

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CAMPOS DE VETORES COMUTATIVOS SOBRE VARIEDADES  
DIFERENCIÁVIES BI-DIMENSIONAIS.

Nome: Enori Carelli.

Orientador: William Glenn Whitley, Ph. D.

Data: Florianópolis, 18 de outubro de 1985.

CAMPOS DE VETORES COMUTATIVOS EM VARIEDADES  
DIFERENCIÁVEIS BI-DIMENSIONAIS

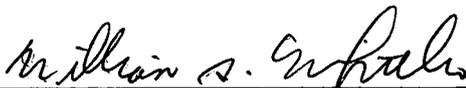
por

ENORI CARELLI

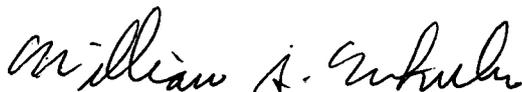
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE SANTA CATARINA.

  
Prof. William Glenn Whitley, Ph.D  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. William Glenn Whitley, Ph.D  
Orientador

  
Prof. Paul James Otterson, Ph.D

  
Prof. Andrzej Solecki, Ph.D

## AGRADECIMENTOS

A todos os que, de forma direta ou indireta, colaboraram na realização deste trabalho, especialmente ao professor William pela orientação e aos colegas de curso pela colaboração dispensada durante o período em que estivemos juntos.

## DEDICATÓRIA

A minha esposa Mariluci, pelo apoio e compreensão, durante a elaboração deste trabalho. A meus pais e irmãos, pela educação que me foi dada, espírito de colaboração e fraternidade que sempre marcou nossa convivência.

I N D I C E

INTRODUÇÃO .....	
CAPÍTULO I: GRUPO FUNDAMENTAL E ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO .....	01
CAPÍTULO II: GRUPOS DE HOMOLOGIA E TEOREMA DO PONTO FIXO DE LEFSCHETZ .....	20
CAPÍTULO III: VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E ESPAÇO TANGENTE .....	63
CAPÍTULO IV: GRUPOS DE LIE E AÇÕES DE UM GRUPO SOBRE UMA VARIEDADE .....	71
CAPÍTULO V: RECOBRIMENTO DUPLO ORIENTADO E VARIEDADES COM FRONTEIRAS .....	86
CAPÍTULO VI: SINGULARIDADES DE CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES BI-DIMENSIONAIS .....	96

## R E S U M O

Apresentamos um estudo de campos de vetores sobre superfícies, e, em particular, campos comutativos em superfícies compactas com característica de Euler diferente de zero,  $\chi(M) \neq 0$ . Para este estudo, utilizamos os fluxos associados aos campos. Os resultados principais são:

Teorema 6.16: Toda ação contínua do grupo aditivo  $\mathbb{R}^n$  sobre uma superfície compacta, com característica de Euler diferente de zero, tem um ponto fixo.

Teorema 6.17: Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  Campos de vetores de classe  $C^1$ , que comutam dois a dois, sobre uma superfície compacta com característica de Euler não nula. Então existe um ponto  $x \in M$ , tal que,  $X_1(x) = \dots = X_n(x) = 0$ .

## A B S T R A C T

We present a study of commutative vector fields on surfaces, with special attention on compact surfaces with non zero Euler characteristic. The results of this thesis are obtained by way of the flows associated with the fields. The principal results are:

Theorem 6.16: Every (continuous) action of the additive group  $\mathbb{R}^n$  on a compact 2-manifold  $M$ , with  $\chi(M) \neq 0$ , has a fixed point.

Theorem 6.17: Let  $X_1, \dots, X_n$  be pairwise commuting vector fields of class  $C^1$  on a compact 2-manifold  $M$ , with  $\chi(M) \neq 0$ . There exists a point  $x \in M$  such that  $X_1(x) = \dots = X_n(x) = 0$ .

GRUPO FUNDAMENTAL E ESPAÇOS DE RECOBRIMENTOS

Definição 1.1: Um caminho num espaço topológica  $X$  é uma função contínua  $f$  do intervalo  $[0,1]=I$  em  $X$ . O ponto  $f(0)$  é chamado ponto inicial de  $f$  e o ponto  $f(1)$  é chamado ponto final de  $f$ .

Lema 1.2: Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados (abertos) de  $X$ . Sejam  $f:A \longrightarrow Y$  e  $g:B \longrightarrow Y$  funções contínuas, tais que, para cada  $x \in A \cap B$ , temos  $f(x)=g(x)$ . Defina  $F:A \cup B \longrightarrow Y$  por

$$F(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ g(x); & x \in B. \end{cases}$$

Então  $F$  é bem definida e contínua.

Demonstração: Se  $x \in A \cap B$ ,  $F(x)=f(x)$  e  $F(x)=g(x)$ . Como  $x \in A \cap B$ ,  $f(x)=g(x)$ . Então vemos que  $F$  é bem definida.

Seja  $M$  um subconjunto fechado em  $Y$ . Então

$$\begin{aligned} F^{-1}(M) &= F^{-1}(M) \cap (A \cup B) \\ &= (F^{-1}(M) \cap A) \cup (F^{-1}(M) \cap B) \\ &= f^{-1}(M) \cup g^{-1}(M). \end{aligned}$$

Como  $f$  e  $g$  são contínuas segue que  $f^{-1}(M)$  e  $g^{-1}(M)$  são fechados em  $A$  e  $B$ , respectivamente, portanto, fechados em  $X$ . Logo  $F^{-1}(M)$  é fechado em  $X$ .

O caso de  $A$  e  $B$  abertos é semelhante.

Definição 1.3: Sejam  $X$  um espaço topológico,  $f$  e  $g$  caminhos

em  $X$ . Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  se existe uma função contínua  $F: I \times I \longrightarrow X$ , tal que, para todo  $s \in I$ , temos  $F(s,0)=f(s)$  e  $F(s,1)=g(s)$ .

Tal função é chamada homotopia de  $f$  em  $g$ . Além disso, se  $f(0)=g(0)$ ,  $f(1)=g(1)$  e  $F(0,t)=x_0$ ,  $F(1,t)=x_1$ , dizemos que  $F$  é uma homotopia de  $f$  em  $g$  relativa a  $\{0,1\}$  ou uma homotopia com pontos extremos fixos. De agora em diante homotopia significará homotopia que fixa pontos extremos. Se  $f$  é homotópica a  $g$  neste sentido escrevemos  $f \simeq g$ .

Lema 1.4: A relação  $\simeq$  é uma relação de equivalência.

Demonstração: Sejam  $f: I \longrightarrow X$  um caminho com ponto inicial  $x_0$  e ponto final  $x_1$ . Definimos  $F(s,t)=f(s)$ .

Obviamente  $F$  é contínua e é uma homotopia de  $f$  em  $f$ .

Portanto, temos  $f \simeq f$ .

Sejam  $f$  e  $g$  caminhos em  $X$  com ponto inicial  $x_0$  e ponto final  $x_1$ ,  $F: I \times I \longrightarrow X$  uma homotopia de  $f$  em  $g$ . Definimos  $G: I \times I \longrightarrow X$  por  $G(s,t)=F(s,1-t)$ . Obviamente  $G$  é contínua. Além disso,  $G(s,0)=F(s,1)=g(s)$  e  $G(s,1)=F(s,0)=f(s)$ . Também  $G(0,t)=F(0,1-t)=x_0$  e  $G(1,t)=F(1,1-t)=x_1$ . Portanto,  $G$  é uma homotopia de  $g$  em  $f$ . Logo  $g \simeq f$  quando  $f \simeq g$ .

Suponhamos que  $f, g$  e  $h$  sejam caminhos em  $X$ , todos com ponto inicial  $x_0$  e ponto final  $x_1$ ; suponhamos que,  $f \simeq g$  e  $g \simeq h$ , sejam  $F, G: I \times I \longrightarrow X$  homotopias de  $f$  em  $g$  e  $g$  em  $h$ , respectivamente. Definimos  $H: I \times I \longrightarrow X$  por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t); & t \in [0,1/2] \\ G(s,2t-1); & t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Se  $t=1/2$ , então,  $H(s,1/2)=F(s,1)=G(s,0)=g(s)$ . Logo,  $H$  é bem definida. Aplicando o lema 1.2 vemos que  $H$  é contínua. Além disso,  $H(s,0)=F(s,0)=f(s)$  e  $H(s,1)=h(s)$ . Vemos também que,  $H(0,1)$  é ou  $F(0,2t)$  ou  $G(0,2t-1)$  ambos iguais a  $x_0$ . De maneira semelhante vemos que  $H(1,t)=x_1$ . Portanto,  $H$  é uma homotopia de  $f$  em  $h$ .

Se  $f$  é um caminho em  $X$  representaremos a classe de equivalência de caminhos homotópicos a  $f$  por  $[f]$ .

Definição 1.5: Sejam  $f$  um caminho em  $X$  de  $x_0$  até  $x_1$  e seja  $g$  um caminho em  $X$  de  $x_1$  até  $x_2$ .

Definimos a composta  $f*g$ , de  $f$  e  $g$ , como sendo o caminho

$$(f*g)(s) = \begin{cases} f(2s); & s \in [0,1/2] \\ g(2s-1); & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

A composta  $f*g$  é bem definida e pelo lema 1.2 é contínua. Além disso,  $(f*g)(0)=f(2*0)=x_0$  e  $(f*g)(1)=g(2*1-1)=x_2$ . Assim,  $f*g$  é na verdade um caminho de  $x_0$  até  $x_2$ .

Definição 1.6: Sejam  $f$  e  $g$  caminhos em  $X$  com pontos iniciais  $x_0$  e  $x_1$  e pontos finais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente,  $[f]$  e  $[g]$  as respectivas classes de equivalência. Definimos  $[f]*[g]=[f*g]$ , a operação em classes de equivalência induzida pela operação composição de caminhos.

Teorema 1.7: A operação  $(*)$  é bem definida para classes de homotopia e tem as seguintes propriedades.

- i) Associatividade.  $[f]*([g]*[h])$  é definida se, e somente se,  $([f]*[g])*[h]$  é definida e nesse caso os dois são iguais.
- ii) Identidade a direita e a esquerda. Dado  $x \in X$  definimos  $e_x: I \longrightarrow X$  por  $e_x(s) = x$ . Se  $f$  é um caminho em  $X$  de  $x_0$  até  $x_1$ , então temos  $[f]*[e_{x_1}] = [f]$  e  $[e_{x_0}]*[f] = [f]$ .
- iii) Inverso. Dado um caminho  $f$  em  $X$  de  $x_0$  até  $x_1$ , seja  $\bar{f}$  o caminho definido por  $\bar{f}(s) = (1-s)$ . O caminho  $\bar{f}$  é chamado inverso homotópico de  $f$ . Assim, temos  $[f]*[\bar{f}] = [e_{x_0}]$  e  $[\bar{f}]*[f] = [e_{x_1}]$ .

Demonstração: Sejam  $[f] = [f']$  e  $[g] = [g']$ . Suponhamos que  $F$  é uma homotopia de  $f$  em  $f'$ , e  $G$  é uma homotopia de  $g$  em  $g'$ . Definimos  $H: I \times I \longrightarrow X$  por

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t); & s \in [0, 1/2] \\ G(2s-1, t); & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Como  $H(1/2, t) = F(1, t) = x_1 = G(0, t)$  podemos aplicar o lema 1.2 para concluir que  $H$  é contínua. É fácil ver que  $H$  é uma homotopia de  $f*g$  em  $f'*g'$ .

Para demonstrar a associatividade, vamos mostrar que se, ou  $f*(g*h)$  ou  $(f*g)*h$  é definido, o outro também é, e nesse caso ambos são iguais.

Assim,  $f*(g*h)$  é definido se, e somente se,  $g*h$  é definido e  $(g*h)(0) = f(1)$ . Mas isto acontece se, e somente se,  $g(1) = h(0)$  e  $g(0) = f(1)$ , que por sua vez acontece se, e somente se,  $f*g$  é definido e  $(f*g)(1) = h(0)$ , o qual ocorre se, e somente se,  $(f*g)*h$  é definido.

Agora dividimos  $I^2$  em três subconjuntos fechados como segue:

$$A = \{(s, t) \in I^2 ; 0 \leq s \leq (t+1)/4\},$$

$$B = \{(s, t) \in I^2 ; (t+1)/4 \leq s \leq (t+2)/4\}, \text{ e}$$

$$C = \{(s, t) \in I^2 ; (t+2)/4 \leq s \leq 1\}.$$

Definimos  $F: I \times I \longrightarrow X$  por

$$F(s, t) = \begin{cases} f(4s/(t+1)), & (s, t) \in A \\ g(4s-t-1); & (s, t) \in B \\ h((4s-t-2)/(2-t)); & (s, t) \in C. \end{cases}$$

Se  $(s, t) \in A \cap B$ , temos  $s = (t+1)/4$  e

$$f(4s/(t+1)) = f(1) = g(0) = g(4s-t-1).$$

Se  $(s, t) \in B \cap C$ , temos  $s = (t+2)/4$  e

$$g(4s-t-1) = g(1) = h(0) = h((4s-t-2)/(2-t)).$$

Note que  $A \cap C = \emptyset$ . Assim, podemos aplicar o lema 1.2 para concluir que  $F$  é contínua. Agora,

$$F(s, 0) = \begin{cases} f(4s); & s \in [0, 1/4] \\ g(4s-1); & s \in [1/4, 1/2] \\ h(2s-1); & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Portanto,  $F(s, 0) = [(f*g)*h](s)$ . Ainda,

$$F(s, 1) = \begin{cases} f(2s); & s \in [0, 1/2] \\ g(4s); & s \in [1/2, 3/4] \\ h(4s-3); & s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Portanto,  $F(s, 1) = [f*(g*h)](s)$ .

Como  $F(0, t) = f(0)$  e  $F(1, t) = h(1)$  concluímos que  $F$  é uma homotopia de  $(f*g)*h$  em  $f*(g*h)$ .

Suponhamos que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são três classes de equivalência de caminhos em  $X$ . Sejam  $f, g$  e  $h$  elementos de  $\alpha, \beta$

e  $\gamma$  respectivamente. Então,

$$(\alpha * \beta) * \gamma = [f * g] * [h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f] * [g * h] = \alpha * (\beta * \gamma).$$

Para demonstrar a existência das identidades dividimos  $I^2$  em dois subconjuntos fechados como segue.

$$A = \{(s, t) \in I^2; 0 \leq s \leq (2-t)/2\} \text{ e}$$

$$B = \{(s, t) \in I^2; (2-t)/2 \leq s \leq 1\}.$$

Definimos  $G: I \times I \longrightarrow X$  por

$$G(s, t) = \begin{cases} f(2s/(2-t)); & s \in [0, (2-t)/2] \\ x_1; & s \in [(2-t)/2, 1]. \end{cases}$$

Se  $(s, t) \in A \cap B$ , temos  $s = (2-t)/2$  e  $f(2s/(2-t)) = f(1) = x_1$ .

Portanto, podemos aplicar o lema 1.2 para concluir que  $G$  é contínua. Agora  $G(s, 0) = f(0)$ , se  $s \in [0, 1]$  e

$$G(s, 1) = \begin{cases} f(2s); & s \in [0, 1/2] \\ x_1, & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Portanto,  $G(s, 1) = (f * e_{x_1})(s)$ . Como  $G(0, t) = f(0)$  e  $G(1, t) = x_1$  concluimos que  $G$  é uma homotopia de  $f$  em  $e_{x_1}$ . Logo  $e_{x_1}$  é a identidade a direita.

Para mostrar que  $e_{x_0}$  é a identidade a esquerda procedemos de maneira semelhante.

Dividimos  $I^2$  em três conjuntos fechados para mostrar a existência da inversa homotópica de  $f$  como segue:

$$A = \{(s, t) \in I^2 \quad 0 \leq s \leq t/2\},$$

$$B = \{(s, t) \in I^2 \quad t/2 \leq s \leq 1-t/2\} \text{ e}$$

$$C = \{(s, t) \in I^2 \quad 1-t/2 \leq s \leq 1\}.$$

Definimos  $H: I \times I \longrightarrow X$  por

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s); & s \in [0, 1/2] \\ f(t), & s \in [1/2, 1-t/2] \\ f(2-2s); & s \in [1-t/2, 1] \end{cases} .$$

Se  $(s,t) \in A \cap B$ , temos  $s=t/2$  e  $f(2s)=f(t)$ . Se  $(s,t) \in B \cap C$  temos  $s=1-t/2$  e  $f(2-2s)=f(2-2(1-t/2))=f(t)$ . Se  $(s,t)$  pertence a  $A \cap C$ , temos  $s=1/2$  e  $f(2s)=f(1)=f(2-2s)$ .

Assim, podemos aplicar o lema 1.2 para concluir que  $H$  é contínua. Ainda,  $H(s,0) = f(0)$  e

$$H(s,1) = \begin{cases} f(2s); & s \in [0, 1/2] \\ f(2-2s) = f(1-(2s-1)) = \tilde{f}(2s-1); & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Portanto,  $H(s,1) = (f \circ \tilde{f})(s)$ . Como  $H(0,t) = f(0) = e_{x_0}$  e

$H(1,t) = f(0) = e_{x_0}$  concluímos que  $H$  é uma homotopia de  $f \circ \tilde{f}$

em  $e_{x_0}$ .

A demonstração de que  $\tilde{f} \circ f$  é homotópica a  $e_{x_1}$  é feita de maneira semelhante.

Definição 1.8: Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $X$  é contrátil se a aplicação identidade  $i_x: X \longrightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante  $c: X \longrightarrow x_0$  para algum  $x_0 \in X$ .

Definição 1.9: Um espaço topológico com ponto base, é um espaço topológico juntamente com a escolha de um ponto preferido do espaço. O símbolo  $(X, x_0)$  determina o espaço com ponto base  $x_0 \in X$ . Sejam  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  espaços com ponto base. Uma função  $h$  de  $(X, x_0)$  em  $(Y, y_0)$ , denotada por  $h: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ , é uma função de  $X$

em  $Y$ , tal que,  $h(x_0)=y_0$ . Um laço em  $(X, x_0)$  é um caminho em  $X$  com ponto inicial e final igual a  $x_0$ .

Definição 1.10: Seja  $(X, x_0)$  um espaço com ponto base. O conjunto das classes de homotopia de laços em  $(X, x_0)$  munido com a operação  $(*)$  é chamado grupo fundamental de  $X$  relativo ao ponto base  $x_0$ . Denotamos este grupo por  $\Pi_1(X, x_0)$ .

De fato, se  $f, g$  e  $h$  são laços com ponto base  $x_0$  então  $f * g$  é um laço com ponto base  $x_0$  e pelo teorema 1.7 vemos que

$$\text{i) } [f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$$

$$\text{ii) } [f] * [e_{x_0}] = [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

$$\text{iii) } [f] * [f] = [e_{x_0}] = [\tilde{f}] * [f].$$

Isto é,  $\Pi_1(X, x_0)$  é realmente um grupo.

Exemplo 1.10.1: Sejam  $R^n$  o  $n$ -espaço euclidiano e  $x_0 \in R^n$ .

Todo laço  $f$  com ponto base  $x_0 \in R^n$  é um caminho homotópico a  $x_0$ .

De fato, seja  $f$  um caminho em  $R^n$ , tal que,  $f(0)=f(1)=x_0$ . Definimos  $F: I \times I \longrightarrow R^n$  por

$$F(s, t) = (1-t)x_0 + tf(s).$$

Obviamente  $F$  é uma homotopia de  $f$  em  $x_0$ . Então o grupo fundamental de  $R^n$  relativo ao ponto  $x_0$  é trivial, isto

$$\text{é, } \Pi_1(R^n, x_0) = \{[e_{x_0}]\}.$$

Definição 1.11 Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $X$  é simplesmente conexo se é conexo por caminhos e para qualquer  $x_0 \in X$  temos  $\Pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ .

Lema 1.12: Num espaço simplesmente conexo  $X$ , quaisquer dois caminhos contendo os mesmos pontos inicial e final são caminhos homotópicos.

Demonstração: Sejam  $f$  e  $g$  caminhos de  $x_0$  até  $x_1$ ,  $f*\tilde{g}$  está definido e é um laço com ponto base  $x_0$ . Como  $X$  é simplesmente conexo,  $f*\tilde{g}$  é homotópica a  $e_{x_0}$ . Aplicando

o teorema 1.7 vemos que:

$$[g] = [e_{x_0}] * [g] = [(f*\tilde{g})] * [g] = [f*(\tilde{g}*g)] = [f] * [e_{x_0}] = [f].$$

Portanto,  $f$  e  $g$  pertencem à mesma classe de homotopia e são homotópicas.

Definição 1.13: Seja  $h: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  uma função contínua de espaços com ponto base. O homomorfismo  $h_*: \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ , induzido por  $h$ , é a função  $h_*([f]) = [h \circ f]$ .

Teorema 1.14: Com a notação da definição 1.13,  $h$  é uma função bem definida e é um homomorfismo.

Demonstração: Sejam  $f$  e  $f'$  dois laços homotópicos em  $(X, x_0)$  e  $F: I \times I \longrightarrow X$  a homotopia entre eles. Então  $h \circ F$  é uma homotopia entre  $h \circ f$  e  $h \circ f'$ .

Sejam  $f$  e  $g$  laços em  $(X, x_0)$ . Então temos

$$(f*g)(s) = \begin{cases} f(2s) & ; \quad s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1) & ; \quad s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Fazendo a composição com  $h$  vem

$$h((f * g)(s)) = \begin{cases} h(f(2s)) & ; \quad s \in [0, 1/2] \\ h(g(2s-1)) & ; \quad s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Então  $h(f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)$ . Daí segue que

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g]).$$

Teorema 1.15: Se  $h: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  e  $g: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$  são funções contínuas, então  $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$ . Se  $i: (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$  é a aplicação identidade em  $X$ , então  $i_*$  é homomorfismo identidade.

Demonstração: Aplicando as definições temos

$$\begin{aligned} (g \circ h)_*([f]) &= [(g \circ h) \circ f] = [g \circ (h \circ f)] = g_*([h \circ f]) = g_*(h_*([f])) \\ &= (g_* \circ h_*)([f]). \end{aligned}$$

Procedendo de maneira semelhante vemos que

$$i_*([f]) = [i \circ f] = [f].$$

Teorema 1.16:  $\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  é isomorfo a  $\Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$ .

Demonstração: Sejam  $p: X \times Y \longrightarrow X$  e  $q: X \times Y \longrightarrow Y$  as projeções usuais. Então temos os homomorfismos indu-

$$p_*: \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0) \quad \text{e}$$

$$q_*: \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0).$$

$$\phi: \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0) \quad \text{por}$$

$$\phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]).$$

Então

$$\begin{aligned}
\phi([f]) * \phi([g]) &= ([p \circ f], [q \circ f]) * ([p \circ g], [q \circ g]) \\
&= ([p \circ f]) * ([p \circ g]), ([q \circ f]) * ([q \circ g]) \\
&= (p_*([f]) * p_*([g]), (q_*([f]) * q_*([g]))) \\
&= (p_*([f * g]), q_*([f * g])) \\
&= \phi([f * g]).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\phi$  é na realidade um homomorfismo.

Suponhamos que  $f$  é um laço em  $(X \times Y, (x_0, y_0))$  e que  $\phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f])$  é o elemento neutro  $([e_{x_0}], [e_{y_0}])$  em  $\Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$ ; isto é,  $p \circ f$  é homotópica a  $e_{x_0}$  e  $q \circ f$  é homotópica a  $e_{y_0}$ . Sejam  $H$  uma homotopia de  $p \circ f$

em  $e_{x_0}$  e  $G$  uma homotopia de  $q \circ f$  em  $e_{y_0}$ . Definimos

$F: I \times I \longrightarrow X \times Y$  por  $F(s, t) = [H(s, t), G(s, t)]$ . Agora

$F(s, 0) = [H(s, 0), G(s, 0)] = [(p \circ f)(0), (q \circ f)(0)] = [e_{x_0}, e_{y_0}]$  e

$F(s, 1) = [H(s, 1), G(s, 1)] = [(p \circ f)(1), (q \circ f)(1)] = [e_{x_0}, e_{y_0}]$ .

Ainda,  $F(0, t) = [H(0, t), G(0, t)] = [e_{x_0}, e_{y_0}]$ .

Portanto,  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e um laço constante em  $(X \times Y, (x_0, y_0))$ . Logo  $\phi$  é injetiva.

Seja  $g$  um laço em  $(X, x_0)$ ,  $h$  um laço em  $(Y, y_0)$ .

Definimos  $f: I \longrightarrow X \times Y$  por  $f(s) = (g(s), h(s))$ . Então

$f$  é um laço em  $(X \times Y, (x_0, y_0))$  e  $\phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f])$  e

assim,  $\phi([f]) = ([g], [h])$ . Portanto,  $\phi$  é sobrejetora.

Definição 1.17: Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos. Seja  $p: X \longrightarrow Y$  uma aplicação contínua. O par  $(X, p)$  é chamado espaço de recobrimento de  $Y$  se:

- i)  $p$  é sobrejetora e
- ii) para cada  $y \in Y$  existe um aberto  $U$  de  $Y$  contendo  $y$ , tal que  $p^{-1}(U)$  é a união disjunta de conjuntos abertos, cada um dos quais aplicado homeomorficamente em  $U$  por  $p$ .

O conjunto aberto  $U$  será chamado aberto admissível, e  $p$  uma aplicação de recobrimento.

Sejam  $E$  e  $B$  espaços topológicos, tais que  $e_0 \in E$  e  $b_0 \in B$ . O par  $((E, e_0), p)$  será chamado recobrimento de  $(B, b_0)$  se  $(E, p)$  é recobrimento de  $B$  e  $p(e_0) = b_0$ . Neste caso  $p$  é chamada aplicação de recobrimento de  $(B, b_0)$ .

Exemplo 1.17.1: Sejam  $Y = S^1$ ,  $X = \mathbb{R}$  e  $p: X \rightarrow Y$  dada por  $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ .

Obviamente  $p$  é contínua e sobrejetora. Consideremos o ponto  $y = (0, 1)$  e tomemos  $U$  igual a semi-circunferência a direita.

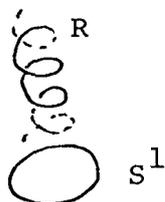
Suponhamos que  $V_n = (n-1/4, n+1/4)$ . Então temos  $p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$

e  $p|_{V_n}: V_n \rightarrow U$  é homeomorfismo, pois  $V_n$  é compacto,  $U$

é Hausdorff e  $p|_{V_n}$  é bijetiva e contínua. Assim, a restri-

ção  $p|_{V_n}: V_n \rightarrow U$  é um homeomorfismo.

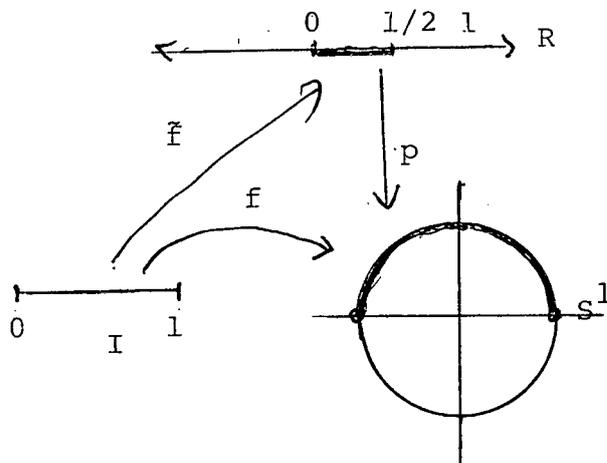
usando o mesmo argumento para as demais semi-circunferências, concluímos que  $(\mathbb{R}, p)$  é um espaço de recobrimento de  $S^1$ . Podemos visualizar isso da seguinte maneira:



Ou seja, a reta  $\mathbb{R}$  é vista como uma espiral infinita sobre  $S^1$ .

Definição 1.18: Sejam  $E$  e  $B$  espaços topológicos e  $p:E \longrightarrow B$  uma aplicação de recobrimento. Se  $f$  é uma aplicação contínua de um espaço  $X$  em  $B$ , um levantamento de  $f$  é uma aplicação  $\tilde{f}:X \longrightarrow E$ , tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ .

Exemplo 1.18.1 Considere  $p:\mathbb{R} \longrightarrow S^1$  dada por  $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ . O caminho  $f:I \longrightarrow S^1$  dado por  $f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s))$  tem ponto inicial  $b_0 = (1,0)$ . Definimos  $\tilde{f}:I \longrightarrow \mathbb{R}$  por  $\tilde{f}(s) = (s/2)$ .



Note que a imagem do levantamento de  $f$  é  $[0, 1/2] \subset \mathbb{R}$ .

Teorema 1.19: Seja  $p:(E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$  uma aplicação de recobrimento. Qualquer caminho  $f$  de  $I$  em  $B$  com ponto inicial  $b_0$  tem um único levantamneto a um caminho  $\tilde{f}$  em  $E$  com ponto inicial  $e_0$ .

Demonstração: Suponhamos que  $\{U_\alpha\}$  é uma cobertura de  $B$  por abertos admissíveis. Usando o fato que  $I$  é compacto

escolhemos uma subdivisão de  $I$ ,  $0=s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n=1$ , tal que, para cada  $i$ ,  $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_\alpha$  para algum  $\alpha$ . Então existe  $\alpha_0$ , tal que  $f_1([0, s_1]) \subset U_{\alpha_0}$ . Como  $p(e_0) = b_0$  e  $e_0 \in p^{-1}(U_{\alpha_0})$ , e  $p^{-1}(U_{\alpha_0}) = \bigcup_{j \in J} V_j$ , onde cada  $V_j$  é aplicado homeomorficamente sobre  $U_{\alpha_0}$  por  $p$ , segue que,  $e_0$  é elemento de algum  $V_j$ , vamos dizer  $V_0$ . Definimos  $\tilde{f}_1: [0, s_1] \rightarrow E$  por  $\tilde{f}_1 = (p/V_0)^{-1} \circ (f/[0, s_1])$ . Então,  $\tilde{f}_1(0) = e_0$  e  $\tilde{f}_1$  é o levantamento de  $f/[0, s_1]$ .

Suponhamos que  $\tilde{f}_i(s)$  está definida para  $[0, s_i]$  e vamos extendê-la a  $[0, s_{i+1}]$ . Existe  $\alpha$ , tal que  $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_\alpha$ . Seja  $e_i = \tilde{f}_i(s_i)$ . Procedendo como no parágrafo anterior, substituindo  $e_0$  por  $e_i$  e  $b_0$  por  $b_i$  podemos definir  $g: [s_i, s_{i+1}] \rightarrow E$ , tal que  $g(s_i) = e_i$  e  $p \circ g = f/[s_i, s_{i+1}]$ . Agora definimos  $\tilde{f}_{i+1}: [0, s_{i+1}] \rightarrow E$  por

$$\tilde{f}_{i+1}(t) = \begin{cases} \tilde{f}_i(t); & t \in [0, s_i] \\ g(t); & t \in [s_i, s_{i+1}]. \end{cases}$$

Pelo lema 1.2,  $\tilde{f}_{i+1}$  é contínua. Continuando desta maneira até esgotar  $I$  definimos  $\tilde{f}: I \rightarrow E$ .

Para demonstrar a unicidade suponhamos que  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são dois levantamentos de  $f$  com ponto inicial  $e_0$ . Seja  $A = \{s; \tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)\}$ . Como  $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{g}(0)$  segue que  $0 \in A$ . Seja  $\alpha = \sup A$ . Como  $A$  é fechado,  $\alpha \in A$ . Suponhamos que  $\alpha < 1$ ,  $b = f(\alpha)$ ,  $e = \tilde{f}(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)$ . Seja  $U_b$  um aberto admissível, tal que  $b \in U_b$ . Como  $p(e) = b$ , e  $p^{-1}(U_b) = \bigcup_{j \in J} V_j$ , onde cada  $V_j$  é

aplicado homeomorficamente sobre  $U_b$  por  $p$ , segue que  $e \in V_j$ , para algum  $V_j$ , vamos dizer  $V_0$ . Sendo  $\alpha < 1$ , existe  $\varepsilon > 0$ , tal que,  $\alpha + \varepsilon < 1$ ,  $\tilde{f}([\alpha, \alpha + \varepsilon]) \subset V_0$  e  $\tilde{g}([\alpha, \alpha + \varepsilon]) \subset V_0$ .

Assim,  $p/V_0 \circ \tilde{f}/[\alpha, \alpha + \varepsilon/2] = f([\alpha, \alpha + \varepsilon/2]) = p/V_0 \circ \tilde{g}/[\alpha, \alpha + \varepsilon/2]$ .

Então  $\tilde{f}/[\alpha, \alpha + \varepsilon/2] = \tilde{g}/[\alpha, \alpha + \varepsilon/2]$ . Mas isso é absurdo, pois  $\alpha = \sup A$ . Logo  $\alpha = 1$ . Portanto,  $\tilde{f} = \tilde{g}$  em  $A = I$ .

Teorema 1.20: Seja  $p: (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$  uma aplicação de recobrimento. Sejam  $f$  e  $g$  dois caminhos em  $B$  com ponto inicial  $b_0$ . Se  $F$  é uma homotopia de  $f$  em  $g$ , e  $f$  possui um levantamento  $\tilde{f}$ , com ponto inicial  $e_0$ , então,  $g$  tem um levantamento com ponto inicial  $e_0$ . Além disso, a homotopia  $F$  tem um levantamento  $\tilde{F}$  que é uma homotopia de  $\tilde{f}$  em  $\tilde{g}$ .

Demonstração: Suponhamos que  $\{U_\alpha\}$  é uma cobertura de  $B$  por abertos admissíveis. Se algum  $U_\alpha$  é  $B$  o resultado é óbvio. Basta tomar  $\tilde{F} = p^{-1} \circ F$ .

Consideremos o caso geral. Pela definição de espaço de recobrimento e compacidade de  $I$ , podemos encontrar para cada  $a \in I$ , um aberto  $N_a$  e uma partição de  $I$ ,  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$ , dependendo de  $a$ , tal que  $F$  aplica cada  $N_a \times [t_i, t_{i+1}]$  em abertos admissíveis  $U_\alpha$ . Seja  $e_a = \tilde{f}(a)$ . Como  $p(e_a) = p(\tilde{f}(a)) = f(a)$ ,  $e_a \in p^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{j \in J} V_j$ , onde cada  $V_j$  é aplicado homeomorficamente em  $U_\alpha$  por  $p$ , segue que,  $e_a \in V_j$  para algum  $V_j$ , vamos dizer  $V_0$ . Definimos

$$\tilde{F}_1^a: N_a \times [0, t_1] \longrightarrow V_0 \quad \text{por} \quad \tilde{F}_1^a = (p/V_0)^{-1} \circ F/N_a \times [0, t_1].$$

Assim, pela unicidade de levantamentos de caminhos, teorema 1.18,  $\tilde{F}_1^a(s,0) = \tilde{f}(s)$  para todo  $s \in N_a$ , e  $\tilde{F}_1^a$  é um levantamento de  $F$  em  $N_a \times [0, t_1]$ .

Suponhamos agora que  $\tilde{F}_i^a(s)$  é um levantamento de  $F$  em  $N_a \times [0, t_i]$ , e vamos extendê-la a  $N_a \times [0, t_{i+1}]$ . Existe  $\alpha$ , tal que,  $F(N_a \times [0, t_{i+1}]) \subset U_\alpha$ . Seja  $e_i = \tilde{F}_i^a(a, t_i)$ . Procedendo como no parágrafo anterior, substituindo  $e_a$  por  $e_i$  e  $f(a)$  por  $F(a, t_i)$ , podemos definir

$$G^a: N_a \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow E, \text{ tal que, } G^a(a, t_i) = e_i \text{ e}$$

po  $\tilde{F}_i^a = F / N_a \times [t_i, t_{i+1}]$ . Definimos  $\tilde{F}_{i+1}^a: N_a \times [0, t_{i+1}] \longrightarrow E$  por

$$\tilde{F}_{i+1}^a(s, t) = \begin{cases} \tilde{F}_i^a(s, t); & (s, t) \in N_a \times [0, t_i] \\ G^a(s, t); & (s, t) \in N_a \times [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.2  $\tilde{F}_{i+1}^a$  é contínua. Repetindo o processo até esgotar  $N_a \times I$  obtemos  $\tilde{F}^a: N_a \times I \longrightarrow E$ .

Suponhamos agora que estejam definidas  $\tilde{F}^a$  para  $N_a \times I$  e  $\tilde{F}^{a'}$  para  $N_{a'} \times I$  e que  $N_a \cap N_{a'} \neq \emptyset$ . Seja  $a_1 \in N_a \cap N_{a'}$ . Então temos dois levantamentos de  $F$  definidos em  $\{a_1\} \times I$  que coincidem no ponto  $(a_1, 0)$ . Como  $\{a_1\} \times I$  é um intervalo, pelo teorema 1.18 eles coincidem em  $\{a_1\} \times I$ . Definimos  $\tilde{F}: I \times I \longrightarrow E$  por  $\tilde{F}(a, t) = \tilde{F}(a, t)$ . Pelo lema 1.2  $\tilde{F}$  é contínua.

Seja  $\tilde{g}(s) = \tilde{F}(s, 1)$ . Então obtemos  $p \circ \tilde{g}(s) = p \circ \tilde{F}(s, 1) = F(s, 1) = g(s)$ . Assim,  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são levanta-

mentos de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Obviamente  $f(0)=e_0$ .  
 Do mesmo modo para todo  $s \in I$   $\tilde{h}_s(t) = \tilde{F}(s,t)$  é um levantamento de  $h_s(t) = F(s,t)$ . Vemos que  $\tilde{h}_s$  é um caminho de  $\tilde{f}$  até  $\tilde{g}$ , e  $h_s$  é um caminho de  $f$  até  $g$ . Obviamente  $h_0 \equiv b_0$ , donde segue que  $\tilde{h}_0 \equiv e_0$  e  $\tilde{g}(0) = e_0$ . Do mesmo modo  $h_1 \equiv b_1$  é constante. Assim,  $\tilde{F}$  é uma homotopia de  $\tilde{f}$  em  $\tilde{g}$  com pontos extremos fixos.

Teorema 1.21: Sejam  $p: (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$  uma aplicação

de recobrimento e  $f: (Y, y_0) \longrightarrow (B, b_0)$

uma função contínua, tal que  $f(y_0) = b_0$ . Suponhamos que  $Y$  é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. A função  $f$  pode ser levantada para uma função  $\tilde{f}$  de  $(Y, y_0)$  em  $(E, e_0)$ , com  $\tilde{f}(y_0) = e_0$  se, e somente se,

$$f_* (\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_* (\Pi_1(E, e_0)).$$

Se tal função  $\tilde{f}$  existe é única.

Demonstração: Suponhamos que o levantamento  $\tilde{f}$  existe.

Então temos  $f = p \circ \tilde{f}$ . Aplicando o teorema 1.15 vemos que

$$\begin{aligned} f_* (\Pi_1(Y, y_0)) &= p_* \circ \tilde{f}_* (\Pi_1(Y, y_0)) \\ &= p_* (\tilde{f}_* (\Pi_1(Y, y_0))) \\ &\subseteq p_* (\Pi_1(E, e_0)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que  $f_* (\Pi_1(Y, y_0))$  esteja contido em  $p_* (\Pi_1(E, e_0))$ . Seja  $y_1 \in Y$ . Escolhemos um caminho  $\alpha$  em  $Y$  de  $y_0$  até  $y_1$ . Então  $f \circ \alpha$  é um caminho em  $B$ . Seja  $\gamma$  um levantamento de  $f \circ \alpha$  em  $E$  com ponto inicial  $e_0$ . Definimos  $\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$ . Primeiro temos que

provar que  $\tilde{f}(y_1)$  independe do caminho  $\alpha$  em  $Y$  de  $y_0$  até  $y_1$ .

Sejam  $\alpha$  e  $\rho$  dois caminhos em  $Y$  com ponto inicial  $y_0$

e ponto final  $y_1$ . Então  $f \circ \alpha$  e  $f \circ \rho$  são caminhos em  $B$

com ponto inicial  $b_0$  e ponto final  $f(y_1)$ . Seja

$$\partial = (f \circ \alpha) * (f \circ \rho)^{-1} = f(\alpha * \rho^{-1}). \text{ Então } [\partial] \in f_* (\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_* (\Pi_1(E, e_0))$$

Portanto, há um elemento  $\phi$  em  $\Pi_1(E, e_0)$ , tal que  $[\partial] = p_*(\phi)$ .

Escolhemos  $w \in \phi$ . Então  $p_*(\phi) = [p \circ w] = [\partial]$ ; isto é,  $p \circ w \simeq \partial$ .

Seja  $F$  uma homotopia de  $p \circ w$  em  $\partial$ , e  $\tilde{F}$  o seu levantamento com  $\tilde{F}(0,0) = e_0$ . Assim,  $\tilde{F}(s,0) = w(s)$ . Seja  $\psi(s) = \tilde{F}(s,1)$ .

Então  $F(s,1) = p \circ \tilde{F}(s,1) = p \circ \psi(s) = \partial(s)$ . Logo  $\psi$  é um levantamento de  $\partial$ . Definimos  $h(t) = \psi(t/2)$ ;  $t \in [0,1]$  e  $g(t) = \psi(t+1/2)$  para  $t \in [0,1]$ . Então  $p \circ h(t) = p \circ \psi(t/2) = \partial(t/2) = (f \circ \alpha)(t)$ . Logo  $h(0) = \psi(0) = \tilde{F}(0,1) = e_0$ , de modo que  $h$  é um levantamento de

$f \circ \alpha$  com ponto inicial  $e_0$ . Também,

$$p \circ g^{-1}(t) = p(g(1-t)) = p \circ \psi((1-t+1)/2) = p \circ \psi(1-t/2) = \psi(1-t/2)$$

$$= (f \circ \rho)^{-1}(2-t-1) = (f \circ \rho)^{-1}(1-t) = f \circ \rho(t).$$

Portanto,  $g^{-1}(0) = g(1) = \psi(1) = \tilde{F}(1,1) = e_0$ . Assim,  $g^{-1}$  é o levantamento de  $f \circ \rho$  com ponto inicial  $e_0$ . Agora,

$$g^{-1}(1) = g(0) = \psi(1/2) = h(1). \text{ Logo } \tilde{f}(y) \text{ é bem definida.}$$

Agora vamos mostrar que para todo  $y_1 \in Y$ ,  $\tilde{f}$  é contínua em  $y_1$ . Seja  $\rho$  um caminho de  $y_0$  até  $y_1$  e  $\tilde{\rho}$  o levantamento de  $f \circ \rho$ . Suponhamos que  $W$  é uma vizinhança aberta de  $\tilde{f}(y_1)$ . Escolhemos  $U_\alpha$  aberto admissível, tal que

$$\tilde{f}(y_1) \in U_\alpha. \text{ Então } \tilde{\rho}(y_1) \in \tilde{p}^{-1}(U_\alpha) \cap W = \bigcup_{j \in J} V_j \cap W, \text{ onde } p \text{ aplica cada } V_j \text{ homeomorficamente sobre } U_\alpha. \text{ Portanto, exis-}$$

te  $V_0$ , tal que  $\tilde{f}(y_1) \in V_0 \cap W$ , de modo que  $f(y_1) \in p(V_0 \cap W)$ .

Consideremos a vizinhança aberta  $N = f^{-1}(p(V \cap W))$  de  $y_1$ .

Como  $Y$  é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança aberta conexa por caminhos,  $M$ , de  $y_1$  contida em  $N$ .

Portanto, dado um ponto  $y \in M$ , podemos ligar  $y_1$  a  $y$  por um caminho  $\beta$  em  $M$ . Então,  $f \circ \beta$  é um caminho em  $p(V_0 \cap W)$ .

Seja  $\partial = p^{-1} \circ f \circ \beta$  o levantamento de  $f \circ \beta$  em  $V_0 \cap W$ , com ponto inicial  $\tilde{f}(y_1)$ . Obviamente  $\tilde{f}(M) \subset W$ , e  $f(\rho * \beta)$  é um caminho em  $B$ . Como  $f(\rho * \beta) = f \circ \rho * f \circ \beta$  o levantamento de  $f(\rho * \beta)$  é  $\tilde{f}(\rho * \beta) = \tilde{f} \circ \rho * \tilde{f} \circ \beta = \tilde{\rho} * \partial$  e  $(\tilde{\rho} * \partial)(1) = \tilde{f}(y)$ .

Para mostrar a unicidade suponhamos que  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  são dois levantamentos de  $f$  com ponto inicial  $\tilde{f}(y_0) = e_0 = \tilde{g}(y_0)$ .

Como  $Y$  é conexo por caminhos, dado  $y \in Y$ , podemos unir  $y_0$  a  $y$  por um caminho  $\beta$ . Então  $\tilde{f} \circ \beta$  e  $\tilde{g} \circ \beta$  são dois levantamentos de  $f \circ \beta$  com ponto inicial  $e_0$ , de modo que

$\tilde{f} \circ \beta(1) = \tilde{g} \circ \beta(1)$ . Em particular  $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$ .

GRUPOS DE HOMOLOGIA E TEOREMA DO PONTO FIXO  
DE LEFSCHETZ

Definição 2.1:    Seja  $A = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  um conjunto de  $k+1$  pontos do  $R^n$ . Dizer que o conjunto  $A$  é geomêtricamente independente significa que nenhum hiperplano, de dimensão  $k-1$ , contém todos os pontos de  $A$ .

Note que  $v_1 - v_i, v_2 - v_i, \dots, v_k - v_i$ , eliminando  $v_i - v_i = 0$ , são vetores linearmente independentes.

Teorema 2.2:    Suponhamos que  $A = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  é um conjunto de pontos do  $R^n$ , geometricamente independentes. Seja  $M$  o conjunto convexo gerado por  $A$ . Então cada  $x \in M$  é expressado de maneira única pela forma

$$x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i, \text{ onde, } \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \in [0, 1].$$

Demonstração:    Seja  $B$  o conjunto, tal que cada ponto  $x$  de

$B$  é da forma  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$ , onde,  $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i \in [0, 1]$ . Vamos

mostrar que  $B$  é convexo.

Sejam  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$  e  $y = \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i$  dois pontos de  $B$  e

seja  $t \in [0, 1]$ . Então temos

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i + (1-t) \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i \\ &= \sum_{i=0}^p [t\lambda_i + (1-t)\alpha_i] v_i. \end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=0}^p [t\lambda_i + (1-t)\alpha_i] = t \sum_{i=0}^p \lambda_i + (1-t) \sum_{i=0}^p \alpha_i = t + (1-t) = 1$ ,

segue que  $0 \leq t\lambda_i + (1-t)\alpha_i \leq 1$  e que  $tx + (1-t)y \in B$ . Logo,

$B$  é um conjunto convexo contendo os pontos  $v_0, v_1, \dots, v_p$ ,

de modo que  $B \supset M$ .

Vamos usar a indução para mostrar que  $B \subset M$ . Se  $p=0$  ou  $p=1$  é óbvio. Suponhamos que para  $p=n-1$  o resultado é verdadeiro. Seja  $y = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n$  um ponto de  $B$ . Então se  $\lambda_n \neq 1$ ,

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i = (1-\lambda_n) \sum_{i=0}^{n-1} [\lambda_i / (1-\lambda_n)] v_i + \lambda_n v_n.$$

Mas,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i / (1-\lambda_n) = 1 / (1-\lambda_n) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = [1 / (1-\lambda_n)] (1-\lambda_n) = 1.$$

Por hipótese  $\sum_{i=0}^{n-1} [\lambda_i / (1-\lambda_n)] v_i \in M$ . Assim, para  $t \in [0, 1]$

$$t \sum_{i=0}^{n-1} [\lambda_i / (1-\lambda_n)] v_i + (1-t) v_n \in M.$$

Quando  $t = 1 - \lambda_n$ ,  $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \in M$ . Se  $\lambda_n = 1$ , temos  $y = v_n \in M$ . Logo,  $B \subset M$  e  $M = B$ .

Vamos agora provar a unicidade. Suponhamos que

$$x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i, \text{ onde, } \sum_{i=0}^p \lambda_i = \sum_{i=0}^p \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i, \lambda_i \leq 1. \text{ Então,}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i - \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i = \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \alpha_i) v_i \\ &= \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \alpha_i) v_i - [(\sum_{i=0}^p \lambda_i) v_0 - (\sum_{i=0}^p \alpha_i) v_0] \\ &= \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \alpha_i) v_i - \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \alpha_i) v_0 \\ &= \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \alpha_i) (v_i - v_0). \end{aligned}$$

Como os vetores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_p - v_0$  são linearmente independentes segue que  $\lambda_i - \alpha_i = 0$  para todo  $i$ . Portanto, temos  $\lambda_i = \alpha_i$ .

Definição 2.3: Seja  $\{v_0, \dots, v_k\}$  um conjunto de pontos geometricamente independentes do  $R^n$ . O  $k$ -dimensional simplexo fechado ou  $k$ -simplexo fechado  $\bar{\sigma}^k = [v_0 v_1 \dots v_k]$ , gerado por  $v_0, v_1, \dots, v_k$ , é o conjunto de todos os pontos  $x \in R^n$  para os quais existem números reais não negativos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i; \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Os números reais  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  são as coordenadas bari-cêntricas do ponto  $x$ . Os pontos  $v_0, v_1, \dots, v_k$  são os vértices de  $\bar{\sigma}^k$ . O conjunto de todos os pontos  $x$  de  $\bar{\sigma}^k$ , com todas as coordenadas baricêntricas positivas é chamado  $k$ -simplexo geométrico aberto gerado por  $v_0, \dots, v_k$  e é denotado por  $\sigma^k = (v_0 v_1 \dots v_k)$ .

De agora em diante, a não ser que falemos o contrário,  $\bar{\sigma}^k$  significará  $k$ -simplexo fechado e  $\sigma^k$  significará  $k$ -simplexo aberto.

Definição 2.4: Seja  $\sigma^k$  um  $k$ -simplexo aberto, com vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  e  $\{w_0, w_1, \dots, w_s\}$  um sub-conjunto não vazio de  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ , onde  $v_i \neq v_j$  se  $i \neq j$ . Então  $\tau^s = (w_0, \dots, w_s)$  é uma  $s$ -dimensional face aberta de  $\sigma^k$ .

Definição 2.5: Seja  $K$  uma família de simplexos abertos que tenha as propriedades que cada face aberta de um membro de  $K$  seja também um membro de  $K$  e que dois simplexos distintos são disjuntos,  $K$  é chamado complexo geométrico, (ou complexo simplicial ou simplesmente complexo).

A dimensão de  $K$  é o maior inteiro positivo  $r$ , tal que  $K$  tenha um  $r$ -simplexo, se tal inteiro existe. Se  $K = \emptyset$  a dimensão de  $K$  é  $-1$ . Note que complexos finitos sempre tem dimensão.

Neste trabalho só estaremos interessados em complexos finitos.

A união de todos os membros de  $K$  com a topologia Euclidiana é chamado poliedro associado a  $K$  e é denotado por  $|K|$ .

Definição 2.6: Sejam  $K$  um complexo e  $r$  um inteiro positivo. O complexo consistindo de todos os simplexos de  $K$ , de dimensão menor ou igual a  $r$ , é chamado  $r$ -esqueleto de  $K$ .

Definição 2.7: Seja  $X$  um espaço topológico. Se há um complexo geométrico  $K$  cujo poliedro associado,  $|K|$ , é homeomorfo a  $X$ , dizemos que  $X$  é um espaço triangulável e o complexo  $K$  é chamado triangulação de  $X$ .

Definição 2.8: Seja  $\sigma^k$  um  $k$ -simplexo,  $\sigma^k = (v_0 v_1 \dots v_k)$ .

Dizemos que  $\sigma^k$  é um simplexo ordenado se impusermos uma ordenação em seus vértices.

Se a ordem é  $v_0 < v_1 < \dots < v_k$  escrevemos

$\sigma^k = (v_0 < v_1 < \dots < v_k)$ . Seja  $\sigma^k = (v_0 v_1 \dots v_k)$  um k-simplexo e S o conjunto de todos os simplexos ordenados com vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são elementos de S, dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma orientação se  $\alpha = (v_0 < v_1 < \dots < v_k)$  e  $\beta = (w_0 < w_1 < \dots < w_k)$  e a permutação  $v_0 \rightarrow w_0, v_1 \rightarrow w_1, v_2 \rightarrow w_2, \dots, v_k \rightarrow w_k$  for par. Se esta permutação for ímpar dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  tem orientações opostas. "Ter a mesma orientação" é uma relação de equivalência. As classes de equivalência desta relação são os dois simplexos orientados com vértices  $\{v_0, \dots, v_k\}$ . O símbolo  $\langle v_0 v_1 \dots v_k \rangle$  denota o simplexo orientado que contém  $(v_0 < v_1 < \dots < v_k)$ . Usaremos  $-\langle v_0 v_1 \dots v_k \rangle$  para o outro simplexo orientado com vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Assim temos

$$\langle v_0 v_1 \dots v_k \rangle = -\langle v_1 v_0 \dots v_k \rangle = \langle v_2 v_0 v_1 \dots v_k \rangle.$$

Definição 2.9: Seja K um complexo. Se orientarmos cada simplexo de K, dizemos que K é um complexo orientado.

Um dos métodos de orientar um complexo é escolher uma ordenação para todos os seus vértices e usar esta ordenação para induzir uma ordenação sobre os vértices de cada simplexo.

Definição 2.10: Seja K um complexo orientado e sejam  $\sigma^p$  e  $\sigma^{p+1}$  simplexos de K. Associamos ao par  $(\sigma^{p+1}, \sigma^p)$  um número de incidência como segue. Se  $\sigma^p$  não é face de  $\sigma^{p+1}$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$ . Suponhamos que  $\sigma^p$  é face de  $\sigma^{p+1}$ . Ordenamos os vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$

de  $\sigma^p$ , de modo que  $\sigma^p = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$ . Seja  $V$  o vértice de  $\sigma^{p+1}$  que não está em  $\sigma^p$ . Se tivermos  $\sigma^{p+1} = \langle V v_0 v_1 \dots v_p \rangle$  definiremos  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ . Caso  $\sigma^{p+1} = -\langle V v_0 v_1 \dots v_p \rangle$ , definiremos  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ .

Definição 2.11: Sejam  $\sigma_i^p$  e  $\sigma_j^{p+1}$   $p$  e  $(p+1)$ -simplexos de  $K$ . Sejam  $\eta_{ij} = [\sigma_j^{p+1}, \sigma_i^p]$ ,  $\alpha_p$  o número de  $p$ -simplexos e  $\alpha_{p+1}$  o número de  $(p+1)$ -simplexos. Ordenamos estes simplexos na seguinte maneira:  $\{\sigma_1^p, \dots, \sigma_{\alpha_p}^p\}$  e  $\{\sigma_1^{p+1}, \dots, \sigma_{\alpha_{p+1}}^{p+1}\}$ .

A  $p$ -ésima matriz de incidência  $\Delta(p)$ , com respeito às bases ordenadas  $\{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p}$  e  $\{\sigma_j^{p+1}\}_{j=0}^{\alpha_{p+1}}$ , é definida como sendo a  $(\alpha_p \times \alpha_{p+1})$ -matriz de incidência dada por

$$\Delta(p) = (\eta_{ij}(p)) = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1j} & \dots & \eta_{1\alpha_{p+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{i1} & \dots & \eta_{ij} & \dots & \eta_{i\alpha_{p+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{\alpha_p 1} & \dots & \eta_{\alpha_p j} & \dots & \eta_{\alpha_p \alpha_{p+1}} \end{bmatrix}$$

Definição 2.12: Seja  $K$  um complexo orientado. Uma  $p$ -cadeia de  $K$ , é uma função  $f$  do conjunto de  $p$ -simplexos orientados de  $K$  nos inteiros  $\mathbb{Z}$ , tal que  $f(-\sigma^p) = -f(\sigma^p)$ .

Se  $\sigma^p$  é um simplexo, há uma cadeia  $f_{\sigma^p}$ , tal que  $f_{\sigma^p}(\tau^p) = 0$  se  $\tau^p \neq \sigma^p$  e  $f_{\sigma^p}(\sigma^p) = 1$ . Tal cadeia  $f_{\sigma^p}$  é chamada cadeia elementar e será denotada por  $\sigma_p$ .

O conjunto de todas as  $p$ -cadeias de  $K$  será denotado por  $C_p(K)$ . Se  $f \in C_p(K)$  e  $\{\sigma_i^p\}$ ,  $0 \leq i \leq \alpha_p$ , é o conjunto de todos os  $p$ -simplexos de  $K$ , podemos representar  $f$  pela soma formal

$$f = \sum_{i=0}^{\alpha_p} f(\sigma_i^p) \sigma_i^p.$$

Se  $p < 0$  ou  $p > \dim K$ ,  $C_p(K)$  consta de um único elemento que será denotado por  $0_p$  ou simplesmente  $0$ .

Já que  $\mathbf{Z}$  é grupo comutativo,  $C_p(K)$  munido com a operação soma, induzida por  $\mathbf{Z}$ ,  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ , é grupo comutativo. Suponhamos que  $f$  e  $g$  são  $p$ -cadeias de  $K$  e que  $f(\sigma_i^p) = n_i$  e  $g(\sigma_i^p) = m_i$  são elementos de  $\mathbf{Z}$ . Pela definição de soma de  $p$ -cadeias obtemos

$$(f+g) = \sum_{i=0}^{\alpha_p} (n_i + m_i) \sigma_i^p.$$

Além disso, o inverso aditivo da  $p$ -cadeia  $f$  em  $C_p(K)$ , é a

$$p\text{-cadeia } -f = \sum_{i=0}^{\alpha_p} -n_i \sigma_i^p.$$

Definição 2.13: Sejam  $C_p(K)$  e  $C_{p-1}(K)$  os grupos das  $p$  e  $(p-1)$ -cadeias de  $K$ , respectivamente. Definimos a aplicação  $\partial_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ , por  $\partial_p = 0$ , se  $p \leq 0$

ou  $p > \dim K$ , e  $\partial_p \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle$   
 para cada  $p$ -simplexo orientado de  $K$  se  $0 < p \leq \dim K$ , sendo  $\hat{v}_i$  o vértice que é deixado fora.

Tal aplicação é chamada aplicação bordo. Agora se

$$f = \sum_{i=0}^{\alpha p} n_i \sigma_i^p, \text{ definimos } \partial f = \sum_{i=0}^{\alpha p} n_i \partial(\sigma_i^p).$$

Sejam  $f = \sum_{i=0}^{\alpha p} n_i \sigma_i^p$  e  $g = \sum_{i=0}^{\alpha p} m_i \sigma_i^p$ . Então,

$$\begin{aligned} \partial(f+g) &= \partial \left( \sum_{i=0}^{\alpha p} (n_i + m_i) \sigma_i^p \right) = \sum_{i=0}^{\alpha p} (n_i + m_i) \partial \sigma_i^p \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha p} n_i \partial \sigma_i^p + \sum_{i=0}^{\alpha p} m_i \partial \sigma_i^p \\ &= \partial f + \partial g. \end{aligned}$$

Portanto,  $\partial$  é um homomorfismo.

Teorema 2.14: Sejam  $\partial_p$  e  $\partial_{p-1}$  homomorfismos conforme definição 2.13. Então, a composta  $\partial_{p-1} \circ \partial_p$  é o homomorfismo trivial.

Demonstração: Se  $p < 2$ ,  $C_{p-2}(K)$  é um grupo trivial. Portanto  $\partial_{p-1} \circ \partial_p$  é trivial. Se  $p > \dim K$ ,  $\partial_p = 0$ , então,  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ . Suponhamos que  $2 \leq p \leq \dim K$ . Basta provar que para cada  $p$ -cadeia elementar  $\langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$ ,  $\partial_{p-1} \circ \partial_p \langle v_0 \dots v_p \rangle = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \circ \partial_p \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle &= \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (\partial \langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle) \end{aligned}$$

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p (\langle v_0 \dots v_p \rangle) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle \right. \\ \left. + \sum_{j=i+1}^p (-1)^j \langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_p \rangle \right].$$

Contudo, cada termo  $\langle v_0 v_1 \dots v_s \dots v_t \dots v_p \rangle$  onde,  $s < t$  aparecem duas vezes na soma acima, a saber, uma com coeficiente  $(-1)^{i+j-1}$  quando  $i=s$  e  $j=t$ , a segunda vez com coeficiente  $(-1)^{i+j}$  quando  $j=s$  e  $t=i$ . Então, os termos se cancelam dois a dois. Assim, o teorema fica provado.

Definição 2.15: Seja  $c_p$  um elemento de  $C_p(K)$ . Se  $\partial c_p = 0$  dizemos que  $c_p$  é um  $p$ -ciclo de  $K$ . O conjunto de todos os  $p$ -ciclos de  $K$  será denotado pelo símbolo  $Z_p(K)$ .

Note que  $Z_p(K)$  é o núcleo do homomorfismo  $\partial_p$  de  $C_p(K)$  em  $C_{p-1}(K)$  e é subgrupo de  $C_p(K)$ .

Definição 2.16: Suponhamos que  $p \geq 0$ . Uma  $p$ -cadeia  $b_p$  de  $K$  é um  $p$ -bordo de  $K$  se existe uma  $(p+1)$ -cadeia de  $K$ ,  $c_{p+1}$ , tal que  $\partial c_{p+1} = b_p$ . Denotaremos o conjunto de todos os  $p$ -bordos de  $K$  por  $B_p(K)$ .

Note que este conjunto é a imagem  $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$  do homomorfismo  $\partial_{p+1}$  e é um subgrupo de  $C_p(K)$ . Se  $n$  é a dimensão de  $K$ , então para  $p > n$ , temos  $C_p(K) = \{0\}$ . Em particular,  $C_{n+1}(K) = \{0\}$ . Portanto,  $B_n(K) = \{0\}$ . Por 2.16  $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$ .

Definição 2.17: Duas  $p$ -cadeias  $w_p$  e  $z_p$  de um complexo  $K$  são homólogas se existe uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  de  $C_{p+1}(K)$ , tal que  $\partial_{p+1}(c_{p+1}) = w_p - z_p$ .

Usaremos o símbolo  $w_p \sim z_p$  para representar duas  $p$ -cadeias homólogas  $w_p$  e  $z_p$ . Se um  $p$ -ciclo  $z_p$  é bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia, então  $z_p \sim 0$ . Esta relação de homologia para  $p$ -cadeias é uma relação de equivalência e, quando restrita a  $p$ -ciclos, divide  $Z_p(K)$  em classes de homologia representadas por  $[z_p] = \{w_p; w_p \sim z_p\}$ . As classes de homologia  $[z_p]$  são na realidade os conjuntos laterais de  $B_p(K)$ , isto é,  $z_p + B_p(K) = \{z_p + b_p, b_p \in B_p(K)\}$ .

Definição 2.18: Sejam  $K$  um complexo orientado e  $p$  um inteiro. O  $p$ -dimensional grupo de homologia de  $K$  é o grupo cociente  $H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K)$ .

Observe que para  $p < 0$ ,  $Z_p(K) = \{0\}$ , nesse caso, temos  $H_p(K) = \{0\}$ . Portanto, estaremos interessados somente em  $H_p(K)$ , com  $p \geq 0$ .

Exemplo 2.18.1: Seja  $K$  o complexo orientado,

$$K = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_0 v_1 v_2 \rangle\}.$$

Vamos determinar  $H_1(K)$ .

Se  $c_1 = n_1 \langle v_0 v_1 \rangle - n_2 \langle v_0 v_2 \rangle + n_3 \langle v_1 v_2 \rangle$  é uma  $1$ -cadeia de  $K$ , então

$$\begin{aligned} \partial c_1 &= n_1 \partial \langle v_0 v_1 \rangle - n_2 \partial \langle v_0 v_2 \rangle + n_3 \partial \langle v_1 v_2 \rangle \\ &= n_1 (v_1 - v_0) + n_2 (v_2 - v_0) + n_3 (v_2 - v_1) \end{aligned}$$

$$\partial c_1 = (n_1 - n_2)v_1 + (n_2 - n_3)v_2 + (n_1 - n_3)v_0.$$

Resolvendo  $\partial c_1 = 0$  obteremos  $n_1 = n_2 = n_3$ . Portanto, os ciclos em  $Z_1(K)$  tem a forma  $z_1 = n(\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_0 v_3 \rangle)$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ .

Como  $\partial n(\langle v_0 v_1 v_2 \rangle) = n(\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle)$  segue que,

$$B_1(K) = Z_1(K). \text{ Portanto, } H_1(K) = Z_1(K) / B_1(K) \cong \{0\}.$$

Definição 2.19: Seja  $K$  um complexo orientado. Dois simplexes  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são uni-ligados se uma das seguintes condições estão satisfeitas.

- i)  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem face comum;
- ii) há uma sequência  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  de 1-simplexos de  $K$ , tal que,  $\sigma_1$  e  $\gamma_1$  tem um vértice em comum,  $\sigma_2$  e  $\gamma_p$  tem um vértice em comum, e para  $1 \leq i \leq p$ ,  $\gamma_i$  e  $\gamma_{i+1}$  tem um vértice em comum.

Definição 2.20: Seja  $K$  um complexo orientado. Uma família

$$\{z_p^1, \dots, z_p^r\}$$

de  $p$ -ciclos é linearmente independente com respeito a homologia, ou linearmente independente módulo  $B_p(K)$ , se não existem inteiros  $n_1, \dots, n_r$ , não todos nulos, de modo que

$$\sum_{i=1}^r n_i z_p^i \sim 0.$$

O maior inteiro  $r$ , para o qual existe  $r$   $p$ -ciclos linearmente independentes com respeito a homologia, é representado por  $\beta_p(K)$  e é chamado  $p$ -ésimo número de Betti do complexo  $K$ .

Note que  $\beta_p(K)$  existe se  $K$  é finito.

Definição 2.21: Seja  $K$  um complexo orientado de dimensão  $n$ , tal que  $\beta_p(K)$  exista para todo  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ .

O número

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \beta_p$$

é chamado característica de Euler do complexo  $K$ .

Definição 2.22: Sejam  $K$  e  $L$  complexos orientados. Uma sequência  $\{\phi_p\}$  de homomorfismos  $\phi_p$  de  $C_p(K)$  em  $C_p(L)$ , tal que  $\partial\phi_p = \phi_{p-1}\partial$ , com  $p \geq 1$  é chamada aplicação de cadeia de  $K$  em  $L$ .

Teorema 2.23: A aplicação de cadeia  $\{\phi_p\}$  de um complexo  $K$  em um complexo  $L$  induz homomorfismos  $\phi_{*p}$  de  $H_p(K)$  em  $H_p(L)$  em cada dimensão  $p$ .

Demonstração: Seja  $\partial b_p = c_{p+1} \in B_p(K)$ . Então pela definição 2.22 segue que,  $\phi_p(b_p) = \phi_p \partial c_{p+1} = \partial \phi_{p+1} c_{p+1}$ . Portanto,  $\phi_p(b_p)$  é um bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia. Logo  $\phi_p$  aplica  $B_p(K)$  em  $B_p(L)$ .

Suponhamos  $p=0$ . Então,  $Z_0(K) = C_0(K)$  e  $Z_0(L) = C_0(L)$ . Logo, para  $p=0$ ,  $\phi_p$  aplica  $Z_0(K)$  em  $Z_0(L)$ . Para  $p \geq 1$ , suponhamos que  $z_p \in Z_p(K)$ . Então  $\partial\phi_p(z_p) = \phi_{p-1}\partial(z_p)$ . Como  $\partial z_p = 0$ , segue que  $\phi_{p-1}\partial(z_p) = 0$ . Portanto,  $\phi_p(z_p)$  é um  $p$ -ciclo em  $L$ .

Como  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$  e  $H_p(L) = Z_p(L)/B_p(L)$  definiremos o homomorfismo induzido por  $\phi_{*p}([z_p]) = [z_p]$ .

Teorema 2.24: Sejam  $K$  um complexo,  $K_1$  e  $K_2$  orientações de  $K$ . Então, os grupos de homologia  $H_p(K_1)$  e  $H_p(K_2)$  são isomorfos em cada dimensão  $p$ .

Demonstração: Para um  $p$ -simplexo,  $\sigma^p$ , de  $K$  seja  $i_{\sigma^p}$  a notação da orientação positiva  $\sigma^p$  no complexo  $K_i$ ,  $i=1,2$ . Então, há uma função  $\alpha$ , definida sobre os simplexos de  $K$ , tal que  $\alpha(\sigma^p) = \pm 1$  e  $i_{\sigma^p} = \alpha(\sigma^p) i_{\sigma^p}$ . Definiremos a sequência de homomorfismos  $\phi = \{\phi_p\}$ ,  $\phi_p: C_p(K_1) \rightarrow C_p(K_2)$ , por

$$\phi_p \left( \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i i_{\sigma^p} \right) = \sum_{i=1}^{\alpha_p} \alpha(\sigma_i^p) n_i i_{\sigma^p},$$

onde  $\sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i i_{\sigma^p}$  representa uma  $p$ -cadeia de  $K_1$ .

Seja  $c_p = \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i i_{\sigma_i^p}$ ,  $p \geq 1$ , uma  $p$ -cadeia de  $K_1$ . Então,

$$\begin{aligned} \phi_{p-1} \partial c_p &= \phi_{p-1} \partial \left( \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i i_{\sigma_i^p} \right) \\ &= \phi_{p-1} \left( \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} [i_{\sigma_i^p}, \sigma_j^{p-1}] i_{\sigma_j^{p-1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} [i_{\sigma_i^p}, \sigma_j^{p-1}] \phi_{p-1} (i_{\sigma_j^{p-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} [i_{\sigma_i^p}, i_{\sigma_j^{p-1}}] \alpha(\sigma_j^{p-1}) i_{\sigma_j^{p-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \alpha(\sigma_i^p) \alpha(\sigma_i^p) \alpha(\sigma_j^{p-1}) [i_{\sigma_i^p}, \sigma_j^{p-1}] i_{\sigma_j^{p-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{p-1} \partial c_p &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \alpha(\sigma_i^p) [2_{\sigma_i^p}, 2_{\sigma_j^{p-1}}] 2_{\sigma_j^{p-1}} \\
 &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \alpha(\sigma_i^p) \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} [2_{\sigma_i^p}, 2_{\sigma_j^{p-1}}] 2_{\sigma_j^{p-1}} \\
 &= \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i \alpha(\sigma_i^p) \partial(2_{\sigma_i^p}) \\
 &= \partial \sum_{i=1}^{\alpha_p} \phi_p \left( \sum_{i=1}^{\alpha_p} n_i 1_{\sigma_i^p} \right) = \partial \phi c_p.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\phi_{p-1} \partial c_p = \partial \phi_p c_p$ . Assim, pelo teorema 2.23 há um homomorfismo  $\phi_{*p}$  do grupo  $H_p(K_1)$  no grupo  $H_p(K_2)$  induzido em cada dimensão pela sequência  $\{\phi_p\}$ .

Como  $1_{\sigma^p} = \alpha(\sigma^p) 2_{\sigma^p}$  e  $\alpha(\sigma^p) = \pm 1$  vem que  $\alpha(\sigma^p) 1_{\sigma^p} = 2_{\sigma^p}$ . Então existe uma sequência de homomorfismos  $\{\psi_p\}$  de  $C_p(K_2)$  em  $C_p(K_1)$ . Procedendo como no parágrafo anterior, concluiremos que  $\psi_{p-1} \partial = \partial \psi_p$ . Assim, há um homomorfismo induzido  $\psi_{*p}$  de  $H_p(K_2)$  em  $H_p(K_1)$ .

Sendo  $\phi_p$  e  $\psi_p$  inversa uma da outra em cada dimensão  $p$ , segue que  $\psi_{*p} \circ \phi_{*p} = \text{id}$  em  $H_p(K_1)$  e  $\phi_{*p} \circ \psi_{*p} = \text{id}$  em  $H_p(K_2)$ . Portanto,  $\phi_{*p}$  é um isomorfismo do grupo de homologia  $H_p(K_1)$  no grupo de homologia  $H_p(K_2)$ .

Definição 2.25: Sejam  $K$  e  $L$  complexos. Uma aplicação simplicial de  $K$  em  $L$ , é uma função  $\phi$  de vértices de  $K$  em vértices de  $L$ , tal que se  $\sigma^p = [v_0 \dots v_p]$  é um simplexo de  $K$ , então os vértices  $\phi(v_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ , (não necessariamente distintos), são vértices de um simplexo de  $L$ .

Suponhamos que  $K$  e  $L$  são complexos e  $\phi$  uma aplicação simplicial. Se os vértices  $\phi(v_i)$  são todos distintos, o  $p$ -simplexo  $\langle \phi(v_0) \phi(v_1) \dots \phi(v_p) \rangle = \hat{\phi}(\sigma^p)$  é chamado imagem de  $\sigma^p$ . Se  $\phi$  é uma bijeção, claramente  $K$  e  $L$  são isomorfos, já que  $\hat{\phi}$  é um isomorfismo de  $K$  em  $L$ . Por conveniência futuramente representaremos  $\hat{\phi}$  por  $\phi$ .

Definição 2.26: Sejam  $\phi$  uma aplicação simplicial de  $K$  em  $L$  e  $\sigma^p$  um  $p$ -simplexo de  $K$ . Definimos a seqüência de homomorfismos  $\{\phi_p\}$  de  $C_p(K)$  em  $C_p(L)$  como segue. Definimos  $\phi_p$  nas  $p$ -cadeias elementares por

$$\phi_p(\sigma^p) = \begin{cases} 0 & ; \text{ se os vértices } \phi(v_i) \text{ não são todos distintos.} \\ \phi(\sigma^p) & ; \text{ se os vértices } \phi(v_i) \text{ são todos distintos.} \end{cases}$$

A função  $\phi_p$ , pode ser estendida a um homomorfismo  $\phi_p$  de  $C_p(K)$  em  $C_p(L)$ . Isto é, dada uma  $p$ -cadeia de  $K$

$$\sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \sigma_i^p, \text{ definimos } \phi_p\left(\sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \sigma_i^p\right) = \sum_{i=0}^{\alpha_p} \phi_p(n_i \sigma_i^p).$$

Teorema 2.27: Se  $\phi: K \rightarrow L$  é uma aplicação simplicial a seqüência  $\{\phi_p\}$  de homomorfismos da definição 2.26 é na realidade uma aplicação de cadeia.

Demonstração: Cada  $\phi_p$  é um homomorfismo. Para provar que  $\partial \phi_p = \phi_{p-1} \partial$  é suficiente provar que  $\partial \phi_p(\sigma^p) = \phi_{p-1} \partial(\sigma^p)$ , para cada  $p$ -cadeia elementar  $\sigma^p$  de  $K$ ,  $p \geq 1$ . Seja  $\sigma^p = \langle v_0 \dots v_p \rangle$

e suponhamos que todos os  $\phi(v_i)$  são distintos. Então,

$$\phi_p(\langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle) = \langle \phi(v_0) \phi(v_1) \dots \phi(v_p) \rangle.$$

Seja  $\sigma_j^{p-1}$  a  $(p-1)$ -face de  $\sigma^p$  obtida pela supressão de  $j$ -ésimo vértice. Assim,

$$\begin{aligned} \phi_{p-1}(\sigma_j^{p-1}) &= \phi_{p-1}(\langle v_0 \dots v_{j-1} v_{j+1} \dots v_p \rangle) \\ &= \langle \phi(v_0) \phi(v_1) \dots \phi(v_{j-1}) \phi(v_{j+1}) \dots \phi(v_p) \rangle. \end{aligned}$$

De maneira que

$$\begin{aligned} \partial \phi_p(\sigma^p) &= \partial \langle \phi(v_0) \dots \phi(v_p) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \langle \phi(v_0) \dots \widehat{\phi(v_j)} \dots \phi(v_p) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \phi_{p-1}(\sigma_j^{p-1}) = \phi_{p-1} \left( \sum_{j=0}^p (-1)^j \sigma_j^{p-1} \right) \\ &= \phi_{p-1} \partial(\sigma^p). \end{aligned}$$

Agora suponhamos que  $\phi(v_j) = \phi(v_k)$  para  $j < k$ . Então,  $\phi_p(\sigma^p) = 0$  e  $\partial \phi(\sigma^p) = 0$ . Além disso,

$$\phi_{p-1} \partial(\sigma^p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_p \rangle.$$

Note que se  $i \neq j$  ou  $i \neq k$   $\phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle = 0$ . Os dois

termos restantes são  $(-1)^j \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v_j} \dots v_p \rangle$  e

$(-1)^k \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v_k} \dots v_p \rangle$ . Se os  $\phi(v_i)$  não são distintos te-

mos  $\phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_p \rangle = 0$ . Se todos são distintos temos

$$\begin{aligned} \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots v_j \dots v_p \rangle &= \langle \phi(v_0) \dots \widehat{\phi(v_j)} \dots \phi(v_k) \dots \phi(v_p) \rangle \\ &= (-1)^{k-j-1} \langle \phi(v_0) \dots \widehat{\phi(v_k)} \dots \phi(v_p) \rangle \\ &= (-1)^{k-j-1} \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v_k} \dots v_p \rangle \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \phi_{p+1} \partial(\sigma^p) &= (-1)^j \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v}_j \dots v_p \rangle + (-1)^k \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v}_k \dots v_p \rangle \\ &= (-1)^j (-1)^{k-j-1} \phi_{p-1} \langle v_0 v_1 \dots \widehat{v}_k \dots v_p \rangle + (-1)^k \phi_{p-1} \langle v_0 \dots \widehat{v}_k \dots v_p \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência  $\{\phi_p\}$  é uma aplicação de cadeia.

Lema 2.28: Seja  $K$  um complexo do  $R^n$ . O poliedro  $|K|$  associado a  $K$  é compacto.

Demonstração: Seja  $\sigma$  um simplexo de  $K$ , seja  $\bar{\sigma}$  o simplexo fechado com os mesmos vértices de  $\sigma$ . Então, temos

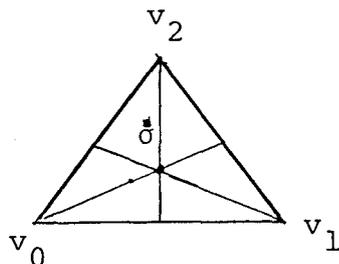
$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma = \bigcup_{\bar{\sigma} \in K} \bar{\sigma}$ . Este último, por ser união finita de compactos é compacto.

Definição 2.29: Seja  $\sigma^k$  um simplexo aberto. O fecho de  $\sigma^k$ , denotado por  $cl(\sigma^k)$ , é o complexo consistindo de  $\sigma^k$  e todas suas faces abertas.

Definição 2.30: Seja  $\sigma^p = \langle v_0, \dots, v_p \rangle$  um simplexo orientado do  $R^n$ . O baricentro de  $\sigma^p$  é o ponto definido por

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i.$$

Ver figura abaixo.



Definição 2.31: Sejam  $K$  e  $L$  complexos orientados com políedros associados  $|K|$  e  $|L|$ , respectiva-

mente, e  $\phi$  uma aplicação simplicial de vértices de  $K$  em vértices de  $L$ . Extendemos agora  $\phi$  para uma função  $\phi: |K| \longrightarrow |L|$  como segue.

Se  $x \in |K|$ , há um único simplexo  $\sigma^r = \langle v_0 v_1 \dots v_r \rangle$  em  $K$ , tal que  $x \in \sigma^r$ . Portanto, se  $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$  são vértices de  $\sigma^r$  e as coordenadas baricêntricas  $\lambda_i$  são todas

positivas temos  $x = \sum_{i=0}^r \lambda_i v_i$ . Definimos

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \phi(v_i).$$

Esta função,  $\phi: |K| \longrightarrow |L|$ , é chamada aplicação simplicial de  $|K|$  em  $|L|$ .

Teorema 2.32: Toda aplicação simplicial,  $\phi: |K| \longrightarrow |L|$ , é contínua.

Demonstração: Seja  $\sigma$  um  $p$ -simplexo arbitrário de  $K$ . Como  $|\bar{\sigma}|$  é fechado basta mostrar que  $\phi|_{|\bar{\sigma}|}: |\bar{\sigma}| \longrightarrow |L|$  é contínua.

Seja  $x_n = \sum_{i=0}^p \lambda_{ni} v_i$  uma sequência. Suponhamos que  $x_n$

converge para  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$ . Lembremos que  $\sum_{i=0}^p \lambda_{ni} = \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ .

Então, temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^p \lambda_{ni} v_i - \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^p \lambda_{ni} - \sum_{i=0}^p \lambda_i \right) v_i - (1v_0 - 1v_0) \end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^p (\lambda_{n_i} - \lambda_i) v_i \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{i=0}^p \lambda_{n_i} \right) v_0 - \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \right) v_0 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^p (\lambda_{n_i} - \lambda_i) v_i - \sum_{i=0}^p (\lambda_{n_i} - \lambda_i) v_0 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^p (\lambda_{n_i} - \lambda_i) (v_i - v_0) \right).
 \end{aligned}$$

Como  $(v_i - v_0)$  são vetores linearmente independentes,  $i > 0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n_i} - \lambda_i) = 0$ ,  $i \neq 0$ . Portanto,  $\lambda_{n_i}$  converge para  $\lambda_i$  para todo

$i > 0$ . Repetindo o processo acima, substituindo  $v_n$  por  $v_0$ , tere-

mos  $\lambda_{n_0}$  convergindo para  $\lambda_0$ . Concluimos que

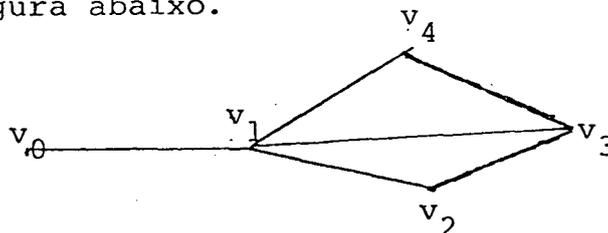
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \lambda_{n_i} \phi(v_i) = \sum_{i=0}^p \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n_i} \phi(v_i) = \sum_{i=0}^p \lambda_i \phi(v_i) = \phi(x).$$

Portanto, a restrição de  $\phi$  a  $|\sigma|$  é contínua.

Definição 2.33: Sejam  $K$  um complexo e  $v$  um vértice de  $K$ .

A estrela aberta de  $v$ , denotada por  $ost(v)$ , é a reunião de todos os simplexes  $\sigma$  de  $|K|$  para os quais  $v$  é vértice.

Exemplo 2.33.1: Suponhamos que o complexo  $K$  é dado pela figura abaixo.



A estrela aberta de  $v_1$  é  $ost(v_1) = |K| - [v_0] - [v_2 v_3] - [v_3 v_4]$ ,

Definição 2.34: Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $f$  e  $g$  funções de  $X$  em  $Y$ . Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  se existe uma função contínua  $F: X \times I \longrightarrow Y$ , tal que para cada  $x \in X$  e  $t \in I$ ,  $F(x,0) = f(x)$  e  $F(x,1) = g(x)$ .

Tal função  $F$  é chamada homotopia de  $f$  em  $g$ .

Definição 2.35: Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliédros associados a  $K$  e  $L$ , respectivamente,  $f: |K| \longrightarrow |L|$  uma aplicação contínua. Seja  $g: |K| \longrightarrow |L|$  uma aplicação simplicial. Se existe uma homotopia de  $g$  em  $f$ , dizemos que  $g$  é uma aproximação simplicial de  $f$ .

Lema 2.36: Seja  $K$  um complexo. Os vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  são vértices de um simplexo de  $K$  se, e somente se,

$$\text{se, } \bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i) \neq \emptyset.$$

Demonstração: Suponhamos que  $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  são vértices de um simplexo  $\sigma^p$  de  $K$ . Então,  $\sigma^p \subseteq \text{ost}(v_i)$  para  $i=0, 1, \dots, p$ .

Portanto,  $\emptyset \neq \sigma^p \subseteq \bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i)$ .

Reciprocamente seja  $x \in \bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i)$ . Assim, para cada  $i=0, 1, \dots, p$ ,

há um simplexo  $\sigma_i$  em  $K$ , tal que  $v_i$  é vértice de  $\sigma_i$  e  $x \in \sigma_i^p$ . Como  $x \in |K|$ , pela definição, há um único simplexo  $\sigma_0$  de  $K$ , tal que  $x \in \sigma_0$ . Portanto, todos os vértices  $v_i$  são vértices de  $\sigma_0$ .

Teorema 2.37: Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliédros associados a  $K$  e

$L$ , respectivamente,  $f: |K| \longrightarrow |L|$  uma aplicação contínua e  $g$  uma aplicação de vértices de  $K$  em vértices de  $L$ . Então  $g$  pode ser estendida a uma aproximação simplicial de  $f$  se para cada vértice  $v$  de  $K$  temos

$$f(\text{ost}(v)) \subset \text{ost}(g(v)).$$

Demonstração Suponhamos que  $f(\text{ost}(v)) \subset \text{ost}(g(v))$ . Sejam  $\{v_0, \dots, v_p\}$  vértices de um simplexo de  $K$ . Pelo lema 2.36,

temos  $\bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i) \neq \emptyset$ . Então  $f(\bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i)) \neq \emptyset$  e

$$f(\bigcap_{i=0}^p \text{ost}(v_i)) = \bigcap_{i=0}^p f(\text{ost}(v_i)) \subset \bigcap_{i=0}^p \text{ost}(g(v_i)) \neq \emptyset.$$

Portanto, pelo lema 2.36  $\{g(v_0), \dots, g(v_p)\}$  são vértices de um simplexo de  $L$ . Logo por 2.25, temos uma extensão para uma aplicação simplicial  $g: |K| \longrightarrow |L|$  e

$$g\left(\sum_{i=0}^p \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^p \lambda_i g(v_i).$$

Sejam  $x \in |K|$  e  $\sigma = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$  um simplexo de  $K$  que contém  $x$ . Seja  $v$  um vértice de  $\sigma$ . Como  $x \in \text{ost}(v)$  temos que  $f(x) \in f(\text{ost}(v)) \subset \text{ost}(g(v))$ . Sendo  $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_p v_p$  temos  $g(x) = \lambda_0 g(v_0) + \dots + \lambda_p g(v_p)$ . Como  $g$  não é obrigatoriamente injetiva alguns dos  $g(v_i)$  podem ser repetidos. Assim, a  $g(v)$  coordenada baricêntrica de  $g(x)$  é maior ou igual a  $v$  coordenada baricêntrica de  $x$ . Logo  $g(x) \in \text{ost}(g(v))$ . Como ambos,  $f(x)$  e  $g(x)$ , pertencem a cada  $\text{ost}(g(v_i))$ ,  $i=0, 1, \dots, p$ ,  $\{f(x), g(x)\}$  está contido na interseção das  $\text{ost}(g(v_i))$ . Então,  $\{g(v_0), \dots, g(v_p)\}$  são vértices de um simplexo  $\tau$  em  $L$  que contém  $f(x)$  e  $g(x)$ . Assim, po-

demos unir  $f(x)$  e  $g(x)$  por uma linha reta inteiramente contida em  $\tau \subseteq |L|$ . Seja  $H: |K| \times I \longrightarrow |L|$  definida por  $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ ,  $x \in |K|$  e  $t \in I$ . Obviamente  $H$  é uma homotopia de  $f$  em  $g$ .

Definição 2.38: Sejam  $\sigma^p = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$  um simplexo e  $v$  um ponto para o qual o conjunto  $\{v, v_0, v_1, v_2, \dots, v_p\}$  é geometricamente independente. Definimos o  $(p+1)$ -simplexo  $v\sigma^p$  por  $v\sigma^p = \langle vv_0 v_1 \dots v_p \rangle$ .

Se  $c = \sum_{i=0}^p n_i \sigma_i^p$  é uma  $p$ -cadeia de  $K$  e  $v$  um vértice de  $K$ , então  $vc$  denota a  $(p+1)$ -cadeia,  $vc = \sum_{i=0}^p n_i v\sigma_i^p$ , caso cada  $v\sigma_i^p$  exista.

Observe que se  $vc_1$  e  $vc_2$  existem,  $v(c_1 + c_2)$  existe e é igual a  $vc_1 + vc_2$ .

Lema 2.39: Sejam  $c$  uma  $p$ -cadeia em um complexo  $K$ ,  $v$  um vértice para o qual a  $(p+1)$ -cadeia  $vc$  é definida. Então  $\partial vc = c - v\partial c$ .

Demonstração: Seja  $\sigma$  um simplexo de  $K$ , tal que,  $v\sigma$  é definido. Então,

$$\begin{aligned} \partial(v\sigma) &= \partial \langle vv_0 v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle \\ &= \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle - \langle vv_1 \dots v_p \rangle + \dots + (-1)^{i+1} \langle vv_0 v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle + \\ &\quad + (-1)^{i+2} \langle vv_0 \dots \widehat{v}_{i+1} \dots v_p \rangle + \dots + (-1)^{p+1} \langle vv_0 \dots v_{p-1} \rangle \\ &= \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle - v \langle v_1 v_2 \dots v_p \rangle + \dots + (-1)^{p+1} v \langle v_0 \dots v_{p-1} \rangle \end{aligned}$$

$$\partial(v\sigma) = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle - v \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0 v_1 \dots v_k \dots v_p \rangle$$

$$= \sigma - v\partial\sigma.$$

Para o caso geral, estendemos a demonstração por line-

nearidade. Seja  $c = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \sigma_i^p$  uma p-cadeia de k. Então,

$$vc = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i v\sigma_i^p \quad \text{e} \quad \partial vc = \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i v\sigma_i^p. \quad \text{Assim,}$$

$$\partial vc = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \partial v\sigma_i^p = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i (\sigma_i^p - v\partial\sigma_i^p) = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \sigma_i^p - v \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \partial\sigma_i^p = c - v\partial c.$$

Definição 2.40: Sejam  $v \in \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$ . O par  $(v, B)$  está em posição geral se  $v \notin B$  e para cada  $b_1, b_2 \in B$ , com  $b_1 \neq b_2$ , temos  $[v, b_1] \cap [v, b_2] = \{v\}$ .

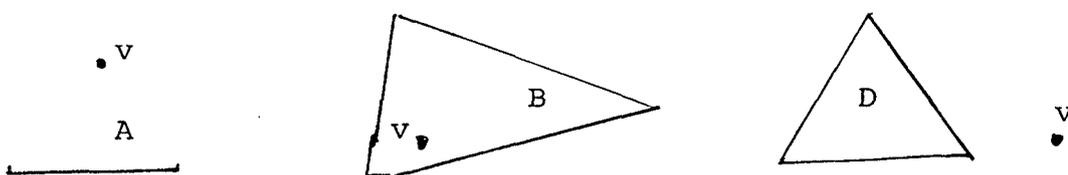
Se  $(v, A)$  está em posição geral definimos  $vA = \bigcup_{a \in A} [v, a]$ ,

que será chamado "v-cone" sobre A. Se A é um simplexo

$\sigma^p = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$ , e  $vA$  está em posição geral,  $\{v, v_0, \dots, v_p\}$  é um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  geométricamente independentes e determina um (p+1)-simplexo (aberto)  $\sigma^p$ .

Note que  $v\sigma^p$  de 2.38 e  $vA$  de 2.40 são diferentes. o segundo contém um subconjunto  $\{v\} \cup \sigma^p$  enquanto que este e  $v\sigma^p$  são disjuntos. Sempre que escrevemos  $v\sigma^p$ , entendemos 2.38, caso contrário mencionaremos.

Exemplo 2.40.1: Os pares  $(v, A)$  e  $(v, B)$ , representados abaixo, estão em posição geral, mas o par  $(v, D)$  não está em posição geral.



Teorema 2.41: Sejam  $\sigma^P$  um simplexo aberto e  $A$  a maior das  $k$ -faces de  $\sigma^P$  com  $k < p$ . Seja  $v$  um ponto de  $\sigma^P$ . Então, o par  $(v, A)$  está em posição geral. Além disso,

$$vA = \bigcup_{\sigma^k} (v, \sigma^k) = (v, \bigcup_{\sigma^k} \sigma^k) = \overline{\sigma^P}.$$

Demonstração: Sejam  $\sigma^P = (v_0, v_1, \dots, v_p)$  um simplexo aberto,  $k < p$ , e  $\sigma^k$  uma  $k$ -face de  $\sigma^P$ . Sejam  $b_1, b_2 \in \sigma^k$ . Suponhamos que existe  $w \neq v$  em  $\sigma^P$ , tal que  $w \in [v, b_1] \cap [v, b_2]$ . Consideremos as expressões de  $b_1, b_2$  e  $v$  dadas em coordenadas baricêntricas,

$$\text{isto é, } b_1 = \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i, \quad b_2 = \sum_{i=0}^p \beta_i v_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i. \quad \text{Como } b_1 \notin \sigma^P$$

e  $b_2 \notin \sigma^P$  temos  $\alpha_{i_0} = 0$  e  $\beta_{i_1} = 0$  para algum  $i_0$  e  $i_1$ . Como

$v \in \sigma^P$ , temos que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i$ . Sendo  $w \in [v, b_1]$ , po-

demos escrever  $w = t_1 v + (1-t_1)b_1$  para algum  $t_1 \in I$ . Então,

$$w = t_1 \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i + (1-t_1) \sum_{i=0}^p \alpha_i v_i = \sum_{i=0}^p [t_1 \lambda_i + (1-t_1) \alpha_i] v_i.$$

De maneira semelhante para  $w \in [v, b_2]$  temos

$$w = \sum_{i=0}^p [t_2 \lambda_i + (1-t_2) \beta_i] v_i \quad \text{para algum } t_2 \in I.$$

Como as coordenadas baricêntricas de um elemento de  $\sigma^P$  são únicas temos

$$t_1 \lambda_i + (1-t_1) \alpha_i = t_2 \lambda_i + (1-t_2) \beta_i ; i=0,1,\dots,p$$

$$t_1 \lambda_i - t_2 \lambda_i = (1-t_2) \beta_i - (1-t_1) \alpha_i$$

$$(t_1-t_2) = 1/\lambda_i [(1-t_2) \beta_i - (1-t_1) \alpha_i]$$

Tomando  $i=i_0$  temos  $\alpha_{i_0}=0$  e

$$(t_1-t_2) = 1/\lambda_{i_0} [(1-t_2) \beta_{i_0}] \geq 0 .$$

Tomando  $i=i_1$  temos  $\beta_{i_1}=0$  e

$$(t_1-t_2) = 1/\lambda_{i_1} [(1-t_1) \alpha_{i_1}] \leq 0 .$$

Portanto,  $t_1-t_2=0$ . Logo  $t_1=t_2$  e  $(1-t_1) \alpha_i = (1-t_2) \beta_i$ .

Como  $t_1 \neq 1$  se  $w \neq v$ , segue que  $\alpha_i = \beta_i$  para todo  $i$ . Logo

$b_1 = b_2$ , completando assim a demonstração de que o par  $(v, A)$  está em posição geral.

Agora  $v \in \sigma^P$ , porque  $A \subseteq \sigma^P$ ,  $v \in \sigma^P$  e  $\sigma^P$  é convexo. Também  $\{v\} \cup \{A\} \subseteq vA$ . Portanto, basta demonstrar que, se  $w \in \sigma^P$  e  $v \neq w$  então  $w \in vA$ . Assim, suponhamos que  $w \in \sigma^P$  e que  $w \neq v$ . Sejam  $\lambda_i$  e  $\gamma_i$  as coordenadas baricentricas de  $v$  e  $w$ , respectivamente. Obviamente são todas positivas. Como

$$\sum_{i=0}^p (\gamma_i - \lambda_i) = 0 \text{ e } \gamma_i - \lambda_i \neq 0 \text{ para algum } i, \text{ existe } j \neq i, \text{ tal que}$$

$$\gamma_j - \lambda_j \neq 0 \text{ para algum } j, \text{ e tal que } \gamma_i - \lambda_i \text{ e } \gamma_j - \lambda_j \text{ tem sinais}$$

opostos. Consideremos agora o conjunto (não vazio)  $J$  de todos

os  $j$ , tal que  $\gamma_j - \lambda_j$  é negativo. Definimos para  $j \in J$

$$f_j: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } f_j(t) = \lambda_j + t(\gamma_j - \lambda_j). \text{ Como } f_j(1) > 0 \text{ e}$$

$f_j(t) > 0$  para grandes valores de  $t$ , existe um  $t_j > 1$ , tal que

$$\lambda_j + t_j(\gamma_j - \lambda_j) = 0. \text{ Escolha } j_0 \text{ dentre os } j, \text{ tal que } t_{j_0} \leq t_j \text{ para}$$

todo  $j \in J$ . Então,  $\lambda_{j_0} + t_{j_0}(\gamma_{j_0} - \lambda_{j_0}) = 0$  e

$\lambda_i + t_{j_0}(\gamma_i - \lambda_i) \geq 0$  para todo  $i=0,1,\dots,p$ . Assim,

$$\begin{aligned} v + t_{j_0}(v-w) &= \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i + t_{j_0} \left( \sum_{i=0}^p \gamma_i v_i - \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (\lambda_i + t_{j_0}(\gamma_i - \lambda_i)) v_i. \end{aligned}$$

Portanto,  $v + t_{j_0}(v-w) \in A$ . Também,

$$w = (1/t_{j_0})x + [(t_{j_0} - 1)/t_{j_0}]v = t'x + (1-t')v, \text{ com } t' = (1/t_{j_0})$$

Portanto,  $w \in vA$ . Logo, sendo  $\sigma^k$  face de  $\sigma^p$  e  $k < p$ , temos

$$vA = \bigcup_{\sigma^k} (v, \sigma^k)_{\sigma^p}.$$

Definição 2.42: Seja  $K$  um complexo. Uma subdivisão de  $K$  é um complexo  $K^{(*)}$ , tal que  $|K^{(*)}| = |K|$  e se  $\sigma \in K^{(*)}$  então  $\sigma$  está contido em algum simplexo de  $K$ .

Num complexo  $K$  a notação  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$  indica que cada  $\sigma_i$  é simplexo e que  $\sigma_i$  é face de  $\sigma_{i+1}$ , mas  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ .

Teorema 2.43: Sejam  $\overline{\sigma^p}$  um  $p$ -simplexo fechado,  $L$  uma subdivisão de  $A = \bigcup_{\sigma^k} \sigma^k$ ,  $k < p$  e  $\sigma^k$  é face de  $\sigma^p$ . Seja  $v \in \sigma^p$ .

Então,  $(v, |L|)$  está em posição geral. Além disso,  $v|L|$  é um poliédro  $|R|$  onde  $R$  é definido por

$$R = L \cup \left( \bigcup_{\tau \in L} v\tau \right) \cup \{v\}.$$

O complexo  $R$  é uma subdivisão de  $cl(\sigma^p)$ .

Demonstração: Pelo teorema 2.41  $(v, \sigma^k)$ ,  $k < p$ , está em posição geral. Como  $|L| = A$ , segue que  $(v, |L|)$  está em posição geral e  $v|L| = |\sigma|$ , onde  $A = \bigcup \sigma^k$ ,  $\sigma^k \in L$ .

Mostraremos agora que  $\tilde{K}$  é complexo. Obviamente  $\tilde{K}$  é um conjunto de simplexes abertos. Contudo, cada simplexo diferente de  $(v)$  em  $K$ , ou está em  $L$  ou é da forma  $(\tau, v)$ . Se está, todas suas faces estão em  $L$ , assim, em  $\tilde{K}$ . Se o simplexo é da forma  $(L, \tau)$ , suas faces são  $(v), \tau$ , as faces de  $\tau$  e os simplexes  $(v, \alpha)$ , onde  $\alpha$  é face de  $\tau$ . Em cada caso, as faces estão em  $\tilde{K}$ .

Sejam  $\gamma$  e  $\lambda$  dois simplexes de  $L$ . Como  $L$  é complexo temos  $\gamma \cap \lambda = \emptyset$ . Além disso, se  $\gamma \in L$  então  $\gamma \cap (v, \gamma) = \emptyset$  pois  $(v, \gamma) \subset \sigma^p$ . Obviamente  $(v)$  não intercepta nenhum outro simplexo de  $\tilde{K}$ . Suponhamos agora que  $\beta$  e  $v$  são simplexes de  $L$ . Sendo  $(\beta, v) \cap (\beta, v) \neq \emptyset$  suponhamos que  $w$  é elemento dessa interseção. Como  $v\beta$  é simplexo aberto, segue que  $w \neq v$ . Pelo teorema 2.41, existe um único  $x \in A = |L|$ , tal que  $w \in [v, x]$ . Como  $|(v, \beta)| \subseteq v|\beta|$ , concluímos que  $x \in \beta$ . Assim,  $\beta \cap v \neq \emptyset$ . Portanto, sendo  $L$  um complexo, temos  $\beta = v$  e  $(\beta, v) = (v, v)$ . Então,  $\tilde{K}$  é um complexo. O conjunto de pontos de  $|\tilde{K}|$  é

$$|\tilde{K}| = \bigcup_{\rho \in K} |\rho| = \bigcup_{\tau \in L} |\tau| \cup \left\{ \left( \bigcup_{\tau \in L} (v, \tau) \right) \cup \{v\} \right\} \\ = A \cup \{\sigma\} = |\bar{\sigma}|.$$

Teorema 2.44: Seja  $K$  um complexo e seja

$K^{(1)} = \{\dot{\sigma}_0 \dots \dot{\sigma}_r; \sigma_0 < \sigma_1 \dots < \sigma_r\}$ . Dizemos que  $K^{(1)}$  é uma subdivisão de  $K$ . Além disso, se  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  são elementos de  $K$  e  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$ , então,  $(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r) \subset \sigma_r$ .

Demonstração: A demonstração é feita sobre a dimensão de  $K$ .

Se  $L$  é um complexo e  $\dim(K)=0$ , então  $L^{(1)}=L$  e o teorema vale.

Suponhamos que o teorema é verdadeiro para todo complexo de dimensão menor que  $n$ . Então, o  $(n-1)$ -esqueleto  $K^{n-1}$  de  $K$  é um complexo de dimensão  $n-1$ . Portanto, o teorema vale para  $K^{n-1}$ .

No que segue, usaremos  $K$  para  $K^n$ , para simplificar a notação.

Seja  $\tau$  um simplexo de  $K^{(1)}$ , então existe uma sequência  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$  em  $K$ , tal que  $\tau = (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r)$ . Assim,  $\tau \in \sigma_r$ .

De fato, se  $x = \lambda_0 \dot{\sigma}_0 + \dots + \lambda_r \dot{\sigma}_r$ , com  $\lambda_i > 0$ , sendo cada  $\dot{\sigma}_i$  combinação convexa dos vértices de  $\sigma_r$ ,  $x$  também o é. Além disto, as

coordenadas baricêntricas de  $x$  em relação a estes vértices são

todas maiores que  $\lambda_r / (r+1)$  que é positivo. Portanto,  $x \in \sigma_r$ . Logo,

cada simplexo de  $K^{(1)}$  é subconjunto de  $K$ .

Seja  $\tau$  um simplexo de  $K^{(1)}$ . Então, existe uma sequência  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$  em  $K$ , tal que  $\tau = (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r)$ . Como

qualquer face de  $\tau$  é determinada por um subconjunto de vértices

de  $\tau$ , os vértices desta face serão os baricentros de uma sub-

sequência da sequência  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$ . Portanto, qualquer face

de  $\tau$  é elemento de  $K^{(1)}$ .

Suponhamos agora que  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são simplexos de  $K^{(1)}$  e que  $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$ . Então, existem sequências em  $K$ ,

$\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$ , tal que  $\tau_1 = (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r)$  e

$\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_s$ , tal que  $\tau_2 = (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_s)$ . Suponhamos que

$(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r) \cap (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_s) \neq \emptyset$ . Seja  $w$  um elemento desta

interseção. Então,  $w \in \sigma_r \cap \rho_s$ . Como  $K$  é complexo segue que

$\sigma_r = \rho_s$ ,  $\dot{\sigma}_r = \dot{\rho}_s$  e, portanto,  $r=s$ . Assim,  $(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1})$  e

$(\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{s-1})$  são faces de  $\dot{\sigma}_r = \dot{\rho}_r$ . Portanto,  $(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r)$  e  $(\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_r)$  são simplexos de  $|\text{cl}(\sigma_r)| = |\text{cl}(\rho_r)| = A$ .

Agora  $\dot{\sigma}_r (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1}) = (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1} \dot{\sigma}_r) = \tau_1$  e

$\dot{\rho}_r (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{r-1}) = (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{r-1} \dot{\rho}_r) = \tau_2$ . Como  $w \in \tau_1$  e

$w \in \tau_2$  existem  $z_1 \in (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1}) \subset A$  e  $z_2 \in (\dot{\rho}_0 \dots \dot{\rho}_{r-1}) \subset A$ ,

tal que  $w \in [\dot{\sigma}_r, z_1]$  e  $w \in [\dot{\rho}_r, z_2]$ . Mas  $w \neq \dot{\sigma}_r = \dot{\rho}_r$ , portanto,

temos  $z_1 = z_2 \in (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1}) \cap (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{r-1})$ . Como

$(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1})$  e  $(\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{r-1})$  são simplexos de

$(K^{n-1})^{(1)}$ , que por hipótese é um complexo, segue que

$(\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1}) = (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{r-1})$ . Portanto,

$\tau_1 = \dot{\sigma}_r (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_{r-1}) = \dot{\rho}_s (\dot{\rho}_0 \dot{\rho}_1 \dots \dot{\rho}_{s-1}) = \tau_2$ . Logo,  $K^{(1)}$

é um complexo.

Mantendo a notação do parágrafo anterior vamos mostrar que  $|K^{(1)}| = |K|$ . Seja  $\sigma^p$  um simplexo fixo de  $K$  e  $x \in \sigma^p$ . Seja  $L$  um complexo de simplexos em  $K^{(1)}$ , tal que existe face  $\tau^k$  de

$\sigma^p$ ,  $k < p$ , de modo que  $\tau \subseteq \sigma^p$ . Pela indução,  $L$  é subdivisão

da fronteira de  $\sigma^p$ . Assim, por 2.43,  $\tilde{K} = L \cup \left( \bigcup_{\tau \in L} (\dot{\sigma}^p, \tau) \right) \cup \{\dot{\sigma}^p\}$

é subdivisão de  $\sigma^p$ . Obviamente os simplexos de  $\tilde{K}$  são

simplexos de  $K^{(1)}$ , daí  $x \in |\tilde{K}| \subseteq |K^{(1)}|$ .

Reciprocamente, se  $\rho$  é elemento de um simplexo de  $K^{(1)}$ , existe uma sequência  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$  em  $K$ , tal que

$\rho \in (\dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_r)$ . Portanto,  $\rho \in \overline{\sigma}_r \subseteq |K|$ .

O complexo  $K^{(1)}$  é chamado primeira subdivisão baricêntrica de  $K$ .

Definição 2.45: Definimos a n-ésima sub-divisão baricêntrica de  $K, K^{(n)}$ , como sendo a primeira sub-divisão baricêntrica de  $K^{(n-1)}$ .

Seja  $\sigma^0 < \sigma^1 < \dots < \sigma^p$  uma seqüência de simplexos de  $K$ , tal que  $\sigma_i$  é face de  $\sigma_{i+1}$ ,  $i=0,1,\dots,p$ . Seja  $v_0 < v_1 < \dots < v_p$  uma ordenação dos vértices de  $\sigma^p$ , de modo que  $\sigma^i = \langle v_0 v_1 \dots v_i \rangle$ . Agora considere o simplexo  $(\overset{\circ}{\sigma}^0 < \overset{\circ}{\sigma}^1 < \dots < \overset{\circ}{\sigma}^p)$  em  $K^{(1)}$  com esta ordenação em seus vértices. Dizemos que  $\langle \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_p \rangle$  tem orientação positiva se  $\langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$  é positivamente orientado e orientação negativa se  $\langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$  é negativamente orientado. Note que há simplexos em  $K^{(1)}$  cujas orientações não são definidas por este processo, estes podem ser orientados aleatoriamente.

Definição 2.46: Seja  $\sigma$  um simplexo de  $K$ . Definimos o diâmetro de  $\sigma$  como sendo,  $\text{diam}\sigma = \max \{ |v-w| \}$  onde  $v$  e  $w$  são vértices de  $\sigma$

Seja  $\sigma^p = \langle v_0 v_1 \dots v_p \rangle$ . Suponhamos que  $x, y \in \sigma$ . Assim,

$$y = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i. \text{ Então,}$$

$$|x-y| = \left| \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \right) x - \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \right| = \left| \sum_{i=0}^p \lambda_i (x-v_i) \right| \leq \sum_{i=0}^p \lambda_i |x-v_i|$$

$$\leq \max\{|x-v_i|; 0 \leq i \leq p\}.$$

De maneira semelhante concluímos que

$$|x-v_i| \leq \max\{|v_j-v_i|; 0 \leq j \leq p\}.$$

Então,  $|x-y| \leq \max\{|v_i-v_j|; 0 \leq i, j \leq p\}$ . Isso implica que

$$\text{diam}\sigma = \sup\{|x-y|; x, y \in \sigma\} = \max\{|v_j-v_i|; 0 \leq i, j \leq p\} = |v_s-v_t| \text{ para algum}$$

$s$  e  $t$ .

Definição 2.47: Seja  $K$  um complexo. Definimos mesh de  $K$  por

$$\text{mesh}K = \text{m\`ax} \{ \text{diam} \sigma ; \sigma \text{ \text{e} simplex de } K \}.$$

Lema 2.48: Suponhamos que  $K$  \text{e} um complexo  $m$ -dimensional, ent\`ao

$$\text{mesh}K^{(1)} \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}K.$$

Demonstra\`ao: Para n\`ao confundir o leitor vamos considerar  $\sigma^P$  simplex de  $K$  e  $\tau^P$  simplex de  $K^{(1)}$ .

Pelo lema 2.46, temos  $\text{diam} \tau^P = \text{m\`ax} \{ |v-w|, v, w \in \tau^P \}$ . Como  $v$  e  $w$  s\`ao baricentros de faces  $\sigma^r$  e  $\sigma^s$  de  $\sigma^P$ , respectivamente,

$$\text{podemos escrever } v = \sum_{i=0}^r \frac{1}{r+1} v_i \text{ e } w = \sum_{i=0}^s \frac{1}{s+1} v_j, \text{ com}$$

$0 \leq r \leq s \leq p$ . Ent\`ao procedendo como no lema 2.46 vemos que

$$|v-w| \leq \text{m\`ax} \{ |v_i - w| ; 0 \leq i \leq r \}. \text{ Agora}$$

$$\begin{aligned} |v_i - w| &= \left| v_i - \sum_{j=0}^s \frac{1}{s+1} v_j \right| = \left| \left( \sum_{j=0}^s \frac{1}{s+1} v_j - \sum_{j=0}^p \frac{1}{s+1} v_j \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{s+1} \left( \sum_{j=0}^p |v_i - v_j| \right) \\ &\leq \frac{1}{s+1} \left( \sum_{j=0}^s \text{m\`ax} \{ |v_i - v_j| ; 0 \leq j \leq s \} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|v-w| \leq \text{m\`ax} \frac{1}{s+1} \{ \text{m\`ax} \sum_{j=0}^s |v_i - v_j| ; 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s \}. \text{ Assim, temos}$$

$$|v-w| \leq \frac{s}{s+1} \text{m\`ax} \{ |v_i - v_j| ; 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s \}. \text{ Portanto,}$$

$$|v-w| \leq \frac{s}{s+1} \text{diam} \sigma^s. \text{ Logo}$$

$$\text{diam} \tau^P \leq \frac{s}{s+1} \text{diam} \sigma^s \leq \frac{s}{s+1} \text{mesh}K \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}K. \text{ Portanto,}$$

$$\text{mesh}K^{(1)} = \text{m\`ax} \{ \text{diam} \tau^P, \tau^P \} \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}K.$$

Lema 2.49: Seja  $K$  um complexo  $m$ -dimensional. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh} K^{(n)} = 0.$$

Demonstração: Vamos demonstrar usando a indução sobre o número de subdivisões baricêntricas, demonstrando que  $\text{mesh} K^{(n)} \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \text{mesh} K$ .

Então se  $n=1$  a proposta é válida por 2.48. Agora

$$\text{mesh} K^{(n+1)} \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh} K^{(n)} \leq \left(\frac{m}{m+1}\right) \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \text{mesh} K = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{n+1} \text{mesh} K.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0$ , segue que o lema é verdadeiro.

Teorema 2.50: Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliédros com triangulações  $K$  e  $L$ , respectivamente, e  $f: |K| \rightarrow |L|$  uma função contínua. Então, existe uma sub-divisão baricêntrica  $K^{(m)}$  de  $K$  e uma função contínua  $g: |K^{(m)}| \rightarrow |L|$ , tal que:

- $g$  é uma aplicação simplicial de  $K^{(m)}$  em  $L$  e,
- $g$  é homotópica a  $f$ .

Demonstração: Sejam  $\sigma$  um  $n$ -simplexo de  $K$  e  $w \in \sigma$ . Seja

$U_w = f^{-1}(\text{ost}(w))$ . Por  $\text{ost}(w)$  ser aberto  $U_w$  é aberto. Então,  $|K|$  é coberto por uma família de abertos  $U_w$ ,  $w$  vértice de  $K$ .

Seja  $\varepsilon$  o número de Lesbegue para  $U_w$ , e  $n = \dim K$ . Escolha  $N > 0$ , tal que  $(n/(n+1))^N \text{mesh} K < \varepsilon/2$ . Pelo lema 2.48 segue que  $\text{mesh} K^{(m)} < \varepsilon/2$ , sempre que  $m > N$ . Em particular, se  $v$  é vértice de  $K^{(m)}$ , então  $\text{diam}(\text{ost}(v), K^{(m)}) < 2 \text{mesh} K^{(m)}$ . Portanto, pela definição do número de Lesbegue,  $(\text{ost}(v), K^{(m)}) \subset f^{-1}(\text{ost}(v))$  e  $f((\text{ost}(v), K^{(m)})) \subset \text{ost}(w)$ . Assim pelo teorema 2.37,  $f$  admite uma aproximação simplicial  $g: |K^{(m)}| \rightarrow |L|$ .

Definição 2.51: Seja  $K$  um complexo. Definimos uma aplicação

$$\phi = \{ \phi_p : C_p(K) \longrightarrow C_p(K^{(1)}) \} \text{ indutivamente como}$$

segue

- a) Cada 0-simplexo de  $K$  é um 0-simplexo da sub-divisão baricêntrica  $K^{(1)}$ . Deste modo, podemos considerar  $C_0(K)$  como um sub-grupo de  $C_0(K^{(1)})$ . Definimos

$$\phi_0^1 : C_0(K) \longrightarrow C_0(K^{(1)}) \text{ como sendo a aplicação inclusão, isto é, } \phi_0^1(c) = c, c \in C_0(K).$$

- b) Para cada  $p$ -cadeia arbitrária em  $K$  definimos

$$\phi_p^1(\sum n_i \sigma_i^p) = \sum n_i (\sigma^p(\phi_{p-1}^1 \partial(\sigma^p)))$$

A sequência  $\phi = \{ \phi_p^1 \}$  definida desta maneira é chamada primeira  $c$ -derivação em  $K$ . Para  $m > 1$ , a  $m$ -ésima  $c$ -derivação em  $K$  é a composta da  $m-1$   $c$ -derivação em  $K$  com a primeira  $c$ -derivação de  $K^{(m-1)}$ , isto é,

$$\phi^m = \{ \phi_p^m : C_p(K) \longrightarrow C_p(K^{(m)}) \}, \text{ onde } \phi_p^m \text{ é a composta}$$

$$C_p(K) \xrightarrow{\phi_p^{m-1}} C_p(K^{(m-1)}) \xrightarrow{\phi_p^1} C_p(K^{(m)}).$$

Teorema 2.52: Cada  $c$ -derivação é uma aplicação de cadeia.

Demonstração: Como a composta de aplicações de cadeias é uma aplicação de cadeia, é suficiente mostrar que a primeira  $c$ -derivação é uma aplicação de cadeia. Seja  $\phi = \{ \phi_p : C_p(K) \}$  a primeira  $c$ -derivação em  $K$ . Devemos mostrar que o diagrama abaixo comuta para  $p \geq 1$ :

$$\begin{array}{ccc}
 C_p(K) & \xrightarrow{\phi_p} & C_p(K^{(1)}) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 C_{p-1}(K) & \xrightarrow{\phi_{p-1}} & C_{p-1}(K^{(1)})
 \end{array}$$

Seja  $\sigma^p$  uma  $p$ -cadeia elementar. Então, para  $p=1$  temos

$$\begin{aligned}
 \partial \phi_1(\sigma^1) &= \partial(\sigma^1 \phi_0 \partial(\sigma^1)) \\
 &= \phi_0 \partial(\sigma^1) - \sigma^1 \partial \phi_0(\partial \sigma^1) \\
 &= \phi_0 \partial \sigma^1 - \partial \partial(\sigma^1) \\
 &= \phi_0 \partial \sigma^1.
 \end{aligned}$$

Portanto o teorema vale para  $p=1$ .

Suponhamos que  $\partial \phi_{p-1}(\sigma^p) = \phi_{p-2} \partial(\sigma^p)$ . Então

$$\begin{aligned}
 \partial \phi_p(\sigma^p) &= \partial(\sigma^p \phi_{p-1} \partial(\sigma^p)) = \phi_{p-1} \partial \sigma^p - \sigma^p \partial \phi_{p-1}(\partial \sigma^p) \\
 &= \phi_{p-1} \partial \sigma^p - \sigma^p \phi_{p-2} \partial(\partial \sigma^p) \\
 &= \phi_{p-1} \partial \sigma^p - \sigma^p \phi_{p-2} \partial \partial(\sigma^p) \\
 &= \phi_{p-1} \partial \sigma^p.
 \end{aligned}$$

Portanto, o teorema vale para  $p$ -cadeias elementares. Para o caso geral a demonstração é tendida por linearidade.

Teorema 2.53: Seja  $K$  um complexo com primeira  $c$ -derivação

$\phi = \{\phi_p\}$ . Então, existe uma aplicação de cadeia

$\psi = \{\psi_p : C_p(K^{(1)}) \longrightarrow C_p(K)\}$ , tal que  $\psi_p \circ \phi_p$  é a aplicação identidade em  $C_p(K)$  para cada  $p \geq 0$ .

Demonstração: Seja  $f$  uma aplicação simplicial de  $K^{(1)}$  em  $K$

com a seguinte propriedade. Se  $\hat{\sigma}$  é vértice de  $K^{(1)}$ , então  $f(\hat{\sigma})$  é um vértice do simplexo  $\sigma$  em  $K$ , do qual  $\hat{\sigma}$  é um baricentro. Seja  $\psi = \{\psi_p\}$  a aplicação cadeia induzida por  $f$ . Se  $\tau^p$  é um  $p$ -simplexo de  $K^{(1)}$ , então  $\psi_p(\tau^p) = \mu\sigma^p$ , onde  $\mu = 0, 1$  ou  $-1$  e  $\sigma^p$  é o  $p$ -simplexo de  $K$ , o qual gera  $\tau^p$  na sua divisão baricêntrica. Obviamente  $\psi_0 \circ \phi_0$  é a aplicação identidade em  $C_0(K)$ . Suponhamos que

$\psi_{p-1} \circ \phi_{p-1} : C_{p-1}(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$  é a identidade e consideremos  $\psi_p \circ \phi_p : C_p(K) \longrightarrow C_p(K)$ . Seja  $\sigma^p$  uma cadeia elementar.

Assim, segue que

$\psi_p \circ \phi_p(\sigma^p) = \psi_p(\mu\sigma^p) = \mu\psi_p(\sigma^p) = m\sigma^p$ , para algum inteiro  $m$ . Mas,

$\partial(m\sigma^p) = \partial\psi_p \circ \phi_p(\sigma^p) = \psi_{p-1} \circ \phi_{p-1}(\sigma^p) = \psi_{p-1} \circ \phi_{p-1} \partial(\sigma^p) = \partial(\sigma^p)$ .

Portanto,  $m=1$  e  $\psi_p \circ \phi_p(\sigma^p) = \sigma^p$ .

Esta aplicação  $\psi = \{\psi_p\}$  é chamada inversa à esquerda de  $\phi$ .

Definição 2.54: Sejam  $K$  e  $L$  complexos. Duas aplicações de cadeia  $\phi = \{\phi_p\}$  e  $\mu = \{\mu_p\}$  de  $K$  em  $L$  são  $c$ -homotópicas se existe uma sequência  $\theta = \{\theta_p\}$  de homomorfismos  $\theta_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p+1}(L)$ , tal que  $\partial\theta_p + \theta_{p-1}\partial = \phi_p - \mu_p$ ,  $\theta_{-1} = 0$ .

Teorema 2.55: Se  $\phi$  e  $\mu$  são aplicações  $c$ -homotópicas de um complexo  $K$  em um complexo  $L$ , então os homomorfismos induzidos  $\phi_{*p}$  e  $\mu_{*p}$  de  $H_p(K)$  em  $H_p(L)$  são iguais.

Demonstração: Como  $\phi$  e  $\mu$  são  $c$ -homotópicas, pela definição, existe uma sequência de homomorfismos,  $\theta = \{\theta_p\}$ , tal que

$\partial\theta_p + \theta_{p-1}\partial = \phi_p - \mu_p$  e  $\theta_{-1} = 0$ . Seja  $[z_p] \in H_p(K)$ . Então

$$\begin{aligned}
\phi_{*p}([z_p]) - \mu_{*p}([z_p]) &= [\phi(z_p) - \mu(z_p)] \\
&= [\partial\theta_p(z_p) + \theta_{p-1}(z_p)] \\
&= [\partial\theta_p(z_p) + \theta_{p-1}(0)] = [\partial\theta_p(z_p)] = 0
\end{aligned}$$

Pois  $\partial\theta_p(z_p)$  é um bordo e  $\theta_{p-1}(0) = 0$ . Logo  $\phi_{*p} = \mu_{*p}$ .

Definição 2.56: Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos. Dizemos que  $K$  e  $L$  são  $c$ -equivalentes quando existem aplicações de cadeias  $\phi$  de  $K$  em  $L$  e  $\psi$  de  $L$  em  $K$ , tais que a composta das aplicações  $\phi$  e  $\psi$  dadas por  $\psi \circ \phi = \{\psi_p \circ \phi_p\}$  e  $\phi \circ \psi = \{\phi_p \circ \psi_p\}$  são  $c$ -homotópicas com a identidade em  $C_p(K)$  e em  $C_p(L)$ , respectivamente.

Teorema 2.57: Dois complexos  $c$ -equivalentes têm grupos de homologia isomórficos em suas dimensões correspondentes.

Demonstração: Sejam  $\phi$  e  $\psi$  aplicações de cadeia como as da definição 2.56. Pelo teorema 2.55, temos que  $\psi_{*p} \circ \phi_{*p}$  de  $H_p(K)$  em  $H_p(K)$  e  $\phi_{*p} \circ \psi_{*p}$  de  $H_p(L)$  em  $H_p(L)$  são aplicações identidades. Portanto,  $\phi_{*p}$  é um isomorfismo para cada dimensão  $p$ .

Teorema 2.58: Seja  $K$  um complexo e  $K^{(1)}$  sua primeira divisão baricêntrica. Então  $K$  e  $K^{(1)}$  são  $c$ -equivalentes.

Demonstração: Sejam  $\phi$  e  $\psi$  as aplicações de cadeia definidas em 2.51 e 2.53. Pelo teorema 2.53, sabemos que  $\psi \circ \phi = i_d$  em  $K$ . Vamos agora mostrar que  $\phi \circ \psi$  é  $c$ -homotópica a identidade em  $K^{(1)}$ . Isto é, existe uma sequência de homomorfismos como na

definição 2.54, e para cadeia  $c = \sum_{i=0}^{\alpha_p} n_i \tau_i^p$  de  $K^{(1)}$  temos

$$c - \phi_p \circ \psi_p(c) = \partial \theta_p(c) - \partial \theta_{p-1}(\partial(c)).$$

Se  $w$  é um vértice de  $K^{(1)}$ , então  $\psi_0(w) = [v]$  onde  $v$  é um vértice de algum simplexo  $\sigma$  de  $K$ , tal que  $w$  é bari-centro de alguma face de  $\sigma$ . Assim,

$$\phi_0 \circ \psi_0([w]) = \phi_0([v]) = [v]. \text{ Portanto, } w - \phi_0 \circ \psi_0([w]) = [w] - [v] = \partial[vw].$$

Assim sendo, definimos  $\theta_0([w]) = [vw]$ , e extendemos  $\theta_0$  linearmente a todo  $C_0(K^{(1)})$ .

Suponhamos que,  $\theta_0, \dots, \theta_{p-1}$  estão todos bem definidos e seja  $\tau^p$  uma  $p$ -cadeia elementar de  $K^{(1)}$ . Então para cada  $(p-1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  temos

$$c - \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1}(c) = \partial \theta_{p-1}(c) + \phi_{p-2} \partial(c), \text{ de modo que}$$

$$\partial \theta_{p-1}(c) = c - \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1}(c) - \phi_{p-2} \partial(c).$$

Considere

$$z = \tau^p - \phi_p \circ \psi_p(\tau^p) - \theta_{p-1} \partial \tau^p. \text{ Então,}$$

$$\partial z = \partial(\tau^p) - \partial \phi_p \circ \psi_p(\tau^p) - \partial \theta_{p-1} \partial(\tau^p)$$

$$= \partial(\tau^p) - \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1} \partial(\tau^p) - (\partial \tau^p - \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1} \partial(\tau^p) - \theta_{p-2} \partial \partial(\tau^p))$$

$$= \partial(\tau^p) - \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1} \partial(\tau^p) - \partial(\tau^p) + \phi_{p-1} \circ \psi_{p-1} \partial(\tau^p) + 0$$

$$= 0$$

Portanto,  $z$  é um ciclo em  $K^{(1)}$ .

Vamos mostrar que  $z$  é bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1}$ , em  $K^{(1)}$ . Seja  $v$  um vértice de  $\tau^p$ . Podemos escrever  $z$  na forma

$$z = \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p + \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j v \sigma_j^{p-1},$$

onde  $v$  não é vértice de  $\sigma_i^p$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 = \partial z &= \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p + \partial \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j v \sigma_j^{p-1} \\ &= \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p + \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j (\sigma_j^{p-1} - v \partial \sigma_j^{p-1}) \\ &= \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p + \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j \sigma_j^{p-1} - \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j v \partial \sigma_j^{p-1} \end{aligned}$$

Como  $\sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j v \partial \sigma_j^{p-1} = 0$ , segue que

$$\sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j \sigma_j^{p-1} = - \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p. \text{ Agora, se } c_{p+1} = \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i v \sigma_i^p \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i v \sigma_i^p = \partial \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p - v \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \partial \sigma_i^p \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p + v \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} h_j \sigma_j^{p-1} = z \end{aligned}$$

Portanto,  $z$  é bordo de uma  $(p+1)$ -cadeia em  $K^{(1)}$ . Definimos

$\theta_p(\tau^p) = c_{p+1}$ , e para demonstrar o caso geral extendemos, por linearidade, a demonstração feita para cadeias elementares. Assim, pela definições 2.54 e 2.56,  $K$  e  $K^{(1)}$  são  $c$ -equivalentes.

Teorema 2.59: Sejam  $K$  um complexo e  $K^{(n)}$  sua  $n$ -ésima divisão baricêntrica. Para cada  $p \geq 0$ , os grupos  $H_p(K)$  e  $K_p(K^{(n)})$  são isomórfos para todo inteiro  $n \geq 1$ .

Demonstração: Pelo teorema 2.58,  $K$  e  $K^{(1)}$  são  $c$ -equivalentes. Usando a indução conclui-se que  $K$  e  $K^{(n)}$  são  $c$ -equivalentes para  $n \geq 1$ . Logo, pelo teorema 2.55, segue que  $H_p(K)$  e  $H_p(K^{(n)})$  são isomórfos.

De agora em diante usaremos os números racionais como

coeficientes dos grupos de p-cadeias. Então o p-ésimo grupo de cadeia  $C_p(K)$ , de um complexo  $K$ , será considerado um espaço vetorial sobre o corpo dos racionais.

Definição 2.60: Seja  $K$  um complexo e seja  $\{\sigma_i^p\}$  o conjunto de todos os seus p-simplexos. Seja  $\phi = \{\phi_p\}$  uma aplicação de cadeia em  $K$ . Para cada p-simplexo de  $K$ , sabemos que  $\phi_p(\sigma_i^p) = \sum_{j=0}^{\alpha_p} a_{ij}^p \sigma_j^p$ , para algum  $a_{ij}^p$  racional, um para cada p-simplexo de  $K$ . Então  $\sigma_i^p$  é um simplexo fixo de  $\phi$  se o coeficiente  $a_{ii}^p$  de  $\sigma_i^p$  na expressão de  $\phi_p(\sigma_i^p)$  é diferente de zero. Definimos o número  $(-1)^p a_{ii}^p$  como sendo peso do simplexo  $\sigma_i^p$ .

Seja  $N_p = (a_{ij}^p)$  a matriz cujo elemento na linha  $i$  e coluna  $j$ , é  $a_{ij}^p$ . Como traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal, temos  $\text{traço} N_p = \sum a_{ii}^p$ .

Definição 2.61: Definimos o número de Lefschetz da aplicação  $\phi$  como sendo

$$\lambda(\phi) = \sum_p (-1)^p \text{traço} N_p.$$

Se  $\phi_p: C_p(K) \longrightarrow C_p(K)$  é a aplicação identidade para algum complexo  $K$ ,  $p \geq 0$ , então temos  $a_{ij}^p = 1$  se  $i=j$  e  $a_{ij}^p = 0$  se  $i \neq j$ . Assim, cada simplexo é fixo e

$$\lambda(\phi) = \sum_p (-1)^p \text{traço} N_p = \sum_p (-1)^p \alpha_p = \chi(K).$$

Teorema 2.62: Seja  $\phi = \{\phi_p\}$  uma aplicação de cadeia sobre um

complexo  $K$ . O número de Lefschetz é completamente determinado pelo homomorfismo induzido  $\phi_{*p}$  de  $H_p(K)$  em  $H_p(K)$ , nos grupos de homologia.

Demonstração: Seja  $\{h_p^1, \dots, h_p^s\}$  base de  $H_p$ . Escolhemos  $\{z_p^1, \dots, z_p^r\}$  pertencente ao grupo

$$Z_p(K, Q), \text{ tal que } [z_p^i] = h_p^i, i=1, 2, \dots, s. \text{ Seja}$$

$B_p(K, Q)$  o grupo dos  $p$ -bordos de  $K$  sobre os racionais e seja

$\{b_p^1, \dots, b_p^r\}$  uma base de  $B_p(K, Q)$ . Então  $\{z_p^i\} \cup \{b_p^i\}$  é base

de  $Z_p(K, Q)$ . Escolhemos em  $C_p(K, Q)$  um espaço  $D_p(K, Q)$ , com-

plementar de  $Z_p(K, Q)$ , isto é,  $D_p(K, Q) + Z_p(K, Q) = C_p(K, Q)$ , com

base  $\{d_p^1, \dots, d_p^t\}$ . Note que  $\{z_p^i\} \cup \{b_p^i\} \cup \{d_p^i\}$  é base para

$C_p(K, Q)$ . Então, para qualquer  $b_p^i$  escrevemos

$$\phi_p(b_p^i) = \sum_j a_{ij}^p b_p^i, \quad 0 \leq p \leq n-1, \text{ onde } a_{ij}^p \text{ é um racional e } \phi_p \text{ leva}$$

$B_p(K, Q)$  em  $B_p(K, Q)$ . Para qualquer  $z_p^i, 0 \leq p \leq n, \phi_p(z_p^i)$  deve

ser um ciclo, de modo que há coeficientes  $a'_{ij}^p$  e  $e_{ij}^p$ , tal que

$$\phi_p(z_p^i) = \sum_j a'_{ij}^p b_p^i + \sum_j e_{ij}^p z_p^i.$$

Ainda, para  $d_p^i$  arbitrário,  $1 \leq p \leq n$ , existem coeficientes  $a''_{ij}^p$ ,

$e'_{ij}^p$  e  $g_{ij}^p$ , tal que

$$\phi_p(d_p^i) = \sum_j a''_{ij}^p b_p^i + \sum_j e'_{ij}^p z_p^i + \sum_j g_{ij}^p d_p^i.$$

Sejam  $A_p = (a_{ij}^p)$ ,  $E_p = (e_{ij}^p)$  e  $G_p = (g_{ij}^p)$  as respectivas matrizes,

onde  $A_n$  e  $G_0$  são matrizes nulas. Então,

$$\lambda(\phi) = \sum_{p=0}^n (-1)^p (\text{traço}A_p + \text{traço}E_p + \text{traço}G_p) \quad (*)$$

Agora,

$$\partial\phi_{p+1}(d_{p+1}^j) = \phi_p \partial(d_{p+1}^j) = \phi_p(b_p^j) = \sum_{ij} a_{ij}^p b_p^j. \quad \text{Também,}$$

$$\begin{aligned} \partial\phi_{p+1}(d_{p+1}^i) &= \partial \sum_j a_{ij}^{p+1} b_{p+1}^j + \partial \sum_j e_{ij}^{p+1} z_{p+1}^j + \partial \sum_j g_{ij}^{p+1} d_{p+1}^j \\ &= \sum_j g_{ij}^{p+1} \partial(d_{p+1}^j) = \sum_j g_{ij}^{p+1} b_p^j. \end{aligned}$$

Então  $a_{ij}^p = g_{ij}^{p+1}$  e  $A_p = G_{p+1}$ ,  $0 \leq p \leq n-1$ , e a soma (\*) se

reduz a

$$\lambda(\phi) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{traço}E_p.$$

Isto significa que o número de Lefschetz  $\lambda(\phi)$  é completamente determinado pela ação da aplicação  $\phi_p$  sobre os ciclos geradores de  $H_p$ . Os coeficientes  $e_{ij}^p$  são determinados pelo homomorfismo induzido  $\phi_{*p}$  por que as classes de homologia  $[z_p^i]$  geram  $H_p(K, \mathbb{Q})$ . Assim, temos

$$\phi_{*p}([z_p^i]) = \sum_j e_{ij}^p [z_p^j].$$

Então o homomorfismo induzido determina completamente os coeficientes  $e_{ij}^p$ , os quais determinam completamente  $\lambda(\phi)$ .

Seja  $K$  um complexo e  $f: |K| \longrightarrow |K|$  uma função contínua, seja  $K^{(s)}$  a  $s$ -ésima sub-divisão baricêntrica de  $K$  e  $g$  uma aproximação simplicial de  $f$ . Então,  $g$  induz uma aplicação de cadeia  $\{g_p: C_p(K^{(s)}) \longrightarrow C_p(K)\}$ . Seja  $\phi^s = \{\phi_p^s: C_p(K) \longrightarrow C_p(K^{(s)})\}$  a  $s$ -ésima  $c$ -derivação em  $K$ .

O número de Lefschetz  $\lambda(f)$ , de  $f$ , é o número de Lefschetz da

composta  $g_p \circ \phi_p^s$ . O número de Lefschetz é independente de  $g$ .

Vamos agora demonstrar o teorema do ponto fixo de Lefschetz.

Teorema 2.63: Seja  $K$  um complexo e  $f: |K| \rightarrow |K|$  uma aplicação contínua. Se  $\lambda(f) \neq 0$  então  $f$  tem um ponto fixo.

Demonstração: Suponhamos que  $f$  não tem ponto fixo. Como  $|K|$  é compacto  $f$  assume um mínimo  $\theta(x) = |f(x) - x| > 0$ . Então existe  $\epsilon > 0$ , tal que se  $x \in |K|$  a distância  $|f(x) - x| > \epsilon$ . Munindo  $K$  com uma sub-divisão baricêntrica conveniente, se necessário, podemos assumir que  $\text{mesh} K < \epsilon/3$ . Pelo teorema 2.50, há um número inteiro positivo  $s$  e uma aplicação simplicial  $g$  de  $K^{(s)}$  em  $K$  homotópica a  $f$ , tal que para cada  $x \in |K|$ ,  $f(x)$  e  $g(x)$  estão num simplexo comum de  $K$ . Assim,

$$|f(x) - x| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - x| \leq 2\epsilon/3$$

contradizendo o fato que  $|f(x) - x| > \epsilon$ . Se  $x$  pertence a um simplexo  $\sigma$  implica que  $g(x)$  não pertence a este simplexo. Logo  $\sigma$  e  $g(\sigma)$  são disjuntos para todo  $\sigma \in K$ . Considere-mos a  $s$ -ésima  $C$ -derivadação  $\mu = \{\mu_p: C_p(K) \rightarrow C_p(K^{(s)})\}$  e a aplicação de cadeia  $\{g_p: C_p(K^{(s)}) \rightarrow C_p(K)\}$  induzida por  $g$ . Se  $\sigma^p$  é um  $p$ -simplexo de  $K$ , então  $\mu_p(\sigma^p)$  é uma cadeia em  $K^{(s)}$  cujos simplexos com coeficientes diferente de zero estão em  $\sigma^p$ . Considere a  $p$ -cadeia  $g_p \circ \mu_p(\sigma^p)$ . Como  $\sigma^p$  e  $g(\sigma^p)$  são disjuntos, nenhum dos simplexos cujos coeficientes são diferentes de zero intercepta  $\sigma$ . Então  $g_p \circ \mu_p$  não tem simplexo fixo e o número de

Lefschetz da aplicação  $g_p \circ \mu_p$  é zero. Como este número é o número de Lefschetz de  $f$ , segue que  $\lambda(f)=0$ . Contradição.

VARIETADES DIFERENCIÁVEIS E ESPAÇO TANGENTE

Definição 3.1:    Seja  $M$  um espaço Hausdorff. Dizemos que  $M$  é uma variedade topológica se existe uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$ , tal que para cada  $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$  existe uma aplicação  $\phi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , aplicando  $U_\alpha$  homeomorficamente sobre um aberto  $E_\alpha$  do  $\mathbb{R}^n$ .

O par  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  é denominado carta sobre  $M$ , e  $U_\alpha$  é chamado vizinhança coordenada em  $M$ . Se  $p \in U_\alpha$ ,  $\phi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$  é uma  $n$ -upla de números reais. Seja  $x_\alpha^i(p)$  a  $i$ -ésima coordenada de  $\phi_\alpha(p)$ . Então, temos  $\phi_\alpha(p) = (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$ . Como  $\phi_\alpha$  é contínua cada  $x_\alpha^i$  é contínua. Além disso, sendo  $\phi_\alpha$  injetiva, se  $x_\alpha^i(p) = x_\alpha^i(q)$  para  $p, q \in U_\alpha$ ,  $i=1, \dots, n$ , então temos  $p=q$ . Isto é, o ponto  $p \in U_\alpha$  é determinado pela  $n$ -upla de números reais  $(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$  denominado sistema de coordenadas locais do ponto  $p$  com respeito a carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ .

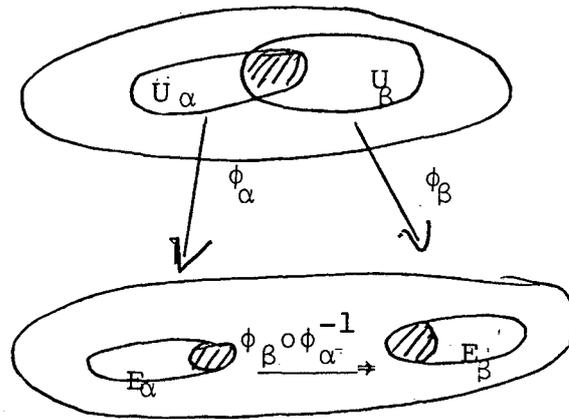
A coleção  $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de todas as cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  sobre  $M$  é denominado atlas, ou sistema de vizinhanças coordenadas sobre  $M$ .

Sejam  $p \in M$ ,  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \phi_\beta)$  cartas sobre  $M$ . Então para  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  definimos dois sistemas de coordenadas locais, a saber,  $(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$  e  $(x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p))$ . Vamos determinar a relação entre elas. Obviamente  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  são abertos em  $E_\alpha$  e  $E_\beta$  do  $\mathbb{R}^n$ . Então

$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  é um homeomorfismo de  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  em  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  para cada  $u \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Sendo  $\phi_\alpha(p) = (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$  e  $\phi_\beta(p) = (x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p))$  podemos escrever

$$\phi_\beta(p) = [\phi_\beta(\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha)](p) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(p)) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)) = (x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p)).$$

Portanto,  $x_\beta^i(p) = [\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}]^i(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))$ .



Definição 3.2: Sejam  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \phi_\beta)$  cartas sobre  $M$ . Dizemos que  $\phi_\alpha$  e  $\phi_\beta$  são  $C^r$  compatíveis se as composições  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  e  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  são de classe  $C^r$  nos conjuntos abertos  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\alpha)$ , respectivamente, do  $\mathbb{R}^n$ .

Definição 3.3: Seja  $\phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  um atlas sobre  $M$ . se para cada índice  $\alpha$  e  $\beta$  as cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \phi_\beta)$  são  $C^r$  compatíveis, dizemos que  $\phi$  é de classe  $C^r$ .

Se qualquer carta  $(V, \psi)$  sobre  $M$ , que é  $C^r$  compatível com todas as cartas de  $\phi$ , é elemento de  $\phi$ , dizemos que  $\phi$  é um atlas máximo.

Definição 3.4: Sejam  $M$  uma variedade topológica e  $\phi$  um atlas de classe  $C^r$ ,  $r=1,2,\dots,\infty,w$ . O par  $(M,\phi)$  é denominado variedade diferenciável de classe  $C^r$ .

Se  $m$  for a dimensão de  $M$  dizemos que  $M$  é uma  $m$ -variedade diferenciável (de classe  $C^r$ ).

Exemplo 3.4.1: O espaço euclidiano  $R^n$  é uma  $n$ -variedade diferenciável. Basta tomar  $(R^n, I_d)$  como carta.

Exemplo 3.4.2: Sejam  $(N,\Psi)$  e  $(M,\Phi)$  variedades diferenciáveis de classe  $C^r$ . O produto cartesiano  $(N \times M, \Theta)$ , onde  $\Theta$  é o atlas composto de todas as cartas na forma  $\{[(V_\alpha \times U_\alpha), \psi_\alpha \times \phi_\alpha]; (V_\alpha, \psi_\alpha) \in \Psi \text{ e } (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \Phi\}$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^r$ .

Exemplo 3.4.3: Considere a  $n$ -esfera,

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in R^{n+1}, ; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}. S^n \text{ é uma}$$

$n$ -variedade diferenciável analítica.

Com efeito, seja  $p=(0,0,\dots,1)$  o "pólo norte" de  $S^n$  e  $q=(0,0,\dots,-1)$  o "pólo sul" de  $S^n$ . Definimos  $\phi: S^n - p \longrightarrow R^n$  por  $\phi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{1}{1+x^{n+1}} (x^1, \dots, x^n)$ .

Como cada coordenada é contínua segue que  $\phi$  é contínua. Definimos, agora,  $\psi: R^n \longrightarrow S^n$  por

$$\psi(y^1, \dots, y^n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} (2y^1, \dots, 2y^n, 1 - \sum_{i=1}^n y_i^2).$$

É fácil ver que  $\phi \circ \psi$  é a identidade em  $R^n$  e  $\psi \circ \phi$  é a identidade em  $S^n$ . Portanto,  $\psi$  é a inversa de  $\phi$ , e  $\phi$  é um

homeomorfismo de  $S^{n-p}$  em  $R^n$ . Logo,  $(S^{n-p}, \phi)$  é uma carta sobre  $S^n$ .

Seja  $f: R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$  a aplicação reflexão na coordenada  $x^{n+1}$ . Então  $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, -x^{n+1})$ .

Definimos  $\beta: S^{n-q} \longrightarrow R^n$  por  $\beta(x) = \phi \circ f(x)$ . Obviamente  $\beta$  é um homeomorfismo de  $S^{n-q}$  em  $R^n$ . Portanto  $(S^{n-q}, \beta)$  é carta sobre  $S^n$ . Como  $\{S^{n-p}\} \cup \{S^{n-q}\}$  é uma cobertura de  $S^n$ , segue que  $S^n$  é uma variedade topológica.

Seja  $\phi = \{(S^{n-p}, \phi), (S^{n-q}, \beta)\}$  o atlas correspondente.

Vamos analisar  $\phi \circ \beta^{-1}: \beta(S^{n-p} \cap S^{n-q}) \longrightarrow \phi(S^{n-p} \cap S^{n-q})$  e

$\beta \circ \phi^{-1}: \phi(S^{n-p} \cap S^{n-q}) \longrightarrow \beta(S^{n-p} \cap S^{n-q})$ . Assim,

$$\phi(\phi \circ f)^{-1}(x) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(x) \quad \text{e} \quad (\phi \circ f) \circ \phi^{-1}(x) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(x).$$

Facilmente concluímos que  $\phi \circ \beta^{-1}(x) = \beta \circ \phi^{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2}$ , a qual é

analítica. Portanto  $S^n$  é uma  $n$ -variedade diferenciável analítica.

Seja  $f$  uma função com valores reais, definida em um aberto  $W_f$  de uma variedade diferenciável  $M$ , de classe  $C^r$ .

Se  $(U, \phi)$  é uma carta sobre  $M$ , tal que  $p \in W_f \cap U$  e

$(x^1, \dots, x^n)$  denotam as coordenadas locais de  $p \in W_f \cap U$ , então

$f$  corresponde a uma função  $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n)$  sobre  $\phi(W_f \cap U)$

definida por  $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$ , isto é,  $f(p) = \tilde{f}(x^1(p), \dots, x^n(p))$ .

Usando as notações acima, dizemos que  $f: W_f \longrightarrow R$

é uma função de classe  $C^r$  se, e somente se,  $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$  é de

classe  $C^r$  sobre  $\phi(W_f \cap U)$ .

Definição 3.5: Sejam  $W$  e  $N$  variedades diferenciáveis.

A aplicação  $F:W \longrightarrow N$  é de classe  $C^r$  se para cada  $p \in W$  existem cartas  $(U, \phi)$  de  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $F(p)$ , com  $F(U) \subset V$ , tal que  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}: \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$  é de classe  $C^r$ .

Definição 3.6: Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $A$  um subconjunto de  $M$ . Dizemos que  $A$  é uma subvariedade diferenciável de  $M$ , se para algum inteiro  $k \geq 0$ , cada ponto de  $A$  pertence ao domínio de uma carta  $(U, \phi) \in \Phi$  e temos  $U \cap A = \phi^{-1}(R^k)$ .

O conjunto de vetores  $R^k$  de  $R^n$  é o conjunto cujas últimas  $(n-k)$ -coordenadas são nulas. Em particular, se  $A$  é aberto,  $A$  é uma subvariedade.

Seja  $M$  uma variedade de classe  $C^\infty$  e seja  $C^\infty(p)$  o conjunto de todas as funções de classe  $C^\infty$  cujo domínio incluem alguma vizinhança aberta de  $p$ . Sejam  $f, g \in C^\infty(p)$ , tal que  $f$  tem domínio  $U$  e  $g$  tem domínio  $V$ . Definimos  $f + g: U \cap V \longrightarrow R$  por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  e  $fg: U \cap V: \longrightarrow R$  por  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ . Se  $\alpha \in R$  definimos  $(\alpha f)(x): U \longrightarrow R$  por  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ . Com essas operações podemos definir o espaço tangente,  $T_p M$ , a  $M$  no ponto  $p$ , como segue.

Definição 3.7: Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e  $p \in M$ . Definimos o espaço tangente a  $M$  no ponto  $p$ , como sendo o conjunto,  $T_p M$ , de todas as aplicações  $X_p: C^\infty(p) \longrightarrow R$ , tal que para cada  $\alpha, \beta \in R$  e  $f, g \in C^\infty(p)$  são satisfeitas as seguintes condições:

- i)  $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$  e  
 ii)  $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ .

Em  $T_p M$  definimos duas operações, adição e produto por  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que tornam  $T_p M$  um espaço vetorial da seguinte forma.

Sejam  $f \in C^\infty(p)$ ,  $X_p, Y_p \in T_p M$  e seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então definimos

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f \quad \text{e} \quad (\alpha X_p)f = \alpha(X_p f).$$

O espaço tangente a  $M$ ,  $TM$ , é o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Teorema 3.8: Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de classe  $C^\infty$  e  $F: M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

Então para cada  $p \in M$  a aplicação  $F^*: C^\infty(F(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F^*(f) = f \circ F$ , satisfaz as condições

$$F^*(f+g) = F^*(f) + F^*(g), \quad F^*(\alpha f) = \alpha F^*(f) \quad \text{e} \quad F^*(fg) = F^*(f)F^*(g).$$

Demonstração: Sejam  $f, g \in C^\infty(F(p))$ . Então

$$F^*(f+g)(p) = (f+g) \circ F(p) = f \circ F(p) + g \circ F(p) = F^*(f)(p) + F^*(g)(p).$$

Analogamente demonstran-se as demais condições.

Teorema 3.9: A aplicação  $F^*$  do teorema 3.8 induz um homomorfismo de espaço vetorial dual  $F_*: T_p M \rightarrow T_p N$ ,

definido por  $F_*(X_p)f = X_p(F^*(f))$ , o qual torna  $F_*(X_p)$  em uma aplicação de  $C^\infty(F(p))$  em  $\mathbb{R}$ . Além disso, temos

$$F_*(X_p)(fg) = [F_*(X_p)f][g(F(p))] + [f(F(p))][F_*(X_p)g].$$

Demonstração: Sejam  $X_p, Y_p \in T_p M$ ,  $f, g \in C^\infty(p)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Obviamente  $F_*(\alpha X_p + \beta Y_p)f = \alpha F_*(X_p)f + \beta F_*(Y_p)f$ . Agora

$$\begin{aligned} F_*(X_p)(fg) &= X_p F^*(fg) = X_p [(fg) \circ F] \\ &= X_p [(foF)(goF)] \\ &= X_p (foF)g(F(p)) + f(F(p))X_p(goF) \\ &= X_p F^*(f)g(F(p)) + f(F(p))X_p F^*(g) \\ &= [F_*(X_p)f][g(F(p))] + [f(F(p))][F_*(X_p)g]. \end{aligned}$$

Portanto,  $F_*(X_p)$  é um vetor em  $F(p)$ .

Corolário 3.10: Quando  $F: M \longrightarrow N$  é a aplicação identidade, ambas,  $F^*$  e  $F_*$  são isomorfismos identidade, nos seus respectivos domínios. Se  $H = G \circ F$  é a composta de duas aplicações de classe  $C^\infty$ , então  $H^* = F^* \circ G^*$  e  $H_* = G_* \circ F_*$ .

Demonstração: A demonstração de que  $F^*$  e  $F_*$  são isomorfismos idntidades é imediata. Suponhamos  $H = G \circ F$ . Então

$$H^*(f) = (G \circ F)^*(f) = fo(G \circ F) = (G^*(f)) \circ F = F^*(G^*(f)) = (F^* \circ G^*)(f).$$

Desde que  $H_*$  é dual a  $H^*$  temos que  $H_* = G_* \circ F_*$ .

Corolário 3.11: Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F: M \longrightarrow N$  um difeomorfismo de  $M$  num aberto  $V$  de  $N$ . Seja  $p \in M$ , tal que  $f(p) \in V$ . Então

$$F_*: T_p M \longrightarrow T_p N \text{ é um isomorfismo.}$$

Demonstração: Suponhamos que  $G: V \longrightarrow M$  é a inversa de  $F$ .

Então,  $G \circ F = Id_M$  e  $F \circ G = Id_V$ . Portanto,  $G_* \circ F_*: T_p M \longrightarrow T_p M$  e  $F_* \circ G_*: T_{f(p)} N \longrightarrow T_{F(p)} N$  são isomorfismos sobre o espaço vetorial correspondente.

O homomorfismo  $F_*$  é chamado diferencial de  $F$ .

Sejam  $U$  um subconjunto aberto de  $M$ , tal que  $p \in U$  e  $(U, \phi)$  uma carta sobre  $M$ . Então, a aplicação  $\phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  induz um isomorfismo  $\phi_*: T_p M \longrightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$  do espaço tangente a  $M$ , em cada ponto  $p \in U$ , no espaço tangente  $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ . Por outro lado, a aplicação  $(\phi^{-1})_*$  aplica  $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$  isomorficamente sobre  $T_p M$ .

A base canônica  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$  de  $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ , em cada ponto  $\phi(p) \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , determina em  $p = \phi^{-1}(\phi(p)) \in M$  uma base  $\{E_{1p}, E_{2p}, \dots, E_{np}\}$ , onde,  $E_{ip} = (\phi^{-1})_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Se  $f$  é uma função de classe  $C^\infty$  definida numa vizinhança aberta de  $p$  e  $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$  é sua expressão em coordenadas locais relativa a carta  $(U, \phi)$  sobre  $M$ , então

$$E_{ip} f = \left( (\phi^{-1})_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) f = \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} \phi(p).$$

Se  $x^i(p)$  é a  $i$ -ésima função coordenada, então  $X_p x^i$  é a  $i$ -ésima componente de  $X_p$  nesta base, isto é, se

$$X_p = \sum_{j=1}^n \alpha^j E_{jp}, \text{ segue que}$$

$$\begin{aligned} X_p x^i &= \sum_{j=1}^n \alpha^j E_{jp} x^i = \sum_{j=1}^n \alpha^j \left( (\phi^{-1})_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) x^i = \sum_{j=1}^n \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} (x^i \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \phi(p). \end{aligned}$$

Estas derivadas na forma usual dão a matriz da aplicação linear  $F_*$  relativa a carta  $(U, \phi)$ .

Definição 3.12 : Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Definimos campo de vetores de classe  $C^2$  sobre  $M$  como sendo uma função que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $X_p \in T_p M$  cujas componentes, na forma de coordenadas locais  $U, \phi$ , são funções de classe  $C^2$  sobre o domínio  $U$  das coordenadas.

Definição 3.13 : Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente e  $F: M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que  $F$  é uma imersão de  $M$  em  $N$  se para cada ponto  $p \in M$   $(F_*)_p$  é uma aplicação injetiva.

## CAPITULO IV

### GRUPOS DE LIE E AÇÕES DE UM GRUPO SOBRE UMA VARIEDADE

Definição 4.1: Sejam  $G$  um espaço topológico,  $(o)$  uma operação binária em  $G$ . Dizemos que  $G$  é um grupo topológico em relação à operação  $(o)$  se satisfaz as seguintes condições:

- i)  $(G, o)$  é grupo,
- ii) A aplicação  $o: G \times G \longrightarrow G$  é contínua; e
- iii) A aplicação  $r: G \longrightarrow G$  dada por  $r(g) = g^{-1}$  é contínua.

Se  $G$  é uma variedade diferenciável analítica e  $o$  e  $r$  são aplicações de classe  $C^\omega$ ,  $(G, o)$  é chamado grupo de Lie.

Exemplo 4.1.1: Seja  $G = \mathbb{R}^n$  com a operação adição. Definimos  $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h(x, y) = x + y$ . Obviamente  $h$  é de classe  $C^\omega$ . Da mesma forma,  $r: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $r(x) = -x$ , é de classe  $C^\omega$ . Como  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade diferenciável analítica segue que  $(\mathbb{R}^n, +)$  é um grupo de Lie.

Definição 4.2: Seja  $G$  um grupo,  $e \in G$  o elemento identidade, e  $X$  um conjunto. Dizemos que  $G$  atua sobre  $X$  se existe uma aplicação  $\theta: G \times X \longrightarrow X$ , tal que

- i)  $\theta(e, x) = x$  para todo  $x \in X$  e
- ii) se  $g_1$  e  $g_2$  são elementos de  $G$  temos

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x) \text{ para todo } x \in X.$$

Quando  $G$  é um grupo topológico,  $X$  um espaço topológico e  $\theta$  uma aplicação contínua, dizemos que  $\theta$  é uma ação contínua de  $G$  em  $X$ .

Se  $G$  é um grupo de Lie,  $X$  uma variedade  $C^\infty$  e  $\theta$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ , a ação  $\theta$  é de classe  $C^\infty$ . Podemos também usar a notação  $\theta_g: X \longrightarrow X$  definida por  $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ .

Então (ii) pode ser escrito  $\theta_{g_1 g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$ . Também,

$$\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}.$$

Exemplo 4.2.1: Sejam  $G$  e  $H$  grupos,  $\psi: H \longrightarrow G$  um homomorfismo. Então  $\hat{\theta}: H \times G \longrightarrow G$ , definida por  $(h, g) = \psi(h)g$ , é uma ação de  $H$  sobre  $G$ . Com efeito seja  $h_e$

o elemento identidade de  $H$ . Então, aplicando a definição vem

i)  $\theta(h_e, g) = (h_e)g = h_e g = g$ ; para todo  $g \in G$ .

ii)  $\theta(h_1, \theta(h_2, g)) = \theta(h_1, \psi(h_2)g) = (\psi(h_1)\psi(h_2))g$  e

$\theta(h_1 \circ h_2, g) = \psi(h_1 \circ h_2)g = (\psi(h_1)\psi(h_2))g$ ; para todo  $g \in G$  e  $h_1, h_2 \in H$ .

Definição 4.3: Sejam  $G$  um grupo  $M$  um conjunto. Suponhamos que  $A$  é um sub-conjunto de  $M$ . Então  $GA$  denota o conjunto  $\{ga; g \in G \text{ e } a \in A\}$ . Definimos a órbita de  $x \in M$  como sendo o conjunto  $Gx$ .

Se  $Gx = x$  dizemos que  $x$  é um ponto fixo. Se  $Gx = M$ , para algum  $x \in M$ , dizemos que  $G$  é transitivo sobre  $M$ . Nesse caso  $Gx = M$  para todo  $x \in M$ .

Definição 4.4: Sejam  $G$  um grupo que atua sobre um conjunto  $M$  e  $x \in M$ . O grupo isotrópico de  $x$ , denotado por  $G_x$ , é o conjunto de todos os elementos de  $G$  que deixam  $x$  fi-

$$x_0, G_x = \{g \in G; gx=x\}$$

Note que  $G_x$  é sub-grupo de  $G$ .

Sejam  $M$  uma variedade de classe  $C^\infty$  e  $\theta: R \times M \longrightarrow M$  uma ação de classe  $C^\infty$  sobre  $M$ . A ação  $\theta$  define sobre  $M$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$ , chamado gerador infinitesimal de  $\theta$ , conforme a seguinte definição.

Definição 4.5: Para cada ponto  $p \in M$  definimos  $X_p: C^\infty(p) \longrightarrow R$

por

$$X_p f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\theta(\Delta t, p)) - f(p)}{\Delta t} .$$

Seja  $(U, \phi)$  uma carta sobre  $M$  ao redor de  $p$ .

Seja  $I_\delta \times V$  um aberto contendo  $(0, p)$  em  $R \times M$ , onde  $I_\delta = \{t \in R; |t| < \delta\}$ .  $V$  e  $\delta > 0$  são, ambos, escolhidos de forma que  $\theta(I_\delta \times V) \subset U$ . Em particular,  $V = \theta(0, V)$  está contido em  $U$ . Restringindo para o conjunto aberto  $I_\delta \times V$ , podemos escrever  $\theta$  em coordenadas locais, isto é,

$$y^1 = h^1(t, x^1, \dots, x^m), \dots, y^m = h^m(t, x^1, \dots, x^m) \quad \text{ou}$$

$y = h(t, x)$ . Note que  $x = (x^1, \dots, x^m)$  são as coordenadas locais de  $p$  em  $V$  e  $y = (y^1, \dots, y^m)$  são coordenadas locais de sua

imagem.  $\theta(t, p)$ . Os  $h^i$ , definidos sobre  $I_\delta \times \phi(V)$  são de classe  $C^\infty$  e a imagem de  $h(t, x)$  está em  $\phi(U)$ . O fato que

$\theta_0$  é a identidade e,  $\theta_{t_1+t_2} = \theta_{t_1} \circ \theta_{t_2}$ , é refletido pelas condi-

ções  $h^i(0, x) = x^i$  e  $h^i(t_1+t_2) = h^i(t_1, h^i(t_2, x))$  para  $i=1, 2, \dots, m$ .

Seja  $f(x^1, \dots, x^m)$  a expressão das coordenadas locais

de  $f \in C^\infty(p)$ . Então

$$\frac{[f(\theta(\Delta t, p)) - f(p)]}{\Delta t} = \frac{[\tilde{f}(h(\Delta t, p)) - \tilde{f}(p)]}{\Delta t} \quad e$$

$$X_p f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\theta(\Delta t, p)) - f(p)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\tilde{f}(h(\Delta t, x)) - \tilde{f}(x)]}{\Delta t}$$

$$X_p f = \sum_{i=1}^m (h^i)'(0, x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(\phi(p)).$$

Isso quer dizer que para cada ponto  $p \in M$  temos

$$X_p = \sum_{i=1}^m (h^i)'(0, x) E_{ip}, \quad \text{onde} \quad E_{ip} = \phi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \text{e} \quad x = \phi(p). \quad \text{Portanto}$$

$X_p$  é na realidade um campo de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $V$ .

Como todo ponto de  $M$  está em alguma vizinhança aberta  $U \subset M$

$X$  é de classe  $C^\infty$  sobre  $M$ .

Definição 4.6: Seja  $\theta: G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo  $G$  sobre uma variedade  $M$ . Dizemos que um campo de vetores  $X$  é invariante sob uma ação de  $G$  se  $X$  é invariante sob cada difeomorfismo  $\theta_g$  de  $M$  em si mesmo. Em resumo

$$\theta_{*g}(X) = X.$$

Teorema 4.7: Seja  $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  uma ação de classe  $C^\infty$ . Então, o gerador infinitesimal  $X$  é invariante sob esta ação, isto é,  $\theta_{*t}(X_p) = X_{\theta_t(p)}$ .

Demonstração: Seja  $f \in C^\infty(\theta_t(p))$  para algum  $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$ . Então,

$$\begin{aligned} \theta_{*t}(X_p) f &= X_p (f \circ \theta_t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f \circ \theta_{\Delta t}(\theta_t(p)) - f(\theta_t(p))] \\ &= X_{\theta_t(p)} f. \end{aligned}$$

Como  $f$  é arbitrário o resultado vale.

Corolário 4.8: Seja  $X_p=0$ . Então para cada  $q$ , na órbita de  $p$ , temos  $X_q=0$ .

Demonstração: A órbita de  $q$  consiste de todos os pontos, tais que,  $p=\theta(t,q)=\theta_t(q)$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Então pelo teorema 4.7, segue que  $X_q=\theta_{*t}(X_p)$ . Como  $\theta_t$  é um difeomorfismo  $\theta_{*t}$  é um isomorfismo de  $T_pM$  em  $T_qM$ . Portanto,  $X_q$  é zero se, e somente se,  $X_p=0$ .

Teorema 4.9: Seja  $\theta$  uma ação de um grupo  $G$  sobre uma variedade  $M$ . A órbita de  $p$ ,  $\theta p=\theta(t,q)$  é, ou um ponto singular ou uma imersão de  $\mathbb{R}$  em  $M$  pela aplicação  $F:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ , definida por  $F(t)=\theta(t,p)$ .

Demonstração: Seja  $t_0 \in \mathbb{R}$  e seja  $\frac{\partial}{\partial t}$  a notação usual da base de  $T_{t_0}\mathbb{R}$ ;  $F$  é uma imersão se, e somente se,  $F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \neq 0$  para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Seja  $f \in C^\infty(F(t_0))=C^\infty(\theta_{t_0}(p))$ . Observamos que

$$\begin{aligned} F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ F)_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f \circ F(t_0 + \Delta t) - f \circ F(t_0)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f(\theta_{t_0 + \Delta t}(p)) - f(\theta_{t_0}(p))] \\ &= X_{\theta_{t_0}(p)} f, \end{aligned}$$

são precisamente os argumentos usados na demonstração de teorema 4.7. Esta fórmula e o corolário 4.8 mostram que, ou  $X_p \neq 0$  e  $F$  é uma imersão ou  $X_{F(t)}=F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0$  e nesse caso  $F$  é uma aplicação constante com  $F(\mathbb{R})=p$ .

Definição 4.10: Sejam  $M$  uma variedade e  $X$  um campo de vetores sobre  $M$ . Dizemos que a curva  $t \rightarrow F(t)$

definida um intervalo aberto  $J \subset \mathbb{R}$  é uma curva integral de  $X$  se  $\frac{dF}{dt} = X_F(t)$  sobre  $J$ .

Sejam  $M$  uma variedade e  $W \subset \mathbb{R} \times M$  um aberto, tal que para todo  $p \in M$  existem números reais  $\alpha(p) < 0 < \beta(p)$  e  $W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = \{(t, p); \alpha(p) < t < \beta(p)\}$ . Definimos  $I_p = \alpha(p) < t < \beta(p)$  como sendo um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $I_\delta$  um intervalo definido por  $|t| < \delta$ .

Definição 4.11: Com as notações acima dizemos que  $\theta: W \rightarrow M$  é um fluxo sobre uma variedade  $M$  se é  $C^\infty$  e se satisfaz as seguintes condições.

i)  $\theta(0, p) = p$  para todo  $p \in M$ .

ii) Se  $(s, p) \in W$ , então  $\alpha(\theta(s, p)) = \alpha(p) - s$ ,  $\beta(\theta(s, p)) = \beta(p) - s$ , e para qualquer  $t$ , tal que  $\alpha(p) - s < t < \beta(p) - s$

$\theta_{t+s}$  é definido e  $\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p)$ .

Se  $W = \mathbb{R} \times M$  então a ação  $\theta$  de  $W$  em  $M$  é chamada ação global. Quando  $\mathbb{R}$  atua sobre  $M$ , como no caso de qualquer ação de grupo sobre  $M$ , para cada  $t$ , então  $\theta_t$  de  $\mathbb{R} \times M$  sobre  $M$  é um difeomorfismo com  $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$ . Isto também é verdadeiro para o caso local da definição acima, exceto quando  $\theta_t$  não está definida sobre todo  $M$ . Seja  $V_t \subset M$  o domínio de definição de  $\theta_t$ , isto é,  $V_t = \{p \in M; (t, p) \in W\}$ , então temos a seguinte consequência.

Teorema 4.12: O subconjunto  $V_t \subset M$  é um aberto para todo  $t \in \mathbb{R}$

e  $\theta_t: V_t \rightarrow V_{-t}$  é um difeomorfismo com

$$\theta_t^{-1} = \theta_{-t}.$$

Demonstração: Seja  $p \in V_t$ . Usando  $\alpha(p) < 0 < \beta(p)$ ,  $\alpha(p) < t < \beta(p)$  e

4.11 ii) concluímos que

$$\alpha(\theta(t,p)) = \alpha(p) - t < -t \quad \text{e} \quad \beta(\theta(t,p)) = \beta(p) - t > -t.$$

Assim,  $\theta_t(p) = \theta(t,p) \in V_{-t}$ .

Do mesmo modo, se  $q \in V_{-t}$ ,

$$\theta_{-t}(q) = \theta(-t,q) \in V_t.$$

Por 4.11 ii) temos  $\theta_t \circ \theta_{-t}(q) = \theta_{t-t}(q) = \theta_0(q)$  e por i) temos para todo  $q \in M$   $\theta_0(q) = q$ . Portanto,  $\theta_t$  e  $\theta_{-t}$  são inversas uma outra.

Definição 4.13: Sejam  $M$  uma variedade e  $X$  um campo de vetores sobre  $M$ ,  $X$  é dito completo se suas curvas integrais geram um fluxo global.

Se  $M$  é uma variedade compacta  $X$  é sempre completo.

Teorema 4.14: Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$  sobre uma variedade  $M$ . Seja  $F: M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Seja  $\theta: W \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  o fluxo gerado por  $X$ . Então  $X$  é invariante sob  $F$  se, e somente se,

$$F(\theta(t,p)) = \theta(t, F(p)) \quad \text{sempre que os dois lados estão definidos.}$$

Demonstração: Suponhamos que  $X$  é invariante sob  $F$ .

Se  $\theta_p: I_p \rightarrow M$  é a curva integral de  $X$  com  $\theta(0,p) = p$ , então o difeomorfismo  $F$  o leva para uma curva integral  $F(\theta(t,p))$  do campo de vetores  $F_*(X)$ . Como  $F_*(X) = X$ ,  $F(\theta(0,p)) = F(p)$ , as curvas integrais são únicas, concluímos que  $F(\theta(t,p)) = \theta(t, F(p))$ .

Suponhamos agora que  $F(\theta(t,p)) = \theta(t, F(p))$ .

Seja  $\theta(t,p) = \theta_p(t)$  o fluxo de  $X$  e  $\frac{d}{dt}$  a base natural de  $T_0R$ . Então, pela definição 4.10 temos  $X_p = \theta'(0,p) = \theta_* \left( \frac{d}{dt} \right)$ .

Aplicando o isomorfismo  $F_*: T_p M \longrightarrow T_{F(p)} M$  temos

$$F_*(X_p) = F_* \circ \theta_* \left( \frac{d}{dt} \right) = (F \circ \theta)_* \left( \frac{d}{dt} \right) = \theta_* F_*(p) \frac{d}{dt} = X_p.$$

Seja  $T(M)$  o conjunto de todos os campos de vetores sobre uma variedade diferenciável  $M$ . Sejam  $X$  e  $Y$  elementos de  $T(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ . Então, o campo de vetores  $Z = fX + gY$ , definido por  $Z_p = f(p)X_p + g(p)Y_p$  para cada  $p \in M$ , é um campo de classe  $C^\infty$ .

Definição 4.15: Seja  $\Omega$  um espaço vetorial sobre  $R$ . Dizemos que  $\Omega$  é uma álgebra de Lie se existe uma aplicação de  $\Omega \times \Omega$  em  $\Omega$  que leva cada par  $(X, Y)$  em  $[X, Y]$  de  $\Omega$  e tem as seguintes propriedades:

- i)  $[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$   
 $[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2],$
- ii)  $[X, Y] = -[Y, X],$
- iii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$

Suponhamos que  $X$  e  $Y$  são campos de vetores de classe  $C^\infty$  sobre uma variedade  $M$ . Então, em geral, o operador  $f \longrightarrow X_p(Yf)$  não define em  $C^\infty(p)$  um vetor em  $p$ . Contudo,  $XY - YX$  define um campo de vetores  $Z \in T(M)$  da seguinte maneira

$Z_p(f) = (XY - YX)_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf), f \in C^\infty(p)$ . Com efeito, se  $f \in C^\infty(p)$ , então  $Xf$  e  $Yf$  são de classe  $C^\infty$  sobre uma vizinhança de  $p$ . Assim,  $Z_p(f)$  determina uma aplicação linear.

de  $C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Portanto basta verificar se a condição (ii) da definição 3.7 é satisfeita, e nesse caso  $Z_p \in T_p M$ .

Com efeito, sejam  $f$  e  $g$  elementos de  $C^\infty(p)$ . Então,  $f, g \in C^\infty(U)$  para algum aberto  $U$  contendo  $p$ . Assim,

$$\begin{aligned} (XY - YX)_p (fg) &= X_p(Yfg) - Y_p(Xfg) \\ &= X_p(fYg - gYf) - Y_p(fXg - gXf) \\ &= X_p(fYg) - X_p(gYf) - Y_p(fXg) - Y_p(gXf). \end{aligned}$$

Aplicando a condição (ii) da definição 3.7 em cada termo a direita obtemos

$$\begin{aligned} (XY - YX)_p (fg) &= (X_p f)(Yg)_p + f(p)X_p(Yg) - (X_p g)(Yf)_p - g(p)X_p(Yf) \\ &\quad - (Y_p f)(X_p g)_p - f(p)Y_p(Xg) + (Y_p g)(Xf)_p + g(p)(Y_p Xf) \\ &= [X_p f(Yg)_p - Y_p f(Xg)_p] + [Y_p g(Xf)_p - X_p g(Yf)_p] \\ &\quad + f(p)[X_p(Yg) - Y_p(Xg)] + g(p)[Y_p(Xf) - X_p(Yf)] \\ &= (XY - YX)_p (fg) + (YX - XY)_p (fg) + f(p)(XY - YX)_p g \\ &\quad + g(p)(YX - XY)_p f \\ &= (XY - YX + YX - XY)_p (fg) + f(p)(XY - YX)_p g \\ &\quad - g(p)(YX - XY)_p f \\ &= f(p)(XY - YX)_p g - g(p)(YX - XY)_p f \end{aligned}$$

Portanto,  $Z_p(fg) = f(p)Z_p g + g(p)Z_p f$ . Finalmente, se  $f$  é de classe  $C^\infty$  sobre um aberto  $U$  de  $M$ , então  $(XY - YX)f$  é de classe  $C^\infty$  sobre o mesmo aberto  $U$  de  $M$ . Logo  $Z$  é um campo de vetores sobre  $M$ .

Definição 4.16: Usando o fato que  $(XY - YX)$  é um campo de vetores de classe  $C^\infty$  podemos definir o produto

sobre  $T(M)$  da seguinte forma

$$[X, Y] = XY - YX.$$

TEorema 4.17: Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $X$  e  $Y$  campos de vetores sobre  $M$ . Então  $T(M)$  com o produto  $[X, Y] = XY - YX$  é uma álgebra de Lie.

Demonstração: Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e  $X_1, X_2, Y$  elementos de  $T(M)$ . É fácil ver que  $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y]f = \alpha[X_1, Y]f + \beta[X_2, Y]f$ . Portanto,  $[X, Y]$  é linear na primeira coordenada. A igualdade  $[X, Y] = -[Y, X]$  é imediata da definição e a linearidade na primeira variável implica na linearidade na segunda. Logo valem as propriedades (i) e (ii) da definição 4.15. Para verificar (iii) avaliamos  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$  aplicado a uma função  $f$  de classe  $C^\infty$ . Usando a definição em cada termo da soma acima aplicado a  $f$  obtemos:

$$\begin{aligned} ([X, [Y, Z]])f &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\ &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([Y, [Z, X]])f &= Y([Z, X]f) - [Z, X](Yf) \\ &= Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([Z, [X, Y]])f &= X([X, Y]f) - [X, Y](Zf) \\ &= Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)). \end{aligned}$$

Então

$([X, [Y, Z]])f + ([Y, [Z, X]])f + ([Z, [X, Y]])f = 0$ . Portanto,  $T(M)$  é uma álgebra de Lie.

Sejam  $X$  um campo de vetores sobre  $M$ , e  $\theta: W \longrightarrow V$  o fluxo gerado por  $X$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ , pelo teorema 4.12, sabemos que  $\theta_t: V_t \longrightarrow V_{-t}$  é um difeomorfismo se  $V_t \neq \emptyset$ . Em particular, para cada  $p \in M$ , há uma vizinhança  $V$  e um  $\delta > 0$ , tal que

$U \subset V_t$  para  $|t| < \delta$ . O isomorfismo  $\theta_{*t}: T_p M \xrightarrow{\quad} T_{\theta_t(p)} M$  e sua inversa permitem-nos comparar os valores dos campos de vetores nesses dois pontos.

De fato, suponhamos que  $Y$  é um segundo campo de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $M$ . Podemos usar esta idéia para calcular a mudança de velocidade de  $Y$ , em cada ponto  $p \in M$ , na direção de  $X$ , isto é, ao longo da curva integral, (fluxo), do campo  $X$  passando por  $p$ . Denotamos esta mudança de velocidade por  $L_X Y$  e  $L_X Y$  é um campo de vetores de classe  $C^\infty$ .

Definição 4.18: Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos de vetores sobre  $M$  no ponto  $p$ . O campo de vetores  $L_X Y$ , é chamado derivada de Lie, de  $Y$  com respeito a  $X$ . É definido em cada ponto  $p \in M$  por um dos seguintes limites:

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\theta_{*t}(Y_{\theta_t(p)})) - Y_p]$$

ou substituindo  $t$  por  $-t$

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p - \theta_{*t} Y_{\theta_{-t}(p)}].$$

Interpretamos a primeira expressão da seguinte forma: Aplicamos a  $Y_{\theta_t(p)} \in T_{\theta_t(p)} M$  o isomorfismo  $\theta_{*t}$ , levando

$T_{\theta_t(p)} M$  em  $T_p M$ . Então em  $T_p M$  tomamos a diferença deste vetor e  $Y_p$ , multiplicando pelo escalar  $1/t$  e passamos para o limite com  $t \rightarrow 0$ . Este limite, se existe, é um vetor  $(L_X Y)_p$  pertencente a  $T_p M$ .

Lema 4.19: Sejam  $X$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $M$  e  $\theta$  a aplicação de  $W \subset \mathbb{R} \times M$  em  $M$  corespondente.

Dado  $p \in M$  e  $f \in C^\infty(U)$ ,  $U$  um aberto contendo  $p$ , escolhamos  $\delta > 0$  e uma vizinhança  $V$  de  $p \in U$ , tal que  $\theta(I_\delta \times V) \subset U$ . Então, há uma função  $g(q,t)$  de classe  $C^\infty$  definida sobre  $V \times I_\delta$ , tal que para  $q \in V$  e  $t \in I_\delta$  temos

$$f(\theta_t(q)) = f(q) + tg(q,t) \quad \text{e} \quad X_q f = g(q,0).$$

Demonstração: Há uma vizinhança  $V$  de  $p$  e um  $\delta > 0$ , tal que,  $\theta(t,p)$  é definido, é de classe  $C^\infty$  sobre  $I_\delta \times V$  e aplica  $I_\delta \times V$  em  $U$ . A função  $r(t,q) = f(\theta(t,q)) - f(q)$  é de classe  $C^\infty$  sobre  $I_\delta \times V$  e  $r(0,q) = 0$ . Seja  $r'$  a sua derivada com respeito a  $t$ . Definimos  $g(q,t)$  para cada  $q$  fixo pela fórmula

$$g(q,t) = \int_0^1 r'(ts,q) ds. \quad \text{Também, } g(q,t) \text{ é de classe } C^\infty \text{ sobre}$$

$I_\delta \times V$ . Para verificar basta usar as coordenadas locais e as propriedades da integral. Pelo teorema fundamental do Cálculo temos:

$$tg(q,t) = \int_0^1 r'(ts,q) t ds = r(t,q) - r(0,q) = r(t,q).$$

Usando a definição de  $r$  temos  $f(\theta(t,q)) = f(q) + tg(q,t)$

Por outro lado, pela definição 4.5 vem

$$g(q,0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(q,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} r(t,q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(f(\theta(t,q)) - f(q))] = X_q f.$$

Teorema 4.19: Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $M$ . Então,  $L_X Y = [X,Y]$ .

Demonstração: Pela definição vem

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p f &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p - \theta_{*t}(Y_{\theta_{-t}(p)})] \right) f \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p f - \theta_{*t}(Y_{\theta_{-t}(p)}) f] \right) \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p f - Y_{\theta_{-t}(p)}(f \circ \theta_t)] \right). \end{aligned}$$

Usando o lema e fazendo  $g(q,t)=g_t$  temos

$$(L_X Y)_p f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p f - Y_{\theta_{-t}(p)}(f + tg_t)] .$$

Trocando  $t$  por  $-t$  vem

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_{\theta_t(p)}(f - tg_t) - Y_p f] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_{\theta_t(p)} f - Y_p f] - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} Y_{\theta_t(p)} t g_t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(\theta_t(p)) - (Yf)_p] - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\theta_t(p)} g_t. \end{aligned}$$

Usando a fórmula da definição 4.5, trocando  $f$  por  $Yf$ ,  $\Delta t$  por  $t$  e considerando o fato de que  $g_0 = (g(q,0) = Xf(q))$  temos

$$(L_X Y)_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = (XY - YX)_p f = [X, Y]_p f. \text{ Portanto,}$$

$$L_X Y = [X, Y].$$

Teorema 4.20: Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis, e

$$F: N \longrightarrow M \text{ uma aplicação de classe } C^\infty. \text{ Sejam}$$

$X_1, X_2$  campos de vetores sobre  $N$  e  $M$ , respectivamente. Então

$$F_*([X_1, X_2]) = [F_*(X_1), F_*(X_2)].$$

Demonstração: Antes de demonstrar o teorema, observamos que, para  $X$  sobre  $N$  e  $Y$  sobre  $M$  obedecer a condição  $F_*(X) = Y$ , é necessário e suficiente a condição: Para qualquer  $g$  de classe  $C^\infty$  sobre um conjunto aberto  $V \subseteq M$  temos  $(Yg) \circ F = X(g \circ F)$  sobre  $F^{-1}(V)$ .

Se  $q \in F^{-1}(V)$ , então  $F_*(X_q)g = X_q(g \circ F) = X(g \circ F)(q)$  e  $Y_{F(q)}g$  é valor da função de classe  $C^\infty$   $Yg$  em  $F_q$ , isto é,  $((Yg) \circ F)(q)$ , mas a condição vale se, e somente se,  $F_*(X_q) = Y_{F(q)}$  para todo  $q \in M$ .

Vamos agora demonstrar o teorema.

Sejam  $f \in C^\infty(V)$ ,  $V \subset M$ , de modo que  $Y_1 f$  e  $Y_2 f$  sejam elementos de  $C^\infty(V)$ , e suponhamos que  $F_*(X_i) = Y_i$ ,  $i=1,2$ . aplicando a condição acima obtemos.

$$\begin{aligned} [Y_1(Y_2 f)] \circ F &= X_1((Y_2 \circ f) \circ F) \\ &= X_1(X_2(f \circ F)) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Y_2(Y_1 f)] \circ F &= X_2((Y_1 f) \circ F) \\ &= X_2(X_1(f \circ F)). \end{aligned}$$

Agora

$$[Y_1(Y_2 f)] \circ F - [Y_2(Y_1 f)] \circ F = X_1(X_2(f \circ F)) - X_2(X_1(f \circ F)).$$

Mas

$$\begin{aligned} [Y_1(Y_2 f)] \circ F - [Y_2(Y_1 f)] \circ F &= ([Y_1(Y_2 f)] - [Y_2(Y_1 f)]) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_1(X_2(f \circ F)) - X_2(X_1(f \circ F)) &= [X_1, X_2](f \circ F) \\ &= F_*([X_1, X_2]). \end{aligned}$$

Portanto,

$$([Y_1, Y_2] f) \circ F = F_*([X_1, X_2])$$

De acordo com a condição acima  $[X_1, X_2]$  e  $[Y_1, Y_2]$  são equivalentes. Assim o teorema fica demonstrado.

Teorema 4.21: Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores de classe  $C^\infty$  completos sobre uma variedade diferenciável

$M$ . Sejam  $\theta$  e  $\sigma$  as ações correspondentes  $\theta, \sigma: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ .

Então,  $\theta_t \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \theta_t$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  se, e somente se,  $[X, Y] = 0$ .

Demonstração: Suponhamos que  $[X, Y] = 0$ . Então pelo teorema 4.20 temos

$$0 = \theta_{*t} [X, Y] = [\theta_{*t} X, \theta_{*t} Y] = [X, \theta_{*t} Y].$$

Logo, para  $p \in M$  e  $f \in C^\infty(p)$  temos

$$0 = (L_X(\theta_{*t} Y))_p f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(\theta_{*t} Y)_p f - (\theta_{*(t-\Delta t)} Y)_p f],$$

de modo que  $\frac{d(\theta_{*t} Y)_p f}{dt} = 0$  para todo  $t$ ; isto é,  $(\theta_{*t} Y)_p f$

é constante quando  $t=0$ . Esta função constante tem valor  $Y_p f$ .

Portanto,  $(\theta_{*t} Y)_p f = Y_p f$ . Sendo  $p$  e  $f$  de classe  $C^\infty$  arbitrários, segue que,  $\theta_{*t} Y = Y$  e do teorema 4.14 concluímos

que para cada  $t \in \mathbb{R}$   $\theta_t \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \theta_t$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $\theta_t \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \theta_t$  para todo

$s, t \in \mathbb{R}$ . Aplicando o teorema 4.14 para o difeomorfismo

$\theta_t: M \longrightarrow M$ , vemos que  $Y$  é invariante sob  $\theta_t$ . Em particu-

lar  $\theta_{*t} Y = Y$ . Isso implica que

$$[X, Y] = L_X Y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [Y - \theta_{*t} Y] = 0.$$

RECOBRIMENTO DUPLO ORIENTADO E VARIEDADES COM FRONTEIRA

Definição 5.1: Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  uma base para  $E$ . Seja  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  outra base para  $E$ . Seja  $M = (m_{ij})$  a matriz real  $n \times n$  invertível, tal que  $b_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} a_i$  para todo  $j=1, 2, \dots, n$  denominada matriz de mudança de base  $A$  para base  $B$ . Dizemos que  $A$  e  $B$  são igualmente orientadas, e escrevemos  $A \equiv B$ , quando a matriz mudança de base tem determinante positivo.

Definição 5.2: Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\mathcal{O}$  um conjunto de bases de  $E$  com a propriedade: Se  $A \in \mathcal{O}$  e  $B$  é uma base qualquer de  $E$ , então  $B \in \mathcal{O}$  se, e somente se, a matriz mudança de base de  $A$  para  $B$  tem determinante positivo. Então  $\mathcal{O}$  é uma orientação de  $E$ . Neste caso o  $-\mathcal{O}$  é o conjunto de bases  $H$ , tais que, a matriz mudança de base de  $A$  para  $H$  tem determinante negativo.

Definição 5.3: Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\mathcal{O}$  uma orientação de  $E$ . Então o par  $(E, \mathcal{O})$  é denominado espaço vetorial orientado.

Dada uma orientação  $\mathcal{O}$  de  $E$ , a orientação oposta será  $-\mathcal{O}$ . Num espaço vetorial orientado  $(E, \mathcal{O})$  as bases pertencentes a  $\mathcal{O}$  serão chamadas positivas e as outras negativas,

Definição 5.4: Sejam  $E$  e  $W$  espaços vetoriais orientados de dimensão  $n$ . Um isomorfismo  $F: E \longrightarrow W$  diz-se

positivo quando a transporta bases positivas de  $E$  em bases positivas de  $W$ .

Nesse caso  $F$  preserva a orientação.

Definição 5.5: Sejam  $M$  e  $N$  variedades de mesma dimensão. Para cada  $x \in M$  e  $y \in N$  escolhamos de modo arbitrário uma orientação  $\otimes_x$  em  $T_x M$  e  $\otimes_y$  em  $T_y N$ . Seja  $F: M \rightarrow N$  um difeomorfismo local. Dizemos que  $F$  é positivo, com respeito a essas orientações, quando para cada  $x \in M$  o isomorfismo linear  $F_*: T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$  for positivo.

Para definir isomorfismo negativo exigimos que para cada  $x \in M$ ,  $F_*$  inverta a orientação.

A não ser que mencionemos o contrário a orientação em  $R^n$  será determinada pela base canônica  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Definição 5.6: Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Seja  $\otimes$  uma correspondência que associa a cada ponto  $x \in M$  uma orientação  $\otimes_x$  no espaço vetorial tangente  $T_x M$ , de modo que existe carta  $(U, \phi)$  com  $x \in U$ , tal que  $\phi_*: (T_x M, \otimes_x) \rightarrow R^n$  preserve a orientação. Então,  $\otimes$  é uma orientação da variedade diferenciável  $M$ .  $(U, \phi)$  é chamada carta admissível.

Definição 5.7: Sejam  $M$  uma variedade e  $\otimes$  uma orientação de  $M$ . Então, o par  $(M, \otimes)$  é denominado variedade orientada.

Teorema 5.8: Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Sejam  $\otimes$  uma orientação em  $N$  e  $F: M \rightarrow N$  um difeomorfismo local. Então,  $F$  determina uma orientação em  $M$ .

Demonstração: Para cada  $p \in M$ , definimos uma orientação  $\otimes_p^M$  em

$$T_p^M \text{ por } \otimes_p^M = F_*^{-1} \circ \otimes_{F(p)}^N = \{ (F_*^{-1}(v_1) \dots F_*^{-1}(v_n)); (v_1 \dots v_n) \otimes_{F(p)}^N \}.$$

Tomemos uma carta admissível  $(V, \psi)$  em  $N$ . Sejam  $U = F^{-1}(V)$  e  $\phi = \psi \circ F$ . Então,  $(U, \phi)$  é carta de  $M$  e  $\phi_* = \psi_* \circ F_*$  é positiva em todo ponto de  $U$ . Portanto,  $(U, \phi)$  é admissível. Como  $M$  pode ser coberta por cartas desse tipo segue que  $M$  é orientada por  $\otimes^M$ .

Teorema 5.9: Sejam  $M$  e  $N$  variedades orientadas de mesma dimensão,  $F: M \longrightarrow N$  um difeomorfismo local. Então o conjunto dos pontos  $x \in M$ , nos quais  $F_*: T_x^M \longrightarrow T_{F(x)}^N$  é positiva, é um subconjunto aberto.

Demonstração: Sejam  $x \in M$  e  $y = F(x) \in N$ . Sejam  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  carta sobre  $M$  e  $N$ , respectivamente, tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ . Então  $F_*$  é positivo se, e somente se,  $(\psi \circ F \circ \phi^{-1})'_* \phi_*(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tem determinante positivo. Como este determinante é uma função contínua em  $x$  o teorema segue.

Corolário 5.10: Sejam  $M$  e  $N$  variedades orientadas. Se  $M$  é conexa, então um difeomorfismo  $F: M \longrightarrow N$  é positivo ou negativo.

Demonstração: O conjunto dos pontos  $x \in M$  para os quais  $F_*$  de  $T_x^M$  em  $T_{F(x)}^N$  inverte a orientação também é aberto. Como este conjunto e o conjunto de pontos onde  $F_*$  preserva a orientação são disjuntos um dos dois é vazio e o outro é  $M$ , pois  $M$  é conexa.

Corolário 5.11: Seja  $M$  uma variedade orientável conexa. Então há duas orientações possíveis em  $M$ .

Demonstração: Sejam  $\otimes$  e  $\otimes'$  orientações em  $M$ . A aplicação identidade  $I: (M, \otimes) \longrightarrow (M, \otimes')$  é um difeomorfismo. Assim, ou  $\otimes = \otimes'$  ou  $\otimes = -\otimes'$ .

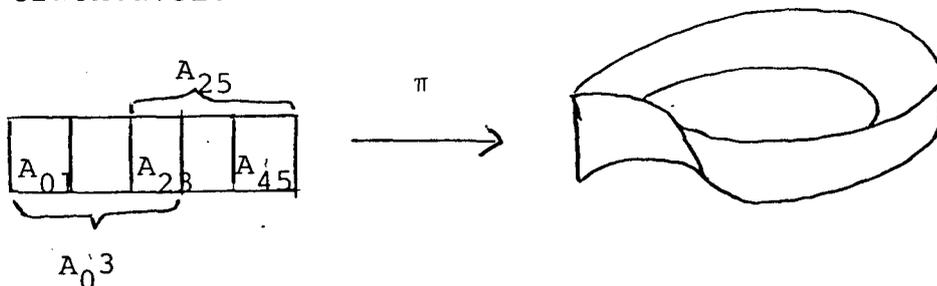
Corolário 5.12: Seja  $M$  uma variedade. Sejam  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  cartas sobre  $M$ , com domínios  $U$  e  $V$  conexos tais que, em dois pontos de  $\phi(U \cap V)$  a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$  tenham determinantes jacobianos com sinais distintos. Então,  $M$  é não orientável.

Demonstração: Suponhamos que  $M$  é uma variedade orientável. Seja  $\phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo. Logo é positivo ou negativo. Idem para  $\psi$ . Portanto,  $\phi^{-1}\psi$  é sempre positivo ou sempre negativo.

Exemplo 5.12.1: Seja  $A = (0,5) \times (0,1)$  o retângulo aberto de base 5 e altura 1. Dados  $i < j$  inteiros no intervalo  $[0,5]$ , seja  $A_{ij} = (i,j) \times (0,1)$  um retângulo de base  $i-j$  e altura 1. A faixa de Moebius  $M$  é o espaço quociente de  $A$  pela relação de equivalência que identifica cada ponto  $(s,t) \in A_{01}$  com  $(s+4, 1-t) \in A_{45}$ . Seja  $\pi: A \longrightarrow M$  a aplicação quociente. As restrições  $\pi|_{A_{03}}$  e  $\pi|_{A_{25}}$  são homeomorfismos respectivamente sobre  $U$  e  $V$  em  $M$ . Indiquemos

$\phi: U \longrightarrow A_{03}$  e  $\psi: V \longrightarrow A_{25}$  seus inversos. Então  $\phi(U \cap V) = A_{03} \cup A_{23}$  e  $\psi(U \cap V) = A_{23} \cup A_{45}$ . Além disso, a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1}: A_{01} \cup A_{23} \longrightarrow A_{23} \cup A_{45}$  é a identidade em  $A_{23}$  e é dada por  $(s,t) \longrightarrow (s+4, 1-t)$  em  $A_{01}$ .

Então pelo corolário 5.12 a faixa de Moebius é uma variedade não orientável.



Dizemos que uma variedade bidimensional é não orientável se existe uma faixa de Moebius costurada nela.

Definição 5.13: Sejam  $M$  uma variedade conexa,  $\tilde{M}$  uma variedade orientável e  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  um difeomorfismo local com as seguintes propriedades:

i) Para  $x \in M$  a imagem inversa  $p^{-1}(x)$  contém exatamente dois pontos.

ii) Se  $p(x_1) = p(x_2)$  com  $x_1 \neq x_2$  então

$p_*^{-1}(x_2) p_*^{-1}(x_1): T_{x_1} \tilde{M} \longrightarrow T_{x_2} \tilde{M}$  é negativo.

Então,  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  é um recobrimento duplo orientado.

Definição 5.14: Seja  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  um recobrimento duplo orientado. Se  $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2$  é união disjunta de dois subconjuntos abertos de  $\tilde{M}$ , cada um aplicado homeomorficamente sobre  $M$  por  $p$ , dizemos que  $p$  é um recobrimento duplo trivial.

Teorema 5.15: Seja  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  um recobrimento duplo orientado. Seja  $U$  um aberto orientado contido em  $M$ . Então  $p^{-1}(U)$  é a reunião disjunta de dois abertos  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2$ , cada um dos quais aplicado difeomorficamente sobre  $U$  por  $p$ . Além disso, em  $\tilde{U}_1$ ,  $p$  é positiva e, em  $\tilde{U}_2$ ,  $p$  é negativa.

Demonstração: Sejam  $\tilde{U}_1 = \{x \in p^{-1}(U); \det(p_*(s)) > 0\}$  e  $\tilde{U}_2 = \{x \in p^{-1}(U); \det(p_*(s)) < 0\}$ . Cada ponto  $y \in U$  é imagem de dois pontos  $x_1, x_2 \in p^{-1}(U)$ ,. Num deles  $p_*$  é positiva e no outro negativa. Portanto, um é elemento de  $\tilde{U}_1$  e o outro é elemento de  $\tilde{U}_2$ . Logo,  $p(\tilde{U}_1) = p(\tilde{U}_2) = U$  e  $p|_{\tilde{U}_i}$  é injetiva.

Teorema 5.16: Seja  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  um recobrimento duplo orientado. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1)  $M$  é orientável;
- 2)  $\tilde{M}$  é desconexa;
- 3) O recobrimento duplo orientado  $p$  é trivial.

Demonstração: Pelo teorema 5.15 vemos que (1) implica (2).

Suponhamos  $\tilde{M}$  desconexa e tomemos uma componente conexa  $C$  de  $\tilde{M}$ . O conjunto  $C$  é aberto e fechado. Sendo  $p$  um

difeomorfismo local,  $p(C)$  é aberto e fechado na variedade conexa  $M$ . Logo  $p(C)=M$ . Como a imagem inversa por  $p$  de cada ponto de  $M$  tem dois pontos em  $\tilde{M}$  concluímos que  $\tilde{M}$  não pode ter mais que duas componentes. Logo,  $\tilde{M}=\tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2$  e  $p$  é injetiva em cada  $\tilde{M}_i$ . Assim,  $p|_{\tilde{M}_i}$  é difeomorfismo sobre  $M$ , ou seja  $p$  é trivial. Portanto (2) implica (3).

Suponhamos que  $p$  é trivial. Então  $\tilde{M}=\tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2$ , onde  $p|_{\tilde{M}_i}:\tilde{M}_i \longrightarrow M$  é difeomorfismo e  $M_1$  e  $M_2$  são abertos, pelo teorema 5.8 concluímos que  $M$  é orientável. Portanto, (3) implica (1).

Corolário 5.17: Seja  $p:\tilde{M} \longrightarrow M$  um recobrimento duplo orientado. Então,  $\tilde{M}$  é conexa se, e somente se,  $M$  é não orientável.

Teorema 5.18: Toda variedade conexa  $M$  de classe  $C^k$ , possui um recobrimento duplo orientado de classe  $C^k$ .

Demonstração: Seja  $\tilde{M}$  o conjunto de pares ordenados  $(x, \otimes_x)$ , onde  $x \in M$  e  $\otimes_x$  é uma orientação do espaço tangente  $T_x M$ . Definimos a aplicação  $p:\tilde{M} \longrightarrow M$  pondo  $p(x, \otimes_x)=x$ . Então,  $p^{-1}(x)$  contém exatamente dois pontos, a saber,  $(x, \otimes_x)$  e  $(x, -\otimes_x)$ . Introduziremos agora uma estrutura de variedade de classe  $C^k$  em  $\tilde{M}$ , de modo que  $p$  se torne um recobrimento duplo orientado de classe  $C^k$ . Sejam  $U$  um aberto orientado de  $M$  e  $\otimes_x$  uma orientação em  $U$ . Seja  $\tilde{U}$  o conjunto de todos os pares  $(x, \otimes_x)$ , tais que  $x \in U$ . A aplicação  $\phi|_{\tilde{U}}:\tilde{U} \longrightarrow U$ , definida por  $\phi|_{\tilde{U}}=p|_{\tilde{U}}$  é uma bijeção.

Os domínios  $\tilde{U}$  das bijeções  $\phi_U$  obtidos assim cobrem  $\tilde{M}$ . Dados  $\phi_U: \tilde{U} \longrightarrow U$  e  $\phi_V: \tilde{V} \longrightarrow V$ , se  $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ , então  $\phi_U / (\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \phi_V / (\tilde{U} \cap \tilde{V})$ ; logo a mudança de coordenadas  $\phi_V \circ \phi_U^{-1}: \phi_U(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \longrightarrow \phi_V(\tilde{U} \cap \tilde{V})$  é a aplicação identidade. Portanto, o atlas formado pelas bijeções  $\phi_U$  determina em  $\tilde{M}$  uma estrutura de variedade de classe  $C^k$  relativa a qual  $p$  é um difeomorfismo local. A variedade  $\tilde{M}$  possui orientação natural imposta por sua própria definição; em cada ponto  $\tilde{x} = (x, \otimes_x) \in \tilde{M}$ , considere a orientação  $\otimes_{\tilde{x}}$  que torna o isomorfismo linear  $p_*(\tilde{x}): (T_{\tilde{x}}\tilde{M}, \otimes_{\tilde{x}}) \longrightarrow (T_x M, \otimes_x)$  positivo. A aplicação  $p$  é um recobrimento duplo orientado.

Definição 5.19: Uma variedade  $n$ -dimensional com fronteira é um espaço de Hausdorff, tal que todo ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco  $U^n$  ou ao meio plano  $\{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^1 \geq 0\}$ .

O conjunto de todos os pontos que tem uma vizinhança aberta homeomorfa a  $U^n$  recebe o nome de interior da variedade e o conjunto  $K$  de pontos  $k$  que tem uma vizinhança aberta  $V$ , tal que existe um homeomorfismo  $h$  de  $V$  sobre  $\{x \in U^n; x^1 > 0\}$  com  $h(k) = (0, 0, \dots, 0)$  chama-se fronteira da variedade.

Teorema 5.20: Duas variedades  $M$  e  $N$  compactas com fronteiras são homeomorfas se, e somente se, tem o mesmo número de componentes da fronteira, são ambas orientáveis ou não orientáveis e tem a mesma característica de Euler

Este é o teorema clássico para classificação de superfícies. Não apresentaremos sua demonstração. Ela pode ser encontrada na Dissertação de Mestrado de Sérgio E. Crespi, UFSC, ou em Willian S. Massey, Introdução a Topologia Algébrica.

## C A P Í T U L O   V I

### SINGULARIDADES DE CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES

#### BIDIMENSIONAIS

Inicialmente recordemos que dada uma ação  $\theta$  de um grupo topológico  $G$  sobre um espaço  $M$ , a órbita de um ponto  $x \in M$ , denotada por  $[x]$ , é o conjunto  $\theta(G, x) = \{\theta(g, x) \in M; g \in G\}$ , e o grupo isotrópico de  $x \in M$  é o conjunto  $G_x = \{g \in G; \theta(g, x) = x\}$ . Quando  $\theta$  é um fluxo, isto é,  $\theta$  é uma ação de  $\mathbb{R}$  sobre  $M$ , o grupo isotrópico pode ser  $\{0\}$ , um grupo discreto  $\{0, \pm t_0, \pm 2t_0, \dots; t_0 > 0\}$ , ou a linha reta  $\mathbb{R}$ . No primeiro caso a órbita,  $[x]$ , de  $x$ , é não compacta, no segundo caso é uma curva fechada simples e no terceiro caso,  $x$  é um ponto fixo.

Definição 6.1: Seja  $X$  um sub-conjunto de  $M$ . Dizemos que  $X$  é um conjunto minimal sob  $\theta$  se é fechado, não vazio, invariante sob  $\theta$  e não possui nenhum sub-conjunto próprio com as mesmas propriedades.

Definição 6.2: Sejam  $\xi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  um fluxo e  $x$  um ponto pertencente a  $M$ . Denominaremos conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ ,  $\omega(x)$ , ao conjunto de todos os pontos  $y \in M$  que podem ser escritos na forma  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, x)$ , onde  $t_n$  é uma sequência em  $\mathbb{R}$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ .

Teorema 6.3: Sejam  $M$  um compacto,  $\xi$  um fluxo sobre  $M$ . Então, para todo  $x \in M$ , o conjunto  $\omega(x)$  é não

vazio, compacto e invariante sob  $\xi$ .

Demonstração: Seja  $\{t_n\}$  uma sequência com  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  e  $x \in M$ . Como

$\{(t_n, x)\}$  é uma sequência dentro de um compacto, existe uma sub-sequência  $\{(t_{n_k}, x)\}$  que converge para um ponto  $q \in M$ .

Então,  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_{n_k}, x)$ . Pela definição 6.2,

segue que  $q \in \omega(x)$ . Logo,  $\omega(x) \neq \emptyset$ .

Como  $\omega(x) \subset M$ , para mostrar que  $\omega(x)$  é compacto, basta mostrar que  $\omega(x)$  é fechado. Suponhamos  $q_n$  uma sequência em  $\omega(x)$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ . Então, para cada  $q_n$

existe uma subsequência  $t_m^n$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m^n = +\infty$  e

$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi(t_m^n, x) = q_n$ . Tomemos para cada sequência  $t_m^n$  um ponto

$t_n = t_{m(n)}^n$  com  $t_n > n$ , tal que  $d(\xi(t_n, x), q_n) < 1/n$ . Então,

$d(\xi(t_n, x), q) \leq d(\xi(t_n, x), q_n) + d(q_n, q) \leq 1/n + d(q_n, q)$ . Agora

$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ . Assim,  $q \in \omega(x)$ . Portanto,  $\omega(x)$  é fechado.

Para mostrar que  $\omega(x)$  é invariante sob  $\xi$ , suponhamos que  $q \in \omega(x)$ . Então existe uma sequência  $t_n$ , tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, x) = q$ . Seja  $q_1 = \xi(t_0, q)$ . Como  $\xi$  é

contínua, segue que

$q_1 = \xi(t_0, q) = \xi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_0, \xi(t_n, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_0 + t_n, x)$ .

Seja  $s_n = t_0 + t_n$ . Obviamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(s_n, x) = q_1$ . Por-

tanto,  $q_1 \in \omega(x)$ . Logo,  $\omega(x)$  é invariante sob  $\xi$ .

Definição 6.4: Dizemos que a órbita  $[x]$ , de  $x$ , sob um fluxo  $\xi$ , é recorrente se não é compacta e está contida num  $\omega(x)$ .

Qualquer órbita  $[x] \subset \omega(x)$  ou é recorrente ou é igual a  $\omega(x)$ .

Seja  $G$  um grupo abeliano, então todo ponto na mesma órbita tem o mesmo grupo isotrópico.

Com efeito, suponhamos que  $\theta: G \times M \longrightarrow M$  é uma ação contínua e que  $G$  é abeliano. Sejam  $x \in M$  e  $G_x = \{g \in G; \theta(g, x) = x\}$  o grupo isotrópico de  $x$ . Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então existe  $h \in G$ , tal que  $\theta(h, x) = y$ . Assim, se  $g \in G_x$  temos

$$\theta(g, y) = \theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x) = \theta(hg, x)$$

$$= \theta(h, \theta(g, x)) = \theta(h, x)$$

$$= y,$$

e  $g \in G_y$ . Portanto,  $G_x \subset G_y$  e  $G_y \subset G_x$ . Logo  $G_y = G_x$ .

Definição 6.5: Seja  $M$  uma superfície orientável. Dizemos que  $M$  é orientável de genus  $g=n$  ( $n \geq 0$ ) se,  $M$  é uma esfera com  $n$  asas costuradas nela.

Do mesmo modo definimos uma superfície não orientável de genus  $g=n$ , ( $n \geq 0$ ), como sendo uma esfera com  $n$  faixas de Moebius nela costuradas.

Caso  $M$  seja uma superfície compacta com fronteira o genus é definido como sendo o genus de uma superfície  $M^*$  obtida costurando um disco em cada componente da fronteira.

Lema 6.6: Sejam  $G$  um grupo topológico,  $M$  um espaço topológico e  $\theta$  uma ação contínua de  $G$  sobre  $M$ . Se  $A$  é um sub-conjunto de  $M$ , invariante sob  $\theta$ , então,  $\bar{A}$  é invariante sob  $\theta$ .

Demonstração: Sejam  $g \in G$  e  $a \in \bar{A}$ . Então existe uma sequência  $a_n \in A$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Seja  $b_n = \theta(g, a_n) \in A$ . Então,

$$\theta(g, a) = \theta(g, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(g, a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \text{ Portanto, } \theta(g, a) \in \bar{A}.$$

Lema 6.7: Seja  $\theta$  uma ação contínua de um grupo topológico simplesmente conexo  $G$  sobre o espaço  $M$ . Seja  $p: (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (M, x_0)$  uma aplicação de recobrimento de  $M$ .

Então, existe uma única ação contínua  $\tilde{\theta}: G \times \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$  que cobre  $\theta$  no sentido que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \tilde{M} \\ \downarrow i_d \times p & & \downarrow p \\ G \times M & \xrightarrow{\theta} & M \end{array}$$

Demonstração: Escrevemos  $f = \theta \circ (i_d \times p)$ . Como  $G$  é simplesmente conexo,  $\Pi_1(G, e) = \{e\}$ , e

$$\Pi_1(G \times \tilde{M}, g \times \tilde{x}_0) = \Pi_1(G, g) \times \Pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) = \{e\} \times \Pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) = \Pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0).$$

Então, a imagem de  $f_*: \Pi_1(G \times \tilde{M}) \longrightarrow \Pi_1(M)$  é igual a imagem de  $p_*: \Pi_1(\tilde{M}) \longrightarrow \Pi_1(M)$ . Pelo lema 1.21, existe uma única aplicação,  $\tilde{\theta}: G \times \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$  que torna o diagrama comutativo e  $\tilde{\theta}(e, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ .

Sejam  $\lambda, \mu: G \times G \times \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$  definidas por  $\lambda(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\theta}(g, \tilde{\theta}(h, \tilde{x}))$  e  $\mu(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\theta}(gh, \tilde{x})$ . Definimos a apli-

cação  $\gamma: G \times G \times M \longrightarrow M$  por  $\gamma(g, h, x) = \theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ .

No diagrama temos

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times \tilde{M} & \xrightarrow{\lambda \mu} & \tilde{M} \\
 \downarrow i_d \times i_d \times p & & \downarrow p \\
 G \times G \times M & \xrightarrow{\gamma} & M
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma(i_d \times i_d \times p)(g, h, \tilde{x}) &= \mu(g, h, p(\tilde{x})) = \theta(g, h, p(\tilde{x})) = \tilde{\theta}(g, \tilde{\theta}(h, p(\tilde{x}))) \\
 &= \tilde{\theta}(g, p\tilde{\theta}(h, \tilde{x})) = p\tilde{\theta}(g, \tilde{\theta}(h, \tilde{x})) = p\lambda(g, h, \tilde{x}).
 \end{aligned}$$

De maneira semelhante concluiremos que

$\gamma(i_d \times i_d \times p)(g, h, \tilde{x}) = p\mu(g, h, \tilde{x})$ . Assim,  $\lambda$  e  $\mu$  tornam o diagrama comutativo. Logo, temos  $\lambda = \mu$ . Portanto,  $\tilde{\theta}(g, \tilde{\theta}(h, \tilde{x})) = \tilde{\theta}(gh, \tilde{x})$ . Obviamente  $\lambda(e, e, \tilde{x}) = \mu(e, e, \tilde{x})$ . Assim,  $\tilde{\theta}$  satisfaz as condições da definição 4.2.

Lema 6.8: Dado  $\tilde{x} \in \tilde{M}$  e  $x = p(\tilde{x}) \in M$ , então  $x$  é ponto fixo sob  $\theta$  se, e somente se,  $\tilde{x}$  é ponto fixo sob  $\tilde{\theta}$ .

Demonstração: Suponhamos que  $x$  é ponto fixo sob  $\theta$ . Sejam  $\alpha, \beta: G \longrightarrow \tilde{M}$  aplicações definidas por  $\alpha(g) = \tilde{\theta}(g, \tilde{x})$  e  $\beta(g) = \tilde{x}$  e seja  $\gamma: G \longrightarrow M$  uma aplicação definida por  $\gamma(g) = \theta(g, p(\tilde{x}))$ . Então,  $p\alpha(g) = p(\tilde{\theta}(g, \tilde{x})) = \theta(g, p(\tilde{x})) = \gamma(g)$ . Da mesma forma  $p\beta(g) = p(\tilde{x}) = \theta(g, p(\tilde{x})) = \gamma(g)$ . Além disso,  $\alpha(e) = \tilde{\theta}(e, \tilde{x}) = \tilde{x} = \beta(e)$ . Então,  $\alpha = \beta$  e  $\tilde{x}$  é ponto fixo sob  $\tilde{\theta}$ .

Reciprocamente, suponhamos  $\tilde{x}$  ponto fixo sob  $\tilde{\theta}$ .

Então, para todo  $g \in G$  temos

$$\theta(g, x) = \theta(g, p(\tilde{x})) = p\tilde{\theta}(g, \tilde{x}) = p(\tilde{x}) = x \text{ e } x \text{ é ponto fixo sob } \theta.$$

Lema 6.9: Seja  $\theta$  uma ação contínua de um grupo topológico  $G$  sobre um espaço  $M$ . Todo sub-conjunto compacto, invariante  $K \subset M$ ,  $K \neq \emptyset$ , contém um conjunto minimal.

Demonstração: A demonstração consiste em usar o lema de Zorn.

Seja  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{V}}$  uma coleção de subconjuntos não vazios,  $F_\alpha$  de  $K$ , fechados e invariantes sob  $\theta$ , parcialmente ordenados por inclusão de conjuntos. Seja  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \beta}$  uma sub-família totalmente ordenada e não vazia.

Então, dados  $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n}$ , com  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \beta$ , existe um  $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $F_{\alpha_s}$  é o menor dos  $F_{\alpha_i}$ ,

$i=1, 2, \dots, n$ . Assim,  $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$ . Sendo que  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \beta}$  tem a

propriedade da interseção finita,  $H = \bigcap_{\alpha \in \beta} F_\alpha \neq \emptyset$ .

Obviamente  $H \subset K$ , e desde que cada  $F_\alpha$  é fechado  $H$  é fechado.

Sejam  $g \in G, h \in H$ . Assim,  $\theta(g, h) \in F_\alpha$  para cada  $\alpha$ , o que implica que  $\theta(g, h) \in H$ . Portanto,  $H$  é invariante sob  $\theta$ . Assim sendo,  $H$

é cota inferior de  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \beta}$  e  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{V}}$  possui um elemento

mínimo. Seja  $K$  um elemento mínimo em  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{V}}$ .  $K$  é fechado,

não-vazio, invariante sob  $\theta$  e não existe nenhum  $F_\alpha$  menor que

ele; isto é,  $K$  é o conjunto minimal desejado.

Definição 6.10: Sejam  $\xi$  um fluxo sobre uma variedade bidimen-

sional  $M$  e  $y \in M$ . Uma secção transversal

local de  $\xi$  em  $y$  é um sub-conjunto  $S$  de  $M$ , homeomórfico

a um intervalo compacto  $[-a, a]$ , contendo  $y$ , tal que para al-

gum  $\epsilon > 0$  a aplicação  $[-\epsilon, \epsilon] \times S \longrightarrow M$ , dada por

$(t, x) \longrightarrow \xi(t, x)$ , é um homeomorfismo do fecho de algum aberto

contendo  $y$ . A imagem deste homeomorfismo é chamada vizinhança

retangular de  $y$ .

O ponto  $y$  é ponto extremo de  $S$  se, e somente se,

$y$  é elemento da fronteira de  $M$ .

Lema 6.11: Sejam  $\xi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade bidimensional  $M$  e seja  $y \in M$  um ponto cujo grupo isotrópico é discreto. Então existe uma secção transversal local em  $y$ . Isto é,  $y$  possui uma vizinhança retangular.

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso  $\xi$  diferenciável. Seja  $D$  um aberto em  $M$  e  $y_0 \in D$ . Seja  $\ell$  um segmento de reta contido em  $D$ , tal que  $y_0 \in \ell$  e qualquer ponto de  $\ell$  satisfaz a equação  $ax_1 + bx_2 + c = 0$ . Como o grupo isotrópico de  $y_0$

é discreto existe uma vizinhança  $U$ , centrada em  $y_0$ , de raio  $\epsilon$ , que contém apenas pontos regulares. O fluxo  $\xi$  que passa através de um ponto regular  $(x_1, x_2)$ , perto de  $y_0$ , em  $t=0$ , é contínuo em  $(t, x_1, x_2)$  e no aberto  $U$  de  $(0, y_0)$ . Seja

$$L(t, x_1, x_2) = a\xi_1(t, x_1, x_2) + b\xi_2(t, x_1, x_2) + c, \text{ onde}$$

$$\xi(t, x_1, x_2) = (\xi_1(t, x_1, x_2), \xi_2(t, x_1, x_2)). \text{ Então, } L(0, y_0) = 0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}(0, y_0) \neq 0. \text{ Portanto, pelo teorema da função implícita, existe}$$

uma função contínua  $t=t(x_1, x_2)$ , definida em  $U$ , tal que

$$t(y_0) = 0 \text{ e } L(t(x_1, x_2)) = 0. \text{ Além disso, como } t \text{ é contínua em}$$

$y_0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe um aberto  $C$ , centrado em  $y_0$ , de raio  $\epsilon$ ,

tal que  $|t(x_1, x_2)| < \epsilon$ , dentro de  $C$ . Portanto, a órbita de

$y_0$  que passa através de  $(x_1, x_2)$ , dentro de  $C$ , em  $t=0$ , atravessa

$\ell$  em  $t(x_1, x_2)$  com  $|t(x_1, x_2)| < \epsilon$ .

Para o caso geral a demonstração pode ser encontrada em H. WHITNEY, Regular families of curves. Ann. of Math. 34 (1933), pp. 244-270.

Lema 6.12: Sejam  $M$  um poliedro com característica de Euler diferente de zero,  $\chi(M) \neq 0$   $\xi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  um fluxo. Então  $\xi$  tem um ponto fixo.

Demonstração: Seja  $t \in \mathbb{R}$ . Definimos  $H_t: \mathbb{I} \times M \longrightarrow M$  por  $H_t(s, x) = \xi((1-s)t, x)$ . Denotemos por  $\xi_t$  a função de  $M$  em  $M$  dada por  $x \longmapsto \xi(t, x)$ . Assim,  $H_t$  é uma homotopia de  $\xi_t$  em  $i_{d_M}$ . Portanto,  $\lambda(\xi_t) = \lambda(i_{d_M}) = \chi(M) \neq 0$  e  $\xi_t$  tem um ponto fixo, (teorema de Lefschetz).

Sejam  $f_n: M \longrightarrow M$  definida por  $f_n(x) = \xi(2^{-n}, x)$  e  $F_n$  o conjunto de todos os pontos fixos de  $f_n(x)$  para  $n \geq 1$ .

Já que  $f_n = \xi_{2^{-n}}$ , segue que  $F_n \neq \emptyset$ .  $F_n$  é fechado e  $M$  compacto portanto,  $F_n$  é compacto. Como  $F_n = \{x \in M; f_n(x) = \xi_{2^{-n}}(x) = x\}$ , se

$x \in F_n$ ,

$$x = \xi(2^{-n}, x) = \xi(2^{-n}, \xi(2^{-n}, x)) = \xi(2^{-n} + 2^{-n}, x) = \xi(2 \cdot 2^{-n}, x) = \xi(2^{-(n-1)}, x).$$

Daí segue que  $F_n \subset F_{n-1}$ . Assim, os  $F_n$  tem a propriedade da interseção finita e  $F = \bigcap F_n \neq \emptyset$ . Obviamente qualquer ponto

de  $F$  é ponto fixo de  $\xi_t$  para  $t$  na forma  $t = 2^{-n}$ ,  $n \geq 1$ . Seja

$x \in F$ . O grupo isotrópico de  $x$ ,  $R_x = \{t \in \mathbb{R}; \xi(t, x) = x\}$ , é diferente de zero, pois  $2^{-1} \in R_x$  e não é da forma  $\{0, \pm t_0, \pm 2t_0, \dots\}$

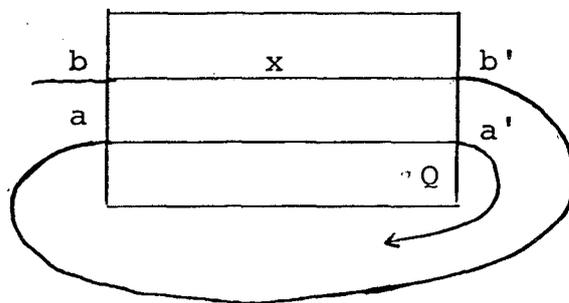
já que  $t_0$  não é o mínimo positivo, sendo que para qualquer  $n$ ,

$2^{-n} < t_0 \in R_x$ . Portanto,  $R_x = \mathbb{R}$ . Logo,  $x$  é ponto fixo sob  $\xi$ .

Lema 6.13: Sejam  $M$  uma variedade compacta, conexa de genus finito  $g$  e  $\xi$  um fluxo de  $\mathbb{R}$  sobre  $M$ . Então  $\xi$  tem no máximo  $2g-1$  conjuntos minimais distintos não triviais.

Demonstração: Podemos supor que  $M$  é orientável. Caso contrário consideremos seu recobrimento duplo orientável  $\tilde{M}$ . Por 5.17,  $\tilde{M}$  é conexa e sabemos que o genus de  $\tilde{M}$  é igual ao genus de  $M$ . Assim substituindo  $\tilde{M}$  por  $M$  teremos uma variedade orientável conexa de mesmo genus. Também,  $\tilde{M}$  tem tantos conjuntos minimais não triviais distintos quanto  $M$ .

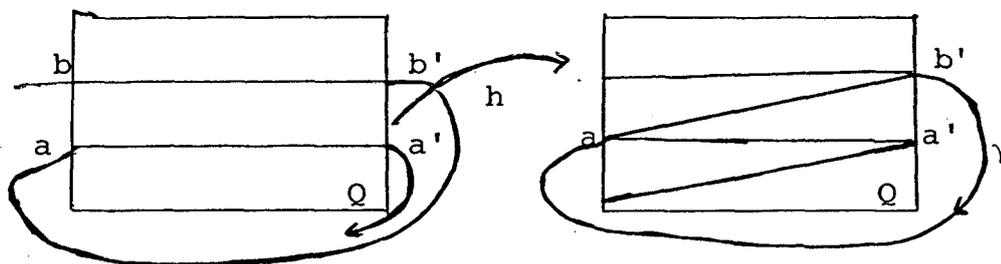
A demonstração será feita por indução sobre o genus. Observemos primeiramente que as curvas na fronteira de  $M$  são sub-variedades com topologia induzida e são órbitas de  $\xi$ , exceto quando  $\xi$  tem um ponto fixo numa delas. Assim, todo conjunto minimal não trivial está contido no interior de  $M$ . Consideremos o caso  $g=0$ . Então,  $M$  é um disco ou  $R^2$ , ou  $S^2$ . Nesse caso o lema é o clássico teorema de Poincaré-Bendixon. Com efeito, seja  $\mu$  um conjunto minimo não trivial. Escolhemos  $x \in \mu$  e tomemos uma vizinhança retangular  $Q$  de  $x$ . A órbita de  $x$ ,  $[x]$ , deve retornar para o interior da vizinhança em nível diferente do nível de partida, pois  $\mu$  é um conjunto minimal não trivial. Então ela fica presa na região limitada pela



curva de Jordan  $a'b'aa'$ . Como  $M$  é compacta o  $\omega$ -limite de  $x$ ,  $\omega(x)$ , é não vazio. É claro que  $\omega(x) \subseteq \mu$  e que  $\omega(x)$  é fechado e invariante. Como  $[x]$  é não circular  $x \notin \omega(x)$ , então  $\omega(x) \not\subseteq \mu$ . Contradição.

Assumiremos agora que  $g > 0$  e que o lema está provado

para todas as superfícies de genus menor que  $g$ . Seja  $\xi$  fluxo sobre uma superfície de genus  $g$ . Suponhamos por contradição, que  $\mu_1, \dots, \mu_{2g}$  são  $2g$  conjuntos minimais distintos não triviais de  $\xi$  em  $M$ . Seja  $Q$  uma vizinhança retangular de um ponto  $x \in \mu_{2g}$ . Escolhemos  $Q$  tão pequeno de modo que os restantes conjuntos minimais  $\mu_i, i=1, \dots, 2g-1$  não entram em  $Q$  e  $Q \cap \partial M \neq \emptyset$ . Como cada  $\mu_i$  é fechado  $\bigcup_{i=1}^{2g} \mu_i$  é fechada. Consideremos o seguinte homeomorfismo,  $h: Q \rightarrow Q$ , onde  $h$  é a identidade sobre todos os lados de  $Q$ , exceto na vertical a direita, onde teremos  $h(a') = b'$



no interior de  $Q$ ,  $h$  é definido por aplicar linearmente cada segmento horizontal  $yy'$  no segmento  $yh(y')$ . Definiremos agora um fluxo  $\xi': \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  da seguinte maneira. Uma órbita que não entra em  $Q$  é inalterada. Uma órbita que entra em  $Q$  no ponto  $x$  não mais atravessa  $Q$  horizontalmente para sair em  $x'$ . Agora sobe até  $h(x')$  e sai segundo a  $\xi$ -órbita de  $h(x')$  para sempre, ou até reentrar em  $Q$  pelo lado esquerdo. Dentro de  $Q$  as órbitas de  $\xi'$  são as imagens, por  $h$ , das  $\xi$ -órbitas. Sob o novo fluxo,  $\xi'$ , o ponto  $a$  tem uma órbita fechada  $\gamma$ . Portanto,  $\gamma$  é um conjunto minimal trivial. Mas os conjuntos minimais  $\mu_1, \dots, \mu_{2g-1}$  são ainda conjuntos minimais sob  $\xi'$ . A curva  $\gamma$  pode separar  $M$ . Se isso acontecer a curva fechada  $aa'b'a$  também separa e argumentando com  $\xi$  conduziria a uma contradição justamente

como no caso do genus  $g=0$ . Se  $\gamma$  não separa, cortando  $M$  ao longo de  $\gamma$ , obtemos uma variedade de genus  $g-1$  sobre a qual o fluxo  $\xi'$  é definido e admite pelo menos os conjuntos minimais  $\mu_1, \dots, \mu_{2g-1}$ . Contradição pois  $2g-1 > 2(g-1) = 2g-2$ .

Lema 6.14: Seja  $\xi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade bidimensional  $M$ . Suponhamos que  $x \in M$  é tal que  $x = \lim x_n$ , onde cada  $x_n$  tem uma órbita fechada  $\mu_n$  de período  $t_n$ . Então,

- a) Se o genus de  $M$  é finito, a órbita de  $x$  não pode ser recorrente.
- b) Se  $x$  tem uma órbita fechada  $\mu$ , de período  $t_0$ ,  $\lim t_n = at_0$  ( $a=1$  ou  $2$  dependendo de  $\mu$  ter um ou dois lados em  $M$ ), e  $\mu = \{y \in M; y = \lim y_n, y_n \in \mu_n, n=1, 2, \dots\}$ .

Demonstração Primeiro mostraremos que basta fazer a demonstração para  $M$  orientável.  $M$  possui um recobrimento orientável  $\tilde{M}$ . Seja  $x \in M$ , tal que,  $x = \lim x_n$ , onde cada  $x_n$  tem uma órbita fechada  $\mu_n$ . Então se  $p: \tilde{M} \longrightarrow M$  é a aplicação de recobrimento duplo

$p^{-1}(x) = p^{-1}(\lim x_n) = \lim p^{-1}(x_n)$  tem exatamente dois pontos

$\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$ . Assim, existem seqüências  $\tilde{x}_{n_1}$  e  $\tilde{x}_{n_2}$  em  $\tilde{M}$ , tal que

$\lim \tilde{x}_{n_1} = \tilde{a}$  e  $\lim \tilde{x}_{n_2} = \tilde{b}$ . Caso  $M$  seja orientável estas seqüências podem

ser escolhidas uma em cada componente conexa de  $\tilde{M}$ . Como  $p$  aplica cada uma delas homeomorficamente em  $M$  o lema se realiza. Caso

$M$  seja não orientável  $\tilde{x}_{n_1}$  e  $\tilde{x}_{n_2}$  estão na mesma componente conexa de  $\tilde{M}$  e a órbita  $\mu_{n_1}$  de  $\tilde{x}_{n_1}$  é a mesma órbita  $\mu_{n_2}$ .

de  $\tilde{x}_{n_2}$ . Suponhamos que  $\xi(t_0, \tilde{a}) = \tilde{b}$  e  $\xi(t_0, \tilde{b}) = a$ . Então temos  $\xi(t_0, \tilde{a}) = \xi(t_0, \xi(t_0, \tilde{b})) = \xi(t_0 + t_0, \tilde{b}) = \xi(2t_0, \tilde{b})$ . Como  $p$  é homeomorfismo o lema se realiza.

Demonstraremos agora que (a) vale para variedades orientáveis. Seja  $Q$  uma vizinhança retangular de  $x \in M$ . Suponhamos que  $x \in \partial M$  e  $\mu \subseteq \omega(x)$ . Como  $R$  e  $x$  são conexos  $\xi(R, \{x\})$  é conexo, isto é, um ponto, uma circunferência, um intervalo aberto ou fechado ou um intervalo semi-aberto.

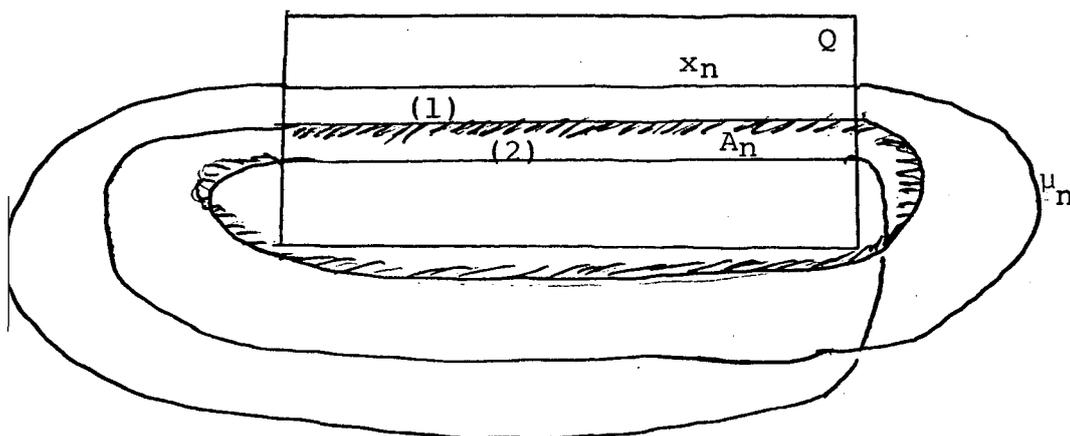
Se  $x \in \partial M$ ,  $[x] \subseteq \partial M$ . Por  $[x]$  ser conexo está em uma das fronteiras de  $M$ . Portanto, dentro de uma circunferência. Pontos e círculos são permitidos; intervalos fechados não são permitidos.

Suponhamos que  $[x] = (a, z)$ ,  $z = \xi(x, t)$  e  $\theta$  crescente. Se tivermos um intervalo aberto  $(a, b)$ ,  $a$  e  $b$  estarão em outras órbitas não da forma  $(c, a]$  nem da forma  $[b, d)$ . Assim,  $a$  e  $b$  são pontos fixos. Mas para todo  $\epsilon > 0$  temos  $[a + \epsilon] = [b - \epsilon] = (a, b)$ . Então, para grandes valores de  $t$ ,  $\xi(b + \epsilon, t)$  (ou  $\xi(b - \epsilon, t)$ ) está longe de  $a$  (ou  $b$ ), mas  $\xi(a, t) = a$  o que é uma contradição. Logo, os intervalos semi-fechados não são permitidos.

Suponhamos que  $x \notin \partial M$ . Consideremos o caso especial em que existe uma subvariedade fechada  $A_n \subset M$  com  $F_n A_n = \mu_n$ . Isto acontece quando  $\mu_n$  separa  $M$ . Suponhamos que a órbita  $[x]$ , de  $x$ , seja recorrente.

Como  $\mu_n = F_n A_n$  temos  $\mu_n \cap Q$  igual a fronteira de  $A_n$  em  $Q$ . Então existe  $t_0$  suficientemente grande, tal que uma órbita  $\mu_n$  de  $x_n$  passa exatamente tres vezes em  $Q$ . Tomemos um colar fechado de  $\mu_n$  em  $A_n$ .

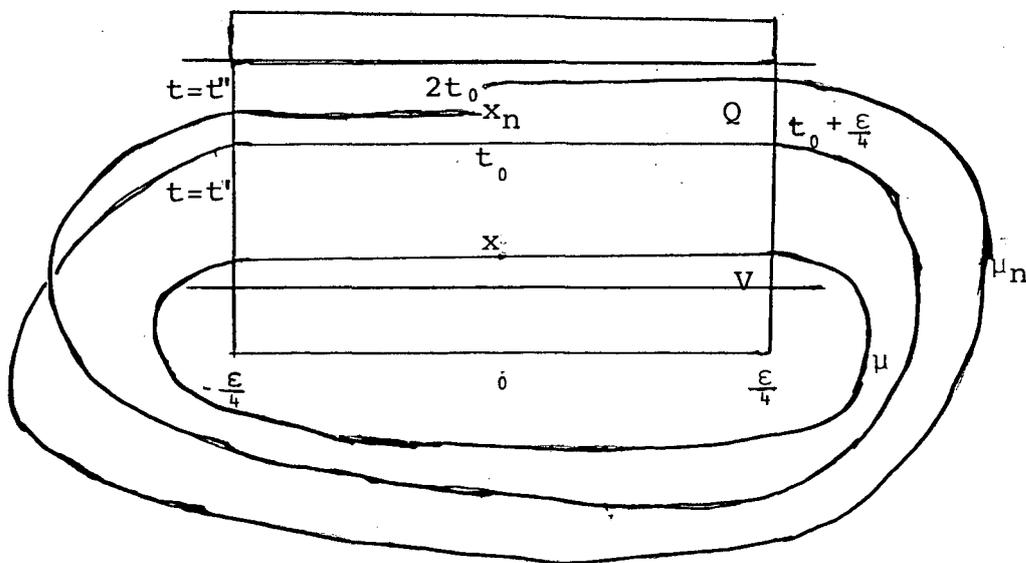
Vamos considerar a parte (1) de  $\mu_n \cap Q$ .  $A_n$  ou é acima ou abaixo de (1). Suponhamos que seja abaixo. Caso contrário, invertamos  $Q$  verticalmente e teremos  $A_n$  abaixo de (1). Quando  $\mu_n$  retorna para (2) (ou na segunda ou na terceira passagem) o colar tem que ser por cima porque a parte entre (1) e (2) em  $Q$  é a parte de  $Q$  que está em  $A_n$ . Ai temos uma faixa de Moebius em  $M$ , o que é impossível.



O caso geral pode ser reduzido ao caso especial na seguinte maneira. Suponhamos que apenas um número finito de  $\mu_n$  satisfazem ao caso especial. Desprezando este número podemos supor que nenhum  $\mu_n$  satisfaz tal condição. Então,  $\mu_1$  não separa  $M$ . Cortando  $M$  ao longo de  $\mu_1$ , obtemos uma superfície  $M_1$  de genus menor que  $M$ . Como o genus é finito, após um número finito de cirurgias sobre  $M$ , obtemos uma variedade  $M_0$  de genus zero, onde todos os conjuntos minimais são pontos ou círculos e não contêm órbitas recorrentes.

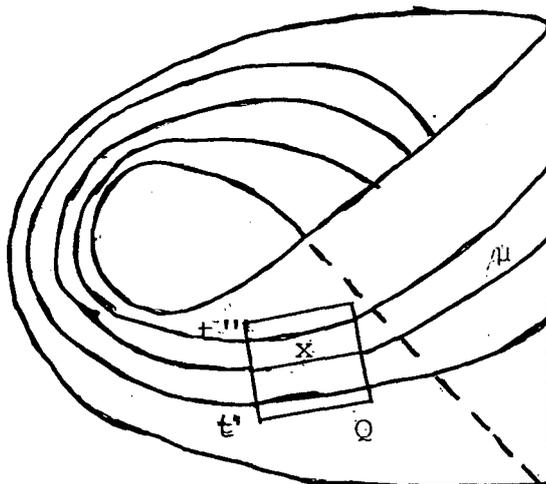
Demonstraremos (b). Seja  $\epsilon < 0$ . Procuraremos  $n_0$ , tal que  $d(t_n, t_0) < \epsilon/2$ , para todo  $n > n_0$ . Tomemos uma vizinhança retangular  $Q$  de  $x$ , tal que  $\mu \cap Q$  é um segmento de reta.

Suponhamos que  $Q$  é suficientemente pequeno, tal que se o fluxo  $\xi$  entra em  $Q$  no valor  $(t, y)$  ele sai de  $Q$  ao passar por  $(t+\varepsilon/2, y)$ . Tomemos também uma vizinhança tubular  $V$  da órbita fechada  $\mu$ , não maior que  $Q$ . Escolhemos  $n_0$  tão grande, de modo que para  $n < n_0$ ,  $x_n$  está suficientemente perto de  $x$ , para que  $\xi(t, x_n) \in V$  para  $0 < t < 2t_0$ , e que a órbita de  $x_n$  entra em  $Q$  na primeira vez em  $t=t'$ , onde  $d(t', t_0 + \varepsilon/4) < \varepsilon/2$  e pela segunda vez em  $t=t''$  com  $d(t'', t_0 + \varepsilon/4) < \varepsilon/2$ .



Suponhamos agora que  $\mu$  tem dois lados. Então,  $V$  é um cilindro e  $\xi(t, x_n)$  deve estar num segmento horizontal de  $Q$ , pois nesse ponto  $\mu_n$  entra em  $Q$ . Nesse caso  $\mu_n$  deve fechar na primeira vez que a órbita tocar  $Q$ , sob pena de nunca mais retornar a  $x_n$ . Logo, não toma um tempo maior que  $\varepsilon/4$  para  $\xi(t', x_n)$  alcançar  $x_n$ . Assim,  $t' < t_n < t' + \varepsilon/4$ . Sendo  $d(t', t_0 - \varepsilon/4) < \varepsilon/2$  vem  $d(t' + \varepsilon/4, t_0) < \varepsilon/2$  e  $d(t_n, t_0) < \varepsilon/2$ . Portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ .

Suponhamos agora que  $\mu$  sô tem um lado. Então,  $\mu$  é o equador de uma faixa da Moebius e  $\xi(t, x_n)$  retorna a  $Q$  no outro lado



de  $\mu$ , no ponto  $(t', x_n)$ , mas na segunda vez é obrigada a fechar em  $x_n$ , sob pena de nunca mais retornar a  $x_n$ . Então,  $\xi(t'', x_n)$  não toma um tempo maior que  $\epsilon/4$  para alcançar  $x_n$ , assim,  $t'' < t_n < t'' + \epsilon/4$ . Sendo  $d(t'', 2t_0 - \epsilon/4) < \epsilon/2$  vem  $d(t'' + \epsilon/4, 2t_0) < \epsilon/2$  e  $d(t_n, 2t_0) < \epsilon/2$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2t_0$ .

Demonstraremos agora que  $\mu = \{y \in M, y = \lim y_n, y_n \in \mu_n\}$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Suponhamos que  $z \in \mu$ , isso implica que  $z = \xi(t, x) = \xi(t, \lim x_n) = \lim \xi(t, x_n) = \lim y_n$ . Portanto,  $\mu \subset \{y \in M, y = \lim y_n, y_n \in \mu_n, n = 1, 2, \dots\}$ .

Reciprocamente, Seja  $y = \lim y_n, y_n \in \mu_n$ . Então,  $y_n = \xi(s_n, x_n)$ , onde  $0 < s_n < t_n$ . Logo,  $s_n$  é uma sequência limitada. Portanto, podemos tomar uma subsequência convergente  $w_n$  de  $s_n$  que converge para  $s$ . Então podemos escrever  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(w_n, x_n)$ . Portanto,  $y = \xi(s, x) \in \mu$ .

Sejam  $M$  uma variedade bi-dimensional,  $\Gamma$  um círculo da fronteira de  $M$  e  $\{\mu_\alpha\}$  uma família de curvas fechadas simples em  $M$ , nenhuma das quais intercepta a fronteira de  $M$ . Suponhamos que, para cada  $\alpha$ , existe um cilindro compacto  $\bar{C}_\alpha \subset M$ , cujos círculos fronteiras são  $\Gamma$  e  $\mu_\alpha$ . Por conveniência admitiremos  $\Gamma \subset C_\alpha$  mas  $C_\alpha \cap \mu_\alpha = \emptyset$ , de modo que cada  $C_\alpha$  é aberto em  $M$ . A fronteira topológica de  $C_\alpha$  em  $M$  é  $\mu_\alpha$  e escrevemos  $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$ . Finalmente,  $\bar{C}_\alpha = C_\alpha \cup \mu_\alpha$  é o fecho de  $C_\alpha$  em  $M$ .

Lema 6.15: Com as notações acima

a) A família  $\{C_\alpha\}$  é linearmente ordenada por inclusão, a menos que  $M$  é um disco com fronteira  $\Gamma$ .

b) A união de qualquer sub-família linearmente ordenada de  $\{C_\alpha\}$  é um cilindro  $C$  aberto em  $M$ , contendo  $\Gamma$ .

Além disso,  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$  onde  $C_i \subset C_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, n-1$  e para cada

$i=1, \dots, n$ , existe  $\alpha_i$ , tal que  $C_i = C_{\alpha_i}$ .

c) Se a fronteira topológica de  $C$ , em  $M$ , é uma curva fechada simples  $\mu$ , então, ou o fecho  $\bar{C}$  é um cilindro compacto com fronteiras  $\Gamma$  e  $\mu$ , ou  $\bar{C} = M$  é uma faixa de Moebius.

Demonstração: a) Suponhamos que  $M$  não é um disco com fronteira  $\Gamma$ . Sejam  $C_\alpha \neq C_\beta$  escolhidos arbitrariamente. Sejam

$h_\alpha: S^1 \times [0,1] \longrightarrow \bar{C}_\alpha$  e  $h_\beta: S^1 \times [0,1] \longrightarrow \bar{C}_\beta$  homeomorfismos,

onde  $h_\alpha(S^1 \times \{0\}) = h_\beta(S^1 \times \{0\}) = \Gamma$ ,  $h_\alpha(S^1 \times \{1\}) = \mu_\alpha$  e

$h_\beta(S^1 \times \{1\}) = \mu_\beta$ . Seja  $z$  um elemento fixo em  $S^1$  e

$A = \{t \in [0,1], h_\alpha(z,t) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta\}$ . Seja  $t = \sup A$ . Vamos mostrar que

$t \in A$  e  $x = h(z,t) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ . Tomemos uma sequência  $s_n$  em  $[0,1]$

com  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t$ , tal que  $h_\alpha(z, s_n) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ . Portanto,

$h_\alpha(z,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_\alpha(z, s_n) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$  e  $t \in A$ .

Agora  $x=h(z,t) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$  e

$$\begin{aligned} \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta &= (C_\alpha \cup \mu_\alpha) \cap (C_\beta \cup \mu_\beta) \\ &= [(C_\alpha \cup \mu_\alpha) \cap C_\beta] \cup [(C_\alpha \cup \mu_\alpha) \cap \mu_\beta] \\ &= C_\alpha \cap C_\beta \cup (\mu_\alpha \cap C_\beta) \cup (C_\alpha \cap \mu_\beta) \cup (\mu_\alpha \cap \mu_\beta) \\ &= C_\alpha \cap C_\beta \cup (\mu_\alpha \cap C_\beta) \cup (C_\alpha \cap \mu_\beta). \end{aligned}$$

Ora, por  $C_\alpha \cap C_\beta$  ser aberto e  $t$  ser o sup de  $A$  segue que  $x=h_\alpha(z,t)$  não é elemento de  $C_\alpha \cap C_\beta$ . Portanto, ou  $x \in \mu_\alpha \cap C_\beta$  ou  $x \in C_\alpha \cap \mu_\beta$ . Suponhamos que  $x \in \mu_\beta \cap C_\alpha$ . O conjunto  $\mu_\beta$  é conexo e encontra  $C_\alpha$  mas não intercepta a fronteira de  $C_\alpha$ . Suponhamos que existam  $N$  e  $B$  tais que  $\mu_\beta \cap C_\alpha = N$  e  $\mu_\beta \cap (C_\alpha)^c = B$ . Então,  $\mu_\beta = N \cup B$ , pois  $C_\alpha \cup (C_\alpha)^c = M = \mu_\beta$  e  $N \cap B = \emptyset$ . Os conjuntos  $B$  e  $N$  são abertos em  $\mu_\beta$ . Como  $\mu_\beta$  é conexo temos ou  $N = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ . Mas  $N$  não é vazio. Então  $B$  é vazio. Assim,  $N = \mu_\beta$ . Tomemos  $\mu_\beta \subset C_\alpha$ . Suponhamos que  $\mu_\beta$  é fronteira de um disco. Como  $\bar{C}_\beta$  é um cilindro fechado com fronteira  $\Gamma$  e  $\mu_\beta$ , e  $h$  é um homeomorfismo,  $\Gamma$  também será fronteira de um disco em  $M$ , o que é impossível por hipótese. Portanto,  $\bar{C}_\alpha - \mu_\beta$  é a união disjunta de duas componentes conexas abertas  $X$  e  $Y$  ambas com fronteira  $\mu_\beta$  em  $C_\alpha$ . Como  $\Gamma \cap \mu_\beta = \emptyset$  temos  $\Gamma \subset X$  ou  $\Gamma \subset Y$ . Suponhamos que  $\Gamma \subset X$ . Assim,  $C_\beta \cap X \neq \emptyset$ . Já que  $C_\beta \cap \mu_\beta = \emptyset$  concluímos que  $C_\beta \subset X \subset C_\alpha$ .

Para demonstrar (b) seja  $\{C_\alpha\}$  uma família linearmente ordenada de cilindros. Como variedades diferenciáveis tem base enumerável, são segundo contáveis. Pelo teorema de Lindelof, podemos encontrar uma sub-família  $C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_n}$ , tal que

$$\bigcup C_{\alpha_n} = \bigcup C_\alpha. \text{ Para cada } n, \text{ seja } C_n = C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup \dots \cup C_{\alpha_n}.$$

Então,

$$C_1 = C_{\alpha_1}$$

$$C_2 = C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} = C_1 \cup C_{\alpha_2} \quad \text{e} \quad C_1 \subset C_2$$

.....

$$C_n = C_{\alpha_1} \cup \dots \cup C_{\alpha_{n-1}} \cup C_{\alpha_n} = C_{n-1} \cup C_{\alpha_n} \quad \text{e} \quad C_{n-1} \subset C_n.$$

Portanto,  $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n$ . Como os  $C_\alpha$  são linearmente ordenados por inclusão cada  $C_i = C_{\alpha_i}$  para algum  $\alpha_i$ .

Suponhamos  $x \in C$ . Então  $x \in \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha_n} C_{\alpha_n}$ , logo existe

$n$ , tal que  $x \in C_{\alpha_n}$ , de modo que  $x \in C_n = C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup \dots \cup C_{\alpha_n}$ .

Portanto,  $x \in \bigcup C_n$ . Reciprocamente, suponhamos  $x \in \bigcup C_n$ . Então

existe  $n$ , tal que  $x \in C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup \dots \cup C_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha} C_{\alpha}$ . Portanto,

$x \in C$ . Logo,  $C = \bigcup C_n$ .

Se  $\bar{C}_n$  é o fecho de  $C_n$  em  $C$  temos duas possibilidades. Na primeira existe  $n_0$ , tal que  $\bar{C}_{n_0} = C_{n_0+1}$ . Ora  $C_{n_0+1}$

é  $C_\beta$  para algum  $\beta$ . Portanto,  $C_{n_0+1}$  é aberto em  $M$ . Por

outro lado  $C_{n_0+1} = \bar{C}_{n_0}$  é fechado em  $M$ . Logo  $M = C_{n_0+1} \subset \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \subset M$ .

Portanto,  $M = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha}$  é um cilindro.

Na segunda possibilidade, qualquer que seja  $n_0$  temos que  $\bar{C}_{n_0}$  é sub-conjunto próprio de  $C_{n_0+1}$ , isto é,  $\bar{C}_{n_0} \subsetneq C_{n_0+1}$

para todo  $n$ . Cada  $\bar{C}_{n+1} - C_n$  é um cilindro fechado. Consideremos o cilindro usual  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$ . Seja

$K_n = \{(x, y, z) \in K; z < n\}$ . Assim,  $K = \bigcup K_n$  e  $\bar{K}_n \subsetneq K_{n+1}$ . Para cada

$n$ , seja  $g_n: \bar{K}_{n-1} - K_{n-1} \longrightarrow \bar{C}_{n-1}$  um homeomorfismo, tal que

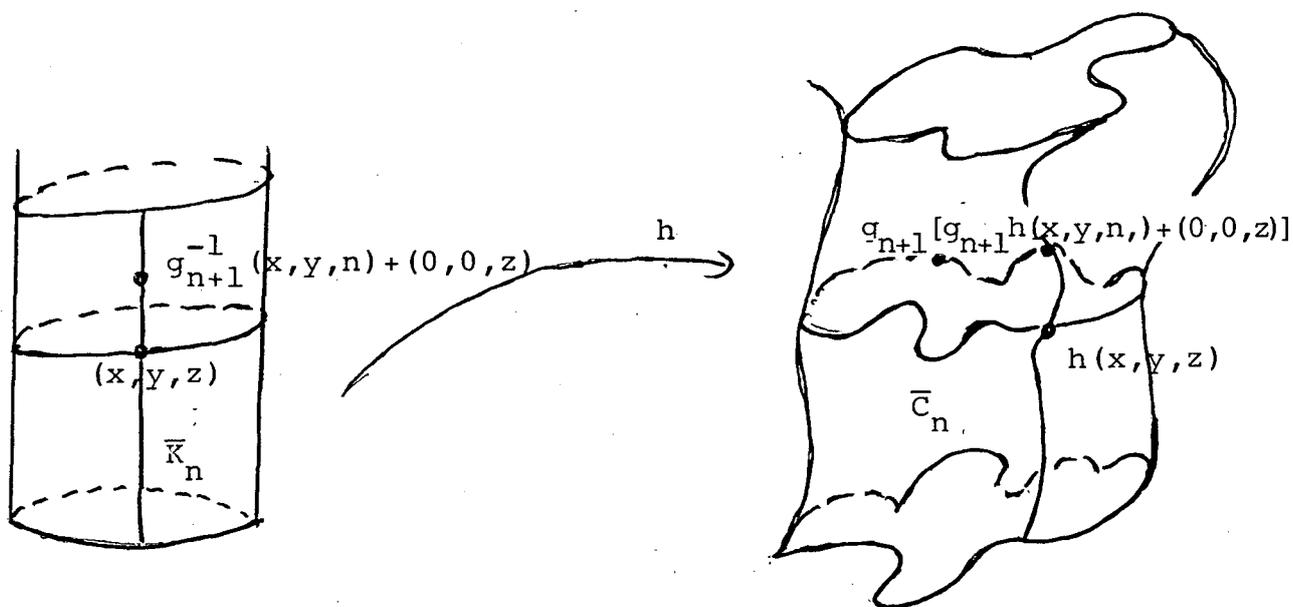
$g_n(\bar{K}_{n-1} - K_{n-1}) = \bar{C}_{n-1} - C_{n-1}$ . Vamos admitir  $K_0 = C_0 = \emptyset$ . Definimos

agora um homeomorfismo  $h:K \longrightarrow C$  e mostraremos que  $C$  é um cilindro. Coloquemos  $h|_{K_1} = g_1$  e procedemos por indução.

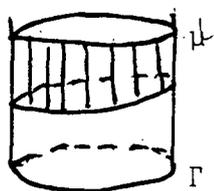
Suponhamos  $h:\bar{K}_n \approx \bar{C}_n$  definido. Vamos estender  $h$  para

$\bar{K}_{n+1} - K_n$  colocando  $h(x,y,z) = g_{n+1}^{-1} [g_{n+1}^{-1} h(x,y,n) + (0,0,z)]$ ;

$0 \leq z \leq 1$ . Com esta condição  $h:K \longrightarrow C$  é construída. Então  $C$  é um cilindro.

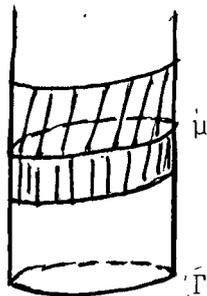


c) Como  $C$  é um cilindro aberto em  $M$ ,  $\emptyset \neq C \subset \partial C = C \cap \mu$ . Mas  $\Gamma \subset C$ , isso implica que  $\Gamma \cap \mu = \emptyset$ . Assim,  $\mu$  não tem pontos em comum com  $\Gamma$ . Suponhamos que existe um colar  $\bar{A} = S^1 \times [0,1]$  em  $M$  com  $\mu = S^1 \times \{0\}$  Podemos escrever  $A = S^1 \times (0,1)$ . Este colar existe em dois casos. Primeiro caso. Quando  $\mu \subseteq \partial M$  e existe um colar  $S^1 \times [0,1] \longrightarrow \bar{C}$  com  $S^1 \times \{0\} \longleftarrow \mu$



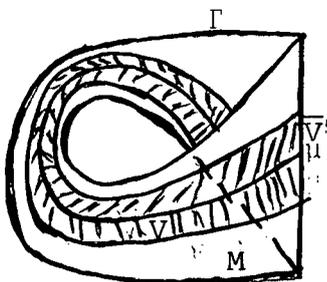
Nesse caso o colar está contido em  $C$ . Logo  $\mu$  e  $\Gamma$  limitam um

cilindro em  $C$ . Segundo caso quando  $\mu \cap \partial M = \emptyset$ . Aqui há duas possibilidades. Na primeira  $\mu$  separa  $M$ , então existe um colar  $S^1 \times [0,1] \longrightarrow M$  e  $S^1 \times \{0\} \longleftarrow \mu$ . Temos um colar em cada lado de  $\mu$ .

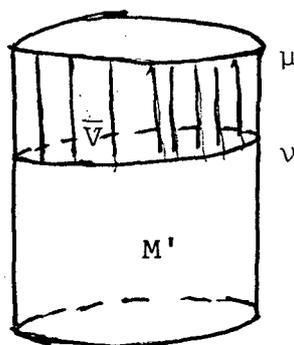


Escolhemos  $\bar{A}$  no lado em que  $A \cap C \neq \emptyset$ . Como  $A$  é conexo e disjunto de  $\mu$ , segue que  $A \subset C$ . Portanto,  $\mu$  e  $\Gamma$  limitam um cilindro em  $C$ . Podemos escolher  $\bar{A}$  tão estreito de forma que  $A_1 = S^1 \times (0,1]$  esteja contido em  $C$ , de modo que  $v = S^1 \times \{0\}$  seja uma curva fechada em  $C$  disjunta de  $\Gamma$ . Então, temos duas alternativas. A primeira é que  $v$  limita um disco em  $C$ . Mas isso não é possível, pois se isso acontecesse,  $\Gamma$  também limitaria um disco. Consideraremos então a segunda possibilidade, isto é,  $v$  não limita um disco em  $C$ . Então,  $v$  e  $\Gamma$  limitam um cilindro compacto  $\bar{B}$ , tal que  $\bar{A} \cap \bar{B} = v$ . Qualquer sequência de pontos de  $C$ , contendo um ponto em  $\mu$ , deve entrar em  $A$ . Assim,  $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$  e portanto,  $\bar{C}$  é um cilindro compacto, limitado por  $\mu$  e  $\Gamma$ .

Suponhamos agora que  $\mu$  tem só um lado em  $M$ . Então  $\mu$  não intersecciona a fronteira de  $M$ . Tomemos uma vizinhança tubular  $V$ , de  $\mu$ , de forma que  $\bar{V} \cap \partial M = \emptyset$ . Então,  $V$  é uma faixa de Moebius com fronteira  $v$ .



Agora,  $V - \mu$  é conexo e encontra  $C$  mas  $\mu \neq \partial C$ . Assim,  $V \subset C$ . Então  $\bar{C} = C \cup \mu$  é aberto e fechado em  $M$ . Como  $M$  é conexo e  $\bar{C} \neq \emptyset$  temos  $M = \bar{C}$ , e  $M = \bar{C}$  é uma variedade bidimensional com fronteira  $\Gamma$ , e cortando  $M$  ao longo  $\mu$ , obtemos uma variedade bidimensional  $M'$  com dois círculos fronteira  $\Gamma$  e  $\mu$ , de modo que  $M' - \mu = C$ . Então  $M'$  é um cilindro compacto, e  $M$  é uma faixa de Moebius.



Passaremos agora a demonstração do nosso principal teorema.

Teorema 6.16: Toda ação contínua do grupo aditivo  $\mathbb{R}^n$  sobre uma variedade compacta bidimensional  $M$ , com característica de Euler diferente de zero,  $\chi(M) \neq 0$ , tem um ponto fixo.

Demonstração: Seja  $\theta: \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow M$  uma ação contínua sobre  $M$ . A demonstração será por indução em  $n$ . Para  $n=1$ , o teorema é verdadeiro, pelo lema 6.12. Para efetivar a indução precisaremos de dois sub-lemas auxiliares.

Sub-lema I: Suponhamos que o teorema vale para ações contínuas dos grupos  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^{n-1}$  sobre  $M$ . Seja  $\mathcal{M}$  a coleção de todos os conjuntos minimais sob  $\theta$  em  $M$ .

Então, ou  $\theta$  tem um ponto fixo ou  $\pi$  é não enumeravelmente infinito e todos, exceto um número finito de seus elementos, são círculos, isto é, órbitas fechadas 1-dimensionais de  $\theta$ .

Demonstração: Suponhamos que  $\theta: \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow M$  não tem nenhum ponto fixo. Para cada hiperplano  $Z \subset \mathbb{R}^n$  que contém a origem, seja  $\theta/Z$  a ação de  $Z$  sobre  $M$  induzida pela restrição de  $\theta$ . Pela hipótese do sub-lema  $\theta/Z$  tem um ponto fixo.

Seja  $x$  um ponto fixo de  $\theta/Z$  e  $K(x)$  o fecho da  $\theta$ -órbita de  $x$ , isto é,  $K(x) = \overline{\theta(\mathbb{R}^n \times \{x\})}$ . Seja  $y \in K(x)$ . Então existe uma sequência  $\{x_j\} \in \theta(\mathbb{R}^n \times \{x\})$ , tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = y$ .

Já que  $x_j \in K(x)$  existe uma sequência  $w_j \in \mathbb{R}^n$ , tal que

$\theta(w_j, x) = x_j$  Então para  $z \in Z$  temos

$$\begin{aligned} \theta(z, y) &= \theta(z, \lim_{j \rightarrow \infty} x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(z, x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(z, \theta(w_j, x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(z + w_j, x) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(w_j + z, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(w_j, \theta(z, x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \theta(w_j, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = y. \end{aligned}$$

Portanto,  $\theta(z, y) = y$  se  $y \in K(x)$  e  $z \in Z$ , ou seja todos os pontos de  $K(x)$  são deixados fixos por  $Z$ .

Seja  $v_0 \in (\mathbb{R}^n - Z)$  e  $L_{v_0} = \{tv_0; t \in \mathbb{R}\}$ . Então  $L_{v_0}$  é uma linha de  $\mathbb{R}^n$  que passa pela origem e  $v_0$ . Observe que  $v_0 \notin Z$ , de modo que  $L_{v_0} \cap Z = \{0\}$ . Seja  $x$  um ponto fixo sob  $\theta/Z$  e  $y \in K(x)$ . Então,

$\theta(L_{v_0}, \{y\}) = \{\theta(tv_0, y); t \in \mathbb{R}\} \subseteq \theta(\mathbb{R}^n \times \{y\})$ . Reciprocamente, seja

$\bar{y} = \theta(z_0 + tv_0, y)$  com  $t \in \mathbb{R}$  e  $z_0 \in Z$ . Então,

$$\bar{y} = \theta(z_0 + tv_0, y) = \theta(tv_0 + z_0, y) = \theta(tv_0, \theta(z_0, y)) = \theta(tv_0, y) \subseteq \theta(L_{v_0}, y).$$

Portanto,  $\theta(\mathbb{R}^n \times \{y\}) \subseteq \theta(L_{v_0}, y)$ . Logo, a órbita de cada um dos

pontos  $y \in K(x)$  é a mesma com respeito a qualquer linha  $L_V$  que passa pela origem de  $R^n$ , desde que  $L_V \not\subset Z$ .

Seja  $[x] = \theta(R^n \setminus \{x\}) \subset M$  a órbita de  $x$ .  $[x]$  é invariante sob  $\theta$  e pelo lema 6.6,  $\overline{[x]}$  é invariante sob  $\theta$ . Mas  $\overline{[x]} = \overline{\theta(R^n \setminus \{x\})} = K(x)$ . Portanto,  $K(x)$  é invariante sob  $\theta$ . Assim,  $K(x)$  é fechado, invariante sob  $\theta$  e contido num compacto  $M$ . Logo, pelo lema 6.9,  $K(x)$  tem pelo menos um conjunto minimal.

Seja  $\pi(Z)$  a coleção de todos os sub-conjuntos  $\theta$ -minimais de  $M$  os quais são deixados fixos ponto a ponto por  $Z$ . Seja  $\ell$  uma linha que passa pela origem em  $R^n$  e não está contida em  $Z$  e seja  $\mu \in \pi(Z)$ . Obviamente  $\mu$  é fechado e invariante sob  $\theta$ . Se  $\tau$  é um sub-conjunto próprio de  $\mu$ , existe  $w = z_0 + v_0$ ,  $z_0 \in Z$  e  $v_0 \in \ell$  e  $y \in \tau$ , tal que  $\theta(w, y) \notin \tau$ . Mas,  $\theta(v_0, y) = \theta(v_0, \theta(z_0, y)) = \theta(w, y) \notin \tau$ , e  $\tau$  não é  $\ell$ -invariante. Logo,  $\mu$  é conjunto minimal sob  $\theta/\ell$ . Como  $K(x)$  tem pelo menos um conjunto minimal, cada  $\pi(Z)$  é não nulo.

Sejam  $W$  e  $Z$  dois hiperplanos distintos passando pela origem de  $R^n$ . Então  $R^n$  é gerado por  $W$  e  $Z$ . Suponhamos que  $\mu \in \pi(Z) \cap \pi(W)$ . Então cada ponto  $x \in \mu$  é fixo sob  $Z$  e  $W$ . Portanto  $x$  é ponto fixo sob  $R^n$  contrariando a suposição inicial. Logo  $\pi(Z) \cap \pi(W) = \emptyset$ . Portanto  $\pi = \bigcup \pi(Z)$ , onde  $Z$  descreve todos os hiperplanos que passam pela origem de  $R^n$ , os quais formam uma coleção infinitamente não enumerável.

Mostraremos agora que  $\pi$  contém todos os conjuntos minimais sob  $\theta$ . Seja  $\mu$  um conjunto minimal e  $x \in \mu$ , tal que a órbita de  $x$ ,  $[x]$ , contém um ponto interior. A fronteira de  $[x]$  é não vazia, pois  $M$  não é o Toro e nem Garrafa de Klein.

Seja  $F_r([x]) = \overline{[x]} \cap \overline{(M-[x])}$  a fronteira de  $x$ . Mostraremos que  $F_r([x])$  é invariante sob  $\theta$ . Seja  $\{t \in \mathbb{R}^n, y \in (M-[x]); \theta(t,y)$  não seja elemento de  $(M-[x])\}$ . Então,  $\theta(t,y) \in [x]$  com  $y \notin [x]$ .

Como  $\theta$  é homeomorfismo  $\theta(-t, \theta(t,y)) = \theta(-t+t, y) = \theta(0, y) = y$

que é elemento de  $[x]$ , mas isso é absurdo. Portanto,

$\theta(\mathbb{R}^n, (M-[x])) \subseteq (M-[x])$  e pelo lema 6.6,  $\theta(\mathbb{R}^n, \overline{(M-[x])}) \subseteq \overline{(M-[x])}$ .

Portanto,  $F_r([x])$  é invariante sob  $\theta$ . Como  $[x] \subset \mu$ , temos

$[x] \subset \mu$ . Logo,  $F_r([x])$  é um subconjunto próprio de  $\mu$  com as mesmas propriedades que  $\mu$ , contradizendo o fato que  $\mu$  é minimal.

Como a dimensão de  $Z$  é  $n-1$  e os pontos das órbitas de  $\theta$  são deixados fixos por  $Z$ , segue que  $\theta: \mathbb{R}^n / Z^{n-1} \times M \longrightarrow M$  tem órbitas unidimensionais.

Então, o grupo isotrópico de  $x$  contém um hiperplano  $Z$ . Como  $\mathbb{R}^n$  é abeliano e  $\mu$  um conjunto minimal relativo a ação  $\theta$ , todo  $x \in \mu$  tem o mesmo grupo isotrópico.

Assim,  $\mu \in \pi(Z)$ .

Sejam  $\ell_1, \dots, \ell_n$  os eixos de  $\mathbb{R}^n$  e escrevemos

$\pi_i = \cup \{ \pi(Z); Z \cap \ell_i = \{0\} \}$ . Todo conjunto  $\mu \in \pi_i$  é minimal sob

$\ell_i$ . Assim, pelo lema 6.13, os conjuntos  $\mu \in \pi_i$  são círculos,

exceto um número finito deles. Claramente  $\pi = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_n$ , já

que um hiperplano não contém todos os eixos de  $\mathbb{R}^n$ . Portanto,

todos os conjuntos minimais em  $\pi$  são círculos, com um número

finito de excessões. Se o genus de  $M$  for zero não há excessões.

Sub-lema II: Suponhamos que o teorema vale para ações contínuas

dos grupos  $\mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}^{n-1}$  sobre  $M$ . Então,

ou  $\theta$  tem um ponto fixo em  $M$  ou podemos encontrar uma órbita uni-dimensional de  $\theta$ , a qual é disjunta dos componen-

tes da fronteira de  $M$  e não limita um cilindro em  $M$  junto com qualquer um deles.

Demonstração: Suponhamos que  $\theta: \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow M$  não tem nenhum ponto fixo. Seja  $\Gamma$  um dos componentes da fronteira de  $M$ . Consideremos a coleção  $\{C_\alpha\}$  dos cilindros abertos em  $M$  contendo  $\Gamma$  em uma das componentes da fronteira e, tal que, a fronteira topológica de  $C_\alpha$  em relação a  $M$ ,  $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$ , seja uma órbita uni-dimensional de  $\theta$ . Se  $M$  não é um disco, pelo lema 6.15 (a), a coleção  $\{C_\alpha\}$  é linearmente ordenada por inclusão. Mesmo que  $M$  seja um disco, a coleção  $\{C_\alpha\}$  é parcialmente ordenada por inclusão, isto é,  $C_{\alpha_i} \leq C_{\alpha_j}$  se, e somente se,  $C_{\alpha_i} \subset C_{\alpha_j}$ . Em qualquer dos dois casos, pelo princípio maximal de Hausdorff, existe uma sub-família máxima  $\{C_\beta\}$  de  $\{C_\alpha\}$  totalmente ordenada, tal que  $\{C_\beta\} \subseteq \{C_\alpha\}$ . Portanto, pelo lema 6.15 (b), em qualquer caso, a união  $C$  de qualquer sub-família totalmente ordenada de  $\{C_\alpha\}$  é um cilindro aberto em  $M$  contendo  $\Gamma$ , e podemos escrever  $C = C_n$ .

Vamos mostrar que  $C$  tem como fronteira uma curva fechada  $\mu = \partial C$ . Observamos primeiro que  $x \in \partial C$  se, e somente se,  $x = \lim x_n$ ,  $x_n \in \mu_n = \partial C_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Assim, sendo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_n \in \mu_n$  temos  $\theta(v, x) = \theta(v, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(v, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta y_n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  e  $y \in \partial C$ , segue que  $\partial C$  é invariante sob  $\theta$ . Obviamente  $\partial C$  é fechado. Vimos na demonstração do sub-lemma I que o grupo isotrópico de cada ponto de  $\mu$  contém um hiperplano  $Z$ . Seja  $v_0 \in \mathbb{R}^n - Z$  e  $L_{v_0} = \{tv_0; t \in \mathbb{R}\}$ . Obviamente  $L_{v_0}$  é linha que passa pela origem de  $\mathbb{R}^n$  e  $L_{v_0} \not\subset Z$ . Então,  $L_{v_0}$  não está contida no grupo isotrópico de  $\mu_n$  ou de  $\mu$ . Se isso acontecesse

os pontos de  $\mu_n$  e  $\mu$  seriam pontos fixos.

Seja  $\xi:RXM \longrightarrow M$  o fluxo induzido pela restrição  $\theta$  à linha  $L_{v_0}$ . Como foi visto na demonstração do sub-lemma I,  $\mu_n$  é também órbita de  $\xi$ . Assim sendo,  $\mu$  é conjunto minimal sob  $\theta$  e sob  $\xi$ . Pelo lema 6.14 (a), nenhuma órbita de  $x$  pode ser recorrente. Portanto,  $\mu$  é na realidade um círculo. Pelo lema 6.15 (b),  $\mu = \{x \in M, x = \lim x_j; x_j \in \mu_j, j=1,2,\dots\}$ . Portanto,  $\mu = \partial C$ . Assim, concluímos que  $\bar{C}$  é um cilindro compacto com componentes da fronteira  $\mu$  e  $\Gamma$ .

Seja  $\Gamma'$  um outro componente da fronteira de  $M$ . Suponhamos que  $\mu \cap \Gamma' \neq \emptyset$ . Como  $\Gamma'$  é invariante e  $\mu$  uma órbita segue que  $\mu \subset \Gamma'$ , desde que ambos sejam círculos. Então temos  $\mu = \Gamma'$  e  $M$  é um cilindro. Portanto  $\mu$  é disjunto de qualquer outro componente da fronteira de  $M$ .

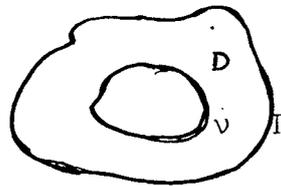
Agora  $M-C$  é uma variedade compacta, bidimensional, com mesma característica de Euler que  $M$ , mesmo número de componentes da fronteira. Logo, pelo teorema 5.20, são homeomorfas. Já que  $\mu$  é órbita e separa  $M$  em duas componentes,  $M-C$  e  $C$ ,  $M-C$  é invariante sob  $\theta$ . Ainda mais, nenhuma curva uni-dimensional  $v$  pode limitar um cilindro em  $M-C$  juntamente com  $\Gamma$ . Caso  $v$  e  $\Gamma$  limitassem um cilindro  $C_0$

$\{C_\alpha\} \cup \{C_\beta\}$  seria uma família totalmente ordenada maior que a família máxima. Repetindo a mesma construção para todos os componentes da fronteira de  $M$ , obteremos uma variedade  $M'CM$ , homeomorfa a  $M$  e invariante sob  $\theta$ , e nenhuma curva fechada uni-dimensional de  $M'$  limita um cilindro com qualquer componente da fronteira de  $M$ . Mas  $\chi(M') = \chi(M) \neq 0$ . Como  $\theta$  não tem ponto fixo, pelo sub-lemma I, podemos escolher uma órbita uni-dimensio-

nal  $v$  de  $\theta$  em  $M'$ . Com  $\pi_C$  é infinito podemos escolher  $v$ , tal que é disjunto de qualquer componente da fronteira de  $M$ . Logo,  $v$  é a órbita desejada.

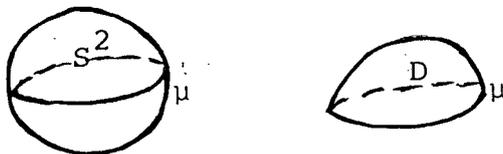
Continuaremos agora a demonstração do teorema 6.16. A demonstração de que  $\theta$  tem um ponto fixo será dada por uma segunda indução, agora sob o genus da variedade  $M$ . Começemos a indução supondo que a variedade  $M$  tem genus zero.

Caso 1. Consideremos o caso em que  $M$  é um disco bi-dimensional  $D$ , e suponhamos que  $\theta: R^n \times D \longrightarrow D$  não tem ponto fixo. Então, pelo sub-lemma II, podemos encontrar uma curva fechada  $v$ , disjunta da fronteira de  $D$ , a qual não limita um cilindro. Mas, isso é falso.



Vemos que  $v$  e  $\Gamma$  limitam um cilindro em  $D$ .

Caso 2. Nesse caso temos  $M=S^2$ , ou seja,  $M$  é a esfera bi-dimensional. Escolhemos um dos círculos  $v \subseteq S^2$  dados pelo sub-lemma I. Vemos que  $v$  limita um disco em  $S^2$ .

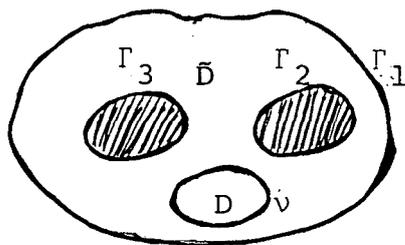


O disco  $D$  é invariante sob  $\theta$ , e pelo caso 1, tem um ponto fixo. Portanto  $\theta$  tem um ponto fixo em  $S^2$ .

Façamos agora uma terceira indução para completar o caso de  $M$  com genus  $g=0$ . Desta vez sobre o número de componentes da fronteira de  $M$ . Se o número de componentes da fronteira for zero,  $M$  é a esfera  $S^2$ ; caso seja um,  $M$  é um disco bi-dimensional. Em ambos os casos o teorema vale. No caso em que o número de componentes da fronteira de  $M$  é dois  $M$  é um cilin-

dro e  $\chi(M)=0$ .

Se  $M$  tem tres componentes na fronteira,  $M$  é uma esfera bidimensional com tres buracos, ou um disco com dois buracos interiores. Como ambos são homeomorfos, por simplicidade vamos pensar que  $M$  é um disco  $\tilde{D}$  com dois buracos interiores. Então pelo sub-lemma II, podemos escolher uma curva  $v$ , fechada, uni-dimensional, a qual não limita um cilindro em  $\tilde{D}$ , com qualquer componente da fronteira de  $\tilde{D}$ .

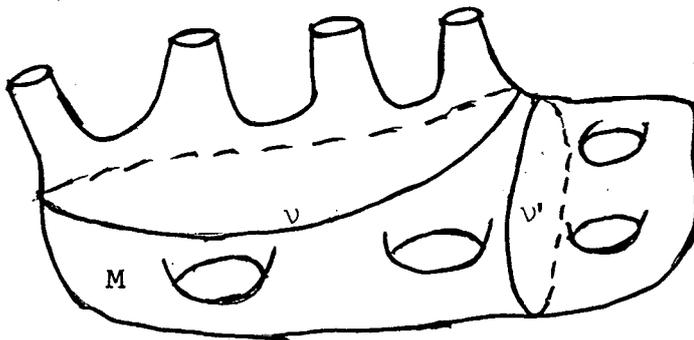


Então  $v$  limita um disco  $D$  em  $\tilde{D}$ . Tal disco  $D$  é invariante sob  $\theta$  e tem um ponto fixo. Como  $D \subset \tilde{D}$ , segue que  $\theta$  tem um ponto fixo em  $\tilde{D}$ .

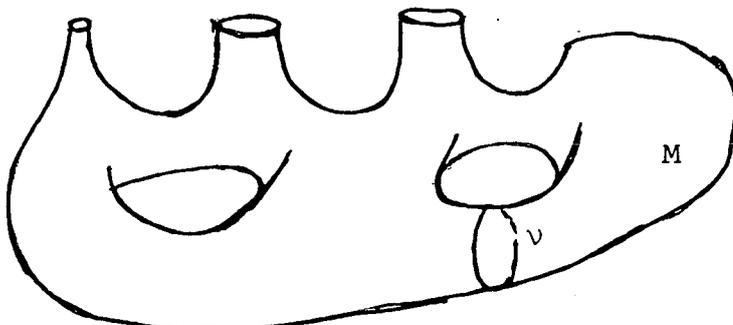
Suponhamos agora que  $M$  é um disco com  $n-1$  buracos. Nesse caso o número de componentes da fronteira é  $b=n$ . Suponhamos que o teorema é verdadeiro para  $3 \leq b \leq n-1$ . Então, pelo sub-lemma II, podemos escolher uma órbita fechada  $v$  que não limita um cilindro em  $M$ . Cortando  $M$  ao longo de  $v$  obtemos duas variedades compactas de genus zero, com as mesmas componentes da fronteira de  $M$ , ambas invariantes sob  $\theta$ . Pela hipótese da terceira indução  $M$  tem um ponto fixo sob  $\theta$ . Assim, concluímos o caso para o genus  $g=0$ .

Seja  $g>0$ , e suponhamos que o teorema está demonstrado para variedades de genus menor que  $g$ . Tomemos uma curva  $v$  dada pelo sub-lemma II. Cortando  $M$  ao longo de  $v$  temos duas possibilidades.

Primeira possibilidade,  $v$  separa  $M$ . Nesse caso obtemos duas variedades, ambas com característica de Euler diferente de zero, pois nenhuma delas é um cilindro. Caso o genus não diminua numa delas a outra tem genus zero. Na figura abaixo, se cortarmos  $M$  ao longo de  $v$  obtemos uma variedade de genus  $g$  e uma variedade homeomorfa a um disco e nesse caso  $\theta$  tem um ponto fixo. Se cortarmos  $M$  ao longo de  $v'$  obtemos duas variedades de genus menor que  $g$ , também nesse caso  $\theta$  tem um ponto fixo.



Segunda possibilidade,  $v$  não separa  $M$ . Então cortando  $M$  ao longo de  $v$  obtemos uma variedade de genus menor que  $g$ , e o teorema vale.



Teorema 6.17: Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  campos de vetores de classe  $C^1$  que comutam dois a dois sobre uma variedade compacta, bidimensional com característica de Euler diferente de zero  $M$ . Então existe  $x \in M$ , tal que  $X_1(x) = X_2(x) = \dots = X_n(x) = 0$ .

Demonstração: Seja  $X$  um campo de vetores sobre uma variedade  $M$ . Seja  $\xi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  seu fluxo correspondente. Dado  $x \in M$ , temos  $X(x) = 0$  se, e somente se,  $\xi(s, x) = x$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , isto é,  $x$  é um ponto fixo de  $\xi$ . Seja  $Y$  um outro campo de vetores de classe  $C^1$  sobre  $M$  e  $\eta$  o seu fluxo correspondente. A condição de que  $[X, Y] = 0$  implica em  $\xi(s, \eta(t, x)) = \eta(t, \xi(s, x))$ , para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in M$ . Então dizemos que  $\xi$  e  $\eta$  comutam.

O par  $X, Y$  gera uma ação  $\phi: \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$  definida por  $\phi(r, x) = \xi(s, \eta(t, x)) = \eta(t, \xi(s, x))$  para  $x \in M$  e  $r = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $x$  é ponto fixo de  $\xi$  e  $\eta$ . Então  $\phi(r, x) = \phi((s, t), x) = \xi(s, \eta(t, x)) = \xi(s, x) = x$ . Logo  $x$  é ponto fixo de  $\phi$ . Reciprocamente, suponhamos que  $x$  é ponto fixo de  $\phi$ . Ora,  $\xi(s, x) = \xi(s, \eta(0, x)) = \phi((s, 0), x) = x$  e  $\eta(t, x) = \eta(t, \xi(0, x)) = \phi((0, t), x) = x$ . Portanto  $x$  é ponto fixo de  $\xi$  e  $\eta$ . Logo,  $x$  é ponto fixo de  $\phi$  se, e somente se, é ponto fixo de  $\xi$  e  $\eta$ . Nesse caso, temos  $X(x) = Y(x) = 0$ .

De maneira semelhante podemos mostrar que uma coleção finita de campos de vetores que comutam dois a dois,  $X_1, \dots, X_n$  sobre  $M$ , gera uma ação  $\phi: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ , e se  $x$  é ponto fixo de  $\phi$  então,  $X_1(x) = \dots = X_n(x) = 0$ .

## B I B L I O G R A F I A

- [1] - BOOTHBY, Willian M., An Introduction to Differentiable Manifolds on Riemannian Geometry, New York, Academic Press, 1975.
- [2] - CODDINGTON, E. en LEVINSON, N., Theory of differential Equations, MC-Graw-Hill, New York, 1955.
- [3] - CRESPI, Sérgio Eli, Classificação de Superfícies, Florianópolis, UFSC, 1982.
- [4] - CROOM, Fred H., Basic Concepts of Algebraic Topology, New York, Springer-Verlag, 1978.
- [5] - GREENBERG, Marvin, Lectures on Algebraic Topology, New York, W. A. Benjamin, 1966.
- [6] - LIMA, Elon Lages, Grupo Fundamental em Espaços de Recobrimiento, Rio de Janeiro, IMPA.
- [7] - LIMA, Elon Lages, Common Singularities of Commuting Vector Fields on 2-Manifolds, Math. Helv. vol. 39, pp 97- 110, 1963.
- [8] - LIMA, Elon Lages, Commuting Vector Fields on  $S^2$ , Proc. AM. Math Soc. vol 15, pp 138 - 141, 1963.
- [9] - LIMA, Elon Lages, Commuting Vector Fields on 2-Manifolds, Bull. AM Math. vol 69, pp 366 - 368, 1963.
- [10] - SOTOMAYOR, Jorge, Lições de Equações diferenciais Ordinárias, Rio de Janeiro, IMPA.
- [11] - WHITNEY, H., Regular Families of Curves, Ann. of Math. vol 34, pp 244 - 270, 1933.
- [12] - WILLIM, S. Massey, Introducion a la Topologia Algébrica España, Editorial Reverté S. A., 1972.
- [13] - ZEEMAN, C. E., Uma Introdução Infoemal a Topologia das Superfícies, Rio de Janeiro, IMPA.