Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. ÍTALO JOSÉ DEJTEI
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. WILLIAN GLENN WHITLEY, Ph. D
Orientador

Prof. ANDREW P. WHITMAN, Ph. D.

Prof. ÍTALO JOSÉ DEJTER, Ph. D.

Título : CLASSIFICAÇÃO HOMOTÓPICA DE ESPAÇOS DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Aluno : NORBERTO DE MIRANDA SILVA

Orientador: WILLIAM GLENN WHITLEY

Aos meus pais, esposa e filhas, cujo incentivo me foram de fundamental importância para a realização deste tra balho.

ÍNDICE

-o-o-o-o-

-0-

RESUMO

RESUMO

Desenvolvemos propriedades de equivalência homotópicas entre variedades, em particular àquelas que resultam do fato que as variedades são vizinhanças de retração absoluta (ANR's).

Daremos algumas aplicações destas propriedades construindo equivalências homotópicas entre espaços de funções C^∞ e seus subespaços de mergulhos e de k-mersões.

ABSTRACT

We develop some homotopy equivalence properties for manifolds, especially those that result from the fact that manifolds are absolute neighborhood retracts (ANR's).

We apply these properties to construct homotopy equivalences between espaces of C^{∞} functions and its subspaces of embeddings and k-mersions.

-I-

INTRODUÇÃO

1.00- Introdução

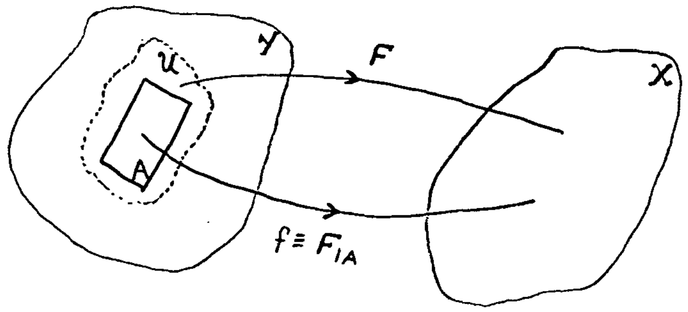
No estudo da Teoria da Homotopia de Variedades de Dimensão Infinita utilizaremos constantemente algumas definições e resultados, os quais relacionaremos à seguir:

1.01- Retração Absoluta (AR)

Seja X um espaço metrizável. Diremos que X é uma Retração Absoluta (AR) se, dado um subconjunto fechado A de um espaço metrizável Y e uma função contínua $f:A \longrightarrow X$, existe uma função contínua $F:Y \longrightarrow X$ a qual extende f.

1.02- Vizinhança de Retração Absoluta (ANR)

Dizemos que X é uma vizinhança de retração absoluta, (ANR), se dados A, Y e $f:A \longrightarrow X$ como acima, existe uma vizinhança U de A em Y e uma função contínua $F:U \rightarrow X$ a qual extende f.



1.03- ANR local/ou AR local

X é uma ANR local/ou AR local se, cada ponto tem uma vizinhança a qual é uma ANR/ ou AR respectivamente.

1.04- Espaço Paracompacto

Um espaço de Hausdorff X é paracompacto se cada cobertura aberta de X tiver um refinamento localmente finito, i.é, cada ponto tem uma vizinhança que intercepta somente um número finito dos abertos no refinamento.

Se X é Paracompacto e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de X, então existe uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X tal que $\{\bar{V}_\alpha\}$ refina $\{U_\alpha\}$.

1.05- Partições da Unidade

Seja Y um espaço de Hausdorff. Uma família $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de funções contínuas $K_\alpha : Y \longrightarrow I$ é chamada uma partição da unidade em Y se:

i) Os suportes de K_α formam uma cobertura fechada localmente finita de Y.

ii) $\sum_\alpha K_\alpha(y) = 1$ para cada y (esta soma é bem definida porque cada y se situa no suporte de no máximo finitos K_α. J.Dugundgi [4].

Obs:

i) Se $\{U_\beta \mid \beta \in B\}$ é uma dada cobertura de Y, dizemos que uma partição $\{K_\beta \mid \beta \in B\}$ é subordinada a $\{U_\beta\}$ se o suporte de cada K_β se situa num correspondente U_β.

j) Se Y é paracompacto, então para cada cobertura aberta $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de Y existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$.

k) Seja L um subconjunto aberto do R^n e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de L. Existe uma família K_α de funções satisfazendo as condições i) e ii) da definição acima possuindo derivadas parciais de todas as ordens chamada de ... "uma localmente finita, partição da unidade infinitamente diferenciável subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. [1]

1.06- Complexos Simpliciais

Dado um conjunto de índices A definiremos $R^{(A)}$ como o espaço vetorial real tendo A como uma base, i.é., $R^{(A)}$ consiste de todas as funções $f: A \longrightarrow R$ tal que $\{\alpha \in A; f(\alpha) \neq 0\}$ é finito, onde identificamos $\alpha \in A$ com a função característica de $\{\alpha\}$. Daremos a $R^{(A)}$ a topologia finita.

Seja K um complexo simplicial abstrato, i.é., uma coleção hereditária de subconjuntos finitos de um conjunto V chamado vértices de K, um n-simplexo de K é um elemen-

$a, \; b \in C$ seja: $\{ c \mid c = \lambda b + (1-\lambda)a \; ; \; 0 \leq \lambda \leq 1 \}$ é a linha ligando a e b. Se esta linha ou segmento se situa todo em C para cada par (a,b), então C é dito um conjunto convexo.

1.11- Casca Convexa

Seja A um subconjunto de um espaço vetorial L. A casca convexa de A, H(A), é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A.

Expressão de H(A) em termos A: para cada conjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ seja $\sigma(F) = \{ y \in L \; ; \; y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \; ; \; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \}$. $\sigma(F)$ é chamado de simplexo aberto gerado por $a_1, \ldots, a_n$ e é também denotado por $(a_1, \ldots, a_n)$. Seja $A \subset L$, então $H(A) = \bigcup \{ \sigma(F) \mid \ldots F \subset A$ e F é finito$\}$.

Obs:

Um espaço é dito <u>Localmente Convexo</u> se cada ponto tem um sistema fundamental de vizinhanças convexas.

1.12- Propriedade de Extensão Homotópica (HEP)

Seja A um subespaço fechado de um espaço X. Diremos que A tem uma "Propriedade de Extensão Homotópica" (HEP) em X com respeito ao espaço Y, se cada função contínua de $[X \times \{0\}] \cup [A \times I]$ em Y pode ser extendida a uma função contínua de $X \times I$ em Y (i.é., dada uma função $f: X \longrightarrow Y$, cada homotopia de $f_{|A}: A \longrightarrow Y$, pode ser extendida a uma homotopia de $f: X \longrightarrow Y$).

Se A tem uma HEP em X com respeito a todos' os espaços Y então A é dito como tendo "Propriedade de Extensão Homotópica Absoluta"(AHEP) em X.

1.13- Meio Espaço

Seja V um Espaço Vetorial Topológico Real Local-to $\sigma = \{v_0,\ldots,v_n\}$ de K com $v_0,\ldots,v_n$ distintos.

Dado um tal σ definamos um subespaço $|\sigma|$ de $R^{(V)}$ por $|\sigma| = \left\{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i ;\ t_i \geqslant 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\}$, i.é., $|\sigma|$ é a "casca convexa" de $\{v_0,\ldots,v_n\}$ (ou seja, a interseção de todos conjuntos convexos que contém $\{v_0,\ldots,v_n\}$), e definiremos um subespaço $|K|$ de $R^{(V)}$ chamado a "realização geométrica" de K, por $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$. Um espaço da forma $|K|$ é chamado um "complexo simplicial".

Observemos que a função $f: |K| \to X$, onde X é um espaço, é contínua se e somente se $f_{||\sigma|}$ é contínua para cada $\sigma \in K$, e visto que $R^{(V)} \times R = R^{(V \cup \{p_0\})}$, onde $p_0 \notin V$, uma família de funções indexadas $h_t: |K| \to X$ $(t \in I)$ é uma homotopia se e somente se $h_{t||\sigma|}: |\sigma| \longrightarrow X$ é uma homotopia para cada $\sigma \in K$.

1.07- Nervo de uma Cobertura

Se $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de um espaço X então o Nervo de $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é o complexo simplicial abstrato N cujo conjunto de vértices é A e cujos n-simpliciais são os conjuntos $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\}$ de vértices distintos tais que $\bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Observação

Agora suponhamos que $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita e seja $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade para X com suporte $\varphi_\alpha \subseteq \mathcal{O}_\alpha$. Definiremos a função $f: X \longrightarrow |N|$ chamada de função baricêntrica determinada por $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ pela expressão: $f(x) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x)\alpha$ (contínua por $\mathcal{O}_\alpha$ ser localmente finita).

Dado $x \in X$ seja U uma vizinhança de x em X tal que $U \cap \mathcal{O}_\alpha \neq \emptyset$ somente se $\alpha = \alpha_1,\ldots,\alpha_n$ e seja W um subespaço de dimensão finita de $R^{(A)}$ gerado por ... $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Então claramente f é uma função contínua de

U em W, e visto que W é um subespaço de $R^{(A)}$ a função $f: X \longrightarrow R^{(A)}$ é contínua. Também se $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ são vértices distintos tais que $\varphi_\alpha(x) > 0$ então $x \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_i}$ e $\sigma = \{\alpha_0, \ldots \alpha_n\}$ é um simplexo de N. Claramente temos $f(x) \in |\sigma|$ de modo que f leva X em N.

1.08- Dimensão de um Espaço (Cobertura) de X

É o menor inteiro n tal que cada cobertura aberta de X tem uma cobertura aberta $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ refinando-a, de modo que $\mathcal{O}_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{\alpha_m} = \emptyset$ se $m > n$ e $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ são distintos, (i.é., dim Nervo$(\{\mathcal{O}_\alpha\}) \leqq n$). Se, não existe tal n, então dim X= ∞.

1.09- Espaço Vetorial Topológico

Seja E um conjunto sobre o qual estão definidas uma estrutura de espaço vetorial sobre um corpo numérico K, e uma topologia, Se:

1) a função $(x,y) \longrightarrow x + y$ de E x E em E é contínua, e

2) a função $(k,x) \longrightarrow kx$ de K x E em E é contínua,

então temos um Espaço Vetorial Topológico.

Obs:

É sabido, sem dúvida, que nos Axiomas 1) e 2) consideramos a topologia do produto sobre os espaços produto. Uma estrutura de espaço vetorial e uma topologia sobre um conjunto são ditos como sendo compatíveis se os Axiomas 1) e 2) são cumpridos.

1.10- Conjunto Convexo

Seja C um subconjunto de um Espaço Vetorial, para mente Convexo. Um meio espaço em V é um subconjunto da forma $\left\{ v \in V \mid l(v) > 0 \right\}$ onde l é um funcional linear contínuo em V.

1.14- Carta

Uma Carta ou Sistema de Coordenadas em um espaço X, é uma função $\varphi: \mathcal{O} \longrightarrow V$, onde $\mathcal{O}$ é aberto em X, V é um espaço vetorial topológico real localmente convexo* e a função φ leva $\mathcal{O}$ homeomórficamente sobre algum conjunto aberto de V ou do meio espaço de V.

* (EVTRLC)

1.15- Atlas

Um V Atlas para X é uma família $\left\{ \varphi_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow V \right\}$ de cartas de X tal que $\mathcal{O}_\alpha$ cobre X.

1.16- Variedade Topológica com Fronteira

Uma Variedade Topológica com Fronteira é um espaço de Hausdorff X, o qual admite um Atlas. Notamos que este é o caso, se e sómente se cada ponto tem uma vizinhança homeomórfica a um conjunto convexo aberto em um "EVTRLC" ou em seu meio espaço. Por simplicidade abreviaremos "Variedade Topológica com Fronteira" para "Variedade" neste estudo.

1.17- O Modelo de X

Se $\left\{ \varphi_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow V \right\}$ é um Atlas para X então devemos dizer que V é o Modelo de X ou que X pode ser "modelado sobre V". Se V é um EVTRLC metrizável (respectivamente metrizável completamente) então diremos que X é localmente metrizável (respectivamente localmente metrizável completamente).

É bem conhecido [10, Teor. 6.7] que um EVTRLC é metrizável se e somente se satisfaz o 1º Axioma de Contabilidade, portanto uma Variedade X é Localmente Metrizável se e somente se X satisfaz o 1º Axioma de Contabilidade. Neste caso, dada alguma carta $\varphi:\mathcal{O} \longrightarrow V$ para X, segue que V é 1º Contável, portanto um ... EVTRLCM (metrizável).

Se X pode ser modelado sobre V onde V é um <u>Espaço de Banach</u> então X é chamado de <u>Variedade de Banach</u>.

-II-

PARACOMPACIDADE E METRIZIBILIDADE

2.00- Paracompacidade e Metrizabilidade

Aquí veremos alguns Lemas e Teoremas que nos dão condições de metrizabilidade e paracompacidade de Variedades.

2.01- Lema

Seja $\mathcal{O}$ um conjunto aberto em um espaço X. Se d é uma métrica limitada para $\overline{\mathcal{O}}$ então existe uma pseudo métrica contínua ρ para X tal que $\rho(x,y) = 0$ para $x, y \in X - \mathcal{O}$, e se $x \in \mathcal{O}$ e $\rho(x,y)$ é suficientemente pequena, então $y \in \mathcal{O}$ e temos $\rho(x,y) = d(x,y)$.

Prova

Nesta prova, a distância de um ponto de um espaço ' métrico limitado ao conjunto vazio é tida como o diâmetro do espaço.

Se Δ é definida sobre o produto $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ por ... $\Delta(x,y) = d(x,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) + d(\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O},y)$, então Δ é simétrica e satisfaz a desigualdade triangular e segue que ... $\rho(x,y) = \min\left\{d(x,y), \Delta(x,y)\right\}$ é uma métrica para $\mathcal{O}$.

Para extender ρ para $X \times X$, basta definir ...

$$\rho(x,y) = \begin{cases} d(x,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) & \text{se } x \in \mathcal{O},\ y \in X-\mathcal{O} \\ d(\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O},y) & \text{se } x \in X-\mathcal{O},\ y \in \mathcal{O} \\ 0 & \text{se } x \in X-\mathcal{O},\ y \in X-\mathcal{O} \end{cases}$$

Claramente vemos que ρ é simétrica e $\rho(x,x) = 0$. A desigualdade triangular é óbvia se $x,y \in \mathcal{O}$ ou se $x,y \in X - \mathcal{O}$. Se $x \in \mathcal{O}$ e $y \in X - \mathcal{O}$ devemos mostrar que $d(x,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) \leqq \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Se $z \in X - \mathcal{O}$ isto é claro. Se $z \in \mathcal{O}$ então devemos mostrar que

$$d(x,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) \leqq \min\left\{d(x,z),\ d(\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O},x)+d(\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O},z)\right\} + d(z,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$$

Quando $d(x,z) \geqq d(x,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O})+d(z,\overline{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$ é óbvio. Se não, teremos que mostrar que $d(x,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) \leqq d(x,z)+d(z,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$.

Se $\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}$ é vazio, a última é trivial. Caso contrário, escolho $p_n \in \bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}$ de modo que $d(z,p_n) \to d(z,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$: Então $d(x,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) \leqq d(x,p_n) \leqq d(x,z)+d(z,p_n)$ e deixando $n \to \infty$ teremos a desigualdade desejada, e a desigualdade de triangular é provada.

Então, ρ é uma psudo-métrica para X e claramente, dado $x \in \mathcal{O}$, se $\rho(x,y) < d(x,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$ então $y \in \mathcal{O}$ e $\rho(x,y)=d(x,y)$, porque $d(x,y) \leqq \Delta(x,y)$ neste caso.

Finalmente, suponhamos que $x_\alpha \to x$ em X. Se $x \in \mathcal{O}$ então eventualmente, $x_\alpha \in \mathcal{O}$ e $d(x_\alpha,x) < d(x,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O})$ tal que $\rho(x_\alpha,x)=d(x_\alpha,x) \to 0$. Se $x \in X-\bar{\mathcal{O}}$ então eventualmente $x_\alpha \in X-\bar{\mathcal{O}}$ de modo que $\rho(x_\alpha,x)=0$. Logo se $x \in \bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}$ então, visto que $\rho(x_\alpha,x)=0$ para $x_\alpha \in X-\mathcal{O}$, podemos supor $x_\alpha \in \mathcal{O}$, logo $\rho(x_\alpha,x)= d(x_\alpha,\bar{\mathcal{O}}-\mathcal{O}) \leqq d(x_\alpha,x) \to 0$. Logo ρ é contínua.

A seguir enunciaremos dois teoremas, os quais dizem respeito à variedades metrizáveis e, metrizáveis e completas sendo porisso, demonstrados conjuntamente.

2.02- Teorema

Uma variedade é metrizável se e somente se satisfaz o primeiro axioma de contável (i.é., é localmente metrizável) e é paracompacta. Mais geralmente um espaço de Hausdorff é metrizável se e somente se é localmente metrizável e paracompacto.

2.03- Teorema

Uma variedade admite uma métrica completa se e somente se é paracompacta e localmente metrizável e completa. Mais geralmente, um espaço de Hausdorff admite u ma métrica completa se e somente se é paracompacto e cada ponto tem uma vizinhança a qual admite uma métrica completa.

Demonstração

Seja X um espaço paracompacto e suponhamos que cada ponto de X tem uma vizinhança a qual admite uma métrica (completa.)

Devemos construir uma métrica (completa) para X.

Visto que um subespaço (fechado) de um espaço métrico (completo) é métrico (completo), os conjuntos abertos $\mathcal{O}$ de X tais que $\overline{\mathcal{O}}$ admite uma métrica (completa) é uma base para a topologia de X, portanto existe uma cobertura aberta localmente finita $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X tal que cada $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ admite uma métrica (completa) d_α.

Para cada $\alpha \in A$ usemos o Lema 2.01 para construir uma pseudo-métrica ρ_α para X e defina $\rho = \sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha$.

Dado $(x_0,y_0) \in X \times X$ sejam U e V vizinhanças de x_0 e y_0 respectivamente, tais que $A' = \{\alpha \in A \mid U \cap \mathcal{O}_\alpha \neq \emptyset\}$ e $A'' = \{\alpha \in A \mid V \cap \mathcal{O}_\alpha \neq \emptyset\}$ são finitos e portanto temos que $A^* = A' \cup A''$ é finito.

Então em $U \times V$, $\rho = \sum_{\alpha\in A^*} \rho_\alpha$ e segue que ρ é uma pseudo-métrica contínua para X; se $\rho(x,y)=0$ escolha $\alpha \in A$ com $x \in \mathcal{O}_\alpha$. Então $\rho_\alpha(x,y)=0$ logo $y \in \mathcal{O}_\alpha$ e ... $d_\alpha(x,y) = \rho_\alpha(x,y) = 0$ então $x = y$ e ρ é uma métrica.

Devemos mostrar que ρ é admissível, e desde que é contínua, isto significa que se $\rho(x_n,x) \longrightarrow 0$ devemos mostrar que $x_n \longrightarrow x$.

Escolhamos $\alpha \in A$ com $x \in \mathcal{O}_\alpha$ e $\varepsilon > 0$ de modo que $\rho_\alpha(x,y) < \varepsilon$ implica y pertencer a $\mathcal{O}_\alpha$ e $d_\alpha(x,y) = \rho_\alpha(x,y)$. Escolha N de modo que $n > N$ implica $\rho(x_n,x) < \varepsilon$. Desde que $\rho_\alpha \leqq \rho$, se $n > N$ então

$d_\alpha(x_n,x) = \rho_\alpha(x_n,x) \longrightarrow 0$ e, visto que d_α é uma métrica admissível para $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$, $x_n \longrightarrow x$ em $\mathcal{O}_\alpha$, portanto $x_n \longrightarrow x$ em X.

Finalmente suponhamos que para cada $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ é completo com respeito a d_α. Pretendemos mostrar que cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança em que ρ é completa.

Dado $x \in X$ escolhamos α com $x \in \mathcal{O}_\alpha$ e $\varepsilon > 0$ de modo que $\rho_\alpha(x,y) < \varepsilon$ implica $y \in \mathcal{O}_\alpha$ e $d_\alpha(x,y) = \rho_\alpha(x,y)$. Seja B denotando a ε-bola fechada em X com a métrica ρ. Se $\{x_n\}$ é uma ρ-sequência de Cauchy em B, então, visto que $\rho \geqslant \rho_\alpha$, $\{x_n\}$ é d_α-Cauchy e portanto $x_n \longrightarrow x \in \overline{\mathcal{O}}$, e claramente $x \in B$. Então B é ρ-completa. O Lema 2.04 completa a demonstração.

2.04- Lema

Se (X,ρ) é um espaço métrico no qual cada ponto tem uma vizinhança completa, então existe uma métrica completa admissível ρ' para X.

Demonstração

Seja $\{V_\gamma\}$ uma cobertura aberta localmente finita de X, tal que $\overline{V}_\gamma$ é ρ-completa, e seja $\{W_\gamma\}$ uma cobertura aberta, com $\overline{W}_\gamma \subseteq V_\gamma$ [4, IX]. Seja $\varphi_\gamma : X \longrightarrow I$ uma função contínua com suporte em V_γ e com $\varphi_\gamma|_{W_\gamma} \equiv 1$. Coloque $\rho'(x,y) = \rho(x,y) + \sum_\gamma |\varphi_\gamma(x) - \varphi_\gamma(y)|$.

Claramente ρ' é uma métrica admissível para X; seja $\{x_n\}$ uma ρ'-sequência de Cauchy. Podemos supor $\rho'(x_n,x_m) < 1$. Escolha γ_1 com $x_1 \in W_{\gamma_1}$, então $\varphi_{\gamma_1}(x_1) = 1$. Então $\varphi_{\gamma_1}(x_n) - \varphi_{\gamma_1}(x_1) < \rho'(x_n,x_1) < 1$, logo $\varphi_{\gamma_1}(x_n) \neq 0$ e $x_n \in \overline{V}_{\gamma_1}$. Desde que $\rho < \rho'$, $\{x_n\}$ é ρ-Cauchy, portanto existe um x em $\overline{V}_{\gamma_1}$ de modo que $x_n \longrightarrow x$.

2.05- Corolário

Cada Variedade Paracompacta de Banach admite uma métrica completa.

"O seguinte Lema devido a J. Milnor será muito usado a seguir, pois será útil na caracterização da paracompacidade de uma variedade. A noção de Nervo (1.07, ... 1.08), será usada."

2.06- Lema

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de um espaço paracompacto X. Existe uma cobertura aberta localmente finita $\{G_{i\beta}\}_{\beta\in B_i}$, $i=0,1,2,\ldots$ refinando $\{U_\alpha\}$ tal que a interseção $G_{i\beta}\cap G_{i\beta'}=\emptyset$ se $\beta\neq\beta'$. Além disso se $\dim X=n$, então podemos supor $B_i=\emptyset$ para $i>n$.

Demonstração

Inicialmente podemos supor que $\{U_\alpha\}$ é localmente finita e, se $\dim X=n<\infty$, que $U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_m}\cap U_{\alpha_{n+1}}=\emptyset$ se $\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}$ são distintos. Seja B_i o conjunto dos subconjuntos $\beta=\{\alpha_0,\ldots,\alpha_i\}$ de $i+1$ elementos de A. Seja $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma partição da unidade com suporte $\varphi_\alpha\subseteq U_\alpha$ e para $\beta\in B_i$ seja $G_{i\beta}=\{x\in X \mid \varphi_\alpha(x)>0$ se $\alpha\in\beta$, e $\varphi_\gamma(x)<\varphi_\alpha(x)$ se $\alpha\in\beta,\ \gamma\notin\beta\}$.

Perto de cada $x\in X$ somente um número finito de φ_α não são iguais a zero de modo que $G_{i\beta}$ é aberto.

Claramente $G_{i\beta}\cap G_{i\beta'}=\emptyset$ se $\beta\neq\beta'$, e $G_{i\beta}=\emptyset$ se $i>n$. Visto que $G_{i\beta}\subseteq\bigcap_{\alpha\in\beta}U_\alpha$, $\{G_{i\beta}\}$ refina $\{U_\alpha\}$.

Dado x_0 seja $\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_m$ os índices tais que $\varphi_{\alpha_0}(x_0)>0$, ordenados de modo que $\varphi_{\alpha_0}(x_0)=\ldots$ $\ldots=\varphi_{\alpha_i}(x_0)>\varphi_{\alpha_{i+1}}(x_0)\geqslant\ \ldots\geqslant\varphi_{\alpha_m}(x_0)$. Então temos

x_o $G_{i\{\alpha_0,\dots,\alpha_i\}}$ e os G_i cobrem X.

Finalmente se $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de x_o tal que o conjunto $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$ é um conjunto finito A' então $G_{i\beta} \cap \mathcal{O} = \emptyset$ a menos que $\beta \subseteq A'$ e existe somente um número finito de tais β, então $\{G_{i\beta}\}$ é localmente finita.

2.07- Teorema

Uma variedade localmente metrizável é paracompacta (e portanto metrizável) se e somente se admite um atlas da forma $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in B_n}$ onde $\mathcal{O}_{\alpha'} \cap \mathcal{O}_\alpha = \emptyset$ se $\alpha, \alpha' \in B_n$ e $\alpha \neq \alpha'$. Mais geralmente um espaço de Hausdorff X é paracompacto se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in B_n} \mathcal{O}_\alpha$ onde $\mathcal{O}_\alpha$ é um subespaço aberto paracompacto de X e $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_{\alpha'} = \emptyset$ $\alpha, \alpha' \in B_n$ e $\alpha \neq \alpha'$.

Demonstração

Seja X um espaço de Hausdorff tal $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in B_n} \mathcal{O}_\alpha$ onde cada $\mathcal{O}_\alpha$ é aberto e paracompacto. Visto que $\mathcal{O}$ é paracompacto e aberto, portanto normal, portanto regular, e como regularidade é uma propriedade local, X é regular.

Se $\{V_\beta\}$ é uma cobertura aberta de X então ... $\{V_\beta \cap \mathcal{O}_\alpha\}$ é uma cobertura aberta do espaço paracompacto $\mathcal{O}_\alpha$. Então existe uma cobertura aberta localmente finita $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_\alpha}$ de $\mathcal{O}_\alpha$ a qual a refina. Visto que $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_{\alpha'} = \emptyset$ se $\alpha \neq \alpha'$, $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_n}$ (onde $\Gamma_n = \bigcup_{\alpha \in B_n} \Gamma_\alpha$) é uma cobertura localmente finita de $\bigcup_{\alpha \in B_n} \mathcal{O}_\alpha$. Segue então que $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, onde $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ é uma cobertura σ-localmente finita de X. Como cada cobertura aberta de X tem um refinamento σ-localmente finito então X é paracompacto. [10, Teorema 28].

Seja X uma variedade localmente metrizável e para compacta (portanto metrizável), pelo Lema anterior existe para cada cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ um refinamento aberto localmente finito $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in B_n}$ tal que $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_{\alpha'} = \emptyset$ se $\alpha, \alpha' \in B_n$ e $\alpha \neq \alpha'$, logo podemos tomar cartas $\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ e a união das cartas $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\varphi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow V_\alpha\}$ é o atlas desejado. O recíproco é um caso especial do exposto acima.

2.08- Corolário

Uma variedade localmente metrizável X é paracompacta (e portanto metrizável) desde que cada componente admita um atlas contável.

Demonstração

Visto que uma variedade é localmente conexa, e portanto é a soma topológica de suas componentes, podemos supor que X é conexo. Se $\{\varphi_n : \mathcal{O}_n \longrightarrow V_n\}_{n\in Z}$ é um atlas contável para X então podemos tomar, de acordo com o Teorema anterior, se define $B_n = \{n\}$ e o Corolário segue imediatamente.

"Para provarmos o próximo Corolário precisaremos do Teorema de Lindelöf".

2.09- Teorema (de Lindelöf)

Existe uma subcobertura contável de cada cobertura aberta de um subconjunto de um espaço cuja topologia tem uma base contável.

Demonstração

Seja A um conjunto, $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de A e $\mathcal{B}$ uma base contável para a topologia. Desde que cada membro de $\mathcal{A}$ é a união de membros de $\mathcal{B}$ existe uma subfamília de $\mathcal{A}$ que denotaremos por $\mathcal{C}$ a qual cobre A também, e tal que cada membro de $\mathcal{C}$ pé um subconjunto de algum membro de $\mathcal{A}$. Para cada membro de $\mathcal{C}$ podemos selecionar um membro correspondente de $\mathcal{A}$ e então obter uma subfamília $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$. Esta subfamília $\mathcal{D}$ é também uma cobertura de A porque $\mathcal{C}$ cobre A. Portanto $\mathcal{A}$ tem uma subcobertura contável.

2.10- Corolário

Se cada componente de uma variedade X satisfaz o 2º Axioma de Contabilidade então X é metrizável.

Demonstração

Se X satisfaz o 2º Axioma de Contabilidade," a fortiori" satisfaz o 1º, i.é., é localmente metrizável. Como cada componente é coberta por vizinhanças coordenadas, o resultado segue de imediato de 2.08 e de 2.09.

-III-

VIZINHANÇA DE RETRAÇÃO ABSOLUTA

3.00- Vizinhança de Retração Absoluta (ANR)

Aqui veremos alguns fatos elementares, entretanto altamente úteis, sobre ANR's (1.01;1.02).

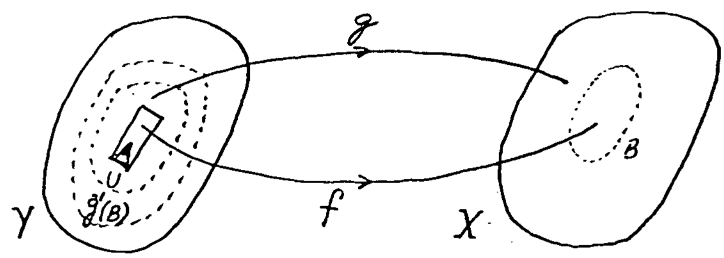
3.01- Lema

Um retrato de uma ANR, um conjunto aberto em uma ANR, e uma soma topológica de ANR's são todos ANR's.

a) Um retrato de uma ANR é uma ANR;

Seja X uma ANR e $r:X \longrightarrow B$ uma retração de X sobre B. Seja Y um espaço metrizável qualquer e $f:A \longrightarrow B$ uma função contínua de um subconjunto fechado de Y em B. Desde que $B \subseteq X$, podemos considerar que $f:A \longrightarrow X$. Desde que X é ANR, existem vizinhanças abertas U de A em Y e uma extensão $g:U \longrightarrow X$ de f. Seja $F = rg:U \longrightarrow B$. Óbviamente F é a extensão desejada.

b) Um conjunto aberto em uma ANR é uma ANR.



Sejam X uma ANR e $B \subseteq X$ um aberto. Seja Y um espaço métrico qualquer e $f:A \longrightarrow B$ uma função contínua de um fechado de Y em B. Desde que $B \subseteq X$,... consideremos que $f:A \longrightarrow X$. Existem vizinhança aberta U de A em Y e extensão $g:U \longrightarrow X$ de f. Sejam ... $V = g^{-1}(B)$ e $F = g_{|V}$. Desde que $f(A) \subseteq B$ e g é extensão contínua de f, V é vizinhança aberta de A em Y. Assim F é a extensão desejada.

c) Uma soma topológica de ANR's é ANR

Lembramos que a Soma Topológica de Espaços $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é a União Disjunta $X = \bigoplus_\alpha X_\alpha$ dos X_α com a Topologia Fraca dos X_α. Isto é, $U \subseteq \bigoplus_\alpha X_\alpha$ é aberto (fechado) se e somente se cada $U \cap X_\alpha$ é aberto (fechado) em X_α. Em particular cada X_α é aberto (fechado)' em X.

Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de ANR's, e $X = \bigoplus_\alpha X_\alpha$ sua soma topológica. Para cada $\alpha \in A$, escolhamos uma métrica d_α em X_α tal que o d_α diâmetro ' de X_α é menor ou igual a 1. Definamos d em X por $d(x,y) = d_\alpha(x,y)$ se $x,y \in X$, e $d(x,y)=2$ se x e y são de fatores distintos de X. Óbviamente d é uma métrica admissível em X.

Seja Y um espaço métrico qualquer e $f:B \longrightarrow X$ uma função contínua de um fechado B de Y em X. Para cada $\alpha \in A$ definamos $B_\alpha = f^{-1}(X_\alpha)$ e $f_\alpha = f|_{B_\alpha}: B_\alpha \longrightarrow X$. Desde que X_α é ANR, existe ' (U_α, g_α) tal que U_α é vizinhança aberta de B_α em Y e $g_\alpha: U_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ é extensão de f_α .

Sejam $U = \bigcup(U_\alpha \cap f^{-1}(X_\alpha))$ e $F = \bigcup g_\alpha|_{U_\alpha \cap f^{-1}(X_\alpha)}$

Desde que cada U_α e $f^{-1}(X_\alpha)$ é aberto, U é aberto. Também desde que os X_α são disjuntos, os $U \cap f^{-1}(X_\alpha)$ são disjuntos. Portanto F é contínua e extende f.

3.02- Lema

Seja X um espaço métrico,

a) Se $X = X_1 \cup X_2$ onde X_1 e X_2 são ANR's abertas, então X é uma ANR.

b) Se $X = X_1 \cup X_2$ onde X_1 e X_2 são ANR's fechadas, e se $X_1 \cap X_2$ é tambem uma ANR, então X é ANR.

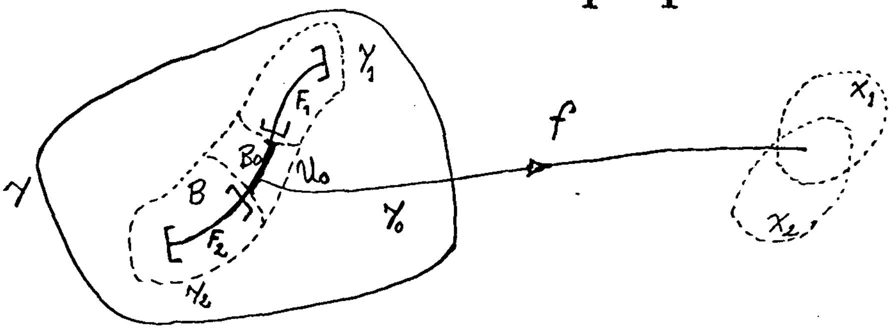
c) Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ onde cada X_n é aberto e é uma ANR, então X é uma ANR.

Provas:

a) Sejam X_1 e X_2 ANR's e $X = X_1 \cup X_2$ e $f: B \longrightarrow X$ uma função contínua de um subconjunto fechado B de um espaço Y. Temos que mostrar que f tem uma extensão contínua a uma vizinhança de B.

Como f é contínua, isto implica que $f^{-1}(X_1)$ e $f^{-1}(X_2)$ são abertos em B. Então $F_1 = B - f^{-1}(X_2)$ e $F_2 = B - f^{-1}(X_1)$ são fechados disjuntos em B, logo em Y também. Como Y é normal existem abertos disjuntos Y_1 e Y_2 em Y tal que $Y_1 \supset F_1$ e $Y_2 \supset F_2$. Então $Y_0 = Y - (Y_1 \cup Y_2)$ é um conjunto fechado em Y.

Defina os conjuntos $B_i = Y_i \cap B$, $i = 0,1,2$.



$B_0 = Y_0 \cap B$

$B_1 = Y_1 \cap B$

$B_2 = Y_2 \cap B$

(1) $\quad f(B_0) \subset X_1 \cap X_2$, $f(B_1) \subset X_1$ e $f(B_2) \subset X_2$.

B_0 é um subconjunto fechado de Y_0 e $X_1 \cap X_2$ é um aberto na ANR X_2, e portanto também ANR. Então existe uma extensão de $f|_{B_0}$ relativa a $X_1 \cap X_2$ para uma vizinhança aberta U_0 de B_0 em Y_0.

Esta extensão definida em U_0 e a função original definida em B concordam na interseção dos seus domínios, o fechado $B_0 = U_0 \cap B$, de modo que elas juntas definem uma função contínua $g: U_0 \cup B \longrightarrow X$.

(2) $\quad$ Temos, $g(U_0 \cup B_1) \subset X_1$ e $g(U_0 \cup B_2) \subset X_2$, e

(3) $\quad Y_0 - U_0$ é fechado em Y.

O conjunto $U_0 \cup B_1$ é fechado em $U_0 \cup Y_1$ porque

$(U_o \cup Y_1) - (U_o \cup B_1) = Y_1 - B_1$ é aberto em Y. Desde que X_1 é uma ANR, temos em vista de (2), uma extensão $g_1 : U_1 \longrightarrow X_1$ de $g|_{U_o \cup B_1}$ relativa a X_1 para uma vizinhança aberta U_1 de $U_o \cup B_1$ em $U_o \cup Y_1$. Por causa de (3) $U_o \cup Y_1$ é aberto em $Y_o \cup Y_1$ de modo que

(4) $\quad U_1$ é aberto em $Y_o \cup Y_1$.

Similarmente seja $g_2 : U_2 \longrightarrow X_2$ uma extensão de $g|_{U_o \cup B_2}$ relativa a X_2 para uma vizinhança U_2 de $U_o \cup B_2$ em $U_o \cup Y_2$. Por causa de (3) $U_o \cup Y_2$ é aberto em $Y_o \cup Y_2$, de modo que

(5) $\quad U_2$ é aberto em $Y_o \cup Y_2$.

Façamos $U = U_1 \cup U_2$ e definamos $F : U \longrightarrow X$ por $F(u) = g_1(u)$ para $u \in U_1$, e $F(u) = g_2(u)$ p/ $u \in U_2$.

Para $u \in U_o = U_1 \; U_2$ temos $g_1(u) = g(u)$. Portanto F é únicamente determinada. Temos $U_1 = U - Y_2$, e $U_2 = U - Y_1$ de modo que U_1 e U_2 são fechados nesta união U. Então F é contínua e é uma extensão de f. Portanto só temos que provar que U é uma vizinança de B em Y.

De fato, U é aberto em Y porque $Y - U = \ldots$ $\left[(Y_o \cup Y_1) - U_1\right] \cup \left[(Y_o \cup Y_2) - U_2\right]$ é fechado por causa de (4) e (5).

b) A prova deste ítem é idêntica ao caso anterior.

c) Seja $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Da sequência X_n construiremos' algumas outras sequências de conjuntos abertos. Primeiro definamos U_n por $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, U_n é aberto em X, e por usar sucessivamente o ítem (a), vemos que U_n é uma ANR. Além disso $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \subset U_{n+1}$. Em segundo lugar, definamos $V_n \subset U_n$ como sendo o conjunto de todos os pontos de X tendo distância maior que $\frac{1}{n}$ para $X - U_n$ (em alguma métrica sobre X). V_n é aberto em X, $V_n \subset U_n$, e então V_n é uma ANR.

(6) Temos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$,

(7) $\overline{V}_n \subset V_{n+1}$.

Finalmente definamos W_n por $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$, e

(8) $W_n = V_n - \overline{V}_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. Cada W_n é aberto em X, e $W_n \subset V_n$ e então W_n é uma ANR. De (7) e (8) obtemos $W_n \supset V_n - \overline{V}_{n-1}$ de modo que (6) implica $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n-1} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n}$. Mas $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n-1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n}$ são uniões disjuntas de ANR's abertas, então também são ANR's pelo Lema 3.01 (c). X sendo agora a união de duas ANR's abertas é uma ANR.

3.03- Teorema

Se V é um EVTRLC, A é um subconjunto fechado de um espaço métrico X e $f:A \longrightarrow V$ é uma função contínua, então existe uma função contínua F, $F:X \longrightarrow V$ extendendo f tal que $F(X)$ está contida na casca convexa de $f(A)$.

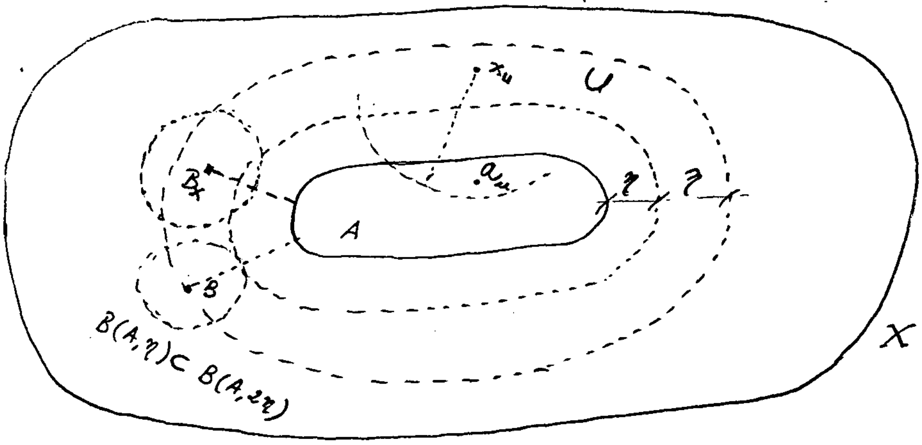
Demonstração

Seja $A \subset X$, X espaço métrico, A fechado. Para cada $x \in X - A$ seja B_x a bola aberta centrada em x, com raio $r < \frac{1}{2}\, d(x,A)$, d a métrica em X. A família $\{B_{x,r}\}$ é uma cobertura aberta do espaço paracompacto $X - A$. Existe um refinamento localmente finito $\{U_\alpha\}$ de $\{B_{x,r}\}$.

Tomemos $B(A,\eta) = \{y \mid d(y,A) < \eta\}$. As bolas $B_{x,r}$ centradas fora de $B(A,2\eta)$ não podem interceptar ... $B(A,\eta)$, consequentemente, qualquer $U \in \{\mathcal{U}\}$ que interceptar $B(A,\eta)$ está contida em algum B_x centrada dentro de $B(A,2\eta)$ e logo tem diâmetro $\delta(U) \leqq 2\eta$.

Com cada $\emptyset \neq U \in \{\mathcal{U}\}$ associemos um ponto $a_u \in A$ como segue: escolhamos $x_u \in U$ e ache $a_u \in A$ com a $d(x_u,a_u)$ "menor do que" $2d(x_u,A)$. A propriedade fundamental dos pontos $\{a_u\}$ e conjunto $\{\mathcal{U}\}$ é:

(*) "para cada $a \in A$ e vizinhança $W(a)$ em X, existe uma vizinhança $V(a) \subset W(a)$ com a propriedade: $U \cap V(a) \neq \emptyset \Rightarrow \left[U \subset W(a)\right] \wedge \left[a_u \in A \cap W(a)\right]$".



Na verdade podemos supor $W(a) = B(a,\varepsilon)$; tomando ... $V(a) = B(a,\frac{\varepsilon}{12})$, qualquer U interceptando $V(a)$ tem diâmetro menor que $\frac{\varepsilon}{6}$, de modo que está completamente dentro da bola $B(a,\frac{\varepsilon}{4})$. Para qualquer tal U, $d(x_u,a) < \frac{\varepsilon}{4}$ de modo que $d(x_u,A) < \frac{\varepsilon}{4}$ e também temos $d(a_u,a) \leqq d(a_u,x_u) + d(x_u,a) \leqq 2d(x_u,A_u) + d(x_u,A) \leqq \frac{3}{4}\varepsilon$ isto é $a_u \in W(a)$.

Agora seja $\{k_u\}$ uma partição da unidade sobre $X-A$ subordinada a $\{\mathcal{U}\}$ e definamos $F: X \longrightarrow V$ por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \sum_{\mathcal{U}} k_u(x) \cdot f(a_u) & \text{se } x \in X-A \end{cases}$$

Desde que F é localmente uma soma finita de funções contínuas em $X-A$ e $X-A$ é aberto, somente precisaremos mostrar a continuidade de F em A.

Seja $a \in A$ e W uma vizinhança de $F(a) = f(a)$. Desde que V é localmente convexo, existe uma vizinhança convexa C de $f(a)$ contida em W. Visto que f

é contínua em a, existe uma vizinhança $W(a)$ de a tal que $f(W(a) \cap A) \subseteq C \subseteq W$.

Devemos achar $V(a) \subset W(a)$ satisfazendo a condição $(*)$ e mostraremos que $F(V(a)) \subset W$.

Claramente, se $x \in A \cap V(a)$ então $F(x) \in C \subset W$. Se $x \in V(a)-A$, então x pertence no máximo a um número finito $U_1, \ldots, U_n$, de modo que em x somente $k_{u1}, \ldots, k_{u_n}$, não são zeros, visto que cada U_i intercepta $V(a)$, os correspondentes a_{u_i} todos ficam em $A \cap W(a)$, de modo que os $f(a_{u_i})$ são todos elementos de C; e visto que $F(x)$ está na casca convexa dos pontos $f(a_{u_1}), \ldots, f(a_{u_n})$, temos $F(x) \in C$ também.

Então $F(V(a)) \subset W$ e f é contínua em a. Visto que F é contínua em cada ponto de X, a função $F: X \longrightarrow V$ é contínua; a fórmula mostra que F é uma extensão de f e que $F(X) \subset \left[\text{casca convexa de } F(A)\right]$.

-IV-

TEOREMAS SOBRE VARIEDADES E ANR's

4.00- Teoremas sobre Variedades e ANR's

Desenvolveremos agora, alguns teoremas, os quais nos permitirão caracterizar uma Variedade Metrizável como ANR. Introduziremos a conceituação de Propriedade de Extensão Homotópica (HEP), determinaremos a existência desta propriedade em ANR's.

4.01- Teorema

Um subconjunto convexo metrizável de um espaço vetorial topológico real localmente convexo (EVTRLC) é uma AR (1.01),portanto cada variedade localmente metrizável' é localmente uma AR.

Demonstração

É uma consequência imediata de 3.03.

4.02- Teorema

Um espaço de Hausdorff paracompacto o qual é localmente uma ANR é uma ANR. Portanto uma variedade metrizável é uma ANR.

Mais geralmente: Um espaço métrico é uma ANR se cada ponto tem uma vizinhança homeomórfica a um conjunto convexo em um EVTRLC.

Demonstração

Seja X um espaço de Hausdorff paracompacto o qual é localmente uma ANR, logo X é localmente metrizável. Como X é localmente metrizável e paracompacto pelo Teorema 2.02, X é metrizável.

Tomemos uma cobertura aberta de X por ANR's, $\{U_\alpha\}$. O Lema 2.06 garante a existência de um refinamento aberto localmente finito $\{G_{i\beta}\}_{\beta \in B_i}$ $i = 0,1,2,\ldots$ tal que a interseção $G_{i\beta} \cap G_{i\beta'} = \emptyset$ se $\beta \neq \beta'$.

Como cada $G_{i\beta} \subset U_\alpha$ é um subconjunto aberto de uma ANR, pelo Lema 3.01 (b) é uma ANR também.

Então, $G_i = \bigcup_{\beta \in B_i} G_{i\beta}$ é uma união disjunta de ANR's logo uma soma topológica de ANR's, a qual é uma ANR. Témos então $X = \bigcup_{\lambda=0}^{\infty} G_i$ é uma reunião contável de ANR's abertas , logo, pelo Lema 3.02 (c) é uma ANR.

4.03- Corolário

Cada variedade paracompacta de Banach é uma ANR.

Demonstração

Como uma variedade de Banch é uma variedade modelada sobre espaços de Banach, e espaços de Banach são Local-' mente Convexos, pelo Teorema 4.02 está completa a demonstração.

4.04- Definição

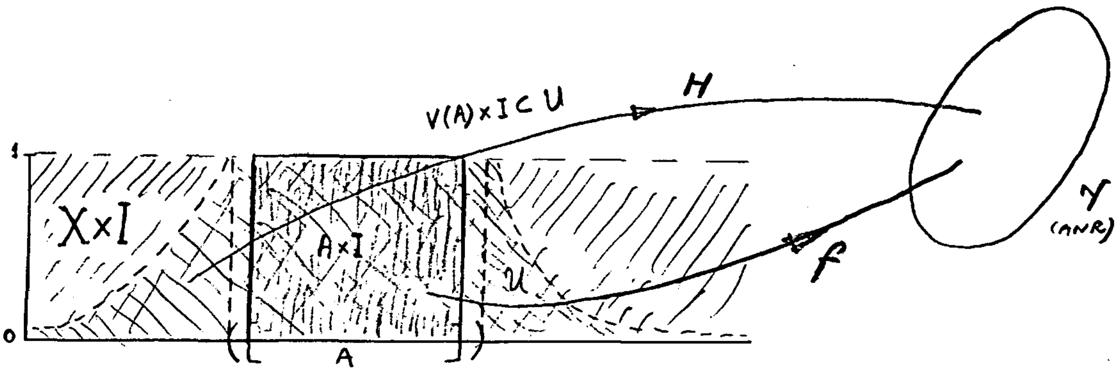
Seja A um subconjunto fechado de um espaço X. Dizemos que A tem uma Propriedade de Extensão Homotópica (HEP) em X com respeito a um espaço Y se cada função contínua de $X \times \{0\} \cup (A \times I)$ em Y pode ser extendida a uma função contínua de $X \times I$ em Y (i.é., dada uma função $f: X \longrightarrow Y$, cada homotopia de $f_{|A}: A \longrightarrow Y$ pode ser extendida a uma homotopia de $f: X \rightarrow Y$). Se A tem uma HEP em X com respeito à todos espaços Y então A é dito como tendo a AHEP, ou seja, a Propriedade Absoluta de Extensões de Homotopias' em X.

4.05- Teorema

Seja Y uma variedade metrizável. Se A é um subespaço fechado de um espaço metrizável X então A tem uma HEP em X com respeito a Y.
Mais geralmente o mesmo é verdade se Y é uma ANR.

Demonstração

Seja $T = (X \times 0\ )\ (A \times I)$. Dada $f: T \longrightarrow Y$ como Y é uma ANR, f é extendível a uma função contínua $H: U \longrightarrow Y$ onde U é uma vizinhança de T em $X \times I$.



Visto que I é compacto, existe uma vizinhança V de de A em X com $(V \times I) \subset U$. Desde que espaços ' métricos são normais, seja φ uma função de Urysohn em X com suporte $\varphi \subseteq V$ e $\varphi_{|A} = 1$. Logo temos $\varphi(V^c) = 0$. Definindo $F: X \times I \longrightarrow Y$ por ... $F(x,t) = H(x, \varphi(x)t)$, temos para $t = 0$ $F(x,0) = H(x,0)$ e para $t = 1$ $F(x,1) = H(x, \varphi(x))$, e para ... $(a,t) \in A \times I$, $F(a,t) = H(a, \varphi(a)t) = H(a,t)$. Portanto F é uma extensão de H.

4.06- Teorema

Seja X uma variedade metrizável e seja A um subespaço fechado de X o qual é também uma variedade. Então A tem uma AHEP em X.

Mais geralmente se X é uma ANR e A é um subespaço fechado de X o qual é também uma ANR então A tem a AHEP em X.

Demonstração

Seja $T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Será suficiente definir uma retração $\rho: X \times I \longrightarrow T$. Claramente $A \times I$ é uma ANR fechada (I é uma AR e o produto de ANR's é uma ANR), e $X \times \{0\}$ também o é. Como ... $[X \times \{0\}] \cap [A \times I] = A \times \{0\}$ é ANR pelo Lema 3.02 (b), T

também é uma ANR. Agora aplicamos o Teorema anterior fazendo $Y = T$ e $f = id$. A extensão ρ de f à $X \times I$ em T é a retração desejada.

4.07- Teorema

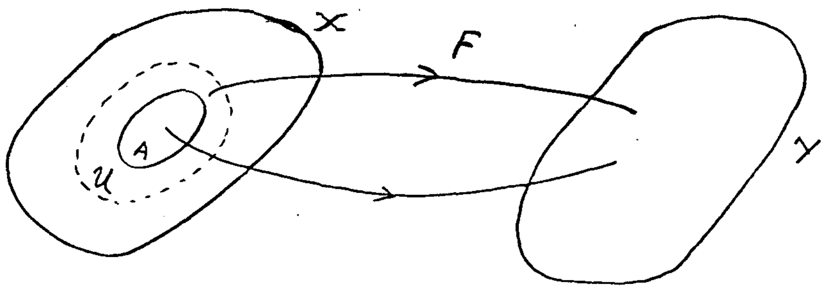
Uma variedade metrizável é uma AR se e somente se é contrátil.

Mais geralmente, uma ANR é uma AR se e somente se é contrátil.

Demonstração

Seja Y uma ANR;

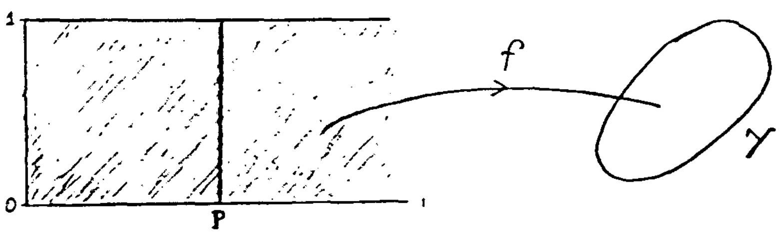
Dado um subconjunto fechado A de um espaço métrico X e uma função contínua $f_0 : A \longrightarrow Y$ segue do



Teorema 4.05 que se uma função $f_1 : A \longrightarrow Y$ homotópica a f_0 admite uma extensão contínua $F_1 : X \longrightarrow Y$ então f_0 admite uma extensão contínua $F_0 : X \longrightarrow Y$ (realmente com F_0 homotópica a F_1).

Se Y é contrátil e $p \in Y$ então f_0 é homotópica a f_1, $a \longmapsto p$, a qual tem uma extensão contínua F_1, $x \longmapsto p$. Portanto f_0 tem uma extensão contínua $F_0 : X \longrightarrow Y$ e Y é uma AR.

Reciprocamente se Y é uma AR então a função $f : (Y \times \{0\}) \cup (\{p\} \times I) \cup (Y \times \{1\}) \longrightarrow Y$, definida por



$$f(y,0) = y$$
$$f(p,t) = p$$
$$f(y,1) = p$$

pode ser extendida a função $F : Y \times I \longrightarrow Y$, isto é, e-

-V-

TIPO DE HOMOTOPIA FRACA

5.00- Tipo de Homotopia Fraca

Daremos agora algumas definições, lemas e teoremas os quais caracterizarão o tipo de homotopia de um espaço, bem como, condições para a existência de equivalências homotópicas fracas.

5.01- Limite Indutivo

Seja F uma família de espaços topológicos os quais estão ordenados direcionalmente sob a relação " é um subespaço de ", isto é, dados X e Y em F existe Z em F tal que X e Y são subespaços de Z.

Definimos o "Limite Indutivo L", $L = \varinjlim_{X \in F} X$, da família F como sendo $\bigcup_{X \in F} X$ com a mais fina topologia tal que para cada X em F a inclusão $X \hookrightarrow L$ é contínua.

Obs:

Se $F = \{X_\alpha\}$ devemos denotar o limite indutivo como $\varinjlim X_\alpha$.

Observemos que se $S \subseteq L$ é aberto (fechado) em L se e somente se $S \cap X$ é aberto (fechado) em X para cada $X \in F$ e que a função $f: L \longrightarrow Y$, Y um espaço topológico, é contínua se e somente se a função $f|_X: X \longrightarrow Y$ é contínua para cada X em F.

Nota:

Lembremos que um espaço vetorial real de dimensão finita tem topologia única (a topologia natural) a qual faz ele se tornar um espaço vetorial topológico; a saber a mais fina topologia fazendo cada funcional linear contínuo.

5.02- Topologia Finita

Se E é um espaço vetorial real qualquer e F é a família de subespaços de E de dimensão finita, cada um com a topologia natural, então F é ordenado direcionalmente sob a relação "é um subespaço de" e $\bigcup_{X \in F} X = E$.

Então E pode ser topologizado como o limite indutivo de seus subespaços de dimensão finita com suas topologias naturais, e a topologia resultante é chamada de topologia finita para E.

Obs:

Como veremos E é um espaço vetorial topológico em sua topologia finita se e somente se E tem dimensão contável, e neste caso E é de fato um EVTRLC na topologia finita, na qual cada conjunto aberto é paracompacto. Em um espaço vetorial real a topologia finita é a topologia fraca determinada pela topologia Euclidiana sobre cada subespaço linear de dimensão finita.

5.03- Notação

No que segue: V é um espaço vetorial topológico real localmente convexo, (EVTRLC).

E é um subespaço linear denso de V, tendo a topologia finita.

θ é um conjunto aberto em V.

$\tilde{\theta} = \theta \cap E$ considerado como um subespaço de E, i.é., com a topologia relativa de E.

5.04- Lema

Se K é um subconjunto compacto de θ. Se W é uma vizinhança de zero, suficientemente pequena, em V e se $K \cap \bigcap_{i=1}^{n}(k_i + W) \neq \emptyset$, $k_i \in K$, então a casca convexa de $\bigcup_{i=1}^{n}(k_i + W)$ está contida em θ.

Demonstração

Para cada $k \in K$ seja U_k uma vizinhança de zero em V com $k + U_k \subseteq \mathcal{O}$, e seja W_k uma vizinhança de zero com $W_k+W_k \subseteq U_k$. Como K é compacto $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(d_i+W_{d_i})$ e seja W_1 uma vizinhança convexa de zero, com $W_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} W_{d_i}$.

Então $K+W_1 \subseteq \mathcal{O}$. Pois se $v \in k+W_1$ então, visto que $k \in d_i+W_{d_i}$, $v= d_i+(v-k)+(k-d_i) \in d_i+W_1+W_{d_i} \subseteq \ldots$ $d_i+W_{d_i}+W_{d_i} \subseteq d_i+U_{d_i} \subseteq \mathcal{O}$.

Agora suponha W tão pequeno que $W+(-W) \subseteq W_1$ e suponha $k \in \bigcap_{i=1}^{n}(k_i+W)$, $k,k_i \in K$.

Se $v_i \in k_i+W$, $i= 1,\ldots,n$ nós devemos mostrar que $\sum_{i=1}^{n} t_i v_i \in \mathcal{O}$ se $t_i \geq 0$ e $\sum_1^n t_i=1$ o que determina a casca convexa da união de todos os k_i+W.

Visto que $k+W_1 \subseteq \mathcal{O}$ é suficiente mostrar que o $(\sum_1^n t_i v_i)-k = \sum_1^m t_i(v_i-k) \in W_1$, e desde que W_1 é convexa será suficiente mostrar que $v_i-k \in W_1$. Mas $k-k_i \in W$ e $v_i-k = (v_i-k_i) - (k-k_i) \in W+(-W) \subseteq W_1$.

5.05- Lema

Se S é um subconjunto linearmente independente de E, então S é fechado em E e, na topologia induzida de E, S é discreto.

Demonstração

Se X é um subespaço de dimensão finita de E então $S \cap X$ é finito, portanto fechado em E. Visto que cada subconjunto de S é linearmente independente, e portanto fechado em E, S é discreto.

5.06- Lema

Cada subconjunto compacto L de E está contido em subespaço de dimensão finita de E.

Demonstração

Seja S um subconjunto linearmente independente maximal de L (Lema de Zorn), e seja X o subespaço de E gerado por S, então temos $L \subseteq X$ e será suficiente provar que S é finito. Mas por 5.05 S é discreto, e por outro lado S é fechado em L e portanto compacto. Assim S é discreto e compacto e portanto finito.

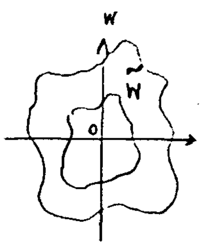
5.07- Lema

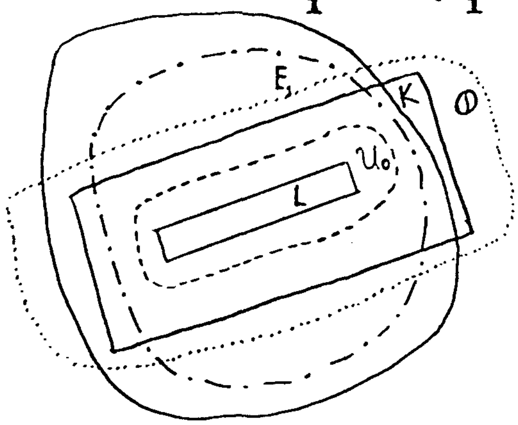
Seja K um subconjunto compacto de $\mathcal{O}$ e suponha $L \subseteq K \cap E$ um subconjunto compacto de E. Então existe uma deformação $h_t : K \longrightarrow \mathcal{O}$ de K em $\mathcal{O}$ tal que $h_t|_L$ é a identidade e tal que h_1 é uma função contínua de K em E.

Demonstração

Pelo Lema anterior, 5.06, seja E_1 um subespaço de dimensão finita de E que contém L, $L \subseteq E_1$. Usando o teorema da Extensão de Tietze, extendamos a função identidade de L a uma função contínua $g : K \longrightarrow E_1$ e seja $U_0 = \{ k \in K \mid g(k) - k \in W \}$, onde W é escolhido como no Lema 5.04, (vizinhança pequena de zero), de modo que U_0 é uma vizinhança de L em K.

Seja $U_1, \ldots, U_n$ uma cobertura aberta de $K - U_0$ com U_i disjunto de L e da forma $U_i = K \cap (k_i + \tilde{W})$





onde $\tilde{W}$ é uma vizinhança de zero, $\tilde{W} \subseteq W$. Seja uma

Partição da Unidade, $\varphi_o, \ldots, \varphi_n$, para K com suporte $\varphi_i \subseteq U_i$ e defina $h_t(k) = (1-t)k + t\left[\varphi_o(k)g(k) + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(k)e_i\right]$ onde $e_i \in (k_i+\widetilde{W}) \cap E \subseteq (k_i+W) \cap E$ (lembrando que E é denso em V).

Se $k \in L$ então $\varphi_i(k) = 0$ para $i \geq 1$, visto que $U_i \cap L = \emptyset$, e $\varphi_o(k) = 1$. Portanto $g(k) = k$, e $h_t(k) = k$. Seja E_2 o espaço de dimensão finita gerado por E_1 e $e_1, \ldots, e_n$. Então h_1 leva K contínuamente sobre E_2 e, desde que, E_2 é um subespaço topológico de E, h_1 leva K contínuamente em E.

Resta provar que $h_t(k) \in \mathcal{O}$. Para um dado k reordenemos os índices de modo que $\varphi_i(k) > 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $\varphi_i(k) = 0$ para $i > m$. Então:

$$k \in (k+W) \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i \subseteq (k+W) \cap \bigcap_{i=1}^{m} (k_i+W).$$

Agora $(1-t) + t\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(k) = 1$. Então por 5.04 será suficiente mostrar que k e os e_i pertencem a: $(k+W) \cup \bigcup_{i=1}^{m}(k_i+W)$, e que se $\varphi_o(k) > 0$ também o $g(k)$ pertence a esta união. Mas $k \in (k+W)$, $e_i \in (k_i+W)$ e se $\varphi_o(k) > 0$, temos $k \in U_o$ e então $g(k) \in k+W$.

5.08- Lema

Seja A um subespaço fechado de um espaço compacto X e seja $f_o : X \to \mathcal{O}$ uma função contínua tal que $f_o|_A$ é uma função contínua de A em $\mathcal{O}$. Então existe uma homotopia $f_t : X \to \mathcal{O}$ de f_o tal que f_1 é uma função contínua de X em $\mathcal{O}$ e tal que $f_t|_A = f_o|_A$ para $0 \leq t \leq 1$.

Demonstração

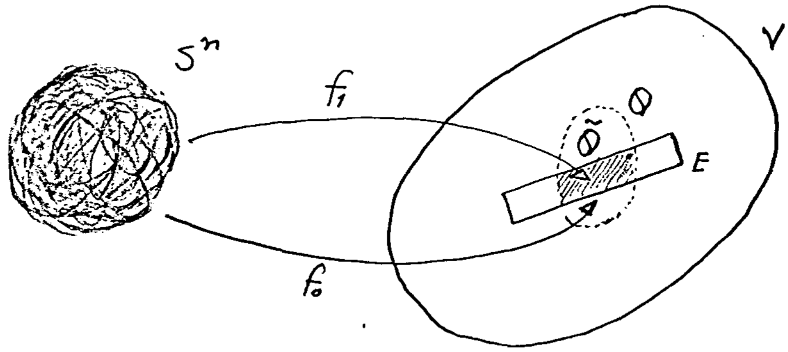
No lema anterior tomemos $K = f_o(X)$ e $L = f_o(A)$ e coloquemos $f_t = h_t o f_o$.

5.09- Teorema

Seja V um EVTRLC e seja E um subespaço linear denso em V com sua topologia finita. Dado $\mathcal{O}$ aberto em V seja $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cap E$ como um subespaço de E. Então a função de inclusão $i: \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}$ é uma equivalência homotópica fraca.

Demonstração

Seja $n \geqslant 0$ e seja $\alpha \in \pi_n(\mathcal{O})$, i.é., $\alpha = [f_o]$ onde $f_o: S^n \longrightarrow \mathcal{O}$. Seja $f_t: S^n \longrightarrow \mathcal{O}$ uma homotopia de f_o com $f_1: S^n \longrightarrow \mathcal{O}$ uma função contínua (Lema 5.08, $X = S^n$). Então podemos considerar a classe $[f_1] \in \pi_n(\tilde{\mathcal{O}})$ e $i_*[f_1] = \alpha$, portanto ... $i_*: \pi_n(\tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{O})$ é sobrejetiva.



Agora suponha $\alpha \in \pi_n(\tilde{\mathcal{O}})$ e $i_*\alpha = 0$. Então existe $f_o: D^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}$ tal que $f_o|_{S^n}: S^n \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ é contínua e de fato $\alpha = [f_o|_{S^n}]$. Aplicando novamente o Lema 5.08 existe uma homotopia $f_t: D^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}$ de f_o com uma função contínua $f_1: D^{n+1} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ tal que $f_t|_{S^n} = f_o|_{S^n}$. Então $\alpha = [f_1|_{S^n}]$ e, desde que ... $f_1: D^{n+1} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ é contínua, $\alpha = 0$ então temos que $i_*: \pi_n(\tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{O})$ é injetiva.

5.10- Corolário

Sejam V_1 e V_2 EVT RLC e sejam $f: V_1 \longrightarrow V_2$ uma função linear contínua de V_1 sobre um subespaço linear denso de V_2. Dado $\mathcal{O}$ um aberto em V_2 seja $\tilde{\mathcal{O}} = f^{-1}(\mathcal{O})$ de $\tilde{f} = f|_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Então $\tilde{f}:\tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}$ é uma equivalência homotópica fraca.

Demonstração

Como o núcleo de uma aplicação é um subgrupo normal, seja $K = \ker f$, $\pi : V_1 \longrightarrow V_1/K$ a projeção canônica, $f = g \circ \pi$ a composição canônica de f, e $\mathcal{O}^* = g^{-1}(\mathcal{O})$.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{O}) = \tilde{\mathcal{O}} \subset V_1 \arrow[r] \arrow[d] & V_2 \supset \mathcal{O} \\
\mathcal{O}^* = g^{-1}(\mathcal{O}) \subset V_1/K \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{O}} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi|_{\tilde{\mathcal{O}}}"'] & \mathcal{O} \\
\mathcal{O}^* \arrow[ur, "g|_{\mathcal{O}^*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Então é suficiente mostrar que $\pi|_{\tilde{\mathcal{O}}} : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}^*$ e $g|_{\mathcal{O}^*} : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{O}$ são equivalências homotópicas fracas. Em outras palavras, desde que π é sobrejetiva e g é injetiva será suficiente mostrar os dois casos.

Caso 1: f é injetiva.

Sem perda de generalidade podemos supor que V_1 é um subespaço linear denso de V_2 com uma topologia mais fina e que f é a função inclusão. Então $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cap V_1$ é um subespaço de V_1.

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{\mathcal{O}} \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{O}^* \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j"'] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

Seja $E = V_1$ com a topologia finita e $\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \cap E$ como um subespaço de E. Seja $i : \mathcal{O}^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ e ... $j : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{O}$ as funções inclusões as quais pelo Teorema anterior são equivalências homotópicas fracas. Visto que o diagrama acima é comutativo, f é também uma equivalência homotópica fraca.

Caso 2: f é sobrejetiva

Seja $E_i = V_i$ com a topologia finita, $G = \mathcal{O}$ como um subespaço de V_2, $\tilde{G} = \tilde{\mathcal{O}}$ como um subespaço de V_1 e defina $g:\tilde{G} \longrightarrow G$ por $g = g_{|\tilde{G}}$.

Visto que uma função linear entre espaços vetoriais, cada um com a topologia finita, é claramente contínua, g é contínua e temos um diagrama comutativo, abaixo,

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & \tilde{\mathcal{O}} \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[r, "j"'] & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

onde as funções identidade i, j são equivalências homotópicas fracas. Então é suficiente provar que g é uma equivalência homotópica fraca.

Seja $[h] = \alpha \in \pi_n(G)$, $h:S^n \longrightarrow G$ é contínua e portanto $h(S^n)$ está incluída em um subespaço de dimensão finita X de E_2, pelo Lema 5.06.

Seja $e_1,\dots,e_n$ uma base de X. Visto que f é sobre, podemos achar $\bar{e}_i \in E_1$ tal que $f(\bar{e}_i)=e_i$.

Seja $h(q) = \sum_{i=1}^{n} h_i(q)e_i$ e definamos $\bar{h}:S^n \longrightarrow E_1$ por $\bar{h}(q) = \sum_{i=1}^{n} h_i(q)\bar{e}_i$. Claramente $f\circ\bar{h} = h$, portanto $\bar{h}:S^n \longrightarrow \tilde{G}$ e $g_*[\bar{h}] = \alpha$, e então a função $g_*: \pi_n(\tilde{G}) \longrightarrow \pi_n(G)$ é sobrejetiva.

Agora seja $\beta \in \pi_n(\tilde{G})$ com $g_*(\beta) = 0$, onde $\beta = [k]$ com $k:S^n \longrightarrow \tilde{G}$. Pelo Lema 5.06, $k(S^n)$ está incluída em um subespaço de dimensão finita Y de E_1. Seja $v_1,\dots,v_n$ uma base para Y com $v_{m+1},\dots,v_n$ uma base para $Y \cap \ker(f)$, de modo que $\bar{v}_1=f(v_1),\dots,\bar{v}_m= f(v_m)$ é uma base para $f(Y)$.

Ponha $k(q) = \sum_{i=1}^{n} k_i(q)v_i$. Visto que, ...

$f(\sum_{i=1}^{m} k_i(q)v_i + t\sum_{i=1}^{n} k_i(q)v_i) = f(k(q))$ para qualquer $t \in R$

segue que k é homotópica em $\widetilde{G} = f^{-1}(f(g))$ à função $q \longmapsto \sum_{i=1}^{n} k_i(q)v_i$, isto é, podemos supor que $m=n$. Desde que $g_*(\beta) = 0$ podemos achar $K: D^{n+1} \longrightarrow G$ onde $K(q) = \sum_{i=1}^{n} K_i(q)\overline{v}_i$, tal que $K_{|S^n} = g \circ k$ e então temos $K_{i|S^n} = k_i$. Assim $q \longmapsto \sum_{i=1}^{n} K_i(q)v_i$ é uma extensão contínua de k à uma função de D^{n+1} em $\widetilde{G}$. Então $\beta = 0$ e g_* é injetiva, $g_*: \pi_n(G) \longrightarrow \pi_n(G)$.

-VI-

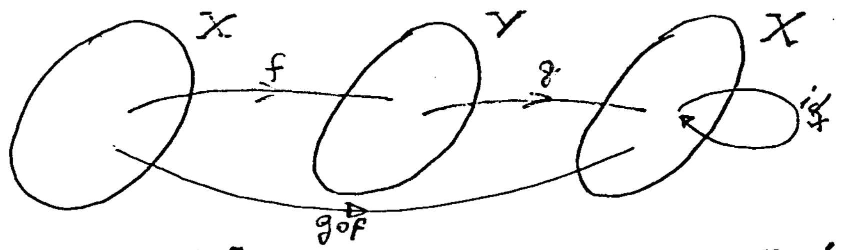
DOMINAÇÃO POR COMPLEXOS SIMPLICIAIS

6.00- Dominação por Complexos Simpliciais

De acordo com a definição de Complexo Simplicial de 1.06, conceituaremos Espaços Dominados, em particular p/ Complexos Simpliciais, caracterizando assim, através dos Teoremas e Lemas aquí desenvolvidos, as condições para ' que uma ANR o seja. Com isto chegaremos finalmente à condição para que uma equivalência homotópica fraca seja uma Equivalência Homotópica.

6.01- Espaço Dominado

Sejam X e Y espaços, e as funções $f:X \longrightarrow Y$ e $g:Y \longrightarrow X$ tal que $g\circ f:X \longrightarrow X$ seja homotépica à função identidade de X.



$gof \cong id_X$

Nestas condições diremos que o espaço Y é dominado pelo espaço X, ou que X domina Y.

6.02- Subconjunto Semi-Localmente Convexo

Diremos que um subconjunto X de um espaço vetorial topológico V é "semi-localmente convexo" se para cada $x \in X$ temos uma vizinhança U_x relativa a X a qual é um subconjunto convexo de V.

6.03- Lema

Seja V um espaço vetorial topológico e E um espaço vetorial real com sua topologia finita. Então cada função linear $T: E \longrightarrow V$ é contínua.

Demonstração

Seja X E um subespaço de dimensão finita. Então ' $T(X)$ é um subespaço de Dimensão Finita de V e é um subespaço topológico de V na sua topologia natural.

Visto que cada função linear entre espaços vetoriais reais de dimensão finita é contínua em suas topologias naturais, temos:

$T_{|X}: X \longrightarrow T(X)$ é contínua e,

portanto, $T_{|X}: X \longrightarrow V$ é contínua e,

então, $T : E \longrightarrow V$ é contínua.

6.04- Lema

Se $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de um espaço paracompacto X, então existe uma cobertura aberta localmente finita $\{\mathcal{O}_\beta\}_{\beta \in B}$, de X, tal que, se $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i} \neq \emptyset$ então $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i} \subseteq W_\alpha$ para algum $\alpha \in A$.

Demonstração

Para começar podemos supor que $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de X com $\bar{U}_\alpha \subseteq W_\alpha$.

Visto que $\bar{U}_\alpha$ são fechados e localmente finitos, para cada $x \in X$, $\bigcup \{\bar{U}_\alpha \mid x \notin \bar{U}_\alpha\}$ é um subconjunto fechado de X o qual não contém x. Portanto ... $V_x = \bigcap \{W_\alpha \mid x \in \bar{U}_\alpha\} - \bigcup \{\bar{U}_\alpha \mid x \notin \bar{U}_\alpha\}$ é uma vizinhança de x.

Observe que para cada $x \in X$ e todo $\alpha \in A$ se $V_x \cap \bar{U}_\alpha \neq \emptyset$, então $x \in \bar{U}_\alpha$ logo $V_x \subseteq W_\alpha$.

Suponha que $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \neq \emptyset$, e que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

Escolhamos α de modo que $x \in \bar{U}_\alpha$. Então temos $x \in V_{x_i} \cap \bar{U}_\alpha \neq \emptyset$ portanto $V_{x_i} \subseteq W_\alpha$, portanto $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subseteq W_\alpha$. Agora é claro que para qualquer cobertura aberta localmente finita $\{\mathcal{O}_\beta\}_{\beta \in B}$ a qual refina $\{V_x\}_{x \in X}$ satisfaz a conclusão do Lema.

6.05- Teorema

Um subconjunto semi-localmente convexo, paracompacto de um espaço vetorial é dominado por um complexo simplicial.

Demonstração

Seja X um espaço paracompacto o qual é um subconjunto semi-localmente convexo de um espaço vetorial topológico V e seja $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção de subconjuntos de X cujos interiores cobrem X e tais que cada W_α é um subconjunto convexo de V.

Pelo Lema 6.04, podemos achar uma cobertura aberta localmente finita de X, $\{\mathcal{O}_\beta\}_{\beta \in B}$, tal que se ... $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i} \neq \emptyset$ então a casca convexa de $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i}$ está contida em X.

Seja $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in B}$ uma partição da unidade para X com suporte $\varphi_\beta \subseteq \mathcal{O}_\beta$ e seja $f: X \longrightarrow |N|$ a correspondente função baricêntrica, onde N é o "Nervo" de $\{\mathcal{O}_\beta\}_{\beta \in B}$ (def. 1.05 a 1.08). Para cada $\beta \in B$, seja ... $\chi(\beta) \in \mathcal{O}_\beta$. Visto que B é uma base para $R^{(B)}$ existe uma única função linear $T: R^{(B)} \longrightarrow V$ tal que ... $T(\beta) = \chi(\beta)$, e pelo Lema 6.03, T é contínua. Portanto $g = T|_{|N|}$ é uma função contínua de $|N|$ em V.

Observe que se $y \in |N|$, então $y = \sum_{i=0}^{n} t_i \beta_i$ com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$, onde $\{\beta_0, \ldots, \beta_n\}$ é um n-simplexo de N. Assim $g(y) = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi(\beta_i)$. Agora se $\bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i} \neq \emptyset$ de modo que a casca convexa de $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i}$ está contida em X, e desde que $\chi(\beta_i) \in \mathcal{O}_{\beta_i}$, segue que $g(y) \in X$ e temos uma função contínua $g: |N| \longrightarrow X$. Resta agora mostrar que gf é homotópica à função identidade de X. Seja $x \in X$ e seja $\beta_0, \ldots, \beta_n$ os vértices distintos com $\varphi_{\beta_i}(x) > 0$. Então $x \in \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i}$ e portanto $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i}$ tem sua casca convexa em X. Desde que x e $\chi(\beta_i)$ estão todos em $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\beta_i}$ segue que para cada $0 \leq t \leq 1$

$h_t(x) = (1-t)x + t\sum_{i=0}^{m} \varphi_{\beta_i}(x)\,\mathcal{X}(\beta_i)$ está em X, então claramente $h_t : X \longrightarrow X$ é uma deformação de X. Mas $g(f(x)) = g(\sum_{i=0}^{m} \varphi_{\beta_i}(x)\beta_i) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_{\beta_i}(x)\,\mathcal{X}(\beta_i) = h_1(x)$.

6.06- Lema

Cada espaço metrizável pode ser mergulhado em um sub eespaço fechado de um subconjunto convexo de um espaço de Banach.

Demonstração

Antes de qualquer coisa, definamos o mergulho de Kuratowski: Seja X um espaço metrizável e escolhamos uma métrica limitada para X.

Seja B(X) o espaço de Banach das funções contínuas limitadas com valores reais sobre X com ... $\|f\| = \mathrm{Sup}\left\{ f(x) \mid x \in X \right\}$. Seja $K : X \longrightarrow B(X)$, denotando o mergulho de Kuratowski de X, definido por: $K(x)(y) = \rho(x,y)$.

Por uma aplicação trivial da desigualdade triangular segue que K é um mergulho isométrico de X em B(X), e por um argumento simples de Wojdyslawski o qual o atribuiu a S. Eilenberg, K(X) é fechado em sua casca convexa. Logo segue o Lema.

6.07- Teorema

Uma variedade paracompacta é dominada por um complexo simplicial. Mais geralmente, uma ANR é dominada por um complexo simplicial.

Demonstração

Seja X uma ANR. Pelo Lema anterior podemos supor que X é um subconjunto fechado de um conjunto convexo S em um espaço de Banach V.

Desde que X é uma ANR a função identidade de X extende-se a uma função contínua $\rho : \mathcal{O} \longrightarrow X$, onde $\mathcal{O}$ é uma vizinhança aberta de X em S, i.é, X é u- retração de $\mathcal{O}$ e "a fortiori" X é dominado por $\mathcal{O}$.

Desde que "A é dominado por B" é claramente uma relação transitiva, será suficiente mostrar que $\mathcal{O}$ é dominado por um complexo simplicial.

Desde que $\mathcal{O}$ é aberto em S, dado $v \in \mathcal{O}$ podemos achar uma vizinhança U de v em V tal que $U \cap S \subseteq \mathcal{O}$, e desde que V é localmente convexo podemos supor que U é convexo. Desde que S é também convexo, $U \cap S$ é convexo. Portanto $\mathcal{O}$ é semi localmente convexo. Como $\mathcal{O}$ é um subespaço de um espaço metrizável V, $\mathcal{O}$ é metrizável portanto paracompacto e o Teorema 6.05 completa a prova.

6.08- Lema

Se X e Y são espaços dominados por complexos simpliciais (ou mais geralmente por CW complexos) então qualquer equivalência homotópica fraca $f : X \longrightarrow Y$, é de fato uma equivalência homotópica.

"A prova deste Lema será omitida, encontra-se em [4 - Teor. 6.3]".

6.09-Teorema

Sejam X e Y variedades metrizáveis. Então qualquer equivalência homotópica fraca $f : X \longrightarrow Y$ é realmente uma equivalência homotópica. Mais geralmente o mesmo é verdade se X e Y são ANR's.

Demonstração

É consequência imediata do Teor. 6.07 e Lema 6.08.

6.10- Corolário

Se X é uma variedade metrizável então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\pi_n(X) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$

(2) X é contrátil

(3) X é uma ANR

Mais geralmente o mesmo é verdade se X é uma ANR.

Demonstração

A equivalência de (2) e (3) é o Teorema 4.07.

A implicação de (2) em (1) é trivial.

Resta mostrar que (1) implica (2): Seja $p \in X$ e $i: p \longrightarrow X$ a função inclusão. Então por (1) "i" é uma equivalência homotópica fraca, e portanto, pelo Teorema 6.09 uma equivalência homotópica, e X é contrátil.

6.11- Teorema

Sejam V_1 e V_2 EVTRLC e seja $f: V_1 \longrightarrow V_2$ uma função linear contínua de V_1 sobre um subespaço linear denso de V_2. Dado $\mathcal{O}$ aberto em V_2 seja $\tilde{\mathcal{O}} = f^{-1}(\mathcal{O})$ e $\tilde{f} = f|_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Suponhamos que V_1 e V_2 sejam metrizáveis, ou mais geralmente, que $\tilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}$ são paracompactos. Então $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}$ é uma equivalência homotópica.

Demonstração

É uma consequência imediata do Corolário 5.10, do Teorema 5.09, do Teorema 6.05 e do Lema 6.06. (Observe que desde que $\tilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}$ são abertos em EVTRLC, são semi-localmente convexos).

6.12- Lema

Seja E um espaço vetorial de dimensão contável munido com sua topologia finita. Então E é um ... EVTRLC e cada conjunto aberto de E é paracompacto.

Demonstração

Escolhendo uma base contável para E podemos identificar E com o espaço R^{∞} de todas as sequências finitas não nulas de números reais. Seja $R^n = \ldots$ $\left\{ x \in R^{\infty} \mid x_i = 0 \text{ se } i > n \right\}$. Visto que cada subespaço de dimensão finita de R^{∞} está incluído ou melhor, contido em algum R^n, $R^{\infty} = \lim R^n$. Dada uma sequência de números reais positivos $\{\varepsilon_i\}$ e $x^o \in R^{\infty}$ seja ... $N(x^o, \{\varepsilon_i\}) = \left\{ x \in V \mid |x_i - x^o| < \varepsilon_i \text{ para todo } i \right\}$.

Claramente $N(x^o, \{\varepsilon_i\})$ é uma vizinhança convexa de x^o. Se U é uma vizinhança de x^o então ... $U \cap R^n$ é uma vizinhança de x^o em R^n (para n grande) então existe um $\delta_n > 0$ tal que se $|t_i| < \delta_n$, $i = 1, \ldots, n$ então $(t_1 - x_1^o, \ldots, t_n - x_n^o, 0, \ldots) \in U$, portanto se $\varepsilon_i = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_i\}$ então $N(x^o, \{\varepsilon_i\}) \subseteq U$. Assim $N(x^o, \{\varepsilon_i\})$ é uma base das vizinhanças convexas de R^{∞}, e segue fácilmente que R^{∞} é um EVTRLC, portanto regular. Se $\mathcal{O}$ é aberto em R^{∞} então $\mathcal{O}$ é regular e σ-compacto (visto que cada R^n é σ-compacto), então cada cobertura de $\mathcal{O}$ tem uma subcobertura contável. Visto que uma cobertura contável é "a fortiori" σ-discreta, segue que $\mathcal{O}$ é paracompacto.

6.13- Teorema

Seja V um EVTRLC e seja E um subespaço vetorial de V tendo dimensão contável e denso em V. Daremos a E a sua topologia finita, e para $\mathcal{O}$ aberto em V seja $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cap E$ considerado um subespaço topológico de E. Então se V é metrizável (ou, mais geralmente, se $\mathcal{O}$ é paracompacto) então a função in clusão de $\tilde{\mathcal{O}}$ em $\mathcal{O}$ é uma equivalência homotópica.

Demonstração

Imediata do Teorema 6.11 e do Lema 6.12.

6.14- Corolário

Seja V em EVTRLC e seja $\{E_n\}$ uma sequência crescente de subespaços de dimensão finita de V tal que $\bigcup E_n$ é densa em V. Dado $\mathcal{O}$ aberto em V seja $\mathcal{O}_n = \mathcal{O} \cap E_n$ e seja $\mathcal{O}_\infty = \varinjlim \mathcal{O}_n$. Então ' se V é metrizável (ou, mais geralmente, se $\mathcal{O}$ é paracompacto), a função inclusão $\mathcal{O}_\infty \longrightarrow \mathcal{O}$ é uma equivalência homotópica.

Demosntração

Seja $E = \bigcup E_n$ com a topologia finita. Então E tem dimensão contável e $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O} \cap E$ como um subespaço de E, e o Corolário segue.

-VII-

SOBRE O TIPO DE HOMOTOPIA DE CERTOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

7.00- Sobre o Tipo de Homotopia de Certos Espaços de Funções Diferenciáveis.

Daqui por diante, M denotará uma variedade diferenciável, paracompacta (usualmente compacta), de dimensão finita com ou sem fronteira e X denotará uma variedade direrenciável, paracompacta modelada sobre um espaço de Banach de dimensão finita ou infinita, (equivalente a metrizável, Corolário 2.05), sempre sem fronteira.

Os espaços de Banach de dimensão infinita são algumas vezes supostos como sendo C^{∞}-diferenciáveis, isto é, admitem partições da unidade de classe C^{∞} subordinadas a qualquer cobertura aberta, temos como exemplo os espaços de Hilbert separáveis.

Veremos à seguir um teorema e um corolário que nos permitem afirmar que X admite partições da unidade de classe C^{∞}. Em seguida, definiremos os espaços em questão e desenvolveremos os Teoremas que nos permitem' determinar o tipo de homotopia entre eles.

7.01- Teorema

Sejam subconjuntos A_1 e A_2 não-vazios, disjuntos e fechados de um espaço de B anach C^{∞} diferenciável E. Então existe uma C^{∞}-função $\psi: E \longrightarrow R$ tal que $\psi(x) = 0$ se $x \in A_1$ e $\psi(x) = 1$ se $x \in A_2$, e $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo x.

Demonstração

Tomemos $B_1 = E - A_1$ e $B_2 = E - A_2$ uma cobertura aberta de E. Seja φ_1 e φ_2 uma partição da unidade subordinada à cobertura. Sejam, $\sup \varphi_1 \subseteq B_1$ e $\sup \varphi_2 \subseteq B_2$, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$.

Tomemos $\psi = \varphi$ e $a_1 \in A_1$, então $\psi(a_1) > 0$ $\Longleftrightarrow \varphi(a_1) > 0 \Longleftrightarrow a_1 \in \sup \varphi_1 \subseteq B_1 \Longrightarrow a_1 \in E - A_1$ o que é uma contradição. Fazendo o mesmo para $a_2 \in A_2$, então $\psi(a_2) < 1 \Longleftrightarrow \varphi_1(a_2) < 1 \Longleftrightarrow \varphi_2(a_2) > 0 \Longrightarrow a_2 \in E - A_2$ o que também é uma contradição.

Deste modo ψ é a função requerida.

7.02- Corolário

Seja X uma variedade paracompacta de classe C^p modelada sobre um espaço de Banach C^∞ diferenciável E. Então X admite partições da unidade de classe C^p.

Demonstração

Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de X. Sendo X paracompacto existe um refinamento $\{V_\beta\}$ localmente finito por meio de vizinhanças coordenadas. Tomemos uma Carta $\varphi_\beta : V \longrightarrow E$. Como X é normal, escolhamos abertos W_β e Y_β tal que $W_\beta \subseteq \overline{W}_\beta \subseteq Y_\beta \subseteq \overline{Y}_\beta \subseteq V_\beta$. Os conjuntos $\overline{W}_\beta$, Y_β e V_β são levados homeomorficamente em abertos de E, e $\varphi_\beta(\overline{W}_\beta)$ é fechado em E, seja $\overline{\psi}_\beta : E \longrightarrow R$ uma função C^∞ de Urysohn em E tal que $\overline{\psi}_\beta(\varphi_\beta(\overline{W}_\beta)) = 1$ e $\overline{\psi}_\beta(E - \varphi_\beta(Y_\beta)) = 0$ e definamos $\psi_\beta : X \longrightarrow R$ por:

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \overline{\psi}_\beta(\varphi_\beta(x)) & \text{se} \quad x \in Y \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \in Y^c \end{cases}$$

Agora seja $\psi = \sum \psi_\beta$. Definamos $\theta_\beta = \dfrac{\psi_\beta}{\psi}$ a partição da unidade desejada é a coleção $\{\theta_\beta\}$.

7.03- Definição

$C^r(M,X)$: para $0 \leq r \leq \infty$, denotaremos desta forma o espaço das funções diferenciáveis de classe C^r de M em X. Equiparemos este espaço com a C^r-topologia a qual é uma topologia metrizável. Suponhamos agora que M seja compacto. Então é sabido que $C^r(M,X)$ para $0 \leqq r < \infty$ é uma variedade metrizável modelada sobre espaços de Banach.(*) Se X é de dimensão finita ou modelada sobre um espaço de Banach de dimensão infinita C^∞-diferenciável, então é também sabido que $C^\infty(M,X)$ é uma variedade metrizável modelada sobre Espaços de Fréchet (EVT completamente metrizáveis). Então $C^r(M,X)$ é uma ANR para a classe de espaços metrizáveis para todo $0 \leqq r < \infty$ e para $r = \infty$ se o modêlo para X é C^∞-diferenciável.(Teor. 4.02). Para a demonstração destas assertivas consultar [6].

Obs:. É desconhecido se $C^\infty(M,X)$ é uma variedade sem qualquer hipóteses sobre X ou como aquí, sobre o modelo para X.

(* Ver Apêndice I.)

7.04- Definição

Uma k-mersão é uma função $f \in C^r(M,X)$ tal que sua derivada tem posto maior ou igual a k em todo ponto

7.05- $C^r(M,X;k)$

Denotaremos desta forma o subespaço aberto das k-mersões em $C^r(M,X)$, $0 \leqslant k \leqslant \min\{\dim M, \dim X\}$.

$C^r(M,X;0)$ é justamente o próprio espaço $C^r(M,X)$, e se $\dim M \lneqq \dim X$ então $C^r(M,X;\dim M) = \ldots$ $Imm^r(M,X)$ ou seja, o subespaço das imersões.

7.06- $Emb^r(M,X)$

Denotaremos desta forma, para $1 \leqslant r \leqslant \infty$, o subespaço dos mergulhos em $C^r(M,X)$:

Obs:. Se $C^r(M,X)$ é uma ANR, então os seus subespaços abertos dos mergulhos e k-mersões também ' são ANR's, (Lema 3.01-b).

7.07- q-equivalência

Sejam X e Y espaços topológicos não-vazios, e seja $f:X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Seja q um ' inteiro não-negativo. Diremos que $f:X \longrightarrow Y$ é uma 0-equivalência se a função induzida entre componentes por caminhos, $f_*: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$, é sobrejetiva.

Para $q \geqslant 1$ chamaremos f uma q-equivalência, se a função induzida $f_*: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ é uma bijeção, e se para qualquer ponto base base $x \in X$ a função induzida $f_*: \pi_i(X,x) \longrightarrow \pi_i(Y,y)$ onde $y=f(x)$ é um epimorfismo para $0 \leqq i \leqq q$, e um monomorfismo ' para $0 \leqq i \leqq q-1$.

Obs:. Óbviamente f é uma equivalência homotópica fraca se é uma q-equivalência para todo $q \geqslant 0$.

Usaremos o fato de que se $f:X \longrightarrow Y$ é uma equivalência homotópica fraca, e X e Y são ANR's, então f é uma equivalência homotópica (Teorema 6.09).

"Nos Teoremas a seguir, sobre a equivalência homotópica de espaços de funções entre variedades, cujas demonstrações usam, fundamentalmente as propriedades de equivalências homotópicas demonstradas nos capítulos ' anteriores, estudaremos as Propriedades Homotópicas ' das Funções Inclusão de $C^r(M,X;k)$ e $Emb^r(M,X)$ em $C^r(M,X)$".

Obs:. No que segue, para n, m, k inteiros, seja $q(n,m,k) = m-2k+(n-k)(m-k)$.

7.08- Teorema

Sejam M^n e X^m variedades diferenciáveis de dimensão finita com M compacto, e sejam k e r inteiros satisfazendo $0 \leqslant k \leqslant \min\{n, m\}$ e $2 \leqq r \leqq \infty$.

i) Se $0 \leqslant q(n,m,k)$, então $C^r(M,X;k) \neq \emptyset$ e a função inclusão de $C^r(M,X;k) \longrightarrow C^r(M,X)$ é uma $q(n,m,k)$-equivalência

ii) Se $0 \leqslant m-2n-1$, então $\mathrm{Emb}^r(M,X) \neq \emptyset$ e a função inclusão de $\mathrm{Emb}^r(M,X) \longrightarrow C^r(M,X)$ é uma $(m-2n-1)$-equivalância.

Demonstração

Seja Q^i uma variedade diferenciável compacta com subvariedade compacta $A \subset Q^i$ e o ponto base $q_0 \in A \subset Q^i$.

i) É bem conhecido e segue imediatamente de A2.13 (Apêncice 2) que $C^r(M,X;k) \neq \emptyset$ quando temos $q(n,m,k) \geqslant 0$. Suponha agora que $0 \leqslant i \leqslant q(n,m,k)$ e seja $f_0 \in C^r(M,X;k)$ uma k-mersão arbitrária. Estudaremos então a classe de homotopia da função ... $f:(Q^i,A,q_0) \longrightarrow (C^r(M,X), C^r(M,X;k), f_0)$ através da função associada $\hat{f}:(Q^i x M^n) \longrightarrow X^m$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\hat{f}$ é de classe C^r. Visto que $f(A) \subset C^r(M,X;k)$, a função $\hat{f}_q = f(q)$ tem sem dúvida posto $\geqslant k$ sobre M para todo $q \in A$.

De acordo com A2.13 (Apêndice 2), f pode ser arbitráriamente aproximada na C^r-topologia por uma função $\hat{g}: Q^i \times M^n \longrightarrow X^m$ tal que as restrições $\hat{g}|_{AxM} = \hat{f}|_{AxM}$ e tal que $\hat{g}_q$ tem posto $\geqslant k$ sobre M para todo $q \in Q^i$.

Usando uma vizinhança tubular para X em um espaço de Banach E podemos portanto também homotopizar $\hat{f}$ em uma função $\hat{g}$ como acima por conectar-las linearmente na vizinhança tubular e então projetando sobre X. Esta homotopia agora induzirá uma homotopia de f em uma função $g: Q^i \longrightarrow C^r(M,X;k)$ a qual é constantemente igual a $f_{|A}$ sobre A. Então f representa relativamente a classe zero.

Consideremos agora a função induzida

$$\pi_i(C^r(M,X;k),\ f_o) \longrightarrow \pi_i(C^r(M,X),\ f_o).$$

Se colocarmos $Q^i = S^i$ e $A = q_o$ na análise acima, concluiremos que esta função é sobre para ... $0 \leqq i \leqq q(n,m,k)$. Se colocarmos $Q^{i+1} = D^{i+1}$ e $A = S^i$ segue de análise análoga com $\dim Q = i+1$ que esta função é injetiva para $i+1 \leqq q(n,m,k)$. Isto é, porém, exatamente o que queríamos provar.

ii) Novamente pelo Teorema de Mergulhos de Whitney (Apêndice 2, A2.10), é conhecido que $\mathrm{Emb}^r(M,X) \neq \emptyset$ quando $m-2n-1 \geqq 0$. Suponhamos agora que $0 \leqq i \leqq m-2n-1$ e seja $f_o \in \mathrm{Emb}^r(M,X)$ um mergulho arbitrário. Consideremos então a classe de homotopia da função

$$f:(Q^i,\ A,\ q_o) \longrightarrow (C^r(M,X),\ \mathrm{Emb}^r(M,X),\ f_o)$$

com a função associada $\hat{f}: Q^i \times M^n \longrightarrow X^m$, a qual novamente sem perda de generalidade podemos supor como sendo de classe C^r.

Visto que $0 \leqq i \leqq m-2n-1 \leqq m-2n$ podemos como na prova do ítem i) homotopizar f em uma função $g: Q^i \longrightarrow \mathrm{Imm}^r(M,X)$ fixando tudo sobre A. Observemos agora que $\mathrm{Emb}^r(M,X)$ neste caso é igual ao espaço das 1-1 imersões, desde que M é compacto. É fácil de ver que $g(q) = \hat{g}_q$ é 1-1 para todo

$q \in Q^i$ se e somente se a função definida pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q^i \times M^n \times M^n & \xrightarrow{\Delta Q \times 1_M \times 1_M} & Q^i \times Q^i \times M^n \times M^n \\ & & \downarrow 1_Q \times \text{Twist} \times 1_M \\ & & Q^i \times M^n \times Q^i \times M^n \xrightarrow[\hat{g} \times \hat{g}]{} X^m \times X^m \end{array}$$

leva $Q^i \times (M^n \times M^n \setminus \Delta_M)$ em $X^m \times X^m \setminus \Delta X$. Esta última condição é uma condição de transversalidade quando temos $i+2n \leq m-1$ ou equivalentemente ... $i \leq m-2n-1$, uma aplicação do teorema da densidade de transversalidade (Apêndice), permitirá então uma aproximação de $\hat{g}$ com uma função $\hat{h}$ tal que $\hat{h}_{|A \times M} = \hat{g}_{|A \times M}$ e tal que $\hat{h}_q$ é 1-1 para todo $q \in Q^i$ no caso de $0 \leq i \leq m-2n-1$. Procedendo como na prova de i), podemos então homotopizar g em uma função .... $h: Q^i \longrightarrow \text{Emb}^r(M,X)$ tal que a homotopia é constantemente igual a $g_{|A} = f_{|A}$ sobre A. f representa então, relativamente, a classe 0. A prova de ii) é completada de modo análogo a do ítem i), com a escolha adequada de Q e A.

7.09- Teorema

Seja M^n uma variedade diferenciável compacta e seja X uma variedade diferenciável modelada sobre um espaço de Banach E de dimensão infinita que admite partições da unidade de classe C^∞.

Sejam também k e r inteiros satisfazendo as condições $0 \leq k \leq n$ e $2 \leq r \leq \infty$.

Então $C^r(M,X;k)$ e $\text{Emb}^r(M,X)$ são ambos não-vazios. Além disso se para $r = \infty$ supomos que $C^\infty(M,X)$

é uma ANR então as seguintes funções inclusão são equivalências homotópicas.

i) $C^r(M,X;k) \longrightarrow C^r(M,X)$

ii) $Emb^r(M,X) \longrightarrow C^r(M,X)$

Demonstração

Uma carta em X determina um difeomorfismo θ, $\theta:U \longrightarrow E$ de um conjunto aberto $U \subseteq X$ em um espaço de Banach modelo, E. Seja $E = F \oplus R^m$ uma fatorização de E em um espaço de F e uma cópia de um m-espaço euclidiano R^m com $m \geqslant 2n+1$. Escolha agora um mergulho arbitrário $f_2:M^n \longrightarrow R^m$ e uma ' função diferenciável arbitrária $f_1:M^n \longrightarrow F$. Então $f = \theta^{-1} o\ (f_1 \times f_2): M \longrightarrow X$ é um mergulho. Portanto $Emb^r(M,X) \neq \emptyset$ e também $C^r(M,X;k) \neq \emptyset$.

Seja agora novamente Q^i uma variedade diferenciável compacta com subvariedade $A \subset Q^i$ compacta e o ponto base $q_o \in A \subset Q^i$.

i) Seja $f_o \in C^r(M,X;k)$ uma k-mersão arbitrária e consideremos para um $i \geqslant 0$ qualquer, a classe de homotopia de uma função

$f: (Q^i, A, q_o) \longrightarrow (C^r(M,X), C^r(M,X;k), f_o)$ com a função associada $\hat{f}:(Q^i x M^n) \longrightarrow X$.

Podemos agora novamente supor sem perda de generalidades que $f \Longrightarrow \hat{f}$ de classe C^r.

Queremos modificar $\hat{f}$ atravéz de uma homotopia' constante sobre $A \times M$ para obter uma função a qual é uma k-mersão para cada $q \in Q$ fixo. Faremos isso em sequência de passos, em cada passo faremos mudanças somente em um pedaço do domínio que é mandado dentro de uma carta no contradomínio e manteremos fixos o que já foi alterado em passos anteriores.

Para isto precisamos escolher coberturas abertas de Q por cartas, sejam $\{V_i\}$ e $\{U_i\}$, com $i=1,\ldots,\ell$ tal que $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$. Do mesmo modo, escolheremos para cada $i = 1,\ldots,\ell$ coberturas abertas de M por cartas, vamos dizer $\{V^i_j\}$ e $\{U^i_j\}$ com $j = 1,\ldots,n_i$ tal que $V^i_j \subset \bar{V}^i_j \subset U^i_j$.

Além disso, todas estas coberturas devem ser escolhidas tal que $\hat{f}(U_i \times U^i_j)$ está contida em uma carta sobre X. Consideremos agora $U_1 \times U^1_1$. Visto que $\hat{f}$ leva este subconjunto em uma carta sobre X, ... $\hat{f}|U_1 \times U^1_1$ se corresponde por um difeomorfismo à função $U_1 \times U^1_1 \longrightarrow E = F \oplus R^m$, onde escolhemos m suficientemente grande na fatorização de E. De acordo com o Teorema A2.13 (Apêndice 2), este nos permite alterar o R^m componente de $\hat{f}$ e construir uma homotopia de $\hat{f}$ a $\hat{f}^1_1\colon \Theta \times M \longrightarrow X$ tal que a homotopia é constante em $A \times M$, com suporte em $U_1 \times U^1_1$ e tal que $(\hat{f}^1_1)_q$ tem posto $\geqslant k$ em $\bar{V}^1_1$ para cada $q \in A \cup \bar{V}_1$. Consideremos então $\hat{f}^1_1$ em $U_1 \times U^1_2$. Pelos mesmos métodos anteriores podemos mudar $\hat{f}^1_1$ dentreo de $U_1 \times U^1_2$ e então obter a função $f^1_2\colon Q \times M \longrightarrow X$, tal que $\hat{f}^1_2$ é homotópica a $\hat{f}^1_1$ através de uma homotopia constante em $(A \times M) \cup (\bar{V}_1 \times \bar{V}^1_1)$ e tal que $(\hat{f}^1_2)_q$ tem posto $\geqslant k$ em $\bar{V}^1_1 \cup \bar{V}^1_2$ para cada $q \in A \cup \bar{V}_1$.

Construiremos agora por indução uma sequência de funções $\hat{f}, \hat{f}^1_1, \hat{f}^1_2, \ldots, \hat{f}^1_{n_1}, \hat{f}^2_1, \ldots, \hat{f}^2_{n_2}, \ldots, \hat{f}^\ell_{n_\ell}$, tal que a função $\hat{f}^i_{n_i}$ para cada $i = 1,\ldots,\ell$ é homotópica a $\hat{f}$ através de uma homotopia constante em $A \times M$ e tal que $(\hat{f}^i_{n_i})_q$ tem posto $\geqslant k$ em $M = \bigcup_{j=1}^{n_i} \bar{V}^i_j$ para cada $q \in A \cup \bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_i$. Visto que $Q = \bigcup_{i=1}^{\ell} \bar{V}_i$, a função $\hat{g} = \hat{f}^\ell_{n_\ell}\colon Q \times M \longrightarrow X$ induzirá então uma função $g\colon Q \longrightarrow C^r(M,X;k)$ homo tópica a f por uma homotopia constante em A. Isto mostra que f representa aclasse zero.

Procedendo agora como na prova do Teorema 7.08, ítem i), concluiremos que a função induzida

$$\pi_i(\, C^r(M,X;k),\ f_o\,) \longrightarrow \pi_i(\, C^r(M,X),\ f_o\,)$$

é uma bijeção paraatodo $i \geqslant 0$. Visto que f_o foi escolhido arbitráriamente a função $i: C^r(M,X;k) \longrightarrow C^r(M,X)$ é portanto uma equivalência homotópica fraca, e portanto uma equivalência homotópica, uma vez que os espaços envolvidos são ANR's, o que completa a prova deste ítem.

ii) A prova de que a função inclusão de $\mathrm{Emb}^r(M,X)$ em $C^r(M,X)$ é uma equivalência homotópica é desenvolvida de maneira análoga àquela do ítem ii) do Teorema 7.08, por reduzir questões de transversaliddde para dimensão finita como fizemos acima.

-VIII-

APÊNDICES

APÊNDICE I

A1.00- Variedades de Funções

Durante esta seção X será uma C^r variedade compacta, $r \geqslant 1$ e Y será uma C^{r+s+2} variedade que admite partições da unidade de classe C^{r+s+2}. Pretendemos resumir a construção de uma estrutura de uma variedade C^s em $C^r(X,Y)$. Também daremos alguns resultados a respeito da função evaluação ... $ev:(C^s(X,Y) \times X) \longrightarrow Y$. Para maiores detalhes e demonstrações sugerimos ao leitor consultar [2] e [6].

Primeiramente definiremos cartas naturais em ... $C^s(X,Y)$. Para cada "spray" s em Y, temos abertos $\mathcal{A}_s$ e $\mathcal{B}_s$, $\mathcal{A}_s$ uma vizinhança da seção 0 em TY e $\mathcal{B}_s$ uma vizinhança da diagonal de $Y \times Y$, e uma função exponencial $Exp_s: \mathcal{A}_s \longrightarrow \mathcal{B}_s$ que é um C^{r+s} difeomorfismo. Para cada função $f \in C^r(X,Y)$, existe uma vizinhança $C_{s,f}$ do gráfico de f em $X \times Y$, tal que $s_f = f^* \circ Exp_s$: ... $f^* \mathcal{A}_s \longrightarrow C_{s,f}$ é difeomorfismo. Definamos $U_{s,f} \subseteq C^r(X,Y)$ como o subconjunto das funções g tal que o gráfico de g está contido em $C_{s,f}$, e definamos $\varphi_{s,f}: U_{s,f} \longrightarrow \Gamma^r(f^*TY)$ por $\varphi_{s,f}(g) = s_f^{-1} \circ g$ onde $\Gamma^r(f^*TY)$ é o espaço de Banach de C^r secções de f^*TY. O par $(U_{s,f}, \varphi_{s,f})$ é uma carta natural para $C^r(X,Y)$.

A1.01- Teorema

A família de cartas naturais em $C^r(X,Y)$ é um atlas de classe C^s.

A1.02- Teorema

Seja Z uma variedade de classe C^{r+s+2} que admite partições da unidade de classe C^{r+s+2}. Para cada $f \in C^r(X,Y)$, definamos $\alpha_f : C^r(Y,Z) \longrightarrow C^r(X,Z)$ por $\alpha_f(g) = g \circ f$. Então se $0 \leqq s \leqq r$, α é de classe C^r.

A1.03-Teorema

Se Z é uma variedade de classe C^{r+s+2} que admite partições da unidade de classe C^{r+s+2}, e temos $g \in C^r(Y,Z)$, definamos $w_g : C^r(X,Y) \longrightarrow C^r(X,Z)$ por $w_g(f) = g \circ f$. Então se $0 \leqq s \leqq r$, e g é de classe C^{r+s}, w_g é de classe C^s.

A1.04-Teorema

Se $0 \leqq s \leqq r$, então a função evaluação ... $ev:(C^r(X,Y) \times X) \longrightarrow Y$ definida por $ev(f,x) = f(x)$ é de classe C^s.

APÊNDICE II

A2.00- Transversalidade e Jatos

Nesta seção X denotará uma variedade (talvez com fronteira), Y uma variedade, e $W \subseteq Y$ uma sub-variedade de Y. T odas serão de classe C^r, $0 < r \leqq \infty$. Não há restrição nas dimensões de X, Y e W.

A2.01- Definição

Uma função f de X em Y, de classe C^r, é transversal a W no ponto $x \in X$, se:

Ou $f(x) \notin W$ ou $f(x) = w \in W$, e existem cartas ... (U, α) e (V, β) de X e Y nos pontos x e w respectivamente satisfazendo:

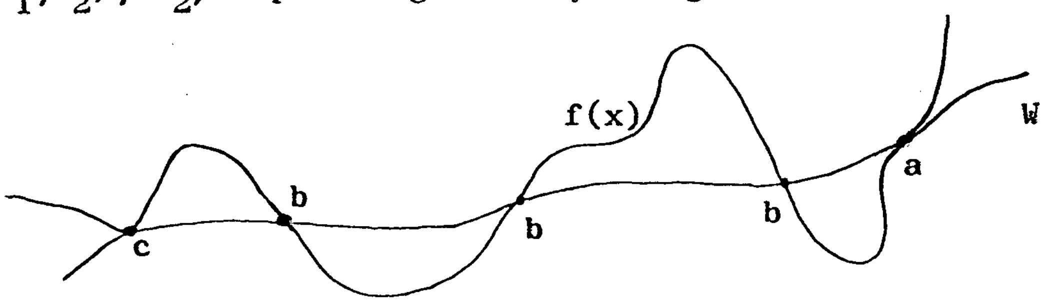
1) $\alpha(U) = U_1 \times V_2$ e $\beta(V) = V_1 \times V_2$ onde U_1, V_1 e V_2 são subespaços de Banach dos modelos p/ X e Y.

2) $f(U) \subseteq V$

3) $\alpha(x) = (0,0)$ e $\beta(w) = (0,0)$

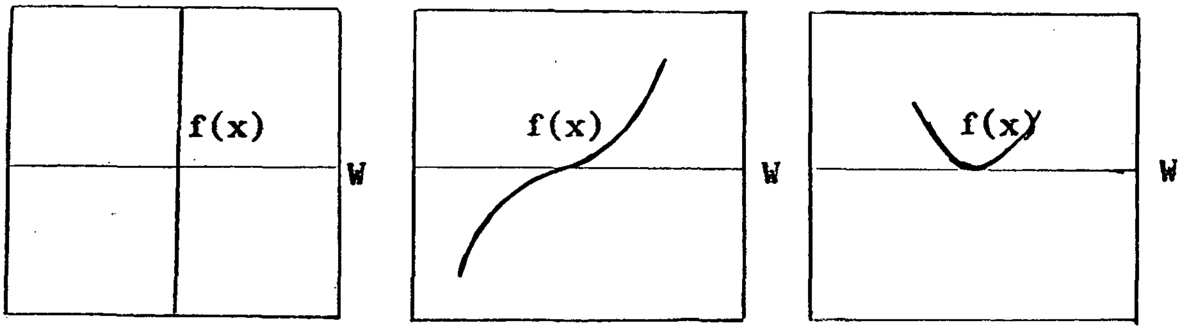
4) $\beta(V \cap W) = V \times \{0\}$; e

5) Se $f_{\alpha\beta} = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}: U_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2$ é a representação local de f, então $f_{\alpha\beta}(x_1, x_2) =$ ... $(g(x_1,x_2), x_2)$ para alguma função g de classe C^r.



f é transversal a W nos pontos do tipo de b, ' mas nos pontos do tipo em a, e c, f e W não são transversais.

É fácil ver, intuitivamente que em pontos do tipo b, podemos escolher uma carta de Y de tal modo que o gráfico é (1), e nos do tipo a ou c, serão (2) e (3):



(1) (2) (3)

Se f é transversal a W no ponto x, escrevemos $f \pitchfork_{x} W$. Se f é transversal a W en todo ponto $x \in X$, dizemos que f é transversal a W e escrevemos $f \pitchfork W$.

A2.02- Teorema

Uma função $f: X \longrightarrow Y$ de classe C^r é transversal a W no ponto x se e somente se a composição $T_xX \xrightarrow{f_*} T_{f(x)}Y \longrightarrow T_{f(x)}Y / T_{f(x)}W$ é sobrejetora e seu núcleo tem um espaço complementar em $T_x(X)$.' Se W tem codimensão finita (o V_2 de A2.01 tem dimensão finita), então f é transversal a W em $x \in X$ se e somente se $f_*\left[(T_xX)\right] \oplus T_{f(x)}W = T_{f(x)}Y$.

A2.03- Teorema

Se $f: X \longrightarrow Y$ é de classe C^r e é transversal a W, então $f^{-1}(W)$ é subvariedade de X. Se W tem codimensão finita, $f^{-1}(W)$ também tem.

A2.04- Definição

Sejam Z uma variedade C^r e $f: X \longrightarrow Y$ e ... $g: Z \longrightarrow Y$ funções de classe C^r. Dizemos que f e g são transversais nos pontos $x \in X$ e $z \in Z$ se e somente se o produto $f \times g: X \times Z \longrightarrow Y \times Y$ é ... transversal à diagonal de $Y \times Y$ no ponto (x,z). f e g são transversais se o são em cada x e z, e escrevemos $f \pitchfork g$.

Nota: Daquí por diante exigiremos que X seja uma variedade sem fronteira. Denotaremos o k-ésimo espaço tangente de X por $T^k(X) = T(T^{k-1}(X))$, $0 \leqq k \leqq r-1$. Também definiremos a k-ésima função tangente de $f: X \longrightarrow Y$ a ser $f_*^k = (f_*^{k-1})_* : T(T^{k-1}(X)) \longrightarrow T(T^{k-1}(Y))$

A2.05- Definição

Duas funções $f, g \in C^k(X,Y)$ são k-equivalentes em $x \in X$, se e somente se $f_{*x}^k = g_{*x}^k$ e escrevemos $f \underset{x}{\overset{k}{\sim}} g$. A classe de equivalência por $\underset{x}{\overset{k}{\sim}}$ que contém f serão denotadas por $[f]^k_{(x,y)}$ onde $y = f(x)$ e será chamada o k-jato de f no ponto x.

O conjunto $J^k(X,Y)$ de todas as classes de equivalência $[f]^k_{(x,y)}$ onde k é fixo, será chamado o fibrado de k-jatos de X em Y. A função natural ... $\pi^k: J^k(X,Y) \longrightarrow X \times Y$, $\pi^k([f]^k_{(x,y)}) = (x,y)$ é a k-ésima jato-projeção. Se $f \in C^k(X,Y)$, a k-ésima jato-extensão de f é a função $j^k f: X \longrightarrow J^k(X,Y)$ definida por $j^k f(x) = [f]^{\eta}_{(x,f(x))}$.

Alertamos para o perigo de chamar $J^k(X,Y)$ a fibração de k-jatos. Em geral $(\pi^k)^{-1}(x,y)$ não é um espaço de Banach. Entretanto $J^k(X,Y)$ é uma fibração no sentido mais geral e é uma variedade como vemos aqui.

A2.06- Definição

Sejam (U,α) e (V,β) cartas em X e Y respectivamente, $\alpha: U \longrightarrow E$ e $\beta: V \longrightarrow F$. Se $f \in C^k(X,Y)$, seja $f_{\alpha\beta} \in C^k(U',V')$ a representação local de f com respeito a α e β, onde $U' = \alpha(U)$ e $V' = \beta(V)$. Seja $W = (\pi^k)^{-1}(U \times V)$ e defina $\eta: W \longrightarrow U' \times V' \times L(E,F) \times \ldots \times L_s^k(E,F)$ por ... $\eta([f]^k_{(x,y)}) = (x', y', Df_{\alpha\beta}(x'), \ldots, D^k f_{\alpha\beta}(x'))$ onde $(x,y) \in U \times V$, $y = f(x)$, $x' = \alpha(x)$ e $y' = \beta(y)$. O par

(W, η) é uma carta natural para $J^k(X,Y)$. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são atlas de X e Y respectivamente, o atlas natural em $J^k(X,Y)$ associado ao par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é o conjunto de todas as cartas naturais determinadas por pares de cartas, uma de $\mathcal{A}$ e outra de $\mathcal{B}$.

A2.07- Teorema

Se $k \leqq r$ então cada atlas natural de $J^k(X,Y)$, é de classe C^{r-k}.

A2.08- Teorema

As k-ésimas jato-extensão de elementos de $C^k(X,Y)$ definem um mergulho de $C^r(X,Y)$ em $C^{r-k}(X, J^k(X,Y))$ se X é compacto.

Nota:

Lembramos que um subconjunto A de um espaço topológico B é resíduo em B se é a interseção de uma sequência de conjuntos abertos e densos em B, e que num espaço de Baire, cada conjunto resíduo é denso. Desde que cada variedade de Banach é um espaço de Baire, temos que residual implica denso.

Agora definamos uma topologia em $C^r(X,Y)$. Seja X uma variedade de classe C^r (talvez com fronteira, de qualquer dimensão) e Y uma variedade C^r (sem fronteira). A topologia de convergência compacto em $C^r(X,Y)$ é a topologia induzida por j^r da topologia compacto-aberta em $C^0(X, J^r(X,Y))$. Se X for compacta, de classe C^r, Y for de classe C^{2r+2} e admitir partições da unidade, esta topologia conincide com a de A1.01. Quaisquer que sejam as variedades X e Y, $C^r(X,Y)$ é espaço de Baire. Nos teoremas que seguem, a topologia em $C^r(X,Y)$ será suposta a ser a de convergência compacta.

Suponha que X e Y são de classe C^{2r+2}, X é subvariedade de Y de classe C^{r-k}, todas são de dimensão finita, e Y e W sem fronteira. Seja $F \in C^{r-k}(W,J^k(X,Y))$. Denote por $C_F^r(X,Y)$ o conjunto de todas as $f \in C^r(X,Y)$ tal que $j^k f \pitchfork F$.

A2.09- Teorema (Transversalidade de Thom)

Se $r > \max\left\{\dim X + \dim W - \dim J^k(X,Y),\ 0\right\}$, então o subespaço $C_F^r(X,Y)$ é resíduo em $C^r(X,Y)$ para cada função C^{r-k} de W em $J^k(X,Y)$.

O teorema transversal de Thom tem vários corolários de grande interêsse.

A2.10- Teorema

Teorema da Imersão de Whitney: Suponhamos que X e Y são variedades de classe C^{2r+2} e dimensão s e t res-' pectivamente. Suponhamos que Y não tem front eira. Se $r \geqslant 2$ e $t \geqslant 2s$, então $Im^r(X,Y)$ é resíduo em $C^r(X,Y)$.

A2.11- Teorema

Se X e Y são como no Teorema acima e X é compacto, ' então $Inj^r(X,Y)$, o conjunto das funções injetivas de classe C^r de X em Y, é aberto e denso em $C^r(X,Y)$.

A2.12- Teorema

Sejam X,Y como no Teorema A2.10 e Y compacto, se $r \geqslant 2$, $t \geqslant 2s+1$ então $Emb^r(X,Y)$ é aberto em $C^r(X,Y)$.

A2.13- Teorema

Sejam Q^i, M^n e X^n variedades diferenciáveis de dimensões finitas, e sejam $A \subset Q$ e $K \subset M$ subconjuntos fechados. Suponha também que $2 \leqq r \leqq \infty$, $0 \leqq k \leqq \min\{n,m\}$ e $0 \leqq i \leqq m-2k+(n-k)(m-k)$.

Então qualquer função $\hat{f} \in C^r(Q \times M, X)$ tal que $\hat{f}_q$ tem posto $\geqq k$ sobre K para $q \in A$ pode ser arbitráriamente aproximada fechada por uma função $\hat{g} \in C^r(Q \times M, X)$ tal que tenhamos as restrições $\hat{g}|_{A \times K} = \hat{f}|_{A \times K}$ e tal que $\hat{g}_q$ tem posto $\geqq k$ sobre M para todo $q \in Q$.

BIBLIOGRAFIA

[1] HORVÁTH , John. Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley Publishing Company.1966.

[2] LANG, Serge. Introduction to Differentiable Manifolds, Interscience Publishers. 1967.

[3] DIEUDONNÉ, J. Foundations of Modern Analysis, Academics Press. New York and London. 1960.

[4] DUGUNDGI, J. Topology, Boston, Allyn & Bacon. 1966.

[5] GREENBERG, Marvin. Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, INC. Amsterdam, New York. 1967.

[6] ABRAHAM, R. Lectures of Smale on Differentiel Topology. Department of Mathematics. Columbia University.

[7] HANSEN, Vagn Ludsgaard. On the Homotopy Type of Certain Spaces of Differentiable Maps, Mathematics Scandinavica.30 (1972). 75-87.

[8] HANNER, O. Some Theorems On Absolute Neighborhood Retracts, Arkiv För Matematik. Ed 1 nr 30.

[9] PALAIS, Richard S. Homotopy Theory of Infinite Dimensional Manifolds. Topology Vol. 5, p.p.1-16.1966.

[10] KELLEY, J.L. General Topology, Van Nostrand, Reinhold. New York. 1969.

[11] MASSEY, Willian S. Algebraic Topology, Mcgraw-Hill ... Book Company, New York. 1966.

[12] WALLACE, Andrew H. Differential Topology First Steps, W. A. Benjamin, INC. 1968.

[13] LIMA, Leni Matos. Homotopia de Complexos CW. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. 1981.

-o-o-o-o-o-