UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DISTRIBUIÇÕES DE FROBENIUS EM GRUPOS DE LIE E O GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE UMA PARALELIZAÇÃO

ROBERT OZORIO MOREIRA

FLORIANÓPOLIS

NOVEMBRO DE 1981

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA.

Prof. Italo Jose Dejter, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Italo Jose Dejter, Ph.D.
Orientador

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Prof. Marcos Sebastiani, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Italo Jose Dejter pela sugestão do assunto e orientação.

Ao Professor Francisco Rodrigues de Oliveira que na graduação me incentivou e orientou.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

À minha esposa:

Marta

Aos meus filhos:

Thiago e

Francis

R E S U M O

São obtidos resultados essenciais na teoria dos grupos de Lie como aplicação da teoria das distribuições de Frobenius em especial é obtido caracterização do grupo de automorfismos de uma paralelização originalmente achada por Kobayashi.

Í N D I C E

Pag.

I N T R O D U Ç Ã O

O objetivo central deste trabalho é dar uma apresentação da teoria de grupos de transformações de Lie como aplicação da teoria das distribuições de Frobenius, que nos conduz ao teorema de Shoshichi Kobayashi sobre o grupo de automorfismos de uma paralelização.

O ponto de vista assumido é o de F. Brickell and R.S. Clark, em Differentable Manifolds, An Introduction.

É de se notar que enquanto no Capítulo 1 nós definimos distribuições e ainda fornecemos uma prova do teorema de Frobenius (que usa colchete de Lie), no Capítulo 3 ao tratar de Álgebras de Lie de um grupo de Lie, obtemos uma construção básica das bases de distribuições.

De certa forma este trabalho complementa o trabalho de Selma Veiga Korb, Um Enfoque de Variedades Diferenciais com Aplicações a Equações Diferenciais, no sentido que trata termos complementares a aquele trabalho, no qual foi fornecida uma visão das propriedades topológicas de variedades e aplicações diferenciais, com alguns exemplos relevantes, entre eles exemplos de estruturas diferentes em um mesmo conjunto, campo de vetores, operadores diferenciais, fibrado tangentes, variedades paralelizáveis.

CAPÍTULO 1

DISTRIBUIÇÕES

Definição 1.1 - Uma distribuição p-dimensional em uma variedade M de dimensão n é uma função Ω em M tal que Ωm é um espaço p dimensional de $T_m M$ (onde $0 < p < n$) e que satisfaz a seguinte condição de diferencialidade:

Cada ponto m do domínio de Ω tem uma vizinhança V sobre a qual os campos de vetores $X_1, \ldots, X_p$ estão definidos, tal que Ωq é espandido por $X_1 q, \ldots, X_p q$ se $q \in V$.

Chamamos um tal conjunto de campos de vetores, uma base para Ω em m.

Existe uma distribuição n-dimensional em M e dada por

$$m \mapsto T_m M$$

Definição 1.2 - Uma carta x de M é chamada lisa com respeito a distribuição Ω em M se os campos de vetores $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$; $\alpha = 1, \ldots, p$ formam uma base para Ω.

Definição 1.3 - Uma distribuição em M é integrável se cada ponto de M está no domínio de uma carta lisa.

As distribuições integráveis podem aparecer assim:

Seja ϕ uma submersão de uma variedade n-dimensional M em uma (n-p)-variedade diferenciável M', onde $0 < p < n$.

Se

$$\phi_{*m} : T_m M \mapsto T_{m'} M'$$

é a aplicação linear derivada, a função Ω definida por

$$m \mapsto \text{núcleo } \phi$$

é uma distribuição integrável em M de dimensão p.

Um campo de vetores X é dito pertencer a uma distribuição Ω se: $X_m \varepsilon \Omega_m$ para cada m no domínio de X.

<u>Definição 1.4</u> - Uma distribuição é involutiva se $[X,Y] \varepsilon \Omega$ sempre que $X,Y \varepsilon \Omega$.

<u>Proposição 1.1</u> - Uma distribuição integrável é involutiva.

Prova:

Sejam X,Y campos de vetores pertencentes a uma distribuição integrável Ω e seja m um ponto do domínio de $[X,Y]$. $X,Y \varepsilon \Omega$ integrável, implica que, todo $m \varepsilon M$ está no domínio de uma carta lisa x.

Se x é uma carta lisa com respeito a Ω em M então os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$; $\alpha=1,\ldots,p$ formam uma base para Ω.

Suponhamos m no domínio do campo de vetores $[X,Y]$.

Escolhamos uma carta lisa x cujo domínio U inclui m. Então qualquer campo de vetores X cujo domínio W toca U concorda em $U \cap W$ com uma única combinação linear $\Sigma A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde

$A^i : M \to \mathbb{R}$ está definido por $A^i = Xx^i$ para $x^i \in M$.

Nas condições acima

(1) $\quad X/U = \Sigma Xx^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}; \qquad Y/U = \Sigma Yx^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\ ;\ \alpha = 1,\dots,p$

Devemos mostrar que $[X,Y] \in \Omega$; isto é, $[X,Y]$ é a combinação linear dos vetores da base $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$

Por (1) e pela proposição 7.1.2 (Referência 1)

$$[X,Y]/U = [X/U,\ Y/U]$$

e por definição

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Então

$$[X,Y]/U = \Sigma(X(Yx^\alpha) - Y(Xx^\alpha)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

é a combinação linear dos vetores da base $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

<u>Proposição 1.2</u> - Sejam X um campo de vetores em uma variedade M tal que

$$X_m \neq 0$$

e Y uma carta em m para a qual

$$\left[X,\ \frac{\partial}{\partial y^a}\right] = 0,\ Xy^a = 0 \text{ onde } a=1,\dots,d < n$$

Então existe uma carta x em m em cujo domínio

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial y^a} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x^{d+1}} = X$$

Prova:

Suponhamos que $Y_m = 0$

Seja h a função diferencial

$$h = (y^{d+1}, \ldots, y^n) : M \to \mathbb{R}^{n-d}$$

As condições sobre o campo de vetores X garante a existência de uma restrição que é h-relacionada a um campo de vetores Z em $\mathbb{R}^{n-d}$

Para ver isto seja

$$X^i = Xy^i \quad (i=1,\ldots,n)$$

Como

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial y^a}\right] = 0$$

implica que

$$\frac{\partial X^i}{\partial y^a} = 0$$

logo existem funções diferenciáveis $Z^i : \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}$ tal que

$$X^i = Z^i o h$$

em uma vinzinhança U de m.

Suponhamos que $w = (w^{d+1}, \ldots, w^n)$ é uma carta identidade em R^{n-d}.

Se q é um ponto na intersecção dos domínios de X,y então

$A^i : M \to \mathbb{R}$ está definido por $A^i = Xx^i$ para $x^i \in M$.

Nas condições acima

(1) $X/U = \Sigma Xx^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$; $Y/U = \Sigma Yx^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$; $\alpha = 1,\ldots,p$

Devemos mostrar que $[X,Y] \in \Omega$; isto é, $[X,Y]$ é a combinação linear dos vetores da base $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$

Por (1) e pela proposição 7.1.2 (Referência 1)

$$[X,Y]/U = [X/U, Y/U]$$

e por definição

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Então

$$[X,Y]/U = \Sigma(X(Yx^\alpha) - Y(Xx^\alpha)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

é a combinação linear dos vetores da base $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

<u>Proposição 1.2</u> - Sejam X um campo de vetores em uma variedade M tal que

$$X_m \neq 0$$

e Y uma carta em m para a qual

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial y^a}\right] = 0, \; Xy^a = 0 \text{ onde } a=1,\ldots,d < n$$

Então existe uma carta x em m em cujo domínio

$$(h_* X_q) w^s = X_q(w^s o h) = X_q^s \quad (s=d+1,\ldots,n)$$

consequentemente

$$h_* X_q = \sum_s X_g^s \left(\frac{\partial}{\partial w^s}\right) hg$$

de modo que

$$h_* o X = \sum_s X^s \left(\frac{\partial}{\partial w^s} \, oh\right)$$

Segue que se

$$X' = X/U$$

então

$$h_* o X' = Zoh$$

onde Z é o campo vetorial em $\mathbb{R}^{n-d}$ definido por

$$Z = \Sigma \, Z^s \frac{\partial}{\partial w^s}$$

Os campos vetoriais X' e Z são portanto h_relacionados

Como

$$Z0 \neq 0$$

a proposição 8.3.2 (Referência 1) mostra que existe uma carta

$$\phi = (\phi^{d+1}, \ldots, \phi^n)$$

de $\mathbb{R}^{n-d}$ tal que

$$\phi 0 = 0 \text{ e } Z = \frac{\partial}{\partial \phi^{d+1}}$$

no domínio de ϕ.

Se i é a carta identidade em $\mathbb{R}^d$ então $i \times \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.

Consequentemente

$$x = (i \times \phi) o y$$

é a carta de M em cujo domínio

(2) $$x^a = y^a \quad ; \quad x^s = \phi^s o h$$

onde $a=1,\ldots,d$ e $s=d+1,\ldots,n$

Então x é uma carta em m e veremos que tem as propriedades requeridas.

No domínio de x

$$Xx^a = Xy^a = 0$$

Mais do que isso, como este domínio está contido em U,

$$Xx^s = X' x^s = X'(\phi^s o h)$$

e assim, já que, X' e Z são h-relacionados

$$Xx^s = (Z\phi^s) o h = \partial_s \; d+1$$

Segue que no domínio de x

$$X = \Sigma \, (Xx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{d+1}}$$

Equação (2), mostra que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_{ia}, \quad i=1,\ldots,n$$

e assim os outros requisitos são satisfeitos.

Proposição 1.3 - (Teorema de Frobenius)

Uma distribuição é integrável se só se é involutiva.

Prova:

A Proposição 1.1 mostrou a condição necessária.

Devemos mostrar que a condição é suficiente.

Vamos demonstrar isto por indução na dimensão p da distribuição.

Para p=1 é verdadeiro pois toda distribuição 1-dimensional é integrável.

Vamos supor que é verdadeiro quando p=d e mostrar quando p=d+1.

Seja Ω uma distribuição integrável em M de dimensão p=d+1.

Escolhamos m no domínio de Ω e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d, Y_{d+1}$ uma base para Ωm. Modificaremos esta base para obter uma distribuição involutiva de dimensão d em uma vizinhança de m.

Como

$$Y_{d+1} m \neq 0$$

então existe uma carta u em m em cujo domínio

$$Y_{d+1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$$

Definamos os campos de vetores

$$X_a = Y_a - (Y_a u^1) \frac{\partial}{\partial u^1} \quad ; \quad X_{d+1} = \frac{\partial}{\partial u^1} \quad ; \quad a=1,\ldots,d.$$

que formam uma base para Ω em m.

Como Ω é involutiva, os campos de vetores $[X_a, X_b]$; $(a,b=1,\ldots,d)$ devem pertencer a Ωm portanto eles são combinações lineares de $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$.

Mas as expressões para X_a, X_b em termos dos campos de vetores não envolvem $\partial/\partial u^1$ e portanto isto também acontece para $[X_a, X_b]$.

Consequentemente $[X_a, X_b]$ é uma combinação linear de $X_1, \ldots, X_d$ somente.

Pelo exemplo 11.2.1 (Referência 1) isto implica que a distribuição d-dimensional Σ determinada no domínio de u pelos campos de vetores $X_a (a=1,\ldots,d)$ é involutiva.

Pela hipótese de indução Σ é integrável então por definição existe uma carta lisa y em m relativa à distribuição Σ então por definição os $\frac{\partial}{\partial y^a}$ $(a=1,\ldots,d)$ formam uma base em m para Σ.

Vejamos que os campos vetoriais $\frac{\partial}{\partial y^a}$ juntamente com

$$X = X_{d+1} - \sum_b (X_{d+1}\, y^b) \frac{\partial}{\partial y^b} \quad ; \; b=1,\ldots,d$$

formam uma base em m para Ω:

De fato

$$\Sigma\, c_a \frac{\partial}{\partial y^a} + c(X_{d+1} - \Sigma(X_{d+1}\, y^a)) \frac{\partial}{\partial y^a} = 0$$

ou seja

$$(\Sigma(c_a - cX_{d+1}\, y^a) \frac{\partial}{\partial y^a}) + cX_{d+1} = 0$$

mas os $\partial/\partial y^a$ e X_{d+1} são linearmente independentes, pois

$$(\Sigma\, c_a \frac{\partial}{\partial y^a}) + cX_{d+1} = 0 \text{ implica que } c_a = 0 \text{ e } c = 0$$

De fato se $\partial/\partial y^a$ é uma base então $c_a = 0$ e $c = 0$ porque $X_{d+1} = 0$

Portanto

$$c_a - cX_{d+1}\, y^a = 0 \text{ implica } c_a = 0$$

Concluimos que $\partial/\partial y^a$ e X são linearmente independentes.

Vamos mostrar que X e a carta y satisfazem as condições da proposição 1.2 e garantimos assim a existência de uma carta x em m em cujo domínio

$$\partial/\partial x^a = \partial/\partial y^a \quad \text{e} \quad \partial/\partial x^{d+1} = X$$

que formam uma base para Ω e esta carta x é lisa para Ω.

Desse modo ficará mostrado que Ω é integrável

$$X = \partial/\partial u^1$$

e as expressões para X_a $(a=1,\dots,d)$ em termos dos campos de vetores $\partial/\partial u^i$ não envolvem $\partial/\partial u^1$

Segue que $[X_{d+1}, X_a]$ é uma combinação linear de $X_1,\dots,X_d$ somente.

$[X, \partial/\partial y^a]$ são combinações lineares de $\partial/\partial y^1,\dots,\partial/\partial y^d$.

Se $b=1,\dots,d$ temos

$$[X, \partial/\partial y^a]\, y^b = 0$$

e portanto

$$[X, \partial/\partial y^a] = 0, \quad a=1,\dots,d.$$

logo

$$[X, \partial/\partial y^a]\, y^b = X(\partial/\partial y^a\, y^b) - \partial/\partial y^a\, (Xy^b)$$

$$X(\partial/\partial y^a\ y^b) = \begin{cases} X1 = 0 & ; \quad a = b \\ X0 = 0 & ; \quad a \neq b \end{cases}$$

então

$$[X, \partial/\partial y^a]\ y^b = 0 - 0 = 0$$

$$Xy^a = 0 \text{ pois } Xy^a = \left[X_{d+1} - \sum_b (X_{d+1}\ y^b)\ \partial/\partial y^b\right] y^a$$

$$Xy^1 = X_{d+1}\ y^1 - \left[(X_{d+1}\ y^1)\ \frac{\partial y^1}{\partial y^1} + (X_{d+1}\ y^1)\ \frac{\partial y^1}{\partial y^2} + \ldots\right] = 0$$

$$Xy^2 = X_{d+1}\ y^2 - (X_{d+1}\ y^2)\ \frac{\partial y^2}{\partial y^2} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$Xy^a = X_{d+1}\ y^a - (X_{d+1}\ y^a)\ \frac{\partial y^a}{\partial y^a} = 0$$

Portanto pela proposição 1.2 existe uma carta x em m que é lisa para Ω.

Consequentemente Ω é integrável.

Veremos agora um tipo especial de variedade, pois são as variedades integrais de uma distribuição Ω p-dimensional em uma variedade M.

<u>Definição 1.5</u> - Dizemos que M' é uma variedade integral de Ω se: M' é uma subvariedade de M tal que $\forall m \in M'$

$$\Omega m = j_*(T_m . M')$$

onde $j : M' \to M$ é a injeção natural.

Os vetores de M que são tangentes a M' pertencem a distribuição.

Proposição 1.4 - Seja c uma curva integral não constante de um campo vetorial X em uma variedade M.

O posto C de c pode admitir uma estrutura natural C^∞ que faz dele uma subvariedade 1-dimensional de M.

Se X não é zero então C é uma variedade integral da distribuição determinada por X.

Prova:

Seja $j: C \to M$ a injeção natural

Definamos a coleção de cartas

$\{\gamma^{-1} o j : C \to \mathbb{R}\}$ onde $\gamma : \mathbb{R} \to M$

é uma restrição de c que seja um mergulho.

Como c é uma imersão o domínio destas cartas conjuntamente cobrem C.

Suponhamos que x e y são duas tais cartas cujo domínio se interseptam. Para mostrar que yox^{-1} é diferenciável, seja a um ponto no seu domínio e escrevamos

$$(yox^{-1})a = b$$

de modo que $ca = cb = m$

Então $c(a+t)$, $c(b+t)$ são curvas integrais de X que começam em m e assim coincidem para valores suficientemente pequenos de t.

Consequentemente yox^{-1} concorda com a translação que vai de $s \mapsto s + b - a$ em alguma vizinhança de a e é por isso diferenciável em a.

Segue que a coleção de cartas acima é um atlas de C em $\mathbb{R}$ e usaremos a letra C para denotar a variedade correspondente 1-dimensional.

Seja m um ponto de C e escolhamos uma carta x de nosso atlas cujo domínio inclui m.

Como cox é uma restrição de j, j é diferenciável em m.

Além disso

$$j_*(\frac{\partial}{\partial x})_m = c_*(x_*(\frac{\partial}{\partial x})_m) = c_*(\frac{\partial}{\partial t})_{xm} = X_m$$

Como $X_m \neq 0$ segue que j é uma imersão e portanto C é uma subvariedade de M.

O resto da proposição é óbvio.

Nosso próximo objetivo é mostrar que variedades integrais existem para qualquer distribuição integrável Ω de dimensão p em uma variedade M de dimensão n.

Para fazer isto precisamos definir uma estrutura C^∞ no conjunto de pontos de M que faça dele uma variedade de dimensão p.

Começamos supondo que $p < n$.

Escolhemos um ponto $q \in M$ tal que $x:M \to \mathbb{R}^p x \mathbb{R}^{n-p}$ seja uma carta lisa em q com domínio U.

Denotamos $p_2(xq) = a$ e seja $U_a = x^{-1}(\mathbb{R}^p x a)$

Então $u = p_1 o x/U_a$ é uma injeção $M \to R^p$ com domínio U_a.

Como $xU_a = (xU) \cap (\mathbb{R}^p x a)$ segue que $u\, U_a$ é aberto em $\mathbb{R}^p$ e assim u é uma carta p dimensional.

A medida que q varía no domínio destas cartas cobrem M e assim temos só que mostrar que qualquer par de cartas com domínios que se interseptam são relacionadas diferenciavelmente.

Seja $v: M \to \mathbb{R}^p$ uma outra carta com domínio V_b definida por uma carta lisa y em um ponto r tal que $p_2(yr) = b$.

Suponhamos que os domínios U_a e U_b se interseptam e escolhamos qualquer ponto $m \in (U_a \cap V_b)$.

Mostraremos que uov^{-1} é diferenciável em v_m.

Como os dois conjuntos de campos vetoriais $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $\alpha = 1,\ldots,p$ são ambos bases para Ω sobre $U \cap V$, segue que $\frac{\partial x^s}{\partial y^\alpha} = 0$ $\alpha = 1,\ldots,p$; $s = p+1,\ldots,n$, e assim, se denotarmos por χ a função xoy^{-1}, as derivadas parciais χ^s_α são todas nulas.

Escolhamos uma vizinhança cúbica $C_1 \times C_2$ em em $R^p \times R^{n-p}$ com centro (vm,b) que esteja no domínio de χ.

Então se $z \in C_1$

$$\chi^s(z,b) = \chi^s(vm,b) = a$$

Consequentemente uov^{-1} é definida sobre C_1 e e concorda com a função

$$z \mapsto (\chi^1(z,b),\ldots\ldots,\chi^p(z,b)) = a$$

Portanto uov^{-1} é diferenciável em vm.

Um argumento similar mostra que vou^{-1} é deferenciável em (1) e assim as cartas u,v são relacionadas diferenciavelmente.

Denotamos esta nova estrutura C^∞ no conjunto subjacente de M por $M(\Omega)$.

Finalmente, se p=n definimos $M(\Omega)=M$.

<u>Lema 1.1</u>. Uma distribuição integrável Ω em uma variedade M admite $M(\Omega)$ como uma variedade integral.

Prova:

O caso de uma distribuição n-dimensional é especial mas lógico.

Suponhamos que $p < n$.

Escolhamos um ponto $m \in M$ e seja x uma carta lisa de M em m. Isto determina uma carta u de $M(\Omega)$ com domínio U_a, onde $a = p_2(xm)$.

Se $i:M(\Omega) \to M$ é a injeção natural, então sobre U_a

$$x^\alpha oi = u^\alpha \quad ; \alpha = 1,\ldots,p.$$

$$x^s oi = a^{s-p} \quad ; \quad s = p+1,\ldots,n.$$

Usando as cartas x e u, i tem representantes coordenados

$$z \mapsto (z,a)$$

e assim é uma imersão.

Consequentemente $M(\Omega)$ é um subvariedade p-dimensional de M.

Como

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_m = \sum_K \left(\frac{\partial (x^K \circ i)}{\partial u^\alpha}\right)_m \left(\frac{\partial}{\partial x^K}\right)_m = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_m$$

concluimos que $M(\Omega)$ é uma variedade integral de Ω.

<u>Proposição 1.5</u>. Seja Ω uma distribuição integrável sobre uma variedade M.

Uma variedade M' é uma variedade integral de Ω se e só se é uma subvariedade aberta de $M(\Omega)$.

Prova:

O caso de uma distribuição n-dimensional é especial. Uma subvariedade aberta M' de $M(\Omega) = M$ é uma variedade integral de Ω, já que $j_* = T_m M' \to T_m M$ é um isomorfismo.

Por outra parte se M' é uma variedade integral de Ω e tem dimensão n, ela deve ser portanto subvariedade aberta de $M(\Omega)$.

Suponhamos que Ω tem dimensão $p < n$.

Primeiro seja M' uma variedade integral de Ω.

Como M' e $M(\Omega)$ ambas tem dimensão p, temos só que mostrar que M é uma subvariedade de $M(\Omega)$. Mostraremos que em cada ponto de M' a injeção natural $j':M' \to M(\Omega)$ é diferenciável e tem posto p.

Escolhamos um ponto $m \varepsilon M'$ e seja x uma carta de M que seja lisa com respeito a Ω em cujo domínio U inclui m. Como M' é uma subvariedade de M podemos escolher uma carta w de M' com um domínio conexo W tal que $m \varepsilon W \subset U$. Como M' é uma variedade integral de Ω, segue que

$$(1) \quad \frac{\partial(x^s oj)}{\partial w^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1,\dots,p \; ; \quad s = p+1,\dots,n$$

onde $j:M' \to M$ é a injeção natural. As funções $x^s oj$ são portanto constantes em W e assim, usando nossa notação prévia, jW está no domínio U_a da carta $u \varepsilon M(\Omega)$.

Consequentemente em W

$$u^\beta oj' = x^\beta oj \quad ; \quad \beta = 1,\dots,p$$

As funções $u^\beta oj'$ são portanto diferenciáveis em m e assim j' é diferenciável em m.

Além disso como M' é um subvariedade p-dimensional de M, segue da equação (1) que a função matriz considerada

$$\left[\frac{\partial(x^\beta oj)}{\partial w^\alpha}\right] \qquad \alpha,\beta = 1,\dots,p$$

é não singular em m e assim j' tem posto p em m.

Reciprocamente, suponhamos que M' é uma subvariedade aberta de $M(\Omega)$.

Neste caso j' é um difeomorfismo e consequentemente se $m \varepsilon M'$

$$j_*(T_m M(\Omega)) = \Omega m$$

Segue do lema: 1.1 que se $i:M(\Omega) \to M$ é a injeção identidade

$$i_*(T_m M(\Omega)) = \Omega m$$

e assim a injeção natural $j=ioj':M' \to M$ é diferenciável e

$$j_*(T_m M') = \Omega m$$

Concluimos que M' é uma variedade integral de Ω.

<u>Proposição 1.6</u> - Uma distribuição Ω em M é integrável se só e se qualquer ponto de M está contido em uma variedade integral de Ω.

Prova:

Proposição 1.5 mostrou que a condição é necessária.

Nós agora supomos que a condição é satisfeita e provamos que Ω é involutiva e por isso integrável.

Escolhamos qualquer par de campos Ω vetoriais $X,Y \in \Omega$ e seja m qualquer ponto no domínio de $[X,Y]$.

Escolhamos uma variedade integral M' de Ω que contem m. Como X,Y são tangentes a M', proposição 7.5.7 (Referência 1) mostra que existe campos vetoriais X',Y' em M' que são j-relacionados a X,Y.

Portanto $[X',Y']$ é j-relacionado a $[X,Y]$ e consequentemente

$$[X,Y]_m = j_*([X',Y']_m) \in \Omega m$$

segue que $[X,Y] \in \Omega$.

Definição 1.6 - Se Ω é uma distribuição integrável em uma variedade de M de dimensão n, a componente conexa de $M(\Omega)$ contendo o ponto m é dita folha de Ω através de m.

Ela é a variedade integral conexa maximal que contém m. Se a dimensão de Ω é menor que n, M é dita uma variedade foleada.

Definição 1.7 - Sejam M uma variedade n-dimensional, M' uma variedade (n-p)-dimensional onde $0 < p < n$; $\phi: M \to M'$ uma submersão, vimos que a função

$$m \mapsto \text{Núcleo } \phi_{*m}$$

é uma distribuição integrável de Ω em M.

A fibra F_m de ϕ através de m é o subconjunto $\phi^{-1}(\phi_m)$ de M. A proposição 6.2.1 (Referência 1) mostra que é uma subvariedade de M.

Como $j: F_m \to M$ é a injeção natual, segue que

$$j_*(TF_m) = \text{Núcleo } \phi_{*m} = \Omega m$$

e assim qualquer fibra é uma variedade integral de Ω.

As fibras portanto formam um cobrimento aberto disjunto de $M(\Omega)$.

Como as folhas são subconjuntos abertos conexos de $M(\Omega)$ qualquer folha deve permanecer totalmente numa fibra.

Proposição 1.7 - Seja $j: M_1 \to M$ uma função diferenciável cujo posto permanece na subvariedade M' de M e cuja extensão está na subvariedade M' de M.

Se M' é uma variedade integral de uma distribuição integrável Ω em M e tem uma base contável para sua topologia, então a função induzida $f':M_1 \rightarrow M'$ é diferenciável.

Prova:

Quando Ω é uma distribuição n-dimensional, M' é uma subvariedade aberta de M e nossa proposição é conseqüência da proposição 5.4.3 (Referência 1).

Suponhamos que Ω tem dimensão $p < n$.

Escolhamos qualquer ponto m_1 no domínio de f.

Seja x uma carta de M, lisa com respeito a Ω em cujo domínio U inclui $m=f_{m1}$

Como f é contínua, podemos encontrar uma vizinhança conexa W de m_1 tal que $fW \subset U$.

Seja $U_B = x^{-1}(\mathbb{R}^p \times c)$, onde $c \in \mathbb{R}^{n-p}$

Temos visto que estes conjuntos U_B que não são vazios são domínios coordenados para $M(\Omega)$.

Como M' é um subconjunto aberto de $M(\Omega)$, os conjuntos $U_B \cap M'$ são subconjuntos abertos disjuntos de M' e, como M' tem base contável, os não vazios são contáveis em número.

A imagem de W é qualquer uma destas $x^s of$ e portanto um subconjunto contável de $\mathbb{R}$.

Mas $x^s of$ são contínuas e W é conexo e assim sua imagem é conexa e deve ser um ponto simples de $\mathbb{R}$.

Segue que $fW \subset U_a$, onde $a = p_2(xm)$, usando nossa notação prévia, temos em W

$$u^{\alpha} o j' o f = x^{\alpha} o f \quad ; \quad \alpha = 1,\ldots,p$$

Como u é uma carta de $M(\Omega)$, uoj' é uma carta da subvariedade aberta M' de $M(\Omega)$.

Como as funções $x^{\alpha}of$ são diferenciáveis em m_1, assim são as funções $u^{\alpha}oj'of'$

Consequentemente f' é diferenciável em m_1.

Definição 1.8 - Suponhamos que Ω é uma distribuição integrável de dimensão p em uma variedade M de dimensão n e que $p < n$.

Se $x:M \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ é uma carta lisa de M com domínio U e se $a \in p_2(xU)$, o conjunto

$$U_a = x^{-1}(\mathbb{R}^p \times a)$$

será chamado uma fatia de x.

Como U_a é o dompinio de uma carta de $M(\Omega)$, U_a é uma subvariedade aberta de $M(\Omega)$ e assim é uma variedade integral de Ω.

Qualquer componente conexa de uma fatia está justo numa folha.

Definição 1.9 - Qualquer carta x de M com domínio U é dita regular se é lisa e cada folha que toca U a intersepta em justo uma fatia.

Uma distribuição em M é regular se cada ponto de M está no domínio de uma carta regular.

Proposição 1.8 - Seja ϕ uma submersão de uma variedade n-dimensional M em uma variedade (n-p) dimensional M', onde $0 < p < n$.

A função Ω definida por $m \mapsto$ Núcleo ϕ_{*m} é uma distribuição regular em M de dimensão P.

Prova:

Supomos que cada ponto de M está no domínio de uma carta regular.

Podemos escolher uma carta x de M, cujo domínio U inclui m, cuja extensão é uma vizinhança cúbica de xm, e uma carta Y de M' tal que

$$Y^{s-p} o \phi = x^s \quad , \quad s = p+1, \ldots, n$$

Já mostramos que x é uma carta lisa, mostraremos que é regular.

Uma fatia de x é um subconjunto aberto conexo de $M(\Omega)$, já que é um domínio coordenado em $M(\Omega)$ cujo posto é o cubo $\mathbb{R}^p$. Consequentemente uma fatia deve estar inteiramente em justo uma folha.

Por outra parte, uma fatia $x^{-1}(\mathbb{R}^p \times a)$ se projeta sobre ϕ ao ponto $Y^{-1}a$ e assim, duas fatias diferentes não podem estar na mesma fibra de ϕ. Segue que qualquer folha contem ao máximo uma fatia de x.

Como cada ponto de U está em uma fatia de x, qualquer folha que toca U está em exatamente uma fatia.

Logo x é regular.

<u>Proposição 1.9</u> - Quando Ω é uma distribuição regular em uma variedade M, o conjunto M' das folhas de Ω pode admitir uma estrutura C^∞ de forma que w é um submersão de M em M'.

w é a projeção canônica de M sobre o conjunto M' das folhas de Ω definida por $m \mapsto$ folha contendo m.

Prova:

Suponhamos que $x: M \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ é uma carta regular em M com domínio U e seja $U' = wU$. Como x é regular qualquer folha que toca U o faz em exatamente uma fatia.

A função $x': M' \to \mathbb{R}^{n-p}$ definida sobre U' por $m' \mapsto p_2(xm)$ onde m é um ponto de $w^{-1}m' \cap U$, é portanto propriamente definida.

Como x é uma injeção e sua extensão é um conjunto aberto $P_2(xU)$, x' é uma carta em M'.

Os domínios de todas as tais cartas conjuntamente cobrem M' e mostraremos que é definida uma estrutura C^∞ neste conjunto.

Escolhamos qualquer ponto $m' \in M'$. Mostraremos que quaisquer duas destas cartas cujos domínios incluem m' são relacionadas diferencialmente em m'.

Consideremos o conjunto S de cartas regulares em M e cujos domínios encontram L = folha $w^{-1}m'$.

Duas tais cartas são definidas como equivalentes se as cartas correspondentes em M' são relacionadas diferencialmente em m', o que dá lugar a uma relação de equivalência em S.

Seja S' uma classe de equivalência, a união dos conjuntos (domínio x) $\cap$ L, para todo $x \in S'$ é denotado por $\gamma(S')$ e é um subconjunto aberto não vazio de uma subvariedade L de M.

Se dois conjuntos $V(S')$, $V(S'')$ tem um ponto em comum então S',S'' incluem cartas x,y com domínios U,V tais que $U \cap V \cap L \neq \phi$

Como vimos, isto implica que x,y são equivalentes e assim $S'=S''$.

Segue que os conjuntos $V(S')$,$V(S'')$,..., formam um cobrimento disjunto de L.

Mas a variedade L é conexa e assim pode ter somente um conjunto e uma só classe de equivalência.

Nossa condição é portanto satisfeita e temos uma estrutura C^∞ em M'.

Dado um ponto $m \in M$, escolhamos uma carta regular X de M cujo domínio inclui m e seja X' a carta correspondente de M'. Como

$$X'^{s-p} \circ w = X^s \quad ; \quad s = p+1,\dots,n$$

segue que w é diferenciável e tem posto $n-p$ em m.

Consequentemente w é uma submersão de M sobre M'.

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE LIE

Definição 2.1 - Um grupo de Lie G é um grupo que tem a estrutura de uma variedade diferenciável e para o qual a aplicação de grupo

$$\theta: G \times G \to G$$
$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

é diferenciável.

Definição 2.2 - Dado um elemento a de um grupo de Lie G, a função

$$L_a: G \to G$$
$$g \mapsto ag$$

é chamada translação a esquerda.

Como a aplicação de grupo θ é diferenciável, L_a é diferenciável.

Sua inversa $L_a{-1}$ é também diferenciável e assim L_a é um difeomorfismo de G sobre si mesmo.

O mesmo se aplica a translação à direita $R_a: g \mapsto g_a$

Proposição 2.1 - Seja G um grupo de Lie

Então a função $\Psi: G \to G$
$$g \mapsto g^{-1}$$

é um difeomorfismo.

Prova:

Como Ψ é uma bijeção e é sua própria função inversa nós temos só que provar sua diferenciabilidade.

Basta mostrar que é diferenciável no elemento unidade e, já que dado $g \in G$

$$\Psi = R_{g^{-1}} \circ \Psi \circ Lg^{-1}$$

e a diferenciabilidade de Ψ em g segue da diferenciabilidade em e.

Para mostrar que Ψ é diferenciável em e, escolhamos uma carta x de G com domínio U tal que xe = 0.

Exemplo 12.2.1 (Referência 1) mostrará que podemos escolher uma vizinhança V de e tal que $V^2 \subset V$

Denotamos a restrição x/V por y

Considerando $f:\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função representante para θ que usa as cartas y x y e x para G x G e G respectivamente

Como

$$f(w,0) = w$$

segue que

$$f^i_j(0,0) = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1,\dots,n)$$

Usando teorema da função implicita, existem vizinhanças U' e V' de 0 em $\mathbb{R}^n$ tal que a um elemento dado $w \in U'$ corresponde um único elemento $v \in V'$ tal que

$$f(v,w) = 0$$

e a função $\chi:w \to v$ é diferenciável.

Como χ é uma função representativa para segue que Ψ é diferenciável em e.

Como vimos um grupo de Lie é um grupo que tem a estrutura de uma variedade diferenciável pela qual as funções de grupo são diferenciáveis, mas com isso restringimos a topologia da variedade.

Definição 2.3 - Um grupo topológico G é um grupo que tem a estrutura de um espaço topológico, pela qual as funções de grupos

$$\theta: GxG \to G \quad e$$
$$\Psi: G \to G$$

são contínuas.

Segue da proposição 2.1 que o grupo de Lie com topologia induzida por sua estrutura diferenciável é um grupo topológico.

Um subgrupo de um grupo topológico G que seja um subconjunto aberto de G é chamado subgrupo aberto de G.

Um subgrupo aberto H de G é necessariamente fechado, já que seu complemento G-H é a união de todos os abertos gH, onde $g \varepsilon$ G-H, e assim é aberto em G.

Proposição 2.2 - A componente G_e contendo a unidade e do grupo topológico G é um subgrupo normal de G.

As outras componentes são as co-chasses de G_e em G.

Prova:

Como G_e é um subconjunto conexo de G, $G_e \times G_e$ é conexo e assim $\theta(G_e \times G_e)$ é uma vizinhança conexa de e.

Segue que $\theta(G_e \times G_e) \subset G_e$

Mas $G_e^{-1} = \Psi G_e$ também é um vizinhança conexa de e e assim $G_e^{-1} \subset G_e$

Consequentemente G_e é um subgrupo de G.

Como uma translação em G é um homomorfismo de G sobre si mesmo.

Se $g \varepsilon G$, gG_eg^{-1} é portanto uma vizinhança de e e assim permanece em G_e.

Segue que G_e é um subgrupo normal de G.

Se Gg é uma componente de G contendo g, um argumento similar msotra que $gG_e \subset G_g$ e portanto $g^{-1}G_g \subset G_e$

Concluimos que

$$G_g = gG_e$$

<u>Proposição 2.3</u> - Se o espaço subjacente do grupo topológico satisfaz o axioma de sepração T_1 então satisfaz o axioma mais forte T_2.

Prova:

Primeiro mostraremos que qualquer ponto dado $g \varepsilon G$ que é distinto de e é separado de e.

Como G tem T_1 - topologia, podemos escolher uma vizinhança U de e que não contém g. Então exemplo 12.2.2 (Referência 1) mostra que existe uma vizinhança V de e tal que $V^{-1}V \subset U$.

Logo V_g e V são vizinhanças disjuntas de g e e respectivamente. Já que h pertence a suas interseções então existe um ponto $k \in V$ tal que $kg = h$. Mas então

$$g = k^{-1}h \in V^{-1}V \subset U$$

e isto é uma contradição.

Mais geralmente, supohamos que g,g' são pontos distintos de G.

Os pontos e e $g^{-1}g'$ admitem vizinhanças disjuntas w e w'. Consequentemente g_w e $g_{w'}$ são vizinhanças disjuntas de g e g'.

Proposição 2.4 - A variedade subjacente de um grupo de Lie conexo admite uma base contável para sua topologia.

Prova:

Escolhamos uma vizinhança coordenada U da unidade e tal que $U = U^{-1}$.

Como U é homeomórfico a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, podemos escolher um subconjunto contável S de U que seja denso em U.

O conjunto $S = S'U(S')^{-1} = S^{-1}$ está em U e é, certamente, denso em U.

Denotemos por H_o grupo gerado por S, que consiste de todos os produtos finitos de pontos de S.

H é portanto contével e nossa proposição segue da proposição 3.3.6 (Referência 1) se mostramos que os domínios coordenados $\{hU\}$, $\forall h \in H$ conjuntamente cobrem nosso grupo de Lie.

Temos que mostrar que qualquer ponto $g \varepsilon G$ permanece ao menos em um tal domínio.

Como G é conexo, G é gerado por U e assim

$g = g_1 g_2, \ldots, g_n$ onde $g_\alpha \varepsilon U; \alpha = 1, \ldots, p$

Como a aplicação de grupo θ é contínua, existe uma vizinhança U_α de g_α tal que

$U_1 U_2 \ldots\ldots U_p \subset gU$

Como S é denso em U, existe um ponto $s_\alpha \varepsilon S$ tal que $s_\alpha \varepsilon U_\alpha$;o produto

$h = s_1 s_2 \ldots\ldots sp \ \varepsilon \ H$ e $h \varepsilon gU$

Consequentemente

$g \ \varepsilon \ hU^{-1} = hU$

Definição 2.4 - Um grupo de Lie H que é ao mesmo tempo um subgrupo e uma subvariedade de um grupo de Lie G e dito um subgrupo de Lie de G.

Proposição 2.5 - Um subgrupo H de um grupo de Lie G que é uma subvariedade regular de G é um subgrupo de Lie de G.

Prova:

Seja $j:H \to G$ a injeção natural

A aplicação de grupo $\theta:G \times G$ dá lugar a uma função diferenciável

$\theta o(jxj):H \times H \to G$

que tem valores em H proposição 5.4.3 (Referência 1) mostra que isto induz uma função diferenciável

$$H \times H \to H$$

que é a aplicação de grupo para H.

Definição 2.5 - O subgrupo de Lie H de G será dito conexo se a variedade subjacente é conexa.

Proposição 2.6 - A componente G_e que contém a unidade e de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie conexo de G.

Proposição 2.2 mostra que as componentes de um grupo de Lie são as co-classes a esquerda de G_e em G, e como são subvariedades regulares de G a bijeção de G_e sobre G_g determinada pela translação a esquerda L_g são difeomórficas.

Proposição 2.7 - Cada componente de um grupo de Lie G é uma subvariedade aberta conexa de G com uma base contável para sua topologia.

Prova:

Ver proposição 2.4.

Definição 2.6 - Um campo de vetores X em um grupo de Lie G diz-se que é invariante a esquerda se é invariante sob todas as translações à esquerda de G.

Se denotarmos a diferencial de L_a por $a_*:TG \to TG$ então X é invariante a esquerda se e só se

$$X(ag)=a_*(Xg) \quad \text{para todo } a,g \in G$$

Um campo vetorial invariante à esquerda X sobre G é determinado por seu valor na unidade e já que

$$X_a = a_*(Xe) \text{ para todo } a \in G$$

Reciprocamente proposição 2.8 mostrará a seguir que se $v \in T_eG$ então $g \mapsto g_* v$ é o campo vetorial invariante à esquerda cujo valor em e é v.

Usando a operação colchete para definirmos multiplicação, o conjunto DG de campos vetoriais invariante à esquerda sobre G tem uma estrutura de Álgebra de Lie de mesma dimensão de G.

<u>Proposição 2.8</u> - A função $DG \to T_eG$ definida por $X \mapsto X_e$ é um isomorfismo do espaço vetorial DG sobre T_eG.

Prova:

Como qualquer campo vetorial invariante a esquerda X é determinado por seu valor em e, a função $X \mapsto X_e$ é um isomorfismo de espaços vetoriais DG em T_eG.

Para mostrar que esta função é sobrejetiva em T_eG escolhamos um elemento $v \in T_eG$ e mostramos que a função X definida por $g \mapsto g_* v$ é um campo vetorial de G invariante à esquerda cujo valor em e é v.

Identificando $T(G \times G)$ com $TG \times TG$ nós definimos uma função diferencial $G \to T(G \times G)$ por $g \mapsto (og, v)$.

Segue da proposição 4.5.2 (Referência 1) que X é a composição desta função com θ_*, onde $\theta: G x G \to G$ é uma aplicação de grupo.

X é portanto diferenciável e assim é um campo vetorial sobre G e é invariante a esquerda já que se $a,g \in G$

$$a_*(Xg) = a_*(g_*v) = (ag)_*v = X(ag)$$

e seu valor em e é

$$e_*v = v$$

<u>Definição 2.7</u> - Se $v,w \in T_eG$ e se X,Y são campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G tal que

$$X_e = v \quad e \quad Y_e = w$$

definimos

$$[v,w] = [X,Y]_e$$

Com esta estrutura adicional, T_eG é chamado de Lie de G e é denotado por LG.

Proposição 2.8 mostra que se $v_1,\ldots,v_n$ é uma base para o espaço vetorial T_eG então o campo de vetores $X_1,\ldots,X_n$ onde X_r é definido por $g \mapsto g_*v_r$, forma uma base para LG.

Segue que

$$\left[X_i,X_j\right] = \sum_h c_{ij}^h X_h \qquad (h,i,j=1,\ldots,n)$$

Os números reais c_{ij}^h são chamados constantes estruturais de G.

Em termos da base dada, multiplicação em LG é dada por

$$\left[v_i,v_j\right] = \Sigma\, c_{ij}^h\, v_h \qquad (h,i,j=1,\ldots,n)$$

Por outra parte, se S é uma subalgebra de LG então $[A_\alpha A_\beta]\varepsilon\Omega$ e assim Ω é involutiva.

<u>Proposição 2.10</u> - Seja H um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G e $j:H \to G$ a injeção natural então j_{*e} é isomorfismo de LH sobre uma subalgebra de LG.

H é uma variedade integral da distribuição invariante à esquerda sobre G cujo valor em e é $j_*(T_eH)$.

Prova:

Como j é uma imersão, j_{*e} é um isomorfismo do espaço vetorial T_eH sobre um subespaço vetorial de T_eG.

Vamos mostrar que preserva o produto. Escolhamos um elemento $a \in T_eH$ e seja

$$b = j_*a$$

Se L'H é a translação à esquerda de H por um elemento $h \in H$ então

$$(1) \qquad L_h oj = j_o L'_h$$

Consequentemente o campo vetorial invariante a esquerda B sobre G determinado por b é j-relacionado ao campo vetorial invariante à esquerda A determinado por a.

Segue proposição 7.5.2 (Referência 1) que, quando a_1 é um outro elemento de T_eH, os campos vetoriais

$$[B,B_1] \quad e \quad [A,A_1]$$

são também j-relacionados só se

$$j_*[a,a_1] = [b,b_1]$$

A subalgebra $j_*(T_eH)$ de L.G determina uma distribuição invariante à esquerda Ω sobre G.

Se $h \in H$, segue de (1) que

$$\Omega h=(L_{h*}oj_*)T_eH=(j_*oL'_{h*})T_eH=j_*(T_hH)$$

Logo H é uma variedade integral de Ω.

Obs.: 1) Se H é um subgrupo de Lie de G, existe uma subalgebra de LG que é isomórfica a LH

2) LH é formada por todos os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G que são tangentes a H em e.

<u>Proposição 2.11</u> - Seja S uma subalgebra de LG, há um único subgrupo de Lie conexo H de G tal que j_*e é um isomorfismo de LH sobre S onde j é a injeção natural de $H \to G$.

Prova:

A distribuição invariante a esquerda Ω sobre G tal que $\Omega e=S$ é integrável.

Seja H a folha de Ω contendo e.

Se g é qualquer elemento de G, a função Lgoj é um mergulho de H sobre G e desse modo seu percurso gH recebe uma estrutura de subvariedade de G difeomórfica a H.

Como Ω é invariante a esquerda a variedade gH é também uma variedade integrável de Ω, e como é conexa está na folha K de Ω contendo g.

Realmente, deve coincidir com esta folha, porque de outra forma o conjunto $g^{-1}K$, com a estrutura de subvariedade difeomórfica aK, seria uma variedade integral conexa de Ω contendo e e tendo H como subconjunto próprio.

Em particular, se $g \varepsilon H$ segue que $gH=H$.

Esta igualdade implica que, se $g,h \varepsilon H$ então $gh \varepsilon H$ e, como $e \varepsilon H$ então $g^{-1} \varepsilon H$.

Consequentemente H é um subgrupo de um grupo de Lie G as co-classes à esquerda são as folhas de Ω.

Para mostrar que H é um subgrupo de Lie de G, temos que mostrar que a aplicação de grupo $\Psi:H.H \to H$ que é induzida pela função diferencial $\theta o(j.j):H.H \to G$ elas mesma diferenciável.

Como H é uma subvariedade conexa de G, implica que permanece na componente G_e.

Considerando proposição 2.7, é uma subvariedade de G_e e tem uma base contável para sua topologia.

A diferenciabilidade de Ψ segue da proposição 1.7.

Como H é uma subvariedade integral de Ω

$$j_*(T_eH) = \Omega_e = S$$

e consequentemente proposição 2.10 mostra que j_{*e} é um isomorfismo de LH sobre S.

Para estabelecer a unicidade de H, suponhamos que H' é um subgrupo de Lie conexo de G tal que j'_{*e} é um isomorfismo de LH' sobre S, onde $j':H' \to G$ é a injeção natural.

H' é também uma variedade integral de Ω contendo e, e, como é conexa é uma vizinhança de e em H.

Consequentemente H é gerado por H' e isto implica que

$$H = H'.$$

Obs.: No caso especial quando $S=LG$ é claro que o subgrupo de Lie H é G_e. Qualquer grupo de Lie tem uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Ver (Referência 9) teorema de Ado's.

<u>Proposição 2.12</u> - Qualquer campo vetorial invariante à esquerda X em um grupo de Lie G é completo.

Prova:

Existe uma curva integral c de X que começa em e e suponhamos que tenha domínio I.

Então se g é um ponto de G, a curva $cg=Lg^{\circ}c$ é uma curva integral de X que começa em g e também tem domínio I, já que, como X é invariante à esquerda.

$$\dot{c}g = Lg_{*}{}^{\circ}\dot{c} = Lg_{*}oXoc = Xocg$$

então proposição 8.2.5 (Referência 1) mostra que o campo vetorial X é completo.

<u>Definição 2.9</u> - Suponhamos que v é qualquer vetor de T_eG e que Xv é o campo vetorial invariante à esquerda sobre G tal que $X_ve=v$.

Se c é uma curva maximal integral de Xv começando em e a função $\exp : T_eG \to G$

$$v \longmapsto c\ell$$

é chamada função exponencial do grupo de Lie G.

Vejamos esta função sobre outro ponto de vista.

Os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre um grupo de Lie G de dimensão μ forma um espaço vetorial real LG da mesma dimensão.

Um base $X_1, \ldots, X_n$ de LG é uma paralelização sobre G e assim determina uma conexão linear de G.

Segue secção 9 (Referência 1) que esta conexão não depende da nossa escolha de base.

O Spray associado é chamado Spray invariante a esquerda sobre G.

De acordo com proposição 10.3.1. (Referência 1), a geodésica maximal K deste Spray, com condição inicial v é uma curva maximal integral começando de $\mathbb{T}v$ em um campo invariante à esquerda $g \mapsto g_v^*$.

O Spray invariante à esquerda é portanto completo e sua aplicação exponencial $v \mapsto K\ell$ é definida sobre TG e é denotada por Exp_e que é diferenciável.

<u>Proposição 2.13</u> - A geodésica maximal com condição inicial $v \in T_eG$ do Spray invariante a esquerda sobre um grupo de Lie G é a curva Exp tv.

Prova:

Segue da proposição 10.5.1. (Referência 1)

$$\exp sv = \mathrm{Exp}_e sv \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

<u>Proposição 2.14</u> - Se $v \in T_eG$ e se $r,s \in \mathbb{R}$ então

$$\exp(r+v)v = (\exp rv)(\exp sv)$$

Prova:

Como exptv é uma curva integral de um campo vetorial $g \mapsto g_v^*$ começando em e, segue do lema 8.2.1 (Referência 1) que $\exp(r+t)v$ é uma curva integral deste campo vetorial começando em exprv e consequentemente

$$\exp(r+t)v = (\exp rv)(\exp tv)$$

isto é verdade sobre $\mathbb{R}$ em particular para um ponto s.

A proposição 2.14 mostra que $\exp tv : \mathbb{R} \to G$ é um homomorfismo diferenciável do grupo aditivo de Lie $\mathbb{R}$ no grupo de Lie G.

Qualquer homomorfismo diferenciável de $\mathbb{R}$ em G é chamado um subgrupo a um-parâmetro de G.

<u>Proposição 2.15</u> - Qualquer subgrupo a um parâmetro ϕ de um grupo de Lie G é igual a exptv para um único vetor $v \in T_eG$

Prova:

Como $\phi 0$ é a unidade e de G o vetor

$v = \dot{\phi} 0$ pertence a T_eG

Seja X um campo vetorial invariante à esquerda sobre G tal que

$$X_e = v$$

Como ϕ é homomorfismo

$$\phi o \lambda_s = L_{\phi s} o \phi_s \quad \text{onde} \quad s \in \mathbb{R}$$

onde λ_s é a translação $a \mapsto a+s$ sobre $\mathbb{R}$.

Como o campo vetorial $\partial/\partial t$ é invariante sob qualquer tal translação

$$\dot{\phi}_s = \phi_*(\lambda_{s*}(\partial/\partial t)_0) = (L_{\phi s})_*(\dot{\phi}0) = X(\phi s);$$

segue que ϕ é uma curva maximal integral de X começando em e e assim deve ser $\exp tv$.

<u>Proposição 2.16</u> - Seja H um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G e j a injeção natural de H em G.

Então

$$\exp o\, j_{*e} = j o \exp_H$$

Prova:

Suponhamos que $\mu \in T_eH$ e seja $v = j_*\mu$

Como vimos na prova da proposição 2.10, os campos vetoriais invariantes à esquerda X,Y sobre G,H respectivamente determinados por μ,v são j-relacionados.

Considerando proposição 8.4.1 (Referência 1) $jo(\exp_H tu)$ é uma curva integral de X, que começa em e. Consequentemente esta curva é a curva $\exp tv$.

Segue que

$$j(\exp_H u) = \exp v = \exp(j_{*e} u)$$

Esta proposição implica que quando um vetor $v \in T_eG$ é tangente a um subgrupo de Lie H o contra domínio (imagem) da curva exptv permanece em H. Há uma recíproca da proposição 2.16.

Com a restrição sobre a topologia de H.

<u>Proposição 2.17</u> - Seja c uma curva em um grupo de Lie G cuja imagem está em um subgrupo de Lie H.

Se H tem uma base contável para sua topologia então cada vetor $\dot{c}s$ é tangente a H.

Prova:

Seja H uma variedade integral de uma distribuição integrável sobre G.

Segue Proposição 12.3.4 (Referência 1) que existe uma função diferenciável

$c:\mathbb{R} \to H$ definida por

$c = j o c'$

consequentemente

$$\dot{c}s = j_*(\dot{c}'s)$$

se s pertence ao domínio de c.

Obs.: Seja G um grupo de Lie

Uma escolhe de base para T_eG determina um isomorfismo padrão de T_eG sobre $\mathbb{R}^n$, se este isomorfismo é usado para identificar $\mathbb{R}^n$ com T_eG então, como temos visto no caso geral de um Spray, a aplicação exponencial $T_eG \to G$ determina uma carta normal em alguma vizinhança de e em G.

Usaremos esta estrutura de grupo para construir outra classe de cartas de e.

Suponhamos que nos é dado um subespaço S de T_eG.

Escolhamos uma base de T_eG cujos primeiros vetores $v_1,\ldots,v_p$ formam uma base de S.

Seja δ o isomorfismo correspondente $T_eG \to \mathbb{R}^n$ consideremos a função $x:T_eG \to G$ definida por

$$x=(\exp\Sigma\delta^{\alpha}v_{\alpha})(\exp\Sigma\delta^{s}v_{s})$$

onde $\alpha=1,\ldots,p$ e $s=p+1,\ldots,n$

Se $f:G \to \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável cujo domínio inclui e, então

$$(\partial/\partial\delta^{i}(fox))_0 = (d/dt(foexptv_i))_0$$

onde $i=1,\ldots,n$

Como $exptv_i$ é uma curva integral de um campo vetorial invariante à esquerda X sobre G tal que $X_e=v_i$, proposição 8.5.1 (Referência 1) mostra que

$$(d/dt(joexptv_i))_0 = v_if$$

Consequentemente se x é uma carta normal asso ciada com abase dada de T_eG

$$\frac{\partial}{\partial\delta^i}(x^j o x)_0 = (\frac{\partial}{\partial x^i})_e \; x^j = \partial_{ij}$$

e x é portanto um difeomorfismo sobre uma vizinhança de 0 em T_eG.

Quando identificarmos T_eG com $\mathbb{R}^n$, a inversa w deste difeomorfismo é uma carta de G cujo domínio inclui e.

Obs.: Suponhamos agora que S é uma subalgebra de L.G.
Então como vimos nas proposições 2.9, 2.10, 2.11, S determi na uma distribuição integrável Ω sobre o grupo de Lie G.
A folha através de e é um subgrupo de Lie conexo H de G e as folhas restantes são as co-classes à esquerda de G.

Proposição 2.18 - A carta w é uma carta lisa para a distribuição Ω determinada por S.

Prova:

Como a dimensão de Ω é P, basta mostrar que o campo vetorial $\partial/\partial w^\alpha$ $(\alpha=1,\ldots,P)$ pertence a Ω.

Para fazer isto, seja V o subespaço de T_eG complementar a S expandido por $v_{p+1},\ldots,V_n$

Escolhamos qualquer ponto

$$g = (\exp v)(\exp s)$$

onde $v \in V$, $s \in S$ no domímio da carta w.

Dado um inteiro β tal que $1 \leq \beta \leq p$, consideremos em w^β a curva coordenada

$$\delta = (\exp v)(\exp(s+tv_\beta))$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial w^\beta}\, g = \dot{\delta}0$$

nós mostraremos que $\dot{\delta}0 \in \Omega g$, e para fazer isto, definimos uma curva $c:\mathbb{R} \to G$ tal que

$$\exp(s+tv_\beta) = (\exp s)c$$

De acordo com a proposição 2.16, $\exp(s+tv_\beta)$ permanece em H para todos os valores de t e assim a imagem de c está em H.

Proposição 2.17 mostra que $\dot{c}0$ é tangente a H e assim estar em Ωe.

Como $\delta = g_c$ e Ω é invariante a esquerda

$$\dot{\delta}0 = g_*(\dot{c}0) \in \Omega g$$

Obs.: Qualquer subgrupo H de um grupo de Lie G age como um grupo de transformações sobre G com a função $G \times H \to G$

$$(g,h) \mapsto gh$$

<u>Proposição 2.19</u> - Seja V um espaço vetorial real de dimensão n com a topologia padrão.

Se $\{v_\alpha\}$ $(\alpha=1,\dots,n)$ é uma sequência de vetores não nulos de V convergindo a zero, existe uma subsequência $\{a_\alpha \zeta_\alpha\}$ tal que a sequência $\{\zeta_\alpha\}$ de vetores tem limite não nulo ζ.

Prova:

Escolhamos uma base para V e então façamos a identificação padrão de V com $\mathbb{R}^n$

Cada vetor v_α pode ser expressado como $b_\alpha s_\alpha$, onde $s_\alpha \in S^{n-1}$ e $b_\alpha > 0$. Como a esfera S^{n-1} é compacta e satisfaz o primeiro axioma de contabilidade, $\{s_\alpha\}$ admite uma subsequência convergente $\{S_{y(\alpha)}\}$ com limite $\zeta \in S^{n-1}$

Tomando $a_\alpha = b_{y(\alpha)}$ e $\zeta_\alpha = S_{y(\alpha)}$

a subsequência $\{a_\alpha \zeta_\alpha\}$ de $\{v_\alpha\{$ tem a propriedade requerida.

<u>Proposição 2.20</u> - Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G

Se $\{\zeta_\alpha\}$ $(\alpha=1,\ldots,n)$ é uma sequência de vetores de T_eG com limite ζ tal que $\exp(a_\alpha \zeta_\alpha) \in H$, onde $\{a_\alpha\}$ é uma sequência de números reais não nulos com limite zero, então, $\exp \lambda\zeta \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, escolhamos um inteiro n_α tal que

$$|\lambda - n_\alpha a_\alpha| < |a_\alpha|$$

e então λ é o limite da sequência $\{n_\alpha a_\alpha\}$

Então $\lambda\zeta$ é o limite da sequência $\{n_\alpha a_\alpha \zeta_\alpha\}$ e portanto como a aplicação exponencial é contínua, $\exp\lambda\zeta$ é o limite de $\{\exp(n_\alpha a_\alpha \zeta_\alpha)\}$, mas segue da proposição 2.14 que

$$\exp(n_\alpha a_\alpha)_\alpha\} = (\exp a_\alpha \zeta_\alpha)^{n_\alpha}$$

e assim qualquer valor desta sequência está em um subconjunto fechado H de G.

Consequentemente $\exp \lambda\zeta \in H$.

<u>Lema 2.1</u> - Seja $c:\mathbb{R} \to G$ uma curva começando em e cuja imagem está em um subgrupo fechedo H de um grupo de Lie G.

Se $\zeta = \dot{c}0$ então $\exp \lambda\zeta \in H$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova:

Para valores suficientemente pequenos (mas não nulos) de t podemos definir c como

$$s \longmapsto \exp s(ks)$$

onde k é uma curva em T_eG

Escolhamos uma sequência $\{a_\alpha\}$ $(\alpha=1,\ldots.)$ de números reais pertencentes ao domínio de k que tenha limite zero.

Então a sequência associada $\{\zeta_\alpha = ka_\alpha\}$ de vetores de T_eG tem limite $\dot{c}0$. Para provar isto, escolhamos uma carta normal x em e e seja

$$k = \Sigma\, k^i\, (\partial/\partial x^i)_e$$

Então se $C = x \circ c$

$$C_s^i = x^i(\exp s(ks)) = s(k^i s)$$

Segue que

$$\lim_{s\to 0} k^i s = \lim_{s\to 0} \frac{C^i s}{s} = \left(\frac{dC^i}{dt}\right)_0$$

e portanto

$$\lim \{\zeta_\alpha\} = \lim \{ka_\alpha\} = \dot{c}0$$

Por hipótese, $\exp a_\alpha \zeta_\alpha \in H$ e assim nosso lema é uma consequência imediata da proposição 2.20.

Com o objetivo de mostrar que um subgrupo H de um grupo de Lie G que é um subconjunto fechado de G

ou é um subconjunto descrito

ou admite uma estrutura de um subgrupo de Lie de G

. Suponhamos que H é um fechado e conexo do grupo de Lie G.

Definamos um subconjunto S de T_eG que deverá ser uma subalgebra de LG e então mostraremos que o subgrupo de de Lie conexo correspondente de G tem o mesmo subgrupo subjacente de H.

<u>Lema 2.2</u> - O conjunto S de vetores $v \in T_eG$ tal que $\exp \lambda v \in H$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ é um subespaço vetorial de T_eG.

Prova:

Consideremos a curva $c:\mathbb{R} \to G$ tal que

$$c = (\exp tv)(\exp tw) \text{ onde } v,w \in S.$$

Segue da fórmula de Leibniz's que

$$\dot{c}0 = v + w$$

Como a extensão de c permanece em H, lema 2.1 implica que $v+w \in S$

Como

$\exp \lambda(av) = \exp(\lambda a)v$ se $a \in \mathbb{R}$, segue que se $v \in S$ então $av \in S$.

<u>Proposição 2.21</u> - O espaço vetorial S é uma subálgebra de L.G.

Prova:

É trivial se $S=0$ ou T_eG

Caso contrário seguirá da proposição 2.19 se pudermos provar que a distribuição Ω, definida em G por $g \mapsto g_*S$ é integrável.

Mostraremos que a carta w construída para proposição 2.18 é uma carta lisa para Ω e para fazer isto usaremos a notação da proposição 2.18; nosso propósito é o mesmo, porque nós pretendemos mostrar que $\dot{c}0$ permanece em Ωe o que implica em

$$\dot{\delta}0 = g_*(\dot{c}0)$$

permanecer em Ωg.

Pela definição de S implica que $\exp(s+tv_\beta)$ está em H para todos os valores de t.

Consequentemente a extensão de c está no subgrupo fechado H e segue do lema 2.1 que $\dot{c}0$ permanece em Ωe.

Se g é um ponto dado de G, a carta $w \circ Lg^{-1}$ é uma carta lisa para Ω cujo domínio inclui g.

Consequentemente Ω é uma distribuição integrável.

<u>Proposição 2.22</u> - Um subgrupo conexo fechado H de um grupo de Lie de G

ou é a unidade e

ou admite a estrutura de um subgrupo conexo de Lie de G.

Prova:

Com a topologia de subconjunto conexo, H é um grupo topológico.

Considerando a subálgebra S de LG determinada por H como na proposição 2.21, suponhamos que $S=T_eG$.

Como exp T_eG é conexa, está na componente G_e de G. Usando proposição 2.3 segue que o domínio expS' de uma carta normal gera G_e.

Mas

$$\exp S' \subset \exp S \subset H$$

e assim expS' é uma vizinhança de e em H e gera H. Consequentemente o conjunto subjacente de H e G_e coincidem e assim H admite a estrutura de subgrupo de Lie G_e.

Suponhamos que $0 \neq S \neq T_eG$

Usaremos S e o subespaço complementar V de T_eG para construir uma carta w como na proposição 2.18.

Restringimos w de tal maneira que sua extensão é $\delta(S'+V')$ onde S',V' são vizinhanças de 0 em S,V respectivamente.

Escolhendo V' suficientemente pequena podemos assegurar que o domínio U' da restrição satisfaz.

(1) $U' \cap H = \exp S'$

Se este não fosse o caso, poderíamos escolher uma sequência $\{V'_\alpha\}$ de vizinhanças de 0 em V convergindo a 0 e para cada α existiria um vetor não nulo $v_\alpha \in V'_\alpha$ e um vetor $s_\alpha \in S'$ tal que

$$(\exp v_\alpha)(\exp s_\alpha) \subset H$$

Segue que $\exp v_\alpha \in H$ e portanto, como a sequência $\{v_\alpha\}$ de vetores não nulos de V converge a 0, proposições 2.19 e 2.20 mostraram que existe um vetor não nulo $\zeta \in V$ tal que $\exp \lambda\zeta \in H$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

Logo $\zeta \in S$ é uma contradição.

Podemos supor que a equação (1) é satisfeita.

Proposição 2.11 nos diz que a subálgebra S determina um subgrupo de Lie conexo H' de G tal que

$$S = j_*(T_e H')$$

se segue da proposição 2.16 que

$$\exp S' = \exp_{H'} S''$$

onde S" é uma vizinhança de 0 em $T_e H'$.

Assim $\exp S'$ está em H' e, como $\exp_{H'}$ age como um difeomorfismo em alguma vizinhança de 0 em $T_e H'$, contém uma vizinhança de e em H'. Portanto $\exp S'$ gera H'.

Por outra parte, $U' \cap H'$ é uma vizinhança de e em um grupo topológico conexo H e assim gera H.

Os conjuntos subjacentes de H e H' coincidem e H admite a estrutura de subgrupo de Lie H'.

Finalmente, suponhamos que $S=0$.

Seja V' uma vizinhança de 0 em T_eG sobre a qual a função exp é um difeomorfismo.

Escolhendo V' suficientemente pequena pode-assegurar que

(2) $\exp V' \cap H = e$

Se este não fosse o caso, poderíamos escolher uma sequência $\{V'_\alpha\}$ se vizinhanças de 0 em V' convergindo a 0 e para cada α existiria um vetor não nulo $v_\alpha \in V_\alpha$ tal que $\exp v_\alpha \in H$ que implica na existência de um vetor não nulo $\zeta \in T_eG$ tal que $\zeta \in S$. Como isto é impossível, podemos supor que a condição (2) é satisfeita.

Segue então que e é um subconjunto aberto de H e assim gera H.

Consequentemente $H = e$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES EM GRUPOS DE LIE

Definição 3.1 - Um grupo de Lie G é dito que age em uma variedade diferenciável M como um grupo de transformação de Lie se é dada uma sobrejeção global $\Phi:GxM \to M$ que é diferenciável e tal que se $g,h \in G$ e $m \in M$

$$(1) \qquad \Phi(g,\Phi(h,m) = \Phi(gh,m)$$

Se $g \in G$ então $\phi_g:M \to M$ dada por $m \longmapsto \Phi(g,m)$ é composição de funções diferenciáveis.

Logo equação (1) fica

$$\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$$

Como Φ é uma sobrejeção ϕ_e é a identidade sobre M, já que se $m \in M$ existe $m' \in M$, $h \in G$ tal que

$$\phi_h m' = m$$

e assim

$$\phi_e m = (\phi_e \circ \phi_h) m' = \phi_{eh} m' = m$$

segue que ϕ_g e $\phi_g{-1}$ são funções inversas entre se e $\phi_g:M \to M$ é um difeomorfismo.

<u>Definição 3.2</u> - Um conjunto A de M é dito invariante sobre G se

$$\Phi(GxA) \subset A$$

onde G age como um grupo de transformações sobre M.

Obs.: G preserva a relação de equivalência ρ sobre M se:

$$(m_1,m_2) \in \rho \quad e \quad g \in G \quad \text{então} \quad (g_{m1},g_{m2}) \in \rho$$

<u>Definição 3.3</u> - Se $m \in M$, a função $\phi_m:G \to M$, definida por $g \mapsto \Phi(g,m)$ é diferenciável.

Seja $Z:M \to TM$ tal que $m \mapsto \phi_{m*}v$ onde $v \in T_eG$.

Identificando $T(GxM)$ com $(TG)(TM)$ definimos

$$M \to T(GxM)$$

$$m \mapsto (v,0m)$$

R(G,M) é o conjunto de campos vetoriais Z sobre M que aparecem desta forma

e mais $\qquad \gamma:R(G,M) \to T_eG$

$v \longmapsto Z \qquad$ é um homomorfismo.

<u>Proposição 3.1</u> - A curva maximal integral de um campo vetorial invariante a direita Y sobre G que começa em e é exptv, onde

$$v = Y_e$$

Prova:

Se X é um campo vetorial invariante à esquerda sobre G tal que $Xe=v$ então

$$Y = \Psi_* o(-X) o \Psi$$

A curva maximal integral de $-X$ que começa em e é $\exp(-tv)$ e portanto, como $-X$ e Y são Ψ-relacionados, $\Psi o \exp(-tv)$ é a curva maximal integral de Y começando em Ψ_e.

Proposição 3.2 - Seja $Z \in R(G,M)$ tal que $Z=\gamma v$ então $(\exp tv)m$ é uma curva integral de Z com domínio R começando em $m \in M$.

Prova:

Como $Y \in G$ e tal que $Y_e=v$ é ϕ_m relacionado a Z, segue da proposição 3.1 que $\phi_m o(\exp tv)$ é a curva integral de Z com domínio R começando em $\phi_m e$.

Proposição 3.3 - Seja G um grupo de Lie que age efetivamente sobre uma variedade de Hansdorff M como um grupo de transformação de Lie.

Então o homomorfismo $\gamma : RG \to R(G,M)$ é um isomorfismo.

Prova:

Suponhamos que γv é o campo vetorial nulo sobre M. Logo a curva integral de um tal campo é uma função constante e assim proposição 3.2 implica que

$$\exp(tv)m = m, \text{ para todo } m \in M$$

Como G age efetivamente

$$\exp tv = e, \text{ para todo } t$$

logo

$$v = 0$$

Como seu núcleo é zero, γ é um isomorfismo.

<u>Definição 3.4</u> - A classe de equivalência que contém um ponto m é a extensão da função $\phi_{m*}:G \to M$ que denominamos órbita de m.

<u>Definição 3.5</u> - O conjunto $H_m = (\phi_m^{-1})_m$ consiste daqueles elementos de G tal que $g_m = m$ que denominamos grupo isotrópico em m, que é um subgrupo de G.

Os grupos isotrópicos em pontos equivalentes de M, são subgrupos conjugados considerando que se $m' = g_m$ então $(gH_m g^{-1})m' = m'$ e portanto $gH_m g^{-1} \subset H_{m'}$.

Um argumento similar mostra que $gH_{m'}g^{-1} \subset H_m$ e consequentemente $H_{m'} = gH_m g^{-1}$.

Se m é um ponto dado de M, $\phi_m:G \to M$ projeta a uma função sobre o conjunto quociente G/H_m; $\Psi_m:G/H_m \to M$ definida por $gH_m \mapsto g_m$, cuja extensão é uma órbita de m.

Sendo G um grupo de transformações de Lie sobre uma variedade Hansdorff, H_m é fechado em G e é ou um subconjunto descrito de G

ou admite uma única estrutura como variedade regular de G.

Se $m'=g_m$ temos visto que H_m e $H_{m'}$ correspondem sob um difeomorfismo $L_g o R_g-1:G \to G$.

Os grupos isotrópicos em pontos de uma órbita são portanto

i) ou discretos

ii) ou admitem ser subvariedades regulares de G.

Se H_m (aberto) então cada grupo isotrópico é união de componentes de G.

Se G tem número finito de componentes então G/H_m é finito e G_m consiste de um número finito de pontos.

Definição 3.6 - G age transitivamente sobre M se, dado quaisquer dois pontos $m_1, m_2 \in M$, existe $g \in G$ tal que $m_2 = g_{m1}$ então existe uma única órbita que é o próprio M e assim para todo $m \in M$; $\Psi_m : G/H_m \to M$ é uma bijeção e $(G,T_2)/H_m \cong M$.

Definição 3.7 - Um grupo G de transformações de uma variedade de Hansdorff M é um grupo de transformações de Lie se admitir uma estrutura de grupo de Lie tal que

i) a função $\Phi:(g,m) \mapsto g_m$ é diferenciável

ii) se X é qualquer campo vetorial completo sobre

M que é tangente a G, o homomorfismo $s \mapsto \Psi_s$ é um subgrupo a um-parâmetro de G.

Um grupo de Lie G de transformações de M tem a estrutura de um grupo de transformações de Lie G agindo efetivamente sobre M.

Proposição 3.4 - Uma condição necessária para um grupo G de transformações de uma variedade de Hansdorff M admitir uma estrutura de um grupo de Lie de transformações de M é que o conjunto dos campos vetoriais completos sobre M tangentes a G seja uma álgebra de Lie-finita-dimensional.

Prova:

Suponhamos que G é um grupo de Lie de transformações de M, qualquer campo vetorial γv de R(G,M) é completo e proposição 3.2 mostra que as transformações Ψ_s são dadas por $m \mapsto (\exp sv)m$ e assim pertencem ao grupo G. γv é portanto um campo vetorial completo sobre M que é tangente a G.

Por outra parte, suponhamos que X é qualquer campo vetorial completo sobre M que é tangente a G e Ψ_s as transformações correspondentes de M.

Condição ii) estabelece que $s \mapsto \Psi_s$ é um subgrupo a um-parâmetro de G e assim proposição 2.15 mostra que $\Psi_s m = (\exp sv)m$ para um único $v \in T_eG$.

Consequentemente os campos vetoriais X e γv tem as mesmas curvas integrais maximais e devem coincidir.

R(G,M) portanto consiste de todos os campos vetoriais completos sobre M que são tangentes a G.

<u>Definição 3.8</u> - Suponhamos que $X_1,\ldots,X_n$ são campos vetoriais independentes que define uma paralelização sobre uma variedade Hansdorff M.

Qualquer campo vetorial $\Sigma w^h X_h$, $w \in \mathbb{R}$; $h=1,\ldots,n$ será chamado campo vetorial paralelo sobre M.

<u>Proposição 3.5</u> - Se X é um campo vetorial paralelo sobre uma variedade de Hansdorff com uma paralelização a função $\mathrm{Exp}X: M \to M$ é um difeomorfismo e $\mathrm{Exp}(-X)$ é a sua inversa.

Prova:

Escolhamos qualquer ponto m no domínio de Exp X e seja γ a curva integral maximal de X que começa em m. A curva c definida por $s \mapsto \gamma(1-s)$ é uma curva integral de -X que começa em ExpXm. Consequentemente

$$(\mathrm{Exp}\text{-}X)(\mathrm{Exp}X) = c1 = \gamma 0 = m$$

Segue que

$$(\mathrm{Exp}\text{-}X)\mathrm{o}(\mathrm{Exp}X)m = m$$

Isto é a equação correspondente para o campo vetorial paralelo -X juntos provam a proposição.

<u>Proposição 3.6</u> - Se X é um campo vetorial paralelo sobre uma variedade de Hansdorff com uma paralelização e se $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$(\mathrm{Exp}\,aX)\circ(\mathrm{Exp}\,bX) = \mathrm{Exp}(a+b)X.$$

Prova:

Denotemos por Φ o fluxo do campo vetorial X. A proposição segue imediatamente da equação 8.31 (Referência 1) onde mostra que

$$\Phi(a,m) = (\mathrm{Exp}\,aX)m$$

sempre que qualquer dos dois lados seja definido.

Suponhamos que $\Phi(a,m)$ seja definido.

Se γ é uma curva integral maximal de X que começa em m, a curva c definida por $s \mapsto \gamma(as)$ é uma curva integral de aX que começa em m. Consequentemente

$$(\mathrm{Exp}\,aX)m = c1 = \gamma a = \Phi(a,m)$$

Um argumento similar mostra que isto é verdadeiro quando $(\mathrm{Exp}\,aX)m$ é definido.

Obs.: Suponhamos que M é uma variedade de Hansdorff com uma paralelização.

Usaremos a função exponencial para construir um tipo especial de carta para M.

Dado qualquer ponto $m \in M$ existe uma bijeção natural Λm de $M \times T_m M$ sobre TM definida por $(g,v) \mapsto X_g$ onde X é um campo vetorial paralelo sobre M tal que $X_m = v$.

Se y é uma carta padrão correspondente para uma base $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de $T_m m$ então

$$\Lambda m(g,v) = \Sigma(y^i v)(X_i g)$$

onde X_i é o campo vetorial paralelo tal que

$$X_i m = v_i \quad ; \quad i=1,\ldots,n.$$

Suponhamos que nos é dado um subespaço próprio S de $T_m M$. Escolhamos uma base para $T_m M$ de modo que os primeiros vetores $v_1, \ldots, v_p$ são uma base para S. Consideramos a função $x : T_m M \to M$ definida por

$$x = \operatorname{Exp} \Sigma\, y^s X_s (\operatorname{Exp} y^\alpha v_\alpha)$$

onde $\alpha = 1, \ldots, p$, $s = p+1, \ldots, n$. Então x é igual a composição

$$\operatorname{Exp} o \Lambda m o \{\operatorname{Exp}(\Sigma y^\alpha v_\alpha), \Sigma y^s v_s\}$$

e é portanto diferenciável

Além disso, se $f : M \to \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável cujo domínio inclui m então

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i} (fox)\right)_0 = \left(\frac{d}{dt} f(\operatorname{Exptv}_i)\right)_0 = v_i f$$

porque Exptv_i é uma curva integral do campo vetorial X_i. Consequentemente se x é uma carta normal associada com a base dada de $T_m M$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}(x^j o X)\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m x^j = \partial_{ij}$$

e X é portanto um difeomorfismo sobre uma vizinhança de 0 em $T_m M$.

Quando nós identificamos $T_m M$ com $\mathbb{R}^n$, a inversa deste difeomorfismo é uma carta w de M cujo domínio inclui m.

Definição 3.9 - Suponhamos que M é uma variedade de Hansdorff com uma paralelização $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Uma transformação g de M é dito um automorfismo da paralelização se

$$g_* o X_h = X_h o g \quad ; \quad h=1,\ldots,n$$

O conjunto G de todos tais automorfismos forma um grupo de transformações de M.

Proposição 3.7 - Seja M uma variedade de Hansdorff com uma paralelização. Se g é um automorfismo e X é um campo vetorial paralelo sobre M então

$$go(\text{Exp}X) = (\text{Exp}X)og$$

Reciprocamente, qualquer bijeção $g: M \to M$ satisfazendo esta condição para todo campo setorial paralelo X sobre M é um automorfismo.

Prova:

Suponhamos que g é um automorfismo e que X é um campo vetorial paralelo sobre M. Seja m qualquer ponto de M e seja γ a curva integral maximal de X que começa em m. Como

$g_*oX = Xog$ segue que $go\gamma$ é uma curva integral maximal de X que começa em g_m. Proposição 10.3.1 (Referência 1) mostra que $ExpX_m=\gamma 1$. Consequentemente $ExpX_m$ é definida se e só se $ExpX(g_m)$ é definida e então

$$g(ExpX_m)=g(\gamma 1)=(go\gamma)1=ExpX(g_m)$$

Para demonstrar isto, escolhamos uma carta normal x em m determinada por valores de uma paralelização $X_1,\dots,X_m$ em m e uma carta similar y em g_m. Segue da equação 32 que para qualquer ponto P no domínio de x

$$g(Exp\Sigma(x^iP)(X_{im}))=Exp\Sigma(x^iP)X_i(g_m)$$

e consequentemente a função representativa para a bijeção g, com respeito as cartas x e y, é uma função identidade sobre um conjunto aberto.

Portanto g é localmente um difeomorfismo e, como é uma bijeção, é uma transformação de M.

Nós também mostramos que g é um automorfismo de uma paralelização. Para qualquer campo vetorial paralelo X e para valores suficientemente pequenos de t, equação 32 implica que

$$g(Expt(X_m))=Expt(X(g_m))$$

e consequentemente

$$g_*(X_m)=X(g_m).$$

Obs.: O grupo G de automorfismo será estudado através de suas órbitas.

Proposição 3.8 - Seja G_m uma órbita por um ponto m em uma varieda de de Hansdorff M sob a ação de um grupo de auto morfismos de uma paralelização sobre M.

Se v é qualquer vetor tangente de M em m tal que Expv ε G_m então ExpNv ε G_m para qualquer inteiro N.

Prova:

Seja g um automorfismo tal que g_m=Expv. Afirmamos que g_m^N = ExpNv para qualquer inteiro N. Provaremos isto pa- inteiros positivos por indução.

Seja X um capo vetorial paralelo sobre M tal que X_m=v. Fazendo hipótese de indução, suponhamos que K é um inteiro positivo tal que

$$g_m^K = \text{ExpKv}$$

usando proposição 3.7 e 3.6, segue que

$$\begin{aligned} g_m^{K+1} &= g(\text{ExpKv}) = \text{ExpKX}(g_m) \\ &= (\text{ExpKX})o(\text{ExpX})_m \\ &= \text{Exp}(K+1)v. \end{aligned}$$

Para estabelecer a afirmação para inteiros negativos -K, notamos que como

$$g_m^K = \text{Exp}(KX)_m$$

segue da proposição 3.5 que

$$m = (\text{Exp-KX})(g_m^K)$$

proposição 3.7 portanto mostra que

$$g_m^{-K} = (\mathrm{Exp}{-KX})_m = \mathrm{Exp}{-Kv}$$

Obs.: Observamos que se M é uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização $X_1, X_2, \ldots, X_n$; o grupo G de automorfismos da paralelização age livremente sobre M; pelo seguinte fato:

<u>Proposição 3.9</u> - Seja g um automorfismo de uma paralelização sobre uma variedade de Hansdorff conexa M.

Se g tem um ponto fixo, g deve ser a transformação identidade de M.

Prova:

Como M é conexa, é suficiente mostrar que o conjunto S de pontos fixos de g é aberto e fechado em M.S é a imagem inversa da diagonal em MxM sob a função $(i,g): M \to M\times M$, onde i é a função identidade sobre M

Como M é uma variedade de Hansdorff essa diagonal é fechada e assim S é fechado.

Mostraremos que S é aberto. Consideramos qualquer ponto $m \in S$ e seja U o domínio de uma carta normal em m. Cada ponto em U pode ser expressado como ExpXm onde X é algum campo vetorial paralelo.

Proposição 3.7 mostra que

$$g(\mathrm{Exp}Xm) = \mathrm{Exp}X(g_m) = \mathrm{Exp}Xm$$

e portanto $U \subset S$. Consequentemente S é aberto.

Obs.: Se G_m é a órbita de um ponto $m \in M$, segue da proposição 3.9 que a função $V_m : G \to G_m$ definida por $g \mapsto g_m$ é uma bijeção.

Colocaremos uma estrutura C^∞ sobre G dando a G_m uma estrutura de uma variedade regular de M.

Como temos visto na prova do corolário 10.6.4.1 (Referência 1), há uma estrutura Riemaniana definida positiva padrão sobre M determinada, definindo os produtos escalares $X_i X_j = \partial_{ij}$

Como M é uma variedade de Hansdorff conexa proposição 10.6.2 (Referência 1) mostra que ela admite uma estrutura métrica e que sua topologia concorda com sua topologia métrica correspondente.

Proposição 3.10 - Seja M uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização.

Qualquer automorfismo da paralelização é uma isometria da estrutura métrica padrão sobre M.

Prova:

Seja g um automorfismo da paralelização $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sobre M e seja ρ a função distância da estrutura métrica padrão sobre M.

Temos que mostrar que

$$\rho(gp, gq) = \rho(p,q) \text{ para todos } p,q \in M.$$

Se γ é uma curva em M podemos expressar seu levantamento como

$$\dot{\gamma} = \Sigma\ f^{i}(X_{i} o \gamma) \quad ; \ i=1,\ldots,n$$

onde as funções $f^{i}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são unicamente determinadas por γ.

O comprimento do vetor tangente $\dot{\gamma}_s$ é dado por

$$|\dot{\gamma}_s|^2 = \Sigma(f_i s)^2$$

Denotamos por γ' a curva $go\gamma$. Então como g é um automorfismo

$$\dot{\gamma}' = g_{*} o \dot{\gamma} = \Sigma f_i (X_i o \gamma') \text{ e portanto } |\dot{\gamma}_s'| = |\dot{\gamma}_s|$$

Consequentemente, se c é qualquer curva diferenciável por partes de p a q, então goc é uma curva similar de gp a gq com o mesmo comprimento que c. Isto mostra que $\rho(gp,gq) \leq \rho(p,q)$

Mas g^{-1} é também um automorfismo e assim

$$\rho(p,q) = \rho(g^{-1}(gp),\ g^{-1}(gq)) \leq \rho(gp,gq)$$

Lema 3.1 - Seja M uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização.

Suponhamos que P é um ponto dado de M e que $\{g_\alpha\}$ é uma sequência de automorfismo tal que

$$\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha p = q$$

Então para qualquer campo vetorial paralelo X para o qual $ExpXP$ é definida, $\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha(ExpXP)$ existe e é igual a $ExpXq$.

Prova:

Segue imediatamente da proposição 3.7 uma vez que tenha sido mostrado que g está no domínio da função contínua ExpX.

Mas supondo este fato

$$\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha(\mathrm{ExpXP}) = \lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{ExpX}(g_\alpha p) = \mathrm{ExpXq}$$

Vamos mostrar que q está no domínio de ExpX.

Usaremos a função distância padrão ρ sobre M.

Podemos escolher uma bola aberta U com centro P, raio positivo ε que esteja no domínio de ExpX.

Proposição 3.7 inplica que ExpX é definida sobre $g_\alpha U$ que, como g_α é uma isometria, é uma bola aberta com centro $g_\alpha p$ e raio ε.

Mas para valores suficientemente grandes de α, $\rho(g_\alpha p, q) < \varepsilon$ de modo que $q \in g_\alpha U$.

<u>Lema 3.2</u> - Seja $\{g_\alpha\}$ uma sequência de automorfismos de uma paralelização sobre uma variedade de Hansdorff conexa M.

Se existe um ponto $q \in M$ tal que $\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha q$ existe então

$$m' = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha m \text{ existe para todo } m \in M \text{ e}$$

$$m = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha^{-1} m'$$

Prova:

Denotamos por S o conjunto de ponto $p \in M$ para os quais $\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha p$ existe. Mostraremos primeiro que S é um subconjunto aberto e fechado de M.

Consideremos uma sequência $\{m_i\} \subset S$ com limite m. Segue proposição 1.4.6 (Referência 1) que para provar que S é fechado nos temos só que mostrar que $m \in S$. Para inteiros suficientemente grande K, m_K está no domínio de uma carta normal de m e assim $m_K = \mathrm{Exp}(-X_m)$ onde X é qualquer campo vetorial paralelo sobre M. Consequentemente $m = \mathrm{Exp}Xm_K$.

Como m_K está em S, $\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha m_K$ existe e assim lema 3.1 mostra que $\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha m$ existe. Portanto $m \in S$.

Para mostrar que S é aberto, consideremos o domínio U de uma carta normal de qualquer ponto dado $P \in S$. Cada ponto de U pode ser expressado como ExpP, para algum campo vetorial paralelo X sobre M, e lema 3.1 mostra que $\mathrm{Exp}XP \in S$. Segue que $U \subset S$ e que S é aberto.

Agora escolhemos uma carta normal x em m' determinada pelos valores da paralelização $X_1, X_2, \ldots, X_n$ em m'.

Para todos os valores suficientemente grandes de α, $g_\alpha m$ está no domínio desta carta e assim

$$g_\alpha m = \mathrm{Exp}(-Y_\alpha m')$$

onde $Y_\alpha = \Sigma x^i(g_\alpha m)X_i$ é um campo vetorial paralelo com a condição que $\lim_{\alpha\to\infty} Y_\alpha m = 0$

Como $m' = \mathrm{Exp}Y_\alpha(g_\alpha m)$, segue da proposição 3.7 que $g'_\alpha m' = \mathrm{Exp}\ Y_\alpha m$. Consequentemente

$$\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha^{-1} m' = \operatorname{Exp}\left(\lim_{\alpha\to\infty} Y_\alpha m\right) = m$$

Proposição 3.11 - Seja G um grupo de automorfismo de uma paralelização sobre uma variedade de Hansdorff conexa M.

Então se P é qualquer ponto de M, a órbita Gp é um subconjunto fechado de M.

Prova:

Dada qualquer sequência $\{g_\alpha\}$ de automorfismos tal que $q = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha P$, existe, então é suficiente mostrar que esse limite está em Gp.

Para fazer isto, temos que encontrar um automorfismo g tal que gp = q. Como uma consequência do lema 3.2 podemos definir uma função global $g:M \to M$ por $g_m = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha m$ e certamente gp=q.

Provaremos que g é um automorfismo. Lema 3.2 também mostra que podemos definir uma função global $M \to M$ por $m \mapsto \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha^{-1} m$ e que é a inversa de g. Consequentemente g é uma bijeção. Mais do que isto, se X é qualquer campo vetorial paralelo sobre M e se m é qualquer ponto no domínio de ExpX, lema 3.1 mostra que

$$g(\operatorname{Exp}Xm) = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha(\operatorname{Exp}Xm) = \operatorname{Exp}X(g_m)$$

segue da proposição 3.7 que g é um automorfismo.

Proposição 3.12 - Seja M uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização e seja G_m a órbita de um ponto $m \in M$ sob um grupo de automorfismos de uma paralelização.

Se $\{\zeta_\alpha\}$ é uma sequência de vetores de T_mM com com limite ζ tal que $\mathrm{Exp}(a_\alpha\zeta_\alpha) \varepsilon G_m$, onde $\{a_\alpha\}$ é uma sequência de números reais não-nulos com limite zero, então $\mathrm{Exp}\,\lambda\zeta \;\varepsilon\; G_m$ para todo $\lambda \;\varepsilon\, \mathbb{R}$..

Prova:

Sabemos de propriedades gerais da aplicação exponencial que $\mathrm{Exp}\,\lambda\zeta$ é definida para $\lambda \;\varepsilon\; I$. Dado $\lambda \;\varepsilon\; I$ escolhemos um inteiro n_α tal que $|\lambda - n_\alpha a_\alpha| < |a_\alpha|$ então λ é o limite da sequência $\{n_\alpha a_\alpha\}$. Consequentemente $\lambda\zeta$ é o limite de $\{n_\alpha a_\alpha \zeta_\alpha\}$. Proposição 3.8 mostra que cada valor da sequência $\{\mathrm{Exp}\; n_\alpha a_\alpha \zeta_\alpha\}$ está em G_m. Como $\lambda\zeta$ está no domínio da função contínua Exp, segue que esta sequência tem limite $\mathrm{Exp}\,\lambda\zeta$. Como G_m é fechado, esse limite está em G_m.

<u>Corolário 3.1</u> - Seja $c:\mathbb{R} \to M$ uma curva que começa em m cuja extensão está em G_m. Se $\zeta = \dot{c}0$ então $\mathrm{Exp}\,\lambda\zeta \;\varepsilon\; G_m$ para todo $\lambda \;\varepsilon\; \mathbb{R}$

Prova:

Ver lema 2.1 - Capítulo 2.

Considerando uma distribuição Ω sobre M, uma órbita G_m dará uma estrutura de variedade integral para essa distribuição.

<u>Lema 3.3</u> - Para qualquer ponto $m \;\varepsilon\; M$, o conjunto Sm de vetores $v \;\varepsilon\; T_mM$ tal que $\mathrm{Exp}\,\lambda v \;\varepsilon\; G_m$ para todo $\lambda \;\varepsilon\; \mathbb{R}$ é um subespaço vetorial de T_mM. E mais, a dimensão de Sm é independente de m.

Prova:

Escolhamos qualquer par de vetores $v,w \in S_m$ e seja V,W os campos vetoriais, paralelos sobre M tal que $V_m=v$, $W_m=w$. Como $g \mapsto g_m$ é uma bijeção entre G e G_m, definimos funções $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to G$ por $(\alpha s)m = \operatorname{Exp}sv$; $(\beta s)m = \operatorname{Exp}sw$. Então usando proposição 3.7, segue que

$$\{(\alpha s)(\beta s)\}m=(\alpha s)\{(\beta s)m\}=(\alpha s)\{\operatorname{Exp}(sw)m\}=\operatorname{Exp}sw(\operatorname{Exp}sv)$$

e assim a curva $c:\mathbb{R} \to M$ definida por $s \mapsto \operatorname{Exp}sw(\operatorname{Exp}sv)$ tem extensão em G_m.

Para calcular o vetor $\dot{c}0 \in T_mM$ observamos que c é a composição $\Phi o(i,\gamma)$ onde Φ é o fluxo do campo vetorial W, i é a função identidade sobre $\mathbb{R}$ e γ é a curva integral maximal de V que começa em m.

Uma aplicação da fórmula de Leibniz's mostra que $\dot{c}0=v+w$ e consequentemente do corolário 3.1, $v+w \in Sm$. Como

$$\operatorname{Exp} \lambda(av) = \operatorname{Exp}(\lambda a)v \quad \text{se} \quad a \in \mathbb{R}$$

segue que se $v \in Sm$ então $av \in Sm$.

Portanto Sm é um subespaço vetorial de T_mM.

Seja X qualquer campo vetorial paralelo sobre M e suponhamos que P está no domínio de ExpX. Como esta função é um difeomorfismo $(\operatorname{Exp}X)_{*p}$ é um isomorfismo de T_mM sobre T_qM onde $q=\operatorname{Exp}XP$.

Mostraremos que

$$3 \qquad (\operatorname{Exp}X)_* Sp \subset Sq$$

de modo que a dimensão de Sp é no máximo igual a dimensão de Sq.

A desigualdade reversa segue então do mesmo argumento, quando X é substituído por -X, e assim as dimensões de Sp e Sq são as mesmas.

Logo a dimensão de Sp é a mesma em todos os pontos do domínio de qualquer carta normal de M. Como M é conexo, isso implica que a dimensão é a mesma para todos os pontos de M.

Estabelecemos agora a inclusão 3

Seja v qualquer vetor em Sp. Definamos a função $\alpha:\mathbb{R} \to G$ por

$$(\alpha s)P = \mathrm{Exp}sv$$

então usando proposição 3.7, segue que

$$(\alpha s)q = \mathrm{Exp}X(\mathrm{Exp}sv)$$

e assim a curva $c:\mathbb{R} \to M$ definida por

$$s \longmapsto \mathrm{Exp}X(\mathrm{Exp}sv)$$

com extensão em Gq. Corolário 3.1 mostra que

$$(\mathrm{Exp}X)_* v = \dot{c}0 \in Sq$$

Obs.: A função $\Omega: m \longmapsto Sm$ é definida sobre qualquer variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização. A dimensão do subespaço Sm é chamada dimensão de Ω.

<u>Proposição 3.13</u> - Seja M uma variedade de Hansdorff com uma paralelização. A menos que tenha dimensão zero, a função Ω é uma distribuição integrável sobre M.

Prova:

Se a dimensão P de Ω é igual a dimensão n de M então Ω é a distribuição integrável $m \mapsto T_m M$.

Suponhamos que $0 < P < n$.

Escolhamos uma carta especial w de qualquer ponto dado $m \in M$ com $S=Sm$.

Para cada ponto q no domínio de w mostramos que os vetores $(\partial/\partial w^\beta)q, (\beta=1,\ldots,P)$ são uma base para Sg. Seja V o subespaço de $T_m M$ complementar a S espandido por $v_{p+1},\ldots,v_n$.

Escolhemos

$$q = \mathrm{Exp} X(\mathrm{Exp}\, s)$$

onde $s \in S$ e X é um campo vetorial paralelo sobre M tal que $X_m \in V$.

Dado qualquer inteiro β tal que $1 < \beta < P$, considerados a curva coordenada w^β;

$$\gamma = \mathrm{Exp} X(\mathrm{Exp}(s+tv_\beta))$$

Como

$$\left(\frac{\partial}{\partial w^\beta}\right)q = \mathring{\gamma}0$$

temos que mostrar $\mathring{\gamma}0 \in Sq$ e isso segue de corolário 3.1 e podemos mostrar que a extensão de γ está na órbita G_q.

Da definição de Sm vemos que, $\mathrm{Exp}(s+tv_\beta)$ está em G_m para todos os valores de t e assim vemos que existe a função $\lambda:\mathbb{R} \to G$ para a qual λ_z é o único elemento de G tal que

$$(\lambda_z)(\text{Exps}) = \text{Exp}(s+v_\beta)$$

usando proposição 3.7

$$(\lambda_z)q = (\lambda_z)\{\text{ExpX}(\text{Exps})\} = \gamma_z$$

Isto implica que a extensão de γ esteja com Gp.

<u>Proposição 3.14</u> - Seja M uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização. As órbitas sob um grupo de automorfismo de uma paralelização são

ou todos conjuntos de pontos discretos sobre M

ou cada um admite a estrutura de uma subvariedade regular de M.

Prova:

Usaremos a função Ω introduzida na proposição 3.13. Primeiro suponhamos que a dimensão P de Ω é igual a dimensão n de M. Escolhemos um ponto m em uma órbita dada Gp. Por definição $\text{ExpSm} \subset G_m$. Mas G_m=Gp e no caso presente $\text{Sm}=T_mM$ e portanto $\text{Exp}\ T_mM \subset \text{Gq}$.

Em particular, o domínio de qualquer carta normal de m está em Gq.

Segue que Gq é um conjunto aberto de M. Vimos na proposição 3.11 que Gq é também um conjunto fechado de M. Consequentemente, como M é conexo, qualquer órbita Gq coincide com M.

A proposição é portanto verdadeira neste caso especial.

Consideramos agora o caso $0 < P < n$.

Proposição 3.13 estabelece que Ω é uma distribuição integrável sobre M e vamos mostrar que qualquer órbita Gq é união de folhas de Ω.

Seja L a folha que intercepta Gq e considere um ponto $m \in L \cap Gq$. Uma carta especial w de m, construída como na prova da proposição 3.13 é uma carta lisa para Ω. Uma fatia através de m está contida em ExpSm e tais pontos estão em G_m. Como uma fatia é um domínio coordenado de $M(\Omega)$ encontra a variedade L em um subconjunto aberto de L. Mas Gq é um subconjunto fechado de M e L é uma subvariedade de M, logo $L \cap Gq$ é também um subconjunto de L.

Como L é conexo, $L \cap Gq$ é portanto igual a L e assim Gq é a união de folhas de Ω.

Daremos a Gq uma estrutura C^∞ como variedade integral de Ω e Gq toma-se uma subvariedade de M de dimensão P.

Seguirá da prova que, com esta estrutura, Gq é uma subvariedade regular de M.

Para ver isto, consideramos um ponto $m \in Gq$ e escolhamos a carta especial w em m. Usando a notação da prova da proposição 3.13 restringimos w de modo que a extensão é

$y(S'+V')$, onde S' e V' sejam vizinhanças de 0 em S e V respectivamente e y é a carta padrão de T_mM descrita na proposição 3.5.

Agora mostraremos que escolhendo V' suficientemente pequeno podemos assegurar que o domínio U' da restrição satisfaz a equação

$$(3.3) \qquad U' \cap Gq = \mathrm{Exp}_m S'$$

Como S' varia por todas as possíveis escolhas, a coleção $\{\mathrm{Exp}_m S'\}$ de vizinhanças coordenadas de m em Gq, formam uma base em m para a topologia induzida de Gq. Equação 3.3 mostra que esses conjuntos são todos abertos na topologia de subconjunto de Gq. Como Gq é uma subvariedade de M, qualquer conjunto aberto na topologia de subconjunto é também aberto na topologia induzida. Segue que a coleção também é uma base em m para a topologia subconjunto de Gq.

Gq é portanto uma subvariedade regular de M.

Para estabelecer equação 3.3, adaptamos um argumento usado na prova da proposição 2.22.

Se não fosse possível obter esta equação por escolha de V' então dada qualquer sequência $\{V'_\alpha\}$ de vizinhanças de 0 em V convergindo a 0, existiria para cada inteiro α um vetor não nulo $v_\alpha \in V'_\alpha$ e um vetor $s_\alpha \in S'$ tal que

$$\mathrm{Exp}X_\alpha(\mathrm{Exp}s_\alpha) \in Gq = Gm$$

onde X_α é um campo vetorial paralelo sobre M tal que $X_\alpha m = v_\alpha$

Podemos escrever

$$\text{Exp}s_\alpha = g_\alpha m$$

onde g_α é um automorfismo e, usando proposição 3.7

$$g_\alpha(\text{Exp}v_\alpha) = \text{Exp}X_\alpha(g_\alpha m) \in Gm$$

consequentemente $\text{Exp}v_\alpha \in Gm$.

Proposição 2.19 e 3.12 juntas mostram que existe um vetor não nulo $\zeta \in V$ tal que $\text{Exp}\ \lambda\zeta \in Gm$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mas isto implica que $\zeta \in S$ e isto é uma contradição.

Finalmente suponhamos que $P=0$

Neste caso uma modificação simples do trabalho presente, (correspondendo ao caso $S=0$ na prova da proposição 2.22), mostra que cada ponto $m \in Gq$ tem uma vizinhaça U' tal que

$$U' \cap Gq = m$$

Logo Gq é um conjunto discreto de pontos em M.

Obs.: Nosso objetivo é transferir a estrutura diferenciável das órbitas a grupos de automorfismos e mostrar quais grupos se transformam a grupos de Lie de transformações.

<u>Lema 3.4</u> - Seja M uma variedade de Hansdorff conexa com uma paralelização. Denotamos por Gm a órbita de um ponto m sob o grupo G de automorfismos da paralelização.

Então existe uma bijeção $\gamma pq : Gp \to Gq$ para quaisquer dois pontos p,q em M.

Se as órbitas são conjuntos discretos de pontos então Vpq é um difeomorfismo.

Prova:

Definimos $Vpq = Vp \circ Vq^{-1}$ onde lembramos que, para qualquer $m \in M$, $Vm:G \to Gm$ é a bijeção $g \mapsto g_m$

Se as órbitas são conjuntos não discretos de pontos, a relação $p \sim q$ se Vpq é um difeomorfismo é uma relação de equivalência sobre M. Consequentemente, o lema segue da conexidade de M onde mostramos que a classe de equivalência é um conjunto aberto de M.

Consideramos qualquer ponto $P \in M$ e suponhamos que o vetor $v \in T_pM$ está no domínio da função Exp. Seja X o campo vetorial paralelo sobre M tal que $Xp=v$. Denotamos por g qualquer elemento de G. De acordo com proposição 3.7

$$ExpX(gp) = g(Expv)$$

o qual mostra que a função $ExpX:M \to M$ induz a função $Vmp:Gp \to Gm$ onde $m=Expv$. Como ExpX é um difeomorfismo e como Gp,Gm são subvariedades regulares de M, segue da proposição 5.4.3 (Referência 1) que Vmp é um difeomorfismo. Consequentemente P é equivalente a todos os pontos no domínio de uma carta normal em P e assim qualquer classe de equivalência é um conjunto aberto de M.

Obs.: Um campo vetorial zero sobre uma variedade é tangente a cada grupo de transformações de uma variedade.

Um grupo de transformações é dito discreto se ele é constituído somente de campos tangentes a um grupo.

Usando estas definições estabelecemos teorema de Kobayashi.

Proposição 3.15 - O grupo G de automorfismos de uma paralelização sobre uma variedade de Hansdorff é

ou um grupo discreto de transformações

ou admite a estrutura de um grupo de Lie de transformações

Prova:

Mostraremos que as duas possibilidades para a estrutura de G correspondem com as duas possibilidades dada na proposição 3.14.

Primeiro suponhamos que cada órbita admite a estrutura de uma subvariedade regular de M.

Escolhamos um ponto $q \in M$ e demos a G a única estrutura C^{∞} tal que $Vq:G \to Gq$ é um difeomorfismo. De acordo com lema 3.4, essa estrutura C^{∞} é independente do ponto particular escolhido. Para mostrar que G é um grupo de Lie de transformações temos que demonstrar três coisas.

i) Que a ação $\Psi:GxM \to M$ é uma função diferenciável.

Escolhemos qualquer ponto $P \in M$ e uma vizinhança V de O em T_pM sobre a qual Exp_p é um difeomorfismo. Colocamos $U=Exp_pV$ e seja f a inversa da restrição Exp_p/V. Então usamos proposição 3.7 para mostrar que

$$g_m = g(\mathrm{Exp}(fm)) = \mathrm{Exp}X(gp)$$

onde $g \in G$, $m \in U$ e X é um campo vetorial paralelo sobre M tal que $XP = f_m$.

Consequentemente, sobre GxU, ψ é igual a função diferenciável

$$\mathrm{Exp} \circ \Lambda p \circ ((j \circ Vp)xf)$$

onde $j:Gp \to M$ é a injeção natural e $\Lambda p: MxT_pM \to TM$ é o difeomorfismo global definido na proposição 3.7.

Como P é qualquer ponto de M, segue que ψ é uma função diferenciável.

ii) Com a mesma notação, a função produto $\theta: GxG \to G$ satisfaz a equação

$$j \circ Vp \circ \theta = \Psi o(ix(joVp))$$

onde i é a função identidade sobre G. Como Gp é uma subvariedade regular de M segue da proposição 5.4.3 (Referência 1) que θ é diferenciável.

Consequentemente G é um grupo de Lie.

Denotemos por Y qualquer campo vetorial completo sobre M tal que são tangentes a G e seja $\Phi: \mathbb{R}xM \to M$ seu fluxo. Dado $s \in \mathbb{R}$, a função $\phi_s: m \mapsto \Phi(s,m)$ é uma transformação de M. Para mostrar que G é um grupo de Lie de transformações de M é suficiente mostrar, finalmente,

iii) que o homomorfismo $h: \mathbb{R} \to G$ definido por $h_s = \phi_s$ é diferenciável.

Escolhamos um ponto $q \in M$. Como Y é tangente a G, a imagem da curva $\Phi(t,q)$ está em Gq. Como Gq é uma subvariedade regular de M essa curva induz uma curva ϕ' em Gq e consequentemente h, que é igual a $Vq^{-1} \circ \phi'$, é diferenciável.

Concluimos mostrando que se as órbitas são todos conjuntos discreto de pontos em M então G é um grupo discreto de transformações.

Seja Y um campo vetorial completo sobre M tangente a G e escolhamos qualquer ponto $P \in M$. A imagem da curva integral maximal de Y que começa em P está em G e é um subconjunto conexo de M.

Consequentemente é uma curva constante com imagem P e assim $YP=0$.

Obs.: Se consideramos o caso para o qual G é um grupo de Lie de transformações de M segue da prova da proposição 3.4 e 3.3 que o conjunto dos campos vetoriais completos sobre M tangentes a G formam uma álgebra de Lie $R(G,M)$ isomórfica à álgebra de Lie de G.

Obteremos $R(G,M)$ diretamente de uma paralelização e isto leva a um método indireto de determinar G.

Veremos a seguir uma interpretação do colchete de Lie de dois campos vetoriais X e Y sobre uma variedade de Hansdorff M.

Suponhamos que Φ é o fluxo de X, como usualmente, seja $\phi_s: M \to M$ a função diferenciável $m \mapsto \Phi(s,m)$.

Essa função é definida se o número real s está em uma vizinhança suficientemente pequena de 0.

A prova da proposição 3.5 mostra que ϕ_s é um difeomorfismo cuja inversa é ϕ_{-s}.

Proposição 3.16 - Suponhamos que X e Y são campos vetoriais sobre uma variedade de Hansdorff e seja Φ o fluxo de X. Para qualquer ponto dado $m \in M$ definimos a curva $c:\mathbb{R} \to T_m M$ por

$$cs = (\phi_{s*} \circ Y \circ \phi_s^{-1})m$$

Se identificamos os espaços tangentes $T_m M$ em co com $T_m M$ então

$$\dot{c}o = [Y,X]m$$

Prova:

Seja K uma curva em $T_m M$ e seja $f \in F(m)$. Definamos $Kf:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $s \mapsto (Ks)f$.

Se identificarmos $T_{Ks}(T_m M)$ com $T_m M$ então

$$(\dot{K}s)f = \left(\frac{d}{dt}(Kf)\right)_s$$

onde t é a carta identidade sobre $\mathbb{R}$.

Desde que estabelecemos a proposição mostranque ambos os lados da igualdade tenha o mesmo efeito sobre f, precisamos diferenciar cf.

Se

$$m = \phi_s m'$$

então

$$(cs)f = (\phi_{s*} Y_{m'})f = Y_{m'}(fo\phi_s)$$

A curva maximal integral de Y que começa em m' é $\psi(t,m')$, onde ψ é o fluxo de Y. Proposição 8.5.1 (Referência 1) mostra portanto que

$$(3.4) \qquad (cs)f = \left(\frac{d}{dt}\{fo\phi_s o\psi(t,m')\}\right)_{t=0}$$

Considerando esta equação nós introduzimos diferenciáveis $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $K.\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas nas seguintes formas

$$F(u,v,w) = f\{\Phi(u,\Psi(v,\Phi(w,m)))\}$$

onde (u,v,w) é a carta identidade sobre $\mathbb{R}^3$ e

$$K(x,y) = F(x,y,-x)$$

onde (x,y) é a carta identidade sobre $\mathbb{R}^2$

Então segue da equação 3.4 que

$$(3.5) \quad (\dot{c}o)f = \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}\right)_0$$

A regra da cadeia mostra que

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}\right)_0$$

Como

$$F(u,v,o) = f\{\Phi(u,\Psi(v,m))\}$$

segue que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{(o,v,o)} = (Xf)(\Psi(v,m))$$

e consequentemente

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right)_0 = Y_m(Xf)$$

portanto

$$F(o,v,w) = f\{\Psi(v,\Phi(w,m))\}$$

com raciocínio similar mostra-se que

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}\right)_0 = X_m(Yf)$$

Tomado com equação 3.5, esse resultado estabelece a proposição.

<u>Corolário 3.2</u> - Com a notação da proposição 3.16

$$\dot{c}s = \{\phi_{s*} o [Y,X] o \phi_s^{-1})_m$$

Prova:

Usando equação 3.1 podemos mostrar que se γ é uma curva integral de X então $\phi_s o \gamma$ também é uma curva integral.

Segue então que o campo vetorial X é ϕ_s-relacionado a si mesmo.

Y é ϕ_s-relacionado a um campo vetorial

$$Y_s = \phi_{s*} o Y o \phi_s^{-1}$$

e portanto

$$3.6 \quad \phi_{s*}[Y,X]m' = [Y_s,X]m$$

onde $m=\phi_s m'$

Mesmo que Y_s não seja um campo vetorial global ainda podemos aplicar proposição 3.16 a qualquer ponto m do seu domínio. Consequentemente

$$[Y_s,X]m = \dot{c}_s o$$

onde a curva $c_s:\mathbb{R} \to T_m M$ é definida por

$$c_s z = (\phi_{z*} o Y_s o \phi_z^{-1})m$$

como equação 3.1 mostra que $\phi_z o \phi_s = \phi_{z+s}$

$$c_s z = c(s+z)$$

e portanto

$$\dot{c}s = \mathring{c}_s o = [Y_s,X]m$$

O corolário agora segue da equação 3.6.

<u>Proposição 3.17</u> - Um campo vetorial completo X sobre uma variedade de Hansdorff M é tangente a um grupo de automorfismos de um campo vetorial Y sobre M se só se $[X,Y]=0$

Prova:

Suponhamos que X é tangente a um grupo G' de automorfismos de um campo vetorial Y.s

Então se Φ é o fluxo de X, as transformações ϕ_s pertencem todas a G' e assim

$$\phi_{s*} o Y o \phi_s^{-1} = Y \; ; \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Para qualquer ponto dado $m \in M$, a curva c descrita na proposição 3.16 tem valor constante Ym. Consequentemente

$$[X,Y]m = 0$$

Reciprocamente, suponhamos que $[X,Y]=0$ e escolhemos qualquer ponto $m \in M$. Corolário 3.2 mostra que

$$\mathring{c}s = 0, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

e assim a curva c tem valor constante. Consequentemente

$$cs = co = Ym$$

Como isto é verdade para todo $m \in M$, $\phi_s \in G'$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Segue que X é tangente a G'.

<u>Proposição 3.18</u> - Seja G um grupo de Lie de automorfismos de uma paralelização $X_1,\ldots,X_n$ sobre uma variedade de Hansdorff conexa M.

Então R(G,M) é o conjunto de campos vetoriais completos sobre M tal que

$$[X,X_i] = 0 \quad (i=1,\ldots,n)$$

Prova:

Como X é tangente a G se e só se é tangente ao grupo de automorfismos de X_i, a proposição é uma consequência imediata da proposição 3.17.

Esta proposição mostra que uma álgebra de Lie R(G,M), pode ser calculada diretamente da paralelização.

A proposição seguinte mostra que esta álgebra de Lie determina a distribuição Ω associada com a paralelização.

Proposição 3.19 - Seja G o grupo de Lie de automorfismos de uma paralelização sobre uma variedade de Hansdorff conexa M. Então qualquer base para R(G,M) é uma base para a distribuição Ω.

Prova:

De acordo com proposição 3.3, existe um isomorfismo $\gamma : RG \to R(G,M)$, onde RG é a estrutura da álgebra de Lie sobre T_eG

Seja $z \in R(G,M)$ e

$$v = \gamma^{-1} Z$$

a proposição 3.2 mostra que

$$\gamma_m = (\exp tv)m$$

é a curva maximal integral de Z que começa em um dado ponto $m \in M$.

Temos duas condições conclusiva desta observação:

i) se Z é zero em um ponto dado m então é um campo vetorial zero sobre M. Já que neste caso γ_m é uma curva constante e, como G age livremente sobre M,

$$\exp tv = e$$

para todos os valores de t. Portanto

$$v = 0 \text{ e assim } Z = ro$$

e este é o campo vetorial nulo sobre M.

ii) se Z pertence à distribuição. Já que, se m é qualquer ponto de M, a imagem de γ_m está na órbita G_m que é uma subvariedade regular de M.

Proposição 5.3.2 (Referência 1) mostra que

$$Zm = \dot{\gamma}_m 0$$

é tangente a G_m em m. Mas G_m é uma variedade integral de Ω.

Nossa proposição segue desses dois fatos.

Seja $Z_1, \ldots, Z_p$ uma base para $R(G,M)$ de modo que G, e portanto Ω tem dimensão P. Esses campos vetoriais pertencem a Ω, de modo que é suficiente mostrar que seus valores $Z_1 m, \ldots, Z_p m$ são linearmente independentes para todo ponto m de M.

Escolhamos qualquer ponto m e suponhamos que

$$\Sigma a_\alpha (Z_\alpha m) = 0 \; ; \; a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha = 1, \ldots, P$$

Então o campo vetorial

$$Z = \Sigma a_\alpha Z_\alpha$$

pertencem a $R(G,M)$ e é zero em m.

Consequentemente é um campo vetorial nulo sobre M e, como $Z_1,\ldots,Z_p$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, os números reais a_α são todos zero.

BIBLIOGRAFIA

1 - BRICKEL, F. and R.S. CLARK, Differentiable Manifolds, An Introduction - Van No trand Reinhold Company, London, 1970.

2 - WARNER, Frank W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company, London, 1971.

3 - CHEVALLER, Claude, Theory of Lie Groups - Princeton University Press, Princeton, 1946.

4 - CHEEGER, Jeff and David G. EBIN, Comparison Theorems in Riemaniana Geometry, American Elsevier Publishing Company, INC - New York, 1975.

5 - CARMO, Manfredo Perdigão do, Geometria Riemannianna - Gráfica Editora Hamburg Ltda - São Paulo, 1979.

6 - LANG, Serge, Differential Manifolds, Addison Wesley Publishing Company, London, 1972

7 - MONTGOMERY, D. and L. ZIPPIN, Topological Transformation Groups. Interscience Publishers LTD, London, 1955.

8 - DUGUNDJI, J. Topology, Allyn and Bacon, New York, 1966.

9 - PALAIS S. Richard, A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups, American Mathematical Society, 1957.

10 - KOBAYASCHI Schoshichi, Theory of Connections, New Jersey, 1957.

11 - KORB, Selma Veiga, Um Enfoque de Variedades Diferenciá-veis com Aplicações a Equações Diferenciais, UFSC, 1980.