

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO UNIFORME DE FUNÇÕES VIA PROGRAMAÇÃO
LINEAR

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS, ESPECIALIDADE EM
MATEMÁTICA.

ROBERTO CORREA DA SILVA

JUNHO - 1984

FLORIANÓPOLIS

SANTA CATARINA - BRASIL

20 1946

TÍTULO : "MÉTODO DE APROXIMAÇÃO UNIFORME DE FUNÇÕES VIA PROGRAMAÇÃO LINEAR".

MESTRANDO : ROBERTO CORREA DA SILVA.

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de
"MESTRE EM CIÊNCIAS"

Especialidade em MATEMÁTICA e aprovada na sua forma final
pelo Curso de Pós-Graduação.

William S. Whitley

Prof. William Glenn Whitley (PHD) - Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Paulo Roberto Oliveira

Prof. Paulo Roberto Oliveira (Dr.)-Membro

William S. Whitley

Prof. William Glenn Whitley (PHD) - Membro

Plinio Stange

Prof. Plinio Stange (Dr.) - Orientador

A G R A D E C I M E N T O S

A Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade concedida.

Ao professor Plinio Stange, pela orientação.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram neste trabalho.

A Albertina, Maria Alice, Orlando
e Paulo.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo fazer uma apresentação e análise prática de um método de aproximação uniforme por polinômios usando a teoria de Programação Linear.

O Método apresentado é comparado com outros e testado em vários problemas da Teoria de Aproximação.

ABSTRACT

Our objective in this thesis is to present and analysis a method using Linear Programing for uniformly approximating a function by polynomials.

The method which we present is compared with others and tested in several problems in Approximation Theory.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I	
1.1 - Definições e Teoremas Básicos para a Programação Linear	3
CAPÍTULO II	
2.1 - Definições	11
2.2 - Algoritmo Simplex	13
2.3 - Algoritmo Simplex Revisado	19
CAPÍTULO III	
3.1 - O Método de Aproximação Uniforme de Funções	29
3.2 - Caracterização da Solução do Método de Aproximação Uniforme de Funções via Programação Linear.....	33
3.3 - Escolha dos pontos	34
3.4 - Exemplo	34
3.5 - Conclusões	46
CAPÍTULO IV	
4.1 - Comparação com o Polinômio de Legendre para a função e^x no intervalo $[-1,1]$	48
4.2 - Comparação com o Método dos Mínimos Quadrados ...	52
4.3 - Ajustamento de Curva	56
4.4 - Aproximação de funções não diferenciáveis	58
4.5 - Aproximação da Integral	62
4.6 - Aproximação de Funções no R^n	64
4.7 - Conclusões	67
APÊNDICE	68
BIBLIOGRAFIA	71

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho tem por objetivo fazer uma apresentação e uma análise prática do método de aproximação uniforme usando a teoria de Programação Linear.

Pretende-se comparar este método com outros e testá-lo em vários problemas da Teoria de Aproximação.

No livro de KRABS [1] há uma exposição teórica deste método de aproximação uniforme, mas nenhum exemplo prático. Sentimos então a necessidade de um estudo sobre a viabilidade prática do método.

O método consiste de, tendo o problema de aproximação dado por

$$\|f(x) - \hat{p}_n(x)\|_{\infty} \leq \|f(x) - p_n(x)\|_{\infty}, \quad \forall p_n \in V,$$

onde V é o subespaço linear dos polinômios de grau $\leq n$, ou seja, encontrar um polinômio $p_n(x)$ de grau n que aproxime a função $f(x)$ no sentido da norma do máximo, transformá-lo num Problema de Programação Linear (PPL) da seguinte forma

$$\text{Min } \delta$$

$$\text{s. a } \|f(x) - p_n(x)\|_{\infty} \leq \delta, \quad \forall x \in [a, b]$$

isto é:

$$\text{Min } \delta$$

$$\text{s. a } \sum_{j=1}^{n+1} x_j t^{j-1} + \delta \geq f(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} -x_j t^{j-1} + \delta \geq -f(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

onde x_j são os coeficientes do polinômio a determinar.

A seguir faz-se uma discretização deste problema obtendo então um PPL com n ? finito de restrições.

Para resolvê-lo é utilizado o Algoritmo Simplex descrito no Capítulo II.

O Capítulo I consiste de uma introdução à Programação Linear e de alguns teoremas a esse respeito.

No Capítulo II apresentamos uma versão simplificada do Algoritmo Simplex e Algoritmo Simplex Revisado. É usado, nesta dissertação, um programa que resolve um PPL pelo Algoritmo Simplex, o qual entrará como subrotina no programa principal descrito no apêndice.

O Método de Aproximação Uniforme de Funções via Programação Linear é exposto no Capítulo III. Fazemos uma análise sobre a caracterização, existência, unicidade e determinação da solução e damos um exemplo de aplicação do método.

No último Capítulo são feitas algumas comparações com outros métodos em termos do erro de aproximação. Ali também é testada a viabilidade prática do método em vários problemas.

O programa principal para o computador que utilizamos neste trabalho está no apêndice, onde mostramos de modo acessível como aplicá-lo.

C A P Í T U L O I

Neste Capítulo daremos as noções e os teoremas básicos da Programação Linear. O objetivo é expor a fundamentação teórica da resolução de um PPL visando a sua utilização na resolução do problema que será apresentado no Capítulo III.

As demonstrações destes teoremas não serão incluídas neste trabalho, já que nada teríamos a acrescentar às mesmas.

1.1 - DEFINIÇÕES BÁSICAS

Um PPL pode ser sempre reduzido à forma

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ Q(x) = c^T x \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.1) \\ (1.2) \\ \text{---> Min} \end{array} \quad (1.3)$$

O conjunto de equações e inequações (1.1) e (1.2) é denominado conjunto de restrições do problema e (1.3) é a função objetivo.

O conjunto M de pontos que satisfazem o sistema de restrições (1.1) e (1.2) chama-se conjunto de soluções viáveis.

A solução viável x^* que minimiza a função objetivo $Q(x)$ é denominada solução ótima do PPL.

A é uma matriz real $m \times n$, b e c são vetores fixos pertencentes a R^m e R^n , respectivamente, x é um vetor qualquer pertencente a R^n .

1.1.1 - Definição

Sejam x_1, x_2, \dots, x_k vetores do R^n e c_1, c_2, \dots, c_k números reais.

$$x = \sum_{i=1}^k c_i x_i,$$

é uma combinação linear convexa de x_i se $c_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) e se $\sum_{i=1}^k c_i = 1$.

Se $c_i > 0$, para $i=1, 2, \dots, k$, trata-se de uma combinação linear convexa legítima.

1.1.2 - Definição

Um conjunto de pontos M chama-se convexo, se toda combinação linear convexa de qualquer par de pontos x_1 e x_2 de M também pertencer a M .

1.1.3 - Definição

Um ponto x , de um conjunto convexo M , denomina-se vértice (ou ponto extremo) de M , quando ele não pode ser obtido como combinação linear convexa legítima de nenhum par de pontos distintos de M .

1.1.4 - Definição

Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $\text{posto}(A) = m$. Um conjunto de m vetores coluna a_j da matriz A linearmente independentes denomina-se base associada à matriz A . Evidentemente, dentro de certo rigor matemático, não tem sentido falarmos em base de matriz, pois esta não constitui um espaço vetorial. Trata-se, no entanto, de uma imprecisão usual na terminologia da programação matemática.

1.1.5 - Definição

Definimos um politopo ou, mais precisamente, politopo convexo o conjunto de pontos

$$\{ x \in R^n / \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \},$$

para $i=1, 2, \dots, m$, onde a_{ij} são elementos da matriz A e b_i são elementos do vetor coluna b .

Um politopo convexo limitado denomina-se poliedro convexo.

Os vetores a_j que formam a base denominam-se vetores base da matriz A e o conjunto de seus índices é o conjunto de índices base da matriz A. Seja o PPL formado por (1.1), (1.2) e (1.3). As m componentes de x correspondentes aos vetores base denominam-se variáveis básicas (VB) do PPL. As demais n-m componentes são as variáveis não básicas (VNB) do PPL.

Anulando as n - m variáveis não básicas, obtemos um sistema compatível e determinado, constituído de m equações e m incógnitas. Resolvendo este sistema de equações, isto é, determinando o valor das VB, obtemos uma solução básica.

Uma solução básica onde as VB são não negativas denomina-se solução básica viável. Enquanto a solução básica obedece somente às restrições (1.1), a solução básica viável obedece às restrições (1.1) e (1.2).

Uma solução básica viável onde existe ao menos uma VB nula denomina-se solução básica degenerada.

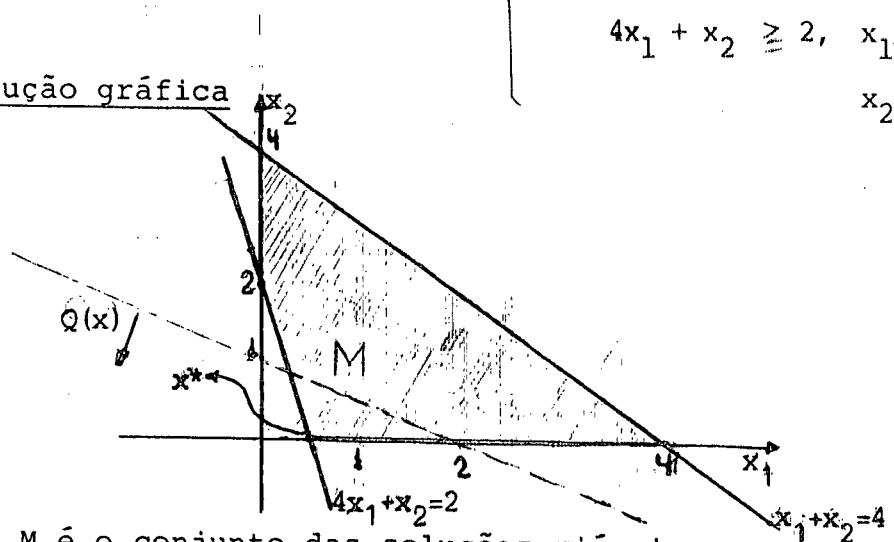
A solução básica viável que minimiza Q(x) recebe o nome de solução ótima.

EXEMPLO:

Seja o PPL

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a } x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_1 \geq 0 \quad \text{e} \\ x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Solução gráfica



M é o conjunto das soluções viáveis.
 Q(x) = $x_1 + 2x_2$ é a função objetivo a ser minimizada.
 $x_1 + x_2 \leq 4$ e $4x_1 + x_2 \geq 2$ são as restrições do PPL.
 x^* é a solução ótima.

Observação:

1) O conjunto M formado pela interseção de semi-espacos fechados da forma

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ x_j \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{cases}$$

é fechado, pois a interseção de uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos fechados do espaço \mathbb{R}^n é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n .

2) Denominamos conjunto compacto um conjunto fechado e limitado. Este conjunto goza de propriedades especiais, pois toda função real e contínua, definida num conjunto compacto não vazio, possui máximo e mínimo nesse conjunto.

Como todo PPL é fechado, podemos garantir que o PPL cujo conjunto de soluções viáveis é limitado (não vazio) possui solução ótima.

3) Sendo M o conjunto de soluções viáveis de um PPL, podemos, resumir os casos possíveis da seguinte maneira:

3.1) $M = \emptyset$; o PPL não tem solução viável logo não possui solução ótima.

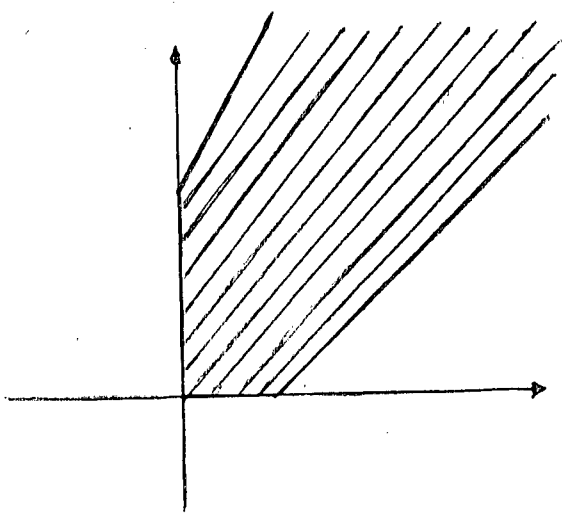
3.2) $M \neq \emptyset$ e limitado; o PPL possui solução ótima que pode ser única ou não.

3.3) $M \neq \emptyset$ e não limitado; dois casos podem ocorrer:

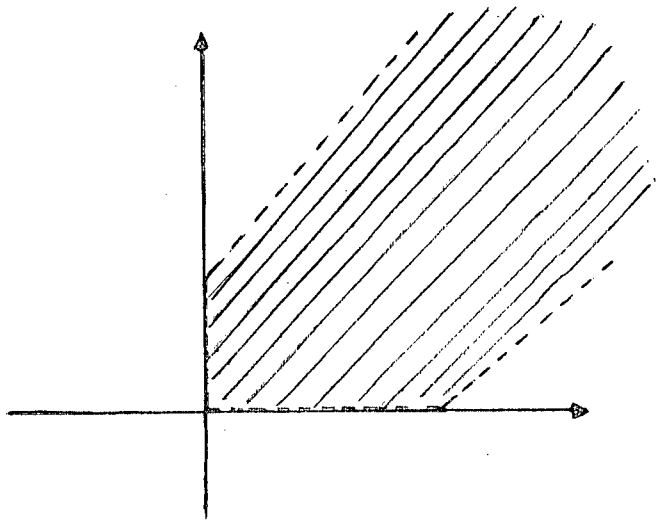
3.3.1) $Q(x)$ possui ótimo sobre M . Neste caso, o PPL possui solução ótima que pode ser única ou não.

3.3.2) $Q(x)$ não possui ótimo sobre M , o que significa que $Q(x)$ pode crescer (ou decrescer) ilimitadamente. Neste caso, o PPL não possui solução ótima.

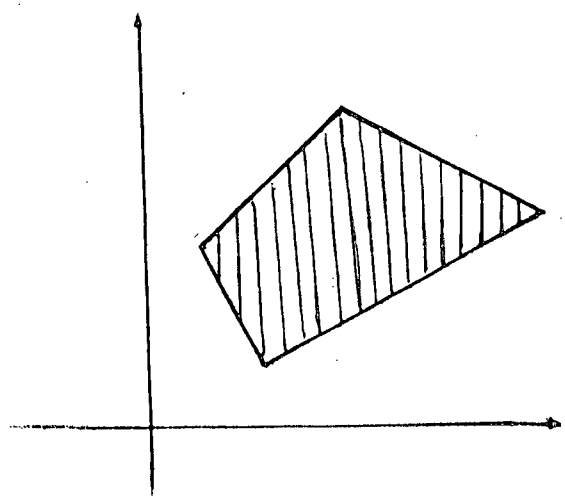
EXEMPLO:



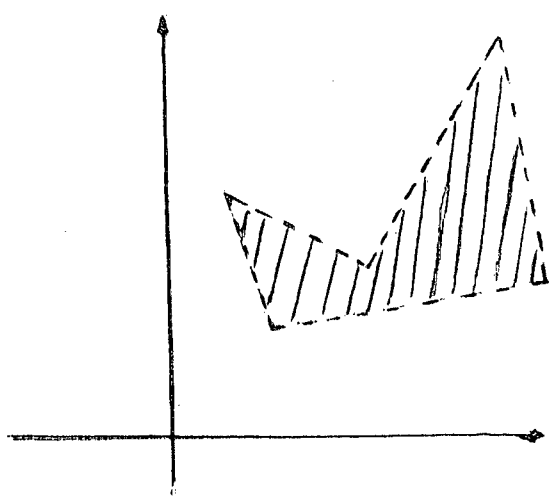
conjunto convexo, fechado e ilimitado e é um politopo.



conjunto aberto, ilimitado e convexo.



conjunto fechado e limitado, convexo e é um poliedro.



conjunto aberto, limitado e não convexo.

Através do Teorema 1 veremos que o conjunto de soluções viáveis do PPL é convexo.

Teorema 1

O conjunto M das soluções viáveis de um PPL é convexo.

Demonstração: [2].

Citaremos dois dos resultados mais importantes para conjuntos convexos.

O primeiro resultado garante que, no caso de minimização de uma função convexa (da qual a função linear é caso particular) em um conjunto convexo, todo mínimo local é também mínimo global. Este resultado, bastante importante pelo fato de ótimos locais serem mais fáceis de determinar do que ótimos globais, não será na verdade por nós utilizado. O algoritmo desenvolvido no Capítulo II permite constatar diretamente que o ótimo obtido é global.

O segundo resultado garante que o mínimo de uma função côncava (da qual a função linear é caso particular) em um conjunto convexo, quando existe, é atingido pelo menos num ponto extremo do conjunto. Este resultado é fundamental, pois, na busca da solução ótima, basta, então, nos restringirmos aos pontos extremos (ou vértices) do conjunto.

Vamos, agora, estabelecer a equivalência entre solução básica viável e vértice.

Teorema 2

x é vértice do conjunto M de soluções viáveis de um PPL se e somente se, x for solução básica viável.

Demonstração: [2].

Este teorema associa ao conceito geométrico de vértice o conceito algébrico de solução básica viável.

Veremos pelo Teorema 3 que os vértices existem em número finito. Isto é importante, pois nos ajudará a garantir que o processo de otimização que utilizaremos e que consiste em gerar soluções básicas viáveis (vértices) é finito.

Teorema 3

Existe um número finito de soluções básicas viáveis associadas a um PPL, isto é, o conjunto M de soluções viáveis de um PPL tem um número finito de vértices.

Demonstração: [2].

Corolário 1

Se o conjunto M for não vazio, existirá ao menos um vértice de M .

Teorema 4

Seja M o conjunto de soluções viáveis de um PPL, definido por $Ax = b$ e $x \geq 0$. Todo ponto $x \in M$ pode ser escrito como combinação linear convexa $x = tx' + (1-t)\tilde{x}$, $0 < t \leq 1$, onde x' é vértice de M e $\tilde{x} \in M$.

Demonstração: [2].

O teorema seguinte garante que a solução ótima pode ser procurada entre os vértices do polítopo.

Teorema 5

Seja um PPL cujo conjunto M de soluções viáveis é definido por $Ax = b$ e $x \geq 0$ e seja $Q(x)$ a função objetivo que

tem um mínimo em M . Então este mínimo será atingido ao menos em um vértice de M .

Demonstração: [2].

O teorema 6 e o corolário 2 se referem aos problemas que apresentam mais de uma solução ótima.

Teorema 6

Cada combinação linear convexa de soluções ótimas do PPL é por sua vez também solução ótima.

Corolário 2

Se um PPL possuir mais de uma solução ótima, possuirá uma infinidade de soluções ótimas.

Assim, vimos que o conjunto de soluções viáveis do PPL é um conjunto convexo e que, se o PPL admitir solução ótima, esta será atingida para, ao menos, um vértice do conjunto de soluções viáveis deste PPL. Além disso, mostramos que um vértice equivale a uma solução básica viável.

C A P Í T U L O I I

Neste capítulo visamos mostrar uma versão simplificada do Algoritmo Simplex, que é exposta em [2], bem como do Algoritmo Simplex Revisado exposta em [5]. Faremos uma descrição dos vários passos seguidos e ao final deste capítulo, será mostrado o fluxograma do Algoritmo Simplex.

Ressalvamos aqui que, no entanto, qualquer versão do Algoritmo Simplex pode ser utilizada para resolver o problema de aproximação uniforme de funções, de vez que só necessitamos resolver um PPL.

2.1 - DEFINIÇÕES

2.1.1 - Definição

Pivoteamento são as operações realizadas para transformar uma coluna num vetor unitário.

2.1.2 - Definição

Variáveis de folga são aquelas acrescentadas a uma desigualdade do tipo " \leq " para conseguirmos uma equação de igualdade equivalente, a fim de reduzir um PPL a forma-padrão.

2.1.3 - Definição

Variáveis artificiais são aquelas introduzidas nas restrições de igualdade e desigualdades do tipo " \geq ".

Obs.: Nas restrições de desigualdades do tipo " \geq " são introduzidas variáveis de folga e artificiais.

2.1.4 - Definição

Dizemos que o modelo de um PPL encontra-se na forma-padrão quando ele é formulado da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{onde } b_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j = Q(x) \rightarrow \text{Min} \end{array} \right.$$

2.1.5 - Definição

Seja uma matriz do tipo

$$| B \quad | \quad R \quad | \quad b \quad | \quad (2.1)$$

Efetuamos a seguir uma série de operações elementares sobre as linhas desta matriz, visando a obter a matriz identidade no lugar de B. Teremos, então:

$$| I \quad | \quad B^{-1}R \quad | \quad B^{-1}b \quad | \quad (2.2)$$

(2.2) é chamada a forma canônica de (2.1).

$$\text{Um PPL} \left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ Q(x) = c^T x \rightarrow \text{Min} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

com variáveis de folga x_{n+1}, \dots, x_{n+m} , pode ser representado pelo seguinte quadro.

x_1	\dots	x_s	\dots	x_n	x_{n+1}	\dots	x_{n+r}	\dots	x_{n+m}	b
a_{11}	\dots	a_{1s}	\dots	a_{1n}	1	\dots	0	\dots	0	b_1
.
a_{r1}	\dots	a_{rs}	\dots	a_{rn}	0	\dots	1	\dots	0	b_r
.
.
a_{m1}	\dots	a_{ms}	\dots	a_{mn}	0	\dots	0	\dots	1	b_m
c_1	\dots	c_s	\dots	c_n	0	\dots	0	\dots	0	$Q(x)$

2.2 - ALGORITMO SIMPLEX

O Algoritmo Simplex segue o seguinte esquema:

A partir de uma solução básica viável inicial \rightarrow encontram soluções básicas viáveis cada vez melhores \rightarrow até chegar à solução ótima.

Estamos interessados numa solução básica viável. Precisamos, portanto, impor condições adicionais, quais sejam:

a) as n variáveis arbitradas são as VNB, sendo-lhes atribuído o valor zero;

b) as m variáveis restantes, determinadas com auxílio do sistema $Ax=b$, são as VB. As VNB devem ser escolhidas de maneira a termos VB não negativas;

c) os vetores coluna a_i associados às VB devem ser L.I., de modo a constituírem uma base associada à matriz A .

De acordo com os teoremas desenvolvidos no capítulo I, é fácil verificar que, cumpridas as condições a), b) e c), geraremos sempre uma solução básica viável. O Simplex consiste, portanto, em um conjunto de regras, de forma que sejam respeitadas as condições mencionadas, mais a quarta regra:

d) as soluções básicas viáveis são geradas no sentido de otimizar a função objetivo.

Vejamos, agora, em diversos passos, como gerar uma solução básica viável inicial, e como melhorá-la.

Passo 1 - Solução Básica Viável Inicial x' .

Seja o PPL reduzido à forma-padrão e representado pelo quadro (2.4). Consideramos VNB as primeiras n variáveis, atribuindo-lhes o valor zero. O sistema de equações pode, então, ser resolvido diretamente, pois já se encontra na forma escalonada. Temos

$$\text{VNB} \rightarrow x'_1 = x'_2 = x'_3 = \dots = x'_s = \dots = x'_n = 0$$

$$\text{VB} \rightarrow x'_{n+1} = b_1, \dots, x'_{n+r} = b_r, \dots, x'_{n+m} = b_m.$$

É fácil verificar que a solução x' , respeitando as condições a), b) e c), constitui realmente uma solução básica viável, ou seja, um vértice do conjunto viável M .

Passo 2 - É possível achar uma solução melhor? Em caso afirmativo, escolha nova VB.

Uma vez obtida a solução básica viável x' , o próximo passo será gerar uma nova solução básica viável melhor que x' .

Ora, uma nova solução implica necessariamente em ao menos uma nova VB bem como na transformação de uma VB em VNB. Isto é, procuramos atribuir um valor positivo a uma das variáveis x_1, \dots, x_n , de forma a anular uma das variáveis x_{n+1}, \dots, x_{n+m} . Evidentemente, esta transformação alterará o valor da função objetivo. Vejamos o que acontece, observando a função objetivo representada no quadro (2.4). Temos para a solução básica viável inicial x' :

$$Q(x') = c_1 x'_1 + \dots + c_s x'_s + \dots + c_n x'_n + 0x'_{n+1} + \dots + 0x'_{n+m}.$$

Como $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_n = 0$, temos $Q(x') = 0$.

Suponhamos, agora, uma nova solução básica viável x , tal que x_s seja a nova VB, mantendo todas as demais VNB, isto é, $x_i = x'_i = 0$ para $i=1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$. Olhando a expressão usada para calcular $Q(x')$, vemos que, para a nova solução básica viável x , temos $Q(x) = c_s x_s$. Resulta, então, $Q(x) - Q(x') = c_s x_s$.

Esta análise permite-nos estabelecer uma regra para a escolha da nova VB. Como queremos minimizar $Q(x)$, devemos escolher x_s tal que $c_s < 0$. Neste caso, a função objetivo diminuirá a quantidade $c_s x_s$. Caso exista mais de um coeficiente negativo na função objetivo, parece lógico escolher x_s tal que

$$c_s = \min_{i/c_i < 0} \{c_i\}.$$

Não existindo coeficiente negativo, isto é, $c_i \geq 0$ para todo i , torna-se impossível diminuir o valor da função objetivo. Logo, $Q(x')$ representa o mínimo de $Q(x)$, ou seja, x' é solução ótima do PPL.

Seja $c_i \geq 0$ para todo i . Suponhamos que exista ao menos uma VNB x_s tal que $c_s = 0$. Então, fazendo x_s VB, isto é, atribuindo-lhe

um valor não negativo, geramos uma nova solução viável x , onde $Q(x)=Q(x')$. Temos, portanto, mais de uma solução ótima, o que, segundo o corolário 2, significa que possuímos uma infinidade de soluções ótimas.

Passo 3 - Atribuição de valor à nova VB. Determinação da nova VNB.

Seja a nova solução básica viável x , onde tornamos x_s nova VB, mantendo as demais VNB $x_i=x'_i=0$ para $i=1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$. A alteração no valor das demais VB é determinada através de operações elementares por linha observando o quadro (2.4). Fazendo $x_s \geq 0$, temos:

$$x_{n+i} = b_i - a_{is} x_s, \quad \forall i \in k, \text{ onde } k = \{1, 2, \dots, m\}.$$

A fim de chegarmos à nova solução básica viável, temos de respeitar as condições de não negatividade. Logo:

$$b_i - a_{is} x_s \geq 0, \quad \forall i \in k.$$

Dois casos são possíveis:

$$1) a_{is} \leq 0, \quad \forall i \in k.$$

Neste caso as condições de não negatividade serão respeitadas para qualquer valor não negativo de x_s . Fazendo x_s tender a infinito, temos $Q(x)$ tendendo a menos infinito, pois, de acordo com o passo 2, vimos que $c_s < 0$. Isto significa que $Q(x)$ não tem mínimo finito, isto é, a determinação da solução ótima do PPL é impossível.

$$2) \text{ Existe ao menos um dos } a_{is} > 0.$$

$$\text{Seja } k^+ = \{i / i \in k, a_{is} > 0\}.$$

Como para $a_{is} \leq 0$ a condição de não negatividade para x_{n+i} é automaticamente respeitada, basta considerar:

$$b_i - a_{is} x_s \geq 0 \quad \text{para } i \in k^+.$$

$$\text{Isto é: } x_s \leq \frac{b_i}{a_{is}} \quad \text{para } i \in k^+.$$

Por outro lado, precisamos anular alguma variável x_{n+i} , tornando-a VNB, o que será conseguido fazendo $x_s = b_i / a_{is}$ para algum $i \in k^+$. Como temos que considerar as condições de não negatividade, fazemos:

$$x_s = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{i \in k^+} (b_i / a_{is}).$$

Com isso garantimos, por um lado as condições de não negatividade e por outro uma nova VNB x_{n+r} .

Basta, agora, verificar se é possível substituir o vetor a_{n+r} , que sai da base (x_{n+r} torna-se VNB), pelo vetor a_s , que entra na base (x_s é a nova VB). Isto é possível (ver [2], teor. 1.7, pág. 36), pois temos

$$a_s = \sum_{i=1}^m a_{is} a_{n+i}.$$

Como $a_{rs} > 0$, podemos fazer a substituição. a_{rs} recebe a denominação de PIVÔ, a r -ésima linha é a linha PIVÔ, enquanto a s -ésima coluna é denominada coluna PIVÔ.

Passo 4 - Pivoteamento; redução à forma canônica.

Analisando o raciocínio feito nos Passos 2 e 3, verificamos que houve notável simplificação devido à forma especial em que o PPL se encontra. Em particular temos:

1) São nulos os coeficientes das VB na função objetivo. Este fato permitiu a verificação imediata da alteração no valor da função objetivo pela introdução da nova VB x_s (Passo 2). A alteração das demais VB x_{n+1}, \dots, x_{n+m} não se refletia sobre $Q(x)$ pelo fato de serem nulos os coeficientes destas VB na função objetivo.

2) A base deve estar na forma canônica, ou seja, deve ser igual a uma matriz identidade.

Observando o quadro (2.4), verificamos que a base referente à solução básica viável \hat{x} é uma matriz identidade. Esta forma especial permitiu verificar diretamente como a introdução de uma nova VB x_s se refletia sobre as demais VB x_{n+1}, \dots, x_{n+m} . Foi isto que determinou a escolha do PIVÔ (Passo 3).

Dizemos, neste caso, que a base está na FORMA CANÔNICA, o que, na verdade, significa a aplicação do método de Gauss-Jordan na determinação dos valores das VB.

Se pretendemos continuar o processo iterativo, isto é, a partir de x gerar uma nova solução melhor ainda, precisamos continuar mantendo a forma canônica. Isto se dá através das operações de pivoteamento, discriminadas a seguir com referência ao quadro (2.4):

1) Dividir a linha pivô pelo pivô a_{rs} .

2) Anular todos os demais elementos da coluna-pivô. Isto poderá ser feito subtraindo da i -ésima linha ($i=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m, m+1$) a nova linha-pivô, multiplicada, respectivamente, por $a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{(r-1)s}, a_{(r+1)s}, \dots, a_{ms}, c_s$.

Em síntese, o que fazemos nas operações de pivoteamento é reduzir o vetor a_s , que entra na base, a um vetor unitário, substituindo assim o vetor a_{n+r} que sai da base. Além disso, anulamos o coeficiente x_s (nova VB) na função objetivo.

Como dissemos no início deste capítulo, o Algoritmo Simplex foi aqui desenvolvido, considerando a primeira iteração. Isto é, a partir da solução básica viável inicial x' , geramos uma nova solução x . Na verdade, o Algoritmo não termina neste ponto. Novas soluções básicas viáveis ainda melhores serão geradas, até que seja determinada a solução ótima. Uma vez feito o pivoteamento no passo 4, voltamos ao passo 2, procurando uma solução melhor. O Algoritmo pára, quando isto se torna impossível, o que significa já termos encontrado a solução ótima ou concluído que não existe solução ótima finita.

Como o que foi exposto é uma versão simplificada do Algoritmo Simplex, vários inconvenientes serão analisados a seguir.

1 - Partimos em (2.3) de um tipo especial de PPL. As restrições eram todas do tipo " \leq " para $b_i \geq 0$.

Veremos como resolver um PPL com igualdades e desigualdades do tipo " \geq " para $b_i \geq 0$.

Suponhamos que foram efetuadas transformações no PPL, de modo que temos $b_j \geq 0$, para todas as restrições j . Para cada igualdade i introduzimos uma variável artificial positiva x_i^a . Também em cada desigualdade " \geq " introduzimos, além da variável de folga, uma variável artificial acompanhada de sinal positivo, isto é:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_j & \text{ ----> } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i & \text{ ----> } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{fi} + x_i^a = b_i \end{aligned}$$

$$\text{onde } x_i^a \geq 0.$$

Este método de acrescentar variáveis artificiais é chamado de método das duas fases. Acrescentando variáveis artificiais a este PPL (P) criamos um novo PPL (P'). O que este método faz é, a partir de uma solução básica viável inicial de P', gerar, utilizando o Simplex, novas soluções básicas viáveis de P', até que se tenha uma onde todas as variáveis artificiais são nulas (isto sempre é possível desde que $M \neq 0$). A ela pode-se fazer corresponder uma solução básica viável de P. Basta eliminar as variáveis artificiais.

2 - Todo o raciocínio desenvolvido para o Algoritmo Simplex, especialmente os Passos 2 e 3, apóia-se no quadro ou tableau (2.4). Devido a esta simplifica-

ção, não foi desenvolvido um ferramental algébrico, que não seria tão necessário agora, mas que é imprescindível para tratar-se com tópicos mais avançados de programação linear.

Concluindo, podemos dizer que as idéias básicas do Algoritmo Simplex estão todas contidas na versão simplificada, apresentada nesta seção.

2.3 - O Algoritmo Simplex Revisado

Os pequenos problemas de programação matemática podem ser resolvidos com destreza usando o Algoritmo Simplex, mas os problemas industriais realísticos são muito grandes mesmo para o mais paciente dos aritméticos. Nestes problemas é desejável fazer o Algoritmo Simplex tão eficiente como possível diminuindo o tempo de computação, que é dispendioso.

O que o Algoritmo Simplex Revisado faz é economizar cálculos que no Algoritmo Simplex eram recalculados, separando os cálculos necessários para decidir quais as variáveis que devem entrar na base e quais devem sair.

O Algoritmo Simplex Revisado é em essência não diferente do Algoritmo Simplex, é simplesmente um caminho mais eficiente quando usado o computador.

Considere o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Q(x) = c^T x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ x \geq 0, \end{array} \right.$$

com m restrições e n variáveis.

Sejam

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b_{m \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c_{n \times 1} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

Seja a j -ésima coluna de A denotada por c'_j ,
i.e.,

$$c'_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Suponha que em algum ponto na implementação do método Simplex Revisado uma base β_i tenha sido identificada correspondendo a uma solução básica viável (s.b.v.) para o problema. Sem perda de generalidade, seja esta base dada pelas primeiras m variáveis, i.e

$$\beta_i = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

Uma matriz base B_i é definida para cada base β_i . B_i é a matriz formada por ordenação das colunas da matriz A correspondendo as variáveis em β_i na ordem na qual elas formariam as colunas de uma matriz identidade no conhecido tableau do Simplex.

Suponha que para β_i esta ordem é $1, 2, \dots, m$.

Então

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} = (c'_1 \ c'_2 \ c'_3 \ \dots \ c'_m)$$

Para a primeira s.b.v., com uma base de variáveis de folga e artificiais, teremos

$$B_1 = I \quad (2.5)$$

A fim de determinar se a s.b.v. correspondente a β_i é ótima ou não, é necessário calcular B_i^{-1} . Temos de (2.5) que a primeira matriz base é

$$B_1^{-1} = I.$$

Contudo, em geral B_i^{-1} pode ser calculada a partir de B_{i-1}^{-1} como segue.

Suponha que a última variável a entrar em β_i é x_p , e que x_p é variável básica para a q -ésima restrição. Isto é, em termos do método Simplex regular, o elemento na q -ésima linha e p -ésima coluna seria o pivô. Agora sejam (a'_{kp}) , $k = 1, 2, \dots, m$ os elementos da coluna correspondente a x_p no tableau para β_{i-1} e

$$B_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1m} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \dots & \bar{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

Então a entrada na k -ésima linha e j -ésima coluna de B_i^{-1} é

$$\bar{a}_{kj} - \frac{a'_{kp}}{a'_{qp}} (\bar{a}_{qj}), \text{ para } k \neq q$$

ou

$$\frac{\bar{a}_{qj}}{\bar{a}_{qp}}, \quad \text{para } k = q.$$

Uma vez que B_i^{-1} é calculado como descrito acima, a linha $Q(x)$ (linha da função objetivo) correspondente a β_i é encontrada.

Seja c_B o vetor linha dos coeficientes negativos das variáveis básicas. Defina os multiplicadores simplex como

$$\pi_i = c_B B_i^{-1}.$$

Uma vez que o vetor linha π_i tenha sido encontrado, os coeficientes da variável não básica da linha $Q(x)$ são calculados.

Seja \bar{c}_j o coeficiente da linha $Q(x)$ de cada variável não básica x_j . Então

$$\bar{c}_j = c_j - \pi_i c'_j,$$

para toda variável não básica x_j . Se

$$\bar{c}_j \geq 0, \quad \text{para toda variável não básica } x_j, \quad (2.6)$$

a base β_i corresponde a uma solução ótima. Esta solução x_B pode ser encontrada como segue:

$$x_B = B_i^{-1} b, \quad (2.7)$$

e o valor da solução ótima é

$$Q(x_B) = -c_B x_B.$$

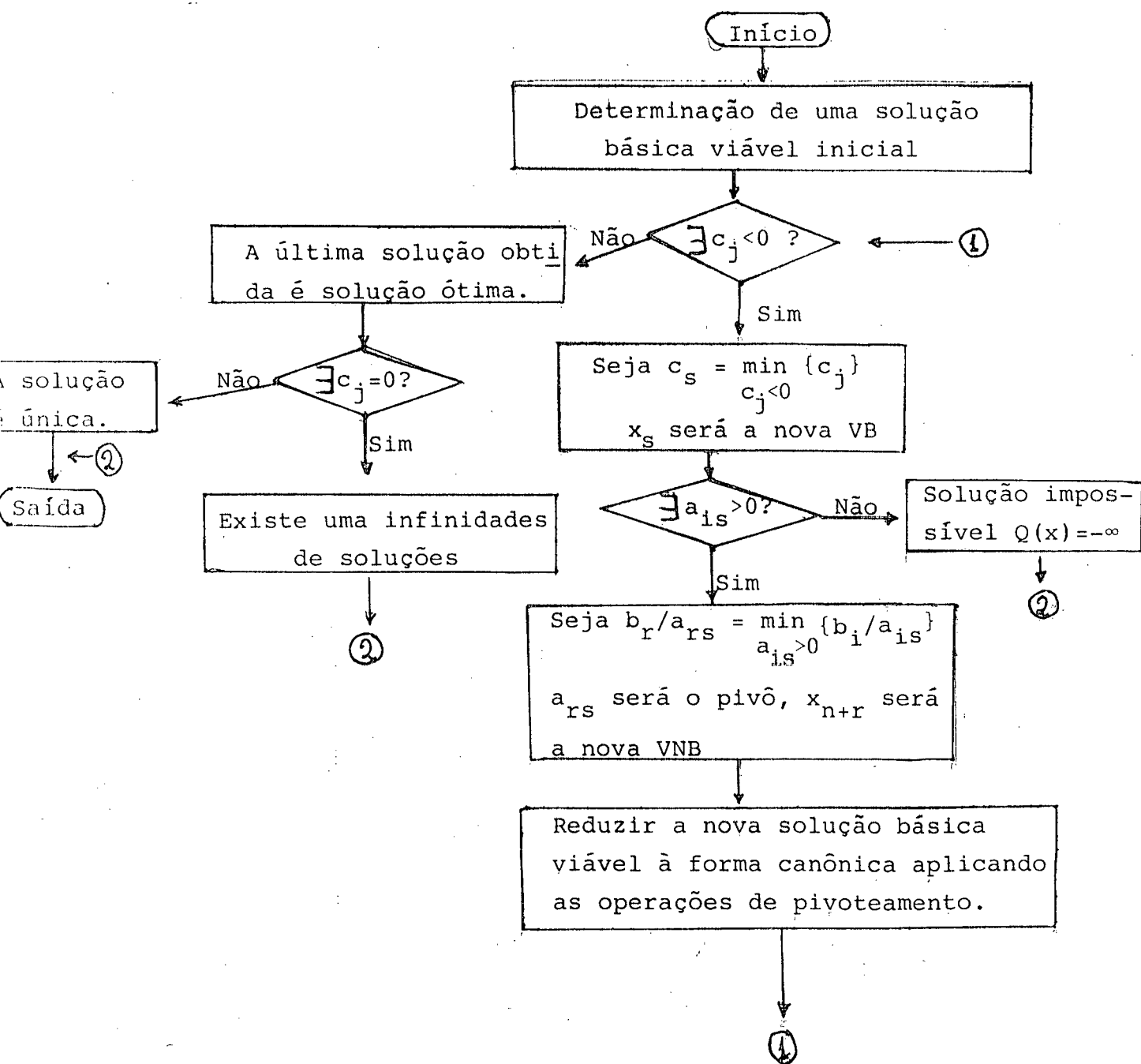
Se (2.6) não é satisfeita, a coluna correspondente para a entrada é aquela que possui maior magnitude. Seja p esta coluna, x_p entrará na próxima base, β_{i+1} .

A fim de determinar qual variável básica x_p substituirá, é necessário calcular os novos termos independentes das restrições, isto é o novo vetor b e a p -ésima coluna no tableau conforme β_i . A coluna b é dada em (2.7), a p -ésima coluna, c'_p é

$$c'_p = B_i^{-1} c'_p.$$

A seguir, são calculadas as razões dos elementos correspondentes de x_B e c'_p , para decidir quais variáveis deixarão β_1 , digamos a variável básica para a q -ésima restrição. Agora β_{i+1} pode ser identificada, e os passos anteriores podem ser repetidos com β_{i+1} em lugar de β_i . O processo pára, assim como no Algoritmo Simplex regular (descrito na seção 2.1), quando (2.7) é satisfeita.

FLUXOGRAMA DO ALGORITMO SIMPLEX

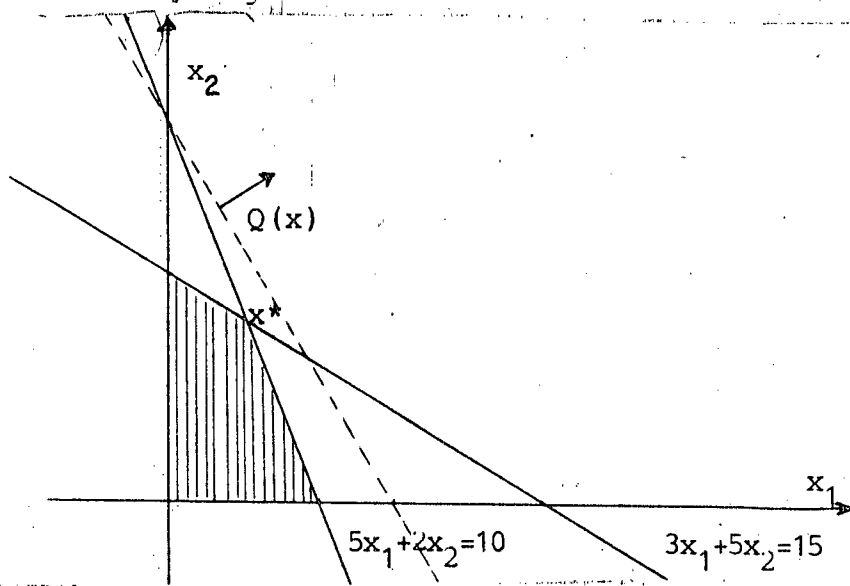


EXEMPLO ([2], pág. 140)

Seja o PPL dado pelo modelo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx} \end{cases}$$

Solução gráfica:



Solução pelo Algoritmo Simplex:

Colocando o modelo na Forma-Padrão, temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ -5x_1 - 3x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Min} \end{cases}$$

1º Quadro:

		↓						
		VB		x_1	x_2	x_3	x_4	
(L ₁)		x_3		3	5	1	0	15
(L ₂)	<--	x_4		5	2	0	1	10
(L ₃)				-5	-3	0	0	Q(x)

1.^a solução básica viável

$$x_1 = x_2 = 0 \text{ (VNB)}$$

$$x_3 = 15, x_4 = 10 \text{ (VB)}, \quad Q(x) = 0, \text{ corresponde ao vértice } (0, 0)$$

Relacionamos, na primeira coluna do quadro, as VB relativas a cada equação. Denominamos cada uma das linhas do quadro L₁, L₂ e L₃.

Esta solução ($x_1 = x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 10$) não é ótima, pois a linha L₃ da função objetivo apresenta coeficientes negativos. A VNB que vai entrar na base é aquela que apresenta o coeficiente mais negativo na linha L₃ da função objetivo, ou seja, a variável x_1 . Determinamos o pivô, bem como o valor de x_1 anulando, assim, uma outra variável, que passa a VNB. Temos:

$$x_1 = \min\{15/3, 10/5\} = 2.$$

O pivô será 5 e fazendo $x_1 = 2$ anulamos x_4 , que passa a VNB.

Temos, portanto, uma nova solução básica viável, onde x_1 e x_3 são VB e x_2 e x_4 são VNB.

Resta agora reduzir o PPL à Forma Canônica para a nova solução básica viável. Isto poderá ser feito através das seguintes operações efetuadas sobre o primeiro quadro do Simplex:

$$L_1 - 3/5L_2 \rightarrow L_1$$

$$1/5L_2 \rightarrow L_2$$

$$L_3 + L_2 \rightarrow L_3$$

Obtemos, então, uma nova solução básica viável, correspondente ao segundo quadro do Simplex.

2º Quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	
$\leftarrow x_3$	0	$19/5$	1	$-3/5$	9
x_1	1	$2/5$	0	$1/5$	2
	0	-1	0	1	$Q(x)+10$

2ª solução básica viável

$x_1=2$ (VB), $x_2=0$ (VNB), $x_3=9$ (VB), $x_4=0$ (VNB),

$Q(x)=-10$, corresponde ao vértice $(2,0)$.

Esta solução não é ótima, pois a linha da função objetivo ainda apresenta coeficiente negativo. Procuramos, portanto, gerar uma nova solução básica viável.

A VNB que vai entrar na base é x_2 . A VB que vai sair da base é x_3 , pois $9 + 19/5 < 2 + 2/5$. O Pivô, portanto, é $19/5$.

$$\begin{aligned} 5/19L_1 & \quad \rightarrow L_1 \\ L_2 - 2/19L_1 & \quad \rightarrow L_2 \\ L_3 + 5/19L_1 & \quad \rightarrow L_3 \end{aligned}$$

3º Quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$5/19$	$-3/19$	$45/19$
x_1	1	0	$-2/19$	$5/19$	$20/19$
	0	0	$5/19$	$16/19$	$Q(x)+235/19$

3ª solução básica viável

$x_1=20/19$ (VB), $x_2=45/19$ (VB), $x_3=x_4=0$ (VNB),

$Q(x)=-235/19$, corresponde ao vértice $(20/19, 45/19)$

Esta é a solução ótima, pois todos os coeficientes da função objetivo são não negativos. Portanto, temos:

Solução Ótima:

$$x_1=20/19, x_2=45/19, x_3=0, x_4=0$$

$$\text{Mín } Q(x) + 235/19 = 0 \quad \text{ou} \quad \text{Mín } Q(x) = -235/19, \text{ logo}$$

$$\text{Máx } Q'(x) = 235/19.$$

C A P Í T U L O I I I

Faremos aqui uma exposição do Método de Aproximação Uniforme de Funções o qual se encontra no livro de KRABS [1].

Nosso intuito é simplesmente apresentar o método e não fazer uma análise teórica do mesmo, pois teoricamente já está bem desenvolvido. Pretendemos somente utilizá-lo na prática.

No final deste capítulo daremos um exemplo, onde serão examinados vários aspectos da aplicabilidade do método.

3.1 - O Método de Aproximação Uniforme de Funções

Seja M um subconjunto compacto de um espaço normado e $C(M)$ o espaço vetorial das funções reais e contínuas sobre M , com a norma do máximo, isto é

$$\|G\| = \|G\|_{\infty} = \max_{t \in M} |G(t)| \quad G \in C(M). \quad (3.1)$$

Sejam dados uma $f \in C(M)$ e n funções linearmente independentes $v_1, v_2, \dots, v_n \in C(M)$.

V será o subespaço linear n -dimensional gerado por v_1, v_2, \dots, v_n formado por todas as combinações lineares:

$$v = \sum_{j=1}^n v_j x_j, \quad x_j \in \mathbb{R}.$$

Procura-se um elemento $\hat{v} \in V$ t.q.:

$$\|\hat{v} - f\|_{\infty} \leq \|v - f\|_{\infty}, \quad v \in V \quad (3.2)$$

isto é, um elemento de V que entre todos os elementos de V aproxime f uniformemente da melhor maneira possível, no sentido da norma do máximo (3.1), ou seja

$$\left\| \sum_{j=1}^n v_j \hat{x}_j - f \right\|_{\infty} \leq \left\| \sum_{j=1}^n v_j x_j - f \right\|_{\infty}, \quad \hat{x}_j, x_j \in \mathbb{R}.$$

A cada um desses \hat{v} chama-se a melhor aproximação de f em V . A grandeza

$$\rho_{\infty}(f, V) = \inf_{v \in V} \left\| v - f \right\|_{\infty}$$

chama-se desvio mínimo ou distância mínima entre a função f e o subespaço V .

Estamos interessados em usar um caso particular deste método que é o problema da aproximação por meio de polinômios, com $M=[a, b]$, $a < b$ e $v_j(t) = t^{j-1}$, $j=1, 2, \dots, n$, que constituem uma base para o espaço dos polinômios de grau máximo $g=n-1$.

Para transformar o problema de aproximação (3.2) em um problema de otimização, isto é

$$\text{Min } \delta$$

$$\text{s.a. } \left\| v - f \right\|_{\infty} \leq \delta, \quad v \in V,$$

definiremos para cada M dois funcionais lineares

$$\theta_t^1, \theta_t^2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

como sendo:

$$\begin{aligned} \theta_t^1(x, \delta) &= \sum_{j=1}^n v_j(t) x_j + \delta \\ \theta_t^2(x, \delta) &= \sum_{j=1}^n -v_j(t) x_j + \delta, \quad \text{onde } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \delta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fazendo:

$$v(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t) x_j \quad \text{vem que} \quad \left\| v(t) - f(t) \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{j=1}^n v_j(t) x_j - f(t) \right\|_{\infty} \leq \delta$$

ou seja:

$$\sum_{j=1}^n v_j(t) x_j - \delta \leq f(t)$$

$$\sum_{j=1}^n v_j(t) x_j + \delta \geq f(t), \quad \forall t \in M.$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^n -v_j(t)x_j + \delta \geq -f(t) \quad \text{ou} \quad \theta_t^2(x, \delta) \geq -f(t)$$

$$\sum_{j=1}^n v_j(t)x_j + \delta \geq f(t) \quad \text{ou} \quad \theta_t^1(x, \delta) \geq f(t).$$

Definindo ainda o funcional linear:

$$\theta(x, \delta) = \delta,$$

o problema de aproximação (3.2) será equivalente ao seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad \theta(x, \delta) = \delta \\ \text{s.a} \quad \theta_t^1(x, \delta) \geq f(t) \\ \quad \quad \theta_t^2(x, \delta) \geq -f(t), \quad \forall t \in M, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_j são variáveis quaisquer e $\delta \geq 0$.

Trata-se, portanto de um PPL com infinitas restrições.

A figura abaixo ilustra melhor o que seja a aproximação uniforme de funções por polinômios.

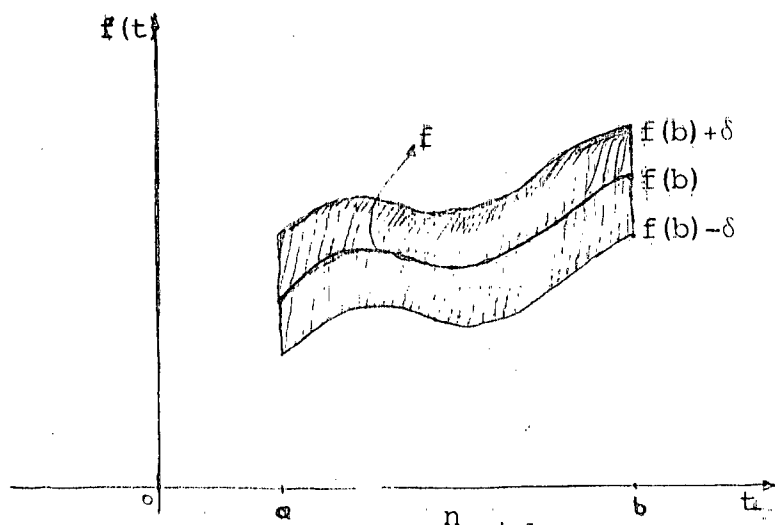


Figura 3.1-Procura-se um polinômio $\hat{v} = \sum_{j=1}^n t^{j-1} x_j$ dentro da faixa ilustrada acima ao redor de f tal que δ seja o menor possível.

3.1.1 -Caso Discreto

O que queremos é transformar (3.3) num PPL com finitas restrições. Para isto vamos discretizar o subconjunto compacto de um espaço normado.

Seja M um conjunto finito de pontos, isto é

$$M = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}.$$

O espaço vetorial $C(M)$ pode então ser identificado com o R^m . Como supusemos $V \subset C(M)$ com dimensão de V igual a n , devemos ter $m \geq n$.

Suporemos também que $m \geq n + 1$, senão existiria um $p(x)$ (polinômio de grau $n-1$) tal que para cada $t_i \in M$ $p(t_i) = f(t_i)$ e $\rho_\infty(f, V) = 0$, quer dizer o problema teria solução única e nada haveria por otimizar.

Assim temos o seguinte PPL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad \delta \\ \text{s. a} \quad \sum_{j=1}^n t_1^{j-1} x_j + \delta \geq f(t_1) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^n t_m^{j-1} x_j + \delta \geq f(t_m) \\ \sum_{j=1}^n (-t_1^{j-1} x_j) + \delta \geq -f(t_1) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^n (-t_m^{j-1} x_j) + \delta \geq -f(t_m), \end{array} \right. \quad (3.4)$$

3.1.2 - Aproximação com restrições de interpolação.

Para problemas em que se exija uma precisão maior em determinados pontos ou mesmo que $p(t_i) = f(t_i)$ para alguns pontos $t_i \in M$, utilizam-se estes pontos t_i como pontos de interpolação.

Para isto, sejam dados $r < n$ (n =dimensão do subespaço) pontos distintos $t_1, t_2, \dots, t_r \in M$.

Procura-se minimizar $\|v - f\|_\infty$, $v \in V$ sob as restrições:

$$v(t_i) - f(t_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad (3.5)$$

supondo que $V_0 = \{v \in V / v(t_i) = f(t_i), i=1, 2, \dots, r\} \neq \emptyset$.

Procura-se, portanto, $\hat{v} \in V_0$ t.q.:

$$\|\hat{v} - f\|_\infty = \rho_\infty(f, V_0) = \inf_{v \in V_0} \|v - f\|_\infty. \quad (3.6)$$

No PPL correspondente teremos pois, além de (3.4) mais as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^n v_j(t_i) x_j = f(t_i), \quad i=1, \dots, r.$$

3.2 - Caracterização da Solução do Método de Aproximação Uniforme de Funções via Programação Linear.

Vamos mostrar que toda solução do PPL (3.3) é solução do problema de aproximação (3.2).

Demonstração:

Suponhamos que existe $(\hat{x}, \hat{\delta})$ solução do problema de otimização (3.3) e $(\hat{v}, \rho_\infty(f, V))$ solução do problema de aproximação (3.2), onde

$$\rho_\infty(f, V) = \inf_{v \in V} \|v - f\|_\infty = \|\hat{v} - f\|_\infty$$

O par $(x, \delta) \in R^n \times R$ é uma solução viável do problema (3.3) se e somente se

$$\left\| \sum_{j=1}^n v_j x_j - f \right\|_\infty \leq \delta, \quad (3.7)$$

o que implica em

$$\rho_\infty(f, V) \leq \inf \{ \delta : (x, \delta) \in R^{n+1}, \text{ viáveis para algum } x \in R^n \} \quad (3.8)$$

Se $(\hat{x}, \hat{\delta}) \in R^{n+1}$ é uma solução ótima do problema (3.3), então por (3.7) temos:

$$\left\| \sum_{j=1}^n v_j \hat{x}_j - f \right\|_\infty = \hat{\delta}$$

e (3.8) implica $\hat{\delta} = \rho_{\infty}(f, V)$. Assim $(\hat{x}, \hat{\delta})$ é a melhor aproximação de M em $C(M)$.

Observação: No caso de restrições de interpolação teremos

$$\left\| \sum_{j=1}^n v_j x_j - f \right\|_{\infty} = 0,$$

que estarão incluídas em (3.7).

3.3 - Escolha dos pontos

Como a escolha dos pontos é arbitrária, devemos tomar cuidado ao pegá-los. Entre estes cuidados está o de manter uma certa distância entre os pontos, sendo que esta não precisa ser constante. Os pontos de interpolação, são escolhidos de acordo com o problema de aproximação a ser resolvido. Em muitos casos, no entanto, tais pontos são dispensáveis, o que simplifica o problema.

O que não se pode desprezar é o fato de que a escolha dos pontos de M sempre terá alguma influência no resultado do PPL.

3.4 - Exemplo

Façamos a aproximação da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$.

Temos assim o seguinte PPL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \delta \\ \text{s.a } \theta_t^1(x, \delta) = \sum_{j=1}^n t_k^{j-1} x_j + \delta \geq \cos t_k \\ \theta_t^2(x, \delta) = \sum_{j=1}^n -t_k^{j-1} x_j + \delta \geq -\cos t_k, \quad \forall t_k \in M_b \\ \sum_{j=1}^n t_i^{j-1} x_j = \cos t_i, \quad \forall t_i \in M_a \\ \qquad \qquad \qquad i=1, \dots, r \end{array} \right. \quad (3.9)$$

onde M_b e M_a são conjuntos discretos de pontos (M_b o conjunto para as desigualdades e M_a o conjunto para as interpolações) do intervalo $[0, \pi]$ sobre o qual será aproximada a função $f(x) = \cos x$ e $x_j, j=1, 2, \dots, n$, são os coeficientes do polinômio a determinar.

Queremos encontrar um polinômio de grau 3 que aproxime a função $\cos x$.

$$\text{Seja } M = M_a \cup M_b = \underbrace{\{1,6; 3,14; 0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}}_{M_a} \cup \underbrace{\{0,1; 0,5; 1; 1,5\}}_{M_b}$$

Polinômio de grau g igual a 3, assim n em (3.9) será

$$n = g + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Por (3.9) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \delta \\ \text{s.a } \sum_{j=1}^4 t_k^{j-1} x_j + \delta \geq \cos t_k \\ \sum_{j=1}^4 -t_k^{j-1} x_j + \delta \geq -\cos t_k, \forall t_k \in M_b \\ \sum_{j=1}^4 t_i^{j-1} x_j = \cos t_i, \forall t_i \in M_a \end{array} \right.$$

Nas desigualdades para cada $t_k \in M_b$ temos que calcular $t_k^0, t_k^1, t_k^2, t_k^3$, isto é, as potências de 0 a 3 de cada $t_k \in M_b$.

Nas igualdades temos que calcular as potências de 0 a 3 para cada $t_i \in M_a$.

Assim, resta apenas calcular os valores de $\cos t_k$ e $\cos t_i$ para cada $t_k \in M_b$ e $t_i \in M_a$, para podermos armar o PPL desta aproximação.

Temos, então o seguinte PPL:

Min δ

s. a

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,25x_3 + 0,125x_4 + \delta \geq 0,8775$$

$$x_1 + 0,1x_2 + 0,01x_3 + 0,001x_4 + \delta \geq 0,9950$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \delta \geq 0,5403$$

$$x_1 + 1,5x_2 + 2,25x_3 + 3,375x_4 + \delta \geq 0,0707$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + \delta \geq -0,4161$$

$$x_1 + 2,5x_2 + 6,25x_3 + 15,625x_4 + \delta \geq -0,8011$$

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 + \delta \geq -0,9899$$

$$-x_1 - 0,5x_2 - 0,25x_3 - 0,125x_4 + \delta \geq -0,8775$$

$$-x_1 - 0,1x_2 - 0,01x_3 - 0,001x_4 + \delta \geq -0,9950$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + \delta \geq -0,5403$$

$$-x_1 - 1,5x_2 - 2,25x_3 - 3,375x_4 + \delta \geq -0,0707$$

$$-x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 + \delta \geq 0,4161$$

$$-x_1 - 2,5x_2 - 6,25x_3 - 15,625x_4 + \delta \geq 0,8011$$

$$-x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 27x_4 + \delta \geq 0,9899$$

$$x_1 + 3,14x_2 + 9,8596x_3 + 30,9591x_4 = -1$$

$$x_1 + 1,6x_2 + 2,56x_3 + 4,096x_4 = -0,0291$$

x_1, x_2, x_3 e x_4 são variáveis quaisquer e $\delta \geq 0$.

De posse deste sistema usamos algum programa que resolva o PPL pelo Algoritmo Simplex.

Dispomos no computador da UFSC de um pacote que resolve um PPL pelo Algoritmo Simplex. Através do mesmo conseguimos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1,0012578 \\x_2 &= 0,054763357 \\x_3 &= -0,66143283 \\x_4 &= 0,14045138 \qquad \delta = 0,00526027\end{aligned}$$

Faremos, agora, uma análise do comportamento do método para a função $\cos x$.

Uma das questões que surgem é saber se aumentando o grau do polinômio, diminui o erro na aproximação. Para isto vamos considerar o mesmo M (conjunto discreto) para polinômios de graus 4, 5 e 6.

Seja $M_1 = M$. Utilizaremos o polinômio do 3º grau já encontrado para compararmos com os de 4º, 5º e 6º graus.

Polinômio de grau 4:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,98710526 \\x_2 &= 0,10658453 \\x_3 &= -0,71474779 \\x_4 &= 0,1615093 \\x_5 &= -0,0028271917 \qquad \delta = 0,0042254\end{aligned}$$

polinômio de grau 5:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1,0004155 & x_5 &= 0,05953719 \\x_2 &= -0,00445042 & x_6 &= -0,007561427 \\x_3 &= -0,48593502 \\x_4 &= -0,021801106 & \delta &= 0,00009523\end{aligned}$$

Polin. de grau 6:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0,99992324 & x_6 = -0,006527677 \\
 x_2 = -0,00063103509 & x_7 = -0,0001000211 \\
 x_3 = -0,49435512 & \delta = 0,00009140 \\
 x_4 = -0,01345629 & \\
 x_5 = 0,055355505 &
 \end{array}$$

Fizemos uma tabela de pontos para a função erro que neste caso é:

$$E(x) = \cos x - p_g^1(x),$$

onde p_g^1 é o polinômio de grau g no conjunto discreto M_1 .

Esta tabela de pontos está no quadro 3.1 e através dela analisaremos o erro de aproximação. Segue também o gráfico destas funções erro.

Em Acton [6] encontramos a idéia do gráfico da função erro em módulo. Podemos ter através do gráfico desta função uma idéia sobre a oscilação do erro de aproximação.

	$\cos x - p_3(x)$	$\cos x - p_4(x)$	$\cos x - p_5(x)$	$\cos x - p_6(x)$
1	$-5,2552 \times 10^{-3}$	$4,2268 \times 10^{-3}$	$-9,1195 \times 10^{-5}$	$9,5725 \times 10^{-5}$
2	$-6,8095 \times 10^{-3}$	$-1,0529 \times 10^{-3}$	$6,0022 \times 10^{-5}$	$6,5267 \times 10^{-5}$
3	$-6,6136 \times 10^{-3}$	$-3,7541 \times 10^{-3}$	$1,1486 \times 10^{-4}$	$2,5690 \times 10^{-5}$
4	$-5,2615 \times 10^{-3}$	$-4,5820 \times 10^{-3}$	$1,2350 \times 10^{-4}$	$-1,6093 \times 10^{-6}$
5	$-3,2545 \times 10^{-3}$	$-4,1391 \times 10^{-3}$	$1,1611 \times 10^{-4}$	$-8,4043 \times 10^{-6}$
6	$-1,0018 \times 10^{-3}$	$-2,9306 \times 10^{-3}$	$1,0771 \times 10^{-4}$	$3,6955 \times 10^{-6}$
7	$1,1777 \times 10^{-3}$	$-1,3644 \times 10^{-3}$	$1,0365 \times 10^{-4}$	$2,8431 \times 10^{-5}$
8	$3,0448 \times 10^{-3}$	$2,3824 \times 10^{-4}$	$1,0318 \times 10^{-4}$	$5,6922 \times 10^{-5}$
9	$4,4367 \times 10^{-3}$	$1,6397 \times 10^{-3}$	$1,0252 \times 10^{-4}$	$8,1062 \times 10^{-5}$
0	$5,2630 \times 10^{-3}$	$2,6790 \times 10^{-3}$	$9,7275 \times 10^{-5}$	$9,3877 \times 10^{-5}$
1	$5,4920 \times 10^{-3}$	$3,2629 \times 10^{-3}$	$8,3506 \times 10^{-5}$	$9,1016 \times 10^{-5}$
2	$5,1469 \times 10^{-3}$	$3,3612 \times 10^{-3}$	$5,9783 \times 10^{-5}$	$7,1824 \times 10^{-5}$
3	$4,2981 \times 10^{-3}$	$2,9958 \times 10^{-3}$	$2,6345 \times 10^{-5}$	$3,8087 \times 10^{-5}$
4	$3,0505 \times 10^{-3}$	$2,2283 \times 10^{-3}$	$-1,4305 \times 10^{-5}$	$-5,7817 \times 10^{-6}$
5	$1,5342 \times 10^{-3}$	$1,1567 \times 10^{-3}$	$-5,8532 \times 10^{-5}$	$-5,3883 \times 10^{-5}$
6	$-9,9719 \times 10^{-5}$	$-1,0043 \times 10^{-4}$	$-9,9659 \times 10^{-5}$	$-9,9931 \times 10^{-5}$
7	$-1,6978 \times 10^{-3}$	$-1,4051 \times 10^{-3}$	$-1,3322 \times 10^{-4}$	$-1,3518 \times 10^{-4}$
8	$-3,1046 \times 10^{-3}$	$-2,6200 \times 10^{-3}$	$-1,5402 \times 10^{-4}$	$-1,5521 \times 10^{-4}$
9	$-4,1811 \times 10^{-3}$	$-3,6138 \times 10^{-3}$	$-1,5742 \times 10^{-4}$	$-1,5706 \times 10^{-4}$
0	$-4,8108 \times 10^{-3}$	$-4,2688 \times 10^{-3}$	$-1,4263 \times 10^{-4}$	$-1,3924 \times 10^{-4}$
1	$-4,9084 \times 10^{-3}$	$-4,4951 \times 10^{-3}$	$-1,1390 \times 10^{-4}$	$-1,0347 \times 10^{-4}$
2	$-4,4298 \times 10^{-3}$	$-4,2355 \times 10^{-3}$	$-7,0333 \times 10^{-5}$	$-5,9187 \times 10^{-5}$
3	$-3,3829 \times 10^{-3}$	$-3,4768 \times 10^{-3}$	$-2,1219 \times 10^{-5}$	$-1,0490 \times 10^{-5}$
4	$-1,8308 \times 10^{-3}$	$-2,2592 \times 10^{-3}$	$2,1517 \times 10^{-5}$	$2,8849 \times 10^{-5}$
5	$9,3460 \times 10^{-5}$	$-6,8021 \times 10^{-4}$	$5,0604 \times 10^{-5}$	$4,6253 \times 10^{-5}$
6	$2,1809 \times 10^{-3}$	$1,0906 \times 10^{-3}$	$5,7399 \times 10^{-5}$	$3,8385 \times 10^{-5}$
7	$4,1511 \times 10^{-3}$	$2,8187 \times 10^{-3}$	$3,6001 \times 10^{-5}$	$-6,5565 \times 10^{-7}$
8	$5,6288 \times 10^{-3}$	$4,1832 \times 10^{-3}$	$-9,3579 \times 10^{-6}$	$-6,5207 \times 10^{-5}$
9	$6,1525 \times 10^{-3}$	$4,7833 \times 10^{-3}$	$-6,5446 \times 10^{-5}$	$-1,3328 \times 10^{-4}$
0	$5,1685 \times 10^{-3}$	$4,1314 \times 10^{-3}$	$-9,9599 \times 10^{-5}$	$-1,6224 \times 10^{-4}$
1	$2,0245 \times 10^{-3}$	$1,6487 \times 10^{-3}$	$-5,7399 \times 10^{-5}$	$-8,3983 \times 10^{-5}$
2	$-4,0340 \times 10^{-3}$	$-3,3357 \times 10^{-3}$	$1,4693 \times 10^{-4}$	$2,0880 \times 10^{-4}$
∞	6.3095×10^{-3}	4.7833×10^{-3}	1.5742×10^{-3}	2.0880×10^{-4}
6	5.26027×10^{-3}	4.2254×10^{-3}	9.523×10^{-5}	9.140×10^{-5}

Quadro 3.1 - Tabela de pontos para a função erro de p_3 , p_4 , p_5 e p_6 .

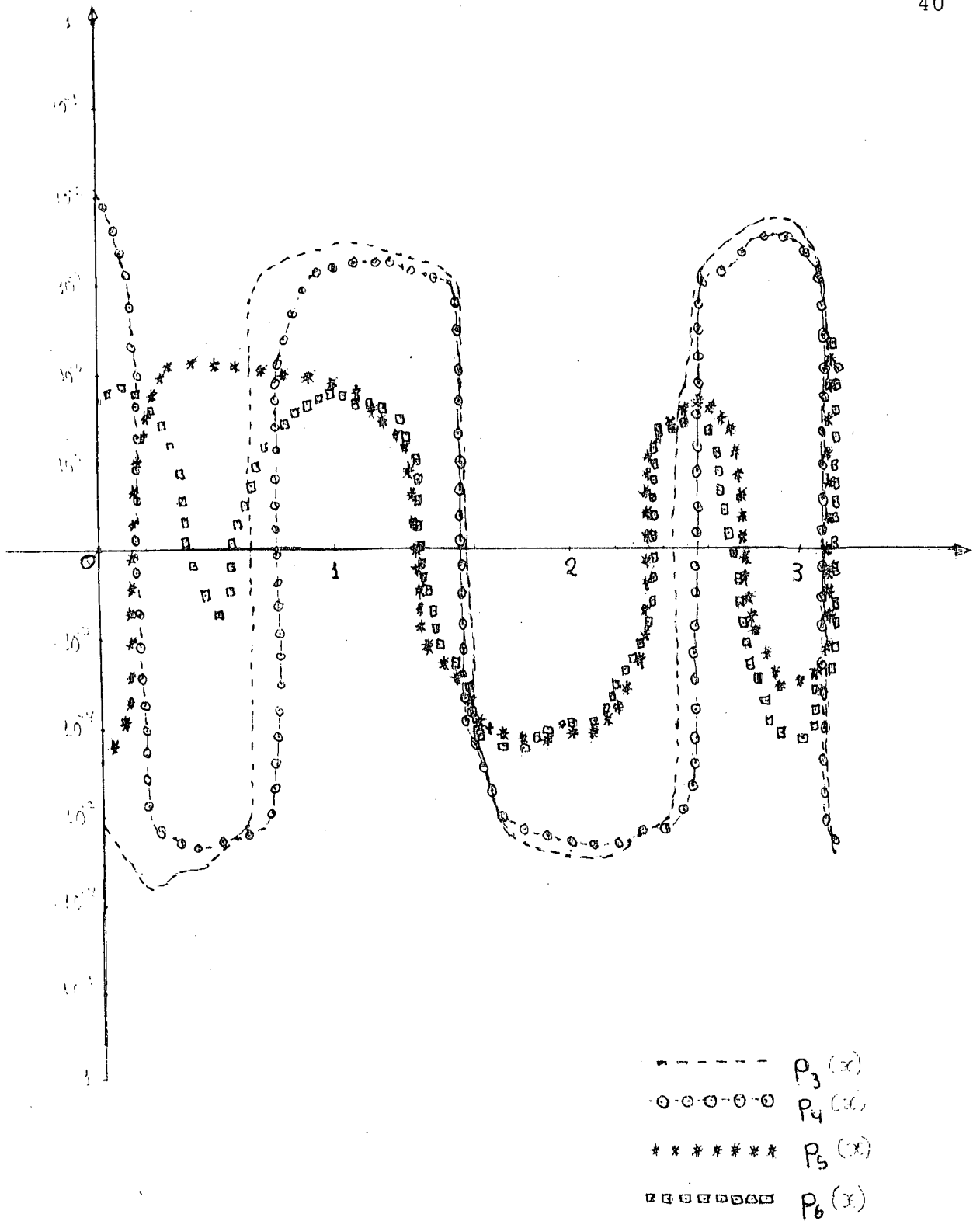


Figura 3.2 - Gráficos das funções erro para p_3, p_4, p_5 e p_6 .

Observação: Para melhor evidenciar as relações entre as diversas curvas representadas (fig. 3.2), as escalas utilizadas para os eixos das ordenadas e o das abscissas são diferentes.

Para termos uma idéia do erro cometido na aproximação, podemos considerar δ como uma estimativa do erro de aproximação. Concretamente, δ é uma cota superior para o erro de aproximação nos pontos considerados no conjunto discreto de cada problema de otimização (aproximação).

Como se observa no quadro dos erros, este permanece em torno de δ no intervalo considerado da aproximação.

Observa-se, pelo quadro 3.1, que em alguns casos pode-se melhorar a aproximação aumentando o grau do polinômio.

Outra questão é saber se aumentando o número de pontos de M diminui o erro de aproximação. Consideremos para isto um polinômio de grau 4 e façamos crescer o número de pontos. Consideramos todos os polinômios com os pontos de interpolação 1,6 e 3,14.

Seja $M_2 = \{ 0,1; 0,5; 1; 2,5; 1,6; 3,14 \}$, p_4^2 encontrado foi:

$$x_1 = 0,98976692$$

$$x_2 = 0,089377581$$

$$x_3 = -0,68976088$$

$$x_4 = 0,14859088$$

$$x_5 = -0,00718904$$

$$\delta = 0,00304$$

Seja $M_3 = \{ 0,1; 0,5; 1; 2; 2,5; 1,6; 3,14 \}$, p_4^3 encontrado foi:

$$x_1 = 0,98976692$$

$$x_2 = 0,089377581$$

$$x_3 = -0,68976088$$

$$x_4 = 0,14859088$$

$$x_5 = -0,000718904$$

$$\delta = 0,00304$$

Seja $M_4 = \{0,1; 0,5; 1; 2; 2,5; 3; 1,6; 3,14\}$
 p_4 encontrado foi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,98710526 \\ x_2 &= 0,10658453 \\ x_3 &= -0,71474779 \\ x_4 &= 0,16150930 \\ x_5 &= -0,00282719 \end{aligned} \quad \delta = 0,004222$$

Seja $M_5 = \{0,1; 0,5; 1; 1,3; 2; 2,5; 3; 1,6; 3,14\}$
 p_4 encontrado foi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,98710076 \\ x_2 &= 0,10661362 \\ x_3 &= -0,71479021 \\ x_4 &= 0,16153155 \\ x_5 &= -0,00283094 \end{aligned} \quad \delta = 0,0042245$$

Observa-se pelo quadro 3.2 que não houve uma diferença significativa na aproximação quando aumentado o nº de pontos.

Queremos agora, saber se aumentando o número de pontos de interpolação diminuirá o erro de aproximação. Consideremos para isto um polinômio de mesmo grau e mesmo conjunto discreto (M_2 fixo) e façamos crescer o número de interpolação.

Seja $M_6 = M_2$ com pontos de interpolação 1,6 e 3,14, p_4 encontrado foi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,98976692 \\ x_2 &= 0,08937758 \\ x_3 &= -0,68976088 \\ x_4 &= 0,14859088 \\ x_5 &= -0,00071890 \end{aligned} \quad \delta = 0,00304$$

x	$\cos x - p_4^2$	$\cos x - p_4^3$	$\cos x - p_4^4$	$\cos x - p_4^5$
0.1	3.0488×10^{-03}	3.0488×10^{-03}	4.2268×10^{-03}	4.2287×10^{-03}
0.2	-1.1722×10^{-03}	-1.1722×10^{-03}	-1.0529×10^{-03}	-1.0523×10^{-03}
0.3	-3.1707×10^{-03}	-3.1707×10^{-03}	-3.7541×10^{-03}	-3.7547×10^{-03}
0.4	-3.5861×10^{-03}	-3.5861×10^{-03}	-4.5820×10^{-03}	-4.5842×10^{-03}
0.5	-2.9614×10^{-03}	-2.9614×10^{-03}	-4.1391×10^{-03}	-4.1416×10^{-03}
0.6	-1.7460×10^{-03}	-1.7460×10^{-03}	-2.9306×10^{-03}	-2.9321×10^{-03}
0.7	-2.9993×10^{-04}	-2.9993×10^{-04}	-1.3644×10^{-03}	-1.3655×10^{-03}
0.8	1.1009×10^{-03}	1.1009×10^{-03}	2.3824×10^{-04}	2.3645×10^{-04}
0.9	2.2586×10^{-03}	2.2586×10^{-03}	1.6397×10^{-03}	1.6384×10^{-03}
1.0	3.0468×10^{-03}	3.0468×10^{-03}	2.6790×10^{-03}	2.6782×10^{-03}
1.1	3.4032×10^{-03}	3.4032×10^{-03}	3.2629×10^{-03}	3.2634×10^{-03}
1.2	3.3195×10^{-03}	3.3195×10^{-03}	3.3612×10^{-03}	3.3619×10^{-03}
1.3	2.8360×10^{-03}	2.8360×10^{-03}	2.9958×10^{-03}	2.9957×10^{-03}
1.4	2.0313×10^{-03}	2.0313×10^{-03}	2.2283×10^{-03}	2.2282×10^{-03}
1.5	1.0117×10^{-03}	1.0117×10^{-03}	1.1567×10^{-03}	1.1567×10^{-03}
1.6	-9.9342×10^{-05}	-9.9342×10^{-05}	-1.0043×10^{-04}	-1.0042×10^{-04}
1.7	-1.1674×10^{-03}	-1.1674×10^{-03}	-1.4051×10^{-03}	-1.4050×10^{-03}
1.8	-2.0594×10^{-03}	-2.0594×10^{-03}	-2.6200×10^{-03}	-2.6211×10^{-03}
1.9	-2.6525×10^{-03}	-2.6525×10^{-03}	-3.6138×10^{-03}	-3.6145×10^{-03}
2.0	-2.8499×10^{-03}	-2.8499×10^{-03}	-4.2688×10^{-03}	-4.2717×10^{-03}
2.1	-2.5791×10^{-03}	-2.5791×10^{-03}	-4.4951×10^{-03}	-4.4985×10^{-03}
2.2	-1.8112×10^{-03}	-1.8112×10^{-03}	-4.2355×10^{-03}	-4.2383×10^{-03}
2.3	-5.6279×10^{-04}	-5.6279×10^{-04}	-3.4768×10^{-03}	-3.4806×10^{-03}
2.4	1.0875×10^{-03}	1.0875×10^{-03}	-2.2592×10^{-03}	-2.2635×10^{-03}
2.5	3.0015×10^{-03}	3.0015×10^{-03}	-6.8027×10^{-04}	-6.8641×10^{-04}
2.6	4.9657×10^{-03}	4.9657×10^{-03}	1.0905×10^{-03}	1.0864×10^{-03}
2.7	6.6910×10^{-03}	6.6910×10^{-03}	2.8186×10^{-03}	2.8157×10^{-03}
2.8	7.8006×10^{-03}	7.8006×10^{-03}	4.1832×10^{-03}	4.1800×10^{-03}
2.9	7.8335×10^{-03}	7.8335×10^{-03}	4.7833×10^{-03}	4.7814×10^{-03}
3.0	6.2345×10^{-03}	6.2345×10^{-03}	4.1313×10^{-03}	4.1317×10^{-03}
3.1	2.3516×10^{-03}	2.3516×10^{-03}	1.6487×10^{-03}	1.6544×10^{-03}
3.2	-4.5610×10^{-03}	-4.5610×10^{-03}	-3.3358×10^{-03}	-3.3270×10^{-03}

$\ \cdot \ _{\infty}$	7.8335×10^{-3}	7.8335×10^{-3}	4.7833×10^{-3}	4.7814×10^{-3}
δ	3.04×10^{-3}	3.04×10^{-3}	4.222×10^{-3}	4.224×10^{-3}

Quadro 3.2 - Tabela de pontos para a função erro de p_4^2 , p_4^3 , p_4^4 e p_4^5 .

Seja $M_7 = M_2$ com pontos de interpolação 1,6, 3,14 e 0,1, p_4^7 encontrado foi:

$$x_1 = 0,99395076$$

$$x_2 = 0,07681243$$

$$x_3 = -0,67758439 \quad \delta = 0,00335$$

$$x_4 = 0,14384411$$

$$x_5 = -0,00007936$$

Seja $M_8 = M_2$ com pontos de interpolação 1,6, 3,14, 0,1 e 1 p_4^8 encontrado foi:

$$x_1 = 0,99237017$$

$$x_2 = 0,09423097$$

$$x_3 = -0,69413966 \quad \delta = 0,00687$$

$$x_4 = 0,14815946$$

$$x_5 = -0,00032094$$

Observamos, através do quadro 3.3, que quanto maior o número de pontos de interpolação maior é o erro de aproximação (com M_2 fixo e grau 4 fixo).

x	$\cos x - p_4^6$	$\cos x - p_4^7$	$\cos x - p_4^8$
0.1	3.0488×10^{-03}	4.4703×10^{-06}	4.5896×10^{-06}
0.2	-1.1722×10^{-03}	-3.2932×10^{-03}	-4.5686×10^{-03}
0.3	-3.1707×10^{-03}	-4.5585×10^{-03}	-6.8280×10^{-03}
0.4	-3.5861×10^{-03}	-4.4048×10^{-03}	-7.4124×10^{-03}
0.5	-2.9614×10^{-03}	-3.3531×10^{-03}	-6.8673×10^{-03}
0.6	-1.7460×10^{-03}	-1.8321×10^{-03}	-5.6432×10^{-03}
0.7	-2.9993×10^{-04}	-1.7983×10^{-04}	-4.1024×10^{-03}
0.8	1.1009×10^{-03}	1.3452×10^{-03}	-2.5247×10^{-03}
0.9	2.2586×10^{-03}	2.5613×10^{-03}	-1.1125×10^{-03}
1.0	3.0468×10^{-03}	3.3593×10^{-03}	3.1590×10^{-06}
1.1	3.4032×10^{-03}	3.6891×10^{-03}	7.5090×10^{-04}
1.2	3.3195×10^{-03}	3.5554×10^{-03}	1.1176×10^{-03}
1.3	2.8360×10^{-03}	3.0104×10^{-03}	1.1347×10^{-03}
1.4	2.0313×10^{-03}	2.1404×10^{-03}	8.6993×10^{-04}
1.5	1.0117×10^{-03}	1.0607×10^{-03}	4.2063×10^{-04}
1.6	-9.9342×10^{-05}	-9.9201×10^{-05}	-9.9178×10^{-05}
1.7	-1.1674×10^{-03}	-1.2012×10^{-03}	-5.7012×10^{-04}
1.8	-2.0594×10^{-03}	-2.1082×10^{-03}	-8.7237×10^{-04}
1.9	-2.6525×10^{-03}	-2.6971×10^{-03}	-8.9699×10^{-04}
2.0	-2.8499×10^{-03}	-2.8678×10^{-03}	-5.6076×10^{-04}
2.1	-2.5791×10^{-03}	-2.5516×10^{-03}	1.9175×10^{-04}
2.2	-1.8112×10^{-03}	-1.7248×10^{-03}	1.3738×10^{-03}
2.3	-5.6279×10^{-04}	-4.0388×10^{-04}	2.9472×10^{-03}
2.4	1.0875×10^{-03}	1.3247×10^{-03}	4.8185×10^{-03}
2.5	3.0015×10^{-03}	3.3126×10^{-03}	6.8272×10^{-03}
2.6	4.9657×10^{-03}	5.3411×10^{-03}	8.7410×10^{-03}
2.7	6.6910×10^{-03}	7.1098×10^{-03}	1.0248×10^{-02}
2.8	7.8006×10^{-03}	8.2264×10^{-03}	1.0949×10^{-02}
2.9	7.8335×10^{-03}	8.2197×10^{-03}	1.0357×10^{-02}
3.0	6.2345×10^{-03}	6.5154×10^{-03}	7.8933×10^{-03}
3.1	2.3516×10^{-03}	2.4517×10^{-03}	2.8837×10^{-03}
3.2	-4.5610×10^{-03}	-4.7429×10^{-03}	-5.4482×10^{-03}
$\ \cdot \ _{\infty}$	7.8335×10^{-03}	8.2264×10^{-03}	1.0949×10^{-02}
δ	3.04×10^{-03}	3.35×10^{-03}	6.87×10^{-03}

Quadro 3.3 - Tabela de pontos para a função erro de p_4^6 , p_4^7 e p_4^8 .

Relação entre $\|\cdot\|_\infty$ e δ

A diferença entre $\|\cdot\|_\infty$ e δ surge quando passamos a fazer uma discretização do intervalo de aproximação, isto é, da passagem do problema de aproximação original para o PPL com finitas restrições.

Tudo leva a crer que, à medida que aumenta o nº de pontos da discretização, $\|\cdot\|_\infty$ e δ convergem para o mesmo valor (observe a razão entre $\|\cdot\|_\infty$ e δ na tabela da pág. 43). Esta conjectura, no entanto, deve ser estudada mais a fundo. A dificuldade para se verificar isto com um grande nº de pontos, é que a certa altura aumentando o nº de pontos da discretização, δ não se altera e com isto o problema começa a crescer de dimensões sem grandes alterações na relação $\|\cdot\|_\infty$ e δ .

3.5 - Conclusões

Observando o exemplo acima chegamos a algumas conclusões, que são:

- 1 - Dado um número de pontos (isto é, M fixo) dentro de um intervalo, o melhor polinômio (que melhor aproxima uma dada função) é o de grau $n-2$, onde $n=n^\circ$ de pontos. Isto, no entanto, não é verdadeiro sempre, porque a solução do problema depende dos pontos escolhidos.
- 2 - Deve-se procurar ter o menor nº possível de pontos de interpolação, pois quanto maior o nº desses pontos, menor será o conjunto viável, restringindo a obtenção de uma solução melhor.
- 3 - δ é uma estimativa para o erro de aproximação.

C A P Í T U L O I V

Neste capítulo faremos uso do método descrito no capítulo anterior para resolver vários problemas na Teoria de Aproximação, tais como: cálculo de integrais, aproximação polinomial de funções e ajustamento de curva. Consideramos ainda importante a aproximação de uma função definida em \mathbb{R}^n , i.e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de que também apresentamos um exemplo.

Fazemos aqui uma ressalva: os métodos que aqui são comparados não são oriundos do problema de aproximação (3.2), isto proque existem métodos diferentes para aproximar funções por polinômios, cada qual, no entanto, visando objetivos diferentes. Tentaremos verificar nos exemplos a serem feitos neste capítulo que realmente o método de aproximação uniforme de funções via programação linear (3.4) comparado com outros métodos de aproximação que não sejam oriundos de (3.2), nos dá a melhor aproximação segundo a norma do máximo.

Destacamos desde já a importância deste método, pois permite resolver inúmeros problemas sem alterações para a aplicabilidade.

Neste capítulo serão considerados os seguintes pontos:

1 - As comparações com outros métodos serão sempre feitas em termos do erro de aproximação.

2 - Os dados serão considerados exatos, as funções consideradas não poderão apresentar picos entre os dados, i.e não poderá acontecer o que esta ilustrado abaixo.

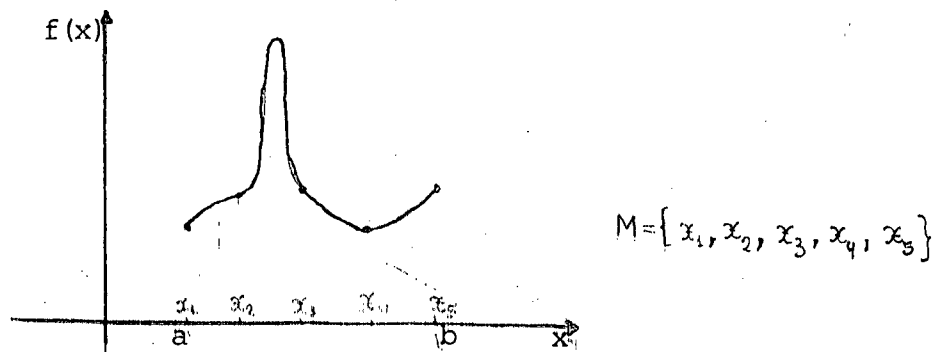


Figura 4.1 - Exemplo gráfico de uma função com um pico entre dois pontos da discretização do intervalo de aproximação $[a, b]$.

4.1 - Comparação com o Polinômio de Legendre para a função e^x no intervalo $[-1, 1]$.

4.1.1 - Aproximação Polinomial de Legendre

Definiremos os Polinômios de Legendre como

segue:

$$p_0 = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)$$

⋮

⋮

⋮

$$p_{n+1}(x) = ((2n+1)/(n+1))xp_n(x) - (n/(n+1))p_{n-1}(x),$$

onde

$$\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n. \\ 2/(2n+1), & m = n. \end{cases}$$

A aproximação polinomial de grau n de $f(x)$ no intervalo $(-1, 1)$, é definida por:

$$y(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x), \quad -1 < x < 1$$

onde:

$$a_k = ((2k+1)/2) \int_{-1}^1 f(x) p_k(x) dx.$$

Exemplo:

Queremos encontrar a aproximação polinomial de Legendre de grau 5 da função $f(x) = e^x$, $x \in (-1, 1)$.

Os polinômios de Legendre até o grau 5 são:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 & p_4(x) &= (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ p_1(x) &= x & p_5(x) &= (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ p_2(x) &= (1/2)(3x^2 - 1) \\ p_3(x) &= (1/2)(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

Os a_k ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$) encontrados são:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1,1752012 & a_4 &= -1,9731456 \\ a_1 &= 1,1036383 & a_5 &= 0,0006867 \\ a_2 &= 1,8268159 \\ a_3 &= 0,0704513 \end{aligned}$$

E a aproximação polinomial de Legendre de grau 5 da função e^x é:

$$\begin{aligned} y(x) &= -0,4781363 + 0,9992489x + 10,13952x^2 + 0,170119x^3 - \\ &\quad - 8,632512x^4 + 0,00540776x^5. \end{aligned}$$

4.1.2 - Aproximação Uniforme da função e^x .

Vamos encontrar a aproximação uniforme para e^x no intervalo $[-1,1]$.

$$\text{Seja } M = \{-1; -0,7; -0,4; -0,1; 0,3; 0,7; 1\}$$

$$M_a = \{-1; -0,1; 1\}$$

$$M_b = \{-0,7; -0,4; 0,3; 0,7\}$$

Chegamos ao seguinte resultado para um polinômio de grau 5:

$$x_1 = 0,99999514$$

$$x_5 = 0,043622836$$

$$x_2 = 0,99997334$$

$$x_6 = 0,0085794078$$

$$x_3 = 0,49945702$$

$$x_4 = 0,16665226$$

$$\delta = 3,7924 \cdot 10^{-5}$$

4.1.3 - Comparação

Faremos a seguir uma comparação da aproximação polinomial de Legendre com a aproximação uniforme para a função e^x no intervalo $[-1,1]$.

Para isto consideraremos a função erro e polinômios de mesmo grau.

x	$e^x - y$	$e^x - p_5$
-1	0,221974	-0,000009
-0,9	-0,63798	-0,000074
-0,8	-1,1377	-0,000070
-0,7	-1,1622	-0,000032
-0,6	-0,86779	0,000006
-0,5	-0,38962	0,000031
-0,4	0,15777	0,000038
-0,3	0,68070	0,000031
-0,2	1,1063	0,000018
-0,1	1,3825	0,000007
0	1,4781	0,000004
0,1	1,3827	0,000014
0,2	1,1066	0,000031
0,3	0,68098	0,000049
0,4	0,15799	0,000060
0,5	-0,38955	0,000052
0,6	-0,86791	0,000020
0,7	-1,1625	-0,000032
0,8	-1,1380	-0,000087
0,9	-0,63801	-0,000102
1,0	0,51464	0,000004
$\ \cdot \ _{\infty}$	1,4781	-0,000102
δ	-	0,000037924

Quadro 4.1 - Tabela de pontos para as funções erro de y e p_5 .

4.2 - Comparação com o Método dos Mínimos Quadrados.

4.2.1 - O Método dos Mínimos Quadrados.

Seja o problema da determinação do polinômio de grau m

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (4.1)$$

que "melhor" represente a função $y = f(x)$ conhecida através da tabela de pontos (com n pontos).

No método dos Mínimos Quadrados os coeficientes a_i da equação (4.1) são calculados de modo que seja mínima a soma dos quadrados dos desvios

$$d_k = \phi(x_k) - f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Isto significa que os coeficientes a_i minimizam a função

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n [a_0 + a_1x_k + \dots + a_mx_k^m - f(x_k)]^2$$

e, portanto, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^n 2[a_0 + a_1x_k + \dots + a_mx_k^m - f(x_k)] = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^n 2x_k[a_0 + a_1x_k + \dots + a_mx_k^m - f(x_k)] = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial Q}{\partial a_m} = \sum_{k=0}^n 2x_k^m [a_0 + a_1x_k + \dots + a_mx_k^m - f(x_k)] = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

O sistema (4.2) pode ser escrito do modo

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^m\right)a_m = \sum_{k=0}^n f(x_k) \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_1 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{m+1}\right)a_m = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k) \\ \vdots \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k^m\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{m+1}\right)a_1 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{2m}\right)a_m = \sum_{k=0}^n x_k^m f(x_k) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

A solução dos sistema de $(m+1)$ equações algébricas lineares (4.3) conduz aos valores de a_0, a_1, \dots, a_m requeridos.

O significado do Método dos Mínimos Quadrados pode ser melhor compreendido através da seguinte figura.

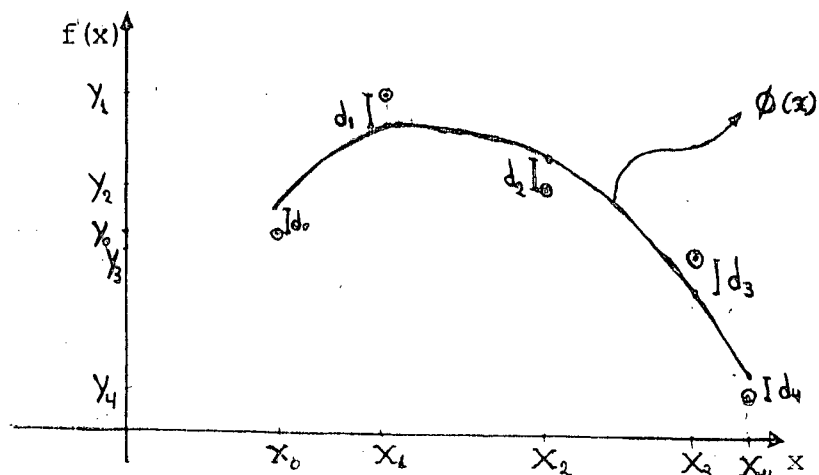


Figura 4.2 - Uma vez escolhido o grau do polinômio $\phi(x)$, seus coeficientes são determinados de modo que seja míni-

$$\text{mo } \sum_{k=0}^n d_k^2.$$

4.2.2 - Comparação

Exemplo:

Façamos a aproximação da função $\cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ por um polinômio de grau 5 pelo método dos mínimos quadrados, considerando o mesmo conjunto de pontos da aproximação pelo método da aproximação uniforme via programação linear. Foi usado um programa no computador que realiza a aproximação pelo Mét. dos Mínimos Quadrados.

Conseguimos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,0003625 & x_6 &= -0,0078567 \\ x_2 &= -0,0051786 \\ x_3 &= -0,4824649 \\ x_4 &= -0,0260206 \\ x_5 &= 0,0614582 \end{aligned}$$

A tabela de comparação entre os dois métodos, através do erro de aproximação, é a seguinte:

x	Erro de p_5 pelo Met. Mín. Quadr.	Erro de p_5 pelo Met. Aprox. Unif.
0,1	$4,3511 \times 10^{-6}$	$-9,1195 \times 10^{-5}$
0,2	$1,5104 \times 10^{-4}$	$6,0022 \times 10^{-5}$
0,3	$1,7345 \times 10^{-4}$	$1,1486 \times 10^{-4}$
0,4	$1,3691 \times 10^{-4}$	$1,2350 \times 10^{-4}$
0,5	$8,2731 \times 10^{-5}$	$1,1611 \times 10^{-4}$
0,6	$3,4153 \times 10^{-5}$	$1,0771 \times 10^{-4}$
0,7	$2,0862 \times 10^{-6}$	$1,0365 \times 10^{-4}$
0,8	$-1,1444 \times 10^{-5}$	$1,0318 \times 10^{-4}$
0,9	$-9,4771 \times 10^{-6}$	$1,0252 \times 10^{-4}$
1,0	$2,5630 \times 10^{-6}$	$9,7275 \times 10^{-5}$
1,1	$1,8239 \times 10^{-5}$	$8,3506 \times 10^{-5}$
1,2	$3,2604 \times 10^{-5}$	$5,9783 \times 10^{-5}$
1,3	$4,1962 \times 10^{-5}$	$2,6345 \times 10^{-5}$
1,4	$4,3690 \times 10^{-5}$	$-1,4305 \times 10^{-5}$

1,5	$3,7372 \times 10^{-5}$	$-5,8532 \times 10^{-5}$
1,6	$2,5094 \times 10^{-5}$	$-9,9659 \times 10^{-5}$
1,7	$7,7486 \times 10^{-6}$	$-1,3322 \times 10^{-4}$
1,8	$-1,1146 \times 10^{-5}$	$-1,5402 \times 10^{-4}$
1,9	$-2,9922 \times 10^{-5}$	$-1,5742 \times 10^{-4}$
2,0	$-4,5657 \times 10^{-5}$	$-1,4263 \times 10^{-4}$
2,1	$-5,6565 \times 10^{-5}$	$-1,1390 \times 10^{-4}$
2,2	$-6,3181 \times 10^{-5}$	$-7,0333 \times 10^{-5}$
2,3	$-6,5088 \times 10^{-5}$	$-2,1219 \times 10^{-5}$
2,4	$-5,7042 \times 10^{-5}$	$2,1517 \times 10^{-5}$
2,5	$-3,7074 \times 10^{-5}$	$5,0604 \times 10^{-5}$
2,6	$5,6624 \times 10^{-6}$	$5,7399 \times 10^{-5}$
2,7	$8,8453 \times 10^{-5}$	$3,6001 \times 10^{-5}$
2,8	$2,4432 \times 10^{-4}$	$-9,3579 \times 10^{-6}$
2,9	$5,1916 \times 10^{-4}$	$-6,5446 \times 10^{-5}$
3,0	$9,8377 \times 10^{-4}$	$-9,9599 \times 10^{-5}$
3,1	$1,7336 \times 10^{-3}$	$-5,7399 \times 10^{-5}$
3,2	$2,9069 \times 10^{-3}$	$1,4693 \times 10^{-4}$
$\ \cdot \ _{\infty}$	$2,9069 \times 10^{-3}$	$1,5742 \times 10^{-4}$
δ	-	0,00009523

4.3 - Ajustamento de Curva

Problema : encontrar a , b e c da equação abaixo:

$$\frac{1}{T} = a + b(\text{Ln } R) + c(\text{Ln } R)^3,$$

onde T = temperatura e R = resistência.

Obs.: No desenvolvimento desta dissertação fomos solicitados a resolver este problema de aproximação que é um problema enfrentado pelos físicos para calibrar um termistor. O objetivo é encontrar os valores de a , b e c usando algum método de aproximação.

Alguns valores da tabela de temperatura e resistência estão abaixo:

Temperatura $^{\circ}\text{C}$	Resistência Ω
40,470	4,830
41,203	4,683
43,280	4,287
45,001	3,985
45,954	3,827
50,000	3,241
55,004	2,646
60,505	2,131
65,008	1,791
66,000	1,730
67,000	1,665
68,000	1,603
69,000	1,540
70,000	1,485
75,007	1,237

Fazendo $y = \frac{1}{T}$ e $x = \text{Ln } R$, temos o seguinte polinômio:

$y = a + bx + cx^3$, o PPL correspondente é o seguinte:

Min δ

$$\begin{aligned} \text{s.a } & a + bx_i + cx_i^3 + \delta \geq Y_i \\ & -a - bx_i - cx_i^3 + \delta \geq -Y_i \\ & a + bx_j + cx_j^3 = Y_j \end{aligned}$$

$x_i \in M_a$, $x_j \in M_b$, y_i e y_j são os y correspondentes a x_i e x_j , onde $M_a = \{\text{Ln } 4,830; \text{Ln } 3,985; \text{Ln } 2,646; \text{Ln } 2,131; \text{Ln } 1,791; \text{Ln } 1,237\}$.

e

$$M_b = \{\text{Ln } 3,241; \text{Ln } 1,485\}.$$

A solução encontrada foi:

$$a = 0,012261251$$

$$b = 0,0049317274$$

$$c = 0,0011932736$$

$$\delta = 0,00002105 = 2,105 \times 10^{-5}$$

Comparando com os outros dados colhidos de resistência e temperatura, temos o seguinte quadro:

Resistência	Ln R	Erro em módulo = $ p_3(\text{Ln R}) - 1/T $
4,830	1,57484	$2,0768 \times 10^{-5}$
4,683	1,54393	$3,2705 \times 10^{-6}$
4,287	1,45558	$1,446 \times 10^{-5}$
3,985	1,38253	$1,2517 \times 10^{-5}$
3,827	1,34208	$4,2891 \times 10^{-6}$
3,241	1,17588	$2,8979 \times 10^{-7}$
2,646	0,97304	$2,0786 \times 10^{-5}$
2,131	0,75659	$1,0757 \times 10^{-5}$
1,791	0,58277	$8,59403 \times 10^{-6}$
1,730	0,54812	$1,0853 \times 10^{-5}$
1,665	0,50982	$1,359 \times 10^{-5}$
1,603	0,47187	$8,6874 \times 10^{-6}$
1,540	0,43178	$3,3398 \times 10^{-6}$
1,485	0,39541	$5,0094 \times 10^{-6}$
1,237	0,21268	$1,04 \times 10^{-5}$
$\ \cdot \ _{\infty}$	0,97304	$2,0786 \times 10^{-5}$
δ	-	$2,105 \times 10^{-5}$

Observe que aproximamos por um polinômio do 3º grau no qual o coeficiente da 2ª potência é zero, sem que houvesse modificação na sua aplicação.

4.4 - Aproximação de funções não diferenciáveis.

Vamos aproximar funções não diferenciáveis por polinômios (um polinômio, como se sabe, é diferenciável).

Exemplo:

Consideremos as funções abaixo:

$$f_1(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 4, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{se } x \leq 2 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Queremos aproximar estas funções no intervalo $[0,4]$ por um polinômio de grau 5.

Seja $M = \{0, 1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$. Com 2 e 3,5 como pontos de interpolação.

Estas funções não são diferenciáveis no ponto $(2,0)$ e seus gráficos são ilustrados abaixo:

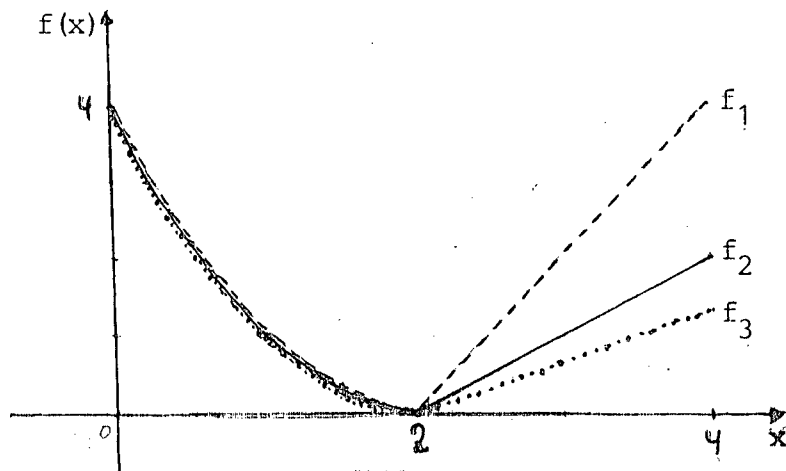


Figura 4.3 - Gráficos das funções f_1 , f_2 e f_3 no intervalo $[0,4]$.

Teremos então o PPL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \delta \\ \text{s.a} \quad \sum_{j=1}^6 t_i^{j-1} x_j + \delta \geq f(t_i) \\ \sum_{j=1}^6 -t_i^{j-1} x_j + \delta \leq -f(t_i), \quad \forall t_i \in M_a \\ \sum_{j=1}^6 t_k^{j-1} x_j = f(t_k), \quad \forall t_k \in M_b \end{array} \right.$$

Resolvendo este problema para cada uma das funções f_1, f_2 e f_3 , obtivemos os seguintes coeficientes:

p_5 para f_1 é:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3,444646 \\ x_2 &= -1,765506 \times 10^{-1} \\ x_3 &= -5,067260 \\ x_4 &= 3,514522 \\ x_5 &= -8,094371 \times 10^{-1} & \delta &= 2,302468 \times 10^{-1} \\ x_6 &= 6,288470 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

p_5 para f_2 é:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3,709947 \\ x_2 &= -1,917295 \\ x_3 &= -2,509469 \\ x_4 &= 2,191364 \\ x_5 &= -5,528798 \times 10^{-1} & \delta &= 1,147406 \times 10^{-1} \\ x_6 &= 4,617767 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

p_5 para f_3 é:

$$x_1 = 3,798380$$

$$x_2 = -2,497546$$

$$x_3 = -1,656867$$

$$x_4 = 1,750308$$

$$x_5 = -4,673599 \times 10^{-1}$$

$$\delta = 7,623842 \times 10^{-2}$$

$$x_6 = 4,060858 \times 10^{-2}$$

Chamaremos p_5 que aproxima f_1 de p_5^1 , o que aproxima f_2 de p_5^2 e o que aproxima f_3 de p_5^3 .

A tabela dos erros de cada p_5 esta abaixo

x	$f_1 - p_5^1$	$f_2 - p_5^2$	$f_3 - p_5^3$
0,1	$2,3025 \times 10^{-1}$	$1,1474 \times 10^{-1}$	$7,6238 \times 10^{-2}$
0,2	$6,5117 \times 10^{-3}$	$-2,7704 \times 10^{-3}$	$-5,8641 \times 10^{-3}$
0,3	$-1,3412 \times 10^{-1}$	$-7,3705 \times 10^{-2}$	$-5,3569 \times 10^{-2}$
0,4	$-2,0812 \times 10^{-1}$	$-1,0808 \times 10^{-1}$	$-7,4736 \times 10^{-2}$
0,5	$-2,3025 \times 10^{-1}$	$-1,1474 \times 10^{-1}$	$-7,6240 \times 10^{-2}$
0,6	$-2,1363 \times 10^{-1}$	$-1,0143 \times 10^{-1}$	$-6,4035 \times 10^{-2}$
0,7	$-1,6981 \times 10^{-1}$	$-7,4854 \times 10^{-2}$	$-4,3201 \times 10^{-2}$
0,8	$-1,0886 \times 10^{-1}$	$-4,0701 \times 10^{-2}$	$-1,7983 \times 10^{-2}$
0,9	$-3,9417 \times 10^{-2}$	$-3,7394 \times 10^{-3}$	$8,1539 \times 10^{-3}$
1,0	$3,1195 \times 10^{-2}$	$3,2156 \times 10^{-2}$	$3,2477 \times 10^{-2}$
1,1	$9,6936 \times 10^{-2}$	$6,3932 \times 10^{-2}$	$5,2931 \times 10^{-2}$
1,2	$1,5294 \times 10^{-1}$	$8,9310 \times 10^{-2}$	$6,8102 \times 10^{-2}$
1,3	$1,9548 \times 10^{-1}$	$1,0674 \times 10^{-1}$	$7,7158 \times 10^{-2}$
1,4	$2,2183 \times 10^{-1}$	$1,1531 \times 10^{-1}$	$7,9804 \times 10^{-2}$
1,5	$2,3025 \times 10^{-1}$	$1,1474 \times 10^{-1}$	$7,6239 \times 10^{-2}$
1,6	$2,1987 \times 10^{-1}$	$1,0528 \times 10^{-1}$	$6,7090 \times 10^{-2}$
1,7	$1,9066 \times 10^{-1}$	$8,7698 \times 10^{-2}$	$5,3385 \times 10^{-2}$
1,8	$1,4328 \times 10^{-1}$	$6,3178 \times 10^{-2}$	$3,6488 \times 10^{-2}$
1,9	$7,9075 \times 10^{-2}$	$3,3312 \times 10^{-2}$	$1,8060 \times 10^{-2}$
2,0	$-5,7220 \times 10^{-6}$	$-1,9073 \times 10^{-6}$	$3,8147 \times 10^{-6}$

2,1	$9,8475 \times 10^{-2}$	$5,5436 \times 10^{-2}$	$4,1095 \times 10^{-2}$
2,2	$1,6737 \times 10^{-1}$	$9,2001 \times 10^{-2}$	$6,6883 \times 10^{-2}$
2,3	$2,0991 \times 10^{-1}$	$1,1228 \times 10^{-1}$	$7,9748 \times 10^{-2}$
2,4	$2,2962 \times 10^{-1}$	$1,1896 \times 10^{-1}$	$8,2076 \times 10^{-2}$
2,5	$2,3024 \times 10^{-1}$	$1,1473 \times 10^{-1}$	$7,6243 \times 10^{-2}$
2,6	$2,1557 \times 10^{-1}$	$1,0232 \times 10^{-1}$	$6,4628 \times 10^{-2}$
2,7	$1,8956 \times 10^{-1}$	$8,4453 \times 10^{-2}$	$4,9451 \times 10^{-2}$
2,8	$1,5607 \times 10^{-1}$	$6,3622 \times 10^{-2}$	$3,2834 \times 10^{-2}$
2,9	$1,1888 \times 10^{-1}$	$4,2225 \times 10^{-2}$	$1,6679 \times 10^{-2}$
3,0	$8,1661 \times 10^{-2}$	$2,2418 \times 10^{-2}$	$2,6674 \times 10^{-3}$
3,1	$4,7794 \times 10^{-2}$	$6,0692 \times 10^{-3}$	$-7,7944 \times 10^{-3}$
3,2	$2,0241 \times 10^{-2}$	$-5,2605 \times 10^{-3}$	$-1,3760 \times 10^{-2}$
3,3	$1,7490 \times 10^{-3}$	$-1,0425 \times 10^{-2}$	$-1,4472 \times 10^{-2}$
3,4	$-5,5561 \times 10^{-3}$	$-8,7671 \times 10^{-3}$	$-9,7990 \times 10^{-3}$
3,5	$1,5259 \times 10^{-5}$	$-3,0518 \times 10^{-5}$	$1,2398 \times 10^{-5}$
3,6	$1,9489 \times 10^{-2}$	$1,5451 \times 10^{-2}$	$1,4144 \times 10^{-2}$
3,7	$5,3139 \times 10^{-2}$	$3,6671 \times 10^{-2}$	$3,1250 \times 10^{-2}$
3,8	$1,0052 \times 10^{-1}$	$6,1994 \times 10^{-2}$	$4,9210 \times 10^{-2}$
3,9	$1,6029 \times 10^{-1}$	$8,9042 \times 10^{-2}$	$6,5355 \times 10^{-2}$
4,0	$2,3021 \times 10^{-1}$	$1,1469 \times 10^{-1}$	$7,6236 \times 10^{-2}$
$\ \cdot \ _{\infty}$	$2,3025 \times 10^{-1}$	$1,1896 \times 10^{-1}$	$8,2076 \times 10^{-2}$
δ	$2,3024 \times 10^{-1}$	$1,1474 \times 10^{-1}$	$7,6238 \times 10^{-2}$

A conclusão deste exemplo é que quanto maior a inclinação da reta f_i ($i=1,2,3$) no intervalo $[2,4]$ maior é o erro de aproximação. Em outras palavras, quanto maior for o salto da descontinuidade das derivadas à esquerda e à direita no ponto de não diferenciabilidade, maior será o erro da aproximação.

4.5 - Aproximação da Integral

Em lugar de efetuar a integração da função $f(x)$ sobre $[a,b]$, que pode ser difícil ou mesmo impossível, efetuaremos a integração de um polinômio que aproxima $f(x)$ em $[a,b]$.

Exemplo 1:

Vamos calcular o valor aproximado de $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ usando o polinômio de grau 3, encontrado no capítulo III da função $\cos x$:

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= 1,0012578 + 0,0547633x - 0,6614328x^2 + \\
 &\quad 0,1404513x^3 \\
 \int_0^{\pi} \cos x \, dx &\approx \int_0^{\pi} (1,0012578 + 0,0547633x - 0,6614328x^2 + \\
 &\quad 0,1404513x^3) \, dx = \\
 &= 1,0012578x + \frac{0,0547633x^2}{2} - \frac{0,6614328x^3}{3} + \\
 &\quad \frac{0,1404513x^4}{4} \Big|_0^{\pi} = \\
 &= 3,1455441 + 0,270246 - 6,8361895 + 3,4203084 = \\
 &= -0,000015
 \end{aligned}$$

Sabemos que o valor exato de $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ é zero. Logo, o erro cometido na aproximação é 0,000015. Observe que o erro de aproximação de $p_3(x)$ girava em torno de 10^{-3} .

O gráfico de $\cos x$ e $p_3(x)$ em $[0,\pi]$ está representado abaixo.

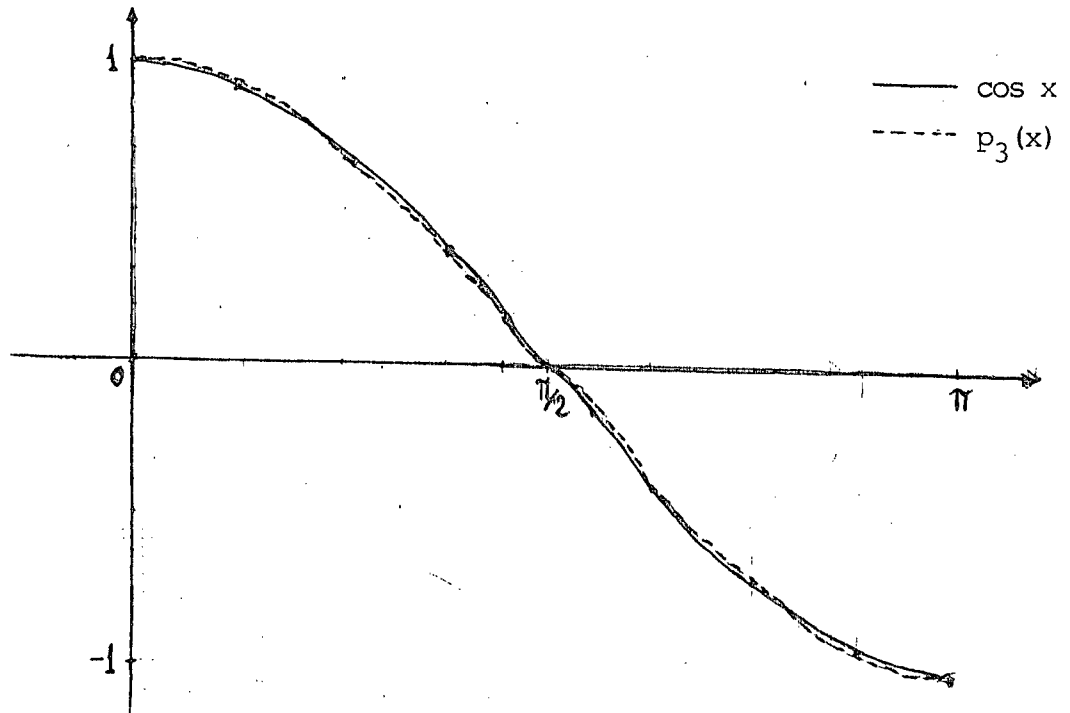


Figura 4.4 - Gráfico de $\cos x$ e $p_3(x)$ em $[0, \pi]$.

Exemplo 2:

Queremos encontrar o valor da integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+16x^2)} dx.$$

Seja $M = \{-1; -0,7; -0,5; -0,2; 0,1; 0,4; 0,7; 1\}$,

onde 0,1 é ponto de interpolação.

Para um polinômio do 2º grau encontramos os seguintes coeficientes:

$$c_1 = 0,0077014$$

$$c_2 = 0,0017833$$

$$c_3 = 0,07402275$$

$$\delta = 0,02468.$$

Assim, o valor aproximado da integral será:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1+16x^2)} dx \cong 0,0077014x + \frac{0,0017833x^2}{2} + \frac{0,07402275x^3}{3}$$

$$= 0,064751$$

Sabemos que o valor exato é 0,058025, logo o erro cometido foi 0,00672.

Podemos conseguir uma cota superior de aproximação da integral pela seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_g(x) dx \right\|_{\infty} = \left\| \int_a^b (f(x) - p_g(x)) dx \right\|_{\infty} \leq \\ & \leq \int_a^b \|f(x) - p_g(x)\|_{\infty} dx = \int_a^b \delta dx = \delta \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Logo, $\delta \cdot (b - a)$ é o erro máximo para a aproximação da integral.

4.6 - Aproximação de funções no R^n

4.6.1 - Estudo de funções do tipo $f: R^n \rightarrow R$

Definição:

Definimos um polinômio de grau g de $f: R^n \rightarrow R$

por:

$$p_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{g_1=0}^g \sum_{g_2=0}^g \dots \sum_{g_n=0}^g C_{g_1, g_2, \dots, g_n} x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n}$$

tal que $g_1 + g_2 + \dots + g_n \leq g$.

Obs.: Tal polinômio quando $n = 1$ se reduz a:

$$p(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \dots + C_{g+1}x^g.$$

EXEMPLO:

Seja $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Queremos aproximar esta função na região $[1, 3] \times [1, 3]$, pelo seguinte polinômio:

$$\begin{aligned} p(x, y) = & C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy + C_5x^2 + C_6y^2 + C_7xy^2 + \\ & C_8x^2y + C_9x^2y^2 + C_{10}x^3 + C_{11}y^3 + C_{12}xy^3 + C_{13}x^2y^3 + \\ & C_{14}x^3y^3 + C_{15}x^3y^2 + C_{16}x^3y^2 + C_{17}x^4 + C_{18}y^4 + \\ & C_{19}xy^4 + C_{20}x^2y^4 + C_{21}x^3y^4 + C_{22}x^4y^4 + C_{23}x^4y^3 + \\ & C_{24}x^4y^2 + C_{25}x^4y. \end{aligned}$$

Temos que calcular os 25 coeficientes da expressão acima e assim o nº de pontos na região $[1,3] \times [1,3]$ terá que ser $\geq 25+1$. Escolhemos tais pontos como sendo:

$$M_a = \{(1;1,5), (1;2,5), (1,5;1), (1,5;2), (1,5;3), \\ (2;1,5), (2;2,5), (2,5;1), (2,5;2), (2,5;3), (3;1,5) \\ (3;2,5), (1;2,2), (1;2,8)\}$$

$$M_b = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5;1,5), (1,5;2,5), (2,1), (2,2), \\ (2,3), (2,5;1,5), (2,5;2,5), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$M = M_a \cup M_b$$

O PPL correspondente será então

$$\text{Min } \delta$$

$$\text{s.a } C_1 + C_2 x_i + C_3 y_i + C_4 x_i y_i + C_5 x_i^2 + C_6 y_i^2 + C_7 x_i y_i^2 + \\ C_8 x_i^2 y_i + C_9 x_i^2 y_i^2 + C_{10} x_i^3 + C_{11} y_i^3 + C_{12} x_i y_i^3 + C_{13} x_i^2 y_i^3 + \\ C_{14} x_i^3 y_i^3 + C_{15} x_i^3 y_i^2 + C_{16} x_i^3 y_i^2 + C_{17} x_i^4 + C_{18} y_i^4 + \\ C_{19} x_i y_i^4 + C_{20} x_i^2 y_i^4 + C_{21} x_i^3 y_i^4 + C_{22} x_i^4 y_i^4 + C_{23} x_i^4 y_i^3 + \\ C_{24} x_i^4 y_i^2 + C_{25} x_i^4 y_i + \delta \geq \frac{x_i y_i}{x_i^2 + y_i^2}$$

$$-C_1 - C_2 x_i - C_3 y_i - \dots - C_{25} x_i^4 y_i + \delta \geq - \frac{x_i y_i}{x_i^2 + y_i^2}, \quad \forall (x_i, y_i) \in M_a$$

$$C_1 + C_2 x_j + C_3 y_j + \dots + C_{25} x_j^4 y_j = \frac{x_j y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \quad \forall (x_j, y_j) \in M_b$$

A resposta encontrada foi:

$C_1 = -3,8972949$	$C_9 = -0,37332983$	$C_{17} = -0,73977495$
$C_2 = 13,198063$	$C_{10} = 5,4426999$	$C_{18} = -0,04264501$
$C_3 = 2,4393695$	$C_{11} = -0,47643783$	$C_{19} = 0,05988285$
$C_4 = -9,3456885$	$C_{12} = 1,1874325$	$C_{20} = -0,00042078$
$C_5 = -13,718717$	$C_{13} = -1,0220454$	$C_{21} = -0,04438673$
$C_6 = 0,89154135$	$C_{14} = 0,55942241$	$C_{22} = 0,01239071$
$C_7 = -1,1130536$	$C_{15} = -4,7702183$	$C_{23} = -0,10479384$
$C_8 = 11,601921$	$C_{16} = 0,090007386$	$C_{24} = 0,02284197$
		$C_{25} = 0,64323386$
		$\delta = 0,00037917$

	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0	1.6689×10^{-6}	-1.1700×10^{-2}	-5.5931×10^{-3}	4.4014×10^{-3}	8.0369×10^{-3}	3.7670×10^{-5}	-1.9500×10^{-2}	-4.4537×10^{-2}	-6.2882×10^{-2}	-5.6335×10^{-2}	-1.8239×10^{-5}
2	1.9283×10^{-3}	-5.8355×10^{-3}	-4.9173×10^{-3}	-1.6609×10^{-3}	-8.6772×10^{-4}	-5.1985×10^{-3}	-1.4966×10^{-2}	-2.7551×10^{-2}	-3.7176×10^{-2}	-3.5026×10^{-2}	-8.8407×10^{-3}
4	9.7501×10^{-4}	-1.2923×10^{-3}	-1.6975×10^{-3}	-1.4322×10^{-3}	-1.4601×10^{-3}	-2.4189×10^{-3}	-4.7463×10^{-3}	-7.8821×10^{-3}	-1.0563×10^{-2}	-1.0522×10^{-2}	-4.2090×10^{-3}
6	3.9876×10^{-5}	2.4744×10^{-3}	2.2901×10^{-3}	1.2789×10^{-3}	7.4220×10^{-4}	1.3424×10^{-3}	3.0806×10^{-3}	5.4228×10^{-3}	7.4330×10^{-3}	7.8262×10^{-3}	5.1451×10^{-3}
8	3.4446×10^{-4}	4.9870×10^{-3}	5.5057×10^{-3}	3.9561×10^{-3}	2.4405×10^{-3}	2.4104×10^{-3}	4.2898×10^{-3}	7.7558×10^{-3}	1.1747×10^{-2}	1.4353×10^{-2}	1.3183×10^{-2}
0	2.0623×10^{-5}	5.1003×10^{-3}	6.4769×10^{-3}	5.2180×10^{-3}	2.6010×10^{-3}	-1.5259×10^{-5}	-1.6978×10^{-3}	-1.4523×10^{-3}	1.3226×10^{-3}	7.0459×10^{-3}	1.6073×10^{-2}
2	3.5518×10^{-4}	1.6685×10^{-3}	4.2898×10^{-3}	4.9562×10^{-3}	2.2249×10^{-3}	-3.8037×10^{-3}	-1.1780×10^{-2}	-1.8824×10^{-2}	-2.0889×10^{-2}	-1.2532×10^{-2}	1.2966×10^{-2}
4	4.1431×10^{-4}	-6.3674×10^{-3}	-1.4277×10^{-3}	4.3545×10^{-3}	4.3548×10^{-3}	-4.0006×10^{-3}	-1.9572×10^{-2}	-3.7155×10^{-2}	-4.7938×10^{-2}	-3.9314×10^{-2}	5.1388×10^{-3}
6	1.1325×10^{-5}	-1.9479×10^{-2}	-1.0049×10^{-2}	6.0614×10^{-3}	1.4203×10^{-2}	7.1970×10^{-3}	-1.5045×10^{-2}	-4.5192×10^{-2}	-6.8985×10^{-2}	-6.4999×10^{-2}	-3.7791×10^{-3}
8	4.2814×10^{-4}	-3.7496×10^{-2}	-2.0057×10^{-2}	1.4173×10^{-2}	3.9087×10^{-2}	4.0417×10^{-2}	1.5162×10^{-2}	-2.8008×10^{-2}	-6.9073×10^{-2}	-7.6996×10^{-2}	-8.2521×10^{-3}
0	4.9889×10^{-5}	-5.9659×10^{-2}	-2.8728×10^{-2}	3.4562×10^{-2}	8.8836×10^{-2}	1.0934×10^{-2}	8.7932×10^{-2}	3.3154×10^{-2}	-2.9917×10^{-2}	-6.0559×10^{-2}	1.9860×10^{-4}

$$\| \cdot \|_{\infty} = 8.88836 \times 10^{-2} \quad \delta = 3.79 \times 10^{-4}$$

Quadro 4.2 - Tabela de pontos para a função erro do polinômio do exemplo do parágrafo 4.6.1.

4.6.2 - Extensão para funções do tipo $f: R^n \rightarrow R^m$

Seja:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

onde $f_i: R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_n)$.

Assim, para resolver um problema de aproximação de uma função $f: R^n \rightarrow R^m$, reduzimos este problema a m problemas de aproximação de funções do tipo $f: R^n \rightarrow R$.

4.7 - CONCLUSÕES

1 - Uma das vantagens do método é a possibilidade de ser utilizado em vários problemas de aproximação sem alterações para a aplicabilidade.

2 - Obtemos sempre com a solução uma estimativa do erro que é representado por δ .

3 - É possível resolver problemas de aproximação onde são exigidos polinômios incompletos, semelhante ao que foi feito em 4.3.

4 - O Método de Aproximação Uniforme via Programação Linear se mostrou tão (ou mais) eficiente (em termos do erro de aproximação) com os que aqui foram comparados.

5 - No decorrer deste trabalho conseguiu-se fazer um programa para o computador que resolve o problema de aproximação pelo método de aproximação uniforme. O programa para ser implementado não exigirá conhecimento de quem o utilizar, facilitando o seu manuseio.

6 - A aproximação de uma função do tipo $f: R^n \rightarrow R$ é possível, mas como se viu quanto maior o n e o grau do polinômio mais coeficientes é necessário calcular, o número de coeficientes aumenta exponencialmente.

APÊNDICE

Veremos neste apêndice o programa que resolve um problema de aproximação usando o método de aproximação uniforme e como proceder para implementar tal programa.

Desenvolvemos um programa em que não é necessário entrar com os dados da matriz dos coeficientes das restrições. Será necessário apenas dar as informações sobre o polinômio desejado e os pontos da função.

Obs.: Os polinômios obtidos por este programa são completos, isto é, são da forma

$$p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

Como exemplo vamos ver como seriam os dados e de um polinômio de 3º grau que aproxime a função $\cos x$ em $[0, \pi]$, com os seguintes pontos:

$$f(0,5) = 0,8775$$

$$f(0,1) = 0,9950$$

$$f(1,0) = 0,5403$$

$$f(1,5) = 0,0707$$

$$f(2,0) = -0,4161$$

$$f(2,5) = -0,8011$$

$$f(3,0) = -0,9899$$

$$f(3,14) = -1,0$$

$$f(1,6) = -0,0291,$$

sendo 3,14 e 1,6 pontos de interpolação.

PROGRAMA

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```

C   M = NG + 2 ,   N = 2*ND+NPI ,   N1 = 2*ND
C   DIMENSIONAMENTO  A(N,M) , Y(N+1,N) , G(N) , YCOLO(N+1) , KNB(M+N1) , RS(N) ,
C                   ZF(M) , KIB(M+n1) , YROWO(N) , RPRIM(N) , RDUAL(M) , X(M) ,
C                   LI(N) , S(ND+NPI)
C   O PROGRAMA PRINCIPAL VISA FORMAR A MATRIZ DAS RESTRICÖES
C   DIMENSION A(16,05) , Y(17,16) , G(16) , YCOLO(17) , KNB(19) , RS(16) , ZF(05) ,
*   KIB(19) , YROWO(16) , RPRIM(16) , RDUAL(05) , X(05) , LI(16) , S(09)
  READ (5,17) (ND,NPI,NG)
  N2=ND+NPI
  READ (5,18) (S(I),I=1,N2)
  READ (5,9) (RS(I),I=1,N)
  READ (5,10) (ZF(I),I=1,M)
  IPRINT=2
  IERR=100
  INPUT=0
  EPI=0
  M=NG+2
  N=2*ND+NPI
  M1=M-1
  N1=2*ND
  IREINV=10
  I=1
25  A(I,1)=1
    A(I,M)=1
    A(I,2)=S(I)
    N4=NG+1
    DO 15 J=3,N4
15  A(I,J)=S(I)**(J-1)
    CONTINUE
    I=I+1
    IF(I.EQ.ND+1) GO TO 30
    GO TO 25
30  A(I,M)=1
    DO 35 J=1,N4
    N3=I-ND
    A(I;J)=-A(N3,J)
35  CONTINUE
    I=I+1
    IF(I.EQ.2*ND+1) GO TO 40
    GO TO 30
40  L=1
41  I1=ND+L
    A(I,1)=1
    A(I,M)=0
    A(I,2)=S(I1)
    DO 45 J=3,N4
    A(I;J)=S(I1)**(J-1)
45  CONTINUE
    IF (I.EQ.2*ND+NPI) GO TO 60
    I=I+1
    L=L+1
    GO TO 41
60  CONTINUE
17  FORMAT(3I5)
18  FORMAT(5F14.7)

```

```

7   FORMAT (7I4,F15.7)
9   FORMAT (7F10.7)
10  FORMAT (9F8.3)
C   SUBROTINA QUE EXECUTA O ALGORITMO SIMPLEX
    CALL SIMPLE(OPT,X,A,M,N,M1,N1,RS,ZF,Y,YCOLO,YROWO,G,LI,KNB,
*   KIB,RPRIM,RDUAL,IREINV,EPI,IPRINT,IERR,INPUT)
    STOP
    END

```

DADOS

7	2	3				
0.5		0.1		1.	1.5	2.
2.5		3.		3.14	1.6	
0.8775	0.9950	0.5403	0.0707	-0.4161	-0.8011	-0.9899
-0.8775	-0.9950	-0.5403	-0.0707	0.4161	0.8011	0.9899
-1.	-0.0291					
0.	0.	0.	0.	1.		

DADOS

ND	NPI	NG				
S(1)	S(2)	S(3)	S(4)	S(5)		
S(6)	S(7)	S(8)	S(9)			
RS(1)	RS(2)	RS(3)	RS(4)	RS(5)	RS(6)	RS(7)
-RS(1)	-RS(2)	-RS(3)	-RS(4)	-RS(5)	-RS(6)	-RS(7)
RS(8)	RS(9)					
0.	0.	0.	0.	1. (função objetivo)		

Onde:

ND=número de desigualdades.

NPI= " de igualdades.

NG=grau do polinômio.

S(I)=os pontos no eixo x da tabela dada.

RS(I)=os valores de f(x) na tabela de pontos.

ZF(I)=são os coeficientes da função objetivo

BIBLIOGRAFIA

- [1] KRABS, Werner, Optimization and Aproximation. John Wiley & Sons, 1978.
- [2] BREGALDA, Paulo F. e outros, Introdução à Programação Linear. Editora Campus Ltda, 1981.
- [3] RUDIN, Walter, Princípios de Análise Real.
- [4] MASSARANI, Giulio, Introdução ao Calculo Numérico. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1967.
- [5] FOULDS, L.R., Optimization Techniques An Introduction. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [6] ACTON, Forman S., Numerical Methods That Work. Harper & Row.