

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE SUPERFÍCIES EM \mathbb{R}^3

POR

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

NOVEMBRO - 1985

" UM ESTUDO SOBRE SUPERFÍCIES EM \mathbb{R}^3 "

POR

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM CIÊNCIAS"
ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA.



Prof. WILLIAN GLENN WHITLEY, Ph.D

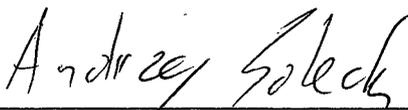
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

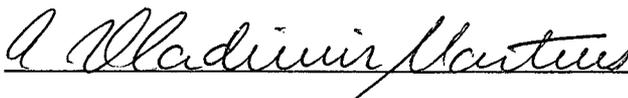


Prof. WILLIAN GLENN WHITLEY, Ph.D

ORIENTADOR



Prof. ANDRZEJ SOLECKI, Ph.D



Prof. ANTÔNIO VLADIMIR MARTINS, M.Sc

AGRADECIMENTOS

- À minha esposa Nazilda e a meus filhos Livia e Mateus.
- A meus pais José e Judith.
- À Fundação Universidade do Rio Grande.
- Ao professor Dr. Willian Glenn Whitley.
- À todas as pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho.

R E S U M O

Desenvolvemos no capítulo I os principais resultados de Geometria Diferencial Local que utilizamos nos capítulos posteriores. No capítulo II apresentamos a métrica intrínseca de uma superfície como forma de introduzir as geodésicas como arcos de comprimento mínimo. Tratamos da derivação covariante e aplicação exponencial. Analisamos o comportamento global das geodésicas. No capítulo III fizemos um estudo das superfícies que apresentam curvatura gaussiana constante, estabelecendo uma isometria local entre superfícies com a mesma característica. Classificamos também Geometrias Riemannianas Não Euclidianas. No capítulo IV tratamos das superfícies completas com curvatura constante. Utilizamos para tal dentre outros aspectos a variação do comprimento de arco e as redes de Tchebychef. Fizemos uma analogia entre as topologias induzidas pelas métricas usual do \mathbb{R}^3 e intrínseca da superfície. Finalmente, apresentamos uma superfície abstrata com curvatura gaussiana constante negativa, mostrando um modelo de Geometria Hiperbólica.

A B S T R A C T

In Chapter I we present the principal results of the local theory of differential geometry that will be used later. In Chapter II we present the intrinsic metric of a surface as an introduction to geodesics as path of minimal length. We study the covariant derivative and the exponential map. We then study the global behavior of geodesics. Chapter III contains a study of surfaces with constant Gaussian curvature and has as its principal result that spaces with the same curvature are locally isometric. We also classify the non-Euclidian (Riemannian) geometries. Chapter IV treats complete surfaces, especially those of constant curvature. We use such techniques as Chebyshev systems and variations of arc-length. We compare the Euclidian and intrinsic topology of surfaces. We terminate the dissertation presenting the idea of abstract surfaces and construct an abstract surface with constant negative Gaussian curvature, which gives us a model for hyperbolic geometries.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma revisão dos conceitos fundamentais sobre curvas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Listaremos apenas os resultados relativos a elas que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não faremos exposições longas a respeito de cada assunto. Evitaremos as demonstrações mais técnicas sempre que não houver prejuízo para a compreensão do texto. Admitiremos que o leitor tenha boa compreensão dos fatos de Álgebra Linear, Cálculo de Variáveis Variáveis, certos aspectos de Topologia, tais como espaços métricos completos e espaços de recobrimento e o teorema de existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais. Empregaremos a notação clássica sempre que possível. Para uma n-upla do \mathbb{R}^n usaremos (x_1, \dots, x_n) . A fim de compatibilizar esta notação com aquela utilizada em Geometria Analítica, denotaremos um par de \mathbb{R}^2 por (u,v) ou por (x,y) e uma terna de \mathbb{R}^3 por (x,y,z) .

1.2. TOPOLOGIA DE \mathbb{R}^n

Uma bola aberta em \mathbb{R}^n de centro P_0 e raio $\delta > 0$ é o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{R}^n$ que distam menos que δ de P_0 ; isto é,

$$B_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n : |P - P_0| < \delta\}.$$

Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é um aberto de \mathbb{R}^n se, para todo ponto $P \in U$, existe uma bola aberta $B_\delta(P) \subset U$.

Uma vizinhança de um ponto P_0 em \mathbb{R}^n é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n que contém P_0 .

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $P_0 \in U$ e f uma função de U em V . A função f é contínua em P_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(P_0) \cap U) \subset B_\varepsilon(f(P_0))$. Ela é contínua em U se é contínua em todo ponto de U .

A função $f: U \rightarrow V$ é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$ se f é contínua, injetiva e sua inversa $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ é contínua. Se existir um homeomorfismo de U sobre V , diz-se que U e V são homeomorfos. Obviamente, se f é um homeomorfismo de U sobre V , f^{-1} é um homeomorfismo de V sobre U .

Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se, para toda vizinhança V de P , $(V - \{P\}) \cap U \neq \emptyset$.

Um subconjunto de \mathbb{R}^n é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos de acumulação.

Uma cobertura aberta de um subconjunto U de \mathbb{R}^n é uma família de subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n cuja união contém U .

Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é compacto se toda cobertura aberta de U possui uma subcobertura finita.

Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é limitado se existe um número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in U$, $|x| \leq \delta$.

O teorema que enunciaremos a seguir é usualmente chamado de Teorema de Heine-Borel. Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é fechado e limitado se e somente se U é compacto.

Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é conexo se não existem dois conjuntos abertos A e B cada um dos quais contém pontos de U tais que $U \subset A \cup B$ e $A \cap B \cap U = \emptyset$.

Dados dois pontos P e Q de um subconjunto U de \mathbb{R}^n , um

caminho em U de P a Q é uma função contínua $f:[a,b] \rightarrow U$ de um intervalo fechado da reta em U tal que $f(a)=P$ e $f(b)=Q$. Neste caso dizemos que P e Q podem ser ligados por um caminho em U ou que f é um caminho que liga P a Q .

Um subconjunto U de \mathbb{R}^n é conexo por caminho quando quaisquer dois pontos de U podem ser ligados por um caminho em U .

Sejam U um aberto em \mathbb{R}^n , $V \subset \mathbb{R}$, $P \in U$ e f uma função de U em V . A função f é diferenciável em P se todas as derivadas parciais de todas as ordens existem no ponto P . A função f é diferenciável em U se ela é diferenciável em todo ponto de U .

Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n , $V \subset \mathbb{R}^m$, $P \in U$, g uma função de U em V e g_1, \dots, g_m as funções coordenadas de g . A função g é diferenciável em P se cada componente $g_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$ é diferenciável em P . A função g é diferenciável em U se ela é diferenciável em todo ponto de U .

A matriz jacobiana da função g acima no ponto $P=(x_1, \dots, x_n)$ é a matriz

$$g'(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

A transformação linear cuja matriz na base canônica do \mathbb{R}^m é a matriz $g'(P)$ será denotada por $D_g(P)$.

Uma função $g: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo se $g(U)$ é um aberto em \mathbb{R}^m , g é injetiva e diferenciável e sua inversa

$$g^{-1}: g(U) \rightarrow U$$

é diferenciável.

A regra da cadeia para funções de várias variáveis é dada no seguinte teorema. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções definidas nos abertos A e B , tais que $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em $P \in A$ e g é diferenciável em $f(P)$, então a função composta $g \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em P e $D_{g \circ f}(P) = D_g(f(P)) \circ D_f(P)$.

Finalmente, enunciaremos o teorema da função inversa. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $P \in A$ tal que $D_f(P)$ seja injetiva. Então existe uma vizinhança U de P contida em A tal que $f(U)$ é um aberto em \mathbb{R}^m e a restrição de f a U , $f|_U: U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo.

1.3. CURVAS EM \mathbb{R}^n

Estudaremos curvas em \mathbb{R}^n , suas propriedades fundamentais e o teorema de existência no caso $n=2$.

Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^n ; ou seja, f é uma aplicação que leva cada $t \in I$ em um ponto $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, onde as f_i são funções diferenciáveis para $i=1, 2, \dots, n$. Denotando-se por $f'_i(t)$ as derivadas de primeira ordem das funções f_i em relação à t , obtemos o vetor $f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t))$, chamado vetor velocidade da curva f no ponto t . A curva f é dita regular se $f'(t) \neq 0$ qualquer que seja $t \in I$. O vetor $v(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$ é o vetor tangente.

A função comprimento de arco de uma curva parametrizada regular $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, a partir do ponto $t_0 \in I$, é a função diferenciável

$$s(t) = \left| \int_{t_0}^t |f'(r)| dr \right| = \left| \int_{t_0}^t \sqrt{(f'_1(r))^2 + \dots + (f'_n(r))^2} dr \right|.$$

O valor $s(t)$ é chamado o comprimento de arco da curva f entre os pontos t_0 e t . Se ocorrer que $|f'(t)|=1$ para todo $t \in I$, então a curva f diz-se parametrizada pelo comprimento de arco e

$$s(t) = |t - t_0|.$$

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular definida por $f(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$. O vetor normal de f no ponto s é o vetor

$$n(s) = \frac{(-y'(s), x'(s))}{|f'(s)|}.$$

A curvatura de f no ponto s é o número real $\hat{k}(s) = \langle f''(s), n(s) \rangle$, onde \langle, \rangle denota o produto interno de \mathbb{R}^2 .

Poderíamos mostrar que dada a função \hat{k} existe pelo menos uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, tendo curvatura $\hat{k}(s)$. Notemos que a existência de uma curva com curvatura $\hat{k}(s)$ implica a existência de uma infinidade destas. Suponhamos a curva $f(s) = (x(s), y(s))$ com curvatura $\hat{k}(s)$. A curva $g(s) = (\cos\phi x(s) + \sin\phi y(s) + a_1, -\sin\phi x(s) + \cos\phi y(s) + a_2)$ também tem curvatura $\hat{k}(s)$, quaisquer que sejam $a_1, a_2, \phi \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se fixarmos um instante $s = s_0$, um ponto $P = (p_1, p_2)$ do plano e um vetor unitário v , então existirá uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco α com curvatura $\hat{k}(s)$, passando por P com velocidade v no instante s_0 . Sendo p_1, p_2, ϕ como acima e

$$\theta(t) = \int_{s_0}^t \hat{k}(r) dr,$$

teremos

$$\alpha(s) = \left(p_1 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \phi) dt, p_2 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \phi) dt \right).$$

Isto é conhecido como o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, definida por $f(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in I$. O número real $k(s) = |f''(s)|$ é chamado curvatura de f em $s \in I$. Quando tivermos para todo $s \in I$, $k(s) > 0$, o vetor normal a f em $s \in I$ é definido por

$$n(s) = \frac{f''(s)}{|f''(s)|}.$$

Sendo $t(s)$ o vetor tangente definido acima temos o vetor

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

que é chamado vetor binormal a f em $s \in I$. O referencial ortonormal $\{t, n, b\}$ é chamado Triedro de Frenét da curva f em $s \in I$. O número real $\sigma(s)$ dado por $b'(s) = \sigma(s)n(s)$ é chamado torção da curva f em s .

1.4. SUPERFICIES REGULARES

Sejam U um aberto em \mathbb{R}^2 , $V \subset \mathbb{R}^3$ e X uma função de U em V dada por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Para as derivadas parciais de X em relação a u e v usaremos a notação

$$X_u = X_u(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

e

$$X_v = X_v(u, v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right).$$

Um subconjunto M do \mathbb{R}^3 chama-se uma superfície regular se para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta W de p em \mathbb{R}^3 , um aberto U de \mathbb{R}^2 e uma aplicação $X: U \rightarrow V = M \cap W$ tal que são satisfeitas as seguintes condições.

- (i) X é um homeomorfismo de U sobre V ;
- (ii) X tem derivadas de todas as ordens em U ; e
- (iii) $\forall Q \in U$, DX_Q é injetiva.

A aplicação X é dita um sistema de coordenadas locais em P , enquanto que V é dita uma vizinhança coordenada de P em M . Na definição dada podemos nos restringir à vizinhanças conexas. Salvo menção contrária, M denotará uma superfície regular conexa, doravante dita apenas superfície M .

Uma parametrização de um conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ ou superfície parametrizada é uma aplicação $X:U \rightarrow M$, onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 satisfazendo (ii) e (iii).

Observamos pelo teorema da função inversa que uma parametrização pode ser restringida a um sistema de coordenadas locais

$$X: \hat{U} \rightarrow X(\hat{U});$$

uma parametrização não necessita ter a propriedade (i), ou seja, pode ter auto-intersecção na sua imagem.

A condição (iii) acima é denominada condição de regularidade da superfície M . O fato de ser DX_Q uma função injetiva significa que a matriz jacobiana

$$X'(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tem posto 2, ou o que é o mesmo dizer que os vetores-coluna desta matriz são linearmente independentes. Disto segue que

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) \neq 0, \quad \forall (u,v) \in U.$$

Desta forma fica definido em cada ponto de M o vetor não nulo

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u,v),$$

chamado o vetor normal de M no ponto (u,v) , relativamente ao sistema de coordenadas X .

Assumiremos ao longo de todo esse nosso trabalho que a

superfície M não seja a faixa de Möbius, que é a única superfície do \mathbb{R}^3 que não é orientável.

Dado o ponto P da superfície M , consideremos o conjunto C_p de todas as curvas $g:I \rightarrow M$ com $g(0)=P$. O plano tangente à superfície M em P é definido por

$$T_p(M) = \{P\} \times \{ g'(0) : g \in C_p \} .$$

Diz-se que um elemento de $T_p(M)$ é um vetor tangente à superfície M em P . A definição de plano tangente é independente do sistema de coordenadas da superfície M como se pode observar. Geralmente, suprimimos P da notação acima, escrevendo apenas

$$T_p(M) = \{ g'(0) : g \in C_p \} .$$

Queremos, agora, uma caracterização de $T_p(M)$ em termos de um sistema de coordenadas locais.

PROPOSIÇÃO 1

Sejam M uma superfície, $P \in M$ e $X(u,v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança de P . O conjunto $T_p(M)$ de todos os vetores tangentes à M em P é um espaço vetorial e é gerado pelos vetores X_u e X_v em P . Além disso, $\{ X_u, X_v, N \}$ forma uma base de \mathbb{R}^3 .

A demonstração se baseia no seguinte fato. A construção de $T_p(M)$ não depende da curva g globalmente e sim em uma vizinhança local de O (e de P). Seja $X:U \rightarrow V$ um sistema de coordenadas locais ao redor de P . Há uma relação biunívoca de curvas em V passando por P e curvas em U passando por $X^{-1}(P)$. Simbolicamente temos

$$\{ f:I \rightarrow U \} \leftrightarrow \{ X \circ f:I \rightarrow V \} .$$

Assumindo, por simplicidade que $X^{-1}(P)=0$, temos duas curvas especiais em U , $f_u(t)=(t,0)$ e $f_v(t)=(0,t)$. Assim,

$$(X \circ f_u)'(t) = X_u(t,0) \text{ e } (X \circ f_v)'(t) = X_v(0,t).$$

Portanto,

$$(X \circ f_u)'(0) = X_u(0,0) \text{ e } (X \circ f_v)'(0) = X_v(0,0)$$

determinam elementos de $T_P(M)$. Usando as considerações feitas, o restante da demonstração é um cálculo rotineiro.

Sejam M uma superfície, P um ponto de M e $X:U \rightarrow V$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança V de P . Suponhamos que $P=X(u_0, v_0)$. As curvas

$$u \rightarrow X(u, v_0)$$

e $v \rightarrow X(u_0, v)$

em M são chamadas linhas (ou curvas) coordenadas de M no sistema de coordenadas X e os vetores $X_u(u,v)$ e $X_v(u,v)$ são os vetores tangentes às linhas coordenadas em P .

1.5. FORMAS FUNDAMENTAIS

Seja M uma superfície regular e P um ponto de M . A aplicação

$$I: T_P(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é dita a primeira forma fundamental de M em P .

Consideremos um sistema de coordenadas locais $X(u,v)$ de $V \subset M$ contendo o ponto $P = X(u_0, v_0)$ onde $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Como $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_P(M)$, qualquer vetor $w \in T_P(M)$ pode ser escrito na forma $w = aX_u + bX_v$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Nestas condições temos pa

ra a primeira forma fundamental em P a seguinte expressão:

$$I(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle.$$

Vamos empregar a notação a seguir:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u(u_0, v_0), X_u(u_0, v_0) \rangle, \\ (1.1) \quad F(u_0, v_0) &= \langle X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle, \quad e \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle, \end{aligned}$$

de modo que a primeira forma fundamental de M em P é

$$(1.2) \quad I(w) = a^2 E + 2abF + b^2 G.$$

Calculamos (1.1) e (1.2) no ponto $(u_0, v_0) \in U$. À medida que variamos (u, v) em U , ficam definidas as funções diferenciáveis $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle, \\ (1.3) \quad F(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle, \\ G(u, v) &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle, \end{aligned}$$

as quais recebem o nome de coeficientes locais da primeira forma fundamental relativamente ao sistema de coordenadas $X(u, v)$ de $V \subset M$. A primeira forma fundamental pode ser expressa assim :

$$(1.4) \quad I(w) = a^2 E(u, v) + 2abF(u, v) + b^2 G(u, v).$$

É de notar-se que a primeira forma fundamental é independente do sistema de coordenadas, enquanto que os coeficientes E, F, G dependem do sistema de coordenadas. A equação (1.4) é válida somente no domínio de definição de E, F, G ; isto é, em U .

PROPOSIÇÃO 2

Utilizando a notação anterior, valem as seguintes propriedades para os coeficientes E, F, G :

- (i) $E, G > 0$, e
- (ii) $EG - F^2 > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) É decorrência imediata da definição.

(ii) Usando a identidade de Lagrange, obtemos

$$|X_u \times X_v|^2 = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2.$$

Substituindo os valores (1.3) e a condição de regularidade da superfície M , encontramos $0 < |X_u \times X_v|^2 = EG - F^2$.

c.q.d.

No §1.4 vimos que, dado um sistema de coordenadas $X(u, v)$ de uma vizinhança V de uma superfície M com $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, então a cada curva parametrizada $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ corresponde uma curva parametrizada $g = X \circ f$ em M com vetor tangente $g'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$. Segundo a definição de comprimento de arco (página 4), temos que o comprimento de arco de g desde o ponto t_0 até t é

$$s(t) = \left| \int_{t_0}^t |g'(r)| dr \right|.$$

Disto segue que

$$s(t) = \left| \int_{t_0}^t \langle g'(r), g'(r) \rangle^{\frac{1}{2}} dr \right| = \left| \int_{t_0}^t \sqrt{I(g'(r))} dr \right|;$$

ou seja,

$$s(t) = \left| \int_{t_0}^t \sqrt{(u'(r))^2 E + 2u'(r)v'(r)F + (v'(r))^2 G} dr \right|.$$

Se w_1 e w_2 são vetores não nulos de $T_p(M)$ e θ é o ângulo entre eles, então temos por definição

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1| |w_2|}.$$

Tomando-se $w_1 = X_u$ e $w_2 = X_v$, temos que o ângulo entre as linhas coordenadas do sistema de coordenadas $X(u, v)$ de $V \subset M$ é dado por

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

donde se conclue que as linhas coordenadas são ortogonais se e so mente se $F=0$ em todo ponto de U .

Uma região em \mathbb{R}^2 é um conjunto conexo e limitado de \mathbb{R}^2 cuja fronteira é homeomorfa a uma circunferência e é formado por um número finito de traços de curvas regulares. Diz-se que a região é fechada se ela contém sua fronteira. Um subconjunto Ω de uma superfície M é uma região contida em uma vizinhança coordenada V de M , se existe um sistema de coordenadas locais $X:U \rightarrow V$ tal que $\Omega = X(\Sigma)$, onde $\Sigma \subset U$ é uma região de \mathbb{R}^2 . A região Ω é fechada e limitada se Σ é fechada e limitada. A área da região Ω é o número real positivo $A(\Omega)$ dado por

$$A(\Omega) = \iint_{\Sigma} |X_u \times X_v| \, du \, dv = \iint_{\Sigma} \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv,$$

onde E, F, G são os coeficientes locais da primeira forma fundamental de M relativamente ao sistema de coordenadas $X:U \rightarrow V \subset M$.

A aplicação $II:T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$w \rightarrow II(w) = \langle g'(t_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

onde g é uma curva diferenciável em M tal que $g(t_0) = P$ e $g'(t_0) = w$, é chamada a segunda forma fundamental de M em P . Sendo $X(u, v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança coordenada de M contendo P , utilizaremos a notação tradicional para as se gundas derivadas.

$$X_{uu} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \quad X_{uv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}, \quad \text{e} \quad X_{vv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.$$

Definindo a terna e, f, g em $P = X(u_0, v_0)$ por

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}(u_0, v_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}(u_0, v_0), N(u_0, v_0) \rangle, \text{ e}$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}(u_0, v_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

temos para a segunda forma fundamental de M em P a seguinte expressão:

$$II(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)$$

onde $w = aX_u + bX_v \in T_p(M)$. À medida que o ponto (u_0, v_0) varia em U , ficam definidas as funções diferenciáveis $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$(1.5) \quad \begin{cases} e(u, v) = \langle X_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle, \\ f(u, v) = \langle X_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle, \text{ e} \\ g(u, v) = \langle X_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle, \end{cases}$$

as quais recebem o nome de coeficientes locais da segunda forma fundamental, que pode apresentar-se como

$$(1.6) \quad II(w) = a^2 e(u, v) + 2abf(u, v) + b^2 g(u, v).$$

PROPOSIÇÃO 3

Para um sistema de coordenadas $X(u, v)$ de uma vizinhança coordenada V da superfície M , valem as relações:

- (i) $\langle X_{uu}, N \rangle = -\langle X_u, N_u \rangle,$
- (ii) $\langle X_{uv}, N \rangle = -\frac{1}{2}\langle X_u, N_v \rangle - \frac{1}{2}\langle X_v, N_u \rangle,$
- (iii) $\langle X_{vv}, N \rangle = -\langle X_v, X_v \rangle,$

onde N_u e N_v significam, respectivamente, as derivadas parciais em relação à u e à v do vetor normal $N(u, v)$ de M .

DEMONSTRAÇÃO: Sendo $\{X_u, X_v\}$ uma base de $T_p(M)$ e N o normal de M

segue que $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$ de modo que

$$(i) \quad 0 = \langle X_u, N \rangle_u = \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, X_u \rangle.$$

Portanto,

$$\langle X_{uu}, N \rangle = -\langle X_u, X_u \rangle.$$

$$(ii) \quad 0 = \langle X_u, N \rangle_v = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle .$$

$$0 = \langle X_v, N \rangle_u = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle .$$

Somando-se as duas equações obtemos

$$0 = 2 \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle .$$

Desta, segue que

$$\langle X_{uv}, N \rangle = -\frac{1}{2} \langle X_u, N_v \rangle - \frac{1}{2} \langle X_v, N_u \rangle .$$

$$(iii) \quad 0 = \langle X_v, N \rangle_v = \langle X_{vv}, N \rangle + \langle X_v, N_v \rangle .$$

Portanto,

$$\langle X_{vv}, N \rangle = -\langle X_v, N_v \rangle .$$

c.q.d.

Notamos anteriormente que a primeira forma fundamental é independente do sistema de coordenadas considerado. No entanto a segunda forma fundamental foi definida em termos do vetor normal à superfície que, por ser definido por um produto externo, é dependente dos vetores X_u e X_v e, conseqüentemente, do sistema escolhido. No entanto, esta variação é no máximo em sinal.

1.6. CURVATURA NORMAL

No que segue $X:U \rightarrow V$ denotará um sistema de coordenadas de uma vizinhança V de um ponto P da superfície M , $N(u,v)$ denotará o vetor normal de M em P , $T_p(M)$ denotará o plano tangente e E, F, G, e, f, g , os coeficientes locais da primeira e segunda formas fundamentais relativamente a tal sistema de coordenadas.

Chama-se curvatura normal de M em P , à função diferenciável

$$k_n: T_p(M) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow k_n(w) = \frac{II(w)}{I(w)} .$$

O valor da função curvatura normal de M em P chama-se curvatura normal de M em P segundo a direção do vetor w . Como $II(w)$ é dependente do sistema de coordenadas, a curvatura também é dependente do sistema. Como esta dependência é no máximo em sinal, algumas vezes é conveniente definir a curvatura normal em valor absoluto. Observa-se facilmente que para todo número real não nulo λ , tem-se $k_n(\lambda w) = k_n(w)$.

TEOREMA 4

Seja $P \in M$.

(i) Se k_n é constante em $T_p(M)$, então k_n assume valor mínimo e valor máximo em qualquer vetor unitário $w \in T_p(M)$.

(ii) Se k_n não é constante em $T_p(M)$, então existem vetores unitários $w_1, w_2 \in T_p(M) - \{0\}$ tal que k_n assume valor mínimo em w_1 e valor máximo em w_2 . Se $z_1, z_2 \in T_p(M) - \{0\}$ são dois vetores tais que $k_n(z_1)$ é mínimo e $k_n(z_2)$ é máximo, então z_1 é ortogonal à z_2 .

DEMONSTRAÇÃO: (i) Trivial.

(ii) Daremos apenas uma idéia da demonstração. Os detalhes podem ser encontrados em Notas de Geometria Diferencial por Ketí Tenenblat (páginas IV-81, 82, 83).

Para provar a existência de vetores w_1 e w_2 que dão as direções de curvatura normal mínima e máxima, considera-se a função diferenciável

$$k_n : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b) \rightarrow k_n((a,b)) = \frac{II((a,b))}{I((a,b))}.$$

Como para todo $\lambda \neq 0$ temos $k_n((\lambda a, \lambda b)) = k_n((a, b))$, para obter os valores mínimo e máximo de k_n , basta restringir k_n à circunferência unitária C de centro $(0,0)$. Como C é compacta e k_n é contínua, existem pontos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C$ tais que $k_1 = k_n((a_1, b_1))$ e $k_2 = k_n((a_2, b_2))$ são os valores mínimo e máximo de k_n restrita à C .

A seguir considera-se dois vetores $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ tais que $k_n(z_1) = k_1$ e $k_n(z_2) = k_2$ são os valores mínimo e máximo, respectivamente, da função k_n . Deve-se provar que z_1 e z_2 são ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) são pontos extremos da função k_n , as derivadas parciais de k_n se anulam nestes pontos. Chega-se, assim, à equação

$$(k_1 - k_2)(a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0) = 0.$$

Como $k_1 \neq k_2$, temos $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$.

Os unitários de z_1 e z_2 são os vetores procurados.

c.q.d.

Os vetores unitários e ortogonais w_1 e w_2 são denominados direções principais de $T_p(M)$, enquanto que k_1 e k_2 são denominadas as curvaturas principais.

Definimos, agora, uma das principais ferramentas de nosso trabalho. A curvatura gaussiana ou curvatura total da superfície M no ponto P é o produto das curvaturas principais; isto é,

$$K(P) = k_1 k_2.$$

Definamos também a curvatura média da superfície M no ponto P como sendo a média entre as curvaturas principais; isto é,

$$H(P) = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Já observamos que a curvatura normal é dependente do sistema de coordenadas e que ao considerarmos um segundo sistema

para a superfície, a curvatura normal, no máximo, altera o sinal. Mesmo que a curvatura normal mude de sinal, a curvatura gaussiana não muda. Por exemplo, se tomarmos outro sistema de coordenadas que mude o sinal de k_n , de modo que se tenha novo $\tilde{k}_1(P)$ e novo $\tilde{k}_2(P)$, notamos que $-\tilde{k}_2(P) = k_1(P)$ e $-\tilde{k}_1(P) = k_2(P)$. Assim,

$$K(P) = k_1(P)k_2(P) = (-\tilde{k}_2(P))(-\tilde{k}_1(P)) = \tilde{k}_1(P)\tilde{k}_2(P)$$

não depende do sistema de coordenadas.

Ao contrário da curvatura gaussiana, a curvatura média depende do sistema de coordenadas. De fato,

$$H(P) = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}(-\tilde{k}_1-\tilde{k}_2) = -\frac{1}{2}(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2) \neq \frac{1}{2}(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2).$$

A proposição a seguir nos dá $K(P)$ e $H(P)$ a partir dos coeficientes locais da primeira e segunda formas fundamentais em P . Como a demonstração é bem técnica não a faremos. Ela pode ser encontrada na bibliografia mencionada antes (páginas IV-87,88).

PROPOSIÇÃO 5

Seja $X:U \rightarrow V$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança V de uma superfície M tal que $X(u_0, v_0) = P$. Então

$$(i) \quad K(P) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}.$$

$$(ii) \quad H(P) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} \right).$$

Chama-se ponto umbílico da superfície M a todo ponto em que $k_1 = k_2$. Os pontos em que k_1 e k_2 tem o mesmo sinal são chamados pontos elípticos. Aqueles em que k_1 e k_2 tem sinais diferentes são chamados pontos hiperbólicos. Se uma das curvaturas principais é nula e a outra não, então o ponto chama-se parabólico, enquanto que aquele onde as curvaturas principais são nulas são

chamados pontos planares.

Veremos no capítulo III que a curvatura de um plano é nula. Portanto, todo vetor unitário de $T_p(M)$ é um vetor principal; isto é, define uma direção principal.

O teorema a seguir é conhecido com o nome de Teorema de Euler.

TEOREMA 6

Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais da superfície M no ponto P , w_1 e w_2 as direções principais da superfície M em P . Se $w \in T_p(M)$ é um vetor unitário, então $w = \cos\theta w_1 + \sin\theta w_2$ e $k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, onde θ é o ângulo formado por w_1 e w_2 , medido no sentido anti-horário, a partir de w_1 .

DEMONSTRAÇÃO: Vamos apresentar um esboço da demonstração. Os detalhes podem ser encontrados em Notas de Geometria Diferencial por Keti Tenenblat (páginas IV-86, 87).

Sejam $w_1 = a_1 X_u + b_1 X_v$, $w_2 = a_2 X_u + b_2 X_v$, tais que

$k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$. Expressando w na base $\{X_u, X_v\}$ e usando o fato que $|w| = 1$ chega-se à equação

$$k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta + 2(a_1 a_2 e_0 + a_1 b_2 f_0 + a_2 b_1 f_0 + b_1 b_2 g_0) \sin\theta \cos\theta,$$

onde e_0, f_0, g_0 indicam os coeficientes da segunda forma fundamental em P , relativamente ao sistema de coordenadas $X(u, v)$ de uma vizinhança coordenada de P . Para provar que

$$A = a_1 a_2 e_0 + a_1 b_2 f_0 + a_2 b_1 f_0 + b_1 b_2 g_0 = 0,$$

usa-se o fato que $k_1 \leq k_n(w) \leq k_2$ implica em

$$2A \sin \theta \cos \theta \leq (k_2 - k_1) \cos^2 \theta .$$

Analisa-se esta última expressão numa vizinhança do ponto $\theta = \frac{\pi}{2}$.

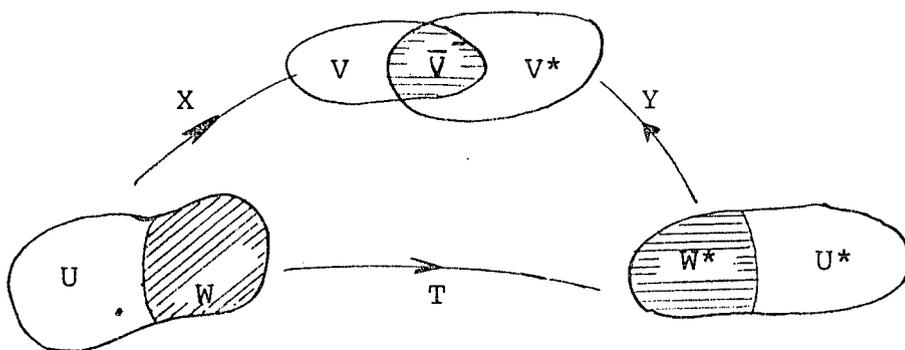
Sejam U e U^* abertos de \mathbb{R}^2 , $X:U \rightarrow V \subset M$ e $Y:U^* \rightarrow V^* \subset M^*$ sistemas de coordenadas de V e V^* , respectivamente, dados por $X(u,v)$ e $Y(\theta,\phi)$, tal que $V \cap V^* = \bar{V} \neq \emptyset$. Seja W o aberto de U que X aplica sobrejetivamente em \bar{V} e W^* o que Y aplica sobrejetivamente em \bar{V} (figura 1). Chama-se mudança de parâmetros à aplicação injetiva

$$T: W \rightarrow W^*$$

$$(u,v) \mapsto T(u,v) = Y^{-1}(X(u,v)) = (\theta,\phi).$$

Segue que

$$\det T'(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\delta \theta}{\delta u} & \frac{\delta \theta}{\delta v} \\ \frac{\delta \phi}{\delta u} & \frac{\delta \phi}{\delta v} \end{vmatrix} \neq 0 .$$



(FIGURA 1)

PROPOSIÇÃO 7

Se P é um ponto de uma superfície M , então existe um sistema de coordenadas $X(u,v)$ de uma vizinhança V de P em M no qual as direções das linhas coordenadas são direções principais.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Suponhamos que P seja um ponto umbílico. Qualquer direção é uma direção principal. Portanto, qualquer sistema de coordenadas contendo P satisfaz a proposição.

(ii) Suponhamos que P não seja um ponto umbílico. Seja $X(u,v)$ um sistema de coordenadas contendo P . Admitamos que as direções principais em $T_p(M)$ sejam os vetores w_1 e w_2 , tendo coordenadas (a,b) e (c,d) , respectivamente, na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(M)$. Consideremos a transformação linear dada por

$$T(\theta, \phi) = (a\theta + c\phi, b\theta + d\phi).$$

A matriz de T na base canônica do \mathbb{R}^2 é

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que seu determinante seja nulo. Neste caso, temos $ad=bc$ o que nos permite concluir que as direções principais são iguais, logo as curvaturas principais são iguais. Mas isto contradiz a hipótese de que P é um ponto não umbílico. Temos um novo sistema de coordenadas de uma vizinhança do ponto P , dada por

$$Y(\theta, \phi) = X(T(\theta, \phi)) = X(a\theta + c\phi, b\theta + d\phi).$$

Além disso, as equações

$$Y_\theta = X_u \frac{d}{d\theta} (a\theta + c\phi) + X_v \frac{d}{d\theta} (b\theta + d\phi) = aX_u + bX_v \quad e$$

$$Y_\phi = X_u \frac{d}{d\phi} (a\theta + c\phi) + X_v \frac{d}{d\phi} (b\theta + d\phi) = cX_u + dX_v,$$

nos mostram que as linhas coordenadas de Y estão nas direções principais w_1 e w_2 de $T_p(M)$.

c.q.d.

1.7. LINHAS ASSINTÓTICAS

Diremos que um vetor não nulo de $T_p(M)$ é uma direção

assintótica de M no ponto P se a curvatura normal segundo este vetor é nula. Uma curva regular $f:I \rightarrow M$ é chamada uma linha assintótica de M , se para todo $t \in I$, $f'(t)$ é uma direção assintótica de M em $f(t)$. Como a curvatura normal segundo qualquer direção de um plano é nula, segue imediatamente que toda curva de um plano é uma linha assintótica deste plano. Os vetores tangente a esta curva determinam as direções assintóticas do plano. Toda reta ou segmento de reta de uma superfície é uma linha assintótica desta superfície, pois a curvatura normal segundo uma reta é nula.

Seja $X(u,v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança coordenada V da superfície M e h uma curva regular em M cujo traço está contido em V . A curva h é dada por $h(t)=X(u(t),v(t))$. Nestas condições temos as proposições a seguir.

PROPOSIÇÃO 8

A curva h é uma linha assintótica de M se e somente se $(u'(t))^2e + 2(u'(t))(v'(t))f + (v'(t))^2g = 0$, para todo t , onde $e=e(u,v)$, $f=f(u,v)$ e $g=g(u,v)$.

DEMONSTRAÇÃO : Pela definição acima, $h'(t)$ é uma direção assintótica de M se e somente se

$$(1.7) \quad k_n(h'(t)) = \frac{(u'(t))^2e + 2(u'(t))(v'(t))f + (v'(t))^2g}{(u'(t))^2E + 2(u'(t))(v'(t))F + (v'(t))^2G}$$

é igual a zero.

Portanto, h é linha assintótica se e somente se

$$(1.8) \quad (u'(t))^2e + 2(u'(t))(v'(t))f + (v'(t))^2g = 0$$

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 9

Seja P um ponto de uma superfície $M \in X(u,v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança V de P . Então as linhas coordenadas de M são linhas assintóticas se e somente se $e = g = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que as linhas coordenadas com v constante ($v' = 0$) são linhas assintóticas. De (1.8) vem que $(u'(t))^2 e = 0$. Como $u'(t) \neq 0$, segue que $e = 0$.

Suponhamos que as linhas coordenadas com u constante ($u' = 0$) são linhas assintóticas. De (1.8) vem que $(v'(t))^2 g = 0$. Como $v'(t) \neq 0$, segue que $g = 0$.

Sendo que todas as linhas coordenadas são linhas assintóticas, temos $e=g=0$.

Seja h uma linha coordenada de M . Suponhamos que $e=g=0$. Pela proposição 8 temos que provar que

$$(u'(t))^2 e + 2(u'(t))(v'(t))f + (v'(t))^2 g = 0,$$

que é o mesmo provar que $2(u'(t))(v'(t))f = 0$.

Quando h é uma linha coordenada temos que ou $u'=0$ ou $v'=0$, e a equação acima fica satisfeita. Logo, h é uma linha assintótica de M .

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 10

Seja P um ponto hiperbólico de uma superfície M . Existe uma vizinhança V de P em M , tal que por cada ponto de V passam duas linhas assintóticas.

DEMONSTRAÇÃO: Seja P um ponto da superfície M e $X(u,v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança V de P . Como P é hiperbólico, temos que a curvatura gaussiana K em P é negativa. Sendo a função K contínua em V segue que existe uma vizinhança $V_1 \subset V$ tal que K é negativa em V_1 . Fixemos um ponto $X(u_1, v_1)$ em V_1 . Procuramos duas curvas $f(t) = X(u(t), v(t))$ em V_1 tais que $u = u(t)$ e $v = v(t)$ satisfaçam (1.8). Como todos os pontos de V_1 são hiperbólicos, podemos fatorar (1.8) em duas equações diferenciais da forma $au' + bv' = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais cada equação destas tem solução única atendendo a condição inicial fixada, $u(0) = u_1$ e $v(0) = v_1$.

c.q.d.

Finalizando o parágrafo, vamos dizer que em um ponto elíptico não há direções assintóticas ($K > 0$), em um ponto parabólico existirá uma única direção assintótica ($K = 0$), a qual corresponde a curvatura principal nula e em um ponto planar toda direção é assintótica ($k_1 = k_2 = 0$).

1.8. LINHAS DE CURVATURA

Uma curva regular $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ em uma superfície M é chamada uma linha de curvatura de M se, para todo $t \in I$, $f'(t)$ é uma direção principal de M em $f(t)$. Toda curva de um plano é uma linha de curvatura deste plano, pois todo vetor unitário do plano determina uma direção principal.

Como $f'(t)$ é uma direção principal, temos que a curvatura normal segundo a direção do vetor $f'(t)$ é uma curvatura prin

cipal. Portanto, para cada t , as derivadas parciais da função curvatura normal segundo esta direção são nulas. A equação (1.7) pode ser escrita assim:

$$k_n(f'(t)) [(u'(t))^2 E + 2(u'(t))(v'(t))F + (v'(t))^2 G] = (u'(t))^2 e + 2(u'(t))(v'(t))f + (v'(t))^2 g.$$

Fazendo-se as derivadas parciais e omitindo a variável, obtemos as equações

$$(1.9) \quad \begin{cases} k_n(2u'E + 2v'F) = 2u'e + 2v'f, & e \\ k_n(2u'F + 2v'G) = 2u'f + 2v'g. & . \end{cases}$$

Explicitando k_n em cada uma das equações acima e igualando-as temos

$$\frac{u'e + v'f}{u'E + v'F} = \frac{u'f + v'g}{u'F + v'G}.$$

Esta igualdade nada mais é do que a seguinte:

$$(1.10) \quad \begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

A relação (1.10) é uma condição necessária e suficiente para que a curva f seja uma linha de curvatura de M .

PROPOSIÇÃO 11

As linhas coordenadas de um sistema de coordenadas $X(u,v)$ de uma vizinhança coordenada V de uma superfície M sem pontos umbílicos são linhas de curvatura de M se e somente se $F=f=0$.

Além disso,

$$k_1 = \frac{e}{E} \quad e \quad k_2 = \frac{g}{G}$$

são as curvaturas principais.

DEMONSTRAÇÃO: Apresentaremos um esboço da demonstração. Os detalhes podem ser encontrados em M.M. Lipschutz - Teoria e Problemas em Geometria Diferencial (páginas 197, 198).

Sendo as linhas coordenadas linhas de curvatura, seus vetores tangentes estão nas direções principais. Disto segue que $F=0$. Da equação (1.10) e da proposição 2 vem que $f=0$ e a primeira parte da proposição fica demonstrada. Usando (1.7) e a primeira parte da proposição 11 chega-se à demonstração da segunda parte.

c.q.d.

A proposição anterior nos mostrou que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas de uma vizinhança de um ponto não umbílico no qual as linhas coordenadas formam duas famílias ortogonais de linhas de curvatura.

Quando a superfície possui um ponto umbílico P , podem existir ou não linhas de curvatura passando por P .

A proposição a seguir estabelece uma fórmula, denominada Fórmula de Rodriguez, que caracteriza completamente as direções principais e, conseqüentemente, as linhas de curvatura de uma superfície M com vetor normal $N(u,v)$, relativamente ao sistema de coordenadas $X(u,v)$ de uma vizinhança $V \subset M$.

PROPOSIÇÃO 12

Seja $f: (a,b) \rightarrow M$ uma curva regular, $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais tal que $f((a,b)) \subset X(\mathbb{R}^2)$. Então $f(t) = X(u(t), v(t))$ é uma linha de curvatura de M se e somente se existir uma função λ tal que

$$(1.11) \quad \frac{d(Nof)(t)}{dt} + \lambda(t)f'(t) = 0$$

para todo $t \in (a,b)$.

Ainda mais, $\lambda(t) = k_n(f(t))$ é uma curvatura principal de M em $f(t)$.

DEMONSTRAÇÃO : Para provar esta proposição usa-se as equações (1.5) e (1.10) e a proposição 3 para encontrar um vetor que esteja numa direção principal. A recíproca consiste em tomar o vetor obtido e chegar à equação (1.10). Os detalhes da demonstração podem ser encontrados em Notas de Geometria Diferencial por Kettenblatt (páginas IV-113, 114).

1.9. AS EQUAÇÕES DE GAUSS-WEINGARTEN E EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Vamos relacionar os coeficientes locais da primeira e segunda formas fundamentais. Para isto utilizaremos o triédrio móvel de um sistema de coordenadas $X(u,v)$ de uma vizinhança coordenada V da superfície M , $\{X_u, X_v, N\}$. Dado um ponto $P = X(u,v) \in V$, qualquer vetor do \mathbb{R}^3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores acima. Em particular temos

$$X_{uu}(u,v) = \alpha_1(u,v)X_u(u,v) + \alpha_2(u,v)X_v(u,v) + \alpha_3(u,v)N(u,v),$$

$$X_{uv}(u,v) = \beta_1(u,v)X_u(u,v) + \beta_2(u,v)X_v(u,v) + \beta_3(u,v)N(u,v),$$

$$X_{vv}(u,v) = \gamma_1(u,v)X_u(u,v) + \gamma_2(u,v)X_v(u,v) + \gamma_3(u,v)N(u,v).$$

onde os coeficientes $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1,2,3$) devem ser determinados.

Abreviaremos a notação acima omitindo as variáveis u e v . Assim, as equações acima podem ser escritas do seguinte modo:

$$(1.12) \quad \begin{cases} X_{uu} = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v + \alpha_3 N, \\ X_{uv} = \beta_1 X_u + \beta_2 X_v + \beta_3 N, \\ X_{vv} = \gamma_1 X_u + \gamma_2 X_v + \gamma_3 N. \end{cases}$$

Através de cálculos rotineiros obtemos

$$(1.13) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = - \frac{[X_v, X_{uu}, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \alpha_2 = \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = \frac{[X_u, X_{uu}, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \alpha_3 = e \\ \beta_1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = - \frac{[X_v, X_{uv}, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \beta_2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{[X_u, X_{uv}, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \beta_3 = f \\ \gamma_1 = \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = - \frac{[X_v, X_{vv}, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \gamma_2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{[X_u, X_v, N]}{\sqrt{EG - F^2}}. \\ \gamma_3 = g. \end{cases}$$

Nas equações acima, o símbolo $[, ,]$ denota o produto misto de \mathbb{R}^3 .

Substituindo os valores encontrados em (1.13) em (1.12) temos

$$(1.14) \quad \begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN. \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN. \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas equações de Gauss ou Equações em derivadas parciais da teoria de superfícies. Os símbolos $\Gamma_{i,j}^k$

$(i, j, k=i, 2)$ são chamados símbolos de Christoffel, os quais dependem exclusivamente dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas. Como a ordem da derivação parcial é irrelevante, temos $X_{uv} = X_{vu}$ e assim $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Se expressarmos as derivadas parciais do vetor normal $N(u, v)$ da superfície M em termos do triedro móvel acima, obteremos mais duas equações diferenciais. Estas equações são conhecidas como equações de Weingarten e são

$$(1.15) \quad \begin{cases} N_u = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2} X_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} X_v \\ N_v = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} X_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} X_v \end{cases}$$

Uma questão importante pode ser levantada ao indagarmos se existe uma superfície M , com sistema de coordenadas locais $X(u, v)$ que tenha coeficientes fundamentais E, F, G, e, f, g , pré-fixados. De um modo geral a resposta é negativa, porque a compatibilidade das derivadas parciais mixtas de terceira ordem impõe certas condições entre os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Para sermos mais explícitos, temos as equações de compatibilidade.

$$(1.16) \quad \begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \\ FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \\ EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \end{cases}$$

As duas primeiras são denominadas equações de Mainardi-Codazzi; enquanto que a terceira (ou quarta) dá o importante teorema Egregium de Gauss que enunciaremos a seguir.

PROPOSIÇÃO 13

A curvatura gaussiana K depende somente dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

A seguir veremos como se expressam as equações de Mainardi-Codazzi no caso em que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura em superfícies sem pontos umbílicos. Pela proposição 11 temos $F=f=0$. Disto segue que $F_u=F_v=f_u=f_v=0$. As duas primeiras equações (1.16) passarão a ser

$$\begin{cases} e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2 \\ g_u = e\Gamma_{22}^1 - g\Gamma_{12}^2 \end{cases}$$

Das equações (1.13) temos

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} e_v = \frac{eE_v}{2E} + \frac{gE_v}{2G} = \frac{1}{2}E_v \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ g_u = \frac{eG_u}{2E} + \frac{gG_u}{2G} = \frac{1}{2}G_u \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \end{cases}$$

Ainda pela proposição 11 podemos escrever

$$(1.17) \quad \begin{cases} e_v = \frac{1}{2}E_v (k_1 + k_2) \\ g_u = \frac{1}{2}G_u (k_1 + k_2) \end{cases}$$

Vamos enunciar o teorema de existência de superfícies.

A demonstração pode ser encontrada em M.M. Lipschutz- Teoria e Problemas em Geometria Diferencial (páginas 216,217,281,282).

TEOREMA 14

Suponhamos que E, F, G sejam funções de u e v de classe C^2 , e, f, g , sejam funções de u e v de classe C^1 , todas definidas em um aberto $U \ni (u_0, v_0)$ e tais que para todo $(u, v) \in U$ se tenha

$$(i) \quad EG - F^2 > 0, \quad E > 0, \quad G > 0,$$

$$(ii) \quad E, F, G, e, f, g, \text{ satisfazendo as equações (1.16).}$$

Então, existe um sistema de coordenadas $X(u, v)$ definido em U para o qual as funções E, F, G, e, f, g são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Além disso, a superfície é única a menos de posição no espaço.

1.10. ISOMETRIAS

Sejam M e M^* duas superfícies em \mathbb{R}^3 . Uma aplicação bijetiva $f: M \rightarrow M^*$ é dita uma isometria se o comprimento $g(t)$ de uma curva de M é igual ao comprimento de sua imagem em M^* por f . Nesta situação M e M^* se dizem isométricas.

Seja f uma bijeção entre as superfícies M e M^* . Suponha mos que para cada ponto P de M e um sistema de coordenadas locais $X: U \rightarrow V$ contendo P temos que $Y = f \circ X$ é um sistema de coordenadas ao redor de $f(P)$ em M^* para o qual $E(u, v) = E^*$, $F(u, v) = F^*$ e $G(u, v) = G^*$. Neste caso, f é dita uma isometria entre M e M^* .

Duas superfícies M e M^* são localmente isométricas se para cada $P \in M$, existem abertos $U \subset M$ e $U^* \subset M^*$ com $P \in U$ e uma isometria $F: U \rightarrow U^*$ (e vice-versa para $Q \in U^*$). Uma tal F é chamada uma isometria local.

Se $F: M \rightarrow M^*$ é uma isometria local, então F preserva com

mentos de arcos. De fato, seja $P \in M$ e $F(P) \in M^*$. Como F é isometria local, existem abertos $U \subset M$ e $U^* \subset M^*$ tal que $F: U \rightarrow U^*$ é isometria. Suponhamos que $f: [a, b] \rightarrow M$ é uma curva tal que para algum $t \in [a, b]$, $f(t) = P$. Consideremos c, d com $a < c \leq d < b$ tal que $f([c, d]) \subset U$. Como F é isometria de U em U^* temos F preservando comprimentos de arcos neste aberto; isto é, $F(f([c, d])) = f([c, d])$.

As propriedades de uma superfície que se mantem invariantes por uma isometria são chamadas propriedades intrínsecas da superfície e o conjunto de tais propriedades recebe o nome de geometria intrínseca da superfície. Do exposto acima se conclue que uma certa propriedade de uma superfície é intrínseca se ela depende unicamente da primeira forma fundamental. Algumas propriedades intrínsecas da superfície são a curvatura gaussiana (§1.6) e a curvatura geodésica (§2.2).

Enunciaremos dois resultados importantes para o capítulo IV, os quais poderão ser encontrados em Sotomayor (Lições de Equações Diferenciais - página 254 e seguintes - Teorema do Índice de Poincaré e em J. R. Munkres (Topology A First Course - § 8.1 - Teorema de Jordan). Antes, porém, vamos a algumas considerações.

Seja U um aberto de \mathbb{R}^2 e $X:U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. À função X associa-se a equação diferencial $x' = X(x)$. As soluções desta equação, ou seja, as aplicações diferenciáveis $\Psi:I \rightarrow U$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} , tais que para todo $t \in I$

$$\frac{d\Psi}{dt}(t) = X(\Psi(t)),$$

são chamadas trajetórias ou curvas integrais de X . Um ponto $x \in U$ é dito ponto singular de X se $X(x) = 0$.

A imagem da curva integral de X é o que se chama de órbita. Duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas; isto é, U fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis podendo cada uma ser

- (i) imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ,
- (ii) um ponto, ou
- (iii) difeomorfa a um círculo,

conforme a solução Ψ da equação diferencial seja

- (i) 1-1,
- (ii) Ψ é constante ou
- (iii) Ψ é periódica.

No caso (ii) a órbita chama-se ponto singular; no caso (iii) a órbita chama-se fechada.

Após estas considerações podemos enunciar o teorema do Índice .

TEOREMA 15

Seja X uma função diferenciável num aberto U de \mathbb{R}^2 . Se f é uma órbita fechada de X tal que o interior de f esteja conti

do no aberto U de \mathbb{R}^2 , então existe um ponto singular de X no interior de f .

TEOREMA 16

Seja M o plano \mathbb{R}^2 ou a esfera S^2 e f uma curva fechada simples em M . Então $M-f$ tem exatamente duas componentes conexas W_1 e W_2 , das quais f é a fronteira comum.

Uma aplicação diferenciável $f:[a,b] \rightarrow M$ é um mergulho na superfície M se f' é injetiva e se f é um homeomorfismo sobre sua imagem.

$\Psi: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto V de uma superfície regular M é diferenciável em $P \in V$ se, para algum sistema de coordenadas $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $P \in f(U)$, a composta $\Psi \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Ψ é diferenciável em V se é diferenciável para todo $P \in V$.

Sejam M_1 e M_2 superfícies regulares, V_1 um aberto de M_1 , U_1 e U_2 abertos do \mathbb{R}^2 . $\Psi: V_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $P \in V_1$ se, dados os sistemas de coordenadas $f_1: U_1 \rightarrow M_1$ e $f_2: U_2 \rightarrow M_2$ com $P \in f_1(U_1)$ e $\Psi(P) \in f_2(U_2)$, a aplicação $f_2^{-1} \circ \Psi \circ f_1: U_1 \rightarrow U_2$ é diferenciável em $f_1^{-1}(P)$.

Duas superfícies M_1 e M_2 são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável $\Psi: M_1 \rightarrow M_2$ com inversa $\Psi^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ diferenciável.

Uma aplicação $\Psi: U \subset M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo local em $P \in U$, se existir uma vizinhança $V \subset U$ de P , tal que $\Psi|_V$ é um difeomorfismo de V sobre um aberto $\Psi(V) \subset M_2$.

O teorema da função inversa para superfícies pode ser enunciado como segue. Sejam $m \leq n$, M uma superfície regular contida em \mathbb{R}^m , $P \in M$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em P com derivada injetiva em P . Então existe um aberto V_P contendo P tal que $f: V_P \rightarrow f(V_P)$ é um difeomorfismo.

CAPITULO II

GEODÉSICAS

2.1. ARCO DE COMPRIMENTO MÍNIMO

Uma aplicação contínua $f: [a, b] \rightarrow M$, de um intervalo da reta \mathbb{R} na superfície M , é dita uma curva parametrizada diferenciável por partes, ligando $f(a)$ a $f(b)$, se existir uma subdivisão de $[a, b]$ por pontos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ tal que f é diferenciável em $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$. A imagem de uma curva parametrizada diferenciável por partes será chamada um arco. Aqui, dizemos que $F: [p, q] \rightarrow M$ é diferenciável no intervalo fechado, se existir $\delta > 0$ e uma função C^∞ $g: (p-\delta, q+\delta) \rightarrow M$ com $g|_{[p, q]} = F$.

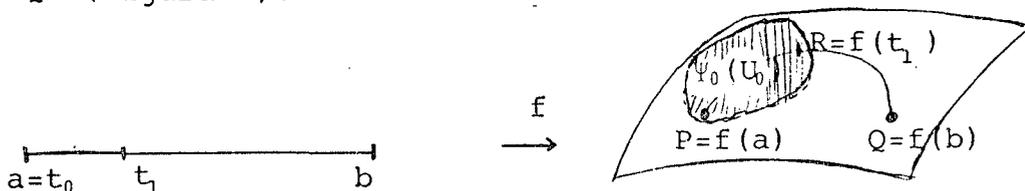
PROPOSIÇÃO 17

Dados dois pontos P e Q de uma superfície M , existe sempre uma curva parametrizada diferenciável por partes unindo P a Q .

DEMONSTRAÇÃO: Como estamos tratando apenas com superfícies que sejam conexas, existe uma curva contínua $f: [a, b] \rightarrow M$, com $f(a) = P$ e $f(b) = Q$. Seja $t \in [a, b] = I$ e I_t um intervalo aberto contendo t em $[a, b]$, tal que $f(I_t)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada de $f(t)$. A união $\cup I_t$, $t \in [a, b]$ cobre $[a, b]$ e, por compacidade, um número finito I_1, \dots, I_n ainda cobre $[a, b]$. Seja a subdivisão $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ de I tal que $[t_i, t_{i+1}]$ esteja contido em algum dos I_1, \dots, I_n . Portanto, $f([t_i, t_{i+1}])$ está con-

tido em uma vizinhança coordenada (U_i, Ψ_i) .

Como $P=f(t_0)$ e $R=f(t_1)$ estão em uma mesma vizinhança coordenada $\Psi(U) \subset M$, é possível ligá-los por uma curva diferenciável $f_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M$. Seja g a união das f_i . Assim, g é contínua e diferenciável em cada subintervalo fechado $[t_i, t_{i+1}]$ de $[a, b]$. Logo, g é uma curva parametrizada diferenciável por partes ligando P a Q (figura 2).



(FIGURA 2)

c.q.d.

Sejam P e Q dois pontos quaisquer de uma superfície M . Chama-se distância intrínseca entre P e Q ao ínfimo dos comprimentos de todas as curvas parametrizadas diferenciáveis por partes que unem P a Q . Denotaremos a distância intrínseca entre P e Q por $d(P, Q)$. O comprimento da curva f entre P e Q será denotado por $(P, Q)_f$. Simbolicamente, temos

$$d(P, Q) = \inf\{ (P, Q)_f : f \text{ é curva parametrizada diferenciável por partes de } P \text{ a } Q \}.$$

PROPOSIÇÃO 18

A distância intrínseca satisfaz os axiomas de uma métrica.

DEMONSTRAÇÃO : Sejam P, Q, R pontos quaisquer de uma superfície M ,

$$(i) \quad d(P, Q) = d(Q, P).$$

Como o comprimento de uma curva parametrizada diferenciável por partes é independente da orientação da curva, temos

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \inf\{(P, Q)_f : f \text{ é curva parametrizada diferenciável por partes de } P \text{ a } Q\} = \\ &= \inf\{(Q, P)_g : g \text{ é curva parametrizada diferenciável por partes de } Q \text{ a } P\} = d(Q, P). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R).$$

Seja $d(P, Q) = \inf\{(P, Q)_f : f \text{ é curva parametrizada diferenciável por partes de } P \text{ a } Q\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe uma curva parametrizada diferenciável por partes, $f_1 : [0, 1] \rightarrow M$ com $f_1(0) = P$ e $f_1(1) = Q$, tal que $(P, Q)_{f_1} \leq d(P, Q) + \varepsilon$.

Da mesma forma, existe uma curva parametrizada diferenciável por partes, $f_2 : [1, 2] \rightarrow M$ com $f_2(1) = Q$ e $f_2(2) = R$, tal que

$$(Q, R)_{f_2} \leq d(Q, R) + \varepsilon.$$

Como f_1 é uma curva parametrizada diferenciável por partes, existe uma subdivisão do intervalo $[0, 1]$ de modo que f_1 restrita a cada subintervalo é diferenciável e tem comprimento bem definido. Do mesmo modo para f_2 no intervalo $[1, 2]$. Como

$f = f_1 \cup f_2 : [0, 2] \rightarrow M$ é uma curva contínua e tem-se uma subdivisão de $[0, 2]$ onde f restrita a cada subintervalo é diferenciável, f é uma curva parametrizada diferenciável por partes de P a R e seu comprimento é igual à soma dos comprimentos de f_1 e f_2 . Assim,

$$d(P, R) \leq (P, R)_f = (P, Q)_{f_1} + (Q, R)_{f_2} \leq d(P, Q) + d(Q, R) + 2\varepsilon.$$

Mas ε é arbitrário. Logo, $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

$$(iii) \quad d(P, Q) \geq 0.$$

Como $(P, Q)_f \geq 0$, qualquer que seja a curva parametrizada

diferenciável por partes unindo P à Q , temos $d(P,Q) \geq 0$.

(iv) $d(P,Q) = 0$ se e somente se $P=Q$.

Suponhamos que $P=Q$. Tomemos a curva $f:[a,b] \rightarrow M$ dada por $f(t)=P$, para todo $t \in [a,b]$. Temos $(P,Q)_f = 0$. Logo, $d(P,Q) = 0$.

Suponhamos que $d(P,Q) = 0$. Dado $\varepsilon \geq 0$, existe entre P e Q uma curva parametrizada diferenciável por partes, f , tal que $(P,Q)_f \leq d(P,Q) + \varepsilon$. Mas $|P-Q| \leq (P,Q)_f \leq \varepsilon$, onde $|P-Q|$ denota a distância euclidiana. Segue que $|P-Q| \leq \varepsilon$. Como ε é arbitrário, temos $|P-Q| = 0$. Logo, $P=Q$. c.q.d.

OBSERVAÇÕES

(i) A métrica d definida acima é chamada a métrica intrínseca em M gerada pela métrica em \mathbb{R}^3 . Salvo menção contrária, d denotará esta métrica no restante deste trabalho.

(ii) Sejam P e Q dois pontos quaisquer de uma superfície M . Se existir uma curva parametrizada diferenciável por partes unindo P à Q cujo comprimento $(P,Q)_f$ seja igual à distância intrínseca de P à Q , então f é dita uma curva de comprimento mínimo entre P e Q .

EXEMPLO 1

Seja $d(P,Q)$ a distância euclidiana no plano. Existe sempre um arco de comprimento mínimo entre P e Q que é o segmento de reta que une P à Q .

PROPOSIÇÃO 19

Seja F uma isometria local de uma superfície M em uma

superfície M^* . Para qualquer par de pontos P e Q de M suficientemente próximos temos $d(P,Q) = d(F(P), F(Q))$.

DEMONSTRAÇÃO : Dado $\varepsilon \geq 0$, existe uma curva parametrizada diferenciável por partes, f , unindo P a Q tal que $(P,Q)_f \leq d(P,Q) + \varepsilon$. Suponhamos que $F \circ f = g$. Como F é uma isometria local,

$(F(P), F(Q))_g = (P,Q)_f$. Assim,

$$d(F(P), F(Q)) \leq (F(P), F(Q))_g = (P,Q)_f \leq d(P,Q) + \varepsilon.$$

Como ε foi tomado arbitrariamente, temos

$$d(F(P), F(Q)) \leq d(P,Q).$$

Mas $d(P,Q) = d(F^{-1}(F(P)), F^{-1}(F(Q))) \leq d(F(P), F(Q))$, pois

$(F^{-1}(F(P)), F^{-1}(F(Q)))_f = (F(P), F(Q))_g$. Portanto,

$$d(F(P), F(Q)) \leq d(P,Q) \leq d(F(P), F(Q)).$$

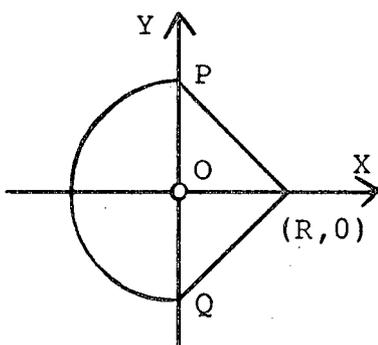
Logo,

$$d(P,Q) = d(F(P), F(Q)).$$

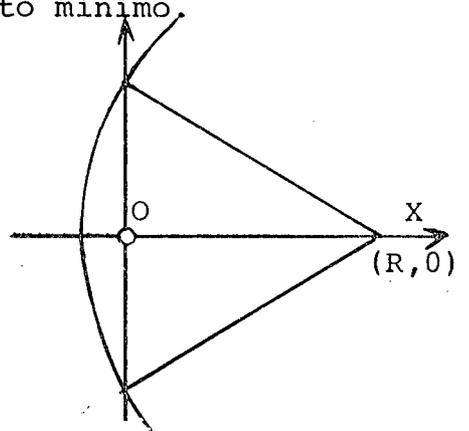
c.q.d.

EXEMPLO 2

Sejam M o plano XOY excluída a origem $(0,0)$, os pontos $P=(0,1)$ e $Q=(0,-1)$. O único arco em M com comprimento igual a 2 seria um segmento de reta unindo P a Q o qual conteria a origem. Deste modo, não existe em M arco de comprimento 2. Tomemos um arco de circunferência entre P e Q de centro $(R,0)$ e raio $R \geq 0$ (figura 3). Quando R é suficientemente grande, os arcos unindo P a Q tem comprimento maior do que 2, mas muito próximos a 2. Portanto, em M não existem arcos de comprimento mínimo.

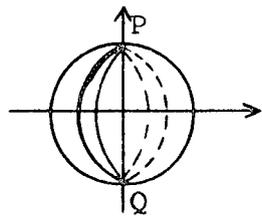


(FIGURA 3)



EXEMPLO 3

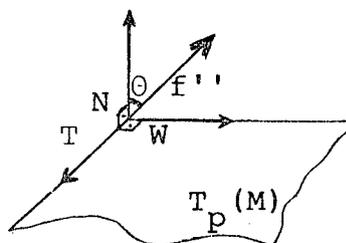
Sejam M uma superfície esférica de centro na origem de \mathbb{R}^3 , P e Q os polos norte e sul, respectivamente de M (figura 4). Provaremos mais adiante que qualquer círculo máximo, denominado meridiano, unindo P à Q é um arco de comprimento mínimo. Existem infinitos arcos, portanto, de comprimento mínimo em M unindo P à Q .



(FIGURA 4)

2.2. CURVATURA GEODÉSICA

Sejam M uma superfície, P um ponto de M , N um vetor unitário normal a M em P , $T_P(M)$ o plano tangente a M em P . Seja f uma curva parametrizada regular em M , com vetor normal n , vetor tangente $T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$ e curvatura k no ponto P . Como é sempre possível reparametrizar uma curva regular pelo comprimento de arco, suponhamos que o parâmetro t seja o próprio comprimento de arco s ; isto é, f é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos introduzir um vetor unitário W perpendicular a T , contido em $T_P(M)$, de modo que o sentido $T \rightarrow W$ coincida com o sentido $X_u \rightarrow X_v$. Assim, $\{T, W, N\}$ é uma base do \mathbb{R}^3 , dependente da curva f , que tem o mesmo sentido de $\{X_u, X_v, N\}$ (figura 5).



(FIGURA 5)

Consideremos o vetor aceleração $f''(s)$ de f em P . Como f' é unitário, f'' está contido no plano determinado por W e N . Seja θ o

ângulo que o vetor f'' forma com o sentido positivo de N , Projecemos o vetor f'' ortogonalmente aos vetores N e W .

O valor algébrico da projeção de f'' no sentido de N é chamado curvatura normal da curva f e é denotado por k_n .

O valor algébrico da projeção de f'' no sentido de W é chamado curvatura geodésica da curva f e é denotado por k_g .

Temos as relações:

$$(2.1) \quad k_n = \langle f''(s), N \rangle = |f''(s)| |N| \cos \theta = k \cos \theta.$$

$$(2.2) \quad k_g = \langle f''(s), W \rangle = |f''(s)| |W| \sin \theta = k \sin \theta.$$

Elevando ao quadrado (2.1) e (2.2) e somando membro a membro, obtemos

$$(2.3) \quad k_n^2 + k_g^2 = k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta = k^2.$$

Uma vez escolhido o sentido de N , o sinal de k_n indica se f'' tem o mesmo sentido de N ou sentido oposto. Da mesma forma, o sinal de k_g indica se f'' tem o mesmo sentido de W ou sentido oposto. Assim sendo, tanto k_n quanto k_g são dependentes do sistema de coordenadas considerado. No entanto, esta dependência é no máximo em sinal.

No §1.6 vimos que a curvatura normal da superfície M no ponto P segundo a direção do vetor $w \in T_P(M)$ é $k_n(w) = \frac{II(w)}{I(w)}$. Para a curva f , acima, parametrizada pelo comprimento de arco, temos $I(w) = 1$, onde w é o vetor tangente à f em P . Assim, $k_n(w) = II(w)$. Mas

$II(w) = \pm \langle f''(s), N \rangle$, de modo que

$$(2.4) \quad k_n(w) = \pm \langle f''(s), N \rangle.$$

Comparando-se (2.1) e (2.4) temos que

$$k_n = \pm k_n(w);$$

isto é, a curvatura normal da curva f de M em P coincide em valor absoluto com a curvatura normal da superfície M no ponto P segundo a direção do vetor tangente à f em P .

Procuramos uma expressão para k_g em termos de um sistema de coordenadas $X(u,v)$ de uma vizinhança coordenada $V \subset M$, contendo o ponto P . De (2.2) temos

$$k_g = \langle f'', W \rangle = \langle f'', N \times T \rangle = [f'', N, T].$$

Como assumimos inicialmente que f está parametrizada pelo comprimento de arco, temos $T = f'(s)$. Usando a propriedade cíclica do produto misto, temos

$$(2.5) \quad k_g = [f', f'', N].$$

Usando as considerações acima mostraremos que a curvatura geodésica pode ser expressa unicamente em termos dos coeficientes locais da primeira forma fundamental e suas derivadas, relativamente ao sistema de coordenadas $X(u,v)$ da vizinhança coordenada V de M contendo P .

TEOREMA 20

A curvatura geodésica ao longo de uma curva f de uma superfície M é uma propriedade intrínseca da superfície.

DEMONSTRAÇÃO: Seja V uma vizinhança coordenada de P em M dada pelo sistema de coordenadas $X(u,v)$ e $f(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em M . Considere a base do \mathbb{R}^3 caracterizada acima, $\{T, W, N\}$. Temos

$$T(s) = f'(s) = u'(s)X_u + v'(s)X_v, \text{ e}$$

$$f''(s) = \frac{dT}{ds}(s) = (u'(s))^2 X_{uu} + 2(u'(s))(v'(s))X_{uv} + (v'(s))^2 X_{vv} + u''(s)X_u + v''(s)X_v.$$

Vamos omitir a variável s por comodidade e calcular k_g por (2.5).

$$k_g = [u'X_u + v'X_v, u'^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + v'^2X_{vv} + u''X_u + v''X_v, N] .$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} k_g = & [u'X_u, u'^2X_{uu}, N] + [u'X_u, 2u'v'X_{uv}, N] + [u'X_u, v'^2X_{vv}, N] + \\ & + [u'X_u, u''X_u, N] + [u'X_u, v''X_v, N] + [v'X_v, u'^2X_{uu}, N] + \\ & + [v'X_v, 2u'v'X_{uv}, N] + [v'X_v, v'^2X_{vv}, N] + [v'X_v, u''X_u, N] + \\ & + [v'X_v, v''X_v, N] . \end{aligned}$$

Como $[X_u, X_u, N] = [X_v, X_v, N] = 0$, temos

$$\begin{aligned} k_g = & u'^3 [X_u, X_{uu}, N] + 2u'^2 v' [X_u, X_{uv}, N] + u'v'^2 [X_u, X_{vv}, N] + \\ & + u'v'' [X_u, X_v, N] + u'^2 v' [X_v, X_{uu}, N] + 2u'v'^2 [X_v, X_{uv}, N] + \\ & + v'^3 [X_v, X_{vv}, N] + v'u'' [X_v, X_u, N] . \end{aligned}$$

Reagrupando os termos desta última igualdade encontramos

$$\begin{aligned} (2.6) \quad k_g = & u'^3 [X_u, X_{uu}, N] + u'^2 v' \{ 2[X_u, X_{uv}, N] + [X_v, X_{uu}, N] \} + \\ & + u'v'^2 \{ [X_u, X_{vv}, N] + 2[X_v, X_{uv}, N] \} + \\ & + v'^3 [X_v, X_{vv}, N] - \frac{v'u''}{\sqrt{EG-F^2}} + \frac{u'v''}{\sqrt{EG-F^2}} . \end{aligned}$$

Das equações (1.13) obtemos

$$[X_u, X_{uu}, N] = \Gamma_{11}^2 \sqrt{EG-F^2} .$$

$$[X_u, X_{uv}, N] = \Gamma_{12}^2 \sqrt{EG-F^2} .$$

$$[X_v, X_{uu}, N] = -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG-F^2} .$$

$$[X_u, X_{vv}, N] = \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG-F^2} .$$

$$[X_v, X_{uv}, N] = -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG-F^2} .$$

$$[X_v, X_{vv}, N] = -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG-F^2} .$$

Substituindo estas equações em (2.6) encontramos

$$(2.7) \quad k_g = \sqrt{EG-F^2} \{ \Gamma_{11}^2 u'^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' + \\ + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) u' v'^2 - \Gamma_{22}^1 v'^3 + u' v'' - u'' v' \}.$$

Portanto, k_g é uma função apenas de E, F, G e suas derivadas, sendo assim uma propriedade intrínseca da superfície M .

c.q.d.

COROLÁRIO 21

A curvatura geodésica de uma curva plana é a própria curvatura de uma curva plana (§1.3).

DEMONSTRAÇÃO : Basta substituir em (2.7) $u=x, v=y, E=G=1, F=0$. Tem-se

$$k_g = u'v'' - u''v' = \hat{k}.$$

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 22

Qualquer curva sobre uma esfera com curvatura geodésica constante é uma circunferência (ou um arco de circunferência).

DEMONSTRAÇÃO: Seja f uma curva parametrizada pelo comprimento de arco sobre a esfera S^2 e

$X(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança coordenada $V \subset S^2$. Neste sistema temos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1.$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u.$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = -1.$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0.$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = -\cos^2 u.$$

Seja w um vetor tangente a S^2 . Então

$$k_n(w) = \frac{II(w)}{I(w)} = \frac{-a^2 - b^2 \cos^2 u}{a^2 + b^2 \cos^2 u} = -1 = \text{constante}.$$

Por hipótese f tem k_g constante. Como $k_n(w)$ é constante, vem que k_n é constante. De (2.3) conclui-se que f tem curvatura k constante. Sendo f uma curva em S^2 com curvatura constante, segue que f é uma curva plana. Sem perda de generalidade, suponhamos que f esteja contida num plano paralelo a XOY . Pelo teorema fundamental de curvas planas vem que

$$\theta(s) = \int_0^s k dr = k \int_0^s dr = ks.$$

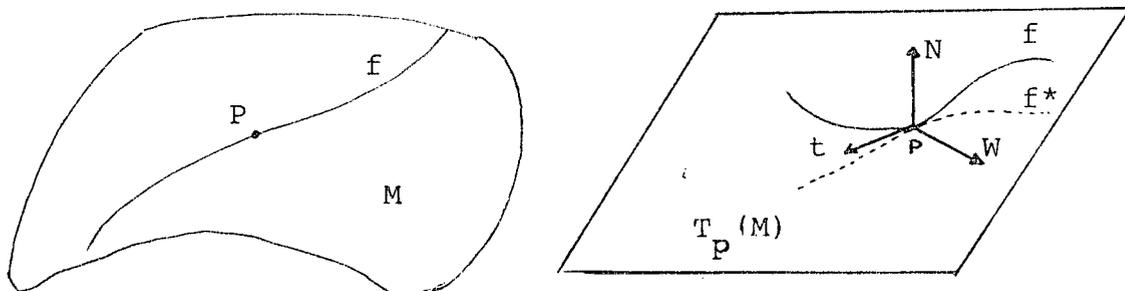
Então,

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos(kr) dr = \frac{1}{k} \sin(ks), \\ y(s) = \int_0^s \sin(kr) dr = -\frac{1}{k} \cos(ks), \\ z(s) = c, \end{cases}$$

são as equações paramétricas de uma circunferência de centro no ponto $(0,0,c)$, do plano que contém f , de raio $\frac{1}{k}$.

c.q.d.

Vamos fazer uma interpretação geométrica da curvatura geodésica em termos da projeção sobre o plano tangente. Seja f uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície M , P um ponto de f e f^* a projeção de f sobre $T_P(M)$. A curva



(FIGURA 6)

tura geodésica de f nada mais é do que a curvatura de f^* (figura 6).

Enquanto que a curvatura normal dá em valor absoluto o mínimo de curvatura que uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tem de ter para estar na superfície, a curvatura geodésica diz o quanto esta curva se curva na superfície. A curvatura geodésica desempenha para as curvas na superfície o mesmo que a curvatura k desempenha para as curvas no plano ou no espaço. Extendendo esta analogia, poderíamos pensar em curvas sobre superfícies que tem curvatura zero e ver até que ponto esta analogia pode ser feita com retas em \mathbb{R}^3 . Através desta analogia chegamos à noção de geodésicas.

2.3. GEODÉSICAS

A história das geodésicas se inicia com a solução dada por Juan Bernoulli ao problema de minimizar distâncias entre dois pontos de uma superfície convexa. Bernoulli demonstrou que o plano osculador de uma geodésica deve ser ortogonal ao plano tangente em todo ponto (1697-1698).

O nome geodésica com seu significado atual se deve à J. Liouville.

A equação das geodésicas foi obtida pela primeira vez por Euler.

Vamos, agora, dar a definição de geodésica. Uma geodésica de uma superfície M é uma curva $g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ com a propriedade que para todo $t \in I$, g'' é ortogonal à M . Segue imediatamente de (2.2) que a curvatura geodésica de g é nula em todos os pontos.

Notamos que o vetor g'' , chamado vetor aceleração ou vetor curvatura, serve apenas para manter a geodésica g em M . Não existe, pois, componente tangencial de g'' .

Uma vez que, para todo $s \in I$, g'' é normal à M , temos em particular que $g'' \perp g'$ para todo $s \in I$. Disto se pode concluir que

$$(2.8) \quad \langle g''(s), g'(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I.$$

Logo,

$$\frac{d}{ds} |g'(s)| = 0, \quad \forall s \in I.$$

Portanto,

$$|g'(s)| \text{ é constante.}$$

Isto significa que as geodésicas são curvas de velocidade constante.

Sejam $P_1, P_2 \in M$ e g uma geodésica de M contendo P_1 e P_2 tal que $d(P_1, P_2) = (P_1, P_2)_g$. A curva g é chamada uma geodésica minimal. Esta definição é análoga aquela apresentada na observação (ii) do §2.1.

PROPOSIÇÃO 23

Uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $g: I \rightarrow M$ de uma superfície M é uma geodésica de M se e somente se

$$[g', g'', N] = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO : Sendo g uma geodésica de M vem que a curvatura geodésica de g é nula; isto é, $k_g = 0$. De (2.5) vem que

$$(2.9) \quad [g', g'', N] = 0.$$

c.q.d.

TEOREMA 24

Sejam M uma superfície em \mathbb{R}^3 , I um intervalo aberto de \mathbb{R} e $g: I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A curva g é uma geodésica de M se e somente se, para todo $s \in I$ e para todo sistema de coordenadas $X(u, v)$ de uma vizinhança coordenada V de $g(s)$, vale (2.10), onde $g(s) = X(u(s), v(s))$.

$$(2.10) \quad \begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0. \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{T, W, N\}$ a base ortonormal caracterizada no §2.2, relativamente ao sistema de coordenadas locais X ao redor de $g(s)$.

Como g é uma geodésica de M , temos

$$k_g = \langle g'', W \rangle = 0.$$

Por hipótese, g está parametrizada pelo comprimento de arco, de modo que $g' \perp T$. Mas $T \in T_p(M)$. Assim,

$$T(s) = u'X_u + v'X_v.$$

Portanto, g'' é perpendicular tanto à X_u quanto à X_v ; isto é,

$$\langle g'', X_u \rangle = \langle g'', X_v \rangle = 0.$$

Segue que

$$g'' = u'^2 X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + v'^2 X_{vv} + u''X_u + v''X_v.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \langle g'', X_u \rangle = u'^2 \langle X_{uu}, X_u \rangle + 2u'v' \langle X_{uv}, X_u \rangle + \\ \quad + v'^2 \langle X_{vv}, X_u \rangle + u'' \langle X_u, X_u \rangle + v'' \langle X_v, X_u \rangle . \\ 0 = \langle g'', X_v \rangle = u'^2 \langle X_{uu}, X_v \rangle + 2u'v' \langle X_{uv}, X_v \rangle + \\ \quad + v'^2 \langle X_{vv}, X_v \rangle + u'' \langle X_u, X_v \rangle + v'' \langle X_v, X_v \rangle . \end{array} \right.$$

Vamos resolver o sistema acima para u'' e v'' . Para tal, multipliquemos a primeira equação por $\langle X_v, X_v \rangle$, a segunda por $-\langle X_v, X_u \rangle$ e somemos. Obtemos

$$\begin{aligned} & u'^2 [\langle X_{uu}, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_{uu}, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle] + \\ & + 2u'v' [\langle X_{uv}, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_{uv}, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle] + \\ & + v'^2 [\langle X_{vv}, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_{vv}, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle] + \\ & + u'' [\langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle] + \\ & + v'' [\langle X_v, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_v, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle] = 0 . \end{aligned}$$

Utilizemos as identidades,

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle ,$$

$$\langle X_u, X_u \rangle = E,$$

$$\langle X_u, X_v \rangle = F,$$

$$\langle X_v, X_v \rangle = G,$$

$$|X_u \times X_v|^2 = EG - F^2 ,$$

para transformar a equação acima em

$$\begin{aligned} & |X_u \times X_v|^2 u'' + u'^2 \langle X_{uu} \times X_v, X_u \times X_v \rangle + \\ & + 2u'v' \langle X_{uv} \times X_v, X_u \times X_v \rangle + v'^2 \langle X_{vv} \times X_v, X_u \times X_v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dividindo por $|X_u \times X_v|^2$ temos

$$\begin{aligned} & u'' + u'^2 \langle X_{uu} \times X_v, \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|^2} \rangle + 2u'v' \langle X_{uv} \times X_v, \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|^2} \rangle + \\ & + v'^2 \langle X_{vv} \times X_v, \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|^2} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Usando o vetor normal N e o produto misto, encontramos

$$\begin{aligned} & u'' + \frac{u'^2}{|X_u \times X_v|} [X_{uu}, X_v, N] + \frac{2u'v'}{|X_u \times X_v|} [X_{uv}, X_v, N] + \\ & + \frac{v'^2}{|X_u \times X_v|} [X_{vv}, X_v, N] = 0. \end{aligned}$$

Das equações (1.13) vem que

$$u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0,$$

que é a primeira das equações (2.10).

Por um raciocínio análogo chegaríamos à segunda das equações (2.10).

c.q.d.

Seja $f(t) = (u(t), v(t))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Suponhamos que f seja um mergulho diferenciável. Seja M uma superfície de revolução gerada por f . Nestas condições temos a proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 25

- (i) Todo meridiano de M é uma geodésica.
- (ii) Um círculo de latitude (ou paralelo) é uma geodésica de M se e somente se a tangente X_t aos meridianos é para

lela ao eixo de revolução em todos os pontos do círculo de latitude.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que a curva $f(t) = (u(t), v(t))$ esteja contida no plano XOZ, $u=u(t)>0$ e gire ao redor do eixo OZ. Suponhamos ainda que t mede a posição da curva e θ mede o quanto a curva gira. Definamos a aplicação

$$F: I \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$(t, \theta) \rightarrow F(t, \theta) = (u(t)\cos\theta, u(t)\sin\theta, v(t)).$$

Naturalmente que F não é uma aplicação injetiva. Para cada ponto $P=F(t_0, \theta_0)$ consideremos o número real $\delta \in (0, \pi)$. Então a aplicação

$$F|_{I \times (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)}$$

é uma aplicação injetiva. Suponhamos que $U = I \times (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ e V_p é uma vizinhança do ponto P . Como f é um mergulho diferenciável temos $X(U) = V_p \cap M$.

Mostremos que X é um sistema de coordenadas locais de M em uma vizinhança de P . X é C^∞ pois as funções coordenadas tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Além disso,

$$DX_p = \begin{bmatrix} u'(t)\cos\theta & -u(t)\cos\theta \\ u'(t)\sin\theta & u(t)\cos\theta \\ v'(t) & 0 \end{bmatrix}$$

tem posto 2 uma vez que os tres determinantes menores de ordem 2 não se anulam simultaneamente.

A seguir vamos obter o sistema de equações diferenciais que as geodésicas de M devem satisfazer considerando um sistema de coordenadas locais $X(t, \theta)$ como acima.

$E = \langle X_t, X_t \rangle = (u'(t))^2 + (v'(t))^2 = 1$, pois f está parametrizada pelo comprimento de arco.

$$F = \langle X_t, X_\theta \rangle = 0.$$

$$G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = (u(t))^2 = u^2.$$

Assim,

$$EG - F^2 = u^2.$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_t - 2FF_t + FE_\theta}{2(EG - F^2)}_\theta = 0.$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_\theta - FG_t}{2(EG - F^2)} = 0.$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_\theta - GG_t - FG_\theta}{2(EG - F^2)}_\theta = -uu'.$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_t - EE_\theta + FE_t}{2(EG - F^2)} = 0.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_t - FE_\theta}{2(EG - F^2)}_\theta = \frac{u'}{u}.$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_\theta - 2FF_\theta + FG_t}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Pelo teorema 24, a curva $f(s) = X(t(s), \theta(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco de M é uma geodésica de M se e somente se satisfaz (2.10); isto é,

$$\begin{cases} t'' + \Gamma_{11}^1 t'^2 + 2\Gamma_{12}^1 t' \theta' + \Gamma_{22}^1 \theta'^2 = 0. \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 t'^2 + 2\Gamma_{12}^2 t' \theta' + \Gamma_{22}^2 \theta'^2 = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados, temos

$$(2.11) \quad \begin{cases} t'' - uu' \theta'^2 = 0. \\ \theta'' + \frac{2u'}{u} t' \theta' = 0. \end{cases}$$

Feitas estas considerações vamos completar a demonstração.

(i) Os meridianos de M são as curvas de M onde $\theta = \theta(s)$ é constante. Assim sendo, temos $\theta' = \theta'' = 0$. Ao longo de um meridiano temos $t = t(s) = s$, logo, $t' = 1$ e $t'' = 0$. As equações (2.11) ficam, pois, satisfeitas para qualquer meridiano, o qual é uma geodésica de M .

(ii) Os círculos de latitude de M são as curvas de M onde $t = t(s)$ é constante. Assim sendo, temos

$$(2.12) \quad t' = t'' = 0.$$

Como a curva $f(s) = X(t(s), \theta(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$1 = |f'(s)|^2 = |t'X_t + \theta'X_\theta|^2 = \langle t'X_t + \theta'X_\theta, t'X_t + \theta'X_\theta \rangle,$$

ou seja,

$$1 = t'^2 \langle X_t, X_t \rangle + 2t'\theta' \langle X_t, X_\theta \rangle + \theta'^2 \langle X_\theta, X_\theta \rangle.$$

Substituindo $t' = 0$ na equação acima encontramos

$$1 = \theta'^2 G.$$

Como $G = u^2$, obtemos $1 = (\theta'u)^2$. Mas $u > 0$, logo $0 \neq \theta' = \pm \frac{1}{u}$.

Sendo $t = t(s)$ constante, então $u = u(t)$ também é constante. Desta forma

$$(2.13) \quad \theta'' = 0 \text{ e } u' = 0.$$

Observamos que θ é função de s , logo a derivada é em relação à s , enquanto que u é função de t logo, a derivada é em relação à t , muito embora tenhamos utilizado o símbolo $'$ nas duas situações.

De (2.12) e (2.13) concluímos que um círculo de latitude satisfaz a segunda das equações (2.11). Uma vez que $\theta' = 0$ e $u > 0$, um círculo de latitude satisfará a primeira das equações (2.11) se e somente se $u' = 0$. Mas $u' = 0$ implica em

$$X_t = \langle u' \cos \theta, u' \sin \theta, v' \rangle = (0, 0, v'(t)),$$

que é um vetor paralelo ao eixo de rotação de M .

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 26

Suponhamos que $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ sejam intervalos abertos tais que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ e M seja uma superfície regular. Se $g_1: I_1 \rightarrow M$ e $g_2: I_2 \rightarrow M$ são geodésicas e $g_1|_{I_1 \cap I_2} = g_2|_{I_1 \cap I_2}$, então $g = g_1 \cup g_2: I_1 \cup I_2 \rightarrow M$ é uma geodésica.

DEMONSTRAÇÃO : Sendo g_1 uma geodésica em M temos que $k_{g_1} = 0$ em I_1 .

Sendo g_2 uma geodésica em M temos $k_{g_2} = 0$ em I_2 .

Como $g = g_1 \cup g_2$ é uma curva parametrizada diferenciável e $k_g = 0$ em $I_1 \cup I_2$, temos que g é uma geodésica.

c.q.d.

EXEMPLO 4

Toda geodésica de uma esfera é parte de uma circunferência máxima.

Seja f uma geodésica da esfera unitária S^2 . Um sistema de coordenadas locais de S^2 é dado por

$$X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

Neste sistema temos

$$E = 1.$$

$$F = 0.$$

$$G = \cos^2 u.$$

$$X_{uu} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u).$$

$$X_{uv} = (\text{sen } u \text{ sen } v, -\text{sen } u \text{ cos } v, 0).$$

$$X_{vv} = (-\text{cos } u \text{ cos } v, -\text{cos } u \text{ sen } v, 0).$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \pm X(u,v). \text{ Suponhamos } N = -X(u,v). \text{ Assim,}$$

temos

$$e = 1, \quad f = 0 \quad \text{e} \quad g = +\text{cos}^2 u.$$

Seja $w = aX_u + bX_v$ um vetor tangente a S^2 no ponto $f(s)$.

Então,

$$k_n(w) = \frac{II(w)}{I(w)} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} = \frac{+a^2 + b^2 \text{cos}^2 u}{a^2 + b^2 \text{cos}^2 u} = 1$$

é constante. Como f é uma geodésica temos $k_g = 0$ (constante). Pela proposição 22, f é um arco de circunferência. O vetor f'' é paralelo ao vetor normal N de S^2 , pois f é geodésica. Logo, f está contida num plano que intersepta S^2 passando pelo seu centro. Portanto, f é um arco de uma circunferência máxima em S^2 .

OBSERVAÇÃO

Uma consequência imediata do exemplo 4 e da proposição 26 é que toda circunferência máxima de S^2 é uma geodésica.

EXEMPLO 5

Toda reta (ou segmento de reta) de uma superfície é uma geodésica.

Seja g uma reta (ou segmento de reta) de uma superfície M . Em todo ponto de g temos $k = 0$. Da equação (2.3) vem que $0 = k_n^2 + k_g^2$. Logo, $k_n^2 = -k_g^2$. Portanto, $k_n = k_g = 0$. Assim, g é uma geodésica de M .

TEOREMA 27

Numa vizinhança de um ponto P de uma superfície M existe uma e somente uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que passa por P e tem uma direção dada.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $w \in T_P(M)$ um vetor unitário, f uma geodésica em

M passando por P , $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(s_0) = P$ e $f'(s_0) = w$. Estamos interessados em provar que f , atendendo a estas condições, é única. Seja $X(u, v)$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança coordenada V_P que contenha o ponto P . Suponhamos que $P = X(0, 0)$ e que $w = aX_u + bX_v$.

Se existir uma geodésica $f(s) = X(u(s), v(s))$ satisfazendo as condições acima, então f deve satisfazer (2.10), obedecendo as condições iniciais $u(s_0) = 0$, $v(s_0) = 0$, $u'(s_0) = a$ e $v'(s_0) = b$. Inversamente, qualquer solução para este problema de valor inicial é uma geodésica com as propriedades exigidas. O teorema de Picard assegura a existência de uma única solução para esse problema de valor inicial, numa vizinhança de s_0 . Deste modo, precisamos apenas mostrar que a solução

$$f(s) = X(u(s), v(s))$$

do problema de valor inicial

$$(2.14) \quad \begin{cases} u'' = -\Gamma_{11}^1 u'^2 - 2\Gamma_{12}^1 u'v' - \Gamma_{22}^1 v'^2, \\ v'' = -\Gamma_{11}^2 u'^2 - 2\Gamma_{12}^2 u'v' - \Gamma_{22}^2 v'^2, \\ u(s_0) = v(s_0) = 0 \\ u'(s_0) = a, \quad v'(s_0) = b, \end{cases}$$

é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

$$\begin{aligned} \text{Seja } g(s) &= |f'(s)|^2 = \langle f'(s), f'(s) \rangle = \\ &= \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle = \\ &= u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G. \end{aligned}$$

Derivando-se g em relação à s obtemos

$$\begin{aligned} g'(s) &= u'^3 \frac{\partial E}{\partial u} + 2u'u''E + u'^2 v' \frac{\partial E}{\partial v} + 2u'^2 v' \frac{\partial F}{\partial u} + \\ &+ 2u'v' \frac{\partial^2 F}{\partial v} + 2u''v'F + 2u'v''F + v'^3 \frac{\partial G}{\partial v} + 2v'v''G + \\ &+ u'v'^2 \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Como $f(s)$ é uma solução de (2.14) temos $g'(s) = 0$.

Portanto, $g(s)$ é constante. Mas $g(s_0) = |f'(s_0)|^2 = 1$. Logo, g deve ser identicamente igual a 1. Assim, f' é um vetor unitário e f está parametrizada pelo comprimento de arco e como f é solução de (2.14) é uma geodésica.

Repetidas aplicações disto fornecerão $f(s)$ definida para $s \in (a, b)$ para algum par de números $a, b \in \mathbb{R}$, mesmo que a imagem de f não esteja contida em um mesmo sistema de coordenadas de M .

A demonstração mostra-nos que f é única nos pontos em que está definida.

c.q.d.

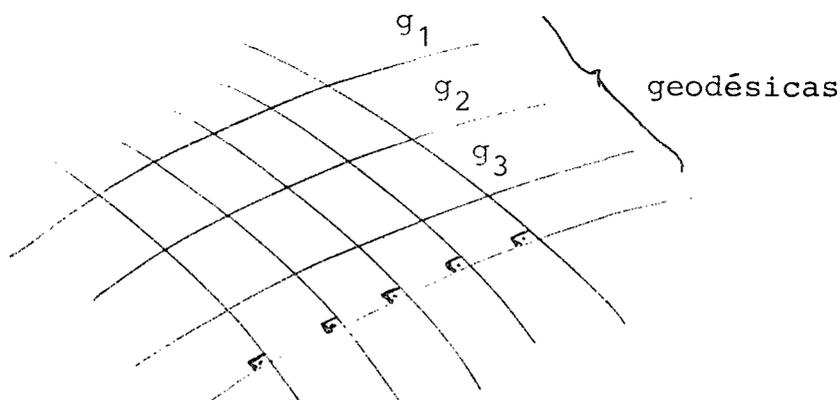
COROLÁRIO 28

Se a direção dada não for unitária, então a geodésica não necessita estar parametrizada pelo comprimento de arco.

A demonstração deste corolário é análoga à do teorema 27. Basta não considerar o vetor w unitário, para obter a geodésica f não parametrizada pelo comprimento de arco.

2.4. COORDENADAS GEODÉSICAS

Um sistema de coordenadas de uma vizinhança V_p de um ponto P de uma superfície M é chamado um sistema de coordenadas geodésicas retangulares quando as linhas coordenadas forem ortogonais e uma das famílias é constituída de geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco (figura 7).



(FIGURA 7)

LEMA 29

Sejam M uma superfície, $P \in M$ e $X(u,v)$ um sistema de coordenadas ao redor de P tal que $E \equiv 1$ e $F \equiv 0$. Então as linhas coordenadas de M com v constante ($v' = 0$) são geodésicas.

DEMONSTRAÇÃO : Para cada v_0 fixo seja $f(u) = X(u, v_0)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de M . f será uma geodésica de M se e somente se satisfizer as equações (2.10). Como v_0 é fixo, temos $v'_0 = 0$. As equações (2.10) passam a ser

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 u'^2 = 0. \end{cases}$$

$E = 1$, $F = 0$, de modo que $E_u = E_v = F_u = F_v = 0$. Então,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = 0. \end{cases}$$

Substituindo estes elementos no sistema acima, obtemos

$$u'' = 0,$$

de modo que u' é constante.

Como $f'(u) = u' X_u(u, v_0)$, segue que

$$f''(u) = u'' X_u(u, v_0) + u'^2 X_{uu}(u, v_0).$$

Logo,

$$f''(u) = u'^2 X_{uu}(u, v_0).$$

Portanto,

$$\langle f''(u), N \rangle = \frac{u'^2}{|X_u \times X_v|} \langle X_{uu}(u, v_0), X_u \times X_v \rangle = 0.$$

Como f está parametrizada pelo comprimento de arco, $|X_u| = 1$, logo,

X_{uu} é ortogonal à X_u em (u, v_0) . Desta forma,

$$\langle f''(u), N \rangle = 0,$$

consequentemente, f é geodésica de M .

c.q.d.

Deste lema vem imediatamente que a primeira forma fundamental num sistema de coordenadas geodésicas é dado por

$$(2.15) \quad I = ds^2 + G(s, \theta) d\theta^2.$$

TEOREMA 30

Seja M uma superfície e $f: [a, b] \rightarrow M$ um mergulho diferenciável. Existe um sistema de coordenadas geodésicas $X: U \rightarrow V \subset M$ onde V é uma vizinhança do ponto $f(u)$, $u \in [a, b]$ tal que $X(u, 0) = f(u)$.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que f está definida em $[c, d]$, onde $c < a \leq b < d$.

Escolhamos m, n tais que $c < m < a \leq b < n < d$. Para cada v seja $w(v) = -W(v)$ onde W é aquele definido no §2.2. Para cada $v \in [m, n]$ se

ja f_v a única geodésica satisfazendo

$$\begin{cases} f_v(0) = f_v \\ \frac{df_v}{du}(0) = w(v). \end{cases}$$

Seja $X(u,v) = f_v(u)$. Como f_v é uma geodésica, ela satisfaz as equações (2.10). Assim, X é de classe C^3 , pelo menos. Como $[m,n]$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que X é 1-1 em $[-\delta, \delta] \times [m,n]$.

$$\begin{cases} X_u(0,v) = \frac{df_v}{du}(0) = w(v). \\ X_v(0,v) = \frac{df_v}{dv}(0) = t(v). \end{cases}$$

Mas w e t são unitários e ortogonais de modo que $(X_u \times X_v)(0,v) \neq 0$.

Então existe $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon \leq \delta$ tal que

$$X_u \times X_v \neq 0 \text{ em } [-\varepsilon, \varepsilon] \times [m,n].$$

Portanto,

$$X: [-\varepsilon, \varepsilon] \times [m,n] \rightarrow \mathbf{VCM}$$

é um sistema de coordenadas locais em $f(u)$, o qual contém $f([a,b])$.

Além disso, $E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle w(s), w(s) \rangle = 1$, de modo que $f_v(u)$ é uma geodésica tendo u por comprimento de arco.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle.$$

Mas

$$X_{uu} = \frac{\partial X_u}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f_v}{\partial u} = \frac{\partial^2 f_v}{\partial u^2} \text{ é normal à } M \text{ porque } f_v \text{ é u-}$$

ma geodésica em M .

Logo, $\langle X_{uu}, X_v \rangle = 0$.

Como $E=1$ vem que $2\langle X_{uv}, X_u \rangle = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

o que implica em dizer que $F(u,v)$ é constante em relação à u .

Disto segue que

$$F(u,v) = F(0,v) = \langle X_u(0,v), X_v(0,v) \rangle = \langle w(v), t(v) \rangle = 0;$$

ou seja, F é também constante em relação à v . Além disso, $F \equiv 0$.

Concluimos do lema 29 que X é um sistema de coordenadas geodésicas locais.

c.q.d.

2.5. O PARALELISMO DE LEVI-CEVITA

Um vetor em um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um par $v=(P,V)$ onde $V \in \mathbb{R}^n$.

Um campo vetorial w em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$w : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

que atribua a cada ponto $P \in U$ um vetor $v=(P,w(P))$ no ponto P .

Um campo vetorial w em U é diferenciável se a função associada $w:U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável.

Uma curva parametrizada $f:I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva integral do campo vetorial w no aberto U de \mathbb{R}^n se $f(t) \in U$ e $(f(t), f'(t)) = w(f(t))$.

Um campo vetorial tangente ao longo de uma curva $f:[a,b] \rightarrow M$ é uma função $w_f:[a,b] \rightarrow \{t \in [a,b]\} \times T_{f(t)}(M)$ que atribui a cada $t \in [a,b]$ um vetor $w_f(t) = (f(t), v(t))$ onde $v \in T_{f(t)}(M)$.

EXEMPLO 6

Seja f uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície M . Então $w_f(t) = (f(t), f'(t))$ é um campo vetorial tangente ao longo de f .

EXEMPLO 7

Seja f uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em uma vizinhança coordenada de uma superfície M . Seja t o vetor tangente à f no ponto $f(s)$ e N o vetor normal à M em $f(s)$. Então

$W(s) = (f(s), N(s) \times t(s))$ é um campo vetorial tangente ao longo de f . Como W e t são linearmente independentes, qualquer campo vetorial tangente ao longo de f é da forma

$$w_f(s) = a(s)t(s) + b(s)W(s).$$

Um campo vetorial tangente w_f ao longo da curva f é diferenciável se como uma função $w_f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ele é diferenciável. Denotaremos a derivada do campo vetorial tangente w_f

$$w_f(t) = (f(t), v(t)) \text{ por } \dot{w}_f(t) = (f(t), v'(t)).$$

Um campo vetorial diferenciável tangente w_f ao longo da curva f é dito paralelo ao longo de f (no sentido de Levi-Cevita) se, para cada t , $v'(t)$ é perpendicular à M . Só usaremos os campos vetoriais que forem diferenciáveis. Por isto, omitiremos a partir de agora a palavra diferenciável. Vamos também omitir da notação $w_f(t) = (f(t), v(t))$ a parte $f(t)$, a menos que haja possibilidade de confusão. Escreveremos, então, simplesmente $w_f(t) = v(t)$.

EXEMPLO 8

Seja $f(t) = (a(t), b(t), 0)$ uma curva no plano XOY. Seja $w_f(t) = (A(t), B(t), 0)$ um campo vetorial tangente diferenciável ao longo de f . O normal do plano é $N(t) = (0, 0, 1)$.

$$\dot{w}_f(t) = \left(\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, 0 \right).$$

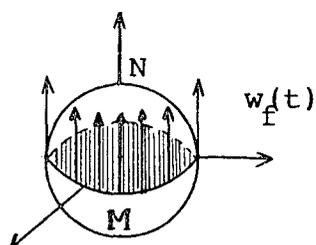
O campo w_f é paralelo ao longo de f se \dot{w}_f é perpendicular ao plano; isto é,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = 0.$$

Assim, w_f é paralelo ao longo de f se e somente se A e B são constantes ao longo de f .

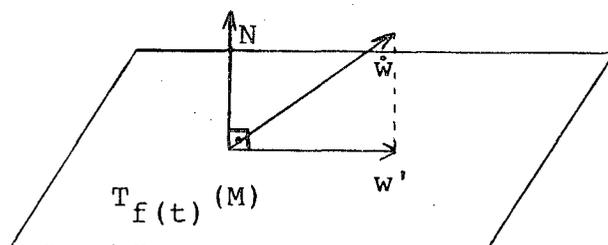
EXEMPLO 9

Seja M a esfera unitária em \mathbb{R}^3 de centro $(0,0,0)$. Seja f o equador de M e w_f um vetor unitário apontando para o norte em cada ponto de f . w_f é paralelo ao longo de f pois $w_f(t) = (0,0,1)$ e $\dot{w}_f(t) = (0,0,0)$. Logo, \dot{w}_f é perpendicular à M (figura 8).



(FIGURA 8)

É de se notar que o campo $\dot{w}_f = \frac{dw}{dt}$ geralmente não é tangente à superfície M . No entanto, podemos obter um campo vetorial tangente à M projetando \dot{w}_f ortogonalmente sobre $T_{f(t)}(M)$ para cada $t \in [a,b]$ (figura 9). Este processo de diferenciar um campo vetorial e projetar ortogonalmente a derivada sobre $T_{f(t)}(M)$ recebe o nome de diferenciação covariante. Segue disto que a derivada covariante nada mais é do que a componente tangencial da derivada usual. Vamos denotar o vetor projeção de \dot{w}_f sobre $T_{f(t)}(M)$ por w'_f . A derivação covariante tem as mesmas propriedades da derivação usual com exceção do fato que a derivada covariante de um campo vetorial tangente à M é ainda um campo vetorial tangente à M .



(FIGURA 9)

Observamos que, mudando o sistema de coordenadas da superfície M , a derivada covariante não se altera. Isto ocorre devido ao fato que, ao mudar o sistema de coordenadas, o máximo que pode ocorrer é que o vetor normal à superfície mude de sinal. A projeção de \hat{w}_f sobre $T_{f(t)}(M)$, no entanto, não se altera por esta mudança.

PROPOSIÇÃO 31

Um campo vetorial tangente w_f ao longo de uma curva f de uma superfície M é paralelo se e somente se $w'_f(t) = 0, \forall t$.

DEMONSTRAÇÃO : Como w_f é paralelo ao longo de $f: [a,b] \rightarrow M$ vem que

$\forall t \in [a,b], \hat{w}_f(t) \perp T_{f(t)}(M)$. Portanto, a projeção ortogonal de \hat{w}_f sobre $T_{f(t)}(M)$ é nula.

c.q.d.

Seja M uma superfície regular e $P \in M$. Um campo de vetores tangentes em M é definido por

$$w: M \rightarrow \cup_{P \in M} \{P\} \times T_P(M) = T(M)$$

$$P \rightarrow w(P) = (P, v),$$

onde $v \in T_P(M)$. Por questão de simplicidade, vamos escrever apenas w_P .

Sejam $v_1, v_2 \in T_P(M)$ e $w_1, w_2 \in T(M)$. Definimos a soma de campos vetoriais tangentes em M no ponto P por

$$(w_1 + w_2)(P) = (P, v_1(P) + v_2(P)).$$

Vamos, agora, a uma definição precisa de derivada covariante.

Seja $f: I \rightarrow M$ uma curva parametrizada de uma superfície M e w um campo vetorial diferenciável tangente à M em $f(t)$. A derivada covariante de w é o campo vetorial w' tangente à M definido por

$$(2.16) \quad w'(t) = \dot{w}(t) - \langle \dot{w}(t), N(f(t)) \rangle N(f(t))$$

onde N é o vetor normal à M em $f(t)$. Vamos denotá-la por

$$\left(\frac{Dw}{dt}\right)(f(t)) = w'(t) \quad \text{ou por} \quad D_{\frac{df}{dt}} w(f(t)).$$

Vamos obter uma expressão para a derivada covariante em termos de um sistema de coordenadas locais $X(u, v)$ de uma superfície M ao redor de um ponto $P \in M$.

Seja $f(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva f de M e $w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$ um campo vetorial tangente à M . Por comodidade vamos omitir a variável t . Então,

$$\dot{w} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v$$

sendo que o símbolo ' está indicando a derivada em relação à t . Usando-se as equações (1.14) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w} = & a(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)u' + a(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)v' + a'X_u + \\ & + b(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)u' + b(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN)v' + b'X_v. \end{aligned}$$

Reagrupando-se temos

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \dot{w} = & (a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{12}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v')X_u + \\ & + (b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{12}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v')X_v + \\ & + (aeu' + afv' + bfu' + bgv')N. \end{aligned}$$

Calculando-se

$$(2.18) \quad \langle \dot{w}, N \rangle N = (aeu' + afv' + bfu' + bgv')N.$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16) obtemos

$$(2.19) \quad \frac{Dw}{dt} = w' = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv') X_u + \\ + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv') X_v.$$

OBSERVAÇÕES

(i) A expressão (2.19) nos mostra que $\frac{Dw}{dt}$ independe da curva considerada.

(ii) Podemos redefinir um campo vetorial paralelo w_f ao longo de uma curva parametrizada f com sendo aquele para o qual se tenha para todo t ,

$$\frac{Dw_f}{dt} = 0.$$

PROPOSIÇÃO 32

Sejam w_1 e w_2 campos vetoriais diferenciáveis tangentes em uma superfície M ao longo da curva parametrizada $f: I \rightarrow M$ e g uma função diferenciável. Então,

- (i) $(w_1 + w_2)' = w_1' + w_2'$.
- (ii) $(gw_1)' = g'w_1 + gw_1'$.
- (iii) $\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle = \langle \frac{Dw_1}{dt}, w_2 \rangle + \langle w_1, \frac{Dw_2}{dt} \rangle$.
- (iv) $\langle w_1, w_2 \rangle' = \langle w_1', w_2 \rangle + \langle w_1, w_2' \rangle$

DEMONSTRAÇÃO : (i) $(w_1 + w_2)' = (w_1 + w_2) - \langle w_1 + w_2, N \rangle N = \dot{w}_1 + \dot{w}_2 - \langle \dot{w}_1 + \dot{w}_2, N \rangle N$.

Segue que

$$(w_1 + w_2)' = (\dot{w}_1 - \langle \dot{w}_1, N \rangle N) + (\dot{w}_2 - \langle \dot{w}_2, N \rangle N) = w_1' + w_2'.$$

$$(ii) (gw_1)' = (gw_1) - \langle (gw_1), N \rangle N = \dot{g}w_1 + g\dot{w}_1 - \langle \dot{g}w_1 + g\dot{w}_1, N \rangle N.$$

Segue que

$$(gw_1)' = (\dot{g} - \langle \dot{g}, N \rangle N)w_1 + g(\dot{w}_1 - \langle \dot{w}_1, N \rangle N) = g'w_1 + gw_1'.$$

(iii) Sabemos que a derivada covariante é a componente tangencial da derivada usual. Denotando-se esta componente por $(\frac{dw}{dt})_T$, obtemos

$$(\frac{dw_1}{dt})_T = \frac{Dw_1}{dt} = w_1', \text{ e } (\frac{dw_2}{dt})_T = \frac{Dw_2}{dt} = w_2'.$$

Da derivação usual temos

$$\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle = \langle \frac{dw_1}{dt}, w_2 \rangle + \langle w_1, \frac{dw_2}{dt} \rangle.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle = \langle (\frac{dw_1}{dt})_T, w_2 \rangle + \langle w_1, (\frac{dw_2}{dt})_T \rangle = \langle \frac{Dw_1}{dt}, w_2 \rangle + \langle w_1, \frac{Dw_2}{dt} \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{(iv) } \langle w_1, w_2 \rangle' &= (\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle) = \langle \frac{dw_1}{dt}, w_2 \rangle + \langle w_1, \frac{dw_2}{dt} \rangle = \\ &= \langle (\frac{dw_1}{dt})_T, w_2 \rangle + \langle w_1, (\frac{dw_2}{dt})_T \rangle = \langle w_1', w_2 \rangle + \langle w_1, w_2' \rangle. \end{aligned}$$

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 33

Sejam w_1 e w_2 campos vetoriais tangentes em M paralelos ao longo da curva $f: [a, b] \rightarrow M$. Então,

- (i) w_1 tem comprimento constante.
- (ii) $\langle w_1, w_2 \rangle$ é constante.
- (iii) o ângulo entre w_1 e w_2 é constante.
- (iv) $\forall c \in \mathbb{R}$, $w_1 + w_2$ e cw_1 são paralelos.

DEMONSTRAÇÃO : (i) Como w_1 é paralelo ao longo de f , temos $w_1' = 0$.

$$\text{Mas } \frac{d}{dt} |w_1|^2 = \frac{d}{dt} \langle w_1, w_1 \rangle = 2 \langle w_1', w_1 \rangle = 0.$$

Portanto, $|w_1|^2$ é constante. Logo, w_1 tem comprimento constante.

(ii) Como w_1 e w_2 são paralelos ao longo de f , temos $w_1' = w_2' = 0$. Então,

$$\frac{d}{dt} \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle' = \langle w_1', w_2 \rangle + \langle w_1, w_2' \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle w_1, w_2 \rangle$ é constante.

(iii) Sabe-se que $\langle w_1, w_2 \rangle = |w_1| |w_2| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre w_1 e w_2 . Dos itens (i) e (ii) segue imediatamente que $\cos \theta$ é constante. Portanto, θ é constante.

(iv) Como w_1 e w_2 são paralelos ao longo de f , temos que $w_1' = w_2' = 0$. Pela proposição 32 temos

$$(w_1 + w_2)' = w_1' + w_2'.$$

Portanto, $(w_1 + w_2)' = 0$. Logo, $w_1 + w_2$ é paralelo ao longo de f .

Da mesma forma, $\forall c \in \mathbb{R}$ temos

$$(cw_1)' = c'w_1 + cw_1' = cw_1'.$$

Portanto, $(cw_1)' = 0$. Logo, cw_1 é paralelo ao longo de f .

c.q.d.

A proposição que acabamos de provar nos diz que, quando transladamos vetores paralelamente ao longo de uma curva, os ângulos e os comprimentos dos vetores são preservados, exatamente como na Geometria Euclidiana.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada do plano \mathbb{R}^2 ao longo da qual o campo f' de seus vetores tangentes é paralelo. As curvas f com esta característica são exatamente as retas de \mathbb{R}^2 . Em uma superfície vamos encontrar curvas desempenhando o papel de tais retas. São estas as geodésicas da superfície. Temos, assim, uma nova definição de geodésicas, desta vez usando a derivada covariante.

Uma curva parametrizada f de uma superfície M , não constante, é uma geodésica se o campo de seus vetores tangentes f' é paralelo ao longo de f ; isto é, para todo t ,

$$\frac{Df'(t)}{dt} = 0.$$

A seguir obteremos uma expressão para a curvatura K em

termos da derivada covariante.

PROPOSIÇÃO 34

Sejam $X:U \rightarrow V \subset M$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança de um ponto P de uma superfície M e K a curvatura gaussiana de M . Então,

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u = K(X_u \times X_v) \times X_u.$$

DEMONSTRAÇÃO : Como $\frac{D}{\partial u} X_u = \left(\frac{\partial}{\partial u} X_u \right)_T$, vem de (2.19) que

$$\frac{D}{\partial u} X_u = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v.$$

Ainda de (2.19) temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u &= \left((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 \right) X_u + \\ &+ \left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 \right) X_v. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{D}{\partial v} X_u = \left(\frac{\partial}{\partial v} X_u \right)_T = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u &= \left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right) X_u + \\ &+ \left((\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) X_v. \end{aligned}$$

Subtraindo-se as duas igualdades, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u &= \left((\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right) X_u + \\ &+ \left((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) X_v. \end{aligned}$$

Das duas últimas equações de (1.16) temos

$$\begin{aligned} -FKX_u + EKX_v &= \left((\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right) X_u + \\ &+ \left((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right) X_v, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u &= K(-FX_u + EX_v) = \\ &= K(\langle X_u, X_u \rangle X_v - \langle X_u, X_v \rangle X_u) = \\ &= K(X_u \times X_v) \times X_u. \end{aligned}$$

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 35

Sejam f uma curva parametrizada de uma superfície M cujo vetor normal é $N(u,v)$, t_0 um ponto do domínio de f e $v \in T_{f(t_0)}(M)$. Existe um único campo vetorial w tangente à M ao longo de f que é paralelo e satisfaz $w(t_0) = v$.

DEMONSTRAÇÃO :Necessitamos um campo vetorial w tangente à M ao longo de f que satisfaça a condição $w' = 0$. Usando (2.16) com a omissão da variável temos

$$w' = \dot{w} - \langle \dot{w}, N \rangle N.$$

Como $\langle w, N \rangle = \langle \dot{w}, N \rangle + \langle w, \dot{N} \rangle$, temos

$$w' = \dot{w} - (\langle w, N \rangle - \langle w, \dot{N} \rangle) N = \dot{w} - \langle w, N \rangle N + \langle w, \dot{N} \rangle N.$$

Como w é tangente à M ao longo de f vem que $\langle w, N \rangle = 0$, de modo que $\langle w, \dot{N} \rangle = 0$. Assim,

$$(2.20) \quad w' = \dot{w} + \langle w, \dot{N} \rangle N.$$

Temos que $w' = 0$ se e somente se w é solução da equação

$$(2.21) \quad 0 = \dot{w} + \langle w, \dot{N} \rangle N.$$

Consideremos $w(t) = (f(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ que é uma solução do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dw_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^3 (N_i(f(t))) (N_j(f(t)))' w_j(t) = 0,$$

onde $N_j(f(t))$ para $j=1,2,3$ são as componentes do vetor normal $N(f(t))$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais existe uma única solução $w = (w_1, w_2, w_3)$ de (2.21) que é um campo vetorial tangente ao longo de f , satisfazendo $w(t_0) = v$; isto é, $w_i(t_0) = v_i$, $i=1,2,3$, onde $v = (f(t_0), v_1, v_2, v_3)$.

Vamos mostrar que w é tangente à M . Por (2.20) temos

$$\langle w', N \rangle = \langle \dot{w}, N \rangle + \langle w, \dot{N} \rangle = 0,$$

pois $w' = 0$. Portanto, $\langle \dot{w}, N \rangle = -\langle w, \dot{N} \rangle$.

Mas, $\langle w, N \rangle' = \langle w', N \rangle + \langle w, N' \rangle$. Como $N' = 0$, temos

$$\langle w, N \rangle' = \langle w', N \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle w, N \rangle$ é constante ao longo de f .

Como

$$\langle w(t_0), N(t_0) \rangle = \langle v, N(t_0) \rangle = 0,$$

então para todo t ,

$$\langle w(t), N(t) \rangle = 0.$$

Logo, w é tangente à M como esperávamos.

Por último, w é paralelo ao longo de f pois $w' = 0$.

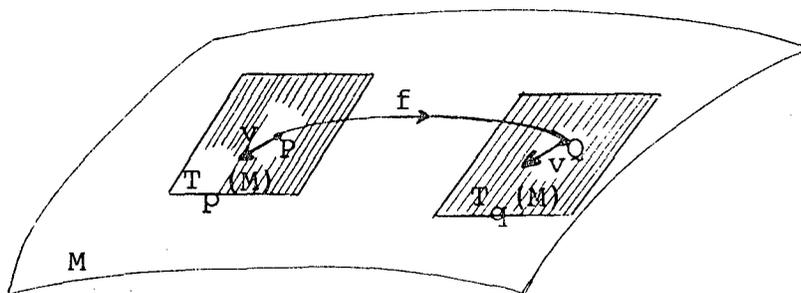
c.q.d.

O paralelismo de Levi-Cevita pode ser usado para transportar vetores de um ponto de uma superfície M para outro. Sejam P e Q dois pontos dados na superfície M e $f: [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $f(a) = P$ e $f(b) = Q$. Cada curva diferenciável f de P à Q determina uma transformação

$$p_f : T_P(M) \rightarrow T_Q(M)$$

$$v \rightarrow p_f(v) = V(b)$$

onde V é o único campo vetorial paralelo ao longo de f com $V(a) = v$ (figura 10). O campo vetorial $p_f(v)$ é chamado o transporte paralelo de v ao longo de f .



(FIGURA 10)

O conceito acima pode ser generalizado para uma curva parametrizada diferenciável por partes. Suponhamos que $f: [a, b] \rightarrow M$ seja uma curva parametrizada diferenciável por partes. Existe um número finito de pontos em (a, b) onde f não é diferenciável. Por comodidade, suponhamos que f não seja diferenciável apenas num ponto c , $a < c < b$. Neste caso, consideraríamos $f = f_1 \cup f_2$, onde

$$f_1: [a, c] \rightarrow M \text{ com } f_1(a) = P \text{ e } f_1(c) = R.$$

$$f_2: [c, b] \rightarrow M \text{ com } f_2(c) = R \text{ e } f_2(b) = Q.$$

Então, f_1 e f_2 são diferenciáveis e conseqüentemente as considerações acima valem para f_1 e para f_2 .

EXEMPLO 10

Para $\theta \in \mathbb{R}$ consideremos $f_\theta: [0, \pi] \rightarrow S^2$ a curva parametrizada na esfera S^2 em \mathbb{R}^3 que vai do polo norte $P = (0, 0, 1)$ ao polo sul $Q = (0, 0, -1)$ definida por $f_\theta(t) = (\cos\theta \sin t, \sin\theta \sin t, \cos t)$. Para cada θ , f_θ é uma semi-circunferência máxima de S^2 . Seja $v = (1, 0, 0) \in T_P(S^2)$. Um campo vetorial tangente ao longo de f_θ , pela proposição 33, é paralelo se e somente se ele tiver comprimento constante e formar ângulo constante com \dot{f}_θ . Um tal campo, com valor inicial v , é

$$V_\theta(t) = (\cos\theta) \dot{f}_\theta(t) - (\sin\theta) N(f_\theta(t)) \times \dot{f}_\theta(t).$$

Assim, $p_{f_\theta}(v) = V_\theta(\pi) = \cos\theta(Q, -\cos\theta, -\sin\theta, 0) - \sin\theta(Q, -\sin\theta, \cos\theta, 0)$

Segue que $p_{f_\theta}(v) = - (Q, \cos 2\theta, \sin 2\theta, 0)$.

Portanto, o transporte paralelo de P à Q é dependente do caminho f_θ .

TEOREMA 36

Sejam P e Q pontos de uma superfície M e f uma curva parametrizada diferenciável por partes de P à Q . O transporte paralelo

$$p_f: T_P(M) \rightarrow T_Q(M)$$

ao longo de f é um isomorfismo de espaços vetoriais e preserva produto interno.

DEMONSTRAÇÃO : (i) p_f é linear. De fato, sejam w_1 e w_2 campos vetoriais tangentes paralelos ao longo de uma curva parametrizada $f: [a, b] \rightarrow M$, tais que $f(a) = P$ e $f(b) = Q$ e para $v_1, v_2 \in T_P(M)$, $w_1(a) = v_1$ e $w_2(a) = v_2$. Pela proposição 33, temos $w_1 + w_2$ e cw_1 , $c \in \mathbb{R}$ sendo também campos vetoriais tangentes paralelos ao longo de f . Seja

$$p_f(v_1) = w_1(b) \text{ e } p_f(v_2) = w_2(b).$$

Então,

$$p_f(v_1) + p_f(v_2) = w_1(b) + w_2(b) = (w_1 + w_2)(b) = p_f(v_1 + v_2).$$

Do mesmo modo,

$$cp_f(v_1) = cw_1(b) = w_1(cb) = p_f(cv_1).$$

(ii) $\langle p_f(v_1), p_f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\forall v_1, v_2 \in T_P(M)$. De fato, sejam w_1 e w_2 os campos vetoriais tais como em (i). Pela parte (ii) da proposição 33, $\langle w_1, w_2 \rangle$ é constante. Então,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1(a), w_2(a) \rangle = \langle w_1(b), w_2(b) \rangle = \langle p_f(v_1), p_f(v_2) \rangle.$$

(iii) p_f é injetiva. De fato, pela parte (i) da proposição 33, sendo w_1 o transporte paralelo ao longo de f do item (i) tem-se

$$|p_f(v_1)| = |w_1(b)| = 0$$

implicando em

$$|w_1(a)| = |v_1| = 0.$$

Portanto, o núcleo de p_f é nulo e p_f é injetiva. Como p_f é uma aplicação entre espaços vetoriais de mesma dimensão, temos que p_f é sobrejetiva, logo é bijetiva.

c.q.d.

2.6. A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Seja M uma superfície, $P \in M$ e $v \in T_P(M)$. Pelo corolário 28 existe uma única geodésica g_v de M tal que $g_v'(0) = v$ e $g_v(0) = P$.

Seja $W = \{v \in T_P(M) : 1 \in \text{domínio } g_v\}$. A aplicação

$$\exp_P : W \rightarrow M$$

$$v \mapsto \exp_P(v) = g_v(1)$$

satisfazendo $\exp_P(0) = g_0(1) = P$ é chamada aplicação exponencial em P .

EXEMPLO 11

Seja $M = \mathbb{R}^2$, $P = (1,0) \in M$ e $g_v(t) = (\cos \theta t, \sin \theta t)$ um círculo unitário em M com velocidade inicial $v = (0, \theta)$. Temos

$$g_v(0) = (1,0) = P.$$

$$g_v'(t) = (-\theta \sin \theta t, \theta \cos \theta t). \quad g_v'(0) = (0, \theta).$$

Portanto,

$$\exp_P(0, \theta) = g_v(1) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

LEMA 37

Se uma geodésica g_v está definida no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $g_{\lambda v}$ está definida em $(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ e, para $t \in (-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda})$, tem-se $g_{\lambda v}(t) = g_v(\lambda t)$.

DEMONSTRAÇÃO : Para simplificar notação usaremos g em lugar de g_v .

Definamos

$$h: (-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \rightarrow M \text{ por } h(t) = g(\lambda t).$$

Portanto,

$$(2.22) \quad h(0) = g(0) \text{ e } h'(0) = \lambda g'(0).$$

Suponhamos que X é um sistema de coordenadas ao redor de $P \in M$ e que $g(t) = X(u(t), v(t))$. Então, $h(t) = g(\lambda t) = X(u(\lambda t), v(\lambda t))$.

Portanto,

$$h'(t) = X_u(u(\lambda t), v(\lambda t)) \lambda u'(\lambda t) + X_v(u(\lambda t), v(\lambda t)) \lambda v'(\lambda t).$$

Omitindo as variáveis do segundo membro temos para a última igualdade a expressão

$$h'(t) = \lambda u' X_u + \lambda v' X_v.$$

Por (2.19) vem que

$$\begin{aligned} \frac{Dh'(t)}{dt} &= \frac{D}{dt} (\lambda u' X_u + \lambda v' X_v) \\ &= [(\lambda u')' + \Gamma_{11}^1 (\lambda u') (u)' + \Gamma_{12}^1 (\lambda u') (v)' + \Gamma_{12}^1 (\lambda v') (u)' + \\ &+ \Gamma_{22}^1 (\lambda v') (v)'] X_u + [(\lambda v')' + \Gamma_{11}^2 (\lambda u') (u)' + \Gamma_{12}^2 (\lambda u') (v)' + \Gamma_{12}^2 (\lambda v') (u)' + \\ &+ \Gamma_{22}^2 (\lambda v') (v)'] X_v. \end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \frac{Dh'(t)}{dt} &= (\lambda^2 u'' + \lambda^2 \Gamma_{11}^1 u'^2 + \lambda^2 \Gamma_{12}^1 u' v' + \lambda^2 \Gamma_{12}^1 u' v' + \lambda^2 \Gamma_{22}^1 v'^2) X_u + \\ &+ (\lambda^2 v'' + \lambda^2 \Gamma_{11}^2 u'^2 + \lambda^2 \Gamma_{12}^2 u' v' + \lambda^2 \Gamma_{12}^2 u' v' + \lambda^2 \Gamma_{22}^2 v'^2) X_v. \end{aligned}$$

Logo,

$$(2.23) \quad \frac{Dh'(t)}{dt} = \lambda^2 [(u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2) X_u + \\ + (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2) X_v].$$

Ainda por (2.19) calculamos

$$\frac{Dg'(t)}{dt} = \frac{D}{dt} [u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))].$$

Omitindo as variáveis no segundo membro, temos

$$(2.24) \quad \frac{Dg'(t)}{dt} = (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2) X_u + \\ + (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2) X_v.$$

Substituindo (2.24) em (2.23) temos

$$\frac{Dh'(t)}{dt} = \lambda^2 \frac{Dg'(t)}{dt}.$$

Por hipótese, g é uma geodésica de modo que $\frac{Dg'(t)}{dt} = 0$. Logo,

$$\frac{Dh'(t)}{dt} = 0.$$

Portanto, h é também uma geodésica em M satisfazendo a equação (2.22). Pela unicidade de uma geodésica satisfazendo (2.22) (teorema 27), vem que $g_{\lambda v}(t) = g_v(\lambda t)$.

c.q.d.

TEOREMA 38

Seja P um ponto de uma superfície M . Existe $\delta > 0$ tal que \exp_p é definida e diferenciável no interior do círculo $V_\delta \subset T_p(M)$ de centro na origem de $T_p(M)$ e raio δ .

DEMONSTRAÇÃO : Seja $v \in T_p(M)$ um vetor qualquer e g_v a geodésica de M satisfazendo $g_v(0) = P$ e $g_v'(0) = v$.

Observamos que se $v \in \text{domínio } \exp_p$ e $t \in [-1, 1]$, então tv ainda pertence ao domínio \exp_p . É sempre possível tomar $v \in T_p(M)$ de modo que $1 \in \text{domínio } g_v$. Assim, $\exp_p(v) = g_v(1)$ está definida em cada direção v .

Vamos enunciar o teorema 27 na seguinte forma: Dado $P \in M$, existem números reais positivos δ_1 e δ_2 e uma aplicação diferenciável

$$g_v: (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow M$$

tal que para cada v fixado em $V_{\delta_1} = \{v \in T_P(M) \mid |v| < \delta_1\}$, g_v é a única geodésica de M satisfazendo

$$g_v(0) = P \text{ e } g'_v(0) = v.$$

Pelo lema 37, como g_v está definida em $(-\delta_2, \delta_2)$, $g_{\frac{\delta_2 v}{2}}$

está definida em $(-2, 2)$ para cada $v \in V_{\delta_1}$.

Consideremos o círculo $V_\delta \subset T_P(M)$ de centro na origem de $T_P(M)$ e raio $\delta < \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$. Então,

$\forall v \in V_\delta$, $\exp_P(v) = g_v(1)$ e, portanto, \exp_P está definida.

Além disso, \exp_P é diferenciável em V_δ porque g_v é diferenciável em V_δ .

c.q.d.

TEOREMA 39

A aplicação exponencial é um difeomorfismo local.

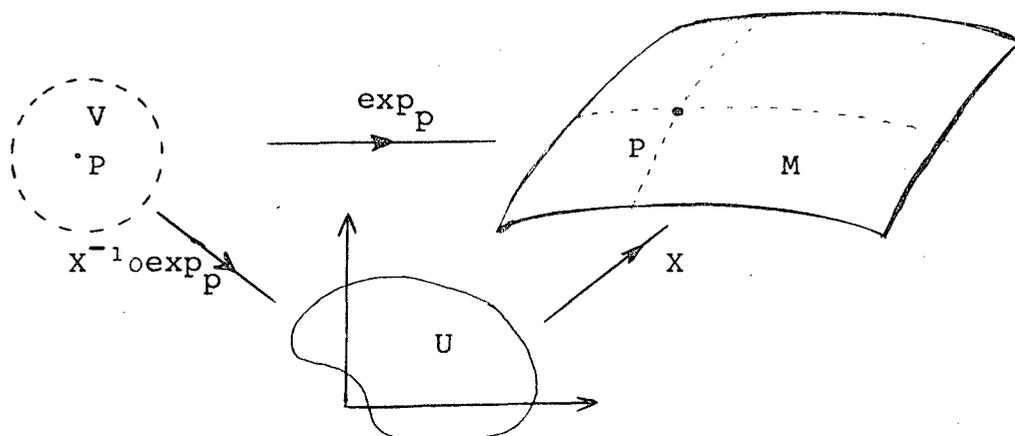
DEMONSTRAÇÃO : Seja P um ponto dado de uma superfície M . Seja \exp_P a aplicação exponencial. Seja $V \subset T_P(M)$ um círculo aberto contendo P . Então, pelo teorema 38,

$$\exp_P: V \rightarrow M$$

está definida e é diferenciável.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto tal que $X: U \rightarrow M$ seja um sistema de coordenadas geodésicas contendo P (figura 11).

A aplicação $X^{-1} \circ \exp_P: V \rightarrow U$ é a aplicação identidade.



(FIGURA 11)

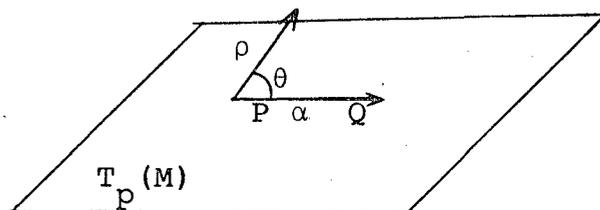
Como a aplicação identidade é um difeomorfismo local e X é um homeomorfismo segue que \exp_p é um difeomorfismo local.

c.q.d.

2.7. COORDENADAS GEODÉSICAS POLARES

Vamos, agora, empregar a aplicação exponencial para introduzir um sistema de coordenadas em M análogo ao sistema de coordenadas polares no plano. Este sistema se chamará sistema de coordenadas geodésicas polares.

Sejam M uma superfície, $P \in M$, $T_p(M)$ o espaço tangente à M em P , (ρ, θ) um sistema de coordenadas polares em $U \subset T_p(M)$ com origem na origem de $T_p(M)$, raio polar ρ e ângulo polar θ ($\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi$) (figura 12).



(FIGURA 12)

Para $\theta = 0$ temos a semi-reta α de origem em P e na direção de Q a qual não está definida no sistema de coordenadas polares. Definamos $\exp_p(\alpha) = \gamma$. Assim, temos a aplicação

$$\exp_p: U - \{\alpha\} \rightarrow V - \{\gamma\}.$$

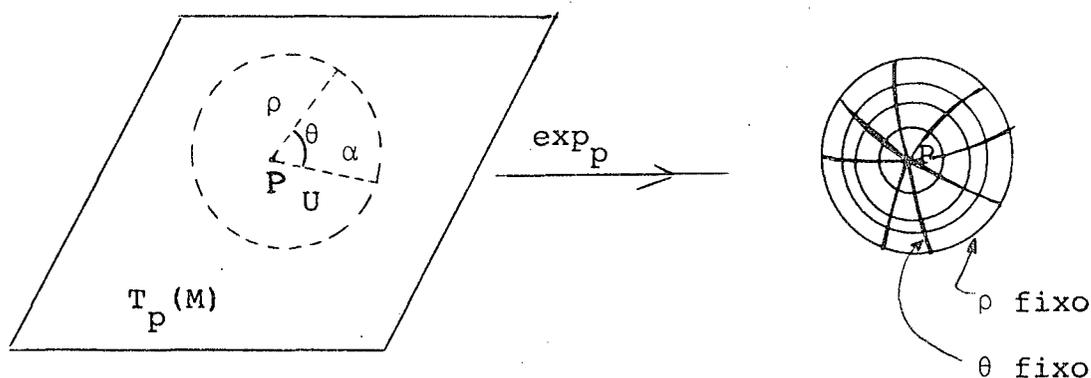
Como $U - \{\alpha\}$ continua sendo um aberto em $T_p(M)$, segue do teorema 39 que a aplicação exponencial é um difeomorfismo de $U - \{\alpha\}$ sobre $V - \{\gamma\}$. Podemos obter um sistema de coordenadas de $V - \{\gamma\}$ da forma (ρ, θ) , através da aplicação exponencial. Um tal sistema é chamado sistema de coordenadas geodésicas polares (figura 13).

Observamos que para um θ fixo em $T_p(M)$ temos um raio polar; isto é, temos um vetor $v \in T_p(M)$. Então, $\exp_p(v) = g_v(1)$ é tal que $\exp_p(0) = g_0(1) = P$. Isto significa que os raios polares de $T_p(M)$ são transformados por exponencial em geodésicas de M partindo de P . Tais geodésicas são denominadas raios geodésicos. Assim, ao longo de um raio geodésico temos ρ medindo o comprimento de arco do raio geodésico a partir de P . Disto vem que, num sistema de coordenadas geodésicas polares temos os seguintes coeficientes fundamentais:

$$(2.25) \quad E = 1, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = G(\rho, \theta).$$

Os círculos correspondentes a cada ρ fixo no sistema de coordenadas geodésicas polares são chamados círculos geodésicos.

As vezes usaremos s em lugar de ρ , quando julgarmos adequado.



(FIGURA 13)

2.8. COMPORTAMENTO GLOBAL DE GEODÉSICAS

Neste parágrafo, (M,d) denotará um espaço métrico na métrica d definida no §2.1. Como vimos naquele parágrafo um arco em M é a imagem de uma aplicação diferenciável de um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Vamos verificar algumas propriedades globais das geodésicas tratadas como arcos de comprimento mínimo.

Um arco $f:[a,b] \rightarrow M$ é chamado um segmento se

$$d(f(t_1), f(t_2)) + d(f(t_2), f(t_3)) = d(f(t_1), f(t_3)),$$

quaisquer que sejam os pontos t_1, t_2, t_3 entre a e b .

A restrição de um arco a um subintervalo fechado do seu domínio recebe o nome de subarco.

Um raio em (M,d) é uma função contínua $g:[a,b] \rightarrow M$ tal que $\{g(t) : t \in [a,b]\}$

é um subconjunto fechado em (M,d) , e cada subarco g é um segmento.

Sejam f_1 e f_2 arcos em (M,d) definidos por

$$f_1:[a_1, b_1] \rightarrow M$$

e $f_2:[a_2, b_2] \rightarrow M$

e tais que $f_1(b_1) = f_2(a_2)$. Definimos o arco $f = f_1 \cup f_2$ como sendo

$$f:[a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow M$$

tal que

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & , t \in [a_1, b_1] \\ f_2(t - b_1 + a_2) & , t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

TEOREMA 40

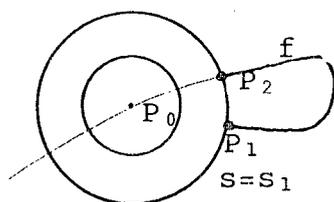
Seja $P_0 \in M$, X_{P_0} um sistema de coordenadas geodésicas polares de centro P_0 com coordenadas (s, θ) e $P_1 = (s_1, \theta_1)$. O comprimento de qualquer curva f de P_0 à P_1 é maior ou igual a s_1 e a igualdade é atingida somente nos raios geodésicos de P_0 à P_1 .

DEMONSTRAÇÃO : Qualquer curva f com origem em P_0 e passando por P_1 deve cortar o círculo geodésico $s = s_1$. Façamos encontrar $s = s_1$, pela primeira vez em P_2 . Suponhamos $P_2 = (s_1, \theta_2)$ (figura 14). A parte de f de P_0 a P_2 pode ser parametrizada por

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \theta = \theta(t), \end{cases}$$

onde $s(t_1) = s_1$ e $\theta(t_1) = \theta_2$. A distância de P_0 a P_2 ao longo de f é dada por

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{s'^2 + G(s, \theta) \theta'^2} dt \geq \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{s'^2} dt = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} |s'| dt = s_1.$$



(FIGURA 14)

Observamos que a igualdade acima vale somente quando $\theta' = 0$. Disto segue que θ é constante. Portanto, f é geodésica.

c.q.d.

TEOREMA 41

Se f é um arco de comprimento mínimo, então f é uma geodésica. Em particular, f é diferenciável em todo ponto. Além disso se P_1, P_2, P_3 são pontos de f tais que P_2 esteja entre P_1 e P_3 , então $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$. Inversamente, se f é qualquer arco satisfazendo a condição acima para quaisquer três de seus pontos, então f é uma geodésica e, se P_1 e P_2 são pontos de f , temos $d(P_1, P_2) = (P_1, P_2)_f$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja f um arco de comprimento mínimo entre P_1 e P_2 , isto é, $d(P_1, P_2) = (P_1, P_2)_f$. Como f é um arco, f é

diferenciável por partes. Seja f' um subarco diferenciável de f . Assumamos que f' não seja uma geodésica. Assim sendo, f' não satisfaz as equações (2.10). Existe, então um ponto P_0 de f' e uma vizinhança V de P_0 em f' de modo que f' não satisfaz o referido sistema em qualquer ponto de V . A existência de V está garantida pelo fato que sendo f' um arco é uma função contínua e se esta função não zera em P_0 , não irá zera em uma vizinhança de P_0 ; isto é, V . Deste modo, f tem um subarco diferenciável f' , que não é uma geodésica, ou melhor, nenhum de seus pontos satisfaz (2.10).

Seja P_0 um ponto do interior de f' e $R_1 \in f'$ tal que R_1 esteja numa vizinhança de coordenadas geodésicas polares centrada em P_0 . Assumamos que R_1 esteja em f entre P_0 e P_2 . Usando o teorema 40, temos que o comprimento de uma geodésica de P_0 a R_1 denotada por G , deve satisfazer

$$(P_0, R_1)_G < (P_0, R_1)_{f'} = (P_0, R_1)_f.$$

Então, existe um arco $g = f_1 \cup G \cup f_2$ de P_1 a P_2 satisfazendo

$$(P_1, P_2)_g < (P_1, P_2)_f,$$

onde f_1 é um o subarco de f de P_1 a P_0 , G é o segmento geodésico de P_0 a R_1 , acima caracterizado e f_2 é o subarco de f de R_1 a P_2 . A existência de g contradiz o fato que f é um arco de comprimento mínimo. Portanto, todo subarco de f é uma geodésica. Resta-nos provar que o arco todo, f , é também uma geodésica.

O teorema 40 nos permite concluir que, se dois pontos são unidos por um arco f que é composto por subarcos cada um dos quais é uma geodésica e f não, então existe um arco entre estes dois pontos cujo comprimento é menor do que o comprimento de f . Mas sendo f um arco de comprimento mínimo vem que f é uma geodésica.

Vamos agora à segunda parte da demonstração. Uma geodésica é uma curva diferenciável em todos os pontos. Assim, f é diferenciável em todos os pontos.

Sejam R_1, R_2 e R_3 com R_2 entre R_1 e R_3 , pontos de f . Então,

$$(P_1, R_1)_f + (R_1, R_2)_f + (R_2, R_3)_f + (R_3, P_2)_f = d(P_1, P_2).$$

Mas, de $d(P_1, R_1) = \inf\{(P_1, R_1)_f\}$ vem que $d(P_1, R_1) \leq (P_1, R_1)_f$ e como f é uma geodésica, temos

$$d(P_1, R_1) = (P_1, R_1)_f.$$

De modo análogo, obtemos:

$$d(R_1, R_2) = (R_1, R_2)_f,$$

$$d(R_2, R_3) = (R_2, R_3)_f \text{ e}$$

$$d(R_3, P_2) = (R_3, P_2)_f.$$

Assim, obtemos

$$d(R_1, R_2) + d(R_2, R_3) = (R_1, R_2)_f + (R_2, R_3)_f = (R_1, R_3)_f = d(R_1, R_3).$$

Portanto,

$$d(R_1, R_2) + d(R_2, R_3) = d(R_1, R_3).$$

Vamos por último à recíproca do teorema. Seja f um arco satisfazendo

$$(2.26) \quad d(R_1, R_2) + d(R_2, R_3) = d(R_1, R_3).$$

Seja $R_2 \in f$ e U uma vizinhança de um sistema de coordenadas geodésicas polares com centro em R_2 . Suponhamos R_2 entre R_1 e R_3 podendo ser um deles e R_1 e R_3 em U . Os arcos de comprimento mínimo entre R_1 e R_2 ou R_2 e R_3 são geodésicas de R_1 à R_2 ou R_2 à R_3 denotados por g_1 e g_2 , respectivamente. Deste modo, f deve conter g_1 e g_2 como subarcos. Suponhamos que g_1 e g_2 não sejam tangentes em R_2 . Existe uma curva diferenciável g de R_1 à R_3 tal que o comprimento de R_1 à R_3 é menor do que a soma dos comprimentos g_1 e g_2 . Mas isto contradiz (2.26), de modo que f é uma geodésica.

Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer de f . Como f é uma geodésica, todo ponto de f tem uma vizinhança na qual a distância

entre pontos de f é dada pelo comprimento dos arcos de f que os unem. Sendo f compacta, existe um número finito de pontos em f $R_1 = P_1, R_2, \dots, R_n = P_2$, tais que $d(R_i, R_{i+1}) = (R_i, R_{i+1})_f$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Assim,

$$d(P_1, P_2) = d(R_1, R_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(R_i, R_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (R_i, R_{i+1})_f = (P_1, P_2)_f,$$

com o que completamos a demonstração do teorema.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 42

Sejam P_1, \dots, P_n pontos em (M, d) satisfazendo

$$(2.27) \quad d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n) = d(P_1, P_n).$$

Então, para qualquer conjunto de inteiros i_1, \dots, i_k com

$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, temos

$$(2.28) \quad d(P_{i_1}, P_{i_2}) + \dots + d(P_{i_{k-1}}, P_{i_k}) = d(P_{i_1}, P_{i_k}).$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que (2.28) seja falsa para um conjunto de inteiros i_1, \dots, i_k , com $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$. Pela desigualdade triangular temos

$$d(P_{i_1}, P_{i_2}) + \dots + d(P_{i_{k-1}}, P_{i_k}) \geq d(P_{i_1}, P_{i_k}).$$

Ainda pela desigualdade triangular,

$$d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n) > d(P_1, P_{i_1}) + \dots + d(P_{i_k}, P_n) > d(P_1, P_n).$$

Então,

$$d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n) > d(P_1, P_n).$$

Contradição com (2.27). Portanto, (2.28) é verdadeira.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 43

Sejam $P_k P_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ segmentos de P_k a P_{k+1} em (M, d) . Se

$$(2.29) \quad d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n) = d(P_1, P_n),$$

então

$$g = \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k P_{k+1}$$

é um segmento.

DEMONSTRAÇÃO : Façamos a demonstração por indução sobre o número de segmentos.

Se há somente um segmento, então nada temos a provar.

Suponhamos que a proposição vale para $n-1$ segmentos. De vemos provar que ela vale para n segmentos. Nossa demonstração se reduz a demonstrar que a união de dois segmentos ainda é um segmento.

Sejam P_1, P_2, P_3 pontos de M , $P_1 P_2$ e $P_2 P_3$ segmentos, logo arcos. Então, $P_1 P_2 \cup P_2 P_3$ é também um arco. Vamos provar que este arco é também um segmento; isto é, para quaisquer tres pontos $X, Y, Z \in P_1 P_2 \cup P_2 P_3$ devemos ter

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z),$$

onde Y está entre X e Z . Temos a considerar duas hipóteses.

(i) Os tres pontos estão num mesmo segmento ($P_1 P_2$ ou $P_2 P_3$). Suponhamos que $X, Y, Z \in P_1 P_2$. Como $P_1 P_2$ é um segmento. temos

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z).$$

(ii) Dois pontos estão em um dos segmentos e o terceiro está no outro. Suponhamos que $X, Y \in P_1 P_2$ e $Z \in P_2 P_3$. Como $P_1 P_2$ e $P_2 P_3$ são segmentos temos

$$(2.30) \quad \begin{cases} d(P_2, Z) + d(Z, P_3) = d(P_2, P_3), \\ d(P_1, X) + d(X, Y) + d(Y, P_2) = d(P_1, P_2). \end{cases}$$

Por hipótese. $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$. Substituindo nesta equação as equações (2.30) encontramos

$$d(P_1, X) + d(X, Y) + d(Y, P_2) + d(P_2, Z) + d(Z, P_3) = d(P_1, P_3).$$

Pela proposição 42 vem que

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z).$$

Portanto, a união de dois segmentos é um segmento, com o que completamos a demonstração.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 44

Seja $g: [0, 1) \rightarrow M$ uma função contínua em (M, d) tal que todo subarco de g é um segmento. Então a imagem de g é fechada em (M, d) e g é um raio, ou $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = P_0$. Se a segunda condição é satisfeita

e definimos $f: [0, 1] \rightarrow M$ por

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & , t \in [0, 1) \\ P_0 & , t = 1 \end{cases}$$

então f é um segmento.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que a imagem de g não é fechada. Devemos provar que g tem um ponto de acumulação e que este ponto não está em $\text{Im}(g)$. Admitamos que P seja um ponto de acumulação de g e que $P \notin \text{Im}(g)$. Existe uma sequência de números $0 \leq t_i < 1$, $i = 1, 2, \dots$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 1$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_i) = P$.

Seja (t_i') outra sequência de números tais que $0 \leq t_i' < 1$, $i = 1, 2, \dots$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i' = 1$. Devemos provar que $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_i') = P$. Para tal vamos definir duas funções f e h , a valores inteiros com as seguintes propriedades:

$$f.1) t_{f(i)} < t_j < t_{i'} ,$$

f.2) não existe índice j com a propriedade que

$$t_{f(i)} < t_j < t_{i'} ,$$

$$h.1) t_{i'} < t_{h(i)} ,$$

h.2) não existe índice j com a propriedade que

$$t_{i'} < t_j < t_{h(i)} .$$

Observamos que

(i) $t_{i'} \rightarrow 1$ e $t_{i'} < t_{h(i)} \in [0, 1)$. Logo, $t_{h(i)} \rightarrow 1$ e daí segue que

$$g(t_{h(i)}) \rightarrow P.$$

(ii) não existe j tal que $t_{f(i)} < t_j < t_{i'}$. Como $t_{i'} \rightarrow 1$ segue que

$$t_{f(i)} \rightarrow 1. \text{ Logo, } g(t_{f(i)}) \rightarrow P.$$

Portanto,

$$(2.31) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} g(t_{f(i)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(t_{h(i)}) = P.$$

Como $g(t)$ é um segmento para $t_{f(i)} \leq t \leq t_{h(i)}$, temos

$$d(g(t_{f(i)}), g(t_{h(i)})) + d(g(t_{i'}), g(t_{h(i)})) = d(g(t_{f(i)}), g(t_{i'}))$$

qualquer que seja i . De (2.31) segue que

$$d(g(t_{f(i)}), g(t_{h(i)})) \rightarrow 0, \text{ quando } i \rightarrow \infty. \text{ Portanto,}$$

$$d(g(t_{i'}), g(t_{h(i)})) \rightarrow 0 \text{ e } d(g(t_{f(i)}), g(t_{i'})) \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty.$$

Da última expressão vem que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(g(t_{f(i)}), g(t_{i'})) = 0$$

e desta segue que $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_{f(i)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(t_{i'})$. Por (2.31) vem que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_{i'}) = P \text{ como desejávamos. Portanto, o limite}$$

é único. Definamos $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t) = P_0$.

Vamos à segunda parte da demonstração da proposição. Para isto definamos o arco $g \cup P_0$. Devemos verificar que este arco é também um segmento, ou seja, quaisquer que sejam os pontos X, Y, Z de $g \cup P_0$, estando Y entre X e Z , vale a relação:

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z).$$

Por hipótese, cada subarco de g é um segmento, então

$$(2.32) \quad d(X, Y) + d(Y, g(t_i)) = d(X, g(t_i)).$$

Suponhamos que $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_i) = P_0$, então levando ao limite

a igualdade (2.32) quando $i \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(X, Y) + \lim_{i \rightarrow \infty} d(Y, g(t_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(X, g(t_i)).$$

Devemos considerar as duas situações seguintes :

(i) $Y \neq P_0 \neq Z$. Nada a demonstrar pois, por hipótese, cada subarco de g é um segmento.

(ii) $Y \neq P_0 = Z$. De (2.32) vem que $d(X, Y) + d(Y, P_0) = d(X, P_0)$, ou $d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z)$.

A curva f é às vezes denotada por $f = g \cup P_0$.

c.q.d.

CAPÍTULO III

SUPERFÍCIES DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE

3.1. SUPERFÍCIES DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE

Estudaremos neste capítulo as superfícies de curvatura gaussiana constante e obteremos uma expressão para esta curvatura num sistema de coordenadas geodésicas. Caracterizaremos superfícies que apresentem curvatura gaussiana constante negativa, nula e positiva. Nos preocuparemos sobretudo em estabelecer uma isometria local entre cada uma destas superfícies com outras que possuam a mesma propriedade. Aproveitaremos também para caracterizar Geometrias Não Euclidianas em termos da curvatura gaussiana. Em todo o capítulo a palavra curvatura significará curvatura gaussiana.

Da proposição 5 temos que

$$(3.1) \quad K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

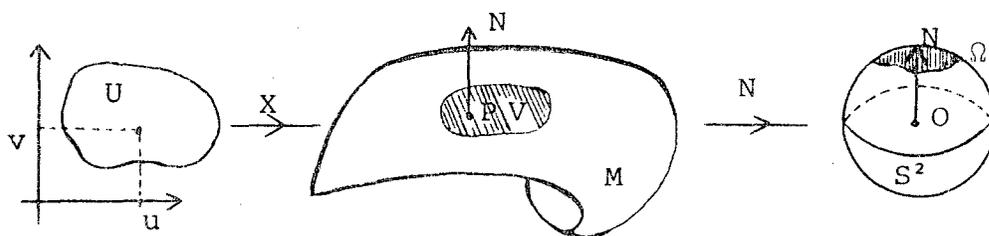
para um sistema de coordenadas locais $X(u,v)$ ao redor de um ponto P_0 de uma superfície M com coeficientes fundamentais E, F, G, e, f, g , relativamente a este sistema.

Se K tiver o mesmo valor K_0 em todos os pontos de M , diremos que M tem curvatura constante.

É de se notar que a curvatura K desempenha um importante papel em Geometria Diferencial. O sinal de K fixa de uma maneira qualitativa a forma de uma superfície ao redor de um ponto (§1.6).

Vamos mostrar que a curvatura K pode ser definida usando a imagem esférica do vetor normal N à superfície. Os vetores unitários $N(u,v)$ de uma vizinhança coordenada V de um ponto P de

uma superfície M são transladados para a origem da esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. A aplicação $N: M \rightarrow S^2$ que faz isto chama-se aplicação normal de Gauss. O lugar geométrico descrito pelas extremidades do vetor N transladado é um conjunto Ω em S^2 chamado imagem esférica de V (figura 15).



(FIGURA 15)

Sendo $N_u(u,v)$, $N_v(u,v)$ as derivadas em relação à u e à v , respectivamente, do vetor $N(u,v)$, vem de (1.15) que

$$N_u \times N_v = \left(\frac{Ff - Ge}{EG - F^2} X_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} X_v \right) \times \left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2} X_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} X_v \right).$$

Portanto,

$$N_u \times N_v = \frac{F^2 f^2 - EFfg - FGef + EGeg - F^2 eg + FGef + EFfg - EGf^2}{(EG - F^2)^2} (X_u \times X_v);$$

ou seja,

$$N_u \times N_v = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} X_u \times X_v.$$

Substituindo (3.1) vem que

$$(3.2) \quad N_u \times N_v = K (X_u \times X_v).$$

PROPOSIÇÃO 45

Seja $X(u,v)$ um sistema de coordenadas locais da superfície M com coeficientes fundamentais $E=E(u,v)$, $F=0$, $G=G(u,v)$. Então, a curvatura K satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$(3.3) \quad K = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right].$$

DEMONSTRAÇÃO : Vamos por comodismo omitir as variáveis. Lembremos que no sistema de coordenadas locais $X(u,v)$ da superfície M temos

$$e = \frac{[X_{uu}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad f = \frac{[X_{uv}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad g = \frac{[X_{vv}, X_u, X_v]}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_u, \quad \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v,$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u, \quad \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u, \quad \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v \quad e$$

$$\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

No sistema de coordenadas dado, temos $F=0$; logo

$$(3.4) \quad F_u = F_v = 0.$$

Disto segue que

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_u, \quad \langle X_{uu}, X_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v, \quad \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v,$$

$$(3.5) \quad \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u, \quad \langle X_{vv}, X_u \rangle = -\frac{1}{2}G_u, \quad \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v \quad e$$

$$\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle = -\frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Da equação (3.1) vem que

$$(3.6) \quad K = \frac{[X_{uu}, X_u, X_v][X_{vv}, X_u, X_v] - [X_{uv}, X_u, X_v]^2}{(EG-F^2)^2}.$$

Observamos que sendo $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, $d = (d_1, d_2, d_3)$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ e $f = (f_1, f_2, f_3)$, então

$$\begin{aligned} [a, b, c][d, e, f] &= \det \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} ad & bd & cd \\ ae & be & ce \\ af & bf & cf \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando esta identidade, a equação (3.6) se transforma em

$$K(EG-F^2)^2 = \det \begin{bmatrix} \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle & \langle X_u, X_{vv} \rangle & \langle X_v, X_{vv} \rangle \\ \langle X_{uu}, X_u \rangle & \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_v, X_u \rangle \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle & \langle X_u, X_v \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{bmatrix} - \\ - \det \begin{bmatrix} \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle & \langle X_u, X_{uv} \rangle & \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle & \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_v, X_u \rangle \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle & \langle X_u, X_v \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{bmatrix} .$$

Fazendo um abaixamento de ordem encontramos

$$k(EG-F^2)^2 = \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \langle X_{uu}, X_u \rangle \begin{vmatrix} \langle X_u, X_{vv} \rangle & \langle X_v, X_{vv} \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{vmatrix} + \\ + \langle X_{uu}, X_v \rangle \begin{vmatrix} \langle X_u, X_{vv} \rangle & \langle X_v, X_{vv} \rangle \\ \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_v, X_u \rangle \end{vmatrix} - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \\ + \langle X_{uv}, X_u \rangle \begin{vmatrix} \langle X_u, X_{uv} \rangle & \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{vmatrix} - \langle X_{uv}, X_v \rangle \begin{vmatrix} \langle X_u, X_{uv} \rangle & \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_v, X_u \rangle \end{vmatrix} .$$

Substituindo $F = 0$ e os valores (3.5) temos

$$K(EG)^2 = EG \left(-\frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} \right) - \frac{1}{2} E_u \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \\ 0 & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} E_v \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \\ E & 0 \end{vmatrix} + \\ + \frac{1}{2} E_v \begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ 0 & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} G_u \begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ E & 0 \end{vmatrix} .$$

Segue que

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] .$$

c.q.d.

COROLÁRIO 46

Num sistema de coordenadas geodésicas com $E=1$, $F=0$, $G=G(u,v)$ tem-se

$$(3.7) \quad K = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} .$$

DEMONSTRAÇÃO : Basta substituir em (3.3) , $E=1$. Assim $\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} = 0$.

c.q.d.

3.2. SUPERFÍCIES ESPECIAIS DE CURVATURA CONSTANTEPROPOSIÇÃO 47

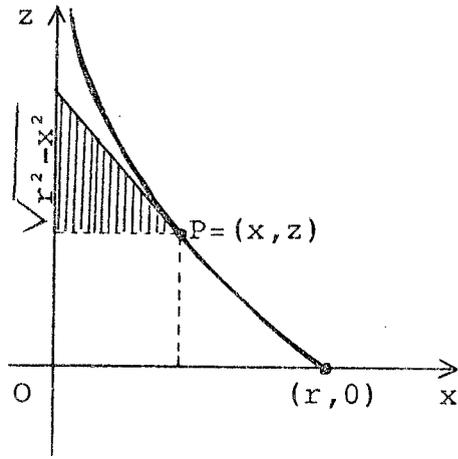
Seja $k < 0$. Existe uma superfície de rotação com curvatura constante $K = k$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja f uma curva do plano XOZ que começa no ponto $x=r = \sqrt{-\frac{1}{k}} > 0$, $z=0$ e tem a propriedade que o segmento da linha tangente compreendido entre o ponto de tangencia P e o eixo OZ tem comprimento constante r . Esta curva é chamada tractriz (figura 16).

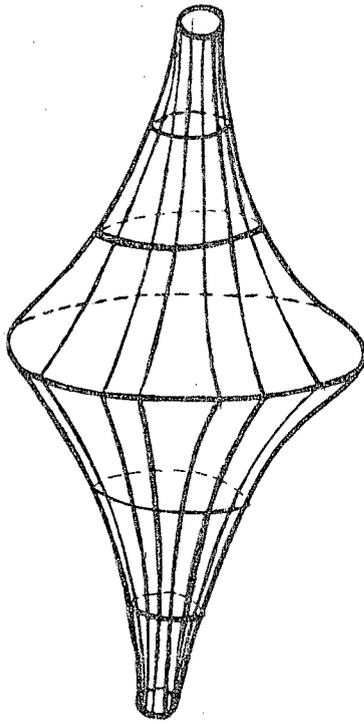
Uma parametrização de f é dada por

$$\begin{cases} x = h(u) = re^{\frac{u}{r}} \\ z = k(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{\frac{2t}{r}}} dt \end{cases} , \quad 0 < x < r .$$

Podemos obter uma superfície M fazendo a tractriz f girar ao redor do eixo OZ (figura 17).



(FIGURA 16)



(FIGURA 17)

Pela proposição 25, uma parametrização em M é dada por

$$X(u,v) = (h(u)\cos v, h(u)\sen v, k(u)),$$

para $0 < h(u) < r$ e $-\infty < v < \infty$. Esta superfície pode ser coberta globalmente considerando-se duas restrições adequadas para a parametrização acima. Assim,

$$X_u(u,v) = (h'(u)\cos v, h'(u)\sen v, k'(u)) =$$

$$= \left(e^{\frac{u}{r}} \cos v, e^{\frac{u}{r}} \sen v, \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}} \right).$$

$$X_v(u,v) = (-h(u)\sen v, h(u)\cos v, 0) =$$

$$= \left(-re^{\frac{u}{r}} \sen v, re^{\frac{u}{r}} \cos v, 0 \right).$$

$$X_{uu}(u,v) = \left(\frac{1}{r} e^{\frac{u}{r}} \cos v, \frac{1}{r} e^{\frac{u}{r}} \sen v, -\frac{e^{\frac{u}{r}}}{r \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}}} \right).$$

$$X_{uv}(u,v) = \left(-e^{\frac{u}{r}} \sen v, e^{\frac{u}{r}} \cos v, 0 \right).$$

$$X_{vv}(u,v) = \left(-re^{\frac{u}{r}} \cos v, -re^{\frac{u}{r}} \sen v, 0 \right).$$

$$X_u \times X_v = \left(-re^{\frac{u}{r}} \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}} \cos v, -re^{\frac{u}{r}} \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}} \sen v, re^{\frac{2u}{r}} \right).$$

$$|X_u \times X_v| = re^{\frac{u}{r}}.$$

$$N(u,v) = \left(-\sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}} \cos v, -\sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}} \sen v, e^{\frac{u}{r}} \right).$$

$$e = -\frac{e^{\frac{u}{r}}}{r \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}}}, \quad f = 0, \quad g = re^{\frac{u}{r}} \sqrt{1 - e^{\frac{2u}{r}}}, \quad eg - f^2 = -e^{\frac{2u}{r}}.$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = r^2 e^{\frac{2u}{r}}, \quad EG - F^2 = r^2 e^{\frac{2u}{r}}.$$

Substituindo E, F, G, e, f, g em (3.1) obtemos

$$K = -\frac{1}{r^2} = k.$$

c.q.d.

OBSERVAÇÕES

(i) A superfície M obtida com curvatura K constante negativa é chamada pseudo-esfera de pseudo-raio r .

(ii) De $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ vem que a métrica é

$$(3.8) \quad I = du^2 + r^2 e^{\frac{2u}{r}} dv^2.$$

Uma segunda parametrização, mais conveniente para nós, da pseudo-esfera, nos fornece $I = du^2 + r^2 \cosh^2\left(\frac{u}{r}\right) dv^2$.

PROPOSIÇÃO 48

A curvatura K de um plano é identicamente nula.

DEMONSTRAÇÃO : No §1.7 vimos que toda direção de um plano é uma direção assintótica deste plano. Assim, a curvatura normal segundo qualquer direção deste plano é nula; isto é, as curvaturas principais em cada ponto são nulas. Portanto, o valor de K é constantemente igual a zero no plano.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 49

A curvatura K de um cilindro é identicamente nula.

DEMONSTRAÇÃO : Como o cilindro é uma superfície de revolução gerada por uma reta que se desloca paralelamente a si mesma, vem que seus meridianos são retas. Seja $f: I \rightarrow M$ um tal meridiano. Ao longo de f , o vetor normal N do cilindro é constante. Desta forma a derivada deste vetor, dN , é nula. Pela proposição 12 vem que $\lambda(t)f'(t) = 0$. Como f não é constante em I , vem que $\lambda(t) = 0, \forall t \in I$.

Mas $\lambda(t) = k_{\underline{n}}(f'(t)) = 0$ é uma curvatura principal do cilindro em $f(t)$. Portanto, $K = 0$ em $f(t)$. Mas, por cada ponto do cilindro passa um meridiano, logo $K = 0$ no cilindro todo.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 50

A curvatura K da esfera é constante, positiva e igual ao inverso do quadrado do seu raio.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $X(u,v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sen u)$ com $r > 0$ um sistema de coordenadas locais da esfera S^2 não incluindo os polos norte e sul. Neste sistema temos

$$X_u(u,v) = (-r \sen u \cos v, -r \sen u \sin v, r \cos u).$$

$$X_v(u,v) = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0).$$

$$X_{uu}(u,v) = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sen u).$$

$$X_{uv}(u,v) = (r \sen u \sin v, -r \sen u \cos v, 0).$$

$$X_{vv}(u,v) = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, 0).$$

$$X_u \times X_v = -(r^2 \cos^2 u \cos v, r^2 \cos^2 u \sin v, r^2 \sen u \cos u).$$

$$|X_u \times X_v| = r^2 \cos u.$$

$$N(u,v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sen u).$$

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \cos^2 u, \quad EG - F^2 = r^4 \cos^2 u.$$

$$e = r^2, \quad f = 0, \quad g = r \cos^2 u, \quad eg - f^2 = r^2 \cos^2 u.$$

Substituindo E, F, G, e, f, g em (3.1) obtemos

$$K = \frac{1}{r^2}.$$

Com isto, a esfera S^2 tem curvatura K constante positiva em todos os pontos com exceção dos polos norte e sul. Como a função curvatura é contínua, conclui-se que K tem curvatura constante positiva em todos os pontos.

c.q.d.

OBSERVAÇÃO

A métrica de S^2 no sistema de coordenadas acima é

$$(3.9) \quad I = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{r}\right)dv^2.$$

3.3. GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Neste parágrafo vamos estabelecer uma isometria local entre superfícies sob a condição de terem curvatura K constante e caracterizar modelos de Geometria Plana, Elíptica e Hiperbólica pela curvatura K .

TEOREMA 51 (MINDING)

Uma superfície M é localmente isométrica a uma superfície M^* de curvatura constante K_0 se e somente se M também tem curvatura constante K_0 .

DEMONSTRAÇÃO : Sejam M e M^* duas superfícies, $P \in M$, $P^* \in M^*$, V_p uma vizinhança de P em M e V_p^* uma vizinhança de P^* em M^* . Sejam $\psi: V_p \rightarrow V_p^*$ uma isometria, X um sistema de coordenadas locais em V_p e ψX um sistema de coordenadas locais em V_p^* . Sejam E, F, G, e, f, g os coeficientes fundamentais da primeira e segunda formas fundamentais no sistema X e $E^*, F^*, G^*, e^*, f^*, g^*$ os coeficientes fundamentais da primeira e segunda formas fundamentais no sistema ψX . Assim, $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$, $e = e^*$, $f = f^*$, $g = g^*$. Logo,

$$K_0 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{e^*g^* - f^{*2}}{E^*G^* - F^{*2}} = K_0^*.$$

Suponhamos que a superfície M tenha curvatura constante K_0 . Para provar a recíproca do teorema vamos necessitar do seguinte

te resultado:

- (i) Se $K_0 = 0$, então M é localmente isométrica a um plano;
- (ii) Se $K_0 > 0$, então M é localmente isométrica a uma esfera, e
- (iii) Se $K_0 < 0$, então M é localmente isométrica à uma pseudo-esfera.

Consideremos uma geodésica $g: I \rightarrow M$ passando por P . Seja $X(u, v)$ um sistema de coordenadas geodésicas definido em uma vizinhança V_P de P em que a família de geodésicas seja formada pelas linhas com v constante ($v' = 0$) e sejam ortogonais a g em V_P . Neste sistema a linha $u=0$ nada mais é do que a curva g . De (2.15) vem que a métrica de M em V_P é

$$(3.10) \quad I = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

As linhas $u=\text{constante}$ neste sistema de coordenadas serão geodésicas se e somente se

$$(3.11) \quad G_u = 0.$$

De fato, de $u=\text{constante}$ vem que $u' = u'' = 0$ e sendo $v = s$ o comprimento de arco vem que $v' = 1$. Como $F = 0$ num sistema de coordenadas geodésicas, temos $F_v = 0$. A equação (2.7) se transforma em

$$(k_g)_{u=\text{constante}} = -\Gamma_{22}^1 \sqrt{G}.$$

De (1.13) temos

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}.$$

Substituindo $F = F_v = 0$ e $E = 1$, temos $\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2}$.

Portanto,

$$(k_g)_{u=\text{constante}} = \frac{\sqrt{GG_u}}{2}.$$

A linha $u=\text{constante}$ é uma geodésica de M se e somente se $k_g = 0$;

isto é, se e somente se $\sqrt{G} G_u = 0$. Como $G \neq 0$ vem que a linha $u = \text{constante}$ é uma geodésica de M se e somente se $G_u = 0$.

De $v' = 1$ vem que $dv = ds$ ao longo de g . Para $u = 0$ temos $I(0, v) = G(0, v) dv^2 = G(0, s) ds^2 = I(0, s) = 1$. Deste modo,

$$(3.12) \quad G(0, v) = 1.$$

De (3.3) vem que

$$(3.13) \quad K_0 \sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial u^2} \sqrt{G} = 0,$$

que é uma equação diferencial a coeficientes constantes. Dado K_0 , a função $\sqrt{G} = \sqrt{G(u, v)}$ deve ser uma solução de (3.13) satisfazendo (3.11) e (3.12). Pelo teorema de Piccard, esta solução é única.

Resta-nos discutir esta solução em termos do valor dado a K_0 . Temos tres casos a considerar.

$$(i) \quad K_0 = 0.$$

A equação (3.13) se transforma em $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{G} = 0$, cuja solução geral é da forma

$$(3.14) \quad \sqrt{G} = u\alpha(v) + \beta(v),$$

onde α, β são funções arbitrárias satisfazendo às condições iniciais, para $u = 0$, $\sqrt{G(0, v)} = \beta(v) = 1$ por (3.12) e

$$G_u(0, v) = 2\sqrt{G}\alpha(v) = 0 \text{ por (3.11).}$$

Logo, $\alpha(v) = 0$. Substituindo $\alpha(v)$ e $\beta(v)$ em (3.14), obtemos

$$\sqrt{G} = 1.$$

Como a solução de (3.13) é única atendendo às condições iniciais, temos $G = 1$. Substituindo em (3.10) temos

$$I = du^2 + dv^2,$$

que nada mais é do que a métrica de um plano. Portanto, M é localmente isométrica a um plano.

(ii) $K_0 > 0$.

A equação (3.13) tem solução geral da forma

$$(3.15) \quad \sqrt{G} = \alpha(v) \cos(\sqrt{K_0}u) + \beta(v) \operatorname{sen}(\sqrt{K_0}u),$$

onde α, β são funções arbitrárias satisfazendo às condições iniciais, para $u = 0$, $1 = \sqrt{G(0, v)} = \alpha(v)$ por (3.12) e

$$G_u(u, v) = 2\sqrt{G}[-\alpha(v) \operatorname{sen}(\sqrt{K_0}u) + \beta(v) \cos(\sqrt{K_0}u)]\sqrt{K_0}.$$

Logo,

$$G_u(0, v) = 2\sqrt{G}\beta(v)\sqrt{K_0} = 0 \quad \text{por (3.11)}. \text{ Segue que } \beta(v) = 0.$$

Substituindo-se em (3.15) encontramos $\sqrt{G} = \cos(\sqrt{K_0}u)$. Logo,

$$G = \cos^2(\sqrt{K_0}u).$$

Como a solução de (3.13) é única satisfazendo às condições iniciais temos de (3.10)

$$I = du^2 + \cos^2(\sqrt{K_0}u)dv^2.$$

Na proposição 50 vimos que existe um sistema de coordenadas locais Y da esfera $S^2 = M^*$ com métrica

$$I = du^{*2} + \cos^2\left(\frac{u^*}{r}\right)dv^{*2}.$$

Assim, temos E, F, G , no sistema de coordenadas X definido em $V_p \subset M$, iguais, respectivamente, a E^*, F^*, G^* no sistema de coordenadas locais Y definido em $V_p^* \subset M^* = S^2$. Segue que

$$\Psi = X \circ Y^{-1}: V_p^* \rightarrow V_p$$

é uma isometria local entre a superfície M de curvatura constante positiva e a esfera.

(iii) $K < 0$.

A equação (3.13) tem solução geral da forma

$$(3.16) \quad \sqrt{G} = \alpha(v)e^{\sqrt{-K_0}u} + \beta(v)e^{-\sqrt{-K_0}u},$$

onde α e β são funções arbitrários satisfazendo às condições iniciais; para $u=0$, $1 = \sqrt{G(0, v)} = \alpha(v) + \beta(v)$ por (3.12) e

$$G_u(u, v) = 2\sqrt{G}[\alpha(v)\sqrt{-K_0}e^{\sqrt{-K_0}u} - \beta(v)\sqrt{-K_0}e^{-\sqrt{-K_0}u}].$$

Logo, $0 = G_u(0, v) = 2\sqrt{G}\sqrt{-K_0} (\alpha(v) - \beta(v))$ por (3.11). Segue que

$\alpha(v) = \beta(v) = \frac{1}{2}$. Substituindo em (3.16) encontramos

$$\sqrt{G} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-K_0}u} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{-K_0}u} = \cosh(\sqrt{K_0}u).$$

Como a solução de (3.13) é única atendendo às condições iniciais, temos de (3.10)

$$I = du^2 + \cosh^2(\sqrt{-K_0}u)dv^2.$$

Na proposição 47 vimos que existe um sistema de coordenadas locais Y da pseudo-esfera M^* com métrica

$$I = du^{*2} + r^2 \cosh^2\left(\frac{u^*}{r}\right)dv^{*2}.$$

Pelas mesmas razões expostas no item anterior concluímos que existe uma isometria local entre a pseudo-esfera M^* e uma superfície M com curvatura constante negativa.

c.q.d.

OBSERVAÇÕES

1. O caráter local é de importância fundamental para a existência de uma isometria entre as superfícies M e M^* do teorema 51. Há casos de superfícies com a mesma curvatura K constante e que não são isométricas. O exemplo mais trivial é o plano e o cilindro. Nas proposições 48 e 49 vimos que ambos tem curvatura K constante e igual a zero. Estas superfícies não são isométricas pois nem sequer são homeomorfas. (O plano é simplesmente conexo enquanto que o cilindro não.)

2. Lembremos que a direção que se escolhe para que se tenha $u=0$ num sistema de coordenadas geodésicas é totalmente ar-

bitrário. Pelo teorema 51 que acabamos de demonstrar, as vizinhanças de dois pontos distintos de uma superfície com curvatura constante K podem aplicar-se uma sobre a outra isometricamente de modo que uma direção qualquer dada em uma delas faz corresponder outra direção qualquer na outra; isto significa que qualquer figura geométrica localizada em uma superfície de curvatura K constante pode ser transladada ou rotacionada sem que seus comprimentos se alterem. Isto sugere modelos de Geometria, conforme a superfície tenha curvatura K nula, negativa ou positiva. No primeiro caso temos a tradicional Geometria Euclidiana e nos outros dois Geometrias Não Euclidianas. Nestes modelos as geodésicas desempenham o papel que a reta desempenha no plano. A diferença básica entre elas está no conhecido V postulado de Euclides que afirma, na Geometria Euclidiana, existir uma única reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela. Os modelos, conforme K seja negativa ou positiva são chamados Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica. Chama-se Geometria Riemanniana a uma Geometria que seja Euclidiana ou Elíptica.

Do teorema 51 segue que a Geometria Elíptica ($K > 0$) é desenvolvida sobre a esfera ou sobre uma superfície localmente isométrica a ela. No §2.3 mostramos que toda geodésica da esfera é uma circunferência máxima (exemplo 4). Assim, duas geodésicas sempre terão pelo menos um ponto comum. Neste modelo, dada uma geodésica e um ponto fora dela, não existem geodésicas passando por este ponto que não encontrem a geodésica dada.

Ainda pelo mesmo teorema, a Geometria Hiperbólica ($K < 0$) é desenvolvida sobre a pseudo-esfera ou sobre uma superfície localmente isométrica a ela. No apêndice daremos um modelo de Geometria Hiperbólica, mostrando que, neste modelo, dada uma geodésica e um ponto fora dela, passa por este ponto uma infinidade de geodésicas que não a encontram.

3.4. SUPERFÍCIES COMPACTAS

Como uma superfície em \mathbb{R}^3 é um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^3 , em particular, diremos que uma superfície M em \mathbb{R}^3 é compacta se ela for fechada e limitada como um subconjunto de \mathbb{R}^3 .

A esfera é um exemplo de uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 . O plano e a pseudo-esfera não são superfícies compactas em \mathbb{R}^3 . O plano não é limitado em \mathbb{R}^3 e a pseudo-esfera não é nem fechada e nem limitada em \mathbb{R}^3 .

LEMA 52

As únicas superfícies compactas em \mathbb{R}^3 para as quais todo ponto é umbílico são as esferas.

DEMONSTRAÇÃO : Vamos inicialmente fazer a demonstração local e, posteriormente, a demonstração global.

Lembremos que um ponto P de uma superfície M é umbílico quando as curvaturas principais de M em P são iguais (§1.6). Deste modo, toda curva regular de M é uma linha de curvatura de M .

Seja $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ um sistema de coordenadas locais de uma vizinhança $V \ni P$ de uma superfície compacta $M \subset \mathbb{R}^3$ cujos pontos são todos umbílicos.

Seja $f:I \rightarrow M$ uma curva de M passando por P em V . Então $f(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$.

Para todo $t \in I$, temos da proposição 12

$$(3.17) \quad \frac{d(Nof)}{dt}(t) + k_n(u(t), v(t))f'(t) = 0.$$

Definamos as aplicações

$$(t, s) \xrightarrow{\tilde{k}_n} \tilde{k}_n(t, s) = (k_n \circ X)(t, s), \quad v(t, s) \in U.$$

$$t \xrightarrow{\beta} \beta(t) = (u(t), v(t)), \quad \forall t \in I.$$

A equação (3.17) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$(3.18) \quad \frac{d(N(X(u(t), v(t))))}{dt} + \tilde{k}_n(u(t), v(t))\beta'(t) = 0.$$

Denotando-se a derivada de N em relação à primeira variável por N_1 e a derivada em relação à segunda variável por N_2 , temos

$$(3.19) \quad N_1(u(t), v(t))u'(t) + N_2(u(t), v(t))v'(t) + \tilde{k}_n(u(t), v(t))(u'(t), v'(t)) = 0.$$

Fazendo-se $u(t) = \bar{s}$ e $v(t) = t$, obtemos $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$. A equação (3.19) se transforma em

$$(3.20) \quad N_1(t, s) + \tilde{k}_n(t, s)X_u(t, s) = 0.$$

Fazendo-se $u(t) = t$ e $v(t) = \bar{s}$, obtemos $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$. A equação (3.19) se transforma em

$$(3.21) \quad N_2(t, s) + \tilde{k}_n(t, s)X_v(t, s) = 0.$$

Derivando-se (3.20) em relação à segunda variável e (3.21) em relação à primeira variável obtemos

$$N_{12}(t, s) + \tilde{k}_{n_v}(t, s)X_u(t, s) + \tilde{k}_n(t, s)X_{uv}(t, s) = 0.$$

$$N_{21}(t, s) + \tilde{k}_{n_u}(t, s)X_v(t, s) + \tilde{k}_n(t, s)X_{vu}(t, s) = 0.$$

Como $N_{12} = N_{21}$ e $X_{uv} = X_{vu}$ vem que

$$\tilde{k}_{n_v}(t, s)X_u(t, s) = \tilde{k}_{n_u}(t, s)X_v(t, s).$$

Tendo em vista que os vetores X_u e X_v são linearmente independentes segue que

$$\tilde{k}_{n_v}(t, s) = \tilde{k}_{n_u}(t, s) = 0.$$

Portanto, \tilde{k}_n é constante. Logo, k_n é constante. Consideremos as

seguintes possibilidades para k_n :

(i) $k_n \neq 0$. Integrando-se (3.17) obtemos

$$\int \frac{d(Nof)}{dt}(t) dt + \int k_n(u(t), v(t)) f'(t) dt = 0,$$

ou seja,

$$(Nof)(t) + k_n(u(t), v(t)) f(t) + C_1 = 0.$$

Logo,

$$f(t) = - \frac{1}{k_n(u(t), v(t))} (Nof)(t) + C_f,$$

onde C_f é uma constante dependente da curva f considerada.

Sejam f e g duas curvas em M , passando por P . Sejam t_0, t_1 tais que $(u_f(t_0), v_f(t_0)) = P = (u_g(t_1), v_g(t_1))$. Então

$$\begin{aligned} f(t) &= - \frac{1}{k_n(u_f(t_0), v_f(t_0))} N(u_f(t_0), v_f(t_0)) + C_f = \\ &= - \frac{1}{k_n(u_g(t_1), v_g(t_1))} N(u_g(t_1), v_g(t_1)) + C_g = g(t). \end{aligned}$$

Portanto, $C_f = C_g$.

Suponhamos agora que \bar{f} e \bar{g} são duas curvas em M , sem pontos em comum em V . Consideremos uma curva \bar{h} em M tal que $\bar{f} \cap \bar{h} = \{P\}$ e $\bar{g} \cap \bar{h} = \{Q\}$. Para cada par de curvas procede-se como anteriormente. Portanto, a constante $C_f = C_g = C_h = C$, independente da curva.

Podemos concluir de $f(t) = - \frac{1}{k_n} (Nof)(t) + C$ que f é uma curva sobre uma esfera; isto é, V está contida na esfera de \mathbb{R}^3 de centro C e raio $\frac{1}{k}$.

(ii) $k_n = 0$. A equação (3.17) passa a ser $\frac{d(Nof)}{dt}(t) = 0$.

Integrando-se obtemos que $(Nof)(t)$ é constante. Portanto, V está

contida num plano de \mathbb{R}^3 , o qual pode ser considerado como uma esfera de raio infinito.

Vamos passar agora à demonstração da parte global. Para cada $P \in M$, seja V_p uma vizinhança de P em M com a propriedade acima provada; isto é, V_p está contida numa esfera do \mathbb{R}^3 ou num plano. A união de todas as V_p cobrem M . Sendo M compacta, esta cobertura se reduz a uma subcobertura finita, digamos V_i , $i=1,2,\dots,r$.

Consideremos duas vizinhanças distintas cuja intersecção seja não vazia, V_i e V_j . Por (3.17), k_n é constante tanto em V_i quanto em V_j . Tomemos o valor de k_n nos pontos de $V_i \cap V_j$. Segue que k_n é constante em toda M .

Se $k_n = 0$ em M , a linha de curvatura de M é uma reta, o que contradiz a compacidade de M .

Se $k_n \neq 0$ em M , tomemos $V_i = X(U_i)$ contida na esfera de centro C_x e raio $\frac{1}{K}$ e $V_j = X(U_j)$ contida na esfera de centro C_y e raio $\frac{1}{K}$. Como $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, vem que $V_i \cap V_j$ é homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^2 . Logo, $C_x = C_y$. As duas esferas são coincidentes.

Portanto, M é uma esfera em \mathbb{R}^3 .

c.q.d.

LEMA 53 (HILBERT)

Em uma região fechada de uma superfície M de curvatura K constante positiva, sem pontos umbílicos, as curvaturas principais tomam seus valores extremos na fronteira.

Uma forma alternativa do lema de Hilbert é dada a seguir.

Se num ponto P_0 de uma superfície M de curvatura K constante, as curvaturas principais k_1 e k_2 são tais que, ou

- (i) $k_1 > k_2$, k_1 tem um máximo em P_0 e k_2 tem um mínimo em P_0 , ou
(ii) $k_1 < k_2$, k_1 tem um mínimo em P_0 e k_2 tem um máximo em P_0 ,

então a curvatura K não pode ser positiva em P_0 .

Demonstraremos a forma alternativa do lema, utilizando o método de redução ao absurdo.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que o lema é falso; isto é, $K > 0$ e existe um ponto P_0 no qual as curvaturas principais tomam seus valores extremos distintos, sendo um máximo e outro mínimo.

Seja V uma vizinhança de P_0 em M e $X(u,v)$ um sistema de coordenadas locais em V . Suponhamos que as linhas coordenadas de X sejam linhas de curvatura de V . Da proposição 11 vem que $F=f=0$. Assim, a equação (1.7) se reduz a

$$k_n = \frac{eu'^2 + gv'^2}{Eu'^2 + Gv'^2}.$$

Como $u' \neq 0$, dividindo numerador e denominador por u'^2 , obtemos

$$(3.22) \quad k_n = \frac{e+g\left(\frac{v'}{u'}\right)^2}{E+G\left(\frac{v'}{u'}\right)^2}.$$

Denotando-se $\frac{v'}{u'} = z$, a equação acima se transforma em

$$k_n(E+Gz^2) = e+gz^2.$$

Segue que

$$z^2(Gk_n - g) = e - Ek_n.$$

Vamos procurar a direção z na qual ocorre extremo local para a função k_n . Para isto derivamos em relação à z a última equação, encontrando

$$2z(Gk_n - g) = 0.$$

Disto se conclue que um extremo ocorrerá quando $z = 0$. Substituindo em (3.22) obtemos

$$k_n = \frac{e}{E} = k_1.$$

De modo análogo, obtemos $k_2 = \frac{g}{G}$, fazendo $z = \frac{u'}{v'}$ em (3.22).

Como as linhas coordenadas são linhas de curvatura temos das equações (1.17)

$$(3.23) \quad \begin{cases} e_v = \frac{1}{2} E_v (k_1 + k_2). \\ g_u = \frac{1}{2} G_u (k_1 + k_2). \end{cases}$$

De $k_1 = \frac{e}{E}$, tiramos que

$$(3.24) \quad e_v = \frac{\partial k_1}{\partial v} E + k_1 E_v.$$

De $k_2 = \frac{g}{G}$, tiramos que

$$(3.25) \quad g_u = \frac{\partial k_2}{\partial u} G + k_2 G_u.$$

Substituindo (3.24) e (3.25) em (3.23) obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial k_1}{\partial v} E + k_1 E_v = \frac{1}{2} E_v (k_1 + k_2). \\ \frac{\partial k_2}{\partial u} G + k_2 G_u = \frac{1}{2} G_u (k_1 + k_2). \end{cases}$$

Segue que

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} (k_2 - k_1). \\ \frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G} (k_1 - k_2). \end{cases}$$

Como as curvaturas principais assumem seus valores extremos em P_0 , temos neste ponto

$$\frac{\partial k_1}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial k_2}{\partial u}(P_0),$$

de modo que

$$\frac{E_v}{E}(k_2 - k_1) = \frac{G_u}{G}(k_1 - k_2) = 0.$$

Como $E, G > 0$ e $k_2 \neq k_1$, vem que $E_v = G_u = 0$ em P_0 .

Derivando-se a primeira das equações (3.26) em relação a v e a segunda em relação a u , encontramos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \frac{E_{vv}}{E}(k_2 - k_1). \\ \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{G_{uu}}{G}(k_1 - k_2). \end{cases}$$

Consideremos duas hipóteses.

(i) k_1 tem um máximo em P_0 . Neste caso, k_2 tem um mínimo em P_0 ; isto significa que $k_2 - k_1 < 0$. Deste modo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(P_0) = \frac{1}{2} \frac{E_{vv}}{E}(k_2 - k_1) \leq 0, \text{ o que produz } E_{vv} \geq 0. \\ \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(P_0) = \frac{1}{2} \frac{G_{uu}}{G}(k_1 - k_2) \geq 0, \text{ o que produz } G_{uu} \geq 0. \end{cases}$$

(ii) k_1 tem um mínimo em P_0 . Neste caso, k_2 tem um máximo em P_0 ; isto significa que $k_2 - k_1 > 0$. Deste modo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(P_0) = \frac{1}{2} \frac{E_{vv}}{E}(k_2 - k_1) \geq 0, \text{ o que produz } E_{vv} \leq 0. \\ \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(P_0) = \frac{1}{2} \frac{G_{uu}}{G}(k_1 - k_2) \leq 0, \text{ o que produz } G_{uu} \leq 0. \end{cases}$$

Como $K = k_1 k_2 = -\frac{1}{2EG}(E_{vv} + G_{uu})$ vem que $K \leq 0$ o que representa uma contradição.

c.q.d.

OBSERVAÇÃO

Uma superfície compacta deve possuir um ponto mais alto (máximo) e neste caso a curvatura é necessariamente não negativa. Assim, uma superfície compacta não pode ter curvatura constante negativa. Além disso, uma superfície compacta não pode ter curvatura constante nula, pois neste caso ela conteria uma reta e isto contradiz a compacidade da superfície. Portanto, só faz sentido falar de superfícies compactas de curvatura K constante positiva. Isto é formalmente enunciado no teorema 54.

TEOREMA 54

As únicas superfícies compactas com curvatura K constante positiva são as esferas.

DEMONSTRAÇÃO : Seja M uma superfície compacta com curvatura K constante positiva. Como M é compacta, existe um ponto P_0 no qual o valor máximo de uma curvatura principal é atingido. Como K é constante, segue que as duas curvaturas principais de M em P_0 atingem em P_0 seus valores extremos. Pelo lema 53 vem que as curvaturas principais são iguais; isto quer dizer que M é constituída de pontos umbílicos. Do lema 52 vem que M é uma esfera.

c.q.d.

CAPÍTULO IV

SUPERFÍCIES COMPLETAS COM CURVATURA K CONSTANTE

No capítulo II estudamos arcos de comprimento mínimo. Vimos que nem sempre existe um arco de comprimento mínimo unindo dois pontos quaisquer de uma superfície M . Neste capítulo estaremos interessados em superfícies que possuam a propriedade de existir sempre um arco de comprimento mínimo entre dois quaisquer de seus pontos. Tais superfícies serão chamadas superfícies completas. Em particular estaremos preocupados com superfícies completas que apresentem curvatura gaussiana constante. Durante todo o capítulo a expressão curvatura K denotará a curvatura gaussiana constante K , salvo menção contrária, bem como d denotará a métrica intrínseca em M .

4.1. SUPERFÍCIES COMPLETAS

Uma sequência de pontos $\{X_n\}$ em uma superfície M é dita formar uma sequência de Cauchy quando, dado um número real positivo δ , existir um número inteiro n_0 tal que

$$d(X_p, X_q) < \delta, \quad p, q > n_0.$$

Uma superfície M é dita completa se toda sequência de Cauchy $\{X_n\}$ de pontos X_n de M converge na métrica d para um ponto de M . Doravante, M denotará uma superfície completa em \mathbb{R}^3 , salvo especificação contrária.

PROPOSIÇÃO 55

Para todo ponto $P \in M$, existe um número $\mu(P) > 0$ com as se-

guintes propriedades:

(i) Se $Q \in M$ é tal que $d(P, Q) < \mu(P)$, então existe um segmento entre P e Q que será denotado por PQ .

(ii) Se $Q \in M$ é tal que $d(P, Q) > \mu(P)$, então existe um ponto $R \in M$ com $d(P, R) = \mu(P)$, de modo que $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja (s, θ) , $0 < s < \mu_1(P)$, $0 < \theta < 2\pi$, um sistema de coordenadas geodésicas polares centrado em $P \in M$. Seja $\mu(P)$ tal que $\mu_1(P) > \mu(P) > 0$. Então, $\mu(P)$ satisfaz (i). Seja $Q \in M$ tal que $d(P, Q) > \mu(P) > 0$ e f_i uma sequência de arcos diferenciáveis por partes unindo P a Q , cujos comprimentos, $l(f_i)$ na métrica usual de \mathbb{R}^3 tendem a $d(P, Q)$. Sejam R_i , $i = 1, 2, \dots$ pontos de f_i com $d(P, R_i) = \mu(P)$. Os pontos R_i estão no mesmo círculo geodésico de centro P e raio $\mu(P)$. Como o sistema é geodésico, este círculo é compacto, e, assim, a sequência $\{R_i\}$ possui uma subsequência convergente para um ponto R do círculo geodésico. Por abuso de linguagem vamos denotar a subsequência também por $\{R_i\}$. Temos

$$d(R_i, Q) + \mu(P) \leq l(f_i),$$

de modo que

$$d(P, Q) \leq d(P, R_i) + d(R_i, Q) \leq l(f_i).$$

Logo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [d(P, R_i) + d(R_i, Q)] = d(P, Q).$$

Portanto,

$$d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q).$$

c.q.d.

Sejam $f: (a, b) \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície regular M ,

$\alpha = \inf\{\bar{a} \in \mathbb{R} : f \text{ pode ser estendida a uma curva } g: (\bar{a}, b) \rightarrow M \text{ parametrizada pelo comprimento de arco de } M\}$ e

$\beta = \sup\{\bar{b} \in \mathbb{R} : f \text{ pode ser estendida a uma curva } g: (a, \bar{b}) \rightarrow M \text{ parametrizada pelo comprimento de arco de } M\}$. Pelo lema de Zom, f tem extensão máxima F e seu domínio é o intervalo (α, β) .

COROLÁRIO 56

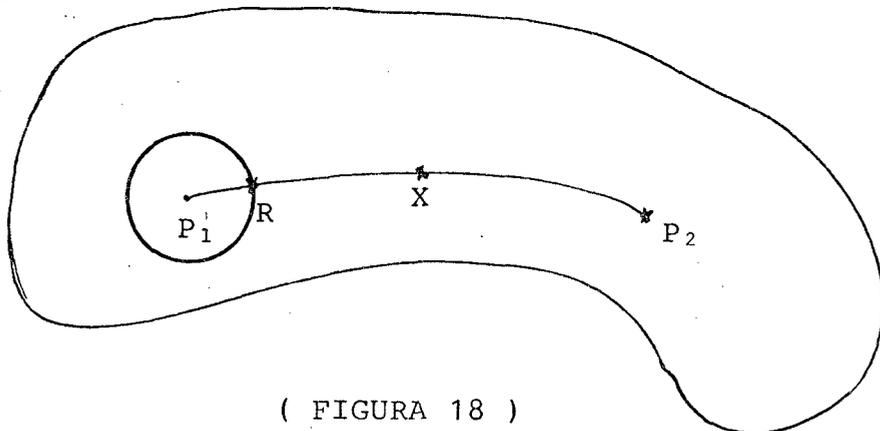
Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer de uma superfície M . Então ou existe um segmento unindo P_1 a P_2 ou um raio começando em P_1 cujos pontos X satisfazem a relação

$$d(P_1, X) + d(X, P_2) = d(P_1, P_2).$$

DEMONSTRAÇÃO : Pela proposição 55 existe um número real $\mu(P_1)$ tal que se $d(P_1, P_2) \leq \mu(P_1)$, então existe um segmento unindo P_1 a P_2 (figura 18).

Seja $f: [0, 1] \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de M tal que $f(0) = P_1$ e $f(1) = R$. f tem extensão máxima $F: [0, b) \rightarrow M$ satisfazendo $F(0) = P_1$, $F(1) = R$ e $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) \notin M$. Assim,

$F|_{[0, 1]} = f$ é um segmento e, portanto, F é um raio em M começando em P_1 .



(FIGURA 18)

c.q.d.

TEOREMA 57

As seguintes condições em M são equivalentes:

- (i) A métrica intrínseca em M é completa.
- (ii) Não existe raio de comprimento finito em M .
- (iii) Todo conjunto infinito e limitado na métrica usual do \mathbb{R}^3 tem um ponto de acumulação em M .

DEMONSTRAÇÃO : (1) \Rightarrow (2). Seja $f[0,1) \rightarrow M$ um raio de comprimento finito L . Desejamos demonstrar que M não é completa. Para isto, devemos obter uma sequência de Cauchy que não convirja para um ponto de M . Consideremos a sequência $\{t_k\}$ dada por $t_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ ($k=0,1,2,\dots$) e a sequência de pontos no arco $A_k = f(t_k)$.

Pela definição de raio vem que

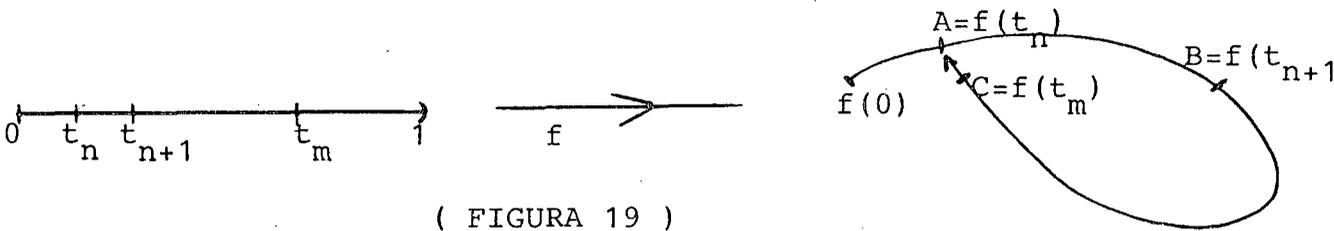
- (i) $f([0,1))$ é fechado em M , e
- (ii) $f:[a,b] \rightarrow M$ é um segmento para $0 \leq a < b < 1$.

Suponhamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = A$. Por (i) vem que $A \in f([0,1))$.

Logo, existe $t_n \in [0,1)$ tal que $A = f(t_n)$. Consideremos $t_{n+1}, t_m \in [0,1)$ tal que $t_n < t_{n+1} < t_m$, $B = f(t_{n+1})$ e $C = f(t_m)$ suficientemente próximo de A (figura 19). Por (ii) vem que

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).$$

Vamos assumir que $A \neq B$ e $d(A,B) = \epsilon$. Para m suficientemente grande seja $d(A,C) < \frac{\epsilon}{2}$. Como todos os termos da igualdade acima são positivos temos uma contradição. Assim, não existe A .



(FIGURA 19)

Como o arco tem comprimento finito L temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} d(A_k, A_{k+1}) = L.$$

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $m > n > N$ tem-se $\sum_n^{m-1} d(A_k, A_{k+1}) \leq \varepsilon$,

ou seja, $d(A_n, A_m) \leq \varepsilon$. Portanto, $\{A_k\}$ é uma sequência de Cauchy, a qual não tem ponto limite em M . Logo, M não é completa.

(2) \Rightarrow (3). Partindo do fato que não existe raio de comprimento finito em M , devemos demonstrar que todo conjunto infinito tem ponto de acumulação em M . Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer de M . Por hipótese, não existe raio de comprimento finito em M começando em P_1 . Pelo corolário 56 existe um segmento unindo P_1 à P_2 em M . Pelo teorema 41, um segmento em M é uma geodésica minimal.

Seja C um conjunto infinito limitado em M . Existe $P \in M$ e $k > 0$ tal que

(4.1) C é um subconjunto da bola de centro P e raio k .

Precisamos retirar de C uma sequência de Cauchy, $\{X_i\}$, $i=1,2,\dots$ na métrica intrínseca. Pelo exposto acima, os pontos $X \in C$ podem ser unidos por uma geodésica minimal PX (que é um segmento) tal que o comprimento de PX seja $\ell(PX) = d(P, X)$. Como C é infinito, tomamos uma sequência $\{X_i\}$ e definamos a sequência $\{S_i\}$ do seguinte modo, $s_i = d(P, X_i)$. Como $\{S_i\}$ é limitada, ela tem uma subsequência convergente para um valor $A \in \mathbb{R}$. Por comodidade vamos tomar a subsequência como sendo a própria sequência.

Para cada geodésica PX_i consideremos o vetor unitário $t(X_i) \in T_P(M)$. $\{t(X_i)\}$ é uma sequência contida na circunferência unitária de $T_P(M)$, que é compacta, logo podemos extrair de $\{t(X_i)\}$ uma subsequência convergente para um ponto $t(X) \in T_P(M)$. Novamente, vamos considerar a subsequência como a própria sequência. Portanto,

$$|t(X) - t(X_i)| \rightarrow 0,$$

onde $|\cdot|$ denota a métrica usual do \mathbb{R}^3 .

Como a solução de uma equação diferencial depende continuamente de suas condições iniciais, os pontos X_i , $i=1,2,\dots$ formam uma sequência de Cauchy. Assim, C contém uma sequência de Cauchy convergente em M , como desejávamos.

(3) \Rightarrow (1). Seja $\{A_n\}$, $n=1,2,\dots$ uma sequência de Cauchy em M . Então, ou $\{A_n\}$ é finita ou $\{A_n\}$ é infinita.

Se $\{A_n\}$ é finita, então ela é constante. Logo, ela é convergente.

Se $\{A_n\}$ é infinita, então pela parte (3) ela tem um ponto de acumulação em M que é seu ponto limite L na métrica usual do \mathbb{R}^3 . Pelo teorema 62, $\{A_n\} \rightarrow L$ na métrica intrínseca.

c.q.d.

Uma forma alternativa do teorema 57 é dada a seguir.

- (1') Toda sequência de Cauchy de pontos de M é convergente em M .
- (2') Toda geodésica pode ser prolongada indefinidamente em ambas as direções.
- (3') Todo conjunto limitado de pontos de M é relativamente compacto.

COROLÁRIO 58

Se M é uma superfície completa e $P \in M$, então \exp_p é definida em todo $T_p(M)$:

DEMONSTRAÇÃO : Como M é completa, o valor δ do teorema 38 pode ser tomado como infinito. Assim, \exp_p está definida no círculo de centro P e raio infinito; isto é, $T_p(M)$. Isto equivale a dizer que numa superfície completa a aplicação exponencial é sobrejetiva.

c.q.d.

COROLÁRIO 59

Toda superfície compacta é completa.

DEMONSTRAÇÃO : Seja M uma superfície compacta. Então M possui a propriedade (3) do teorema 57. Consequentemente, pelo mesmo teorema, M é completa.

c.q.d.

OBSERVAÇÕES

(i) A recíproca do corolário 59 não é verdadeira. De fato, seja M um plano. Então M é completa. Um plano não é limitado, logo M não é compacta em \mathbb{R}^3 .

(ii) Tendo em vista a forma alternativa do teorema 57, podemos redefinir uma superfície completa.

Uma superfície M é dita completa se, para todo $P \in M$, qualquer geodésica $g: [0, \delta) \rightarrow M$, partindo de $P = g(0)$ pode ser estendida a uma geodésica $g^*: \mathbb{R} \rightarrow M$.

EXEMPLO 12

O cone menos o vértice não é uma superfície completa. Tomando-se uma geratriz, que é uma geodésica, ela não pode ser prolongada indefinidamente.

EXEMPLO 13

A superfície $M - \{P\} = M^*$ obtida retirando-se um ponto P de uma superfície completa M deixa de ser completa. Como por P passa uma geodésica de M , tomando-se sobre esta geodésica um ponto Q próximo à P , existe uma geodésica de M^* que não pode ser prolongada através de P .

EXEMPLO 14

Cilindros e esferas são superfícies completas. As geodésicas do cilindro são as geratrizes, os círculos e as hélices, as quais podem ser prolongadas indefinidamente. As geodésicas da esfera são os círculos máximos, os quais podem também ser prolongados indefinidamente.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o principal teorema deste parágrafo e uma das principais propriedades de superfícies completas, também conhecido como teorema de Hopf-Rinow.

TEOREMA 60

Quaisquer dois pontos de uma superfície completa podem ser unidos por uma geodésica minimal.

DEMONSTRAÇÃO : Sejam P_1, P_2 dois pontos quaisquer de uma superfície M . Pelo corolário 56 ou existe um segmento unindo P_1 a P_2 ou um raio começando em P_1 cujos pontos X satisfazem a relação $d(P_1, X) + d(X, P_2) = d(P_1, P_2)$.

Pelo teorema 57, não existe raio de comprimento finito em M . Portanto, existe um segmento em M unindo P_1 a P_2 , que é uma geodésica minimal.

c.q.d.

O teorema 60 possui o importante corolário.

COROLÁRIO 61

Se M é completa e limitada na métrica usual do \mathbb{R}^3 , então M é compacta.

DEMONSTRAÇÃO : Seja M uma superfície completa e limitada e P um ponto fixado em M . Como M é limitada, existe uma bola $B \subset T_p(M)$ de raio r , centrada na origem de $T_p(M)$ de modo que

$$\exp_p(B) = \exp_p(T_p(M)).$$

Pelo corolário 58, \exp_p é sobrejetiva. Logo,

$$M = \exp_p(T_p(M)) = \exp_p(B).$$

Mas B é compacta e \exp_p é contínua. Portanto, M é compacta.

c.q.d.

TEOREMA 62

Sejam M uma superfície completa, d_I a métrica intrínseca em M , d_E a métrica euclidiana em \mathbb{R}^3 . Então, as topologias induzidas por d_I e por d_E coincidem.

DEMONSTRAÇÃO : Sejam M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 , $P \in M$, $\mu(P) > 0$ e $v \in T_P(M)$ tal que $|v| \leq \mu(P)$. Pela definição de \exp_P vem que

$$d_I(\exp_P(v), P) = |v|.$$

Seja $\{X_n\}$ uma sequência de pontos de M convergente para P na métrica euclidiana d_E .

Definamos uma sequência $\{Y_n\}$ de pontos de $T_P(M)$ convergente para a origem O de $T_P(M)$ na métrica euclidiana, de modo que $\exp_P(Y_n) = X_n$. Então,

$$d_I(X_n, P) = d_I(\exp_P(Y_n), P) = |Y_n|_{d_E} \rightarrow 0.$$

Portanto, $\{X_n\} \rightarrow P$ na métrica intrínseca.

Como $d_I \geq d_E$ e $\{X_n\} \rightarrow P$ em d_I vem que $\{X_n\} \rightarrow P$ em d_E . Assim, as topologias induzidas por d_I e por d_E coincidem.

c.q.d.

4.2. SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA CONSTANTE $K=0$

Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura K constante e igual a zero. Então M é constituída de pontos planares e pontos parabólicos. Seja A o conjunto dos pontos planares de M e $U = M - A$ o conjunto dos pontos parabólicos de M . No que se faremos uso destas considerações.

TEOREMA 63

Seja $P \in U$ e $f: I \rightarrow M$ uma linha assintótica parametrizada pelo comprimento de arco de U tal que $f(0) = P$. A curvatura média H satisfaz a equação diferencial

$$(4.2) \quad \frac{d}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $V \subset U$ uma vizinhança de P . Pela proposição 11, podemos encontrar um sistema de coordenadas em V de modo que as linhas coordenadas neste sistema sejam linhas de curvatura e as curvas com v constante sejam linhas assintóticas de V . Sejam E, F, G, e, f, g os coeficientes locais da primeira e segunda formas fundamentais neste sistema.

Como as linhas coordenadas são linhas de curvatura, pela proposição 11 vem que $F = f = 0$.

Como a curva $(u(s), c)$, $c \in \mathbb{R}$ é uma linha assintótica vem que

$$eu'^2 = 0,$$

pela proposição 8. Como $u' \neq 0$ vem que $e = 0$.

$$\text{Da proposição 5 temos } H(P) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right).$$

Logo,

$$(4.3) \quad H(P) = \frac{1}{2} \frac{g}{G}$$

para as linhas de curvatura com v constante.

Como $e = 0$, temos que $e_v = 0$. Substituindo (4.3) e $e_v = 0$ em (3.23) temos

$$(4.4) \quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} \frac{g}{G} E_v \\ g_u = \frac{1}{2} \frac{g}{G} G_u \end{cases}$$

Como $g, G \neq 0$, vem da primeira das equações (4.4) que

$E_v = 0$. Logo, $E = E(u)$. Da segunda das equações (4.4) vem que

$$\frac{g_u}{g} = \frac{G_u}{2G} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}^2} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} .$$

Segue que

$$(4.5) \quad g = C_1(v)\sqrt{G} ,$$

onde $C_1(v)$ é uma função apenas de v .

Façamos a mudança de parâmetros $\begin{cases} u^* = \int \sqrt{E(u)} du \\ v^* = v \end{cases}$. In-

dicando-se os novos parâmetros novamente por u e v temos, agora, u medindo o comprimento de arco ao longo da linha assintótica com v constante, de modo que $E = 1$. Daqui resulta que nosso sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas geodésicas e, portanto, de (3.7) vem que

$$0 = K = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{G(u,v)} ,$$

implica em

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{G(u,v)} = 0 .$$

Uma solução desta equação é

$$(4.6) \quad \sqrt{G} = C_2(v)u + C_3(v)$$

onde $C_2(v)$ e $C_3(v)$ são funções apenas de v .

Substituindo (4.5) e (4.6) em (4.3) temos

$$H = \frac{1}{2} \frac{C_1(v)\sqrt{G}}{G} = \frac{1}{2} \frac{C_1(v)}{\sqrt{G}} = \frac{C_1(v)}{2[C_2(v)u + C_3(v)]} .$$

Portanto,

$$\frac{1}{H} = \frac{2[C_2(v)u + C_3(v)]}{C_1(v)} .$$

Derivando-se esta última igualdade duas vezes em relação a u e lembrando que $u = s$ ao longo da linha assintótica $v = \text{constante}$, chega-se à equação (4.2).

c.q.d.

LEMA 64

O conjunto A dos pontos planares da superfície M é fechado.

DEMONSTRAÇÃO : Os pontos de A são os pontos de M que tem curvatura média nula. Um ponto de acumulação de A terá , pela continuidade da função curvatura média H, também curvatura média nula. Portanto, este ponto também pertence à A. Como todo ponto de acumulação de A pertence à A vem que A é fechado em M.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 65

As linhas assintóticas de U são maximais.

DEMONSTRAÇÃO : Dizer que as linhas assintóticas de U são maximais significa que elas não encontram o conjunto A.

Suponhamos que a linha assintótica encontre o conjunto A.

Pelo teorema 63 temos que a curvatura média em qualquer ponto de uma linha assintótica de U é

$$H(s) = \frac{1}{as+b} ,$$

onde s mede o comprimento de arco ao longo da linha assintótica e $a, b \in \mathbb{R}$.

Seja $f: (a, b) \rightarrow M$ uma linha assintótica de U com $f(0) = P$, onde $P \in U$, a qual pode ser estendida a

$$F: (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow M.$$

Suponhamos que $F(0) = f(0) = P$ e que s_0 é o primeiro ponto tal que $F(s_0) \in A$. Portanto, $H(F(s_0)) = 0$. Mas

$$\lim_{s \rightarrow s_0^-} H(F(s)) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{1}{as+b} \neq 0.$$

Como H é contínua, temos uma contradição.

c.q.d.

LEMA 66

A única linha assintótica que passa por $P \in U$ é um segmento (aberto) de reta de M .

DEMONSTRAÇÃO : Seja $P \in U$; isto é, uma das curvaturas principais em P é nula e a outra não. Disto segue que P não é um bílico e que uma direção principal em P é uma direção assintótica em P .

Podemos obter um sistema de coordenadas $X(u, v)$ de uma vizinhança $V \subset U$ do ponto P de tal modo que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura, pela proposição 11. Suponhamos que as linhas $f: I \rightarrow M$ com $v = \text{constante}$ sejam linhas assintóticas. Como para cada linha assintótica a curvatura normal $k_n(f'(t)) = 0$, temos da proposição 12 que, para todo ponto de V ,

$$\frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) = 0.$$

Logo,

$$0 = \frac{dN}{dt} = N_u + N_v$$

em V . Assim, em V temos $N_u = -N_v = 0$, pois v é constante em V .

Mas

$$\langle X, N \rangle_u = \langle X_u, N \rangle + \langle X, N_u \rangle = 0.$$

Portanto,

$$(4.7) \quad \langle X, N \rangle = f(v),$$

onde $f(v)$ é uma função diferenciável de v .

Derivando-se (4.7) em relação a v , encontramos

$$(4.8) \quad f'(v) = \langle X, N \rangle_v = \langle X_v, N \rangle + \langle X, N_v \rangle = \langle X, N_v \rangle.$$

Como N é unitário, N_v é ortogonal a N . Como os pontos de V são parabólicos, N não é constante; de modo que N_v não é nulo em V . Assim sendo, $\{N, N_v\}$ é um conjunto linearmente independente.

Ao longo da curva $v = v_0$ constante temos $N(u) = N_0$ e $N_{v_0}(u) = N_{v_0}$ constantes. De (4.7) vem que

$$(4.9) \quad f(u, v_0) \text{ é uma curva pertencente a um plano cujo normal é } N_0.$$

De (4.8) vem que

$$(4.10) \quad f(u, v_0) \text{ é uma curva pertencente a um plano cujo normal é } N_{v_0}.$$

De (4.9) e (4.10) vem que $f(u, v_0)$ é uma curva contida na interseção de dois planos não coincidentes e não paralelos pois N e N_v são linearmente independentes, de modo que $f(u, v_0)$ é um segmento de reta.

c.q.d.

Vamos denotar por $\text{fr}(U)$ a fronteira do conjunto U dos pontos parabólicos da superfície M de curvatura $K = 0$. Pelo lema 64, segue que U é aberto em M , logo $\text{fr}(U) \subset A$. Como a fronteira de conjuntos complementares é a mesma, vem que $\text{fr}(U) = \text{fr}(A)$.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte lema:

LEMA 67

Se $P \in \text{fr}(U)$, então por P passa um único segmento (aberto) de reta contido em M . Além disso, $\text{fr}(U)$ é constituída por segmentos de retas.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $P \in \text{fr}(U)$. Então P é ponto aderente de U . Como U é aberto, segue que P é ponto de acumulação de U . É possível obter uma sequência $\{P_n\}$ de pontos de U de modo que $\{P_n\} \rightarrow P$. Para cada P_n seja $f(P_n)$ a única linha assintótica maximal que passa por P_n . Pelo lema 66, $f(P_n)$ é um segmento (aberto) de reta em M .

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma esfera de centro P e raio suficientemente pequeno. Como S é compacta, os pontos $Q_n \in S \cap f(P_n)$ formam uma sequência $\{Q_n\}$ que tem, pelo menos, um ponto de acumulação $Q \in S$, o qual ocorre simultaneamente com seu antípoda. Se ocorrer outro ponto R além de Q e seu antípoda, então por pontos arbitrariamente próximos P_n e P_m passarão linhas assintóticas $f(P_n)$ e $f(P_m)$ formando ângulo maior do que

$$\frac{1}{2} \text{ang}(PQ, PR),$$

o que contradiz a continuidade das linhas assintóticas. Decorre disto que as linhas $f(P_n)$ tem uma direção limite $f(P)$. Vamos mostrar que esta direção não depende da particular escolha feita para $\{P_n\}$.

Seja $\{Q_n\}$ outra sequência de pontos $Q_n \in U$ convergente para P . Se fizermos a mesma argumentação feita para a sequência $\{P_n\}$ verificaremos que as linhas assintóticas $f(Q_n)$ tem a mesma direção limite $f(P)$. Então $f(P)$ é um segmento em M .

Suponhamos que $f(P)$ se reduza a um ponto. Como $f(P_n)$ é maximal, esse ponto seria um ponto de acumulação dos extremos de $f(P_n)$ os quais não estão em $f(P_n)$ pois $f(P_n)$ é um segmento de reta. Portanto, $f(P)$ não se reduz a um ponto.

Além disso, $f(P)$ não contém seus extremos, sendo então um segmento aberto em M .

Seja $Q \in \text{fr}(U)$. Existe uma sequência $\{Q_n\}$ de pontos $Q_n \in f(P_n)$ em U convergente para Q . Portanto,

$$Q \in U \cup \text{fr}(U).$$

Suponhamos $Q \notin \text{fr}(U)$. Então, $Q \in U$. Pela continuidade das linhas assintóticas, $f(P)$ é a única linha assintótica passando por Q . Assim, $P \in U$. Mas isto contradiz o fato que U é aberto. Logo,

$$Q \in \text{fr}(U) \text{ e } f(P) \subset \text{fr}(U).$$

c.q.d.

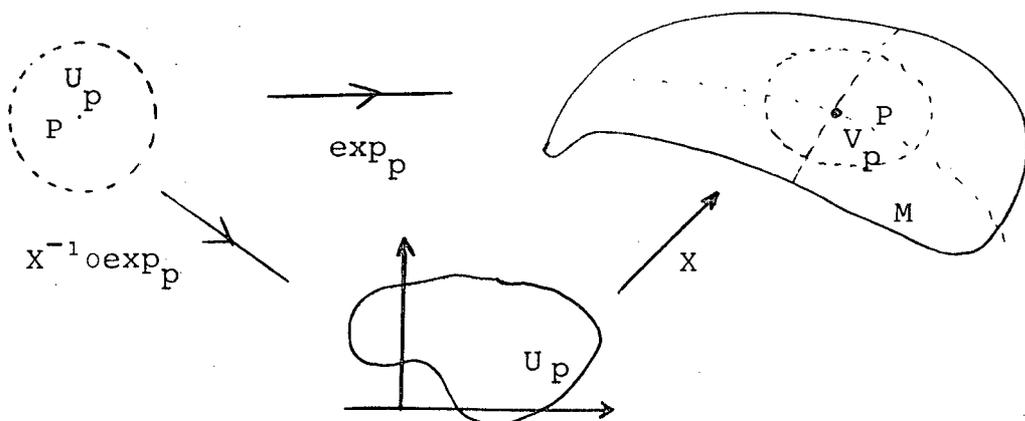
Enunciaremos a seguir um lema que será útil para a demonstração do lema 69 e teorema 71. Sua demonstração está baseada em formas diferenciais. Como nesta dissertação procuramos não empregar tais formas não faremos a demonstração do mesmo. Se fossemos realizá-lo, o trabalho se estenderia ainda mais, o que não é nossa pretensão. Uma demonstração do mesmo pode ser encontrada em I.M.Singer and John A. Thorpe - Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry - páginas 185 e 186.

LEMA 68

Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura $K = 0$. A aplicação exponencial é uma isometria local relativamente à métrica intrínseca.

LEMA 69

Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura $K=0$. A aplicação exponencial é uma aplicação de recobrimento.



(FIGURA 20)

DEMONSTRAÇÃO : Pelo teorema 39, exponencial é um difeomorfismo local, logo é uma aplicação contínua numa vizinhança coordenada V_p de $P \in M$ contida em M .

Como $K = 0$, pelo teorema 51, M é localmente isométrica a um plano. Em particular, consideremos este plano como $T_p(M)$.

Seja V_p uma vizinhança do ponto P contida em M . Como \exp_p é contínua, temos que

$$(\exp_p)^{-1}(V_p) = U_p$$

é um aberto de $T_p(M)$.

Para um sistema de coordenadas $X:U_p \rightarrow M$, temos (figura 20)

$$X^{-1} \circ \exp_p = \text{identidade.}$$

Segue que $\exp_p = X \circ \text{identidade}$. Como X é um homeomorfismo em U_p bem como a aplicação identidade, vem que $\exp_p|_{U_p}$

é um homeomorfismo .

Pelo corolário 58, \exp_p é sobrejetiva.

Portanto, \exp_p é uma aplicação de recobrimento.

c.q.d.

LEMA 70

Seja P um ponto de uma superfície M e V uma vizinhança de P constituída exclusivamente de pontos planares. Então, toda componente conexa de V está contida em um plano.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que a componente conexa de V seja a própria vizinhança V . Seja $X(u,v)$ um sistema de coordenadas em $V \subset M$. Como todo ponto de V é planar, as curvaturas principais em todo ponto de V são nulas. Além disso, toda linha de V é uma linha de curvatura.

Para todo vetor $w = aX_u + bX_v$, consideremos a curva $f: I \rightarrow M$ dada por $f(t) = X(u(t), v(t)) = X(at+v_0, bt+v_0)$. Então,
 $f'(t) = aX_u + bX_v$.

Pela proposição 12 existe uma função real diferenciável λ em V a qual depende do ponto P tal que

$$\frac{d}{dt}N(u(t), v(t)) = \lambda(t)f'(t).$$

Disto segue que

$$N_u(at+v_0, bt+v_0)u' + N_v(at+v_0, bt+v_0)v' = \lambda(t)(aX_u + bX_v)(t).$$

Omitindo as variáveis temos para a igualdade acima

$$aN_u + bN_v = a\lambda X_u + b\lambda X_v.$$

Como w foi tomado arbitrariamente, consideremos em primeiro lugar $a = 1$ e $b = 0$. Em segundo lugar consideremos $a = 0$ e $b = 1$. Distto vem que

$$(4.11) \quad \begin{cases} N_u = \lambda X_u \\ N_v = \lambda X_v \end{cases}.$$

Derivando-se a primeira das equações (4.11) em relação \tilde{v} e a segunda em relação \tilde{u} e usando o fato que a ordem da derivação parcial é irrelevante, obtemos

$$\lambda_v X_u + \lambda X_{uv} = \lambda_u X_v + \lambda X_{vu}.$$

Como $X_{uv} = X_{vu}$, temos que

$$\lambda_v X_u = \lambda_u X_v.$$

Mas X_u e X_v são linearmente independentes de modo que, para todo

ponto de V , tem-se $\lambda_v = \lambda_u = 0$. Como V é conexa vem que λ é constante em V .

Suponhamos $\lambda \neq 0$ em V . De (4.11) temos

$$(X(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v))_u = (X(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v))_v = 0,$$

de modo que

$$X(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v) = C$$

é um ponto fixo em V . Disto segue que

$$|X(u,v) - C|^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

o que significa que todos os pontos de V estão na esfera de centro C e raio $|\frac{1}{\lambda}|$. Mas isto contradiz o fato que em P as curvaturas principais são nulas. Portanto, devemos ter $\lambda = 0$ em V .

De (4.11) vem que $N_u = N_v = 0$; isto é, N é constante em

V . Logo,

$$\begin{cases} \langle X, N \rangle_u = \langle X_u, N \rangle + \langle X, N_u \rangle = 0, \\ \langle X, N \rangle_v = \langle X_v, N \rangle + \langle X, N_v \rangle = 0. \end{cases}$$

Portanto, $\langle X, N \rangle$ é constante em V . Isto nos leva a concluir que V está contida em um plano.

c.q.d.

Diremos que um cilindro é uma superfície regular M tal que por todo ponto $P \in M$ passa uma única reta $g_P \subset M$ e se $Q \neq P$, então as retas g_P e g_Q são paralelas ou coincidentes. Estas retas serão chamadas geratrizes. Observamos que com esta definição um plano pode ser considerado como uma superfície cilíndrica. Na proposição 49 demonstramos que a curvatura K do cilindro é constante e igual a zero. Vamos, agora, demonstrar que as únicas superfícies completas do \mathbb{R}^3 que tem curvatura $K=0$ constante são as superfícies cilíndricas (incluindo os planos).

TEOREMA 71

Se M é uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura $K=0$, então M é um cilindro.

DEMONSTRAÇÃO : Como antes vamos representar por U o conjunto dos pontos parabólicos de M e por A o conjunto dos pontos planares de M .

(i) Se $U = \emptyset$, então $A = M$; isto é, M é formada por pontos planares. Qualquer que seja $P \in A$, pelo lema 70, toda componente conexa de uma vizinhança V de P está contida num plano. Como $A = M$ é conexo, vem que M é um plano.

(ii) Se $A = \emptyset$, então $U = M$; isto é, M é formada exclusivamente de pontos parabólicos. Suponhamos um ponto $Q \in U$. Por Q passa uma única linha assintótica (a qual é também uma linha de curvatura). Pelo lema 66, esta linha assintótica é um segmento de reta em M . Pela proposição 65 esta linha assintótica é maximal; isto é, é uma reta em lugar de um segmento de reta. Vamos denotar esta linha assintótica por g_Q .

Suponhamos que $P \in U$ e $P \notin g_Q$. Seja g_P a única reta que passa por P . Admitamos que $g_Q \cap g_P = \{R\}$. Neste caso, passam por R duas linhas assintóticas g_Q e g_P o que contradiz o fato de ser R um ponto parabólico. Portanto, $g_Q \cap g_P = \emptyset$ ou $g_Q = g_P$.

Devemos demonstrar que se ocorrer a primeira alternativa, então g_Q e g_P são paralelas ou coincidentes (elas serão as geratrizes do cilindro). Em cada ponto da geratriz tomaremos uma curva ortogonal, a qual será a segunda linha de curvatura. Esta curva será uma geodésica e como a superfície é completa esta geodésica corta cada g_P . Com isto teremos demonstrado que a superfície é um cilindro.

Como $U=M$ é conexa, existe um arco $f:[a,b] \rightarrow M$ tal que $f(a)=P$ e $f(b)=Q$. Pelo lema 69, a aplicação exponencial é uma aplicação de recobrimento e pelo lema 68 ela é uma isometria local. Existe um levantamento

$$\tilde{f}: [a,b] \rightarrow T_P(M)$$

de f com $\tilde{f}(a)=P$.

Para cada $t \in [a,b]$ com $\exp_P(\tilde{f}(t))=f(t) \in U$ consideremos o levantamento r_t de $g_{f(t)}$ com $r_t(a)=f(t)$. Sendo \exp_P uma isometria local vem que r_t é uma reta em $T_P(M)$.

Para $t_1, t_2 \in [a,b]$ com $f(t_1) \neq f(t_2)$ temos r_{t_1} e r_{t_2} paralelos ou coincidentes. De fato, suponhamos $R = r_{t_1} \cap r_{t_2}$. Então, $\exp_P(R) \in g_{f(t_1)} \cap g_{f(t_2)}$ o que representa uma contradição.

(iii) Suponhamos que M seja constituída de pontos parabólicos e de pontos planares. Pelo lema 64, A é fechado em M . Então, o interior de A , $\overset{\circ}{A}$ é aberto em M .

Seja $Q \in M$. Se $Q \in \overset{\circ}{A}$, então recaímos no caso (i). Se $Q \in U$, então recaímos no caso (ii). Resta-nos considerar o caso em que $Q \in \text{fr}(U) = \text{fr}(A)$.

Pelo lema 67, passa por Q um único segmento (aberto) de reta e este segmento está contido em $\text{fr}(U)$. Pelos mesmos argumentos usados em (ii) podemos prolongar este segmento aberto de reta em uma reta $g_Q \subset \text{fr}(U)$. Além disso, se $P \in \text{fr}(U)$ e $P \notin g_Q$, então $g_Q \cap g_P = \emptyset$ ou $g_Q = g_P$.

Necessitamos demonstrar que se $P, Q \in \text{fr}(U)$, então as linhas g_P e g_Q tais que $g_P \cap g_Q = \emptyset$ são paralelas ou coincidentes. Isto é feito de modo semelhante ao que foi feito em (ii).

c.q.d.

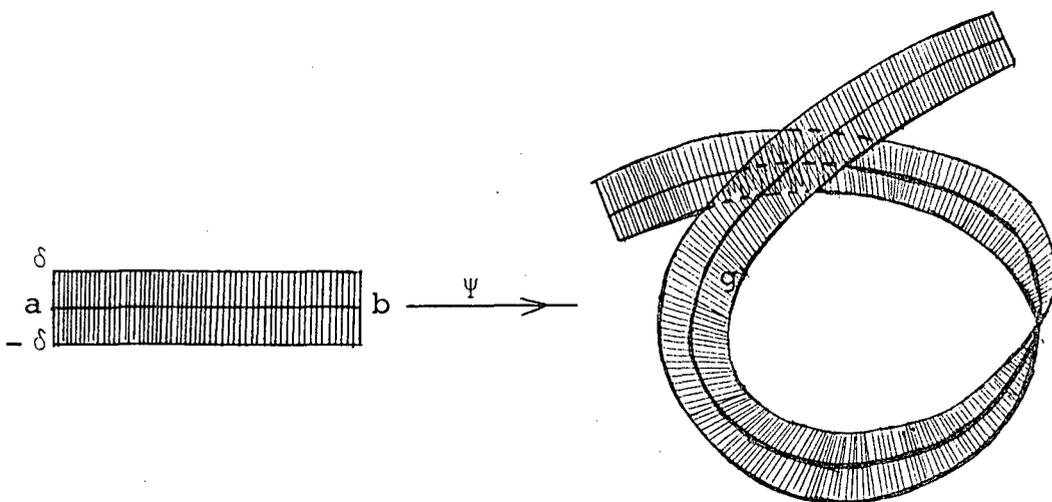
4.3. SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA K CONSTANTE POSITIVA

Neste parágrafo estamos interessados em superfícies M completas de curvatura $K > 0$ constante. Vamos desenvolver o conceito de variação de uma função diferenciável e determinar a primeira e segunda variação do comprimento de arco. Utilizaremos o conceito de derivação covariante apresentado no capítulo II. Demonstraremos que superfícies completas de $K > 0$ constante são compactas e fazendo uso dos teoremas 54 e 62 demonstraremos trivialmente que as únicas superfícies completas de $K > 0$ constante em \mathbb{R}^3 são as esferas, como resultado principal do parágrafo.

Seja $g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície M . Uma variação de g é uma aplicação diferenciável

$$\psi: [a, b] \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

tal que $\psi(s, 0) = g(s), \forall s \in [a, b]$ (figura 21).



(FIGURA 21)

Para cada $t_0 \in (-\delta, \delta)$, a curva $\psi_{t_0}: [a, b] \rightarrow M$ dada por

$\psi_{t_0}(s) = \psi(s, t_0)$ é denominada uma curva de variação de g .

Uma variação de g é chamada própria se

$$\psi_{t_0}(a) = \psi(a, t_0) = g(a) \text{ e } \psi_{t_0}(b) = \psi(b, t_0) = g(b)$$

para $t_0 \in (-\delta, \delta)$. Isto significa que todas as curvas da variação

tem mesmos extremos.

Vamos denotar o vetor tangente à curva $\psi_{t_0}(s) = \psi(s, t_0)$ em $\psi(s_0, t_0)$ por $d_{P_0} \psi(1, 0) = D_{(1, 0)} \psi(P_0)$, onde $P_0 = (s_0, t_0)$.

O vetor tangente à curva $\psi_t(s_0) = \psi(s_0, t)$ em $\psi(s_0, t_0)$ será denotado por $d_{P_0} \psi(0, 1) = D_{(0, 1)} \psi(P_0)$.

Dada uma variação ψ de g , fica determinado um campo diferenciável de vetores tangentes $T(s)$ ao longo de g dado por $T(s) = \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, 0)$, $s \in [a, b]$, o qual chamaremos campo variacional de ψ .

Quando ψ é própria, temos

$$(4.12) \quad T(a) = \frac{\partial \psi}{\partial s}(a, 0) = \frac{\partial}{\partial s} g(a) = \frac{\partial}{\partial s} g(b) = \frac{\partial \psi}{\partial s}(b, 0) = T(b).$$

O comprimento de cada curva de variação de g , ψ_t é dado por

$$\ell(\psi_t) = \int_a^b |\dot{\psi}_{t_0}(s)| ds = \int_a^b \left| \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0) \right| ds, \quad t_0 \in (-\delta, \delta).$$

A derivada desta função é

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} \ell(\psi_t) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0), \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0) \right\rangle} ds, \text{ ou} \\ \frac{d}{ds} \ell(\psi_t) &= \int_a^b \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0), \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0) \right\rangle}{\left| \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t_0) \right|} ds. \end{aligned}$$

Mas $\left| \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, 0) \right| = \left| \frac{d}{ds} g(s) \right| = 1$ pois g está parametrizada pelo comprimento de arco. Em t_0 temos

$$\frac{d}{ds} \ell(\psi_t) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial s} T(s), \frac{d}{ds} g(s) \right\rangle ds.$$

Logo,

$$(4.14) \quad \frac{d}{ds} \ell(\psi_t) \Big|_{s=0} = \int_a^b \langle \dot{T}(s), \dot{g}(s) \rangle ds.$$

Como $\dot{g}(s)$ está no plano tangente vem que $\dot{g}' = \dot{g}$, onde a ' denota a derivação covariante. Mas,

$$T(s) = \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, 0) = \dot{g}(s) ,$$

logo, $T'(s) = \dot{T}(s)$. Portanto, no ponto $s = 0$, temos

$$\langle \dot{T}(s), \dot{g}(s) \rangle = \langle T'(s), \dot{g}(s) \rangle + \langle T(s), \dot{g}'(s) \rangle - \langle T(s), \dot{g}'(s) \rangle .$$

Segue que

$$\langle \dot{T}(s), \dot{g}(s) \rangle = \langle T(s), \dot{g}(s) \rangle' - \langle T(s), \dot{g}'(s) \rangle .$$

Substituindo em (4.14), abreviando a notação, obtemos

$$\ell'(0) = \int_a^b [\langle T, \dot{g} \rangle' - \langle T, \dot{g}' \rangle] ds .$$

Logo,

$$(4.15) \quad \ell'(0) = \langle T, \dot{g} \rangle(b) - \langle T, \dot{g} \rangle(a) - \int_a^b \langle T, \dot{g}' \rangle ds .$$

A expressão (4.15) é denominada a primeira fórmula de variação do comprimento de g .

Se considerarmos ψ uma variação própria, então de (4.12) vem que

$$(4.16) \quad \ell'(0) = - \int_a^b \langle T, \ddot{g} \rangle ds .$$

Vamos denotar por $A(s)$ a seguinte expressão :

$$\ddot{g}(s) = \dot{g}'(s) = \frac{D}{ds} \dot{g}(s) = \frac{D}{ds} \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, 0) .$$

Assim, (4.16) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(4.17) \quad \ell'(0) = - \int_a^b \langle A(s), T(s) \rangle ds .$$

O vetor A é chamado vetor aceleração da curva g e seu valor absoluto nada mais é do que o valor absoluto da curvatura geodésica de g .

Diz-se que uma variação $\psi: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ é uma variação ortogonal se para todo $s \in [a, b]$ o campo variacional T de ψ é ortogonal a g .

TEOREMA 72

Uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $g:[a,b] \rightarrow M$ é uma geodésica de M se e somente se, para toda variação própria $\Psi:[a,b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ de g , ocorrer $\ell'(0) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO : Para demonstrar a condição necessária consideremos uma geodésica $g:[a,b] \rightarrow M$. Assim, temos que a curvatura de g é identicamente nula. Do exposto acima, vem que para todo $s \in [a,b]$, $A(s) = 0$. Portanto, $\langle A(s), T(s) \rangle = 0, \forall s \in [a,b]$. De (4.17) segue imediatamente que $\ell'(0) = 0$.

Para demonstrar a recíproca, suponhamos que, para toda variação própria de g se tenha $\ell'(0) = 0$.

Consideremos o campo vetorial $T(s) = f(s)A(s)$ onde $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real diferenciável tal que $f(s) \geq 0$, A é o vetor aceleração de g e $f(a) = f(b) = 0$.

Para uma variação correspondente a $T(s)$ obtemos

$$\ell'(0) = - \int_a^b \langle A(s), T(s) \rangle ds = - \int_a^b f(s) \langle A(s), A(s) \rangle ds.$$

Logo,

$$(4.18) \quad \ell'(0) = - \int_a^b f(s) |A(s)|^2 ds.$$

Como $f(s) \geq 0$ e $|A(s)|^2 \geq 0$ vem que

$$(4.19) \quad f(s) |A(s)|^2 \geq 0.$$

Como $\ell'(0) = 0$ vem, de (4.18) e (4.19), que

$$(4.20) \quad 0 = f(s) |A(s)|^2.$$

Suponhamos que para algum $s_0 \in (a,b)$ se tenha $|A(s_0)| \neq 0$. Como A é contínua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in I_{s_0} = (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ se tenha $|A(s)| \neq 0$. Escolhamos $f(s_0) > 0$ de modo que $f(s_0) |A(s_0)| \neq 0$.

Contradição com (4.20). Logo, $|A(s_0)| = 0 \quad \forall s_0 \in (a,b)$.

Pela continuidade de A segue que $A(a) = A(b) = 0$. Portanto,

$$|A(s)| = 0, \quad \forall s \in [a, b].$$

Mas A é o vetor aceleração de g o qual é identicamente nulo em $[a, b]$. Logo, g é uma geodésica.

c.q.d.

Seja $\Psi: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Chama-se campo diferenciável de vetores tangentes ao longo de uma curva $h: [a, b] \rightarrow M$ a uma aplicação diferenciável

$$T: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

a qual associa a cada ponto $(s, t) \in [a, b] \times (-\delta, \delta)$ um vetor $T(s, t) \in T_{\Psi(s, t)}(M)$.

LEMA 73.

Seja $\psi: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Então, para $s \in [a, b]$ e $t \in (-\delta, \delta)$, tem-se

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t).$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $X: U \rightarrow V \subset M$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança do ponto $\Psi(s, t)$ de M dada por

$$X(u, v) = X(\Psi_1(s, t), \Psi_2(s, t)).$$

Quando $(s, t) \in \Psi^{-1}(X(U))$, a curva $\Psi(s, t_0)$ para um dado $t_0 \in (-\delta, \delta)$ pode ser dada na forma $\Psi(s, t_0) = (\Psi_1(s, t_0), \Psi_2(s, t_0)) = (u, v)$. Como

$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s_0, t_0)$ é tangente à curva $\Psi(s, t_0)$ no ponto $s = s_0$, temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s}(s_0, t_0) X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s}(s_0, t_0) X_v.$$

Mas (s_0, t_0) foi tomado arbitrariamente, de modo que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s}(s, t) X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s}(s, t) X_v.$$

A curva $\Psi(s_0, t)$ para um dado $s_0 \in [a, b]$ pode ser dada por

$$\Psi(s_0, t) = (\Psi_1(s_0, t), \Psi_2(s_0, t)) = (u, v).$$

Como $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_0, t_0)$ é tangente à curva $\Psi(s, t_0)$ no ponto $s = s_0$, temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s_0, t_0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}(s_0, t_0)X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}(s_0, t_0)X_v.$$

Mas (s_0, t_0) foi tomado arbitrariamente, de modo que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}(s, t)X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}(s, t)X_v.$$

Usando (2.19) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial s} &= \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} X_v \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial s} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right) X_u + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial s} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right) X_v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} X_v \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial s \partial t} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \right) X_u + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial s \partial t} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \right) X_v. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes de X_u e de X_v são exatamente os mesmos nas duas expressões.

c.q.d.

LEMA 74

Sendo Ψ e T como acima e K a curvatura gaussiana de M , temos

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} T - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} T = K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \times T.$$

DEMONSTRAÇÃO : Seja $X(u,v)$ um sistema de coordenadas de M contendo o ponto $\Psi(s,t)$ e T um campo diferenciável de vetores tangentes. Neste sistema de coordenadas temos

$$(4.21) \quad T(s,t) = a(s,t)X_u(s,t) + b(s,t)X_v(s,t),$$

para algum par de funções diferenciáveis a e b .

Derivando-se esta expressão em relação à s (derivada covariante), encontramos

$$\frac{D}{\partial s}T = \frac{D}{\partial s}(aX_u + bX_v) = a\frac{D}{\partial s}X_u + b\frac{D}{\partial s}X_v + \frac{\partial a}{\partial s}X_u + \frac{\partial b}{\partial s}X_v.$$

Derivando-se, agora, em relação à t , temos

$$(4.22) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}T = a\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_u + b\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_v + \frac{\partial a}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_u + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_u + \\ + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_v + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}aX_u + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}bX_v.$$

Intertrocando-se a ordem das derivações em (4.22), obtemos

$$(4.23) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}T = a\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_u + b\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_v + \frac{\partial a}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_u + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_v + \\ + \frac{\partial a}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_u + \frac{\partial b}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_v + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t}aX_u + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t}bX_v.$$

Subtraindo-se (4.23) de (4.22), encontramos

$$(4.24) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}T - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}T = a\left[\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_u - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_u\right] + b\left[\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s}X_v - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t}X_v\right].$$

No sistema $X(u,v)$ temos $\Psi(s,t) = (u=\Psi_1(s,t), v=\Psi_2(s,t))$

de modo que

$$X_u(u,v) = X_u(\Psi_1(s,t), \Psi_2(s,t)).$$

$$X_v(u,v) = X_v(\Psi_1(s,t), \Psi_2(s,t)).$$

Tendo em vista que a derivada covariante nada mais é do que a projeção sobre o plano tangente da derivação usual e denotando esta projeção por T , obtemos

$$\frac{D}{\partial s}X_u = \left\{\frac{d}{\partial s}X_u\right\}_T = \left\{X_{uu} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} + X_{uv} \frac{\partial \Psi_2}{\partial s}\right\}_T = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \{X_{uu}\}_T + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \{X_{uv}\}_T,$$

ou seja

$$\frac{D}{\partial s}X_u = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{D}{\partial u}X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{D}{\partial v}X_u, \text{ que derivado em relação à}$$

t resulta em

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_u &= \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{D}{\partial v} X_u \right) \right\}_T \\ &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial s} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial s} \frac{D}{\partial v} X_u + \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{D}{\partial u} X_u \right\}_T + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{D}{\partial v} X_u \right\}_T . \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} (4.25) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_u &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial s} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial s} \frac{D}{\partial v} X_u + \\ &+ \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u \right) + \\ &+ \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial v} X_u \right) . \end{aligned}$$

Intertrocando-se a ordem da derivação em (4.25) obtemos

$$\begin{aligned} (4.26) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_u &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial s \partial t} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial s \partial t} \frac{D}{\partial v} X_u + \\ &+ \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial u} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u \right) + \\ &+ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial v} X_u \right) . \end{aligned}$$

Subtraindo-se (4.26) de (4.25) encontramos

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_u - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_u = \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u \right) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u \right)$$

Logo,

$$(4.27) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_u - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_u = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u \right) .$$

Fazendo-se a troca de X_u por X_v e vice-versa em (4.27), encontramos

$$(4.28) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_v - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_v = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_v - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_v \right) .$$

Subtraindo-se (4.27) e (4.28) de (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} T - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} T &= a \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_u \right) + \\ &+ b \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) \left(\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_v - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X_v \right) . \end{aligned}$$

Usando proposição 34, temos

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} T - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} T = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) [aK(X_u \times X_v) \times X_u + bK(X_u \times X_v) \times X_v],$$

ou seja,

$$(4.29) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} T - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} T = K \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) (X_u \times X_v) \times (aX_u + bX_v).$$

Como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} X_v, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} X_u + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} X_v,$$

vem que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) X_u \times X_v$$

que substituído em (4.29) juntamente com (4.21) produz o resultado esperado.

c.q.d.

LEMA 75

Se $\Psi: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ é uma variação ortogonal própria de uma geodésica $g: [a, b] \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco, $s \in [a, b]$, $t \in (-\delta, \delta)$ e $T(s) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, 0)$ é o campo variacional de Ψ , então

$$\ell''(0) = \int_a^b \left(\left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 - K(s) |T(s)|^2 \right) ds,$$

onde $K(s) = K(s, 0)$ é a curvatura gaussiana de M em $g(s) = \Psi(s, 0)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como g é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, 0) \right| = |g'(s)| = 1.$$

Então, existe $\mu > 0, \mu \leq \delta$ tal que $t \in [-\mu, \mu]$, $\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t) \right|$ é diferenciável. O comprimento de cada curva Ψ_t da variação de g é

$$\ell(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t) \right| ds,$$

$t \in [-\mu, \mu]$. Omitindo a variável, por comodidade, temos

$$\begin{aligned} \ell'(t) &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right| ds = \int_a^b \frac{d}{dt} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle} ds = \\ &= \int_a^b \frac{\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle}{2 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|} ds. \text{ Pela proposição 32, temos} \end{aligned}$$

$$\ell'(t) = \int_a^b \frac{\left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|} ds. \text{ Pelo lema 73, temos}$$

$$\ell'(t) = \int_a^b \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|} ds$$

Derivando-se novamente em relação a t , encontramos

$$\ell''(t) = \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|} ds = \int_a^b \frac{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right| \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|^2} ds$$

Segue que

$$(4.30) \quad \ell''(t) = \int_a^b \frac{1}{\left| \frac{d\Psi}{ds} \right|} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle ds -$$

$$- \int_a^b \frac{1}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|^2} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle \frac{1}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle ds.$$

No entanto, temos

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, 0) \right| = |g'(s)| = 1. \text{ Substituindo em (4.30) temos}$$

$$(4.31) \quad \ell''(0) = \int_a^b \left\langle \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi(s, 0), \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Psi(s, 0) \right\rangle ds -$$

$$- \int_a^b \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi(s, 0), \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Psi(s, 0) \right\rangle^2 ds.$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } \frac{d}{ds} \langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,t) \rangle &= \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,t) \rangle + \\ &+ \langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,t), \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,t) \rangle . \end{aligned}$$

Em particular, para a geodésica g temos $A(s) = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,0) = 0$,

de modo que

$$\frac{d}{ds} \langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,0), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,0) \rangle = \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,0) \rangle .$$

Como a variação é própria, vem que o produto interno do primeiro membro da igualdade acima é nulo. Disto segue que o segundo membro também é nulo. Substituindo-o na equação (4.31) vem que

$$(4.32) \quad \ell''(0) = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s,0), \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,0) \rangle ds .$$

A equação (4.32) é chamada segunda fórmula de variação do comprimento de g . Novamente pela proposição 32 temos em (s,t)

$$\begin{aligned} (4.33) \quad \frac{d}{dt} \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle &= \langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle = \\ &= \langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle - \langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \\ &+ \langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle . \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \frac{d}{ds} \langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle = \langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle .$$

Como $A(s) = 0$ em $(s,0)$, temos

$$\frac{d}{ds} \langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle = \langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle . \text{ Substituindo em (4.33) vem}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle &= \langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle - \langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \\ &+ \frac{d}{ds} \langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \rangle + \left| \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|^2 . \text{ Substituindo em (4.32)} \end{aligned}$$

obtemos

$$\ell''(0) = \int_a^b \left(\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|^2 \right) ds.$$

Usando a distributividade do produto interno em relação à adição, temos

$$\ell''(0) = \int_a^b \left(\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|^2 \right) ds.$$

Usando o lema 74 e o fato que a variação é própria temos

$$\langle A(s), T(s) \rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle = 0. \text{ Assim}$$

$$\begin{aligned} \ell''(0) &= \int_a^b \left(\left\langle K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 \right) ds. \\ &= \int_a^b \left(-K \left\langle \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 \right) ds \\ &= \int_a^b \left(-K \left| T(s) \right|^2 \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 \right) ds \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle ds + \int_a^b \left(-K \left| T(s) \right|^2 \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Como a variação é própria $T(a) = T(b)$ e a primeira integral é igual a zero. Assim,

$$\ell''(0) = \int_a^b \left(\left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 - K(s) |T(s)| \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle \right) ds. \text{ Mas,}$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right\rangle = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|^2 = |g'(s)|^2 = 1. \text{ Logo,}$$

$$\ell''(0) = \int_a^b \left(\left| \frac{D}{\partial s} T(s) \right|^2 - K(s) |T(s)| \right) ds.$$

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 76

Se a superfície M tem curvatura não negativa $K \geq \rho$, onde $\rho > 0$, então M é limitada. Se P e Q são dois pontos quaisquer de M e $\ell = d(P, Q)$, então $\ell \leq \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 . Sejam P e Q dois pontos quaisquer de M . Pelo teorema 60 existe uma geodésica minimal $g: [a, b] \rightarrow M$ tal que $g(a) = P$ e $g(b) = Q$.

Seja $\ell = d(P, Q)$. Suponhamos que $\ell > \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$, por absurdo.

Consideremos uma variação da geodésica g tal que para um vetor unitário $w_0 \in T_P(M)$ se tenha $\langle w_0, g'(a) \rangle = 0$; isto é, w_0 é um vetor tangente a M mas ortogonal à curva g . Seja

$$w: T_P(M) \rightarrow T_Q(M)$$

o transporte paralelo de w_0 ao longo de g . Portanto, para todo $s \in [a, b]$ tem-se $|w(s)| = 1$ e $\langle w(s), g'(s) \rangle = 0$.

Definamos o campo variacional

$$T(s) = w(s) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(s-a)}{\ell} \right], \quad s \in [a, b].$$

Segue que $T(a) = w(a) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(a-a)}{\ell} \right] = 0$,

$$T(b) = w(b) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(b-a)}{\ell} \right] = 0,$$

$$\langle T(s), g'(s) \rangle = \langle w(s) \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(s-a)}{\ell} \right], g'(s) \rangle = 0.$$

Portanto, T determina uma variação ortogonal própria ao longo de g . Pelo lema 75 vem que

$$(4.34) \quad \ell''(0) = \int_a^b \left(\left| \frac{D}{ds} T(s) \right|^2 - K(s) |T(s)|^2 \right) ds.$$

Como w é paralelo ao longo de g podemos escrever

$$\frac{D}{ds}T(s) = \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) w(s).$$

Substituindo em (4.34) vem que

$$\ell''(0) = \int_a^b \left\langle \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) w(s), \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) w(s) \right\rangle - K(s) \left\langle w(s) \sin\left(\frac{\pi}{\ell}s\right), w(s) \sin\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \right\rangle ds$$

Disto segue que

$$\ell''(0) = \int_a^b \left[\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - K(s) \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \right] ds.$$

Como $K \geq \rho$ vem que

$$\ell''(0) \leq \int_a^b \left[\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - \rho \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \right] ds.$$

Assumimos anteriormente que $\ell > \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$. Disto vem que $\rho > \frac{\pi^2}{\ell^2}$ e a equação acima assume a forma

$$\ell''(0) < \int_a^b \left[\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \right] ds.$$

Logo,

$$\ell''(0) < \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \int_a^b \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}s\right) \right] ds.$$

Utilizando a transformação trigonométrica $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ obtemos

$$\ell''(0) < \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \int_a^b \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}s\right) ds = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \left(\frac{\ell}{2\pi}\right) \int_a^b \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}s\right) \left(\frac{2\pi}{\ell}\right) ds.$$

Logo,

$$\ell''(0) < \frac{\pi}{2\ell} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\ell}s\right) \right]_a^b = \frac{\pi}{2\ell} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\ell}b\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}a\right) \right] = 0.$$

Segue que $\ell''(0) < 0$.

Deste modo, obtemos uma variação de g para a qual $\ell''(0) < 0$. No entanto, g é uma geodésica minimal por hipótese e, assim, seu comprimento é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva unindo P a Q . Portanto, para g deveríamos ter $\ell'(0) = 0$ e $\ell''(0) \geq 0$.

Portanto, $\ell \leq \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$.

Como P e Q foram tomados arbitrariamente, vem que M é limitada.

c.q.d.

COROLÁRIO 77

Uma superfície completa M com $K > 0$ constante é compacta.

DEMONSTRAÇÃO : Consideremos a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ tendo curvatura constante $K > 0$. Pela proposição 76 vem que M é limitada na métrica d_I . Sendo que $d_I \geq d_E$, M é limitada na métrica d_E .

Pelo teorema 62 as métricas usual do \mathbb{R}^3 e intrínseca definem a mesma topologia. Assim, M é fechado e limitado em \mathbb{R}^3 e, portanto, compacta.

c.q.d.

TEOREMA 78

As únicas superfícies completas em \mathbb{R}^3 que tem curvatura constante $K > 0$ são as esferas.

DEMONSTRAÇÃO : Consideremos a superfície completa $M \subset \mathbb{R}^3$ tendo curvatura constante $K > 0$. Pelo corolário 77, M é compacta. Pelo teorema 54, M é uma esfera em \mathbb{R}^3 .

c.q.d.

4.4. SUPERFÍCIES COMPLETAS DE CURVATURA K CONSTANTE NEGATIVA

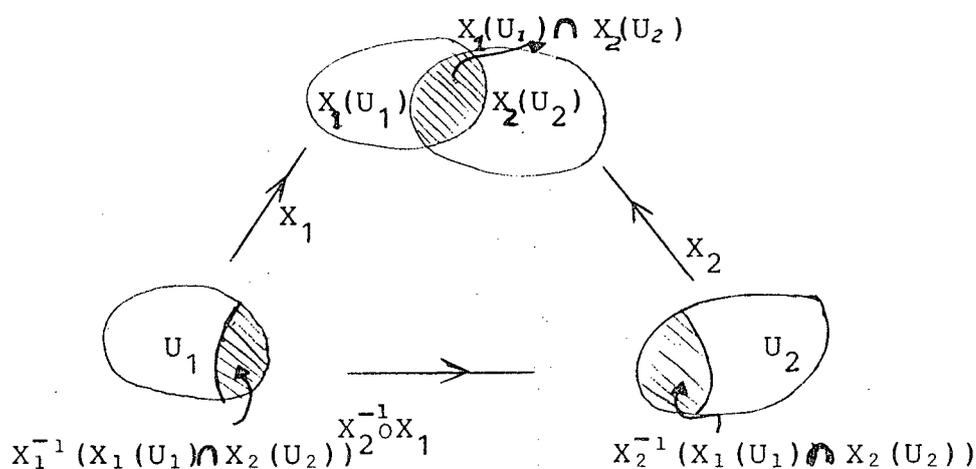
Para completar o capítulo vamos mostrar que em \mathbb{R}^3 não existe superfície completa com curvatura $K < 0$ constante. Este fato é conhecido como o teorema de Hilbert e será o nosso principal objeto a ser demonstrado. Para chegar até sua demonstração faremos uso das redes de Tchebychef.

Um espaço de Hausdorff M é dito uma superfície abstrata se para cada $P \in M$, existe uma terna (U, V, X) satisfazendo às seguintes condições:

(i) U é uma vizinhança de $(0,0)$ em \mathbb{R}^2 e V é uma vizinhança de P em M .

(ii) X é um mergulho de U sobre V tal que $X(0,0) = P$.

(iii) Se U_1 e U_2 são abertos de \mathbb{R}^2 tais que $X_1(U_1) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$, então $X_2^{-1} \circ X_1$ é uma função C^∞ (figura 22) de $X_1^{-1}(X_1(U_1) \cap X_2(U_2))$ para $X_2^{-1}(X_1(U_1) \cap X_2(U_2))$.



(FIGURA 22)

A aplicação X é chamada um sistema de coordenadas locais em V e V é dita uma vizinhança coordenada de P . A terna (U, V, X) é chamada uma carta local de M .

EXEMPLO 15

Uma superfície em \mathbb{R}^3 apresentada como no §1.4 é uma superfície abstrata.

Uma função $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $P \in M$ se a função $f \circ X:U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável para toda carta (U,V,X) de M .

Uma curva em M é uma aplicação diferenciável $g:I \rightarrow M$ onde I é um aberto de \mathbb{R} . Quando M é uma superfície em \mathbb{R}^3 , então esta definição coincide com aquela apresentada no §1.3.

Seja F o conjunto de todas as aplicações diferenciáveis definida em uma vizinhança V de $P \in M$, com valores em \mathbb{R} . Se $0 \in I$ e $g(0) = P$, então o vetor tangente à curva g no ponto P é a função

$$g'(0):F \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $g'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ g)}{dt} \right|_{t=0}$.

Um vetor tangente em um ponto $P \in M$ é um vetor tangente a alguma curva $g:I \rightarrow M$ com $g(0) = P$ para algum aberto $I \subset \mathbb{R}$.

O conjunto de vetores tangentes em $P \in M$, juntamente com as operações usuais de funções é um espaço vetorial de dimensão dois e chama-se espaço tangente à M em P ou plano tangente à M em P e denota-se por $T_P(M)$ (figura 23).

O fibrado tangente de M é definido por $T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M)$.

A aplicação $\Pi:T(M) \rightarrow M$ que atribui a cada $v \in T(M)$ um único $P \in M$ tal que $T_P(M)$ é o plano tangente à M em P é chamada aplicação projeção.

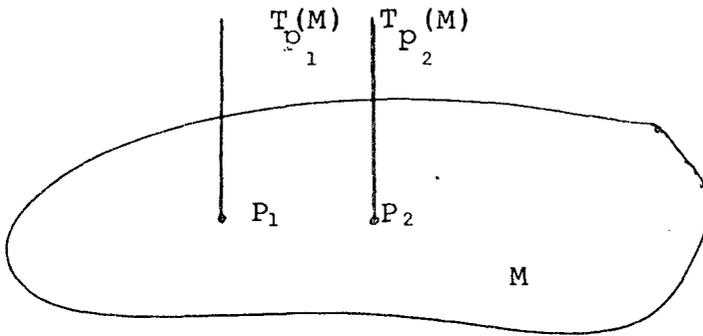
Um campo vetorial tangente à M em P é a aplicação

$$T : M \rightarrow T(M)$$

tal que $\Pi \circ T = I_P$. O campo T é dito diferenciável se para cada

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável se tenha $Tf : M \rightarrow \mathbb{R}$ também diferenciável, onde $(Tf)(P) = T(P)f$. Usaremos apenas a denomi-

nação campo diferenciável para campos vetoriais tangentes diferenciáveis.



(FIGURA 23)

Estabeleceremos, agora, uma semelhança entre esta definição de espaço tangente e aquela apresentada no §1.4.

Seja $X:U \rightarrow V$ uma carta local de M contendo P , $T(M)$ o fibrado tangente de M , $(x_1, x_2) \in U$, T_1, T_2 campos diferenciáveis e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$(T_1 + T_2)(P) = T_1(P) + T_2(P) \quad , \quad e$$

$$(\lambda T_1)(P) = \lambda(T_1(P)).$$

Com estas operações o conjunto $T(M)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

PROPOSIÇÃO 79

Seja $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável onde $U \subset \mathbb{R}^2$ tem coordenadas x_1 e x_2 e $X:U \rightarrow V$ uma carta local de M . Então

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{é um campo diferenciável.}$$

DEMONSTRAÇÃO : Como f é diferenciável e X uma carta local vem que

$f \circ X^{-1}:X(U) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Consideremos r_i as funções coordenadas de $f \circ X^{-1}$. Para cada ponto $P \in U$ temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(f) \right](P) = \left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ X^{-1}) \right](X(P)) = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ X^{-1}) \right] \circ X \right\}(P).$$

Mas isto significa que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \left[\frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ X^{-1}) \right] \circ X$$

é uma função diferenciável. Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é um campo diferenciável.

c.q.d.

Observamos que escolhendo-se uma base em U ,

$\{(1,0), (0,1)\}$ temos que

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (P) \right\}_{i=1,2}$$

é uma base para $T(M)$. Mas $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_j) = \delta_{ij} \cdot x_j$ é a j -ésima função coordenada de X^{-1} .

Desta forma existem funções diferenciáveis $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2$ tais que

$$T = \sum_{i=1}^2 a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

é uma aplicação diferenciável de U em $T(U)$. Portanto,

$$a_j = \sum_{i=1}^2 a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^2 a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_j) = T(x_j).$$

Fazendo-se $a_1 = a$, $a_2 = b$, $x_1 = u$, $x_2 = v$, $P = X(u,v)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) (P) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) X(u,v) = X_u, \text{ e}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) (P) = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) X(u,v) = X_v,$$

de modo que a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (P), \frac{\partial}{\partial x_2} (P) \right\} \text{ de } T(M) \text{ coincide com a base } \{X_u, X_v\}$$

de $T_P(M)$.

Em cada $T_P(M)$ escolhemos um produto interno \langle, \rangle e

exigimos que este produto interno seja diferenciável no seguinte sentido. Se T_1 e T_2 são campos diferenciáveis de vetores tangentes à M em uma vizinhança de P , então $\langle T_1, T_2 \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle T_1, T_2 \rangle (x) = \langle T_1(x), T_2(x) \rangle \text{ é uma função diferenciável.}$$

Uma superfície abstrata M na qual se tenha feito uma escolha como acima recebe o nome de superfície geométrica, ou superfície Riemanniana abstrata ou simplesmente superfície. Daqui

para a frente diremos apenas superfícies M para expressar tal idéia.

Como temos um produto interno numa superfície abstrata M , podemos definir em M uma primeira forma fundamental. A geometria de M será, assim, a geometria da primeira forma fundamental.

Consideremos a carta local (U,V,X) de M . Definimos nesta carta os coeficientes fundamentais locais de M por

$$(4.35) \quad \begin{cases} E(u,v) = \langle X_u(u,v), X_u(u,v) \rangle, \\ F(u,v) = \langle X_u(u,v), X_v(u,v) \rangle, \text{ e} \\ G(u,v) = \langle X_v(u,v), X_v(u,v) \rangle. \end{cases}$$

O comprimento de arco de uma curva $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é definido por

$$s(t) = \int_a^b \langle f'(r), f'(r) \rangle^{\frac{1}{2}} dr = \int_a^b \sqrt{I_{f(r)}(f'(r))} dr =$$

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dr,$$

onde E, F, G são como em (4.35) e $I = [a, b]$.

Seja $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável e $X: U \rightarrow V$ uma carta local em M . Consideremos uma aplicação $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(0,0) = P$. Definimos a aplicação $f_{*P}: T_P(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$f_{*P}(aX_u + bX_v) = \begin{bmatrix} \psi' \\ (0,0) \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

A aplicação f é dita uma imersão se para cada $P \in M$ e toda carta local (U,V,X) , f_{*P} é injetiva.

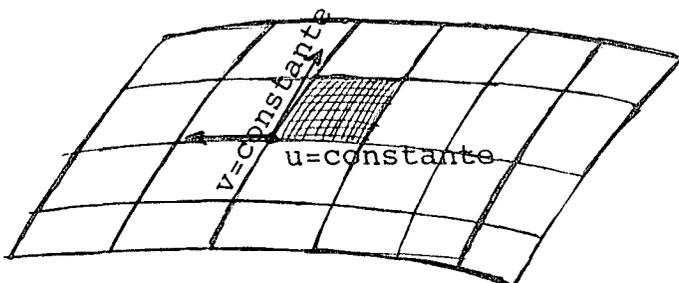
Se ocorrer que para todo par $T_1, T_2 \in T_P(M)$ se tenha

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \langle f_{*P}(T_1), f_{*P}(T_2) \rangle,$$

então f é dita uma imersão isométrica.

Dado um sistema de coordenadas de uma superfície M , diz

se que as linhas coordenadas formam uma rede de Tchebychef se os lados opostos de qualquer quadrilátero por elas formados são paralelos. (figura 24).



(FIGURA 24)

Consideremos uma carta local (U,V,X) de uma superfície M de modo que as linhas coordenadas formem uma rede de Tchebychef. Ao longo da linha $v=\text{constante}$ teremos

$$(4.36) \quad E(u,v) = \langle X_u(u,v), X_u(u,v) \rangle$$

independente de v , bem como ao longo da linha $u=\text{constante}$ teremos

$$(4.37) \quad G(u,v) = \langle X_v(u,v), X_v(u,v) \rangle$$

independente de u .

Derivando-se (4.36) em relação a v e (4.37) em relação a u obtemos

$$(4.38) \quad E_v = G_u = 0,$$

que expressa uma condição necessária e suficiente para que as linhas coordenadas formem uma rede de Tchebychef.

Como E e G são funções de uma única variável, respectivamente, u e v , podemos efetuar a substituição

$$\begin{cases} u^* = \sqrt{E}u \\ v^* = \sqrt{G}v \end{cases}$$

na carta (U,V,X) . Agora, u^* e v^* medem os comprimentos de arcos ao longo das linhas coordenadas. Omitindo o símbolo $*$ por comodidade, temos nesta nova carta $E = G = 1$. Se θ denotar o ângulo en-

tre X_u e X_v ; isto é, o ângulo entre as linhas coordenadas, teremos

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = |X_u| |X_v| \cos \theta = \cos \theta.$$

É, pois, possível encontrar uma carta local (U, V, X) de uma superfície M de modo que as linhas coordenadas formem uma rede de Tchebychef e satisfazendo

$$(4.39) \quad E = G = 1 \text{ e } F = \cos \theta.$$

Vamos encontrar os símbolos de Christoffel e a equação da curvatura K para um sistema de coordenadas da superfície M dada pelos coeficientes (4.39). Como $E = G = 1$ e $F = \cos \theta$ vem que

$$(4.40) \quad \begin{cases} E_u = E_v = G_u = G_v = 0 \\ F_u = -\theta_u \operatorname{sen} \theta \\ F_v = -\theta_v \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Desta forma, encontramos

$$(4.41) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \theta_u \cot \theta, \quad \Gamma_{11}^2 = -\theta_u \operatorname{csc} \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\theta_v \operatorname{csc} \theta, \\ \Gamma_{22}^2 = \theta_v \cot \theta.$$

Seja a equação de compatibilidade (1.16)

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1.$$

Substituindo-se (4.41) vem

$$K \cos \theta = -(\theta_u \cot \theta)_v - (-\theta_u \operatorname{csc} \theta)(-\theta_v \operatorname{csc} \theta).$$

Assim,

$$K \cos \theta = -\theta_{uv} \cot \theta + \theta_u \theta_v \operatorname{csc}^2 \theta - \theta_u \theta_v \operatorname{csc}^2 \theta,$$

ou seja,

$$K = -\theta_{uv} \frac{\cot \theta}{\cos \theta},$$

Finalmente,

$$(4.42) \quad K = -\frac{\theta_{uv}}{\operatorname{sen} \theta}.$$

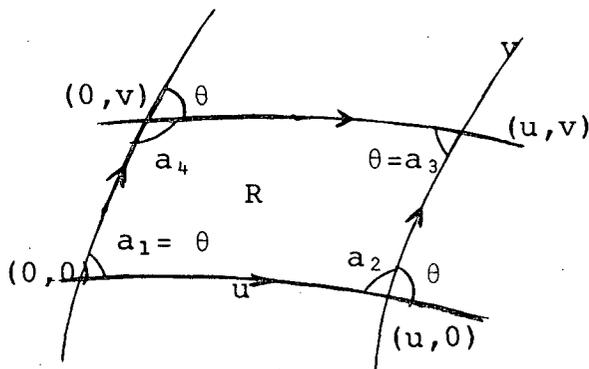
PROPOSIÇÃO 80

Se as linhas coordenadas de um sistema de coordenadas de uma superfície M formam uma rede de Tchebychef, então

$$\iint_R K dA = 2\pi - \sum_{i=1}^4 a_i,$$

onde R é o quadrilátero formado pelas linhas coordenadas, A é sua área e $0 < a_i < \pi$ são os ângulos internos do quadrilátero.

DEMONSTRAÇÃO : Seja R um quadrilátero de vértices $(0,0)$, $(u,0)$, (u,v) , $(0,v)$, a_i ($i=1,2,3,4$) seus ângulos internos e θ o ângulo formado pelas linhas coordenadas (figura 25) que formam R .



(FIGURA 25)

Observamos que $\iint_R \theta_{uv} dudv = \theta(0,0) + \theta(u,v) - \theta(u,0) - \theta(0,v)$.

Usando (4.42) vem que

$$\begin{aligned} \iint_R \theta_{uv} dudv &= \iint_R -K \operatorname{sen} \theta dudv = - \iint_R K \operatorname{sen} \theta dudv \\ &= \theta(0,0) + \theta(u,v) - \theta(u,0) - \theta(0,v). \end{aligned}$$

Mas $\theta(0,0) = a_1$, $\theta(u,v) = a_3$, $\theta(u,0) = \pi - a_2$ e $\theta(0,v) = \pi - a_4$. Denotando-se por $dA = \operatorname{sen} \theta dudv$, a igualdade acima se transforma em

$$\iint_R K dA = \pi - a_2 + \pi - a_4 - a_1 - a_3,$$

ou seja,

$$(4.43) \quad \iint_R K dA = 2\pi - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

c.q.d.

COROLÁRIO 81

Se as linhas coordenadas de um sistema de coordenadas locais de uma superfície M com curvatura $K = -1$ constante formam uma rede de Tchebychef, então a área de qualquer quadrilátero da rede é menor do que 2π .

DEMONSTRAÇÃO : Façamos $K = -1$ em (4.43). Então,

$$\iint dA = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2\pi.$$

Mas $0 < a_i < \pi$, logo, $0 < \sum_{i=1}^4 a_i < 4\pi$. Assim,

$$A = \iint dA = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2\pi < 4\pi - 2\pi,$$

de modo que

$$A < 2\pi.$$

c.q.d.

Pelo teorema 39 a aplicação exponencial é um difeomorfismo local. Deste modo, sua inversa está definida em uma vizinhança de um ponto $P \in M$. Através desta inversa podemos transportar para $T_P(M)$ a métrica existente em M . Vamos denotar por M' a superfície geométrica $T_P(M)$ munida desta métrica.

Suponhamos que M é um plano com coordenadas (u, v) e definamos em cada ponto $Q \in M$ um produto interno de modo que se tenha

$$E = \frac{1}{(1 - \frac{u^2}{4})^2}, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = \frac{u^2}{(1 - \frac{u^2}{4})^2}.$$

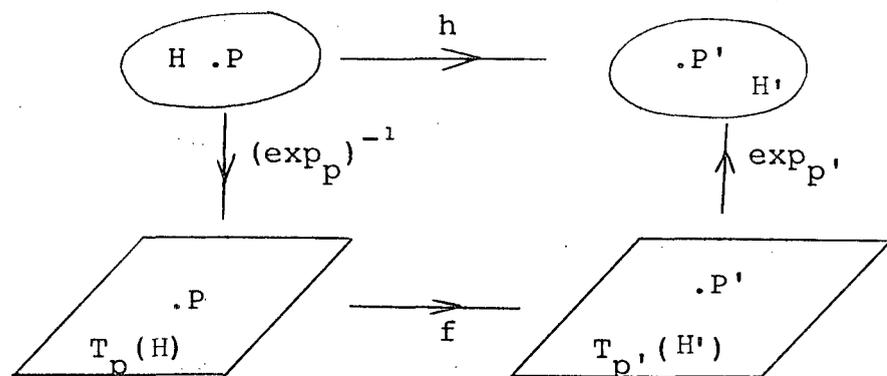
A superfície M com este produto interno é uma superfície geométri

ca denominada plano hiperbólico. No apêndice demonstraremos que a curvatura K de M é constante e tem valor -1 . Denotaremos o plano hiperbólico por H .

Seja $P \in H$. Vamos transportar para $T_p(H)$ a métrica de H por meio da aplicação inversa da aplicação exponencial em P e denotar a superfície geométrica $T_p(H)$ com a métrica herdada de H por esta aplicação por H' . Seja $P' \in H'$ e a isometria linear

$$f: T_p(H) \rightarrow T_{p'}(H').$$

Definamos ainda $h: H \rightarrow H'$ por $h = \exp_{p'} \circ f \circ (\exp_p)^{-1}$. H é uma superfície completa de modo que qualquer ponto de H pode ser unido à P por uma geodésica minimal pelo teorema 60. Assim, h é bem definida (figura 26).



(FIGURA 26)

Sejam (s, θ) e (s', θ') sistemas de coordenadas geodésicas polares de centro P e P' , respectivamente, de modo que h transforme o eixo $\theta = 0$ no eixo $\theta' = 0$. Assim, h preservará a primeira forma fundamental. Logo, h é uma isometria local entre H e H' . De um modo geral, as superfícies M com $K < 0$ são localmente isométricas de modo que se M pode ser isometricamente imersa em \mathbb{R}^3 também o pode M' . Desta forma vamos considerar M' no lugar de M .

Observamos que uma superfície geométrica está definida num espaço de Hausdorff onde não sabemos como definir elementos que definimos numa superfície em \mathbb{R}^3 , como por exemplo, o vetor

normal N . No entanto, consideramos M como um plano, logo $M \subset \mathbb{R}^3$. Definimos a superfície H' de modo que $T_p(H)$ e $T_p(H')$ são localmente isométricas. Desta forma, $T_p(H) = T_p(H') \subset \mathbb{R}^3$. Portanto, $H' \subset \mathbb{R}^3$, embora em H' não tenhamos a mesma primeira forma fundamental de \mathbb{R}^3 .

PROPOSIÇÃO 82

A área de H' é infinita.

DEMONSTRAÇÃO : Como H' herda a métrica de H através de $(\exp_p)^{-1}$, temos para H' os coeficientes fundamentais

$$E = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{u^2}{\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^2},$$

na carta local (U, V, X) de H .

Consideremos A a área de H' . Como $H' = (\exp_p)^{-1}(H)$ vem do §1.5 página 12 que

$$A = \iint_{H'} \sqrt{EG-F^2} \, dudv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)} \, dudv.$$

Segue que

$$A = \infty. \quad \text{c.q.d.}$$

A seguir assumiremos a existência de uma imersão isométrica $\Psi: M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície completa M' , homeomorfa a um plano e com curvatura $K = -1$.

PROPOSIÇÃO 83

Seja (U', V', X) uma carta local de M' contendo P . Então, as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebychef em V' .

DEMONSTRAÇÃO : Como a curvatura K de M' é constante e tem valor -1 em qualquer ponto P vem que P é um ponto hiperbólico de M' em V' . Consideremos $\psi(P) \in \mathbb{R}^3$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ uma vizinhança de $\psi(P)$. Como ψ é um imersão isométrica vem que K é também negativa e constante em V . Desta forma $\psi(P)$ é também um ponto hiperbólico em V . Temos, assim, um sistema de coordenadas locais $X(u, v)$ de V onde as linhas coordenadas são linhas assintóticas. Pela proposição 9 temos que $e = g = 0$.

Em V vale a equação (3.2), a saber, $N_u \times N_v = K(X_u \times X_v)$. Temos também a relação

$$\begin{aligned} (N \times N_v)_u - (N \times N_u)_v &= N_u \times N_v + N \times N_{vu} - N_v \times N_u - N \times N_{uv} = \\ &= 2N_u \times N_v . \end{aligned}$$

Portanto,

$$2N_u \times N_v = 2K \frac{(X_u \times X_v)}{|X_u \times X_v|} |X_u \times X_v| = 2K |X_u \times X_v| N \quad ..$$

Assim,

$$(4.44) \quad (N \times N_v)_u - (N \times N_u)_v = 2K |X_u \times X_v| N.$$

Mas,

$$(4.45) \quad N \times N_v = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \times N_v = \frac{1}{|X_u \times X_v|} (\langle X_u, N_v \rangle X_v - \langle X_v, N_v \rangle X_u).$$

Das equações de Weingarten (1.15) vem que

$$\langle X_u, N_v \rangle = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \langle X_u, X_v \rangle .$$

$$\langle X_v, N_v \rangle = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \langle X_u, X_v \rangle + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \langle X_v, X_v \rangle .$$

Mas como $F = e = g = 0$ vem que

$$\langle X_u, N_v \rangle = -f.$$

$$\langle X_v, N_v \rangle = 0.$$

Substituindo em (4.45) obtemos

$$(4.46) \quad N \times N_v = \frac{1}{|X_u \times X_v|} (-f X_v).$$

Da mesma forma, obtemos

$$(4.47) \quad N \times N_u = \frac{1}{|X_u \times X_v|} (f X_u).$$

Como $K = -1 = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, em particular, ao longo de uma li

nha assintótica temos $-(EG-F^2) = -f^2$. Assim,

$$\sqrt{EG-F^2} = |X_u \times X_v| = \pm f.$$

Substituindo-se esta em (4.46) e em (4.47) obtemos

$$N \times N_v = \mp X_v, \quad \text{e} \quad N \times N_u = \pm X_u,$$

os quais substituídos em (4.44) produzem $(\mp X_v)_u - (\pm X_u)_v = -2(\pm f)N$.

Logo,

$$X_{uv} = \pm fN.$$

Portanto, X_{uv} é paralelo a N . Disto se pode concluir que

$$\langle X_u, X_{uv} \rangle = \langle X_u, X_u \rangle_v = \langle X_v, X_{uv} \rangle = \langle X_v, X_v \rangle_u = 0. \text{ Finalmente,}$$

$$E_v = G_u = 0,$$

as quais nos permitem concluir que as linhas coordenadas

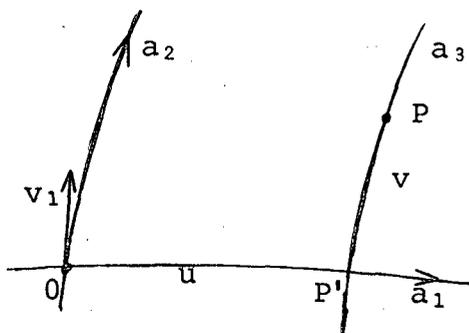
formam uma rede de Tchebychef .

c.q.d.

Até agora tratamos com um sistema de coordenadas locais de M' . Vamos, agora, partir de um sistema de coordenadas locais $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$ de uma vizinhança da origem do \mathbb{R}^2 , na qual as linhas assintóticas formem uma rede de Tchebychef (proposição 83) e extendê-lo a um sistema de coordenadas globais de M' . Este sis-

tema de coordenadas globais X cobrirá toda M' por redes de Tchebychef tendo cada retângulo área finita (proposição 80). Daí obteremos uma contradição com a proposição 82 que afirma ser infinita a área de M' . Desta forma estaremos demonstrando que M' não pode ser imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 que é o teorema de Hilbert.

Definamos um sistema X numa vizinhança pequena V' de M' . Fixemos um ponto $O \in V'$; escolhamos uma das linhas assintóticas que passam por O e a denotemos por a_1 ; escolhamos uma das direções de a_1 para ser a direção positiva. Tomemos a outra linha assintótica, a_2 , e arbitremos uma direção positiva para ela, e um vetor v_1 nesta direção. Suponhamos que o ponto $(u,v) \in V'$. Medimos sobre a_1 um comprimento u , a partir de O , na direção positiva. Denotemos por P' o ponto de a_1 , distante u de O na direção positiva de a_1 . Por P' passam duas linhas assintóticas sendo uma delas a_1 . Chamemos a outra de a_3 . Marquemos sobre a_3 um comprimento v , a partir de P' , na direção correspondente ao vetor v_1 . Desta forma, fica definido, univocamente, o ponto $P = X(u,v)$ (figura 27).



(FIGURA 27)

Devemos estender X para todo ponto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Isto será feito através das quatro proposições 84, 85, 87 e 91.

PROPOSIÇÃO 84

$X(u,v)$ está definida para todo ponto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos que $X(u_0, 0)$ não esteja definido para algum $u_0 \in \mathbb{R}^2$. Neste caso, existe $u_1 \in \mathbb{R}$ tal que

(4.48) $X(u, 0)$ está definido para todo $u < u_1$, e

$X(u, 0)$ não está definido para $u \geq u_1$,

ou seja, $a_1 = a_1(u)$ está definida para $u < u_1$ e não está definida para $u \geq u_1$. Tomemos $Q = \lim_{u \rightarrow u_1} a_1(u)$. Como M' é completa temos que

$Q \in M'$. Por Q passam duas linhas assintóticas. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial e tendo em vista que o vetor tangente é unitário, vem que uma destas linhas assintóticas é a_1 . Isto implica em podermos definir $a_1 = a_1(u)$ para todo $u < u_1 + \delta$ o que contradiz (4.48). Desta forma, $X(u, v)$ está definido para todo $u \in \mathbb{R}$.

Suponhamos existir um par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ para o qual $X(u_0, v_0)$ não esteja definido. Como $X(u_0, 0)$ está definido para todo $u_0 \in \mathbb{R}$, então $X(0, v_0)$ não dever estar definido para algum $v_0 \in \mathbb{R}$. Usando a mesma argumentação da primeira parte demonstra-se ser absurda a existência de um tal $v_0 \in \mathbb{R}$. Deste modo, $X(u, v)$ está definido para todo ponto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

c.q.d.

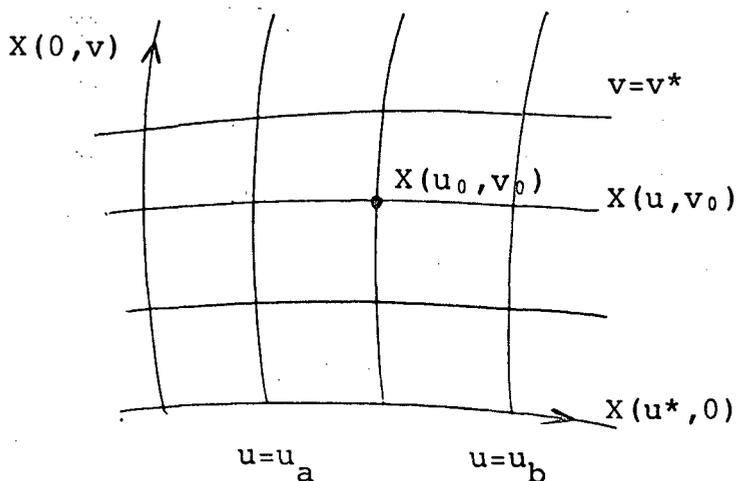
PROPOSIÇÃO 85

As curvas $\{X(u, v) : -\infty < u < \infty \text{ tendo } v \text{ fixo}\}$ são as linhas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco em M' .

DEMONSTRAÇÃO : Dado um ponto $P_0 = (u_0, v_0) \in M'$, existe uma vizinhança $V_0 = \{(u, v) : u_a < u < u_b, v_a < v < v_b\}$ tal que as linhas assintóticas de M' em V' formam uma rede de Tchebychef (proposição 83).

Seja $v = v^*$, $u_a < u < u_b$, a linha assintótica que se obtém marcando sobre cada linha assintótica $u = u^*$, $u_a < u^* < u_b$ um comprimento $v = v^*$ a partir de $X(u^*, 0)$ (figura 28). Isto é o mesmo que marcar um comprimento $v = v^*$ a partir de $X(u, v_0)$. Mas $X(u, v_0)$, $u_a < u < u_b$ é, por hipótese, uma linha assintótica parametrizada pelo comprimento de arco. Como localmente as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebychef (proposição 83) temos que a linha $v = v^*$ ($v_a < v^* < v_b$) é uma linha assintótica parametrizada pelo comprimento de arco.

Dado um ponto qualquer $X(u_1, v_1)$, é possível atingi-lo a partir de $X(u_1, 0)$ passando por um número finito de vizinhanças onde as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebychef em virtude da compacidade do segmento $u = u_1$, $0 \leq v \leq v_1$. A linha $X(u, 0)$ é assintótica, logo a linha $v = v_1$, $u_1 - \xi < u < u_1 + \xi$, onde ξ é o menor dos comprimentos dos lados horizontais dos quadriláteros obtidos na cobertura finita, é uma linha assintótica. Como o ponto $X(u_1, v_1)$ foi tomado arbitrariamente temos a proposição demonstrada.



(FIGURA 28)

c.q.d.

$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$ é um difeomorfismo local.

DEMONSTRAÇÃO : Pela proposição 85 temos que $X(u_0, v)$ e $X(u, v_0)$ são linhas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco. Existe um sistema de coordenadas locais de M' de modo que as linhas coordenadas sejam as linhas assintóticas de M' e $E = G = 1$. Localmente, temos X coincidindo com as linhas coordenadas deste sistema de coordenadas.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 87

$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO : Se $Q = X(u_0, v_0) \in X(\mathbb{R}^2)$, então as duas linhas assintóticas que passam por Q , $u = u_0$ e $v = v_0$, estão inteiramente contidas em $X(\mathbb{R}^2)$ (proposição 85). Como X é um difeomorfismo local (corolário 86), $X(\mathbb{R}^2)$ é um aberto em M' .

Suponhamos que $X(\mathbb{R}^2) \neq M'$. Sendo M' conexa segue que $\text{fr}(X(\mathbb{R}^2)) \neq \emptyset$. Tomemos $P \in \text{fr}(X(\mathbb{R}^2))$ e V' uma vizinhança de P em que as linhas assintóticas formem uma rede de Tchebychef. Seja R um quadrilátero em V' , contendo o ponto P , cujos lados são linhas assintóticas e $Q \in X(\mathbb{R}^2) \cap R$. Uma das linhas assintóticas por Q encontra uma das linhas assintóticas por P . Assim, $P \in X(\mathbb{R}^2)$ o que representa uma contradição com o fato que $P \in \text{fr}(X(\mathbb{R}^2))$ e $X(\mathbb{R}^2)$ é aberto em M' . Portanto, $X(\mathbb{R}^2) = M'$; isto é, X é sobrejetiva.

c.q.d.

LEMA 88

Duas curvas em M' do tipo $u = u_0$, $u = u_1$ com $u_0 \neq u_1$

(ou $v = v_0$, $v = v_1$, com $v_0 \neq v_1$) não podem se cortar transversalmente.

DEMONSTRAÇÃO : Pela proposição 85 as curvas $u = u_0$, $u = u_1$ são linhas assintóticas de M' . Pela proposição 83 as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebychef. Pelo corolário 86 temos difeomorfismos locais. Se as duas curvas coincidirem em algum ponto, então elas devem ser tangentes neste ponto. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial temos que as curvas coincidem (as curvas são as linhas assintóticas que são soluções de um problema de valor inicial em equações diferenciais)

c.q.d.

LEMA 89

Em $X(\mathbb{R}^2) \subset M'$ existem dois campos diferenciáveis de vetores unitários e linearmente independentes, $T_1(P)$ e $T_2(P)$.

DEMONSTRAÇÃO : Seja $P = X(u_0, v_0)$ um ponto de M' . Por P passam duas linhas coordenadas $X(u_0, v)$ e $X(u, v_0)$ parametrizadas pelo comprimento de arco. Se a linha $v = v_0$ coincide com a linha $v = v_1$, então suas orientações também coincidem pois ambas tem o mesmo parâmetro u que mede o comprimento de arco. Desta forma, os vetores tangentes às linhas $X(u_0, v)$, $X(u, v_0)$ são $T_1(P) = X_u(P)$ e $T_2(P) = X_v(P)$, os quais são linearmente independentes, bem determinados, unitários e diferenciáveis.

c.q.d.

LEMA 90

As linhas do tipo $u = u_0$ (ou $v = v_0$) não são fechadas em M' .

DEMONSTRAÇÃO : Supomos que M' é homeomorfa a um plano . Pelo teorema do índice de Poincaré, um campo diferenciável de vetores do plano, sem singularidades (campo não nulo em todos os pontos do plano) não possui trajetórias fechadas. Assim, os campos tangentes às linhas $u = u_0$ (ou $v = v_0$) em M' não possuem trajetórias fechadas. Portanto, as linhas $u = u_0$ (ou $v=v_0$) não são fechadas.

c.q.d.

PROPOSIÇÃO 91

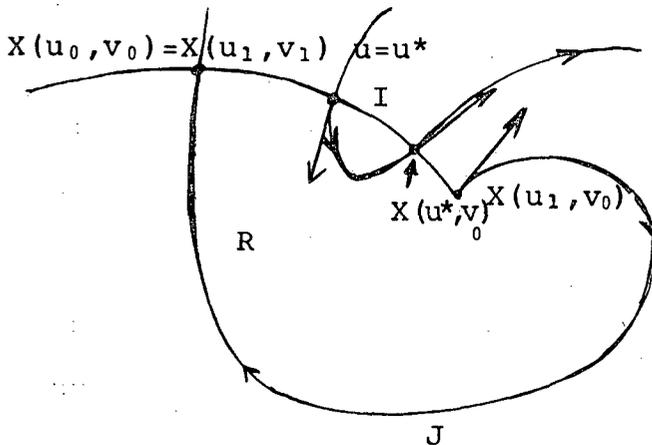
$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$ é injetiva.

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos $X(u_0, v_0) = X(u_0, v_1)$ para $v_1 > v_0$. Pelo corolário 86 X é um difeomorfismo local, de modo que existe $\delta > 0$ tal que $X(u, v_0) = X(u, v_1)$, $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$. Isto contradiz o lema 88.

Suponhamos $X(u_0, v_0) = X(u_1, v_0)$ para $u_1 > u_0$. Pelo corolário 86, X é um difeomorfismo local, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $X(u_0, v) = X(u_1, v)$, $v_0 - \varepsilon < v < v_0 + \varepsilon$. Isto contradiz o lema 88.

Suponhamos finalmente que $X(u_0, v_0) = X(u_1, v_1)$ para $u_1 > u_0$ e $v_1 > v_0$. Pelo lema 88 o traço da linha $u = u_0$ coincide com o traço da linha $u = u_1$, bem como o traço da linha $v = v_0$ coincide com o traço da linha $v = v_1$. A linha $X(u, v_0)$, $u_0 \leq u \leq u_1$ é fechada, pela primeira parte da demonstração. Seja v^* o primeiro ponto do intervalo $[v_0, v_1]$ para o qual $X(u_1, v^*) = X(u_0, v_0)$. Então, o traço de $v = v^*$ coincide com o traço de $v = v_0$. Sejam $I = \{X(u, v_0) : u_0 \leq u \leq u_1\}$ e $J = \{X(u_1, v) : v_0 \leq v \leq v^*\}$. A união

$I \cup J$ é uma curva fechada que divide M' em duas regiões conexas (teorema 16 de Jordan), uma das quais é limitada, a qual denotaremos por R (figura 29). Seja $u_0 \leq u^* \leq u_1$ e consideremos a linha assintótica $u = u^*$ que entra em R . Como ela não pode cortar J , terá de cortar I para sair de R . Desta forma, os vetores tangentes à $u = u^*$ nos pontos de entrada e saída de R apontam para regiões distintas. Por continuidade, existe uma linha $u = \text{constante}$ tangente à J , que representa uma contradição. Portanto, X é injetiva.



(FIGURA 29)

c.q.d.

Acabamos de demonstrar que X é um sistema de coordenadas globais de M' . Estamos, agora, em condições de demonstrar o teorema de Hilbert.

TEOREMA 92

Uma superfície geométrica completa M , com curvatura $K = -1$ não pode ser imersa isometricamente em \mathbb{R}^3 .

DEMONSTRAÇÃO : Suponhamos existir uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície geométrica completa M com curvatura $K = -1$. Sejam P um ponto de M e M' o plano tangente $T_P(M)$ com a métrica induzida de M pela inversa da aplicação exponencial em P . Então $f \circ \exp_P : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também uma imersão isométrica.

Pelas proposições 84,85,87,91 existe um sistema de coordenadas globais $X(u,v)$ de M' na qual as linhas coordenadas são linhas assintóticas de M' , ou seja, formam uma rede de Tchebychef. Podemos, então, cobrir M' por uma união de quadriláteros desta rede, Q_n , todos centrados num mesmo ponto P e de forma que $Q_n \subset Q_{n+1}$ (proposição 83). Como a área de cada Q_n é menor do que 2π (corolário 81), temos que a área de M' é menor do que 2π , o que representa uma contradição com a proposição 82.

Desta forma, não existe imersão isométrica $f \circ \exp_P : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ e, portanto, não existe imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ como desejávamos demonstrar.

c.q.d.

APÊNDICE

Vamos apresentar um modelo de Geometria Hiperbólica. Antes, porém, vamos demonstrar uma proposição que é necessária para os nossos propósitos.

PROPOSIÇÃO

Seja $X(r, \theta)$ um sistema de coordenadas tal que neste sistema tenhamos $E=E(r)$, $F=0$, $G=G(r)$. Então são válidas as afirmações abaixo.

(i) As curvas com θ constante são geodésicas.

(ii) As curvas $f(r)=X(r, \theta(r))$ são geodésicas se e somente se

$$\theta = \pm \int \frac{c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}} dr,$$

onde c é constante.

(iii) As curvas com r constante são geodésicas se e somente se $G_r = 0$.

DEMONSTRAÇÃO : (i) Por (2.7) vem que $(k_g)_{\theta=\text{constante}} = \sqrt{EG-F^2} \Gamma_{11}^2 r'^3$.

$$\text{Mas } F = 0 \text{ e } \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_r - EE_\theta - FE_r}{2(EG-F^2)} = 0 \text{ para } \theta \text{ cons}$$

tante. Logo,

$$(k_g)_{\theta=\text{constante}} = 0.$$

Portanto, as curvas $\theta = \text{constante}$ são geodésicas.

(ii) Das equações (1.13) temos que

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_r - EE_\theta - FE_r}{2(EG-F^2)} = 0.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_r - FE_\theta}{2(EG-F^2)} = \frac{G_r}{2G}.$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_\theta - 2FF_\theta + FG_r}{2(EG-F^2)} = 0.$$

A segunda das equações (2.10) se transforma em

$$\theta'' + \frac{2G_r}{2G} r' \theta' = 0.$$

Segue que $G\theta'' + G_r r' \theta' = 0$.

Como $(G\theta')' = G\theta'' + G_r r' \theta'$ vem que $(G\theta')' = 0$. Logo,

$G\theta' = c$ é constante. Como s é o comprimento de arco, temos

$$1 = \left| \frac{dX}{ds} \right|^2 = |r'X_r + \theta'X_\theta|^2 = r'^2 E + \theta'^2 G.$$

Substituindo $\theta' = \frac{c}{G}$ nesta última equação obtemos

$$1 - \frac{c^2}{G} = r'^2 E.$$

Logo,

$$r' = \pm \sqrt{\frac{G-c^2}{EG}}.$$

Assim,

$$\frac{\theta'}{r'} = \frac{\frac{c}{G}}{\pm \sqrt{\frac{G-c^2}{EG}}} = \pm \frac{c\sqrt{E}}{G\sqrt{G-c^2}}.$$

Portanto,

$$\theta = \pm \int \frac{c\sqrt{E}}{G\sqrt{G-c^2}} dr.$$

(iii) Novamente por (2.7) temos que

$$(k_g)_{r=\text{constante}} = \sqrt{EG-F^2} [-\Gamma_{22}^1 \theta'^3].$$

$$\text{Mas } \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_\theta - GG_r - FG_\theta}{2(EG-F^2)} = -\frac{G_r}{2E}. \quad \text{Assim,}$$

$$(k_g)_{r=\text{constante}} = \sqrt{EG} \left[\frac{G_r}{2E} \theta'^3 \right] = \frac{GG_r \theta'^3}{2\sqrt{EG}} = 0 \text{ se e somente se}$$

$$G_r = 0.$$

c.q.d.

Consideremos o interior do círculo de raio 2, centro na origem, contido no plano XOY, plano este considerado como uma superfície M em \mathbb{R}^3 . Seja (r, θ) um sistema de coordenadas polares em M, com origem na origem de XOY. Definamos neste sistema uma superfície abstrata H, a qual chamaremos plano hiperbólico, tendo coeficientes fundamentais

$$E = \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{r^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2}.$$

Isto é possível em virtude do teorema 14.

Vamos mostrar em primeiro lugar que a superfície H tem curvatura K constante e negativa. Assim, H é localmente isométrica à pseudo-esfera. A Geometria desenvolvida sobre H é um modelo de Geometria Hiperbólica ou de Lobashevsky. Veremos também como é o correspondente ao V postulado de Euclides nesta geometria.

Substituindo E, F, G em (3.3) e levando em conta que θ é constante vem que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)} \right) \right] \\ &= -\frac{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)}{r} \frac{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left(\frac{r}{2}\right) - \left(1 + \frac{r^2}{4}\right) \left(-\frac{r}{2}\right)}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Vamos, agora, determinar as geodésicas de H.

G.1) As curvas com $\theta = \text{constante}$, pela parte i da proposição que acabamos de demonstrar, são os raios do círculo que partem da origem.

G.2) Pela parte ii da proposição, temos as curvas

$$\theta = \pm \int \frac{c \sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{r^2}{4})^2}}}{\sqrt{\frac{r^2}{(1 - \frac{r^2}{4})^2}} \sqrt{\frac{r^2}{(1 - \frac{r^2}{4})^2} - c^2}} dr = \pm \int \frac{c(1 - \frac{r^2}{4})}{r^2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2} (1 - \frac{r^2}{4})^2}} dr.$$

Fazendo-se a substituição auxiliar $u = \frac{a}{r} (1 + \frac{c^2}{4})$ com $a = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

vem que

$$du = - \frac{c}{r^2 \sqrt{1+c^2}} (1 - \frac{r^2}{4}) dr = - \frac{a}{r^2} (1 - \frac{r^2}{4}) dr.$$

Portanto,

$$\theta = \pm \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

a qual é uma integral imediata. Considerando-se apenas a parte negativa temos

$$\theta - \theta_0 = \text{arc cos } u,$$

ou seja,

$$\cos(\theta - \theta_0) = u = \frac{a}{r} (1 + \frac{r^2}{4}).$$

Logo,

$$\frac{r}{a} \cos(\theta - \theta_0) = 1 + \frac{r^2}{4}.$$

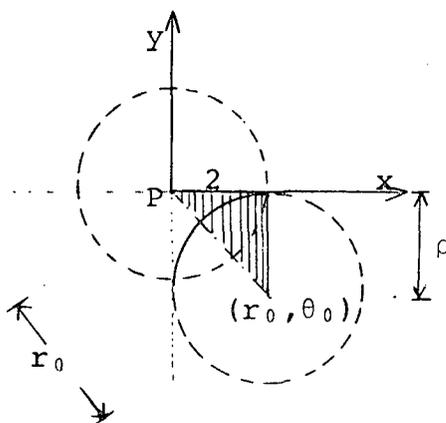
Daqui,

$$ar^2 - 4r \cos(\theta - \theta_0) = -4a.$$

Denotando-se $2 = ar_0$ e $-4 = \rho^2 - r_0^2$ vem que $r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = \rho^2$

é a equação de uma circunferência de raio ρ e centro (r_0, θ_0) :

Como $r_0^2 = \rho^2 + 4 > 4$ segue que $|r_0| > 2$ e, assim, o centro desta circunferência está fora de H (figura 1).



(FIGURA 1)

Portanto, as geodésicas $\theta = \theta(r)$ são os arcos da circunferência de centro (r_0, θ_0) e raio ρ que estão em H e que cortam a fronteira de H ortogonalmente ($F = 0$).

Pela parte iii da proposição vem que

$$G_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1 - \frac{r^2}{4}} \right) = \frac{r(4 + r^2)}{2(1 - \frac{r^2}{4})^2} = 0$$

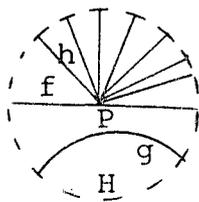
se e somente se $r = 0$ ou $r^2 + 4 = 0$, mas nenhum dos dois tem sentido. Assim, não há geodésicas com r constante.

Vamos considerar uma geodésica g de H (figura 2) e um ponto $P \in H$ com $P \notin g$. Por comodismo seja $P = (0, 0)$.

Definamos duas geodésicas paralelas em H quando elas não se intersectarem.

Como os raios geodésicos são geodésicas vem que f e h são geodésicas paralelas a g e passam por P . Observamos que por P passa uma infinidade de raios geodésicos que não cortam g . Com isto traçamos um paralelo entre o V postulado da Geometria Euclidiana que afirma existir uma única reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora da reta dada e a Geometria Hiperbólica. Um tal enunciado nesta geometria é dado assim: " Por um ponto dado fora de uma geodésica de uma superfície com curvatura gaussiana constante negativa passa uma infinidade de geodésicas que não

interseptam a geodésica dada."



(FIGURA 2)

BIBLIOGRAFIA

01. AUSLANDER, L., Differential Geometry. Harper & Row, 1967.
02. CARMO, M.P.do, Elementos de Geometria Diferencial. IMPA, 1971.
03. CARMO, M.P.do, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.
04. Harle, C.E., Geometria Diferencial. 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1973.
05. Lipschutz, M.M., Teoria e Problemas em Geometria Diferencial. Mac-Grow-Hill, 1969.
06. Munkres, J., Topology, A First Course. Prentice-Hall, 1975.
07. Pogorélov, A.V., Geometria Diferencial. Editorial Mir Moscú, 1977.
08. Singer, I.M. and Thorpe, J.A., Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry. Springer-Verlag, 1967.
09. Struik, D.J., Lectures on Classical Differential Geometry. Addison-Wesley, 1961.
10. Tenenblat, K., Notas de Geometria Diferencial. UnB, 1975.
11. Thorpe, J.A., Elementary Topics in Differential Geometry. Springer-Verlag, 1978.
12. WILLMORE, T.J., An Introduction to Differential Geometry. Oxford, 1959.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

1.1.	Introdução	001
1.2.	Topologia de \mathbb{R}^n	001
1.3.	Curvas em \mathbb{R}^n	004
1.4.	Superfícies Regulares	006
1.5.	Formas Fundamentais	009
1.6.	Curvatura Normal	014
1.7.	Linhas Assintóticas	020
1.8.	Linhas de Curvatura	023
1.9.	As equações de Gauss-Weingarten e Equações de Compatibilidade	026
1.10.	Isometrias	030

CAPÍTULO II - GEODÉSICAS

2.1.	Arco de Comprimento mínimo	034
2.2.	Curvatura Geodésica	039
2.3.	Geodésicas	045
2.4.	Coordenadas Geodésicas	057
2.5.	O Paralelismo de Levi-Cevita	060
2.6.	A Aplicação Exponencial	073
2.7.	Coordenadas Geodésicas Polares	077
2.8.	Comportamento Global de Geodésicas	079

CAPÍTULO III - SUPERFÍCIES DE CURVATURA GAUSSIANA CONSTANTE

3.1.	Superfícies de Curvatura Gaussiana Constante	088
3.2.	Superfícies Especiais de Curvatura Constante	092
3.3.	Geometrias Não Euclidianas	097
3.4.	Superfícies Compactas	103

CAPÍTULO IV - SUPERFÍCIES COMPLETAS COM CURVATURA GAUSSIANA
CONSTANTE

4.1. Superfícies Completas	111
4.2. Superfícies Completas de Curvatura K constante Zero	120
4.3. Superfícies Completas de Curvatura K constante Positiva	134
4.4. Superfícies Completas de Curvatura K constante Negativa	149
APÊNDICE	170
BIBLIOGRAFIA	176
ÍNDICE	177