Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas
Presidente

I. J. Taneja

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Prof. Dr. Teófilo Abuabara Saad

UM FUNCIONAL DE LIAPUNOV PARA UMA EQUAÇÃO MATRICIAL FUNCIONAL DIFERENÇA-DIFERENCIAL PERTURBADA

SEVERIANO VOLPATO

Junho - 1980

A minha esposa e aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Teófilo Abuabara Saad, pela orientação segura e espontânea que nos tem dedicado na elaboração final deste trabalho.

Aos colegas, pelo apoio e colaboração.

À Universidade Federal de Santa Catarina, pelos meios fornecidos para a realização deste trabalho.

HOMENAGEM PÓSTUMA

Ao saudoso Professor Doutor Walter de Bona Castelan, idealizador e orientador deste trabalho, que sem medir esforços, se dedicou e acompanhou todos os passos do desenvolvimento, dando-nos segurança, apoio e exemplo de persistência e seriedade na pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho é construído um funcional Quadrático positivo definido, um funcional de Liapunov, que produz condições necessária e suficiente para a estabilidade assintótica das soluções da equação matricial funcional diferença-diferencial perturbada $\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,X(t - r) + f(X(t))$, com $\|f(X(t))\| \leq \leq k \, \| X(t) \|$, $k \geq 1$.

ABSTRACT

This paper constructs a quadratic positive definite functional, a Liapunov Functional, that yields necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of the solutions of the matrix difference-differential equation $\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,X(t-r) + f(X(t))$, with $\|f(X(t))\| \leq k\,\|X(t)\|$, $k \geq 1$.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Consideremos a Equação Matricial Funcional Diferença-Diferencial

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,X(t-r);\, r \geq 0, t > 0 \qquad (1)$$

onde $X(t)$ é uma função vetorial de t com valores em $\mathbb{R}^n$ e A e B são matrizes constantes de ordem $n \times n$.

INFANTE E CASTELAN [1], construiram um Funcional de Liapunov que produz condições necessária e suficiente de estabilidade assintótica das soluções da equação (1).

Neste trabalho, (capítulo II) é construído um Funcional de Liapunov com a mesma estrutura do construído em [1] para garantir condições necessária e suficiente de estabilidade assintótica das soluções de Equação Matricial Funcional Diferença-Diferencial com Perturbação,

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-r) + f(X(t)) \qquad (2)$$

onde $f(X(t))$ é uma função contínua definida em algum conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com imagem em $\mathbb{R}^n$ e,

$$\|f(X(t))\| \leq k\,\|X(t)\| \quad , k \geq 1.$$

No capítulo I, daremos alguns resultados básicos sobre teoria de equações diferenciais funcionais, os quais serão utilizados no desenvolvimento de nosso trabalho.

CAPÍTULO I

EQUAÇÃO MATRICIAL FUNCIONAL DIFERENÇA-DIFERENCIAL PERTURBADA

Definição:

Denotamos por $L_2([a,b], \mathbb{R}^n)$ o Espaço de Hilbert das funções de quadrado (Lebesgue) integráveis definidas em $[a,b]$ com valores em $\mathbb{R}^n$.

Consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}^n \times L_2([-r,0], \mathbb{R}^n) \quad , \; r \geq 0,$$

munido do produto interno

$$<u_1, u_2> = v_1^T \; v_2 + \int_{-r}^{0} \phi_1^T(\theta)\phi_2(\theta)\, d\theta$$

onde $u_i = (v_i \, , \phi_i) \in \mathcal{H}$, para $i = 1, 2$, v^T representa o vetor transposto de v.

A norma natural, induzida por este produto interno é a definida por:

$$\|(u \, , \phi)\|^2 = v^T \, v + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, \phi(\theta)\, d\theta \; .$$

Dado $X: [-r \, , \infty) \to \mathbb{R}^n$, e para $t \geq 0$ denotaremos por $X_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ a função definida por

$$X_t(\theta) = X(t+\theta) \; , \; -r \leq \theta \leq 0$$

Uma Equação Matricial Funcional Diferença-Diferencial com Perturbação é uma relação da forma

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,X(t-r) + f(X(t)) \qquad \text{(I-1)}$$

onde A e B são matrizes $n \times n$, $r \geq 0$, f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, juntamente com as condições iniciais

$$X_0\ (0) = \xi\ ,\ X_0 = \phi \qquad (I.2)$$

onde $(\xi, \phi) \in \mathcal{H}$.

Uma solução para a equação (I.1) é, para cada $t > 0$, uma função $X \in L_2([-r, t], R^n)$ tal que X é absolutamente contínua (A.C.) para $t \geq 0$, satisfazendo (I.1) em quase toda parte do intervalo $[0, t]$ e ainda $X(0) = \xi$ e $X(\theta) = \phi(\theta)$ para quase todo $\theta \in [-r, 0]$.

Em [2] e [3] é provado a existência e unicidade das soluções definidas em $[-r, \infty)$, da equação (I.1) com condições iniciais (I.2) quando $f(X(t)) = 0$.

Ainda, se $f(X(t)) = 0$, se ψ é uma função em $\mathcal{H}$ e $X(\psi)$ é a única solução da equação (I.1) com a função inicial ψ em zero, o operador solução $T(t): \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$X_t\ (\psi) = T\ (t)\ \psi$$

que satisfaz as seguintes condições [3]:

a) A família $\{T(t): t \geq 0\}$ é um semigrupo de transformações lineares, isto é,

$T(t + s) = T(t)\ T(s)$ para todo $t \geq 0$, $s \geq 0$.

b) $T(t)$ é limitado para cada $t \geq 0$, $T(0) = I$ e $T(t)$ é fortemente contínuo em $[0, \infty]$, isto é, $\lim\limits_{s \to t} \|T(t)\ \psi - T(s)\psi\|_{\mathcal{H}} = 0$, para todo $t \geq 0$, ψ em $\mathcal{H}$, visto que $\|T\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ espaço de Banach.

c) O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ da família de transformações $T(t)$, $t \geq 0$ definido por $X_t(\psi) = T(t)\psi$ é dado por

$$\mathcal{A}\ \psi\ (\theta) = \begin{cases} d\ \psi\ (\theta)/\ d\theta & -r \leq \theta < 0 \\ L\ (\psi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\psi\ (\theta)\theta = 0. \end{cases}$$

d) O domínio do gerador $\mathcal{A}$, ($\mathcal{D}(\mathcal{A})$) é denso em $\mathcal{H}$, e para cada ψ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\frac{d}{dt}\left[T(t)\ \psi\right] = T(t)\,\mathcal{A}\,\psi = \mathcal{A}\,T(t)\ \psi .$$

e) Se $T(t)$, $t \geq 0$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores de um espaço de Banach B em si mesmo, se para algum $s > 0$, o raio espectral $\rho = \rho_{t(s)} \neq 0$ e $\beta s = \log \rho$ então, para cada $\gamma > 0$ existe constante $K(\gamma) \geq 1$ tal que

$$\| T(t)\psi \| \leq K(\gamma)\ e^{(\beta+\gamma)t}\ \|\psi\|$$

para todo $t \geq 0$, ψ em B.

Nestas condições o problema de valor inicial (I.1) - (I.2) pode ser reescrito na forma,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_t\ (0) \\ \\ X_t \end{bmatrix} = \mathcal{A}\begin{bmatrix} X_t\ (0) \\ \\ X_t \end{bmatrix} \qquad (I.3)$$

$$(X_0\ (0)\ ,\ X_0\ ) = (\xi\ ,\ \phi\ ) \in \mathcal{H} \qquad (I.4)$$

onde $\mathcal{A}$ é um operador definido por

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} X_t\ (\theta) \\ \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_t\ (0)\ +\ BX_t\ (-r) & \\ \\ \dfrac{\partial X_t\ (\theta)}{\partial\ \theta}\ , & -r \leq \theta \leq 0 \end{bmatrix}$$

cujo domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é um sub-conjunto denso de $\mathcal{H}$, definido por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\xi,\ \phi) \in \mathcal{H} /\ \phi \text{ é A.C. em } [-r,\ 0],$$
$$\phi' \in L_2\ ([-\ r,\ 0],\ \mathbb{R}^n), \phi(0) = \xi\}$$

Este operador $\mathcal{A}$ é o gerador do Co-semigrupo $\mathcal{S}(t)$, onde $\mathcal{S}(t): \mathcal{H} - \mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{S}(t) \ (\xi, \phi) = (X(t), X_t)$$

É provado em [2] e [3] que, existe constante γ tal que o espectro de $\mathcal{A}$ está no semiplano esquerdo Re $(\lambda) \leq \gamma$, e que da proposição e) para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \geq 1$ tal que

$$\| \mathcal{S}(t) \|_{(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq K \ e^{(\gamma + \varepsilon)t} \qquad (I.5),$$

o espectro de $\mathcal{A}$ consiste dos números complexos λ que satisfazem a equação característica

$$\det \left[\lambda I - A - B e^{-\lambda r} \right] = 0 \qquad (I.6)$$

Uma representação da solução de (I.1) é dada para todo $t > 0$, $u \geq 0$, $f(X(t)) = 0$ por, [3] ,

$$Y_{t+u} (0) = S(u) \ Y_t(0) + \int_{-r}^{0} S(u - \alpha - r) BY_t(\alpha) d\alpha \quad (I.7)$$

onde a matriz S é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} S(t) = S(t) \ A + S(t - r) \ B \\ \\ S(0) = I, \quad S(t) = 0 \text{ para } t < 0. \end{cases} \qquad (I.8)$$

O resultado principal deste trabalho é obtido com o auxílio do seguinte teorema clássico de estabilidade segundo Liapunov, para as equações diferenciais funcionais:

Teorema I:

"Suponha $f : \mathbb{R}^n \times C \to \mathbb{R}^n$, que leva $R \times$(limitado de C) em limitado de $\mathbb{R}^n$, e $u, v, w: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funções contínuas, não decrescentes, $u(s)$ e $v(s)$ positivas para $s > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$, $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Se existir uma função contínua $V: \mathbb{R} \times C \to R$ tal que

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|)$$

e

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$$

então a solução $X = 0$ da equação $\dot{X}(t) = f(t, X_t)$ é uniformemente estável. Se $W(s) > 0$ para $s > 0$ então $X = 0$ é uniformente e assintoticamente estável". (A prova deste teorema encontra-se em [3]).

CAPÍTULO II

UM FUNCIONAL DE LIAPUNOV PARA UMA EQUAÇÃO MATRICIAL FUNCIONAL DIFERENÇA-DIFERENCIAL PERTURBADA

Neste capítulo II faremos a prova do teorema que dá condições necessária e suficiente para estabilidade assintótica da solução da Equação (I.1) - (I.2) , utilizando o teorema I.

Associado com a equação Matricial Funcional Diferença-Diferencial (I.1) - (I.2), consideremos a forma quadrática Simétrica $V: \mathcal{H} \to R$ definida por

$$V(\xi, \phi) = \xi^T M\xi + e^{\delta r} \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta) R\, e^{2\delta\theta} \phi(\theta) d\theta$$

$$+ \xi^T Q(0)\xi + 2\xi^T \int_{-r}^{0} Q(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)} B\phi(\alpha) d\alpha \qquad \text{(II.1)}$$

$$+ 2 \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} \phi^T(\alpha)\, B^T\, Q(\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\phi(\beta) d\beta\, d\alpha$$

onde δ é número real, M, R são matrizes reais constantes positivas definidas e $Q(\alpha)$ é uma função matricial continuamente diferenciável para $0 \leq \alpha \leq r$ que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Q'(\alpha) = (A^T + \delta I)\, Q(\alpha) + e^{\delta r} B^T Q^T(r-\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq r \\ Q(0) = Q^T(0) = Q_0 \end{cases} \qquad \text{(II.2)}$$

onde Q_0 é uma Matriz simétrica, mas arbitrária.

A avaliação do funcional de Liapunov (II.1) que é Frechet diferenciável ao longo das soluções das equações (I.3) - (I.4) com condições iniciais em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ resulta uma função do tempo t que denotaremos por

$$V(t) = V(X_t(0), X_t)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V(t) = V(X_t(0), X_t) &= X_t^T(0)\, M\, X_t(0) + \\ &+ e^{\delta r} \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta)\, R\, e^{2\delta\theta}\, X_t(\theta)\, d\theta \qquad \text{(II.3)} \\ &+ X_t^T(0)\, Q(0)\, X_t(0) + 2\, X_t^T(0) \int_{-r}^{0} Q(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)} B X_t(\alpha)\, d\alpha \\ &+ 2 \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T(\alpha)\, B^T Q(\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\, X_t(\beta)\, d\beta\, d\alpha. \end{aligned}$$

Teorema II:

"Consideremos a Equação Matricial Funcional Diferença-Diferencial Perturbada

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B\, X(t-r) + f(X(t))$$

com $\|f(X(t))\| \leq k\, \|X(t)\|$, $k \geq 1$, e o funcional de Liapunov V dado em (II.1).

Se, $\gamma = \max\{ \operatorname{Re}\lambda \mid \det[\lambda I - A - B\, e^{-\lambda r}]=0\}$ e $\varepsilon > 0$, então existem matrizes constantes positivas definidas M e R e uma matriz diferencial $Q(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq r$, com $Q(0) = Q^T(0)$ tal que o Funcional V é positivo definido, limitado superiormente e $\dot{V} \leq 2\ell\,(\gamma + \varepsilon)V, \ell > 0$."

É nosso objetivo mostrar que, através do funcional (II.1) e de sua derivada $\dot{V}(t)$ é possível estimar a razão de crescimento e decrescimento das soluções da equação Diferencial Funcional (I.1).

Mais especificamente, como conseqüência do teorema enunciado no capítulo I, para isto, se

$$\gamma = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \,/\, \det[\lambda I - A - B e^{-\lambda r}] = 0\},$$

devemos provar que $\forall\, \varepsilon > 0$ e $-\delta = \gamma + 2\varepsilon$ é possível escolher matrizes M, R e $Q(\alpha)$ satisfazendo (II.2) para o qual existe constantes C_1 e C_2 positivas e tais que

$$C_1 \,\|(\xi,\ \phi)\|^2_{\mathcal{H}} \leq V(\xi,\ \phi) \leq C_2 \,\|(\xi,\ \phi)\|^2_{\mathcal{H}} \qquad (II.4)$$

e

$$\dot{V}(\xi,\ \phi) \leq -2\,\delta\ell\, V(\xi,\ \phi)\ ,\ell > 0 \qquad (II.5)$$

e destes resultados segue que $\{V(\xi,\ \phi)\}1/2 = |||\xi,\ \phi|||_{\mathcal{H}}$ é uma norma equivalente à norma original em $\mathcal{H}$ e que nesta norma

$$|||(X_t\ (0),\ X_t)|||_{\mathcal{H}} \leq |||(X_0\ (0),\ X_0)|||_{\mathcal{H}}\ e^{-\delta\ t}$$

ou

$$\|(X_t\ (0)\ ,\ X_t)\|_{\mathcal{H}} \leq \left\{\frac{C_2}{C_1}\right\}^{1/2} \|(X_0(0),\ X_0)\|_{\mathcal{H}}\, e^{-\delta t}$$

Inicialmente consideremos uma escolha apropriada para a matriz $Q(\alpha)$ solução da equação (II.2) para $0 \leq \alpha \leq r$. Em [4] é provada a existência e unicidade das soluções de (II.2) e também que o espaço vetorial linear de todas as soluções desta equação tem dimensão n^2. Com efeito, introduzindo a notação

$$Q(\alpha) = (q_{ij}(\alpha)) = \begin{bmatrix} q_{1*}(\alpha) \\ \vdots \\ q_{n*}(\alpha) \end{bmatrix} = \left[q_{*1}(\alpha), \dots, q_{*n}(\alpha)\right]$$

onde $q_{i*}(\alpha)$ e $q_{*j}(\alpha)$ são, respectivamente, a i - ésima linha e j - ésima coluna de $Q(\alpha)$, definindo o n^2-vetor.

$$q(\alpha) = (q_{1*}(\alpha), \dots, q_{n*}(\alpha))^T$$

e definindo a matriz $S(\alpha) = Q^T(r - \alpha)$, a equação (II.2) se reduz, usando o produto de Kronecker (ou produto direto) de duas matrizes, a um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem $2n^2$,

$$\frac{d}{d\alpha} \begin{bmatrix} q(\alpha) \\ \\ s(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+\delta I)^T \otimes I & e^{\delta r} B^T \otimes I \\ \\ -I \otimes e^{\delta r} B^T & -I \otimes (A+\delta I)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(\alpha) \\ \\ s(\alpha) \end{bmatrix} \tag{II.6}$$

com a condição auxiliar

$$q\left(\frac{r}{2}\right) = \left[f_{1*}, \dots, f_{n*}\right]^T, \quad s\left(\frac{r}{2}\right) = \left[f_{*1}^T, \dots f_{*n}^T\right]^T \tag{II.7}$$

onde F é uma matriz $n \times n$ arbitrária. A solução de (II.6) sujeita a (II.7), produz soluções $Q(\alpha)$ com n^2 parâmetros que podem sempre ser escolhidos para satisfazer condição arbitrária do tipo $Q(0) = Q(0)^T = Q_0$.

Associada a equação (II.2) está uma integral cuja estrutura é similar para equação diferencial ordinária. Com efeito, seja W uma matriz simétrica e seja $S(t)$ a solução da equação (I.8).

Consideremos a expressão

$$\tilde{Q}(\alpha) = \int_0^{\infty} S^T(u)\ e^{\delta u}\ W\ S(u-\alpha)\ e^{\delta(u-\alpha)} du \qquad \text{(II.8)}$$

Assim para cada $\varepsilon > 0$, $\| S(t) \| \leq \tilde{K}\ e^{(\gamma+\varepsilon)t}$ para algum $\tilde{K} \geq 1$ e $\delta = -\gamma - 2\varepsilon$, esta integral converge, com efeito

$$\left\| \int_0^{\infty} S^T(u)\ e^{\delta u}\ W\ S(u-\alpha)\ e^{\delta(u-\alpha)}\ du \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} \| S^T(u)\ e^{\delta u}\ W\ S(u-\alpha)\ e^{\delta(u-\alpha)} \| . du =$$

$$= \int_0^{\infty} \| S^T(u) \| .\ e^{\delta u}\ \| W \| . \| S(u-\alpha) \| .\ e^{\delta(u-\alpha)} du \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} \tilde{K}\ e^{(\gamma+\varepsilon)u} .\ e^{\delta u} .\ \| W \| \tilde{K}\ e^{(\gamma+\varepsilon)\ (u-\alpha)} .\ e^{\delta(u-\alpha)} du =$$

$$= \| W \|\ \tilde{K}^2 \int_0^{\infty} e^{(\alpha - 2u)\varepsilon}\ du = \frac{\| W \|\ \tilde{K}^2\ e^{\alpha}}{2\varepsilon}$$

Por outro lado, segue da definição de $\tilde{Q}(\alpha)$ que

$\tilde{Q}(\alpha) = \tilde{Q}(-\alpha)$, $\tilde{Q}(0) = \tilde{Q}^T(0)$ e dado que $S(t)$ satisfaz (I.8), que:

$$\tilde{Q}'(\alpha) = -\tilde{Q}(\alpha)(A + \delta I) - \tilde{Q}(\alpha+r)\, e^{\delta r} B - S^T(\alpha)\, e^{\delta\alpha} W.$$

como $\tilde{Q}'(\alpha) = \dfrac{d}{d\alpha}\left[\tilde{Q}^T(-\alpha)\right]$ para $\alpha \neq 0$, temos também que

$$\tilde{Q}'(\alpha) = (A+\delta I)^T \tilde{Q}(\alpha) + B^T e^{\delta r} \tilde{Q}^T(r-\alpha) + S^T(-\alpha)\, e^{-\delta\alpha} W.$$

destas relações acima, segue que para $\alpha > 0$, $S(-\alpha) = 0$ que $\tilde{Q}(\alpha)$ satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{Q}'(\alpha) = (A^T + \delta I)\, \tilde{Q}(\alpha) + B^T e^{\delta r} \tilde{Q}^T(r-\alpha) \quad 0 \le \alpha \le r \\ \tilde{Q}^T(0) = \tilde{Q}(0) = \int_0^\infty S^T(u)\, e^{\delta u} W\, e^{\delta u} W\, S(u)\, e^{\delta u}\, du \end{cases} \qquad \text{(II.9)}$$

e dada a continuidade da função matricial $\tilde{Q}(\alpha)$,

$$\tilde{Q}'(0) + \tilde{Q}'^T(0) = (A^T + \delta I)\, \tilde{Q}(0) + \tilde{Q}(0)(A + \delta I) + \qquad \text{(II.10)}$$
$$+ B^T e^{\delta r} \tilde{Q}^T(r) + \tilde{Q}(r)\, e^{\delta r} B = -S^T(0) W = -W$$

Estes resultados e a unicidade das soluções de (II.2) provam que $\tilde{Q}(\alpha)$, dada em (II.8) é a única solução de (II.2) com condição inicial dada pela segunda igualdade de (II.9).

Vê-se que para cada matriz simétrica W positiva definida corresponde uma $\tilde{Q}(\alpha)$ definida por (II.8) que é a única solução de (II.2) com a condição inicial $\tilde{Q}(0) = \tilde{Q}(0)^T = \int_0^\infty S^T(u)\, e^{\delta u} W\, S(u)\, e^{\delta u} du$ que é positiva definida. Reciprocamente para cada

$Q(0) = Q^T(0) = Q_0$, a única solução de (II.2) produz uma função matricial diferencial $Q(\alpha)$ que por (II.10), define uma única matriz simétrica W. Estas observações mostram que a aplicação $W \to \tilde{Q}(0)$ definida por $\tilde{Q}(0) = \int_0^\infty S^T(u)\, e^{\delta u}\, W\, S(u)\, e^{\delta u}\, du$ é uma aplicação do espaço das matrizes simétricas $n \times n$, um por um e sobre, e leva uma matriz positiva definida W numa matriz positiva definida $\tilde{Q}(0)$.

Com esta caracterização particular da função matricial $\tilde{Q}(\alpha)$ é possível dar uma forma especial ao Funcional de Liapunov (II.1). Pois, substituindo (II.8) em (II.1) por $Q(\alpha)$, produz

$$V(\xi, \phi) = \xi^T M \xi + e^{\delta r} \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, R\, e^{2\delta\theta} \phi(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int_0^\infty (\{S(u)\xi + \int_{-r}^{0} S(u-\alpha-r)\, B\, \phi(\alpha)\, d\alpha\}^T) \,.$$

$$.(W e^{2\delta u}\{S(u)\xi + \int_{-r}^{0} S(u-\alpha-r)\, B\, \phi(\alpha)\, d\alpha\})\, du.$$

Este funcional analisado sobre as soluções da Equação (I.1) e usando (I.7), temos:

$$V(X_t(0), X_t) = X_t^T(0) M X_t(0) + e^{\delta r} \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta) R\, e^{2\delta\theta} X_t(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int_0^\infty Y_{t+u}(0)\, W\, e^{2\delta u}\, Y_{t+u}(0)\, du \qquad \text{(II.11)}$$

onde $Y_{t+u}(0) = S(u)\left(X_t(0) - \dfrac{f(X(t))}{2\delta}\right) + \int_{-r}^{0} S(u-\alpha-r) B X_t(\alpha) d\alpha$, e S é a solução da equação (I.8) e $X_t(0) - \frac{f(X(t))}{2\delta}$ é uma condição inicial. Com efeito, para $t = 0$, $u = 0$ e como $S(t) = 0$ para $t < 0$ e $S(0) = I$

$$Y_{t+u}(0) = Y_{0+0}(0) = Y_0(0) = S(0)\ (X_0(0) - \frac{f(X(0))}{2\delta}) +$$

$$+ \int_{-r}^{0} S(-\alpha - r)\ B\ X_t(\alpha)\ d\alpha$$

onde, $Y_0(0) = X_0(0) - \frac{f(X(0)}{2\delta}$

ou, $$Y_0(0) = \xi - \frac{f(\xi)}{2\delta} \tag{II.12}$$

A última parcela de (II.11) é não negativa e, portanto,

$$V(X_t(0),\ X_t) \geq X_t^T(0)\ M\ X_t(0) +$$

$$+ e^{\delta r} \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta)\ R\ e^{2\delta\theta}\ X_t(\theta)\ d\theta \geq$$

$$\geq \lambda_{min}(M)\ X_t^T(0)\ X_t(0) + e^{-|\delta|r} \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta)\lambda_{min}(R) X_t(\theta) d\theta =$$

$$= \lambda_{min}(M) . X_t^T(0)\ X_t(0) + e^{-|\delta|r}\ \lambda_{min}(R) \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta) X_t(\theta) d\theta \geq$$

$$\geq \min\{\lambda_{min}(M),\ e^{-|\delta|r}\ \lambda_{min}(R)\} .\ X_t^T(0) X_t(0) +$$

$$+ \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta)\ X_t(\theta)\ d\theta$$

$$= \min \{ \lambda_{min}(M),\ e^{-|\delta| r}\lambda_{min}(R)\}.\ \|(X_t(0),\ X_t)\|^2_{\mathcal{H}}\ ,\ \text{ou}$$

$$V(\xi,\ \phi) \geq \min \{ \lambda_{min}(M),\ e^{-|\delta|\, r}\lambda_{min}(R)\}.\ \|(\xi,\phi)\|^2_{\mathcal{H}}$$

onde λ_{min} (A) representa o menor valor característico da matriz Simétrica A. Portanto

$$V(\xi,\ \phi) \geq C_1 \|(\xi\ ,\phi)\|^2_{\mathcal{H}} \tag{II.13}$$

sendo $C_1 = \min\{ \lambda_{min}(M),\ e^{-|\delta| r}\ \lambda_{min}(R)\}$

Sendo $\mathcal{S}(t)\ (\xi,\ \phi) = (X(t),\ X_t)$ e de (I.5) vem:

$$\|Y_u(0)\|_{R^n} \leq \|(Y_u(0),\ Y_u)\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{S}(u)\,(Y_0(0),\ Y_0)\| =$$

$$= \|\mathcal{S}(u)\|\ .\ \|(Y_0(0),\ Y_0)\| \leq K\ e^{(\gamma+\varepsilon)u}.\|(Y_0(0),\ Y_0)\|$$

portanto

$$\|Y_u(0)\|_{R^n} \leq \|(Y_u(0),\ Y_u)\|_{\mathcal{H}} \leq K\ e^{(\gamma+\varepsilon)u}\|(\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta},\ \phi)\| \tag{II.14}$$

para $\varepsilon > 0$, Re $\lambda \leq \gamma$, λ raiz característica, mas,

$$\|(\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta},\phi)\|^2 = \left[\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta}\right]^T . \left[\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta}\right] + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\phi(\theta)d\theta =$$

$$= \xi^T\xi - 2\xi^T \frac{f(\xi)}{2\delta} + \frac{f^T(\xi)}{2\delta}\,\frac{f(\xi)}{2\delta} + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\ \phi(\theta)\ d\theta \leq$$

$$\leq \left\| -2\,\xi^T \frac{f(\xi}{2\delta} \right\| + \left\| \frac{f^T(\xi)}{2\delta} \cdot \frac{f(\xi)}{2\delta} \right\| + \left\| \xi^T \xi \right\| +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\phi(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{|\delta|} \| \xi^T \| . \| f(\xi) \| + \frac{1}{4\delta^2} \| f(\xi) \|^2 + \| \xi \|^2 +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, \phi(\theta)\, d\theta ,$$

por hipótese $\| f(X(t)) \| \leq k \| x(t) \|$, $k \geq 1$, então

$$\left\| (\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta}, \phi) \right\|^2 \leq \frac{1}{|\delta|} \| \xi^T \| . \; k \| \xi \| + \frac{1}{4\delta^2} k . \| \xi \|^2 +$$

$$+ \| \xi \|^2 + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, \phi(\theta)\, d\theta =$$

$$= \left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right) \| \xi \|^2 + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, \phi(\theta)\, d\theta \leq$$

$$\leq \left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right) \left[\xi^T \xi + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\, \phi(\theta) d\theta \right]$$

ou, seja,

$$\left\| (\xi - \frac{f(\xi)}{2\delta}, \phi) \right\|^2 \leq \left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right) . \| (\xi, \phi) \|^2 \tag{II.15}$$

De (II.14) e (II.15) temos:

$$\int_0^\infty Y_{t+u}^T(0)\; W\; e^{2\delta u}\; Y_{t+u}(0) du \leq \lambda_{m\hat{a}x}(W) \int_0^\infty e^{2\delta u} \| Y_{t+u}(0) \|_{\mathbb{R}^n} du \leq$$

$$\leq \lambda_{\text{máx}}(W) \int_0^\infty e^{2\delta u} K^2 e^{2(\gamma+\varepsilon)u} \| \xi - \frac{f(\xi)}{2\delta} \|^2 . du =$$

$$= \lambda_{\text{máx}}(W) K^2 \int_0^\infty e^{-2\varepsilon u} \| \xi - \frac{f(\xi)}{2\delta} \|^2 du =$$

$$= \lambda_{\text{máx}}(W) K^2 \| \xi - \frac{f(\xi)}{2\delta} \|^2 \int_0^\infty e^{-2\varepsilon u} du =$$

$$= \frac{\lambda_{\text{máx}}(W) K^2}{2\varepsilon} . \| \xi - \frac{f(\xi)}{2\delta} \|^2 =$$

$$= \frac{\lambda_{\text{máx}}(W) K^2}{2\varepsilon} . \left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right) . \| (\xi , \phi) \|^2 ,$$

logo,

$$\int_0^\infty Y_{t+u}(0) W e^{2\delta u} Y_{t+u}(0) du \leq \frac{\lambda_{\text{máx}}(W) K^2}{2\varepsilon} .$$

$$\left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right) . \| (\xi , \phi) \|^2 , \qquad \text{(II.16)}$$

e de (II.11) vem:

$$V(X_t(0), X_t) \leq \lambda_{\text{máx}}(M) X_t^T(0) X_t(0) +$$

$$+ e^{|\delta| r} \int_{-r}^0 X_t^T(\theta) \lambda_{\text{máx}}(R) X_t(\theta) d\theta +$$

$$+ \int_0^\infty Y_{t+u}^T(0) W e^{2\delta u} Y_{t+u}(0) du$$

$$= \lambda_{máx}(M)\ X_t^T\ (0)\ X_t(0) + e^{|\delta|r}\lambda_{máx}(R)\int_{-r}^{0} X_t^T\ (\theta)\ X_t(\theta)d\theta\ +$$

$$+ \int_0^{\infty} Y_{t+u}^T(0)\ \ W\ e^{2\delta u}\ Y_{t+u}(0)\ du\ \le$$

$$\le\ máx\ \{\ \lambda_{máx}(M),\ e^{|\delta|r}\ \lambda_{máx}\ (R)\}\ .$$

$$[\ X_t^T\ (0)\ X_t(0)\ + \int_{-r}^{0}\ X_t^T\ (\theta)\ X_t\ (\theta)\ d\theta\ ]\ +$$

$$+ \int_0^{\infty} Y_{t+u}^T(0)\ W\ e^{2\delta u}\ \ Y_{t+u}(0)\ du\ \ =$$

$$= máx\ \{\lambda_{máx}\ (M),\ e^{|\delta|r}\ \lambda_{máx}\ (R)\}||(\xi,\phi)||^2\ +$$

$$+ \int_0^{\infty} Y_{t+u}^T(0)\ W\ e^{2\delta u}\ \ Y_{t+u}(0)\ du\ \ \le$$

$$\le máx\ \{\lambda_{máx}\ (M),\ e^{|\delta|r}\ \ \lambda_{máx}\ (R)\}\ ||(\xi,\phi)||^2\ \ +$$

$$+\ \ \frac{\lambda_{máx}\ (W)\ K^2}{2\varepsilon}\ .\ (\ \frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1\ ).\ ||(\xi\ ,\phi)||^2\ ,$$

sendo que a última desigualdade segue de (II.16),ou seja,

$$V(\xi,\ \phi) \le \{\ máx\ [\lambda_{máx}\ (M),\ e^{|\delta|r}\ \lambda_{máx}\ (R)]\ \ +$$

$$+\ \frac{\lambda_{máx}(W)\ K^2}{2\varepsilon}\ .\ (\ \frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1\ )\}\ ||(\xi,\phi)||^2$$

Seja

$$C_2 = \{ \text{máx} \left[\lambda_{\text{máx}}(M),\ e^{|\delta| r}\ \lambda_{\text{máx}}\ (R)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda_{\text{máx}}\ (W)\ K^2}{2\varepsilon} \quad \left(\frac{k}{|\delta|} + \frac{k}{4\delta^2} + 1 \right)\}$$

e assim

$$V\ (\ \xi,\ \phi) \le C_2 \|(\xi\ ,\phi)\|^2\ . \tag{II.17}$$

Com isto foi mostrado que, existe constantes C_1 e C_2, positivas tais que $\forall\ (\xi\ ,\ \phi)\ \varepsilon\ \mathcal{H}$

$$C_1 \|(\xi,\phi)\|^2 \le V\ (\xi,\ \phi) \le C_2 \|(\xi\ ,\ \phi)\|^2 \tag{II.18}$$

como em (II.4).

Resta mostrar (II.5). Para tanto, consideremos a expressão (II.3); derivando ao longo das soluções de (I.1) vem:

$$\dot{V}(t) = \frac{dV}{dt}\ (X_t(0),\ X_t) = \dot{X}_t^T(0)\ M\ X_t(0) + X_t^T\ (0)\ M\ \dot{X}_t(0) +$$

$$+ e^{\delta r} \int_{-r}^{0} \dot{X}_t^T\ (\theta)\ R\ e^{2\delta\theta}\ X_t\ (\theta)\ d\theta +$$

$$+ e^{\delta r} \int_{-r}^{0} X_t^T\ (\theta)\ R\ e^{2\delta\theta}\ \dot{X}_t\ (\theta)\ d\theta +$$

$$+ \dot{X}^T\ (0)\ Q(0)\ X_t\ (0) + X_t^T\ (0)\ Q(0)\ \dot{X}_t(0) +$$

$$+ 2\ \dot{X}_t^T\ (0) \int_{-r}^{0} Q(\alpha+r)\ e^{\delta(\alpha+r)}\ B\ X_t\ (\alpha)\ d\alpha +$$

$$+ 2\, X_t^T (0) \int_{-r}^{0} Q\, (\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)} b\, \dot{X}_t\, (\alpha)\, d\alpha\, +$$

$$+ 2 \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} \dot{X}_t^T (\alpha)\, B^T\, Q\, (\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+ 2r)} B\, X_t(\beta) d\beta\, d\alpha +$$

$$+ 2 \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T (\alpha)\, B^T\, Q\, (\beta-\alpha) e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\, \dot{X}_t\, (\beta)\, d\beta\, d\alpha.$$

mas,

$$\int_{-r}^{0} X_t^T (\theta)\, R\, e^{2\delta\theta}\, \dot{X}_t\, (\theta)\, d\theta\, =$$

$$= X_t^T (0)\, R\, X_t\, (0) - X_t^T (-r)\, R\, e^{-2\delta r}\, X_t\, (-r) -$$

$$- \int_{-r}^{0} \dot{X}_t^T(\theta) R\, e^{2\delta\theta} X_t(\theta) d\theta\, -2\delta \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta) R\, e^{2\delta\theta} X_t(\theta)\, d\theta\, .$$

$$\cdot \int_{-r}^{0} Q\, (\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)}\, B\, \dot{X}_t(\alpha)\, d\alpha\, =$$

$$= Q\, (r)\, e^{\delta r}\, B\, X_t(0) - Q\, (0)\, B\, X_t\, (-r) -$$

$$- \int_{-r}^{0} \dot{Q}(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)} B\, X_t(\alpha) d\alpha\, - \delta \int_{-r}^{0} Q(\alpha-r) e^{\delta(\alpha+r)} B X_t(\alpha) d\alpha$$

$$\int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} \dot{X}_t^T (\alpha)\, B^T\, Q(\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\, X_t(\beta) d\beta\, d\alpha\, =$$

$$= - X_t^T (-r) \int_{-r}^{0} B^T\, Q\, (\beta+r)\, e^{\delta(\beta+r)}\, B\, X_t\, (\beta)\, d\beta\, +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T (\alpha)\, B^T\, \dot{Q}(\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\, X_t(\beta)\, d\beta\, d\alpha -$$

$$- \delta \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T(\alpha) B^T \, Q(\beta-\alpha) \, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B \, X_t(\beta) \, d\beta \, d\alpha \, +$$

$$+ \int_{-r}^{0} X_t^T(\alpha) \, B^T \, Q\,(0) \, e^{2\delta(\alpha+2r)} \, B \, X_t \, (\alpha) \, d\alpha \, .$$

$$\int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T(\alpha) \, B^T Q(\beta-\alpha) \, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B \, \dot{X}_t(\beta) d\beta \, d\alpha =$$

$$= \int_{-r}^{0} X_t^T \, (\alpha) \, B^T \, Q(-\,\alpha) \, e^{\delta(\alpha+2r)} B \, X_t \, (0) \, d\alpha \, -$$

$$- \int_{-r}^{0} X_t^T \, (\alpha) \, B^T \, Q\,(0) \, e^{2\delta(\alpha+r)} \, B \, X_t \, (\alpha) \, d\alpha \, -$$

$$- \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t^T \, (\alpha) B^T \, \dot{Q}(\beta-\alpha) \, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B \, X_t \, (\beta) d\beta \, d\alpha \, -$$

$$- \, \delta \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t(\alpha) \, B^T \, Q(\beta-\alpha) \, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B \, X_t(\beta) d\beta \, d\alpha.$$

Levando estes resultados na expressão da derivada e após algumas simplificações, vem:

$$\dot{V}(X_t(0), \, X_t) = 2 \, \dot{X}_t^T \, (0) \, M \, X_t(0) \, + \, e^{\delta r} X_t^T \, (0) R \, X_t(0) \, -$$

$$- \, e^{\delta r} \, X_t^T \, (-r) \, e^{-2\delta r} \, R \, X_t \, (-r)$$

$$+ \, 2 \, \dot{X}_t^T \, (0) \, Q \, (0) \, X_t(0) \, + \, 2 \, X_t^T \, (0) \, Q \, (r) \, e^{\delta r} \, B \, X_t \, (0) \, -$$

$$- \, 2 \, X_t^T \, (0) \, Q(0) \, B \, X_t(-r) \, - \, 2\delta \, e^{\delta r} \int_{-r}^{0} X_t^T(\theta) R \, e^{2\delta\theta} \, d\theta$$

$$- 2\,\delta\, X_t^T\,(0) \int_{-r}^{0} Q(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)}\, B\, X_t\,(\alpha)\, d\alpha\, -$$

$$- 4\,\delta \int_{-r}^{0} \int_{\alpha}^{0} X_t\,(\alpha)\, B^T\, Q(\beta-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+\beta+2r)} B\, X_t(\beta) d\beta\, d\alpha\, +$$

$$+ 2\, \dot{X}_t^T\,(0) \int_{-r}^{0} Q(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)}\, B\, X_t\,(\alpha)\, d\alpha\, -$$

$$- 2\, X_t^T\,(0)\, B^T \int_{-r}^{0} \dot{Q}(\alpha+r)\, e^{\delta(\alpha+r)}\, B\, X_t\,(\alpha)\, d\alpha\, -$$

$$- 2\, X_t^T\,(-r) \int_{-r}^{0} B^T\, Q(\beta+r)\, e^{\delta(\beta+r)}\, B\, X_t\,(\beta)\, d\beta\, +$$

$$+ 2 \int_{-r}^{0} X_t^T\,(\alpha)\, B^T\, Q\,(-\alpha)\, e^{\delta(\alpha+2r)}\, B\, X_t\,(0)\, d\alpha.$$

Substituindo, $\dot{X}_t(0)$ por $A\,X(t)$ + $B\,X(t-r) + f(X(t))$ e utilizando as igualdades (II.2), temos:

$$\dot{V}(X_t(0),\, X_t) = -\,2\,\delta\, V\,\left(X_t\,(0) - \frac{f(X(t))}{2\delta},\, X_t\,\right) +$$

$$+ X_t^T\,(0)\, \Big[\, (A^T + \delta I)\, Q\,(0)\, +$$

$$+ Q(0)\,(A + \delta I) + (A^T + \delta I)\, M + M\,(A + \delta I) + e^{\delta r}\, B^T\, Q^T(r) +$$

$$+ e^{\delta r}\, Q(r)\, B + 2\, e^{\delta r}\, R\Big]\, X_t(0) + 2\, X_t^T\,(-r)\, B^T\, M\, X_t\,(0) -$$

$$- e^{\delta r}\, X_t^T\,(0)\, R\, X_t\,(0) - e^{-\delta r}\, X_t^T\,(-r)\, R\, X_t\,(-r)\, +$$

$$+ f^T (X(t)) \frac{M + Q(0)}{2\delta} f(X(t)) .$$

usando (II.10)

$$\dot{V} (X_t(0), X_t) = - 2 \delta V \left(X_t (0) - \frac{f(X(t)}{2\delta}\right) +$$

$$+ X_t^T (0) \left[- W + (A^T + \delta I) M + M(A + \delta I) + 2 e^{\delta r} R\right] X_t(0) +$$

$$+ 2 X_t^T (-r) B^T M X_t(0) - e^{\delta r} X_t^T(0) R X_t(0) -$$

$$- e^{-\delta r} X_t^T (-r) R X_t (-r) +$$

$$+ f^T (X(t)) \frac{M + Q(0)}{2\delta} f(X(t))$$

ou, fazendo $W = 2 W^*$

$$\dot{V} (X_t(0), X_t) = - 2 \delta V \left(X_t (0) - \frac{f(X(t))}{2\delta}, X_t\right) +$$

$$+ X_t^T (0) \left[- W^* + (A^T + \delta I) M + M (A + \delta I) + 2 e^{\delta r} R\right] X_t(0) +$$

$$+ 2 X_t^T (-r) B^T M X_t (0) - e^{\delta r} X_t^T (0) R X_t (0) -$$

$$- e^{-\delta r} X_t^T (-r) R X_t (-r) + f^T(X(t)) \frac{M + Q(0)}{2\delta} f(X(t)) -$$

$$- X_t^T (0) W^* X_t (0) .$$

$$\dot{V}(X_t(0), X_t) = -2\,\delta\, V(X_t(0) - \frac{f(X(t))}{2\delta}, X_t) -$$

$$- [X_t^T(0), -e^{-\delta r}X_t^T(-r)] \; G \begin{bmatrix} X_t(0) \\ \\ -e^{-\delta r}\, X_t(-r) \end{bmatrix} - H \qquad (II.19)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} W^* - (A+\delta I)^T M - M(A+\delta I) - R\,e^{\delta r} & M B\, e^{\delta r} \\ \vdots & \\ B^T M\, e^{\delta r} & R\, e^{\delta r} \end{bmatrix}$$

e,

$$H = X_t^T(0)\; W^*\; X_t(0) - f^T(X(t)) \frac{M + Q(0)}{2\delta} f(X(t))$$

Para obter a relação (II.5) mostraremos primeiro que $H = X_t^T(0)\; W^*\; X_t(0) - f^T(X(t))$ $\frac{M + Q(0)}{2\delta} f(X(t))$ é não negativa. Com efeito,

$$H = X_t^T(0)\; W^*\; X_t(0) - f^T(X(t))\; k.\left(\frac{M + Q(0)}{2\delta}\right)\frac{1}{k}\,.$$

$f(X(t))$, $k \geq 1$

$$\geq \lambda_{min}(W^*) X_t^T(0)\; X_t(0) - \lambda_{m\acute{a}x}\left(k.\frac{M + Q(0)}{2\delta}\right)\frac{1}{k} f^T(X(t)).f(X(t)) \geq$$

$$\geq \min\left\{\lambda_{min}(W^*),\; \lambda_{m\acute{a}x}\left(k.\frac{M+Q(0)}{2\delta}\right)\right\}.\; X_t^T(0)\; X_t(0)$$

como por hipótese $\|f(X(t))\| \leq k\,\|X(t)\|$, $k \geq 1$, então

H é não negativa.

Da relação (II.18) e fazendo $\eta = -\dfrac{f(X(t))}{2\delta}$

$$- 2\,\delta\, V\,(\xi+\eta,\phi) \leq - 2\,\delta\, C_1 \|(\xi+\eta,\phi)\|^2 =$$

$$= - 2\,\delta\, C_1 \left[(\xi+\eta)^T (\xi+\eta) + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\,\phi(\theta)\,d\theta\right] =$$

$$= - 2\,\delta\, C_1 \left[\xi^T.\xi + 2\eta^T\xi + \eta\,\eta^T + \int_{-r}^{0} \phi^T(\theta)\,\phi(\theta)d\theta\right] =$$

$$= - 2\,\delta\, C_1 \left[\|(\xi,\phi)\|^2 + 2\,\eta^T\xi + \eta\,\eta^T\right] =$$

$$= - 2\,\delta\, C_1 \|(\xi,\theta)\|^2 - 2\,\delta\, C_1 \left[(\eta+\xi)^T(\eta+\xi)\right] + 2\delta C_1 \xi^T\xi$$

substituindo esta desigualdade em (II.19) vem:

$$\dot V(X_t(0), X_t) \leq - 2\,\delta\, C_1 \|(X_t(0), X_t)\|^2 - 2\,\delta\, C_1$$

$$\left[\left(-\frac{f(X(t))}{2\delta} + X_t(0)\right)^T \left(-\frac{f(X(t))}{2\delta} + X_t(0)\right) + \right.$$

$$+ X_t^T(0)\, 2\,\delta\, C_1\, X_t(0) - \left[X_t^T(0),\ - e^{-\delta r} X_t^T(-r)\right].$$

$$.\ G\ . \begin{bmatrix} X_t(0) \\ e^{-\delta r} X_t(-r) \end{bmatrix} - H$$

ou,

$$\dot V(X_t(0), X_t) \leq - 2\,\delta\, C_1 \|(X_t(0), X_t)\|^2 - 2\,\delta\, C_1$$

$$\left[\left(\frac{-f(X(t)}{2\delta} + x_t(0)\right)^T \cdot \left(\frac{-f(X(t))}{2\delta} + x_t(0)\right) \right]$$

$$-\left[x_t^T(0), -e^{-\delta r} \, x_t^T(-r) \right] \cdot G^* \begin{bmatrix} x_t(0) \\ \\ -e^{-\delta r} x_t(-r) \end{bmatrix} - H \qquad \text{(II.20)}$$

onde,

$$G^* = \begin{bmatrix} W^* - (A+\delta I)M - M(A+\delta I) - R\, e^{\delta r} - 2\delta C_1 I & M\, B\, e^{\delta r} \\ \\ B^T\, M\, e^{\delta r} & R\, e^{\delta r} \end{bmatrix}$$

Para obter a relação (II.5) e analisando a desigualdade (II.20), indica que uma escolha adequada das matrizes W^*, M e R mostra que a matriz W^* é positiva semidefinida. Mas isto é possível, por exemplo, escolhendo $M = I$, $R \doteq k_R\, I$, $W^* = k_{W^*}\, I$ com $k_{W^*} >> k_R >> 0$ a matriz G^* é positiva definida e assim seu determinante é também positivo, e a matriz se tornará positiva semi-definida somente quando o determinante se anular.

Para a escolha particular feita temos:

$$G^* = \begin{bmatrix} k_{W^*} I - (A^T + A) - 2\delta I - k_R I e^{\delta r} - 2\delta C_1 I & B\, e^{\delta r} \\ \\ B^T\, e^{\delta r} & k_R e^{\delta r} \end{bmatrix}$$

ou uma matriz equivalente

$$\begin{bmatrix} k_{W^*} I - (A^T + A) - 2\delta I - k_R I e^{\delta r} - 2\delta C_1 I - \dfrac{BB^T e^{\delta r}}{k_R} & 0 \\ \\ B^T\, e^{\delta r} & k_R I\, e^{\delta r} \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$\det(G^*) = \det[\, k_R \, I \, e^{\delta r}] \, . \, \det[\, k_{W^*} I - (A^T + A) -$$

$$- 2 \, \delta \, I - 2 \, \delta \, C_1 \, I - e^{\delta r} \, (k_R \, I - \frac{1}{k_R} \, B \, B^T \,) \,]$$

escrevendo, $k_R = \sqrt{\lambda_{\text{máx}} \, (B \, B^T \,)}$

$k_{W^*} = \text{máx} \, \{0, \, \lambda_{\text{máx}} \, (A^T + A) + 2\delta \, (1 + C_1) + 2 \, e^{\delta r}$

$\sqrt{\lambda_{\text{máx}} \, (B \, B^T)} \, \}$ então G^* é positiva semi-definida e, conseqüentemente, de (II.20)

$$\dot{V}(\xi, \, \phi) \leq - 2 \, \delta \, C_1 \| \, (\xi, \, \phi) \, \|^2 \qquad \text{(II.21)}$$

De (II.4) temos

$$V(\xi, \, \phi) \leq C_2 \, \| \, (\xi, \, \phi) \, \|^2$$

ou,

$$\frac{1}{C_2} \, V \, (\xi, \, \phi) \leq \| \, (\xi \, , \, \phi) \, \|^2$$

ou ainda,

$$- \| \, (\xi \, , \, \phi) \, \|^2 \leq - \frac{1}{C_2} \, V \, (\xi, \, \phi)$$

e portanto

$$\dot{V} \, (\xi \, , \, \phi) \leq - 2\delta \, \frac{C_1}{C_2} \, V(\xi, \, \phi) . \qquad \text{(II.22)}$$

mas, $\dfrac{C_1}{C_2} = \ell > 0$

como queríamos provar em (II.5).

Portanto, M, R, $Q(\alpha)$ podem ser escolhidas para satisfazer (II.4) e (II.5).

Por teorema I : (II.4) e (II.5) implicam que $X = 0$ é uniformemente assintoticamente estável.

Reciprocamente, $X = 0$ estável implica $\gamma < 0$ e disto $\gamma = -\delta - \varepsilon$ e logo as relações (II.4) e (II.5) são satisfeitas, e o teorema II está provado.

BIBLIOGRAFIA

[1] - CASTELAN, W. B. & INFANTE, E. F. A Liapunov for a matrix difference - differential equation, Journal of Differential Equation, 29:439-51, 1978.

[2] - BORISOVIC, J. G. & TURBABIM, A. S. On the Cauchy problem for linear nonhomogeneous differential equations with retarded sigment, Soviet Math. Dablady. 10:401-5,1969.

[3] - HALE, J. K. Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[4] - CASTELAN, W. B. & INFANTE, E. F. On a functional equation arising in the stability theory of difference-differential equations, Quart. Appl. Math. 35:311-9, 1977.