbb{Z}/rs\mathbb{Z} + rt\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}r = \mathbb{Z}(p,q)$$

Por exemplo:

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{Z}_2 \; ; \; \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = 0 \; ; \; \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15} \approx \mathbb{Z}_3 .$$

2.7. Proposição

Se $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ é uma seqüência exata, então para qualquer grupo abeliano D, a seqüência $A \otimes D \xrightarrow{\alpha \otimes id} B \otimes D \xrightarrow{\beta \otimes id} C \otimes D \to 0$ é exata. [1]

2.8. Definição

Relembremos que todo grupo abeliano A é a imagem homeomórfica de um grupo abeliano livre. Seja F um grupo abeliano livre gerado por elementos de A e seja $\pi: F \to A$ um epimorfismo natural. Se $R \subseteq F$, $R = \operatorname{Ker}(\pi)$ então R é grupo abeliano livre pois R é subgrupo de F [3]. Então existe uma seqüência exata curta $0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} A \to 0$ que é denominada Resolução Livre do grupo A. Generalizando, a seqüência exata curta $0 \to G_1 \xrightarrow{j} G_0 \xrightarrow{\tau} A \to 0$ é uma resolução livre do grupo abeliano A, se G_1 e G_0 são ambos grupos abelianos livres. Dada uma resolução livre de A e um grup liano D, sabemos pela proposição 2.7 que vale a exatidão qüência

$$G_1 \otimes D \xrightarrow{j \otimes id} G_o \otimes D \xrightarrow{\tau \otimes id} A \otimes D \longrightarrow 0$$

2.9. <u>Definição</u>

Definimos Tor (A,D) = Ker (j ⊗ id). Isto mede a são na qual j ⊗ id falha em ser um monomorfismo.

2.9.1. <u>Exemplo</u>

Calculemos Tor ($\mathbb{Z}$p, $\mathbb{Z}$q) para qualquer par d ros p e q.

Seja a seqüência exata $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}p \longrightarrow 0$ onde γ(para qualquer inteiro n. Obtemos uma seqüência exata

$0 \rightarrow Tor(\mathbb{Z}p, \mathbb{Z}q) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}q \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}q \rightarrow \mathbb{Z}p \otimes$

que toma a forma $0 \rightarrow Tor(\mathbb{Z}p, \mathbb{Z}q) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}q \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}q \longrightarrow \mathbb{Z}$

onde r = mdc(p,q), p = rs, q = rt e (s,t) = 1. Então

Tor ($\mathbb{Z}$p, $\mathbb{Z}$q) = Im(β) = Ker(α) = $\{\overline{x}$ t.q.$\alpha(\overline{x}) = \overline{0}\}$. Se ⅰ = $p\overline{x} = \overline{0}$, então p(x) = nq de onde x = mt. Por outro lado, que α = j O id. Então temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
t\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\pi"] \\
t\mathbb{Z}_{rt} \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}_{rt}
\end{tikzcd}$$

onde π = projeção canônica, $t\,\mathbb{Z}_{rt} = t\,\mathbb{Z}/rt\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_r$ e $\mathbb{Z}_{rt} = \mathbb{Z}/rt\mathbb{Z} = \mathbb{Z}q$ o $\mathrm{Ker}(d) = \mathbb{Z}_r$. Logo $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}q) = \mathbb{Z}_r$.

2.10. **Definição**

Suponha que $C = \{C_n, \partial\}$ é um complexo de cadeia livre, isto é, cada C_n é um grupo abeliano livre. Para qualquer grupo abeliano livre G, definamos um novo complexo de cadeia $C \otimes G$, por $C \otimes G = \{C_n \otimes G, \partial \otimes \mathrm{id}\}$. É evidente que $(\partial \otimes \mathrm{id}) \circ (\partial \otimes \mathrm{id}) = 0$. Se $f: C \to C'$ é um complexo de cadeia, o homomorfismo associado $f \otimes \mathrm{id}_G : C \otimes G \to C' \otimes G$ tem

$$(f \otimes \mathrm{id}) \circ (\partial \otimes \mathrm{id}) = f \circ \partial \otimes \mathrm{id} = \partial' \circ f \otimes \mathrm{id} = (\partial' \otimes \mathrm{id}) \circ (f \otimes \mathrm{id})$$

de modo que $f \otimes \mathrm{id}$ é também uma aplicação de cadeia. Fixemos um grupo abeliano G. Para cada par de espaços (X,A) podemos usar o complexo de cadeia livre $S_*(X,A)$ para construir um novo complexo de cadeia $S_*(X,A) \otimes G$. Este complexo de cadeia, denotado por $S_*(X,A;G)$ é o <u>complexo de cadeia singular de (X,A) com coeficientes em G</u>. Como existe um isomorfismo natural $S_*(X,A) \otimes \mathbb{Z} \approx S_*(X,A)$, referimo-nos a $S_*(X,A)$ como um complexo de cadeia singular com coeficientes inteiros. A homologia de $S_*(X,A;G)$ é denotada por $H_*(X,A;G)$. Notemos que se $f:(X,A) \to (X',A')$ é uma aplicação de pares, existe um homomorfismo induzido $f_\#: S_*(X,A) \to S_*(X',A')$ e um homomorfismo induzido $f_\# \otimes \mathrm{id}_G : S_*(X,A;G) \to S_*(X',A';G)$ que induz o homomorfismo $f_*: H_*(X,A;G) \to H_*(X',A';G)$.

2.11. Teorema do Coeficiente Universal

Se C é um complexo de cadeia livre e G é um grupc liano então $H_n(C \otimes G) \approx H_n(C) \otimes G \oplus Tor(H_{n-1}(C),G)$

Demonstração

2.11.1: é facilmente provado o fato algébrico quε $f: G \to G'$ e $g: G' \to G$ são homomorfismos de grupos abelianos $g \circ f = id$ então $G' = Im(f) \oplus Ker(g)$. 2.11.2: Denotemos con pre por $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$ os subgrupos dos bordos e ciclos, resp mente. Se C é um complexo de cadeia livre, então cada B_n e rá um grupo abeliano livre. Fixemos um grupo abeliano G e c remos a seqüência exata curta $0 \to Z_n \xrightarrow{i} C_n \underset{\gamma}{\leftrightarrows} B_{n-1} \to 0$. Notemos que, como B_{n-1} é livre, a seqüência é decomponível. sim, se $\{x_i\}$ é uma base para B_{n-1}, para cada i existe um el $c_i \in C_n$ com $\partial c_i = x_i$. Definimos $\gamma(x_i) = c_i$ e notemos que se extende univocamente como um homomorfismo na seqüência d nível. Por outro lado, como B_{n-1} é livre, $Tor(B_{n-1},G) = 0$ seqüência exata curta é preservada quando tensoriamos com G

$$0 \to Z_n \otimes G \to C_n \otimes G \underset{\gamma \otimes id}{\overset{\partial \otimes id}{\leftrightarrows}} B_{n-1} \otimes G \to 0.$$ Esta seqüência é ponível também pelo homomorfismo $\gamma \otimes id$. 2.11.3: Por outro a seqüência exata curta $0 \to B_n \xrightarrow{j} Z_n \to H_n(C) \to 0$ é uma res livre de $H_n(C)$, portanto, torna-se uma seqüência exata a

$$0 \to Tor(H_n(C);G) \xrightarrow{g} B_n \otimes G \xrightarrow{j \otimes id} Z_n \otimes G \to H_n(C) \otimes G \to 0$$

2.11.4: Calculamos a homologia de $C \otimes G$, dando para $Ker\, \partial \otimes id / im(\partial_1) \otimes id$ no seguinte diagrama .

$$
\begin{tikzcd}
B_n \otimes G \arrow[r, "j \otimes id"] & Z_n \otimes G \arrow[d, "k \otimes id"] & \\
C_{n+1} \otimes G \arrow[u, "\partial_3 \otimes id"] \arrow[r, "\partial_1 \otimes id"'] & C_n \otimes G \arrow[r, "\partial \otimes id"] \arrow[dr, "\partial_2 \otimes id"'] & C_{n-1} \otimes G \\
 & & Z_{n-1} \otimes G \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$(i \otimes id)$ e $(k \otimes id)$ são monomorfismos e $(\partial_3 \otimes id)$ epimorfi

Assim Ker$(\partial \otimes id)$ = Ker$(\partial_2 \otimes id)$ e im$(\partial_1 \otimes id)$ pode ser id

ficada como im$(j \otimes id)$. 2.11.5: Consideremos os grupos e homo

fismos

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Tor(H_{n-1}(C);G) \arrow[r, "g"] & B_{n-1} \otimes G \arrow[r, "j \otimes id"] \arrow[d, dashed, shift left, "\gamma \otimes id"] & Z_{n-1} \otimes G \arrow[r] & H_{n-1}(C) \otimes G \\
 & & C_n \otimes G \arrow[u, shift left, "\partial_3 \otimes id"] & &
\end{tikzcd}
$$

onde a linha horizontal é exata. Como temos observado, o grup

ciclos em $C_n \otimes G$ é o Kernel de $(j \otimes id) \circ (\partial_3 \otimes id)$. Port

$\partial_3 \otimes id$ é um epimorfismo e Kernel de $j \otimes id$ é igual a imagem

g, e temos:

$$\text{Ker}(j \otimes id) \circ (\partial_3 \otimes id) = (\partial_3 \otimes id)^{-1} \, (g(tor(H_{n-1}(C);G))).$$

Assim existe um homomorfismo

$$(\partial_3 \otimes id)^{-1} \, g(Tor(H_{n-1}(C);G)) \underset{\gamma \otimes id}{\overset{\partial_3 \otimes id}{\rightleftarrows}} g(Tor(H_{n-1}(C);G))$$

para o qual a composição $(\partial_3 \otimes id) \circ (\gamma \otimes id)$ é a identidade

Combinando essas afirmações, temos o grupo de ciclos expresso mo soma direta $\operatorname{Ker}(j \otimes id) \circ (\partial_3 \otimes id) =$

$= \operatorname{Ker}(\partial_3 \otimes id) \oplus (\gamma \otimes id)\, g\, (\operatorname{Tor}(H_{n-1}(C);G))$ onde

$\operatorname{Ker}(\partial_3 \otimes id) \approx Z_n \otimes G$ e $(\gamma \otimes id) g(\operatorname{Tor}(H_{n-1}(C)) \approx \operatorname{Tor}(H_{n-1}(C);G)$.

Assim podemos identificar o grupo de ciclos em $C_n \otimes G$ com a soma direta $Z_n \otimes G \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-1}(C);G)$, e o grupo de bordos com a imagem de $B_n \otimes G \to Z_n \otimes G$ que está inteiramente contida no primeiro somando direto. Finalmente, tendo em mente a exatidão de

$B_n \otimes G \to Z_n \otimes G \to H_n(C) \otimes G \to 0$ concluímos que a homologia do complexo de cadeia $C \otimes G$ é dada por

$$H_n(C \otimes G) \approx H_n(C) \otimes G \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-1}(C);G).$$

2.12. <u>Lema</u>

O Tor (A,B) independe da resolução escolhida para A.

<u>Demonstração</u>

Consideremos o seguinte diagrama onde as seqüências horizontais são duas resoluções de A e as aplicações Ψ_i, Ψ_i' são aplicações de cadeia convenientemente escolhidas, e τ_i e τ_i' são homotopias de cadeia que se definem na continuação

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi_1"] \arrow[ddl, "\tau_3"'] & C_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi_0"] \arrow[ddl, "\tau_2"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[ddl, "\tau_1"'] & 0 \arrow[ddl, "\tau_0"'] \\
0 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi'_1"] \arrow[ddl, "\tau'_3"'] & C'_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi'_0"] \arrow[ddl, "\tau'_2"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[ddl, "\tau'_1"'] & 0 \arrow[ddl, "\tau'_0"'] \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi_1"] & C_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Psi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "\partial"] & C'_0 \arrow[r, "\partial"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $\partial\tau + \tau\partial = \psi - \psi'$ onde $\psi = \Psi' \circ \Psi$ e $\psi' = id_C$, isto é, ψ e ψ' são homotópicas por cadeia.

Definimos τ_1 tal que $\partial\tau_1 + \tau_0\partial = 0$. Teria que ser $\partial\tau_1 = -\tau_0\partial$ Basta observar que $-\tau_0\partial$ é bordo. Isto define τ_1. Definamos τ_2 tal que $\partial\tau_2 + \tau_1\partial = \psi - \psi'$. Então $\tau_2 = \psi - \psi' - \tau_1\partial$.

$$\begin{aligned}
\partial(\psi - \psi' - \tau_1\partial) &= \partial\psi - \partial\psi' - (\partial\tau_1\partial) = \\
&= \psi\partial - \psi'\partial - (-\tau_0\partial\partial) \\
&= (\psi - \psi')\partial + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Então $\psi - \psi' - \tau_1\partial$ é ciclo (é ciclo em C_0; por exatidão ao redor de C_0 na terceira linha é imagem de elemento de C_1. Portanto é bordo) e é bordo, o que define τ_2.

Definamos τ_3: $\partial\tau_3 + \tau_2\partial = \psi - \psi'$

$$\begin{aligned}
\partial(\psi - \psi' - \tau_2\partial) &= \partial\psi - \partial\psi' - \partial\tau_2\partial = \\
&= \psi\partial - \psi'\partial - (-\tau_1\partial\partial + \psi\partial - \psi'\partial) \\
&= \psi\partial - \psi'\partial + \tau_1\partial\partial - \psi\partial + \psi'\partial \\
&= 0
\end{aligned}$$

Isto define τ_3. Portanto ψ e ψ' são homotópicas por cadeia

(1) $\partial\tau + \tau\partial = \Psi' \circ \Psi - id_C$

Analogamente mostra-se que

(2) $\partial\tau' + \tau'\partial = \Psi \circ \Psi' - id_{C'}$

(1) e (2) implica em $\Psi' \circ \Psi \simeq id_C$ e $\Psi \circ \Psi' \simeq id_{C'}$

Ψ e Ψ' são homotopias inversas uma da outra.

Logo $(\Psi_* \circ \Psi'_*) = (\Psi \circ \Psi')_* = id_{H_*}$ onde Ψ_* é epimorfismo, e $(\Psi'_* \circ \Psi_*) = (\Psi' \circ \Psi)_* = id_{H_*}$ onde Ψ_* é monomorfismo, de onde se conclui que Ψ é isomorfismo e $\Psi_*: H_1(C_1) \approx H_1(C'_1)$.

Tensoriando com B cada elemento das duas resoluções de A, usadas anteriormente temos:

$$\begin{tikzcd}
0 \otimes B \arrow[r, "\alpha"] & C_1 \otimes B \arrow[r, "\partial\otimes id"] \arrow[d, "\Psi \otimes id_B"] & C_o \otimes B \arrow[r] & A \otimes B \arrow[r] & 0 \\
0 \otimes B \arrow[r] & C'_1 \otimes B \arrow[r] & C'_o \otimes B \arrow[r] & A \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Psi \otimes id_B: C_1 \otimes B \to C'_1 \otimes B$

Analogamente ao que foi concluído para Ψ(isomorfismo) podemos mostrar que $(\Psi \otimes id)$ é isomorfismo e portanto

$(\Psi \otimes id_B)_*: H_1(C_1 \otimes B) \overset{\approx}{\to} H_1(C'_1 \otimes B)$. Mas $H_1(C \otimes B) =$

$= (H_1(C) \otimes B) \oplus Tor(H_o(C),B) = Tor(A,B)$ pois $H_1(C) = 0$ e $H_o(C) = A$. Portanto $Tor(A,B) \approx Tor'(A,B)$.

2.13. Corolário

Para qualquer par de espaços (X,A) ,

$$H_n(X,A;G) \approx H_n(X,A) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X,A;G)$$

2.14. <u>Lema</u>

Para qualquer grupo abeliano A e B, $\mathrm{Tor}(A,B) \approx \mathrm{Tor}(B,A)$ [3].

2.15. <u>Teoria da Cohomologia Singular</u>

Se A e G são grupos abelianos, chamamos de Hom (A,G) o grupo abeliano de homorfismos de A em G, onde $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ para cada $a \in A$. Se $\phi: A \to B$ é um homomorfismo, existe um homomorfismo contravariante induzido

$$\phi^{\#}: \mathrm{Hom}\ (B,G) \to \mathrm{Hom}\ (A,G)$$

definido por $\phi^{\#}(f) = f \circ \phi$. Notemos que se $\psi: B \to C$ é um homomorfismo, então $(\psi \circ \phi)^{\#} = \phi^{\#} \circ \psi^{\#}$.

Para um complexo de cadeia $\{C_n, \partial\}$ e um grupo abeliano G, definimos grupos abelianos $C^n = \mathrm{Hom}(C_n,G)$. Então o operador bordo $\partial: C_{n+1} \to C_n$ induz $\partial^{\#}: C^n \to C^{n+1}$ com $\partial^{\#} \circ \partial^{\#} = (\partial \circ \partial)^{\#} = 0$.

Um <u>complexo de cocadeia</u> é uma coleção de grupos abelianos e homomorfismos $\{C^n, \delta\}$ onde $\delta: C^n \to C^{n+1}$ e $\delta \circ \delta = 0$. O homomorfismo δ é o <u>operador cobordo</u>. Observemos que, se $\{C^n, \delta\}$ é um complexo de cocadeia e definimos $D_n = C^{-n}$, $\partial = \delta: D_n \to D_{n-1}$, então $\{D_n, \partial\}$ é um complexo de cadeia. As duas noções são duais uma da outra e as definições básicas para complexos de cadeia podem ser duplicadas para complexos de cocadeia.

Se $\{C^n, \delta\}$ e $\{D^n, \delta'\}$ são complexos de cocadeia, a aplicação de cocadeia f de grau k é uma coleção de homomorfismo $f: C^n \to D^{n+k}$

tal que $f \circ \delta = \delta' \circ f$. Seja $C = \{C^n, \delta\}$ um complexo de cocadeia e definamos $Z^n(C) = \text{Ker } \delta: C^n \to C^{n+1}$, o grupo dos n-cociclos e $B^n(C) = \text{Imagem } \delta: C^{n-1} \to C^n$, o grupo dos n-cobordos. O <u>n-ésimo grupo de cohomologia de G</u> é então o grupo quociente

$$H^n(C) = Z^n(C) / B^n(C)$$

Se $A = \{A^n\}$, $B = \{B^n\}$ e $C = \{C^n\}$ são complexos de cocadeia e $0 \to A \to B \to C \to 0$ é uma seqüência exata curta de aplicações de cocadeia de grau zero, então existe uma seqüência exata longa de grupos de cohomologia

$\ldots \to H^n(A) \to H^n(B) \to H^n(C) \xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(A) \to \ldots$, onde o <u>homomorfismo de conexão Δ</u> é definido de modo análogo ao homomorfismo de conexão para homologia (1.15.4). Sejam (X,A) um par de espaços, G um grupo abeliano. Definimos $S^n(X,A;G) = \text{Hom } (S_n(X,A);G)$ como o grupo de cocadeia n-dimensional de (X,A) com coeficientes em G. Seja $\delta: S^n(X,A;G) \to S^{n+1}(X,A;G)$ dado por $\delta = \partial^{\#}$. Isto define um complexo de cocadeia singular de (X,A) cuja homologia é o grupo graduado $H^*(X,A;G)$ como o <u>grupo de cohomologia singular de (X,A) com coeficientes em G</u>.

Se $f: (X,A) \to (Y,B)$ é uma aplicação de pares, então existe um homomorfismo induzido $f^*: H^*(Y,B;G) \to H^*(X,A;G)$. Se $g:(Y,B) \to (W,C)$ é outra aplicação de pares, então $(gf)^* = f^* \circ g^*$. Cada uma das propriedades covariantes de homologia singular torna-se propriedade contravariante de cohomologia singular (Apêndice).

2.16. **<u>Proposição</u>**

Se $0 \to F \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} k \to 0$ é uma seqüência exata decomponível

(1.26) e G é um grupo abeliano, então

$0 \to Hom(K,G) \xrightarrow{\pi^{\#}} Hom(H,G) \xrightarrow{i^{\#}} Hom(F,G) \to 0$ é exata. [1]

2.17. Definições

Seja E um grupo abeliano e $0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} E \to 0$ uma resolução livre de E. Então para qualquer grupo abeliano G, a seqüência

$0 \to Hom(E,G) \xrightarrow{\pi^{\#}} Hom(F,G) \xrightarrow{i^{\#}} Hom(R,G)$ é exata. Definimos $Ext(E,G) = coker(i^{\#}) = Hom(R,G)/im(i^{\#})$. As propriedades básicas de Ext são duais àquelas de Tor:

(a) Se E é abeliano livre, Ext (E,G) = 0.

(b) Ext (E,G) é independente da escolha da resolução para E.

(c) Ext (E,G) é contravariante em E e covariante em G; isto é, dados homomorfismos $f: E \to E'$ e $h: G \to G'$ existem induzidos homomorfismos $f^*: Ext(E',G) \to Ext(E,G)$ e $h_*: Ext(E,G) \to Ext(E,G')$.

(d) Se $0 \to A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \to 0$ é uma seqüência exata curta, então a exatidão vale em $0 \to Hom(C,G) \xrightarrow{k^{\#}} Hom(B,G) \xrightarrow{j^{\#}} Hom(A,G) \to$
$\to Ext(E,G) \xrightarrow{h^*} Ext(B,G) \xrightarrow{j^*} Ext(A,G) \to 0$.

Definimos $S^n(X,A;G) = Hom(S_n(X,A);G)$ o que nos leva a adotar a seguinte notação: Se $\phi \in S^n(X,A;G)$ e $c \in S_n(X,A)$, então o valor de ϕ sobre c é o elemento de G denotado por $< \phi, c >$. $\phi(c) = < \phi, c > \in G$. Observemos que esta "forma" é bilinear no sentido de que

$$< \phi_1 + \phi_2 , c > = < \phi_1, c > + < \phi_2, c >$$

$$< \phi, c_1 + c_2 > = < \phi, c_1 > + < \phi, c_2 >$$

Em particular, para qualquer inteiro n, $< \phi, nc> = < n\phi, c >$. Portanto a "forma" produz um homomorfismo $S^n(X,A;G) \otimes S_n(X,A) \to G$ para cada n. Nesta notação, os operadores bordo e cobordo são adjuntos, isto é,

$$< \phi, \partial c > = < \delta\phi, c >; \quad \delta\phi = \partial^{\#}; \quad \partial^{\#}\phi(c) = \phi \circ \partial(c).$$

Além disso, se $f: (X,A) \to (Y,B)$ é uma aplicação de pares, $\phi \in S^n(Y,B;G)$ e $c \in S_n(X;A)$, então $< \phi, f_{\#}(c)> = < f_{\#}(\phi), c >$. A cocadeia $\phi \in S^n(X,A;G)$ é um cociclo se e somente se $< \delta\phi, c'> = 0$ para qualquer $c' \in S_{n+1}(X,A)$, ou equivalentemente, se $< \phi, \partial c'> = 0$. Portanto ϕ é um cociclo, se e somente se, anula $B_n(X,A)$. Por outro lado, suponhamos que $\phi = \delta\phi'$ é um cobordo, onde $\phi' \in S^{n-1}(X,A;G)$. Então $<\phi, c> = <\delta\phi', c> = <\phi', \partial c >$, de modo que se ϕ é um cobordo, então ϕ anula $Z_n(X,A)$. Seja $x \in H^n(X,A;G)$ representado por um cociclo ϕ e $y \in H_n(X,A)$ representado por um ciclo c. Então definimos uma "forma"

$$< , > : H^n(X,A;G) \otimes H_n(X;A) \to G \text{ por } < x,y > = <\phi, c>$$

Esta "forma" é chamada <u>índice de Kronecker</u> e pode ser vista como um homomorfismo

$$\alpha : H^n(X,A;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X,A);G)$$

2.18. <u>Proposição</u>

Se X é um espaço topológico e $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é a decomposição de X em suas componentes por caminhos, então $H^0(X;G) \approx \prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, o produto direto de cópias de G, um para cada componente por cami nhos de X. [1]

2.19. **Lema**

Se $f: C \to D$ é uma aplicação de cadeia de grau zero entre complexos de cadeia livres, tal que f induz um isomorfismo de grupos de homologia, então f é uma equivalência homotópica por cadeia.

Demonstração:

Para provar este Lema vamos utilizar o "cilindro algébrico da f" que é o complexo de cadeia que definimos na continuação.

Seja $C_n(f) = C_{n-1} \oplus D_n$ e, $\partial(x,y) = (-\partial x, \partial y + f(x))$. Vejamos que é um complexo de cadeia bem definido:

$\partial\partial(x,y) = \partial(-\partial x, \partial y + f(x)) = (-\partial\partial x, \partial\partial y + \partial f(x) - f\partial(x)) = (-\partial\partial x, \partial\partial y + \partial f(x) - \partial f(x)) = (0,0)$.

Vamos provar agora que $H_*(f) = 0$. Se (x,y) está em $Z_n(f)$ então $-\partial x = 0$ e $\partial y + f(x) = 0$. Como $-\partial = 0$ então $x \in Z_{n-1}(C)$. Como $\partial y + f(x) = 0$, temos $-\partial y = f(x)$ e assim $f(x) \in B_{n-1}(D)$. Do fato de f_* ser um monomorfismo temos que $x \in B_{n-1}(C)$ e portanto existe $x' \in C_n$ tal que $\partial x' = x$. Então $0 = \partial y + f(x) = \partial y + f\partial x' = \partial(y + f(x'))$ e portanto $y + f(x') \in Z_n(D)$. Do fato de f_* ser um epimorfismo sabemos que existe $x'' \in Z_n(C)$ tal que $f_*\{(x'')\} = \{y + f(x')\}$ ou seja $f_*(x'' + B_n(C)) = y + f(x') + B_n(D)$ de onde $f(x'') = y + f(x') + \partial y'$, $y' \in C_{n+1}(D)$ ou seja $f(x'' - x') = y + \partial y'$. Portanto $\partial(x'' - x') = -x$, onde x'' é ciclo e x' tem bordo x. Portanto $\partial(x'' - x, -y') = (-\partial(x'' - x')$,

$f(x''-x') + \partial(-y') = (-(-x), y + \partial y' + \partial(-y')) = (x,y)$ e daí $(x,y) \in B_n(f)$. Então $H_*(f) = 0$. Como $B_{n-1}(f)$ é livre (2.11.2), a seqüência exata $0 \to Z_n(f) \hookrightarrow C_n(f) \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(f) \to 0$ é decomponível.

Logo $C_n(f) = Z_n(f) \oplus W_n$ onde W_n é levado pela restrição $\bar{\partial}$ de ∂ isomorficamente em $B_{n-1}(f)$. Então $C_n(f) = Z_n(f) \oplus W_n$ e $\partial|_{W_n} = \bar{\partial} : W_n \to Z_{n-1}(f)$. $\partial|^{-1}_{W_n} : Z_{n-1}(f) \to W_n$, $\partial|^{-1}_{W_{n+1}} : Z_n(f) \to$ $\to W_{n+1} \subset C_{n+1}(f)$.

Definimos $T: C_n(f) \to C_{n+1}(f)$ de modo que $T(x,y) = (0,0)$ se $(x,y) \in W_n$ e $T(x,y) = \partial|^{-1}_{W_{n+1}}(x,y)$ se $(x,y) \in Z_n(f)$.

Se $(x,y) \in W_n$ então $\partial T(x,y) + T\partial(x,y) = 0 + \partial^{-1}|_{W_{n+1}} \partial(x,y) =$ $= (x,y)$. Se $(x,y) \in Z_n(f)$ então $\partial T(x,y) + T\partial(x,y) =$ $= \partial\partial^{-1}|_{W_{n+1}}(x,y) + 0 = (x,y)$. Portanto $\partial T + T\partial = id - 0$. Logo T é Homotopia por cadeia.

Consideremos os homomorfismos $T': C_n \to C_{n+1}$, $T'': D_n \to D_{n+1}$ e $h: D_n \to C_n$ de modo que $T(x,y) = T'(x) + h(y), k(x) + T''(y))$. Então $(\partial T + T\partial)(x,y) = (-\partial(T'(x) + h(y)), \partial(k(x) + T''(y)) +$ $+ f(T'(x) + h(y)) + T(-\partial x, \partial y + f(x)) = [-\partial T'(x) - \partial h(y),$ $\partial k(x) + \partial T''(y) + fT'(x) + fh(y)] + [-T'\partial x + h\partial y + hf(x),$ $-k\partial x + T''\partial y + T''f(x)] = (-\partial T'(x) - \partial h(y) - T'\partial(x) +$ $+ h\partial(y) + hf(x), \partial k(x) + \partial T''(y) + fT'(x) + fh(y) - k\partial(x) +$ $+ T''\partial y + T''f(x) = (x,y)$.

Se $x = 0$ na primeira coordenada então $-\partial h(y) + h\partial(y) = 0$. Logo h é uma aplicação de cadeia. Se $y = 0$ na primeira coordenada e $x = 0$ na segunda coordenada temos $\partial T'(X) + T'\partial(x) =$

$= x - h \circ f(x)$ e $\partial T''(y) + T'' \partial (y) = y - f \circ h(y)$. De onde se conclui que f e h são homotopias por cadeia. f é uma equivalência de homotopia por cadeia e h é uma homotopia inversa por cadeia da f.

2.20. <u>Teorema da Excisão</u>

Seja (X,A) um par de espaços e $U \subseteq A$ um subconjunto com $\bar{U} \subseteq \text{Int } A$. Então a aplicação inclusão de pares

$$i: (X-U, A-U) \rightarrow (X,A)$$

induz um isomorfismo

$$i^*: H^*(X,A;G) \rightarrow H^*(X-U, A-U;G)$$

<u>Demonstração</u>:

Podemos provar o teorema da excisão através do Lema 2.19, da seguinte maneira: Pelo Teorema 1.25 $i_\#: S_*(X-U, A-U) \rightarrow$ $\rightarrow S_*(X,A)$ induz um isomorfismo no grupo de homologia. Pelo lema 2.19, sabemos que $i_\#$ é uma equivalência de homotopia por cadeia. Assim $i^\#: S^*(X,A;G) \rightarrow S^*(X-U, A-U;G)$ é uma equivalência de homotopia por cocadeia e i^* é um isomorfismo.

2.21. <u>Lema</u>

$$H^k(S^n, x_0; G) \approx \begin{cases} G & \text{para } k = n \\ 0 & \text{para os outros casos} \end{cases}$$

Demonstração:

Notemos primeiro que $H^k(S^o, x_o; G)$ é isomórfico por excisão a

$$H^k(pt,G) \approx \begin{cases} G & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

Seja $\phi \in S^o(pt,G) = \text{Hom}(S_o(pt,G) = \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) = G$. $\phi: \mathbb{Z} \to G$. Seja $c \in S_n(pt)$. Sabemos que $\partial c_{2n+1} = 0$ e $\partial c_{2n} = c_{2n-1}$. Então usando a notação definida em 2.17

$< \delta \phi_{2n}, c_{2n+1} > = < \phi_{2n}, \partial c_{2n+1} > = < \phi 2_n, 0 > = 0$

$< \delta \phi_{2n-1}, c_{2n} > = < \phi_{2n-1}, \partial c_{2n} > = < \phi 2_{n-1}; c_{2n-1} > \in G$

$\delta \phi_{2n-1}$ tem o mesmo efeito como homomorfismo de $\mathbb{Z} \to G$ que ϕ_{2n-1}. Vamos calcular agora as homologias. Nas dimensões pares temos: $Z^{2n}(pt,G) = S^{2n}(pt)$ e $B^{2n}(pt,G) = S^{2n}(pt)$. Logo $H^{2n}(pt,G) = 0$. Nas dimensões ímpares, temos: $Z^{2n-1}(pt,G) = 0$ e $B^{2n-1}(pt,G) = 0$. Logo $H^{2n-1}(pt,G) = 0$.

2.22. Teorema (Extensão do Teorema do Coeficiente Universal)

Dado um par de espaços (X,A) e um grupo abeliano G, existe uma seqüência exata decomponível

$$0 \to \text{Ext}(H_{n-1}(X,A);G) \xrightarrow{\beta} H^n(X,A;G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_n(X,A);G) \to 0$$

Demonstração:

(I) Seja a resolução livre de $H_{n-1}(X,A)$:

$$0 \to B_{n-1}(X,A) \overset{i}{\to} Z_{n-1}(X,A) \overset{\pi}{\to} H_{n-1}(X,A) \to 0.$$

Para qualquer grupo abeliano G a seqüência

$0 \to \mathrm{Hom}(H_{n-1}(X,A);G \overset{\pi\#}{\to} \mathrm{Hom}(Z_{n-1}(X,A);G) \overset{i\#}{\to} \mathrm{Hom}(B_{n-1}(X,A);G)$

$\to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A);G) \to 0$ é exata. (Prop. 2.17). Logo

$\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A);G) = \mathrm{coker}\ i^{\#} = \mathrm{Hom}(B_{n-1}(X,A);G)/\mathrm{im}(i^{\#}) =$

$= \mathrm{Hom}(B_{n-1}(X,A);G)/i^{\#}(\mathrm{Hom}(Z_{n-1}(X,A);G)$. Tentemos definir

$\mathrm{Hom}(B_{n-1}(X,A);G)/i^{\#}(\mathrm{Hom}(Z_{n-1}(X,A);G) \overset{\beta}{\to} Z^n(X,A;G)/B^n(X,A;G)$

onde $S^n(X,A;G) = \mathrm{Hom}(S_n(X,A);G)$. Para que β esteja bem definida de levar um elemento de $\mathrm{Hom}(B_{n-1}(X,A);G)$ num elemento de $Z^n(X,A;G)$ e um elemento de $i^{\#}(\mathrm{Hom}(Z_{n-1}(X,A);G)$ num elemento de $B^n(X,A;G)$. Vejamos se isto acontece:

(i) Consideremos a seqüência exata curta

$0 \to Z_n(X,A) \hookrightarrow S_n(X,A) \overset{\partial}{\to} B_{n-1}(X,A) \to 0$. Como $B_{n-1}(X,A)$ é abeliano livre, esta seqüência exata se decompõe. Logo $S_n(X,A) =$ $= Z_n(X,A) \oplus W_n$ onde W_n é levado pela restrição $\bar{\partial}$ de ∂ isomorficamente em $B_{n-1}(X,A)$. Construamos Ψ de tal forma que $B_{n-1}(X,A) \overset{\Psi}{\to} G$ e $(\Psi \circ \bar{\partial}) \in \mathrm{Hom}(W_n;G)$ ou seja $S_n(X,A) =$ $= Z_n(X,A) \oplus W_n \xrightarrow{0 + (\Psi \circ \bar{\partial})} G$. Portanto $0 + (\Psi \circ \bar{\partial})$ é um cociclo em $Z^n(X,A;G)$.

(ii) Seja $\bar{\Psi}$: $Z_{n-1}(X,A) \to G$ tal que $i^{\#}(\bar{\Psi}) = \Psi$ ou seja $\bar{\Psi}$ é uma restrição da Ψ de modo que temos $S_{n-1}(X,A) =$ $= Z_{n-1}(X,A) \oplus W_{n-1} \xrightarrow{\bar{\Psi} \oplus 0} G$. Mostremos que $(\bar{\Psi} \oplus 0)$ é imagem de um cobordo. Para isto mostraremos que $\delta(\bar{\Psi} \oplus 0) = 0 \oplus (\Psi \circ \bar{\partial})$

$\in Z^n(X,A;G)$. De fato, $< \delta(\overline{\Psi} \oplus 0), x > = < \overline{\Psi} \oplus 0, \partial x > =$

$= < \overline{\Psi}, \partial x > = \overline{\Psi}(\partial x) = \Psi(\partial x)$ já que $\overline{\Psi}$ é restrição da Ψ. Agora, $< 0 \oplus (\Psi \circ \overline{\partial}), x > = < (\Psi \circ \overline{\partial}, \overline{\partial}^{-1} \partial x > =$

$= (\Psi \circ \overline{\partial})(\overline{\partial}^{-1} \partial x) = \Psi(\partial x)$ onde $\overline{\partial}^{-1} \partial x$ é a projeção de x em W_n. Logo $\overline{\Psi} \oplus 0$ é imagem de um cobordo. Portanto β está bem definida.

II) Mostremos a exatidão da seqüência

$0 \to Ext(H_{n-1}(X,A);G) \xrightarrow{\beta} H^n(X,A;G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X,A);G) \to 0$, ou seja, que $\ker(\alpha) = im(\beta)$ e além disso que β é monomorfismo e α é epimorfismo.

(i) Mostremos primeiro que, $\ker(\alpha) \subset im(\beta)$. $\ker(\alpha) =$ $= \{ \Psi; \alpha(\Psi) = 0\}$ $\Psi: S_n(X,A) \to G$, Ψ é um cociclo. $\alpha(\Psi)\{x\} =$ $= < \alpha(\Psi), \{x\} > = < \Psi, x > = \Psi(x) = 0$, onde x é um ciclo. Portanto $\ker(\alpha) = \{ \Psi; \Psi|_{Z_n} = 0 \}$. Lembrando que $S_n = Z_n(X,A) \oplus W_n$, $\Psi|_{W_n} \to G$ e que a imagem inversa da restrição do ∂, o $\overline{\partial}^{-1}$ leva $B_{n-1}(X,A)$ isomorficamente em W_n e calculando a imagem de β temos:

$\beta\{(\Psi|_{W_n} \circ \overline{\partial}^{-1})\} = 0 \oplus (\Psi|_{W_n} \circ \overline{\partial}^{-1}) \circ \overline{\partial} = 0 \oplus \Psi|_{W_n} = \Psi$.

(ii) Mostremos que $im(\beta) \subset \ker(\alpha)$, ou seja, que $\alpha \circ \beta$ se aplica em zero.

$\alpha(\beta(\Psi)) = \alpha(0 \oplus (\Psi \circ \overline{\partial})) = 0$ porque

$\alpha\{0 \oplus \Psi \circ \overline{\partial}\}(\{x\}) = < 0 \oplus \Psi \circ \overline{\partial} , x > = 0$

onde 0 e x estão em $Z_n(X,A)$.

III) Mostremos que α é um epimorfismo e que a seqüência

$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A;G) \overset{\beta}{\to} H^n(X,A;G) \overset{\alpha}{\to} \mathrm{Hom}(H_n(X,A);G) \to 0$ se decompõe, ou seja, que podemos achar um homomorfismo $\gamma : \mathrm{Hom}(H_n(X,A);G) \to$ $\to H^n(X,A;G)$ tal que $\alpha \circ \gamma =$ identidade. Seja $\Psi \in \mathrm{Hom}(X,A);G)$ tal que $\overline{\Psi} = \Psi \circ \pi$. Temos

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\Psi"] & G \\
Z_n(X,A) \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\overline{\Psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S_n(X,A) = Z_n(X,A) \oplus W_n \arrow[d, "\overline{\Psi} \oplus 0 = (\Psi \circ \pi) \oplus 0"] & ; \; W_n \underset{\approx}{\overset{\overline{\partial}}{\to}} B_{n-1}(X,A) \\
G &
\end{tikzcd}$$

onde $\overline{\Psi} \oplus 0$ é cociclo. Como $\alpha(\overline{\Psi})\ (\overline{x}) = < \overline{\Psi},\overline{x} > = < \Psi,x> \in G$ onde $x \in H^n(X,A)$ e $\Psi \in H^n(X,A;G)$, temos: $\alpha(\{\overline{\Psi} \oplus 0\})(\{x\}) = <\{\overline{\Psi} \oplus 0\}$, $\{x\} > = < \overline{\Psi} \oplus 0, x > = \overline{\Psi}(x) = \Psi \circ \pi(x) = \Psi\{x\} = < \Psi, \{x\} >$.

Logo, α é um epimorfismo. Podemos definir $\gamma(\Psi) = \overline{\Psi} \oplus 0$. Vejamos que β é monomorfismo. Seja $0 \oplus (\Psi \circ \overline{\partial}) = \delta\psi$; $\psi: S_{n-1} \to G$. Em particular $\psi: Z_{n-1} \to G$. Como $< \delta\psi, x > = < \psi, \partial x >$ e $<\delta\psi, x> =$ $= < 0 \oplus (\Psi \circ \overline{\partial}), x > = < \Psi \circ \overline{\partial}, \overline{\partial}^{-1} \partial x > = \Psi(\partial x)$. Então Ψ é restrição da ψ e $\Psi \in i^{\#}(\mathrm{Hom}(Z_{n-1}(X,A;G))$. Logo β é um monomorfismo.

2.22.1. <u>Observação</u>

Calculamos a homologia da garrafa de Klein em nível zero, um e dois (1.20.5) e obtivemos os seguintes resultados: $H_o(K) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(K) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $H_2(K) \approx 0$. Usando o teorema 2.22 obtemos a cohomologia da garrafa de Klein em nível zero, um e dois: $H^o(K) \approx \mathbb{Z}$, $H^1(K) \approx \mathbb{Z}$ e $H^2(K) \approx \mathbb{Z}_2$. Como vemos, a parte livre permanece e a de torsão sobe um nível, (o que de fato acontece em geral). No nosso caso particular isto acontece já que

$\mathrm{Ext}(0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Ex}(\mathbb{Z}, 0) = 0$, $\mathrm{Ex}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ e $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = 0$.

2.23. Comentários

2.23.1 - O Teorema 2.22 estabelece a primeira relação entre grupos de homologia e cohomologia.

2.23.2 - Quando o grupo de coeficiente é também um anel, a cohomologia de um espaço pode ser dada como estrutura natural de anel (não é verdade para grupos de homologia). Esta estrutura algébrica adicional nos dá outro invariante topológico (Ver Cap.3).

2.23.3 - A teoria de cohomologia é a situação natural para "classes características". Essas são classes particulares de cohomologia, originando-se no estudo de fibrados, que tem aplicações, particularmente para a topologia de variedades [6].

2.23.4 - Existem "operações de cohomologia", naturalmente transformações ocorrentes em teoria de cohomologia, que tem aplicações em teoria de homotopia [7] e [8].

CAPÍTULO III

PRODUTOS - INVARIANTE DE HOFF

Consideremos $C = \{C_n, \partial\}$ e $D = \{D_n, \partial\}$ complexos de cadeia. No capítulo 2 discutimos a formação de um complexo de cadeia tensoriando um dado complexo de cadeia com um grupo abeliano. Como generalização daremos um procedimento para tensoriar dois complexos de cadeia e formar um novo complexo de cadeia.

3.1. Definições

Definimos um complexo de cadeia $C \otimes D$ como segue: $(C \otimes D)_n = \sum_{k=0}^{n} C_k \otimes D_{n-k}$. O operador bordo sobre um somando direto $\partial : C_p \otimes D_q \to C_{p-1} \otimes D_q \oplus C_p \otimes D_{q-1}$ é dado pela fórmula $\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial d$. Para vermos que isto realmente dá um complexo de cadeia, basta notarmos que:

$$\partial(\partial(c \otimes d)) = \partial(\partial c \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial d) = \partial\partial c \otimes d + (-1)^{p-1} \partial c \otimes \partial d + (-1)^p \partial c \otimes \partial d + (-1)^{2p}(c \otimes \partial\partial d) = 0.$$

Assim os elementos $(c \otimes d)$ geram $C \otimes D$ e segue que $\partial \circ \partial = 0$. Notemos que se $f: C \to C'$ e $g: D \to D'$ são aplicações de cadeia entre complexos de cadeia, existe uma aplicação de cadeia associada $f \otimes g: C \otimes D \to C' \otimes D'$ caracterizada por $f \otimes g(c \otimes d) = f(c) \otimes g(d)$. Suponhamos que C é um complexo de cadeia livre. A seqüência exata $0 \to Z_n(C) \overset{\alpha}{\to} C_n \overset{\partial}{\to} B_{n-1}(C) \to 0$ onde α é a inclusão, é decomponível uma vez que $B_{n-1}(C)$ é livre (2.11.2). Portanto existe um homomorfismo $\phi: C_n \to Z_n(C)$ que é a projeção sobre um somando direto, is to é, $\phi \circ d = id$ sobre $Z_n(C)$. Consideremos os grupos graduados $Z_*(C)$, $B_*(C)$ e $H_*(C)$ como sendo complexos de cadeia nos quais os operadores bordos são todos identicamente zero. Seja Φ a composição $\Phi = \pi \circ \phi$, $C_n \overset{\phi}{\to} Z_n(C) \overset{\pi}{\to} H_n(C)$ onde π é a aplicação quociente. Então Φ é uma aplicação de cadeia entre complexos de cadeia porque $\Phi(\partial c) = \pi \circ \phi(\partial c) = \pi(0) = 0 = \partial(\Phi(c))$ onde $\partial c \in B_{n-1}(C)$.

3.2. <u>Teorema</u>

Se C e D são complexos de cadeia livres, a aplicação de cadeia $\Phi \otimes id$: $C \otimes D \to H_*(C) \otimes D$ induz um isomorfismos

$$(\Phi \otimes id)_*: H_n(C \otimes D) \to H_n(H_*(C) \otimes D)$$

$$\{x \otimes y\} \mapsto \{\{x\} \otimes y\}$$

<u>Demonstração</u>:

Seja a seqüência exata $0 \to Z_*(C) \overset{\alpha}{\to} C \overset{\partial}{\to} B_*(C) \to 0$ onde ∂ tem grau -1. Como a seqüência é decomponível podemos tensoriá-la com o complexo de cadeia D, preservando a exatidão. Obtemos então uma seqüência exata $0 \to Z_*(C) \otimes D \xrightarrow{\alpha \otimes id} C \otimes D \xrightarrow{\partial \otimes id} B_*(C) \otimes D \to 0$, e uma seqüência exata de homologia

$$\dots \to H_n(Z_*(C) \otimes D \xrightarrow{(\alpha \otimes id)_*} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{(\partial \otimes id)_*} H_{n-1}(B_*(C) \otimes D)$$

$\overset{\Delta}{\to} H_{n-1}(Z_*(C) \otimes D) \to \dots$ onde $(\partial \otimes id)_*$ tem grau -1 e Δ é o homomorfismo de conexão. Por outro lado, a seqüência exata curta

$0 \to B_*(C) \overset{\beta}{\to} Z_*(C) \overset{\pi}{\to} H_*(C) \to 0$ não é necessariamente decomponível. Entretanto, como D é livre, a exatidão será preservada em

$0 \to B_*(C) \otimes D \xrightarrow{\beta \otimes id} Z_*(C) \otimes D \xrightarrow{\pi \otimes id} H_*(C) \otimes D \to 0$. Passando para os grupos de homologia destes complexos temos a seqüência exata longa

$$\ldots \to H_n(B_*(C) \otimes D) \xrightarrow{(\beta \otimes id)_*} H_n(Z_*(C) \otimes D) \xrightarrow{(\pi \otimes id)_*} H_n(H_*(C) \otimes D) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}(B_*(C) \otimes D) \to \ldots$$

Veremos que estas duas seqüências exatas longas podem ser realcionadas de tal maneira, que no diagrama a seguir cada retângulo comuta, a menos de sinal:

$$\begin{tikzcd}
H_n(B_*(C) \otimes D) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "="] & H_n(Z_*(C) \otimes D) \arrow[r, "(\alpha \otimes id)_*"] \arrow[d, "="] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & H_n(C \otimes D) \arrow[r, "(\partial \otimes id)_*"] \arrow[d, "(\Phi \circ id)_*"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & H_{n-1}(B_*(C) \otimes D) \arrow[d, "="] \\
H_n(B_*(C) \otimes D) \arrow[r, "(\beta \otimes id)_*"] & H_n(Z_*(C) \otimes D) \arrow[r, "(\pi \otimes id)_*"] & H_n(H_*(C) \otimes D) \arrow[r, "\Delta'"] & H_{n-1}(B_*(C) \otimes D)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\Delta"] & H_{n-1}(Z_*(C) \otimes D) \arrow[d, "="] \\
\arrow[r, "(\beta \otimes id)_*"] \arrow[ur, phantom, "(I)"] & H_{n-1}(Z_*(C) \otimes D)
\end{tikzcd}$$

(I) Observemos que:

(Ia) $(\beta \otimes id)(\Sigma \partial c_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma \partial c_i^p \otimes d_i^{n-p}$ onde β é a inclusão,

e

(Ib) $\Delta \{\Sigma \partial c_i^p \otimes d_i^{n-p}\} = \partial (\Sigma c_i^p \otimes d_i^{n-p}) =$

$= \Sigma [\partial c_i^p \otimes d_i^{n-p} + (-1)^p c_i^p \otimes \partial d_i^{n-p}]$ onde $\Sigma c_i^p \otimes d_i^{n-p} \in (C \otimes D)_n$

e $\Sigma [\partial c_i^p \otimes d_i^{n-p} + (-1)^p c_i^p \otimes \partial d_i^{n-p} \in (C \otimes D)_{n-1}$

Sabemos que o seguinte diagrama é de seqüência exatas curtas e quadrados comutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & (Z_*(C) \otimes D)_n & \xrightarrow{\alpha \otimes id} & (C \otimes D)_n & \xrightarrow{\partial \otimes id} & (B_*(C) \otimes D)_n & \to & 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 \to & (Z_*(C) \otimes D)_{n-1} & \to & (C \otimes D)_{n-1} & \to & (B_*(C) \otimes D)_{n-1} & \to & 0.
\end{array}$$

Então existe um elemento $a \in (Z_*(C) \otimes D)_{n-1}$ tal que $(\alpha \otimes id)(a) =$ $= \Sigma\ [\partial c_i^p \otimes d_i^{n-p} + (-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p}]$, e como a aplicação é monomorfismo e inclusão temos que $a = \Sigma\ [\partial\ c_i^p \otimes d_i^{n-p} + (-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\, d_i^{n-p}]$

Mostraremos que os elementos (Ia) e (Ib) estão numa mesma classe, ou seja, que diferem por um bordo.

Como $(B_*(C) \otimes D)_{n-2} \leftrightarrow (W_* \otimes D)_{n-1}$ pois $W_n \stackrel{\sim}{\sim} B_{n-1}$ então $0 = \Sigma(-1)^p \partial\ w_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p} \leftrightarrow \Sigma(-1)^p\ w_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p}$.

Portanto $\Sigma[\partial c_i^p \otimes d_i^{n-p} \oplus (-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p}] - \Sigma\ \partial\ c_i^p \otimes d_i^{n-p} =$

$= \Sigma(-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p} = \Sigma(-1)^p(z_i^p + w_i^p) \otimes \partial\ d_i^{n-p} =$ (onde $z_i^p + w_i^p =$ $= c_i^p$)

$= \Sigma(-1)^p\ z_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p} + \Sigma(-1)^p\ w_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p} = \partial(\Sigma\ z_i^p \otimes d_i^{n-p})$ onde $\Sigma\, z_i^p \otimes d_i^{n-p} \in Z_*(C) \otimes D$. Portanto (I) comuta.

(II) Seja $\Sigma\ c_i^p \otimes d_i^{n-p} \in (C \otimes D)_n$ um ciclo. Então

$\partial(\Sigma\ c_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma[\partial\, c_i^p \otimes d_i^{n-p} + (-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p}] = 0$ e

$\Sigma\ \partial\ c_i^p \otimes d_i^{n-p} = -\ \Sigma(-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\, d_i^{n-p}$. Observemos que:

(II a) $(\partial \otimes id)(\Sigma\ c_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma\ \partial c_i^p \otimes d_i^{n-p} = -\Sigma(-1)^p\ c_i^p \otimes \partial\ d_i^{n-p}$.

(II b) $(\phi \otimes id)(\Sigma\ c_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma\{z_i^p\} \otimes d_i^{n-p}$ onde $\{z_i^p\} \in H_p(C)$

(II c) $\Delta'(\phi \otimes id)(\Sigma\ c_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Delta'(\Sigma\ \{z_i^p\} \otimes d_i^{n-p})$.

Consideremos o diagrama de seqüências exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & (B_*(C) \otimes D)_n & \xrightarrow{\beta \otimes id} & (Z_*(C) \otimes D)_n & \xrightarrow{\pi \otimes id} & (H_*(C) \otimes D)_n & \to & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & (B_*(C) \otimes D)_{n-1} & \to & (Z_*(C) \otimes D)_{n-1} & \to & (H_*(C) \otimes D)_{n-1} & \to & 0 .
\end{array}$$

Pela exatidão sabemos que existe um elemento $b \in (B_*(C) \otimes D)_{n-1}$ tal que $(\beta \otimes id)(b) = \Sigma(-1)^p z_i^p \otimes \partial d_i^{n-p}$ e como $\beta \otimes id$ é um monomorfismo e inclusão, $b = \Sigma(-1)^p z_i^p \otimes \partial d_i^{n-p}$ e assim em (IIc) vem :

$\Delta' (\Sigma \{z_i^p\} \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma(-1)^p z_i^p \otimes \partial d_i^{n-p}$. Mostremos que (IIa) e (IIc) diferem por um bordo (a menos de sinal) e portanto estão numa mesma classe.

$\Sigma(-1)^p c_i^p \otimes \partial d_i^{n-p} - \Sigma(-1)^p z_i^p \otimes \partial d_i^{n-p} = \Sigma(-1)^p w_i^p \otimes \partial d_i^{n-p} =$

$= \partial(\Sigma w_i^p \otimes d_i^{n-p})$. Vendo que $\Sigma w_i^p \otimes d_i^{n-p} \in (B_*(C) \otimes D)_n$ concluímos que

(II) comuta a menos de sinal.

(III) $(\alpha \otimes id)(\Sigma z_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma z_i^p \otimes d_i^{n-p} \in (C \otimes D)_n$

$(\Phi \otimes id)(\alpha \otimes id)(\Sigma z_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma \{z_i^p\} \otimes d_i^{n-p}$

$(\pi \otimes id)(\Sigma z_i^p \otimes d_i^{n-p}) = \Sigma \{z_i^p\} \otimes d_i^{n-p}$.

Portanto (III) comuta. Então pelo lema dos cinco (1.24) concluimos que $(\Phi \otimes id)_*: H_n(C \otimes D) \underset{\approx}{\to} H_n(H_*(C) \otimes D)$ é um isomorfismo.

3.3. Comentários

Este Teorema reduz o problema de calcular a homologia do complexo de cadeia $C \otimes D$ em calcular a homologia do complexo de cadeia mais simples, $H_*(C) \otimes D$.

3.4. **Corolário** - Fórmula de Künneth para complexos de cadeia livres.

Se C e D são complexos de cadeia livres, então

$$H_n(C \otimes D) \approx \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D) \oplus \sum_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(C), H_s(D)) .$$

Demonstração:

Se $c \otimes d \in H_p(C) \otimes D_q$ então $\partial(c \otimes d) = (-1)^p c \otimes \partial d$, de modo que a menos de sinal o operador bordo é justamente

$$id \otimes \partial : H_p(C) \otimes D_q \to H_p(C) \otimes D_{q-1}$$

Por isso, para p fixo $H_p(C) \otimes D$ é um subcomplexo de $H_*(C) \otimes D$, de fato um somando direto, e concluimos que

$$H_n(H_*(C) \otimes D) = \sum_p H_n(H_p(C) \otimes D)$$

Agora se dois operadores bordos diferem por um sinal somente, é evidente que eles produzem o mesmo grupo de homologia. Assim podemos supor que o operador bordo num complexo de cadeia $H_p(C) \otimes D$ é $id \otimes \partial$. Notemos que a componente n-dimensional deste complexo é $H_p(C) \otimes D_{n-p}$. Como D é um complexo de cadeia livre, podemos aplicar o teorema do coeficiente universal, no complexo de cadeia $H_p(C) \otimes D$, $H_n(C \otimes D) = H_n(H_*(C) \otimes D) = \sum_p H_n(H_p(C) \otimes D)$

$$H_n(H_p(C) \otimes D) = H_n(D \otimes H_p(C)) \approx H_{n-p}(D) \otimes H_p(C) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-p-1}(D), H_p(C))$$

$$\approx H_p(C) \otimes H_{n-p}(D) \oplus \mathrm{Tor}(H_p(C), H_{n-p-1}(D))$$

A soma membro a membro destas relações para todos os valores de p constitui a Fórmula de Künneth para complexos de cadeia livres.

3.5. Exemplo

Veremos que torsão comum em $H_p(C)$ e $H_q(D)$ produz classes de homologia em $H_{p+q+1}(C \otimes D)$. Suponhamos que $c \in Z_p(C)$ mas que c não é um bordo. Suponhamos ainda que $r.c = \partial c'$ para algum $c' \in C_{p+1}$ e algum inteiro minimal $r > 0$, tal que c representa uma classe de homologia de ordem r. Isto é, r.c em homologia se comporta como representante de zero. Dizemos que r é a torsão de c e que c é elemento de r torsão. ($\{c\} \neq 0$; $r\{c\} = 0$). Similarmente, seja $d \in Z_q(D)$ representante duma classe de homologia de ordem r tal que $rd = \partial d'$ para algum $d' \in D_{q+1}$. Então em $(C \otimes D)_{p+q+1}$ o elemento $(c' \otimes d - (-1)^p c \otimes d')$ é um ciclo porque

$\partial(c' \otimes d - (-1)^p c \otimes d') = \partial c' \otimes d + (-1)^{p+1} c' \otimes \partial d -$

$- (-1)^p \partial c \otimes d' - (-1)^{2p} c \otimes \partial d'$, (mas como $\partial d = 0$ e $\partial c = 0$)

$= rc \otimes d - c \otimes rd = r(c \otimes d - c \otimes d) = 0.$

3.6. Fórmula de Künneth para Complexos de Cadeia Singulares

Dados espaços topológicos X e Y, a fórmula de Künneth do corolário 3.4 pode ser aplicada em complexos de cadeia singulares $S_*(X)$ e $S_*(Y)$ para dar o isomorfismo

$$H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \approx \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \oplus \sum_{r+s=n-1} Tor(H_r(X), H_s(Y)).$$

Passamos agora ao problema de relacionar $H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y))$ a $H_n(X \times Y)$, a homologia do produto cartesiano de X e Y. A solução deste problema será estabelecida em termos do teorema de modelos acíclicos, uma ferramenta útil na álgebra homológica (Ver apêndice).

3.7. Teorema de Eilenberg-Zilber

Para quaisquer espaços X e Y e qualquer inteiro k existe um isomorfismo $\phi_*: H_k(X \times Y) \to H_k(S_*(X) \otimes S_*(Y))$.

Demonstração:

Precisamos aplicar o teorema dos modelos acíclicos, para relacionar a homologia do complexo de cadeia $S_*(X \times Y)$ com a homologia de $S_*(X) \otimes S_*(Y)$. Seja $\mathcal{C}$ a categoria de espaços topológicos e funções contínuas. Denotemos por $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são pares ordenados (X,Y) de objetos em $\mathcal{C}$ e cujos morfismos são pares ordenados (f,f') de morfismos em $\mathcal{C}$ com $f: X \to X'$ e $f': Y \to Y'$. Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os pares (σ^p, σ^q), p, q $\geqslant 0$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ onde σ^k é o k-simplexo padrão. Definamos dois funtores de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ na categoria de complexos de cadeia e aplicações de cadeia por $T(X,Y) = S_*(X \times Y)$ e $T'(X,Y) = S_*(X) \otimes S_*(Y)$. Veremos que ambos os funtores T e T' são livres com os modelos de $\mathcal{M}$. Além disso, ambos tem os modelos acíclicos em dimensões positivas. Vamos provar que T'_n é livre com modelos (σ^n, σ^n). Consideremos: $T'_n(X,Y) = \bigoplus_{m=0}^{n} (S_m(X) \otimes S_{n-m}(Y))$ e $\mathcal{M}_n = \{(\sigma^n, \sigma^n)\} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Seja $\tau_1: \sigma^m \to \sigma^n$ definido por $\tau_1^m(t_o,\ldots,t_m) = (t_o,\ldots,t_m,0,\ldots,0)$. Então como $m < n$, σ^m pode ser mergulhado em σ^n, de onde τ_1^m é um gerador de $S_m(X)$ e τ_2^{n-m} é um gerador de $S_{n-m}(Y)$ onde $(X,Y) = (\sigma^n, \sigma^n)$. Portanto $\tau_1^m \otimes \tau_2^{n-m}$ é um gerador de $S_m(X) \otimes S_{n-m}(Y)$. Logo $\tau_1^m \otimes \tau_2^{n-m} \in T'_n(\sigma^n, \sigma^n)$ . . $\tau_2^{n-m} = \sigma^{n-m} \to \sigma^n$. Sejam as aplicações $\Psi_1: \sigma^n \to X$ e $\Psi_2: \sigma^{n-m} \to Y$. Existem aplicações $\Psi_1': \sigma^n \to X$ e $\Psi_2': \sigma^n \to Y$ tal que os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} & \sigma^n \arrow[dr, "S^{n-m}_{\Psi_1} = \Psi'_1"] & \\ \sigma_m \arrow[ur, "\tau_1^m"] \arrow[rr, "\Psi_1"'] & & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sigma^{n-m} \arrow[rr, "\Psi_2"] \arrow[dr, "\tau_2^{n-m}"'] & & Y \\ & \sigma^n \arrow[ur, "S^m_{\Psi_2} = \Psi'_2"'] & \end{tikzcd}$$

Vemos que $(\Psi'_1, \Psi'_2) : (\sigma^n, \sigma^n) \to (X,Y)$

$$f : M_\alpha \to X$$

Então $(\Psi'_1 \otimes \Psi'_2)_\# \circ (\tau_1 \otimes \tau_2) = (\Psi'_1 \circ \tau_1) \otimes (\Psi'_2 \circ \tau_2) = \Psi_1 \otimes \Psi_2 =$ $= T'_n(\Psi'_1, \Psi'_2) = \Psi'_1 \otimes \Psi'_2$. Por outro lado $(\Psi'_1 \otimes \Psi'_2)_\# \circ (\tau_1 \otimes \tau_2) =$ $= T'_n(\Psi'_1, \Psi'_2)(\tau_1 \otimes \tau_2) = \Psi_1 \otimes \Psi_2$. Portanto provamos que T'_n é livre com os modelos (σ^m, σ^n).

Vamos provar agora que $T_n(X, Y)$ com os modelos (σ^n, σ^n) é livre.

Lembremos que $T_n(X,Y) = S_n(X \times Y)$ e que $T_n(\sigma^n, \sigma^n) = T_n(M_\alpha) =$ $= S_n(\sigma^n \times \sigma^n)$. Seja $\tau \in S_n(\sigma^n \times \sigma^n)$ onde $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ e $\tau_1 = \tau_2 = id_{\sigma^n}$. Então $\tau = \tau_1 \times \tau_2 : \sigma^n \to \sigma^n \times \sigma^n$.

Seja $\Psi_1 \times \Psi_2 : \sigma^n \to X \times Y$. Vemos que $(\Psi_1, \Psi_2):(\sigma^n, \sigma^n) \to (X,Y)$. Então $T_n(\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1 \times \Psi_2)_\# \quad (\Psi_1 \times \Psi_2)_\# (\tau_1 \times \tau_2) =$ $= (\Psi_1 \times \Psi_2) \circ (\tau_1 \times \tau_2) = (\Psi_1 \circ \tau_1) \times (\Psi_2 \circ \tau_2) = \Psi_1 \times \Psi_2 = \phi$.

O que prova que $T_n(X,Y)$ com os modelos (σ^n, σ^n) é livre. As componentes por caminhos de $X \times Y$ são da forma $C \times D$, onde C e D são componentes por caminhos de X e Y, respectivamente. Como um resultado existe um isomorfismo natural $H_o(X \times Y) \overset{\Phi}{\to} H_o(S_*(X) \otimes S_*(Y))$ porque $H_o(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \approx H_o(X) \otimes H_o(Y)$ pela fórmula de Künneth do corolário 3.4. Das transformações naturais Φ e Φ^{-1} aplicamos o teorema dos modelos acíclicos em cada direção para concluir que existe aplicações de cadeia $\phi: S_*(X \times Y) \to S_*(X) \otimes S_*(Y)$ e $\bar{\phi}: S_*(X) \otimes S_*(Y) \to S_*(X \times Y)$ que induzem Φ e Φ^{-1}, respectivamente, em dimensão zero. Portanto, $\phi \circ \bar{\phi}$ é uma aplicação de cadeia de $S_*(X) \otimes S_*(Y)$ em si mesmo induzindo a identidade sobre a homologia zero-dimensional. Mas a aplicação de cadeia identidade também tem esta propriedade, então pelo teorema dos modelos acíclicos, $\phi \circ \bar{\phi}$ é homotópica por cadeia a identidade. Similarmente a composição $\bar{\phi} \circ \phi$ é homotópica por cadeia a identidade sobre $S_*(X \times Y)$. Portanto

$$\phi_*: H_*(X \times Y) \to H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y))$$

é um isomorfismo com inversa $\bar{\phi}_*$.

3.8. <u>Teorema</u> - Fórmula de Künneth para Homologia Singular.

Se X e Y são espaços, existe um isomorfismo natural

$$H_n(X \times Y) \approx \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \oplus \sum_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(X), H_s(Y))$$

para cada n.

<u>Demonstração</u>:

Basta combinar o teorema 3.7 com o corolário 3.4.

3.9. <u>Produto External de Homologia</u>

Como decorrência do Teorema 3.8 temos a seqüência exata

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_n(X \times Y) \to \sum_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(X), H_s(Y)) \to 0$$

Então a composição

$$H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_{p+q}(S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\phi_*^{-1}} H_{p+q}(X \times Y)$$

que leva $\{x\} \otimes \{y\}$ na parte livre de $\{x \otimes y\}$, é chamado produto external de homologia. A imagem de $\{x\} \otimes \{y\}$ sob a composição é denotada usualmente por $\{x\} \times \{y\}$ e para qualquer escolha de p e q, o homomorfismo dado pelo produto external é um monomorfismo.

3.10. Produto External sobre Cocadeias

Se $\alpha \in S^p(X;G_1)$ e $\beta \in S^q(Y;G_2)$ então $\alpha\colon S_p(X) \to G_1$ e $\beta\colon S_q(Y) \to G_2$ são homomorfismos. Denotemos por $\alpha \times \beta$ o homomorfismo dado pela composição $S_{p+q}(X \times Y) \xrightarrow{\phi} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} G_1 \otimes G_2$, onde $\alpha \otimes \beta$ é definido como sendo zero sobre qualquer termo não pertencente a $S_p(X) \otimes S_q(Y)$. Assim, $\alpha \times \beta \in S^{p+q}(X \times Y;G_1 \otimes G_2)$. Isto define um produto external sobre cocadeias

$$S^p(X;G_1) \otimes S^q(Y;G_2) \to S^{p+q}(X \times Y;\, G_1 \otimes G_2)$$

3.11. Proposição

Se $\alpha \in S^p(X;G_1)$ e $\beta \in S^q(Y;G_2)$ são cocadeias e $\alpha \times \beta \in S^{p+q}(X \times Y;\, G_1 \otimes G_2)$ é seu produto external, então

$$\delta(\alpha \times \beta) = (\delta\alpha) \times \beta + (-1)^p \alpha \times \delta\beta$$

Demonstração:

O diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
S_{p+q+1}(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & S_*(X) \otimes S_*(Y) & & \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
S_{p+q}(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & S_*(X) \otimes S_*(Y) & \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} & G_1 \otimes G_2
\end{array}$$

comuta por ser ϕ uma aplicação de cadeia. Assim

$$\delta(\alpha \times \beta) = (\alpha \otimes \beta \circ \phi) \circ \partial = (\alpha \otimes \beta) \circ \partial \circ \phi \, .$$

Por outro lado $(\delta\alpha) \times \beta = ((\delta\alpha) \otimes \beta) \circ \phi$ e $\alpha \times \delta\beta = (\alpha \otimes \delta\beta) \circ \phi$ Portanto, é suficiente mostrar o comportamento destes três homo - morfismos sobre a imagem de ϕ. Seja $e \otimes c$ um elemento base de $S_*(X) \otimes S_*(Y)$. Então $(\alpha \otimes \beta) \circ \partial$ será zero sobre $e \otimes c$ a menos que

(i) $e \in S_{p+1}(X)$ e $c \in S_q(Y)$ ou

(ii) $e \in S_p(X)$ e $c \in S_{q+1}(Y)$.

No primeiro caso $(\alpha \otimes \beta) \circ \partial (e \otimes c) = (\alpha \otimes \beta)(\partial e \otimes c +$ $+ (-1)^{p+1} e \otimes \partial c = \alpha(\partial e) \otimes \beta(c) + 0 = \delta\alpha(e) \otimes \beta(c) =$ $= ((\delta\alpha) \otimes \beta)(e \otimes c)$. No segundo caso $(\alpha \otimes \beta) \circ \partial (e \otimes c) =$ $= (\alpha \otimes \beta)(\partial e \otimes c + (-1)^p e \otimes \partial c) = (-1)^p \alpha(e) \otimes \beta(\partial c) =$ $= (-1)^p (\alpha \otimes \delta\beta)(e \otimes c)$.

Como os três homomorfismos são zero sobre qualquer elemento base excluindo-se os da forma (i) ou (ii) concluimos que $\delta(\alpha \times \beta) =$ $= (\delta\alpha) \times \beta + (-1)^p (\alpha \times \delta\beta)$.

3.12. <u>Corolário</u> - Produto External de Cohomologia

Fica Induzido um produto external bem definido sobre grupos de cohomologia $H^p(X;G_1) \otimes H^q(Y;G_2) \to H^{p+q}(X \times Y;G_1 \otimes G_2)$ dado por $\{\alpha\} \otimes \{\beta\} = \{\alpha \times \beta\}$.

<u>Demonstração</u>:

Isto segue imediatamente das três seguintes conseqüências da proposição 3.11:

(a) cociclo x cociclo é um cociclo.

(b) cociclo x cobordo é um cobordo.

(c) cobordo x cociclo é um cobordo.

Se $\delta\alpha = 0 = \delta\beta$, então $\delta(\alpha \times \beta) = (\delta\alpha) \times \beta + (-1)^p \alpha \times \delta\beta = 0$. Isto estabelece (a).(b) e (c) seguem de modo similar.

3.13. <u>Lema</u>

Se $f: X' \to X$ e $g: Y' \to Y$ são aplicações e $\{\alpha\} \in H^p(X;G_1)$ e $\{\beta\} \in H^q(Y;G_2)$ então

$$(f \times g)^* (\{\alpha\} \times \{\beta\}) = f^*\{\alpha\} \times g^*\{\beta\}$$

em $H^{p+q}(X' \times Y';\ G_1 \otimes G_2)$.

<u>Demonstração</u>:

Para provar que $(f \times g)^*(\{\alpha\} \times \{\beta\}) = f^*\{\alpha\} \times g^*\{\beta\}$ basta provar que $(f \times g)^{\#}(\alpha \times \beta) = f^{\#}(\alpha) \times g^{\#}(\beta)$. Seja $\alpha \in S^p(X;G_1)$ e $\beta \in S^q(Y;G_2)$. $\alpha \times \beta$ é a composição

$$S_{p+q}(X \times Y) \xrightarrow{\phi} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} G_1 \otimes G_2 .$$

Então $\alpha \otimes \beta \in S^p(X;G_1) \otimes S^q(Y;G_2)$ e $\alpha \times \beta \in S^{p+q}(X \times Y;G_1 \otimes G_2)$. Sabemos que $(\alpha \times \beta) \circ (f \times g)_{\#} = (\alpha \circ f_{\#}) \times (\beta \circ g_{\#})$.

Do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
S_{p+q}(X' \times Y') \arrow[r, "(f \times g)_\#"] \arrow[dr, "\phi'"'] & S_{p+q}(X \times y) \arrow[r, "\phi"] & S_*(X) \otimes S_*(Y) \arrow[r, "\alpha \otimes \beta"] & G_1 \otimes G_2 \\
& S_*(X') \otimes S_*(Y') \arrow[ur, "f_\# \otimes g_\#"'] & &
\end{tikzcd}$$

temos que

$$(\alpha \otimes \beta) \circ \phi \circ (f \times g)_\# = (\alpha \otimes \beta) \circ (f_\# \times g_\#) \circ \phi' =$$

$$= (\alpha \circ f_\#) \otimes (\beta \circ g_\#) \circ \phi' = |f^\#(\alpha) \otimes g^\#(\beta)| \circ \phi' = f^\#(\alpha) \times g^\#(\beta).$$

3.14. Produto External de Cohomologia com Coeficientes num Anel

Seja R um anel comutativo, associativo com unidade [2]. Assim existe um homomorfismo $\mu: R \otimes R \to R$ dado por $\mu(a \otimes b) = ab$. Particularizemos o produto external de cohomologia no caso onde $G_1 = R = G_2$. Para $\alpha \in S^p(X;R)$ e $\beta \in S^q(Y;R)$ definamos

$\alpha \times_1 \beta \in S^{p+q}(X \times Y;R)$ como a composição

$S_{p+q}(X \times Y) \xrightarrow{\phi} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} R \otimes R \to R$. Isto induz um produto bem definido sobre grupos de cohomologia

$H^p(X;R) \otimes H^q(Y;R) \to H^{p+q}(X \times Y;R)$ levando $\{\alpha\} \otimes \{\beta\}$ em $\{d \times_1 \beta\}$.

3.15. Lema

Seja $\{\alpha\} \in H^p(X;R)$ e $\{\beta\} \in H^q(Y;R)$. Definamos a aplicação $T: X \times Y \to Y \times X$ por $T(x,y) = (y,x)$. Então

$T^*: H^{p+q}(YxX;R) \to H^{p+q}(XxY;R)$ tem $T^*(\{\beta\}) \times_1 \{\alpha\}) =$

$= (-1)^{pq}(\{\alpha\} \times_1 \{\beta\})$.

<u>Demonstração</u>:

Definamos $T': S_*(X) \otimes S_*(Y) \to S_*(Y) \otimes S_*(X)$ sobre um elemento base $e \otimes c$, onde $e \in S_p(X)$ e $c \in S_q(Y)$ por $T'(e \otimes c) = (-1)^{pq}\, c \otimes e$. Consideremos o diagrama

(*)

$$\begin{tikzcd}
S_*(X \times Y) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dd, "T_*"] & S_*(X) \otimes S_*(Y) \arrow[dd, "T'"] \arrow[dr, "(-1)^{pq}\,\alpha \otimes \beta"] & & \\
 & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & R \otimes R \arrow[r, "\mu"] & R \\
S_*(Y \times X) \arrow[r, "\phi"] & S_*(Y) \otimes S_*(X) \arrow[ur, "\beta \otimes \alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como R é comutativo, $(-1)^{pq}\, \mu \circ (\alpha \otimes \beta) = \mu \circ (\beta \otimes \alpha) \circ T'$:

$(-1)^{pq}\, \mu \circ (\alpha \otimes \beta)(e \otimes c) = (-1)^{pq}\, \mu\,(\alpha(e) \otimes \beta(c)) =$

$= (-1)^{pq}\, \alpha(e) \,.\, \beta(c) \quad = (-1)^{pq}\, \alpha(e).\beta(c) = (-1)^{pq}\, \beta(c).\alpha(e) =$

$= (-1)^{pq}\, \mu\,(\beta(c) \otimes \alpha(e)) = \mu \circ (\beta \otimes \alpha)(-1)^{pq}\, c \otimes e =$

$= \mu \circ (\beta \otimes \alpha) \circ T'(e \otimes c)$.

Restringindo nossa atenção ao retângulo em (*) acima, observamos que a composição $\phi \circ T_*$ é uma aplicação de cadeia, pois ambas ϕ e T_* são aplicações de cadeia. Veremos que também é verdade de que $T' \circ \phi$ é uma aplicação de cadeia. Para estabelecer isto é suficiente mostrar que T' é uma aplicação de cadeia. Seja $e \in S_p(X)$ e $c \in S_q(Y)$. Então

$$T' \circ \partial(e \otimes c) = T'(\partial e \otimes c + (-1)^p\, e \otimes \partial c) =$$

$$= (-1)^{(p-1)q}\, c \otimes \partial e + (-1)^{p+p(q-1)}\, \partial c \otimes e =$$

$$= (-1)^{(p-1)q}\, c \otimes \partial e + (-1)^{pq}\, \partial c \otimes e.$$

Por outro lado $\partial \circ T'(e \otimes c) = \partial((-1)^{pq}\, c \otimes e) =$

$= (-1)^{pq}\, \partial c \otimes e + (-1)^{pq+q}\, c \otimes \partial e = (-1)^{pq}\, \partial c \otimes e \, +$

$+ (-1)^{(p+1)q} c \otimes \partial e.$

Como as duas expressões são iguais, concluimos que T' é uma aplicação de cadeia. As composições $T' \circ \phi$ e $\phi \circ T_*$ induzem transformações iguais em homologia zero dimensional. Aplicando o teorema dos modelos acíclicos (ver apêndice) concluimos que estas duas aplicações de cadeia são naturalmente homotópicas por cadeia. Portanto a classe de cohomologia representada pela composição $\mu \circ (\beta \times \alpha) \circ \phi \circ T_*$ é a mesma classe representada por $(-1)^{pq} \mu \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \phi$. Em outras palavras

$T^*(\{\beta\} \times_1 \{\alpha\}) = (-1)^{pq} \{\alpha\} \times_1 \{\beta\}.$

3.16. **Lema**

Se $\{\alpha\} \in H^*(X;R)$ e $\{\beta\} \in H^*(Y;R)$ e $f: X' \to X, g: Y' \to Y$ são aplicações, então $(f \times g)^*(\{\alpha\} \times_1 \{\beta\}) = f^*\{\alpha\} \times_1 g^*\{\beta\}$.

Demonstração:

É análoga a do lema 3.13.

3.17. **Lema**

Se $\{\alpha\} \in H^*(X;R)$, $\{\beta\} \in H^*(Y;R)$ e $\{\gamma\} \in H^*(W;R)$ então $(\{\alpha\} \times_1 \{\beta\}) \times_1 \{\gamma\} = \{\alpha\} \times_1 (\{\beta\} \times_1 \{\gamma\})$.

Demonstração:

Sejam $\alpha \in S^p(X;R)$ e $\beta \in S^q(Y;R)$. Consideremos

$S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} R \otimes R$ e $S_{p+q}(X \times Y) \xrightarrow{\alpha \times \beta} R \otimes R.$

Temos que $\alpha \times_1 \beta \in S^{p+q}(X \times Y;R)$ onde $\alpha \times_1 \beta$ é a composição

$$S_{p+q}(X \times Y) \xrightarrow{\phi} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} R \otimes R \xrightarrow{\mu} R.$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
S_{p+q+r}(X \times Y \times W) \arrow[r, "\phi"] & S_{p+q}(X \times Y) \otimes S_r(W) \arrow[rr, "(\alpha \times_1 \beta) \otimes \gamma"] \arrow[dl, "\phi \otimes id"'] & & R \otimes R \arrow[r, "\mu"] & R \\
(S_p(X) \otimes S_q(Y)) \otimes S_r(W) \arrow[rr, "(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & (R \otimes R) \otimes R \arrow[ur, "\mu \otimes id"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
S_p(X) \otimes (S_q(Y) \otimes S_r(W)) \arrow[rr, "\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)"] & & R \otimes (R \otimes R) \arrow[dr, "id \otimes \mu"] & & \\
S_{p+q+r}(X \times Y \times W) \arrow[r, "\phi"] & S_p(X) \otimes S_{q+r}(Y \times W) \arrow[rr, "\alpha \otimes (\beta \times_1 \gamma)"] \arrow[ul, "id \otimes \phi"] & & R \otimes R \arrow[r, "\mu"] & R
\end{tikzcd}$$

Na primeira linha do diagrama a composição $\mu \circ ((\alpha \times_1 \beta) \otimes \gamma) \circ \phi$ nada mais é que $(\alpha \times_1 \beta) \times_1 \gamma$ e na última linha a composição $\mu \circ (\alpha \otimes (\beta \times_1 \gamma)) \circ \phi$ nada mais é que $\alpha \times_1 (\beta \times_1 \gamma)$.

3.18. Produto "CUP"

Se Y = ponto, então $H^*(Y;R) = H^0(Y;R) \approx R$ e o produto external $H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R) \to H^*(X \times Y;R)$ tem a forma

$$H^*(X;R) \otimes R \to H^*(X;R)$$

$$(x,r) \mapsto xr$$

Como esta é uma forma bilinear, temos:

$$(x, (r + r')) \longmapsto x(r + r') = rx + r'x$$

$$((x + x'), r) \longmapsto r(x + x') = rx + rx'$$

$$(x, rs) \longmapsto rsx = r\,(sx).$$

Isto dá a $H^*(X;R)$ a estrutura de um R-módulo graduado [2]. Além disso segue pelo lema 3-16 que qualquer aplicação $f\colon X' \to X$ induz um homomorfismo de R-módulos [2], $f^*\colon H^*(X;R) \to H^*(X';R)$, tal que $f^*(r\,\{\alpha\}) = rf^*\{\alpha\}$ e $(id \times f)^*(\{\alpha\} \times_1 \{\beta\}) = \{\alpha\} \times_1 f^*\,\{\beta\}$.

Para qualquer espaço X seja $d\colon X \to X \times X$ a aplicação diagonal dada por $d(x) = (x,x)$. Então a composição

$H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) \to H^{p+q}(X \times X;R) \xrightarrow{\alpha^*} H^{p+q}(X;R)$ levando $\{\alpha\} \otimes \{\beta\}$ em $d^*(\{\alpha\} \times_1 \{\beta\})$ define uma multiplicação no R-módulo $H^*(X;R)$. Esta composição é chamada <u>Produto "Cup"</u> e é usualmente representada por $\{\alpha\} \cup \{\beta\}$

3.19. <u>Observação</u>

Uma R-álgebra graduada $M = \Sigma_k M^k$ é comutativa se, dados quaisquer elementos homogêneos $m_p \in M^p$ e $m_q \in M^q$ temos

$$mp \,.\, mq = (-1)^{pq}\, m_q m_p \text{ em } M^{p+q}$$

3.20. <u>Teorema</u>

Para R um anel comutativo, associativo com unidade, X um espaço topológico, $H^*(X;R)$ é uma R-álgebra graduada comutativa associativa com unidade. Qualquer função contínua $f\colon X' \to X$ induz um homomorfismo de R-álgebra,

$f^*\colon H^*(X;R) \to H^*(X';R)$ de grau zero, tal que

$f^*(r\ \alpha) = rf^*(\alpha)$ e $(id \times f)^*(r \times_1 \{\alpha\}) = id^*(r) \times_1 f^*(\{\alpha\}) =$
$= f^*(r\ \{\alpha\}) = rf^*(\{\alpha\})$.

Demonstração:

Para dar uma estrutura de anel a um grupo abeliano A, basta muni-lo de uma forma bilinear

$A \times A \to A$. $H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R) \to H^*(X \times Y;R)$. Se Y = ponto,

$H^*(X;R) \otimes R \to H^*(X;R)$. A associatividade da estrutura de anel vem do lema 3.17. Comutatividade graduada é garantida pelo lema 3.15 onde T^* toma-se como a identidade. Finalmente $H^*(X;R)$ tem unidade em $H^o(X;R)$.

3.21. Observação

É importante observar que tudo o que foi usado no desenvolvimento dos produtos até aqui tem sido em termos de espaços simples por motivo de clareza; a mesma construção pode ser duplicada usando pares de espaços e homologia relativa e grupos de cohomologia. É importante apontar que neste contexto, o produto cartesiano de pares é outro par dado por $(X,A) \times (Y,B) = (X\times Y, X\times B \cup A\times Y)$ [3].

3.22. Aproximação Diagonal

O instrumento essencial usado para definir o produto "cup" de duas classes de cohomologia é a composição de aplicações de cadeia

$$S_*(X) \xrightarrow{d\#} S_*(X \times X) \xrightarrow{\phi} S_*(X) \otimes S_*(X) .$$

Mais geralmente, suponhamos que $\tau: S_*(X) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(X)$ é uma aplicação de cadeia tal que

(i) $\tau(a) = a \otimes a$ para qualquer 0-simplexo singular a

(ii) τ comuta apropriadamente com homomorfismos induzidos por aplicações de espaços.

Tal τ deve ser homotópica por cadeia a $\phi \circ d_\#$, o que pode ser visto usando o teorema dos modelos acíclicos (ver apêndice). Daí vem que o produto "cup" sobre classes de cohomologia é independente da escolha de τ enquanto que as condições estabelecidas são satisfeitas. Uma aplicação de cadeia τ com estas propriedades é usualmente chamada uma <u>aproximação diagonal</u>.

3.23. <u>Aproximação Diagonal de Alexander-Whitney</u>

Dado um n-simplexo singular $\phi: \sigma^n \rightarrow X$ num espaço X. definimos a i-face frontal ${}_i\phi$, $0 \leqslant i \leqslant n$, como sendo o i-simplexo singular

$$ {}_i\phi\,(t_0,\ldots,t_i) = \phi(t_0,\ldots,t_i,0,\ldots,0) $$

Similarmente seja a j-face posterior ϕ_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, o j-simplexo singular

$$ \phi_j\,(t_0,\ldots,t_j) = \phi(0,\ldots,0,t_0,\ldots,t_j) $$

Então definimos a aplicação de cadeia $\tau: S_*(X) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(X)$ por $\tau(\phi) = \sum\limits_{i+j=n} {}_i\phi \otimes \phi_j$, onde ϕ é um n-simplexo singular em X, como sendo a aproximação diagonal de Alexander-Whitney, que satisfaz (i) e (ii) em 3.22.

3.24. Produto "cup" Usando a Aproximação Diagonal de Alexander-Whitney

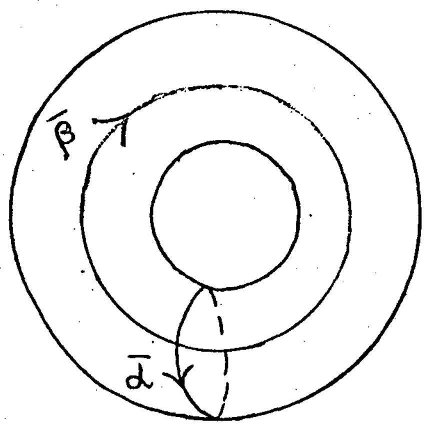
Seja $\alpha \in S^p(X;R)$ e $\beta \in S^q(X;R)$ e ϕ um $(p + q)$-simplexo singular em X. Então $< \alpha \cup \beta, \phi >$ é a imagem da composição

$$\phi \xrightarrow{\tau} \Sigma_i\, \phi \otimes \phi_j \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} \alpha({}_p\phi) \otimes \beta(\phi_q) \xrightarrow{\mu} \alpha({}_p\phi) \,.\, \beta(\phi_q)$$

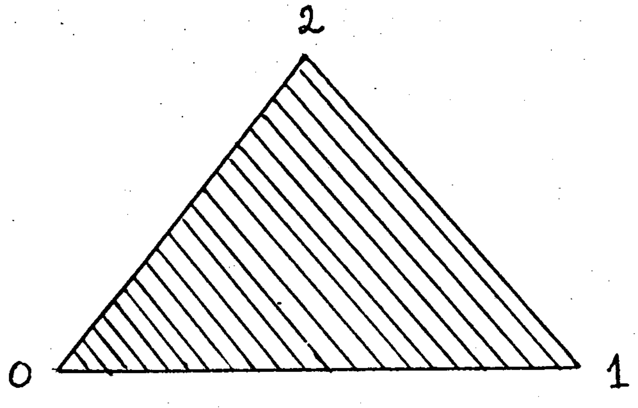
Portanto $< \alpha \cup \beta, \phi > = < \alpha, {}_p\phi > . < \beta, \phi_q >$

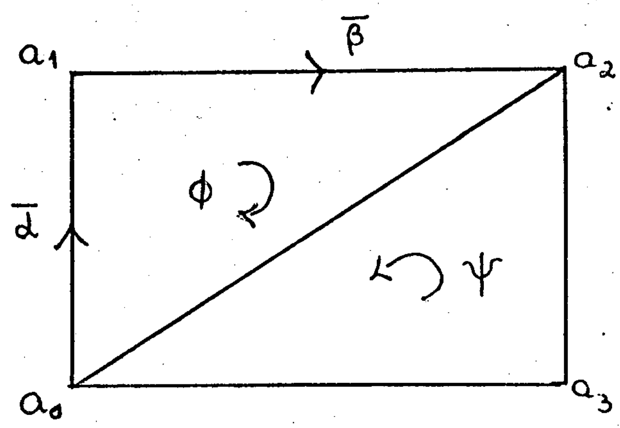
3.25. Cálculo do Anel de Cohomologia do Toro Dois-Dimensional (T_1)

Desejamos calcular o anel de cohomologia do Toro dois dimensional $T_1 = S^1 \times S^1$. Lembremos que $H_1(T_1; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (1.20.2) e seus geradores podem ser representados por $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ como na seguinte figura:



Para $H_2(T_1; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ podemos usar como gerador a 2-cadeia $\phi - \psi$.





onde $\phi(0) = a_o$, $\phi(1) = a_1$, $\phi(2) = a_2$ e $\psi(0) = a_o$, $\psi(1) = a_3$ e $\psi(2) = a_2$. Neste retângulo identificamos os lados opostos como em 1.20.2 para vê-lo como o Toro. Realmente, $\phi - \psi$ é um gerador, isto é, é um ciclo pois tem bordo nulo. Os simplexos singulares ϕ e ψ (assim como foram definidos) levam os vértices do simplexo padrão (0, 1 e 2) nos vértices dos triângulos (a_o, a_1 e a_2) e (a_o, a_2 e a_3).

Usando o teorema do coeficiente universal, Teorema 2-22, veremos que $H^1(T_1; \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}(H_1(T_1; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$. Temos a seqüência exata decomponível

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_o(T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^1((T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H_1(T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0$$

Logo, $H^1(T_1, \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}(H_1(T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_o(T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

Mas $\mathrm{Ext}(H_o(T_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ de onde $H^1(T_1, \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}(H_1(T_1, \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$.

Escolhamos como geradores α, β com $\alpha(\overline{\alpha}) = 1$, $\alpha(\overline{\beta}) = 0$, $\beta(\overline{\alpha}) = 0$ e $\beta(\overline{\beta}) = 1$.

$(\phi - \psi) \in S_2(T_1)$ é um representante do gerador de $H_2(T_1)$. Para saber como $\alpha \cup \beta$ age, basta verificar sua ação em $\phi - \psi$.

$$< \alpha \cup \beta, \phi - \psi > = < \alpha, {}_1\phi > . < \beta, \phi_1 > - < \alpha, {}_1\psi > . < \beta, \psi_1 >$$

$= <\alpha, (0,1)>.<\beta, (1,2)> - <\alpha, (0,1)>.<\beta, (1,2)>$

$= <\alpha, (a_o, a_1)> . <\beta, (a_1, a_2)> - <\alpha, (a_o, a_3)> . <\beta, (a_3, a_2)>$

$= <\alpha, \bar{\alpha}> . <\beta, \bar{\beta}> - <\alpha, \bar{\beta}> . <\beta, \bar{\alpha}>$

$= 1 . 1 - 0 . 0$

$= 1 - 0$

$= 1$

Por outro lado

$< \alpha \cup \alpha, \phi - \psi > = < \alpha, {}_1\phi > \cdot < \alpha, \phi_1 > - < \alpha, {}_1\psi > \cdot < \alpha, \psi_1 >$

$= <\alpha, (0,1)>.<\alpha, (1,2)> - <\alpha, (0,1)>.<\alpha, (1,2)>$

$= <\alpha, (a_o, a_1)> . <\alpha, (a_1, a_2)> - <\alpha, (a_o, a_3)> . \alpha, (a_3, a_2)>$

$= <\alpha, \bar{\alpha}>.<\alpha, \bar{\beta}> - <\alpha, \bar{\beta}>.<\alpha, \bar{\alpha}>$

$= 1 . 0 - 0 . 1$

$= 0 - 0$

$= 0$

Similarmente $< \beta \cup \beta, \phi - \psi > = 0$

Como, pelo teorema 2.22, $H^2(T_1, \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}(H_2(T_1, \mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ agora temos calculado o anel de cohomologia $H^*(T_1, \mathbb{Z})$. Assim $H^*(T_1, \mathbb{Z})$ é a álgebra graduada sobre $\mathbb{Z}$ gerada por elementos α e β de grau 1, sujeitos às relações

$\alpha^2 = 0(< \alpha \cup \alpha, \phi - \psi> = 0)$, $\alpha\beta = - \beta\alpha$ $(< \alpha \cup \beta, \phi - \psi > =$
$= -< \beta \cup \alpha, \phi - \psi >)$

3.26. <u>Definição</u> - Aplicação de Hopf

Seja a aplicação identificação $S^3 \xrightarrow{h} S^3/\sim = \mathbb{C}P(1)$ onde $h(z_1, z_2) = [z_1; z_2]$. Logo $\mathbb{C}P(1)$ é o espaço complexo projetivo 1-dimensional. Notemos que $\mathbb{C}P(1) = S^2$ já que existe um único espaço obtido por adjunção de uma 2-célula a um ponto). A aplicação $h: S^3 \to S^2$ assim obtida, é chamada a aplicação de Hopf e é de importância particular em teoria de homotopia. De forma análoga pode-se obter uma aplicação $h: S^7 \to \mathbb{H}P(1) = S^4$ onde $\mathbb{H}P(1)$ é o espaço quaterniônico projetivo de dimensão um. Existem aplicações de qualquer grau inteiro sobre S^n sempre que $n > 0$. Uma importante propriedade é o resultado teórico de homotopia de Hopf, que é o seguinte: se grau da f é igual ao grau da g então f e g são homotópicas (olhar 1.21d). Assim o grau é um invariante algébrico completo para estudar classes de homotopia de aplicações de S^n em S^n.

3.27. <u>Invariante de Hopf</u>

Suponhamos que $f: S^{2n-1} \to S^n$ é uma aplicação onde $n \geqslant 2$. Associemos com tais aplicações um inteiro $H(f)$, o invariante de Hopf da f. Veremos adiante que tem sentido denominar este inteiro como invariante homotópico de Hopf. (Ver proposição 3.30). Este $H(f)$ pode ser definido usando o produto "cup". Sejam $\{\alpha\}$ e $\{\beta\}$ geradores dos grupos de cohomologia $H^{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ e $H^n(S^n, \mathbb{Z})$, respectivamente, representados por cociclos α e β. Como $\{\beta\} \cup \{\beta\} = \{\beta \cup \beta\} = 0$, o cociclo $\beta \cup \beta$ deve ser um cobordo, isto é, existe uma cocadeia $\gamma \in S^{2n-1}(S^n; \mathbb{Z})$ com $\delta\gamma = \beta \cup \beta$. O cociclo $f\#(\beta) \in S^n(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ é um cobordo pois $H^n(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) = 0$. Vejamos que isto é verdade: $H_n(S^{2n-1}) = 0$ (1.19). Pelo 2.22 temos que

$$H^n(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}(H_n(S^{2n-1}); \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(S^{2n-1}); \mathbb{Z}) .$$

$. \; H_{n-1}(S^{2n-1}) = 0$ (1.19). Logo $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(S^{2n-1}); \mathbb{Z}) =$ $= \mathrm{Ext}(0, \mathbb{Z}) = 0$ (2.18a). Portanto $H^n(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \approx$

$\mathrm{Hom}(H_n(S^{2n-1}); \mathbb{Z}) = 0.$

Então existe uma cocadeia ε em $S^{n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ tal que $\delta\varepsilon = f^{\#}(\beta)$.

Agora, $\varepsilon \cup f^{\#}(\beta)$ e $f^{\#}(\gamma)$ são cocadeias em $S^{2n-1}(S^{2n-1}); \mathbb{Z})$; pois como $\varepsilon \in S^{n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ e $f^{\#}(\beta) \in S^{n}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ então $\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) \in S^{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$. Por outro lado vimos que $\delta\gamma = \beta \cup \beta$ onde $\gamma \in S^{2n-1}(S^{n}; \mathbb{Z})$ então $f^{\#}(\gamma) \in S^{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$. Além disso

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)) &= \delta(\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - \delta(f^{\#}(\gamma))\\ &= \delta(\varepsilon \cup f^{\#}(\beta)) - f^{\#}(\delta(\gamma))\\ &= \delta(\varepsilon \cup \delta\varepsilon) - f^{\#}(\beta \cup \beta)\\ &= \delta(\varepsilon \cup \delta\varepsilon) - f^{\#}(\beta) \cup f^{\#}(\beta) \qquad (1)\end{aligned}$$

Sabemos que (por 3.11)

$\delta(\alpha \times \beta) = (\delta\alpha) \times \beta + (-1)^{p}\, \alpha \times \delta\beta$ com $\alpha \in S^{p}$ e $\beta \in S^{q}$. Então $\delta(\varepsilon \cup \delta\varepsilon) = \delta\varepsilon \cup \delta\varepsilon + (-1)^{r}\, \varepsilon \cup \delta\delta\varepsilon$ onde $r \in \mathbb{Z}$. Como $\delta\delta\varepsilon = 0$ vem $(-1)^{r}\, \varepsilon \cup \delta\delta\varepsilon = 0$ de onde $\delta(\varepsilon \cup \delta\varepsilon) = \delta\varepsilon \cup \delta\varepsilon$. Substituindo este resultado em (1)

$\delta(\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)) = \delta\varepsilon \cup \delta\varepsilon - f^{\#}(\beta) \cup f^{\#}(\beta) = 0$

Assim, definimos $H(f)$ como sendo o inteiro que, quando multiplicado por $\{\alpha\}$ dá a classe de cohomologia de $\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)$.

$$\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} = H(f).\{\alpha\}$$

3.28. <u>Fatos para outra definição de H(f)</u>

Seja $f\colon S^{2n-1} \to S^{n}$ uma aplicação de invariante de Hopf k. Se $\bar{g}\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ e $g\colon S^{n} \to S^{n}$ são aplicações de grau q e p respectivamente, determinamos $H(g\ f)$ e $H(f\ \overline{g})$.

Consideremos as aplicações $S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{g} S^n$.

$H^*(S^n) \xrightarrow{g^*} H^*(S^n) \xrightarrow{f^*} H^*(S^{2n-1})$. Seja $\{\beta\} \in H^*(S^n)$ e $\{\alpha\} \in H^*(S^{2n-1})$. Existe $\gamma \in S^{2n-1}(S^n)$ tal que $\delta\gamma = \beta \cup \beta$ e existe também $\varepsilon \in S^{n-1}(S^{2n-1})$ tal que $\delta\varepsilon = f^{\#}(\beta)$. Seja $\varepsilon' \in S^{n-1}(S^{2n-1})$ tal que $\delta\varepsilon' = f^{\#}g^{\#}(\beta)$. Sabemos que $H(f) = k$, satisfaz:

$$\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} = k\ \{\alpha\}\ .$$

A classe representada por $\{g^{\#}(\beta)\}$ coincide com $p\ \{\beta\}$ onde p é o grau da g. Queremos provar que $H(g(f)) = p^2k$. Sabemos que

$$\{\varepsilon' \cup f^{\#}g^{\#}(\beta) - f^{\#}g^{\#}(\gamma)\} = H(gf)\ \{\alpha\}\ .$$

$(\varepsilon' \cup f^{\#}g^{\#}(\beta) - f^{\#}g^{\#}(\gamma))$ também é um cociclo, portanto representa uma classe de cohomologia

$\delta g^{\#}(\gamma) = g^{\#}\delta(\gamma) = g^{\#}(\beta \cup \beta) = g^{\#}(\beta) \cup g^{\#}(\beta) = p^2(\beta \cup \beta) =$

$= p^2(\delta(\gamma))$ pois $g^{\#}(\beta) = p\{\beta\} = p\,\beta$. Então $\delta g^{\#}(\beta) = \delta p^2\gamma$ e $g^{\#}(\gamma) = p^2\gamma$, a menos de um cobordo. Sabemos que $\delta\varepsilon' = f^{\#}g^{\#}(\beta) =$ $= f^{\#}(p\beta) = pf^{\#}(\beta)$ e $\delta\varepsilon = f^{\#}(\beta)$. Dos dois fatos concluimos que $\delta\varepsilon' = p\delta\varepsilon$, ou seja, $\varepsilon' = p\varepsilon$ + cobordo. Então $f^{\#}g^{\#}(\beta) = pf^{\#}(\beta)$.

Substituindo em $\{\varepsilon' \cup f^{\#}g^{\#}(\beta) - f^{\#}g^{\#}(\gamma) = H(gf)\{\alpha\}$ vem:

$$p^2\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} = H(gf)\ \{\alpha\}$$

$$p^2k\ \{\alpha\} = H(gf)\ \{\alpha\}$$

$$H(gf) = p^2k$$

Vamos mostrar agora que $H(f\ \overline{g}) = qk$. Consideremos

$S^{2n-1} \xrightarrow{\overline{g}} S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$. $H^*(S^n) \xrightarrow{f^*} H^*(S^{2n-1}) \xrightarrow{\overline{g}^*} H^*(S^{2n-1})$

Seja $\delta\varepsilon'' = \bar{g}^{\#}f^{\#}(\beta)$ onde $\varepsilon'' \in S^{n-1}(S^{2n-1})$. Sabemos pela definição de $H(f\,\bar{g})$ que $\{\varepsilon'' \cup \bar{g}^{\#}f^{\#}(\beta) - \bar{g}^{\#}f^{\#}(\gamma)\} = H(f\,\bar{g})\,\{\alpha\}$ (2) e também que $\bar{g}^{\#}(\alpha) = q\alpha$. Então, como $H(f) = k$ satisfaz:

$\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} = k\,\{\alpha\}$ vem $\bar{g}\,\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} =$

$= \bar{g}^{\#}(\varepsilon) \cup \bar{g}^{\#}f^{\#}(\beta) - \bar{g}^{\#}f^{\#}(\gamma)$. Usando cobordo, observa-se que $\delta\bar{g}^{\#}(\varepsilon) = \bar{g}^{\#}(\delta(\varepsilon)) = \bar{g}^{\#}(f^{\#}(\beta))$, $\delta\varepsilon = f^{\#}(\beta)$ e $\delta\varepsilon'' = \bar{g}^{\#}f^{\#}(\beta)$.

Logo $\delta\bar{g}^{\#}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon'')$. Então $\bar{g}^{\#}(\varepsilon) = \varepsilon'' +$ cobordo. Substituindo isto em (2) vem:

$$\{\bar{g}^{\#}(\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma)\} = H(f\,\bar{g})\,\{\alpha\}$$

Como $\bar{g}^{\#}(\alpha) = q\alpha$, então $\bar{g}^{\#}(n\alpha) = q\alpha$, onde $n\alpha$ é múltiplo de α.

Assim temos:

$$q\,\{\varepsilon \cup f^{\#}(\beta) - f^{\#}(\gamma) = H(f\,\bar{g})\,\{\alpha\}$$

$$q\,k\,\{\alpha\} = H(f\,\bar{g})\,\{\alpha\}$$

$$H(f\,\bar{g}) = q\,k$$

Relacionemos agora os graus de g e $\bar{g}$ através do invariante de Hopf. Seja o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "f"'] & S^{2n-1} \arrow[d, "f"] \\ S^{n} \arrow[r, "g"'] & S^{n} \end{tikzcd}$$

onde f tem invariante de Hopf k, g tem grau p e $\bar{g}$ tem grau q.

Sabemos que $H(g\,f) = p^2k$ e $H(f\,\bar{g}) = q\,k$.

Assim, pela comutatividade do diagrama, $H(f\,\bar{g}) = H(g\,f)$ e então. $kq = kp^2$, de onde $p^2 = q$.

De acordo com o que foi desenvolvido até aqui, podemos dar outra definição de $H(f)$.

Relembremos que S^n pode ser visto como um espaço dado por colagem de uma n-célula a um ponto (0-célula). Dada uma aplicação $f: S^{2n-1} \to S^n$ denotemos por S^n_f o espaço obtido por colagem de uma 2n-célula a S^n via f (1.22). Então S^n_f possui três células, de dimensão 0, n e 2n. A cohomologia de S^n_f é dada por

$$H^i\,(S^n_f) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } i = 0,n,2n \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

(Aplicando 1.28 e 2.22).

Denotando por $b \in H^n(S^n_f;\ \mathbb{Z})$ e $a \in H^{2n}(S^n_f;\ \mathbb{Z})$ um par escolhido de geradores, definimos $H(f)$ como sendo o inteiro para o qual $b^2 = H(f).a$ em $H^{2n}(S^n_f;\ \mathbb{Z})$. A fim de mostrar que $H(f)$ é um invariante da classe de homotopia de f, necessitamos do seguinte resultado devido a J.H.C. Whitehead.

3.29. <u>Proposição</u>

Se f_o , $f_1: S^p \to X$ são aplicações homotópicas em um espaço X, então a aplicação identidade de X se estende a uma equivalência de homotopia

$$h: X_{fo} \to X_{f1}$$

<u>Demonstração</u>:

Seja $\{f_t\}$ uma homotopia entre f_o e f_1 e denotemos um elemento de D^{p+1} por θ u, onde $u \in S^p$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Dado um raio num disco colado em X_{fo}, a metade interior deve ser levada sobre o correspondente raio em X_{f1}. Então a metade exterior é usada para traçar, por fora, o caminho de homotopia de $f_1(u)$ em $f_o(u)$. Definimos uma aplicação h por

$$h(x) = x \qquad \text{para } x \in X$$

$$h(\theta u) = 2\,\theta\, u \qquad \text{para } u \in S^p;\ 0 \leq \theta \leq 1/2$$

$$h(\theta u) = f_{2-2\theta}(u) \qquad \text{para } u \in S^p;\ 1/2 \leq \theta \leq 1$$

h é contínua ([12], pg 82). Definindo uma aplicação similar $h': X_{f1} \to X_{fo}$ vemos que as composições h o h' e h' o h são homotópicas às respectivas identidades.

3.30. <u>Proposição</u>

Se $f_o, f_1: S^{2n-1} \to S^n$ são aplicações homotópicas, então $H(f_o) = H(f_1)$.

<u>Demonstração</u>:

Seja $h: S^n_{fo} \to S^n_{f1}$ uma equivalência de homotopia dada na proposição anterior. Se $i_o: (D^{2n}, S^{2n-1}) \to (S^n_{fo}, S^n)$ e $i_1: (D^{2n}, S^{2n-1}) \to (S^n_{f1}, S^n)$ denotam os homeomorfismos relativos correspondendo a f_o e f_1, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(D^{2n}, S^{2n-1}) \arrow[rr, "i_o"] \arrow[dr, "i_1"'] & & (S^n_{fo}, S^n) \arrow[dl, "h"] \\
& (S^n_{f1}, S^n) &
\end{tikzcd}$$

é comutativo em homotopia. Esta homotopia é definida por $g_t(\theta\ u) = h \circ i_o\ ((1 - 1/2\ t)\ \theta\ u)$. Isto implica que o diagrama de grupos de cohomologia

$$\begin{tikzcd} H^{2n}(S^n_{f1}, S^n) \arrow[rr, "h^*"] \arrow[dr, "i_i^*"'] & & H^{2n}(S^n_{fo}, S^n) \arrow[dl, "i_o^*"] \\ & H^{2n}(D^{2n}, S^{2n-1}) & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto, a escolha de uma orientação para D^{2n} ditada em compatibilidade com a escolha de geradores $\bar{a}_1 \in H^{2n}(S^n_{f1}, S^n)$ e $\bar{a}_o \in H^{2n}(S^n_{fo}, S^n)$ e correspondentes escolhas de geradores $a_1 \in H^{2n}(S^n_{f1})$ e $a_o \in H^{2n}(S^n_{fo})$ tal que $h^*(a_1) = a_o$. Além disso, se $b_1 \in H^n(S^n_{f1})$ e $b_o \in H^n(S^n_{fo})$ são geradores corres - pondendo a uma orientação escolhida de D^n, então como h é a identidade sobre S^n, segue que $h^*(b_1) = b_o$. Portanto

$$\begin{aligned} H(f_o)\ .\ a_o = b_o^2 &= (h^*(b_1))^2 \\ &= h^*(b_1^2) \\ &= h^*(H(f_1)\ .\ a_1)) \\ &= H(f_1)\ .\ h^*(a_1) \\ &= H(f_1)\ .\ a_o \end{aligned}$$

e $$H(f_o) = H(f_1).$$

3.31. <u>Observação</u>

Convém observar que, se n é ímpar, a comutatividade do produto "cup" implica que $b^2 = -b^2$, de modo que $H(f) = 0$. Portanto, o invariante de Hopf pode ser diferente de zero somente para aplicações $f\colon S^{4n-1} \to S^{2n}$.

3.32. <u>Proposição</u>

Para qualquer $n > 0$, existem aplicações de S^{4n-1} a S^{2n}, de invariante de Hopf par arbitrário [1].

3.33. <u>Teorema</u>

Se existe uma aplicação $f\colon S^{2n-1} \to S^{n}$ de invariante de Hopf ímpar, então n é uma potência de 2 [5].

3.34. <u>Observação</u>

As aplicações seguintes são aplicações padrões de invariantes de Hopf um, e seus respectivos espaços de colagem:

$S^3 \to S^2$ espaço complexo projetivo

$S^7 \to S^4$ espaço quaterniônico projetivo

$S^{15} \to S^8$ espaço de Cayley projetivo

3.35. <u>Comentários</u>

Existe um teorema importantíssimo devido a Adams [9] que diz que para $n \neq 1, 2$ ou 4 não existe nenhuma aplicação $f\colon S^{4n-1} \to S^{2n}$ de invariante de Hopf ímpar. A conseqüência importante deste teorema é que somente os valores de n para os quais $\mathbb{R}^n$ leva a estrutura de uma álgebra de divisão real são:

n = 1 (número real), n = 2 (número complexo) e n = 4 (número quaterniônico) ([10], pg. 320).

Como uma referência para informação sobre o invariante de Hopf, recomendamos Hu [11].

Citamos um resultado posterior: duas aplicações de S^3 em S^2 são homotópicas se e somente se elas têm o mesmo invariante de Hopf.

APÊNDICE

1. GRUPO ABELIANO LIVRE

Um grupo abeliano G é livre se existe um subconjunto $A \subseteq G$ tal que todo elemento g em G tem uma única representação $g = \sum_{x \in A} n_x . x$, onde n_x é um inteiro e igual a zero para todos menos um número finito de x em A. O conjunto A é uma base para G.

2. GRUPO (ABELIANO) GRADUADO G

Um grupo (abeliano) graduado G é uma coleção de grupos abelianos $\{G_i\}$ indexados por inteiros com operação componente por componente. Se G e G' são grupos graduados, um homomorfismo $f: G \to G'$ é uma coleção de homomorfismos $\{f_i\}$ onde $f_i: G_i \to G'_{i+r}$ para algum r inteiro fixo. r é dito grau da f. Um subgrupo $H \subseteq G$ de um grupo graduado é um grupo graduado $\{H_i\}$ onde H_i é um subconjunto de G_i. Um grupo quociente G/H é o grupo graduado $\{G_i/H_i\}$.

3. ESPAÇO CONEXO POR CAMINHOS

Um espaço X é conexo por caminhos se dados $x, y, \in X$, existe uma função contínua $\psi: [0,1] \to X$ tal que $\psi(0) = x$ e $\psi(1) = y$.

4. ESPAÇO CONTRÁTIL

Um espaço é contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

5. RETRATO DEFORMADO

Seja $A \subset X$. A é um retrato de X se existe uma aplicação contínua $r: X \to A$ tal que $r \circ i = id_A$. r é uma retração de X sobre A. A é um retrato de deformação de X se existe uma retração $r: X \to A$ homotópica a identidade, ou seja, existe uma retração $r: X \to A$ e uma homotopia $f: X \times I \to X$ tal que $f(x,0) = x$, para $x \in X$; $f(x,1) = r(x)$ para $x \in X$ e $f(a,t) = a$ para $a \in A$ e $t \in I$.

6. CATEGORIA

Uma categoria $\mathcal{C}$ é constituida de

(a) uma classe de objetos

(b) para todo par ordenado de objetos um conjunto $hom(X,Y)$, de morfismos (vistos como funções com domínio X e contradomínio Y) tal que sempre que $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são morfismos, existe um elemento $g \circ f$ em $hom(X,Z)$.

Estes devem satisfazer os seguintes axiomas:

1. Associatividade: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2. Identidade: para todo objeto Y existe um elemento $1_Y \in hom(Y,Y)$ tal que se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são morfismos, então $1_Y \circ f = f$ e $g \circ 1_Y = g$.

EXEMPLOS

(i) A categoria cujos objetos são conjuntos e cujos morfismos são funções.

(ii) A categoria de grupos abelianos e homomorfismos.

(iii) A categoria de espaços topológicos e funções contínuas.

(iv) A categoria de pares de espaços e aplicações de pares.

(v) A categoria de complexos de cadeia e aplicações de cadeia.

7. FUNTOR COVARIANTE

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, um funtor covariante $T: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função que associa a cada objeto X em $\mathcal{C}$ um objeto T(X) em $\mathcal{D}$ e a cada morfismo $f: X \to Y$ um morfismo $T(f): T(X) \to T(Y)$ tal que:

(a) $T(1_Y) = 1_{T(Y)}$

(b) $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$

EXEMPLO

A correspondência $(X,A) \to S_*(X,A)$

$[f:(X,A) \to (Y,B)] \to |f_{\#}:S_*(X,A) \to S_*(Y,B)|$ é um funtor covariante da categoria (iv) acima à categoria (v).

8. FUNTOR CONTRAVARIANTE

Um funtor K é contravariante se para $f: X \to Y$,

$K(f): K(Y) \to K(X)$ (a') $K(1_Y) = 1_{K(Y)}$

(b') $K(f \circ g) = K(g) \circ K(f)$

EXEMPLO

A correspondência $X \to H^n(X;G)$ e $[f\colon X \to Y] \to$ $\to [f^*\colon H^n(Y;G) \to H^n(X;G)]$ é um funtor contravariante da categoria (iii) à categoria (ii).

9. TRANSFORMAÇÃO NATURAL

Suponha que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são categorias e $T_1, T_2\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ são funtores covariantes. Uma transformação natural $\tau\colon T_1 \to T_2$ é uma função que associa a cada objeto X em $\mathscr{C}$ um morfismo $\tau(X)\colon T_1(X) \to T_2(X)$ em $\mathscr{D}$ tal que a comutatividade vale em

$$\begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[r, "T_1(f)"] \arrow[d] & T_1(Y) \arrow[d] \\ T_2(X) \arrow[r, "T_2(f)"] & T_2(Y) \end{tikzcd}$$

sempre que $f\colon X \to Y$ é um morfismo em $\mathscr{C}$.

10. MODELOS

Fixemos uma categoria $\mathscr{C}$. Suponhamos que $\mathscr{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma coleção específica de objetos em $\mathscr{C}$. Os M_α serão chamados os modelos de $\mathscr{C}$. Um funtor T de $\mathscr{C}$ na categoria de grupos abelianos e homomorfismos é livre com respeito aos modelos de $\mathscr{M}$ se existe um elemento $e_\alpha \in T(M_\alpha)$ para cada α tal que para todo X em $\mathscr{C}$ o conjunto

$$\{\, T(f)\,(e_\alpha) \mid \alpha \in A,\ f \in \hom(M_\alpha, X) \,\}$$

é uma base para T(X) como grupo abeliano livre. Um funtor T de $\mathcal{C}$ na categoria de grupos abelianos graduados é livre com respeito aos modelos de $\mathcal{M}$ se cada T_n é livre, onde T_n é a n-ésima componente de T.

11. TEOREMA DOS MODELOS ACÍCLICOS

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com modelos $\mathcal{M}$ e T, T' funtores covariantes de $\mathcal{C}$ na categoria de complexos de cadeia e aplicações de cadeia tal que $T_n = 0 = T'_n$ para $n < 0$ e T é livre com os modelos de $\mathcal{M}$. Suponhamos ainda que os modelos de $\mathcal{M}$ sejam acíclicos com respeito a T', isto é, que $H_i(T'(M_\alpha)) = 0$ para $i > 0$ e $M_\alpha \in \mathcal{M}$. Se existe uma transformação natural

$$\Phi: H_0(T) \to H_0(T')$$

então existe uma transformação natural ϕ: T → T' que induz Φ, e além disso qualquer par de tais ϕ são naturalmente homotópicas por cadeias. ([1], pg. 105)

12. PROPOSIÇÃO

Suponhamos que X;Y e W são espaços de Hausdorff compactos e A é um subconjunto fechado de X. Seja f: A → Y uma aplicação contínua e g: $X \cup Y \to W$ contínua e sobrejetiva. Se para cada $w \in W$, $g^{-1}(w)$ é outro ponto simples de X-A ou a união de um simples ponto $y \in Y$ junto com $f^{-1}(y)$ em A, então W é homeomórfico a $X \cup_f Y$ ([4]).

REFERÊNCIAS

[1] VICK, James W. Homology Theory. New York, Academic Press, 1972.

[2] HILTON, P. WU, Yel-Chiang. Curso de Álgebra Moderna. Barcelona Editorial Revertê, S.A., 1977.

[3] SPANIER, Edwin H. Algebraic Topology. New York, McGraw-Hill, 1966.

[4] GREENBERG, Marvin J. Lectures on Algebraic Topology. Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, 1967.

[5] STEENROD, N.E. Cohomology Operations, Annals of Mathematics Studies Princeton, Princeton University Press, Number 50, 1962.

[6] MILNOR, J.W. Lectures on characteristic classes. Mimeographed notes, Princeton, Princeton University Press, 1957.

[7] STEENROD, N and EPSTEIN, D.B.A.. Cohomology Operations, Princeton, Princeton University Press, 1962.

[8] MOSHER, R.E, and TANGORA, M.C. Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory. New York, Harper, 1968.

[9] ADAMS, J.F. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. Ann. of. Math. 72, 20-104, 1960.

[10] EILENBERG, S and STEENROD, N.E. Foundations of Algebraic Topology. Princeton, Princeton Univ. Press, 1952.

[11] HU, S.T. Homotopy Theory. New York, Academic Press, 1959.

[12] DUGUNDJI, James. Topology. Boston, Allyn and Bacon, Inc. 1966.

[13] HOPF, H. Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., 25 (1935) pp. 427-440.