

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Edson Luiz Valmorbida

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS PARA  
PROBLEMAS ELÍPTICOS E PARABÓLICOS  
DEGENERADOS**

Florianópolis (SC)

2013



Edson Luiz Valmorbidia

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS PARA  
PROBLEMAS ELÍPTICOS E PARABÓLICOS  
DEGENERADOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica para a obtenção  
do Grau de Mestre em Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Igor Mozo-  
levski

Florianópolis (SC)

2013



Edson Luiz Valmorbida

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS PARA  
PROBLEMAS ELÍPTICOS E PARABÓLICOS  
DEGENERADOS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Florianópolis (SC), 28 de Fevereiro 2013.

---

Prof. Dr. Daniel Gonçalves  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Igor Mozolevski  
Orientador

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciane Inês Assmann Schuh



---

Prof. Dr. Licio Hernanes Bezerra

---

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira





## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por me dar saúde e por possibilitar que eu alcançasse mais esse passo na minha carreira.

Obrigado aos meus pais Joanez e Terezinha e a minha irmã Cristiane. Sem vocês nada disso seria possível. Muito obrigado pelo exemplo de dedicação e esforço.

Deixo aqui também o meu muito obrigado ao professor Paulo Bösing que me orientou no primeiro ano do mestrado e foi meu professor em duas disciplinas essenciais para minha formação.

Aos meus colegas de mestrado, Deividi, Gustavo, Maíra e Sara, pelas várias horas de estudo e dúvidas sanadas.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos que, alguns morando longe, sempre apoiaram-me nesses dois anos, muitos sem entender uma palavra sobre o assunto do trabalho. Em especial, ao Bernardo e ao Maycon pelo suporte e incentivo quase que diário, muitas foram as experiências compartilhadas.

Gostaria de deixar um agradecimento especial ao meu orientador, professor Igor Mozolevski, que acreditou na minha capacidade e teve paciência de me guiar por esse caminho de aprendizado.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro concedido durante esse período.



## RESUMO

Este trabalho apresenta resultados teóricos e práticos para o método de elementos finitos mistos para problemas elípticos e para problemas parabólicos degenerados. Inicialmente apresentamos a formulação mista para problemas elípticos de segunda ordem. Feito isso, apresentamos resultados sobre convergência das duas variáveis, primeiramente na variável vetorial e depois na variável escalar. Na segunda parte do trabalho estudamos um estimador de erro para o problema elíptico tratado na primeira parte e o utilizamos para fazer refinamento adaptativo de malha. Em seguida, passamos a tratar de problemas parabólicos degenerados. Para isso, após fazer a discretização do problema, aplicamos o método de Newton para tratar da não linearidade. Por fim, apresentamos alguns detalhes sobre as implementações feitas. Durante o trabalho são apresentados exemplos numéricos para validação dos códigos e comparação com os resultados teóricos.

**Palavras-chave:** Método de elementos finitos mistos. Problemas parabólicos. Problemas elípticos. Estimativa de erro *a posteriori*.



## ABSTRACT

This work presents theoretical and practical results for the mixed finite element method for elliptic and degenerate parabolic problems. First, we present the mixed formulation to second order elliptic problems. After that, we introduce some results about convergence on the both variables, first on the vector and then on the scalar variable. On the second part of the work, we studied an error estimator to the elliptic problem broached on the first part of the work and use it to do adaptative mesh refinement. Next, we dealt about degenerate parabolic problems. For this, after the full discretization of the problem, we apply Newton's Method to treat the nonlinearity. Finally, we present some details about the implementation. During the work we present a serie of numerical examples to validate our codes and to compare with the theoretical results.

**Keywords:** Mixed Finite Element Method. Elliptic problems. Parabolic problems. A posteriori error estimative.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Malha inicial e refinamento 1. ....	59
Figura 2	Malha malha com 2 refinamentos. ....	59
Figura 3	Solução aproximada do exemplo 2.1. ....	61
Figura 4	Solução exata do exemplo 2.1. ....	62
Figura 5	Erro absoluto de $u$ no exemplo 2.1. ....	62
Figura 6	Erro absoluto de $\mathbf{p}_x$ no exemplo 2.1. ....	63
Figura 7	Erro absoluto de $\mathbf{p}_y$ no exemplo 2.1. ....	63
Figura 8	Solução aproximada do exemplo 2.2. ....	65
Figura 9	Solução exata do exemplo 2.2. ....	65
Figura 10	Erro absoluto de $u$ no exemplo 2.2. ....	66
Figura 11	Erro absoluto de $\mathbf{p}_x$ no exemplo 2.2. ....	66
Figura 12	Erro absoluto de $\mathbf{p}_y$ no exemplo 2.2. ....	67
Figura 13	Solução aproximada do exemplo 2.3. ....	70
Figura 14	Solução exata do exemplo 2.3. ....	71
Figura 15	Erro absoluto de $u$ no exemplo 2.3. ....	71
Figura 16	Erro absoluto de $\mathbf{p}_x$ no exemplo 2.3. ....	72
Figura 17	Erro absoluto de $\mathbf{p}_y$ no exemplo 2.3. ....	72
Figura 18	Solução aproximada do exemplo 2.4. ....	73
Figura 19	Solução exata do exemplo 2.4. ....	74
Figura 20	Erro absoluto de $u$ no exemplo 2.4. ....	74
Figura 21	Erro absoluto de $\mathbf{p}_x$ no exemplo 2.4. ....	75
Figura 22	Erro absoluto de $\mathbf{p}_y$ no exemplo 2.4. ....	75
Figura 23	Solução aproximada do exemplo 3.1. ....	83
Figura 24	Estimador do exemplo 3.1. ....	83
Figura 25	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 1. ....	84
Figura 26	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 4. ....	84
Figura 27	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 8. ....	85
Figura 28	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 12. ....	85
Figura 29	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 16. ....	86
Figura 30	Estimador e erro na norma $L^2$ no refinamento 19. ....	86
Figura 31	Malha no refinamento 1. ....	87
Figura 32	Malha no refinamento 4. ....	87

Figura 33 Malha no refinamento 8.....	88
Figura 34 Malha no refinamento 12.....	88
Figura 35 Malha no refinamento 16.....	89
Figura 36 Malha no refinamento 19.....	89
Figura 37 Erro e estimador usando refinamento uniforme e adaptativo para o exemplo 3.1.....	90
Figura 38 Gráfico da solução de Barenblatt.....	102



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Erros na norma $L^2$ e taxa de convergência no exemplo 2.1. ....	61
Tabela 2	Erros na norma $L^2$ e taxa de convergência no exemplo 2.2. ....	64
Tabela 3	Erros na norma $L^2$ e taxa de convergência no exemplo 2.3. ....	70
Tabela 4	Erros na norma $L^2$ e taxa de convergência no exemplo 2.4. ....	73
Tabela 5	Erros $L^2$ , taxas de convergência, erro a posteriori e índice de eficiência para o exemplo 1. ....	82
Tabela 6	Resultados do exemplo 4.1. ....	103
Tabela 7	Resultados do exemplo 4.2. ....	103



## LISTA DE SÍMBOLOS

$H^k(\Omega)$	23
$C_0^\infty(\Omega)$	23
$H(\operatorname{div}, \Omega)$	24
$H^s(\Omega)$	25
$\mathcal{P}_k$	26
$S^0$	31
$RT_k(T)$	39
$RT_k(\mathcal{T}_h)$	49
$\mathcal{P}_k^{\operatorname{disc}}(\mathcal{T}_h)$	50
$H_{0,N}(\operatorname{div}, \Omega)$	57
$H_{g,N}(\operatorname{div}, \Omega)$	57
$RT_0(\mathcal{T})$	57
$M_{h,g}$	57
$M_{h,0}$	57
$\mathcal{A}_z$	80
$P_k(\mathcal{T})$	80
$\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$	80
$P_h$	80
$\mathcal{Q}_h$	80
$L^p(0, T; X)$	94



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	21
<b>2 MEFM PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM</b> .....	23
2.1 RESULTADOS PRELIMINARES .....	23
2.1.1 Espaços de Sobolev .....	23
2.1.2 Malha de Elementos Finitos .....	27
2.1.3 Coordenadas Baricêntricas .....	29
2.2 FORMULAÇÃO MISTA .....	29
2.3 FORMULAÇÃO ABSTRATA .....	30
2.4 ESTIMATIVA DE ERRO <i>A PRIORI</i> .....	39
2.5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	56
<b>3 ESTIMATIVA DE ERRO <i>A POSTERIORI</i> PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM</b> .....	77
3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	77
3.2 ESTIMATIVA DE ERRO <i>A POSTERIORI</i> .....	78
3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	81
<b>4 MEFM PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DEGENERADOS</b> .....	93
4.1 FORMULAÇÃO MISTA .....	93
4.2 PROBLEMA DISCRETO .....	95
4.3 ESTIMATIVA DE ERRO <i>A PRIORI</i> .....	96
4.4 MÉTODO DE NEWTON .....	99
4.5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	101
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	105
<b>APÊNDICE A – Implementações</b> .....	109
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	119



# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho dedica-se a estudar o método de elementos finitos mistos (MEFM) para problemas elípticos de segunda ordem e problemas parabólicos degenerados.

O método de elementos finitos mistos tem ampla utilização em diversas áreas da matemática e engenharia, em especial no estudo de fluidos incompressíveis. A sua vantagem em relação aos demais métodos na resolução desse tipo de problema é o fato dele envolver o fluxo diretamente. Seu desenvolvimento teórico iniciou-se nos anos 70. Dentre principais precursores desse método podemos citar os trabalhos de Brezzi [8], Babuška [4] e de Crouzeix e Raviart [13].

O trabalho está dividido em 3 capítulos. Os dois primeiros tratam sobre o MEFM para problemas elípticos de segunda ordem e o terceiro sobre o MEFM para problemas parabólicos degenerados. Apresentamos ainda um apêndice tratando de alguns tópicos sobre as implementações feitas.

No capítulo 2, baseamo-nos principalmente em [15] para estudar os resultados sobre estimativa de erro *a priori* e formulação mista abstrata de problemas elípticos de segunda ordem.

O capítulo 3 do trabalho trata da mesma classe de problemas do capítulo 2, porém agora utilizando as técnicas de refinamento adaptativo de malha (conforme). Para isso, estudou-se o estimador de erro *a posteriori* apresentado em [5]. Buscou-se reproduzir os resultados apresentados pelos autores nos exemplos.

No capítulo 4, inicialmente apresentamos a formulação mista do problema discreto no tempo e no espaço e, em seguida, os principais resultados necessários para dar base à estimativa de erro *a priori*. Por fim, apresentamos uma série de exemplos numéricos para estes problemas com destaque para a solução de Barenblatt. Esta parte do trabalho foi baseada principalmente em [21] e [20]. Utilizamos o método de Newton para lidar com a não linearidade do problema.

Por fim, no apêndice procurou-se expor detalhes sobre as implementações e da estrutura de dados utilizada. Com isso, pretendemos facilitar o entendimento de futuros interessados nesse tópico. Apresentamos também neste apêndice uma breve descrição de bibliotecas e códigos de outros autores aqui utilizados.





## 2 MEFM PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo introduzimos a aproximação pelo método de elementos finitos mistos (MEFM) para problemas elípticos de segunda ordem. Inicialmente apresentamos algumas definições e resultados preliminares que serão ferramenta para provarmos os resultados sobre estimativa de erro. Após a apresentação do problema, fazemos a formulação abstrata e, em seguida, mostramos alguns resultados sobre estimativa de erro *a priori*. Por fim, apresentamos alguns casos que foram implementados e os resultados obtidos.

### 2.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições que iremos utilizar no decorrer do capítulo. A maior parte desses resultados são de conhecimento de qualquer pessoa familiarizada com o tema do trabalho mas foram colocados aqui para futuras referências.

#### 2.1.1 Espaços de Sobolev

**Definição 2.1** *Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e dado um número inteiro positivo  $k$ , o espaço de Sobolev  $H^k(\Omega)$  é definido por*

$$H^k(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega) : D^\alpha \phi \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\},$$

em que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice com  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e  $D^\alpha$ , no sentido de distribuições, é definido por

$$\int_{\Omega} D^\alpha \phi \psi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha \psi, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

sendo  $D^\alpha \psi$  definido como

$$D^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|} \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em  $\Omega$  com suporte compacto.

Definimos ainda o operador div no sentido de distribuições, para

$\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n$ , como

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \psi = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Os espaços  $H^k(\Omega)$  são espaços de Hilbert com respeito à norma

$$\|\phi\|_{H^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para uma teoria completa desses espaços veja [1].

**Observação 2.1** *Para o caso vetorial, utilizaremos letras em negrito para representar elementos do conjunto. Porém, por motivos visuais, manteremos a mesma notação para a norma em  $H^k(\Omega)$  e a norma de produto cartesiano em  $[H^k(\Omega)]^n$ , omitindo a potência  $n$ .*

**Definição 2.2** *Um espaço que será utilizado com frequência durante o trabalho é*

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}$$

que, munido da norma

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

também é um espaço de Hilbert.

Definimos ainda, para  $\phi \in H^k(\Omega)$  e  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq j \leq k$ , a semi-norma

$$|\nabla^j \phi| = \left( \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha \phi|^2 \right)^{1/2}.$$

**Definição 2.3** *Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Dizemos que a fronteira de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ , é uma fronteira Lipschitz quando existir, para esta, uma cobertura finita de abertos  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ , tal que, para  $j = 1, \dots, m$  as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- i)  $\partial\Omega \cap U_i$  é o gráfico de uma função Lipschitz;
- ii)  $\Omega \cap U_i$  está em somente um dos lados desse gráfico.

**Teorema 2.1 (Fórmula de Green)** *Se  $\Omega$  é um domínio com fronteira Lipschitz então, para  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$  e  $q \in H^1(\Omega)$ , vale*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q \, dx + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v} \, q \, dx = \int_{\partial\Omega} q \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds$$

em que  $\mathbf{n}$  denota o vetor unitário normal a  $\partial\Omega$  exterior a  $\Omega$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo.

Dado  $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^n$ , denotamos por

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$$

a componente normal do traço.

**Definição 2.4** *Dado  $s > 0$  e  $s \notin \mathbb{N}$  escrevamos  $s = m + \lambda$ , sendo  $0 < \lambda < 1$ . Então definimos o espaço de Sobolev fracionário  $H^s(\Omega)$  como o conjunto de todas as  $u \in H^m(\Omega)$  tais que*

$$|u|_{H^s(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(x) - \partial^{\alpha} u(y)|^2}{|x - y|^{s+\lambda}} \, dx dy \right)^{1/2} < \infty.$$

Equipamos  $H^s(\Omega)$  com a norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left( \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 + |u|_{H^s(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

**Teorema 2.2 (Teorema do Traço)** *Dado  $\phi \in H^1(\Omega)$ , em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio Lipschitz, então existe uma constante  $C$ , dependendo apenas de  $\Omega$ , tal que*

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Em particular,

$$\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.1)$$

Além disso, se  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , existe  $\phi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\phi|_{\partial\Omega} = g$  e

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

**Teorema 2.3** *A componente normal do traço pode ser estendido continuamente a um funcional linear contínuo*

$$\mathbf{v}_n : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

em que  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  é o dual de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Indicamos [7], [3] e [22] para uma teoria mais detalhada sobre o traço de funções.

**Teorema 2.4** *Sendo  $\Omega$  um domínio Lipschitz então existe uma constante  $C$  dependendo apenas de  $\Omega$  tal que, para qualquer  $f \in H^1(\Omega)$  satisfazendo  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ ,*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15].

Denotaremos por  $\mathcal{P}_k$  o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $k$ . Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  um multi-índice temos  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

**Definição 2.5** *Vamos assumir que  $\Omega$  é um domínio estrelado com respeito ao conjunto  $B \subseteq \Omega$  de medida positiva, ou seja, para todo  $x \in \Omega$  a envoltória convexa fechada de  $\{x\} \cup B$  é um subconjunto de  $\Omega$ . Dado um inteiro  $k \geq 0$  e  $f \in H^{k+1}(\Omega)$ , definimos a aproximação média de Taylor de  $f$ ,  $Q_{k,B}f \in \mathcal{P}_k$ , como*

$$Q_{k,B}f(x) = \frac{1}{|B|} \int_B T_k f(y, x) \, dy$$

em que  $T_k f(y, x)$  é a expansão de Taylor de  $f$  centrada em  $y$ , isto é,

$$T_k(y, x) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f(y) \frac{(x - y)^\alpha}{\alpha!}$$

**Lema 2.1** *Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  um domínio estrelado com respeito ao conjunto de medida positiva  $B \subseteq \Omega$ ,  $\Omega$  com diâmetro  $h$ . Dado um inteiro  $k \geq 0$  e  $f \in H^{k+1}(\Omega)$ , existe uma constante  $C$  dependendo de  $k$  e  $n$  tal que, para  $0 \leq |\beta| \leq k + 1$ ,*

$$\|D^\beta(f - Q_{k,B}f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \frac{|\Omega|^{1/2}}{|B|^{1/2}} h^{k+1-\beta} \|\nabla^{k+1} f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Em particular, quando  $\Omega$  é convexo,

$$\|D^\beta(f - Q_{k,B}f)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1-|\beta|} \|\nabla^{k+1}f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.3)$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7].

Uma consequência importante desse lema é a estimativa de erro para a projeção  $L^2$ ,  $P : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_k$ ,  $k \geq 0$  sobre o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $k$ ,  $\mathcal{P}_k$ , definida, para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , como

$$\int_{\Omega} (f - Pf)q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k.$$

Note que, como  $\mathcal{P}_k$  é subespaço fechado, temos que a projeção  $L^2$  existe (ver [17]).

**Corolário 2.1** *Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  um domínio como no lema 2.1. Dado um inteiro  $k \geq 0$ , existe uma constante  $C$  dependendo de  $j$  e  $n$  tal que, para  $0 \leq j \leq k + 1$ , se  $f \in H^1(\Omega)$  então*

$$\|f - Pf\|_{L^2(\Omega)} \leq C \frac{|\Omega|^{1/2}}{|B|^{1/2}} h^j |\nabla^j f|_{L^2(\Omega)}.$$

Veja [15] para maiores detalhes sobre este resultado.

**Lema 2.2** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Dado  $f \in L^2(\Omega)$ , existe  $v \in H^1(\Omega)$  tal que*

$$\operatorname{div} v = f \quad \text{em } \Omega, \quad (2.4)$$

e

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.5)$$

com uma constante  $C$  dependendo somente de  $\Omega$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15].

### 2.1.2 Malha de Elementos Finitos

**Definição 2.6** *Definimos o  $n$ -simplex  $T$  como a envoltória convexa dos  $n + 1$  pontos  $v_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$ , chamados de vértices de  $T$ . Um  $n$ -simplex é dito não degenerado, se cada ponto  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$  não pertence ao hiperplano gerado pelos demais vértices.*

**Observação 2.2** *Daqui em diante estaremos considerando apenas  $n$ -simplex não degenerados.*

**Definição 2.7** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um poliedro aberto conexo. Uma malha ou triangularização de  $\bar{\Omega}$  é um conjunto  $\mathcal{T}_h$  de  $n$ -simplex  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que satisfaz:*

- $T_i \subset \bar{\Omega}$  e  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i$ .
- A intersecção  $T_i \cap T_j$  de dois  $n$ -simplex distintos é um  $m$ -simplex com  $0 \leq m \leq n - 1$  cujos vértices são vértices de  $T_i$  e  $T_j$ .

Os nós da malha  $\mathcal{T}_h$  são os vértices dos  $n$ -simplex  $T_i$  que a compõem.

Um dos  $n$ -simplex de uma triangularização é chamado de elemento da malha.

Fixemos um simplex de referência  $\hat{T} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dado um simplex  $T \subseteq \mathbb{R}^n$ , existe um mapeamento afim inversível

$$\begin{aligned} F : \hat{T} &\rightarrow T \\ \hat{x} &\mapsto F(\hat{x}) = A\hat{x} + b \end{aligned}$$

com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Denotaremos por  $h_T$  o diâmetro de  $T$  e por  $\rho_T$  o diâmetro da maior bola inscrita em  $T$ . Durante todo o trabalho assumiremos a condição de regularidade para os elementos da malha, isto é, existe uma constante  $\sigma$  tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma.$$

**Lema 2.3** *Para um mapeamento afim  $F$  definido como anteriormente, valem as seguintes estimativas*

$$\|A\|_2 \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}} \text{ e } \|A^{-1}\|_2 \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T} \quad (2.6)$$

Para ver a demonstração desse teorema veja o lema 10.2.2 em [3].

Para cada  $\phi \in L^2(T)$ , associamos  $\hat{\phi} \in L^2(\hat{T})$  pela regra  $\phi(x) = \hat{\phi}(\hat{x})$ , em que  $x = F(\hat{x})$ .

**Lema 2.4** *Dado um simplex  $T$ , existe uma constante  $C$  dependendo de  $\sigma$ ,  $n$ ,  $k$  e  $\hat{T}$  tal que para todo  $p \in \mathcal{P}_k(T)$ ,*

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \leq \frac{C}{h_T} \|p\|_{L^2(T)}.$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15].

### 2.1.3 Coordenadas Baricêntricas

**Definição 2.8** *Seja  $T$  um triângulo com vértices  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, 2$  e  $3$ , numerados no sentido anti-horário. Definimos as coordenadas baricêntricas  $\lambda_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2$  e  $3$ , associadas aos vértices  $\mathbf{v}_j$  como as funções afins satisfazendo*

$$\lambda_j(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Da definição percebemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i &= \mathbf{x}, \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{x}) &= 1. \end{aligned}$$

Podemos mostrar que, dado  $\mathbf{x} \in T$ ,

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{\text{area}(T_i)}{\text{area}(T)}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

em que  $T_i$  é o triângulo cujos vértices são  $\mathbf{x}$  e os dois vértices de  $T$  diferentes de  $\mathbf{v}_i$ .

## 2.2 FORMULAÇÃO MISTA

Seja  $\Omega$  um domínio com fronteira poligonal e  $a = a(x)$  uma função limitada superiormente e inferiormente por constantes positivas. Considere o problema: dado  $f \in L^2(\Omega)$ , encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\text{div}(a\nabla u) = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Definindo  $\mathbf{p} = -a\nabla u$  podemos dividir a primeira equação de (2.7) em duas, ou seja,

$$\begin{cases} \text{div}\mathbf{p} = f, & \text{em } \Omega \\ \mathbf{p} + a\nabla u = 0, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

em que  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^2$  com  $\operatorname{div} \mathbf{p} \in L^2(\Omega)$ .

Assim, multiplicando as duas equações de (2.8) pelas funções de teste  $q \in L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , respectivamente, e integrando por partes a segunda, obtemos a forma fraca para o problema (2.8): encontrar  $(u, \mathbf{p}) \in L^2(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0, & \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{p} \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx, & \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.9)$$

em que  $\mu = 1/a(x)$ .

**Observação 2.3** *Ao fazer a integração por partes para obter a formulação fraca do problema precisamos utilizar o teorema 2.1.*

### 2.3 FORMULAÇÃO ABSTRATA

Sejam  $V$  e  $Q$  espaços de Hilbert e  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  formas bilineares contínuas em  $V \times V$  e  $V \times Q$  respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|a\| \|u\|_V \|v\|_V, & \forall u, v \in V \\ |b(v, q)| &\leq \|b\| \|v\|_V \|q\|_Q, & \forall v \in V \text{ e } \forall q \in Q. \end{aligned}$$

Considere o problema: dados  $f \in V'$  e  $g \in Q'$ , encontrar  $(u, p) \in V \times Q$  solução de

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle, & \forall v \in V \\ b(u, q) = \langle g, q \rangle, & \forall q \in Q \end{cases} \quad (2.10)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto dual.

Vamos encontrar condições suficientes sobre as formas  $a$  e  $b$  para que tenhamos a existência e a unicidade de solução de (2.10).

Sejam  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : V \rightarrow Q'$  operadores contínuos e o adjunto  $B^* : Q \rightarrow V'$  dados por

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{V' \times V} &= a(u, v) \\ \langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} &= b(v, q) = \langle v, B^*q \rangle_{V \times V'}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever (2.10) como



$$\begin{cases} Au + B^*p = f, & \text{em } V' \\ Bu = g, & \text{em } Q'. \end{cases} \quad (2.11)$$

Denotaremos por  $W = \text{Ker}B \subset V$  e, para  $g \in Q'$ ,

$$W(g) = \{v \in V : Bv = g\},$$

ou seja,  $W(g)$  é conjunto de todos os elementos de  $V$  que satisfazem a segunda igualdade de (2.11).

Agora, se  $(u, p) \in V \times Q$  é solução de (2.10), podemos mostrar que  $u$  é solução do problema:

$$u \in W(g) \text{ e } a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in W. \quad (2.12)$$

De fato, se  $(u, p) \in V \times Q$  é solução de (2.10) então, pela segunda equação de (2.11),  $u \in W(g)$  e, para todo  $v \in W$ , temos

$$\langle f, v \rangle = a(u, v) + b(v, p) = a(u, v).$$

Vamos mostrar que, assumindo algumas condições, os problemas (2.10) e (2.12) são equivalentes. O teorema a seguir é um resultado conhecido de análise funcional e será ferramenta importante neste processo.

Dado um espaço de Hilbert  $V$  e  $S \subset V$ , denotamos por  $S^0 \subset V'$  o conjunto

$$S^0 = \{L \in V' : \langle L, v \rangle = 0, \forall v \in S\}.$$

**Teorema 2.5** *Sejam  $V_1$  e  $V_2$  espaços de Hilbert e  $A : V_1 \rightarrow V_2'$  um operador linear contínuo. Então*

$$(\text{Ker}A)^0 = \overline{\text{Im}A^*} \quad (2.13)$$

$$(\text{Ker}A^*)^0 = \overline{\text{Im}A} \quad (2.14)$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [15].

**Lema 2.5** *As seguintes propriedades são equivalentes.*

a) *Existe  $\beta > 0$  tal que*

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (2.15)$$

b)  $B^*$  é um isomorfismo de  $Q$  em  $W^0$  e

$$\|B^*q\|_{V'} \geq \beta\|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (2.16)$$

c)  $B$  é um isomorfismo de  $W^\perp$  em  $Q'$  e

$$\|Bv\|_{Q'} \geq \beta\|v\|_V \quad \forall v \in W^\perp. \quad (2.17)$$

**Demonstração:**  $\boxed{a) \Rightarrow b)}$  Se  $a)$  vale então (2.16) é satisfeita pois

$$\beta\|q\|_Q \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{\langle v, B^*q \rangle_{V \times V'}}{\|v\|_V} = \|B^*q\|_{V'}, \quad \forall q \in Q,$$

e  $B^*$  é injetiva pois, dados  $q_1, q_2 \in Q$ ,  $q_1 \neq q_2$ ,

$$0 < \|q_1 - q_2\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \|B^*(q_1 - q_2)\|_{V'}$$

e portanto  $B^*q_1 \neq B^*q_2$ . Além disso,  $ImB^*$  é um subespaço fechado de  $V'$  pois, supondo uma seqüência  $B^*q_n \rightarrow w$ , então de (2.16) temos

$$\|B^*(q_n - q_m)\|_{V'} \geq \beta\|q_n - q_m\|_Q$$

e isso implica que a seqüência  $\{q_n\}$  é de Cauchy e, portanto, convergente para algum  $q \in Q$ .

Sendo  $B^*$  contínua, segue que  $w = B^*q \in ImB^*$ . Logo, por (2.13),  $ImB^* = W^0$  e  $b)$  vale.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$  Essa implicação é imediata uma vez que

$$\|B^*q\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V}.$$

$\boxed{b) \Leftrightarrow c)}$  Note que  $W^0$  é isometricamente idêntico a  $(W^\perp)'$ . De fato, sendo  $P^\perp : V \rightarrow W^\perp$  a projeção ortogonal, para qualquer  $g \in (W^\perp)'$  definimos  $\tilde{g} \in W^0$  por  $\tilde{g} = g \circ P^\perp$  e então temos que a aplicação  $g \rightarrow \tilde{g}$  é uma bijeção isométrica de  $(W^\perp)'$  em  $W^0$  uma vez que

$$\|\tilde{g}\| = \|g \circ P^\perp\| = \|g\| \|P^\perp\| = \text{normag}$$

e, como  $g \in W^0$ ,

$$\langle g, w \rangle = 0 \forall w \in W \Rightarrow g \in (W^\perp)'.$$

Logo, vale a equivalência. ■

**Corolário 2.2** *Se a forma  $b$  satisfaz (2.15) então os problemas (2.10) e (2.12) são equivalentes, isto é, (2.10) tem uma única solução se, e somente se, (2.12) tem uma única solução.*

**Demonstração:**  $\Rightarrow$  Se  $(u, p)$  é solução de (2.10) então segue de (2.11) que

$$Bu = g \text{ em } Q' \Rightarrow u \in W(g)$$

e,  $\forall v \in W$ ,

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle \\ a(u, v) + \langle Bv, p \rangle &= \langle f, v \rangle \\ a(u, v) &= \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,  $(u, p)$  satisfaz (2.12).

$\Leftarrow$  Se  $u$  é solução de (2.12) então

$$Bu = g \text{ em } Q' \text{ e } a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in W.$$

Temos que mostrar que existe um único  $p \in Q$  tal que  $B^*p = f - Au$ . Isso segue do item b) do lema 2.5 pois  $f - Au \in W^0$ . ■

O seguinte lema nos ajudará a mostrar o teorema de existência e unicidade de solução para o problema (2.10).

**Lema 2.6** *Se existe  $\alpha > 0$  tal que  $a(\cdot, \cdot)$  satisfaz*

$$\sup_{v \in W} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_V \quad \forall u \in W. \quad (2.18)$$

$$\sup_{u \in W} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|v\|_V \quad \forall v \in W. \quad (2.19)$$

então, para qualquer  $g \in W'$ , existe  $w \in W$  tal que

$$a(w, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in W$$

e além disso,

$$\|w\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{W'}. \quad (2.20)$$

**Demonstração:** Considere os operadores

$$A : W \rightarrow W' \text{ e } A^* : W \rightarrow W'$$

definidos por

$$\langle Au, v \rangle_{W' \times W} = a(u, v) \text{ e } \langle u, A^*v \rangle_{W \times W'} = a(u, v).$$

Assim, podemos reescrever (2.18) e (2.19) como

$$\|Au\|_{W'} \geq \alpha \|u\|_W \quad \forall u \in W \quad (2.21)$$

$$\|A^*v\|_{W'} \geq \alpha \|v\|_W \quad \forall v \in W \quad (2.22)$$

respectivamente. Portanto, de (2.19), temos que  $\text{Ker}A^* = \{0\}$  ( $A^*$  é injetiva). Então, de (2.14), temos

$$\overline{\text{Im}A} = (\text{Ker}A^*)^0 = W'.$$

Usando (2.21) e o mesmo argumento usado para mostrar que  $\text{Im}B^*$  é fechado em (2.15), mostramos que  $\text{Im}A$  é fechado em  $W'$ . Logo,  $\text{Im}A = W'$  e o resultado vale.

Por fim, (2.20) segue de (2.21). ■

**Teorema 2.6** *Se  $a(\cdot, \cdot)$  satisfaz (2.18) e (2.19), e  $b(\cdot, \cdot)$  satisfaz (2.15), então existe um único  $(u, p) \in V \times Q$  solução do problema (2.10). Além disso,*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\|a\|}{\alpha} \right) \|g\|_{Q'} \quad (2.23)$$

e

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\|a\|}{\alpha} \right) \|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta^2} \left( 1 + \frac{\|a\|}{\alpha} \right) \|g\|_{Q'}. \quad (2.24)$$

**Demonstração:** Primeiro vamos mostrar que a solução  $u$  do problema (2.12) existe.

Como (2.15) vale, segue do lema 2.5 que existe um único  $u_0 \in W^\perp$  tal que  $Bu_0 = g$  e

$$\|u_0\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{Q'}. \quad (2.25)$$

Então, a existência da solução  $u$  para (2.12) é equivalente a existir um  $w = u - u_0 \in W$  satisfazendo

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad \forall v \in W.$$

Mas, pelo lema 2.6, segue que esse  $w$  existe e

$$\|w\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \{\|f\|_{V'} + \|a\| \|u_0\|_V\} \leq \frac{1}{\alpha} \{\|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{Q'}\}.$$

Logo,  $u = w + u_0$  é solução de (2.12) e

$$\begin{aligned} \|u\|_V &= \|w + u_0\|_V \leq \|w\|_V + \|u_0\|_V \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \{\|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{Q'}\} + \frac{1}{\beta} \|g\|_{Q'} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|g\|_{Q'} \end{aligned}$$

Pelo corolário 2.2, segue que existe um único  $p \in Q$  tal que  $(u, p)$  é solução de (2.10). Por outro lado, do lema 2.5 segue que (2.16) vale e

$$\begin{aligned} \|p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta} \|B^*p\|_{V'} \leq \frac{1}{\beta} \{\|f\|_{V'} + \|a\| \|u\|_V\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|g\|_{Q'}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.24) vale e a unicidade segue de (2.23) e (2.24). ■

Assumindo agora que temos  $V_h \subset V$  e  $Q_h \subset Q$  subespaços, a aproximação  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  para a solução  $(u, p) \in V \times Q$  do problema (2.10) é definida por

$$\begin{cases} a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle f, v \rangle, & \forall v \in V_h \\ b(u_h, q) = \langle g, q \rangle, & \forall q \in Q_h \end{cases} \quad (2.26)$$

Nosso objetivo agora é obter uma estimativa de erro para a aproximação  $(u_h, p_h)$ . Para isso, introduzimos o operador  $B_h : V_h \rightarrow Q'_h$  definido por

$$\langle B_h v, q \rangle_{Q'_h \times Q_h} = b(v, q)$$

e os subconjuntos de  $V_h$ ,  $W_h = \text{Ker} B_h$  e

$$W_h(g) = \{v \in V_h : B_h v = g \text{ em } Q'_h\}$$

em que  $g$  é restrita a  $Q_h$ .

Para garantir a boa definição da aproximação precisamos garantir que exista uma única solução  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  para (2.26). Pelo

teorema 2.6, isso será verdade se existir  $\alpha^* > 0$  e  $\beta^* > 0$  tal que

$$\sup_{v \in W_h} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha^* \|u\|_V \quad \forall u \in W_h, \quad (2.27)$$

$$\sup_{u \in W_h} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \geq \alpha^* \|v\|_V \quad \forall v \in W_h, \quad (2.28)$$

$$\sup_{v \in V_h} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta^* \|q\|_Q \quad \forall q \in Q_h. \quad (2.29)$$

**Observação 2.4** *Se  $W_h$  tem dimensão finita então (2.28) segue de (2.27).*

Podemos provar agora a estimativa de erro abstrata.

**Teorema 2.7** *Se as formas  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  satisfazem (2.27), (2.28) e (2.29) então o problema (2.26) tem uma única solução e existe uma constante  $C$ , dependendo apenas de  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\|a\|$  e  $\|b\|$  tal que a seguinte expressão vale:*

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \left\{ \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V + \inf_{q \in Q_h} \|p - q\|_Q \right\} \quad (2.30)$$

e quando  $\text{Ker} B_h \subset \text{Ker} B$ ,

$$\|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \right\}. \quad (2.31)$$

*Em particular, se as constantes  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  não dependem de  $h$  então  $C$  também não depende de  $h$ .*

**Demonstração:** Pelo teorema 2.6 temos a existência e a unicidade de solução para (2.26).

Agora, dado  $(v, q) \in V_h \times Q_h$ , de (2.10) e (2.26), temos

$$a(u_h - v, w) + b(w, p_h - q) = a(u - v, w) + b(w, p - q), \quad \forall w \in V_h \quad (2.32)$$

$$b(u_h - v, r) = b(u - v, r) \quad \forall r \in Q_h \quad (2.33)$$

Para  $(v, q)$  fixo, os lados direitos de (2.32) e (2.33) definem funcionais lineares em  $V_h$  e  $Q_h$  contínuos

$$\begin{aligned} L_1(w) &= a(u - v, w) + b(w, p - q) \\ L_2(r) &= b(u - v, r). \end{aligned}$$

Note que esses funcionais tem norma limitada por

$$\|a\| \|u - v\|_V + \|b\| \|p - q\|_Q \text{ e } \|b\| \|u - v\|_V$$

respectivamente e portanto, do teorema (2.6), temos que para qualquer  $(v, q) \in V_h \times Q_h$ ,

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_V &\leq \frac{1}{\alpha^*} \|L_1\|_{V'} + \frac{1}{\beta^*} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|L_2\|_{Q'} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^*} (\|a\| \|u - v\|_V + \|b\| \|p - q\|_Q) + \\ &+ \frac{1}{\beta^*} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|b\| \|u - v\|_V \\ \|p_h - p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta^*} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|L_1\|_{V'} + \frac{\|a\|}{(\beta^*)^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|L_2\|_{Q'} \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta^*} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) (\|a\| \|u - v\|_V + \|b\| \|p - q\|_Q) + \\ &+ \frac{\|a\|}{(\beta^*)^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|b\| \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Somando essas duas expressões temos

$$\|u_h - u\|_V + \|p_h - p\|_Q \leq C\{\|u - v\|_V + \|p - q\|_Q\}$$

e portanto temos a expressão (2.30) quando usamos a desigualdade triangular.

Supondo agora que  $\text{Ker} B_h \subset \text{Ker} B$  e sabendo que  $u_h \in W_h(g)$  é solução de

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W_h,$$

temos, pela ortogonalidade de Galerkin, que

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in W_h. \quad (2.34)$$

Agora, para  $w \in W_h(g)$ ,  $u_h - w \in W_h$  e de (2.27) e (2.34) temos

$$\begin{aligned} \alpha^* \|u_h - w\|_V &\leq \sup_{v \in W_h} \frac{a(u_h - w, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in W_h} \frac{a(u - w, v)}{\|v\|_V} \leq \\ &\leq \|a\| \|u - w\|_V. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \|u - w\|_V + \|u_h - w\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \|u - w\|_V \\ &\Rightarrow \|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \inf_{w \in W_h(g)} \|u - w\|_V. \end{aligned}$$

Mas, dado  $v \in V_h$ , do lema 2.5 temos que existe  $z \in W_h^\perp$  tal que

$$b(z, q) = b(u - v, q), \quad \forall q \in Q_h$$

e

$$\|z\|_V \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|u - v\|_V.$$

Assim,  $w = z + v \in V_h$  satisfaz

$$B_h w = B_h(z + v) = B_h z + B_h v = B_h u + B_h v - B_h v = B_h u = g$$

e portanto pertence a  $W_h(g)$ . Mas,

$$\|u - w\|_V \leq \|u - v\|_V + \|z\|_V \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \|u - v\|_V$$

e portanto,

$$\inf_{w \in W_h(g)} \|u - w\|_V \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

Concluimos então que

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha^*}\right) \inf_{w \in W_h(g)} \|u - w\|_V \leq C \left\{ \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \right\}. \quad \blacksquare$$

Em aplicações, uma maneira de verificar a condição (2.29) é através do próximo teorema.

**Teorema 2.8** *Assumindo (2.15) como válido então a condição inf-sup discreta (2.29) vale com uma constante  $\beta^* > 0$  independente de  $h$  se, e somente se, existe um operador  $\Pi_h : V \rightarrow V_h$  tal que*

$$b(v - \Pi_h v, q) = 0 \quad \forall v \in V, \forall q \in Q_h \quad (2.35)$$

e

$$\|\Pi_h v\|_V \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (2.36)$$



com uma constante  $C > 0$  independente de  $h$ .

**Demonstração:**  $\boxed{\Leftarrow}$  Se  $\Pi_h$  existe então usando (2.15), (2.35) e (2.36) temos que, para  $q \in Q_h$ ,

$$\begin{aligned} \beta \|q\|_Q &\leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{b(v + \Pi_h v - \Pi_h v, q)}{\|v\|_V} = \\ &= \sup_{v \in V} \frac{b(\Pi_h v, q)}{\|v\|_V} \leq \sup_{v \in V} \frac{b(\Pi_h v, q)}{\|\Pi_h v\|_V} \end{aligned}$$

e portanto, (2.29) vale com  $\beta^* = \frac{\beta}{C}$ .

$\boxed{\Rightarrow}$  Supondo (2.29) verdadeira então de (2.17) temos que, para qualquer  $v \in V$  existe um único  $v_h \in W_h^\perp$  tal que

$$b(v_h, q) = b(v, q) \quad \forall q \in Q_h$$

e

$$\|v_h\|_V \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|v\|_V.$$

Assim,  $\Pi_h v = v_h$  define o operador que desejamos. ■

## 2.4 ESTIMATIVA DE ERRO A PRIORI

Apresentamos agora uma análise sobre o erro da aproximação pelo MEFM para o problema (2.7). Durante o trabalho estaremos interessados em elementos triangulares e nos espaços de Raviart-Thomas associados a eles. Primeiramente, estudamos o problema localmente e em seguida analisamos o caso global através do operador de interpolação.

**Definição 2.9** *Dado  $T \in \mathbb{R}^n$  um simplex, o espaço de Raviart-Thomas de ordem  $k \geq 0$  local é definido como*

$$RT_k(T) = \mathcal{P}_k(T)^n + \mathbf{x}\mathcal{P}_k(T). \quad (2.37)$$

Denotaremos por  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , as faces do simplex  $T$  e por  $\mathbf{n}_i$  o vetor normal exterior.

O lema a seguir nos fornece algumas propriedades dos espaços de Raviart-Thomas.

**Lema 2.7** a)  $\dim [RT_k(T)] = n \binom{k+n}{k} + \binom{k+n-1}{k}$ .

b) Se  $\mathbf{v} \in RT_k(T)$  então  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \in \mathcal{P}_k(F_i)$ , para  $i = 1, \dots, n + 1$ .

c) Se  $\mathbf{v} \in RT_k(T)$  e  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  então  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(T)^n$ .

### Demonstração:

a) Note que, para todo  $\mathbf{v} \in RT_k(T)$ , podemos escrever

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha \quad (2.38)$$

com  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}_k(T)^n$ .

**Afirmação:**  $\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k}$ .

De fato, para  $n = 1$ ,  $\mathcal{P}_k = \text{span}\{x_1^{\alpha_1} : \alpha_1 \leq k\}$ . Logo,

$$\dim \mathcal{P}_k = k + 1 = \binom{k+1}{k}.$$

Supondo a afirmação válida para um  $n$ , mostremos que ela vale para  $n + 1$ . Nesse caso, temos

$$\mathcal{P}_k = \text{span}\{\mathbf{x} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \leq k\}.$$

Assim, para

$$\alpha_{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k \Rightarrow \binom{n+k}{k} \text{ possibilidades}$$

$$\alpha_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k - 1 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} \text{ possibilidades}$$

$\vdots$

$$\alpha_{n+1} = k \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 0 \Rightarrow \binom{n+0}{0} \text{ possibilidades.}$$

Totalizando, temos

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

e portanto a afirmação é válida para  $n + 1$ . Logo, a afirmação vale para todo  $n$  por indução. †

**Afirmação:** O número de multi-índices tal que  $|\alpha| = k$  é  $\binom{k+n-1}{k}$ .

De fato, se  $n = 1$  então temos apenas uma possível combinação e portanto o resultado vale.

Supondo válido para um  $n$ , mostremos que a afirmação é válida para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i = k \Rightarrow \binom{k+n-1}{k} \text{ possibilidades} \\ \alpha_{n+1} = 1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i = k-1 \Rightarrow \binom{k+n-2}{k-1} \text{ possibilidades} \\ &\vdots \\ \alpha_{n+1} = k &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \Rightarrow \binom{n-1}{0} \text{ possibilidades.} \end{aligned}$$

Totalizando, temos

$$\sum_{j=0}^k \binom{n-1+j}{j} = \binom{n+k}{k}$$

e portanto a afirmação vale para  $n + 1$ . Logo, a afirmação vale para todo  $n$  por indução. †

Tendo essas duas afirmações válidas, segue de (2.38) que  $a$ ) vale uma vez que  $w \in \mathcal{P}_k(T)^n$  e  $\mathbf{x} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$  é um polinômio de grau  $k + 1$ .

b) Note que  $F_i$  está sobre um dos hiperplanos da equação

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i = s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por  $\bar{s}$  o número real tal que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i = \bar{s}$  contém  $F_i$ .

Assim, se  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}p \in RT_k(T)$  com  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}_k^n$  e  $p \in \mathcal{P}_k$ , temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i + \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i + \bar{s}p.$$

Como os dois termos da última igualdade pertencem a  $\mathcal{P}_k(F_i)$  temos que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \in \mathcal{P}_k(F_i)$ .

c) Como  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  então de (2.38) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{w} + \operatorname{div} \left( \mathbf{x} \sum_{|a|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha \right) = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{w} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( x_i \sum_{|a|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha \right) = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{w} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{|a|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha + \alpha_i x_i \sum_{|a|=k} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i-1} \dots x_n^{\alpha_n} \right) = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{w} + (n+k) \sum_{|a|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{|a|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha = \frac{-1}{n+k} \operatorname{div} \mathbf{w}.$$

Como o lado esquerdo da igualdade acima tem grau  $k$  e o lado direito tem grau  $k-1$  temos que  $a_\alpha = 0$  para todo  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = k$ . ■

Construiremos agora o operador de interpolação local

$$\Pi_T : H^1(T)^n \rightarrow RT_k$$

que utilizaremos dentro da análise de erro.

**Lema 2.8** *Dado  $\mathbf{v} \in H^1(T)^n$ , com  $T \in \mathbb{R}^n$  um simplex, existe um único  $\Pi_T \mathbf{v} \in RT_k(T)$  tal que*

$$\int_{F_i} \Pi_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds = \int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds, \forall p_k \in \mathcal{P}_k(F_i), i = 1, \dots, n+1 \quad (2.39)$$

e se  $k \geq 1$ ,

$$\int_T \Pi_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{k-1} dx = \int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{k-1} dx, \quad \forall \mathbf{p}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}^n(T). \quad (2.40)$$

**Demonstração:** Mostremos primeiramente que o número de condições que definem  $\Pi_T \mathbf{v}$  é igual a dimensão do espaço  $RT_k(T)$ . Para  $k = 0$  o resultado é imediato.

Considere agora o caso  $k \geq 1$ . Como visto anteriormente,

$$\dim \mathcal{P}_k(F_i) = \binom{k+n-1}{k}$$

e portanto o número de condições em (2.39) é  $(n+1) \binom{k+n-1}{k}$ .

Quanto ao número de condições em (2.40) temos

$$\dim \mathcal{P}_{k+1}^n = n \binom{k+n-1}{k-1}$$

Pelo lema 2.7, item *a*), e usando a relação

$$\binom{k+n}{k} = \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k-1}$$

temos que

$$\begin{aligned} \dim RT_k(T) &= n \binom{k+n}{k} + \binom{k+n-1}{k} = \\ &= n \left[ \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k-1} \right] + \binom{k+n-1}{k} = \\ &= (n+1) \binom{k+n-1}{k} + n \binom{k+n-1}{k}. \end{aligned}$$

Assim, para mostrarmos a existência do operador de interpolação, basta que mostremos a sua unicidade.

Seja  $\mathbf{v} \in RT_k(T)$  tal que

$$\int_{F_i} \Pi_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds = 0, \forall p_k \in \mathcal{P}_k(F_i), i = 1, \dots, n+1 \quad (2.41)$$

$$\int_T \Pi_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{k-1} dx = 0, \quad \forall \mathbf{p}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}^n(T). \quad (2.42)$$

Nosso objetivo é mostrar que  $\mathbf{v} = 0$ .

Pelo lema 2.7, item *b*), e por (2.41) segue que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i$  é um polinômio de ordem  $k$  e é ortogonal a todos os elementos de  $\mathcal{P}_k(F_i)$  e portanto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = 0$  em  $F_i$ .

Agora, usando (2.42) temos

$$\int_T (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dx = - \int_T \mathbf{v} \cdot \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx = 0$$

uma vez que  $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{k-1}^n(T)$ . Logo,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  e portanto, pelo lema 2.7, item c), temos que  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(T)^n$ .

Logo, para cada  $i = 1, \dots, n+1$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i$  é um polinômio de grau  $k$  em  $T$  que se anula em  $F_i$ . Portanto, sendo  $\lambda_i$  as coordenadas bari-cêntricas associadas a  $T$  temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = \lambda_i q_{k-1}$$

para algum  $q_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}(T)$  (isso é possível pelo teorema [7]).

Mas, por (2.42), usando  $p_{k-1} = q_{k-1}$  temos

$$\int_T \lambda_i q_{k-1}^2 dx = 0$$

e portanto  $q_{k-1} = 0$ . Isso implica que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = 0$  em  $T$  para  $i = 1, \dots, n+1$ .

Em particular,  $\mathbf{v}$  é ortogonal a  $n$  vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ . Com isso, concluímos que  $\mathbf{v} = 0$ . ■

**Definição 2.10** *Considere dois domínios  $\hat{\Omega}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e um mapeamento bijetor suave  $F : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ . Seja  $DF$  a matriz jacobiana de  $F$  e  $J = \det(DF)$ . Assumindo que  $J$  é diferente de zero em todos os pontos, definimos então a transformação de Piola para  $\hat{\mathbf{v}} \in L^2(\hat{\Omega})^n$  como*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J(\hat{\mathbf{x}})|} \hat{D}F(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}})$ .

**Observação 2.5** *O  $\wedge$  no operador diferencial indica que a derivada é feita com respeito a  $\hat{\mathbf{x}}$ .*

Em particular, quando  $F$  é a função afim dada por  $A\hat{\mathbf{x}} + b$  temos  $J = \det(A)$  e

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} A \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.44)$$

O lema a seguir nos fornece algumas propriedades da transformação de Piola. Demonstraremos estas propriedades apenas para

o caso de transformações afins. Porém, resultados análogos valem para transformações em geral.

**Lema 2.9** *Se  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, T)$  e  $\phi \in H^1(T)$  então*

$$\int_T \text{div} \mathbf{v} \phi \, dx = \int_{\hat{T}} \widehat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}} \hat{\phi} \, d\hat{x}, \quad (2.45)$$

$$\int_T \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} \, d\hat{x}, \quad (2.46)$$

$$\int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \phi \, ds = \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \hat{\phi} \, d\hat{s}. \quad (2.47)$$

**Demonstração:** Pela definição da transformação de Piola temos

$$\begin{aligned} Dv(x) &= \frac{1}{|J|} AD(\hat{v} \circ F^{-1})(x) = \frac{1}{|J|} A\hat{D}\hat{v}(\hat{x})D(F^{-1})(x) = \\ &= \frac{1}{|J|} A\hat{D}\hat{v}(\hat{x})A^{-1} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{div} \mathbf{v} = \text{tr}(D\mathbf{v}) = \frac{1}{|J|} \text{tr}(A\hat{D}\hat{\mathbf{v}}A^{-1}) = \frac{1}{|J|} \text{tr}(\hat{D}\hat{\mathbf{v}}) = \frac{1}{|J|} \widehat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}}.$$

Logo, usando mudança de variável temos (2.45).

Agora, note que como  $\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}})$  temos

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \nabla(\hat{\phi} \circ F^{-1}) = [(\nabla \hat{\phi}) \circ F^{-1}] \cdot (F^{-1})' = \\ &= \hat{\nabla} \hat{\phi} \cdot A^{-1} = A^{-T} \hat{\nabla} \hat{\phi} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_T \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\hat{T}} A\hat{\mathbf{v}} \cdot A^{-T} \hat{\nabla} \hat{\phi} \, d\hat{x} = \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} \, d\hat{x}.$$

Por fim, (2.47) segue de (2.45) e (2.46) pelo teorema de divergência. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \phi \, ds &= \int_T \mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) + \phi \text{div} \mathbf{v} \, dx = \\ &= \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot (\hat{\nabla} \hat{\phi}) + \widehat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}} \hat{\phi} \, d\hat{x} = \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \hat{\phi} \, d\hat{s}. \end{aligned}$$

■

Mostramos agora que a interpolação de Raviart-Thomas é invariante com relação a transformação de Piola.

**Lema 2.10** *Dado um simplex  $T \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in H^1(T)^n$ , vale*

$$\Pi_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} = \widehat{\Pi_T \mathbf{v}}. \quad (2.48)$$

**Demonstração:** Temos que mostrar que

$$\int_{\hat{F}_i} \widehat{\Pi_T \mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \hat{p}_k \, d\hat{s} = \int_{\hat{F}_i} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \hat{p}_k \, d\hat{s}, \quad \forall \hat{p}_k \in \mathcal{P}_k(\hat{F}_i), i = 1, \dots, n+1 \quad (2.49)$$

em que  $\hat{F}_i = F^{-1}(F_i)$  e

$$\int_{\hat{T}} \widehat{\Pi_T \mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \, d\hat{x} = \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \, d\hat{x}, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}^n(\hat{T}). \quad (2.50)$$

Dado  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathcal{P}_k(\hat{F}_i)$  temos

$$\int_{\hat{F}_i} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \hat{p}_k \, d\hat{s} = \int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k \, ds \quad (2.51)$$

De fato, isso segue de (2.47) uma vez que  $\mathcal{C}_0^\infty(F_i)$  é denso em  $L^2(F_i)$ . Não podemos aplicar (2.47) diretamente pois a função obtida quando estendemos  $p_k$  por zero para as outras faces de  $T$  não está em  $H^{1/2}(\partial T)$  e, portanto, não é a restrição de uma função  $\phi \in H^1(T)$ . No entanto, seja  $\{q_j\}$  uma sequência em  $\mathcal{C}_0^\infty(F_i)$  tal que  $q_j \rightarrow p_k$  em  $L^2(F_i)$  e, uma vez que a extensão por zero a  $\partial T$  de  $q_j$  está em  $H^{1/2}(\partial T)$ , existe  $\phi_j \in H^1(T)$  tal que  $\phi_j|_{F_i} = q_j$ .

Nessas condições, aplicando (2.47) obtemos

$$\int_{\hat{F}_i} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \hat{q}_j \, d\hat{s} = \int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i q_j \, ds.$$

Assim, como  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \in L^2(F_i)$ , passamos o limite em  $j \rightarrow \infty$  e obtemos (2.51).

Analogamente, temos

$$\int_{\hat{F}_i} \widehat{\Pi_T \mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \hat{p}_k \, d\hat{s} = \int_{F_i} \Pi_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k \, ds$$

e, portanto, (2.49) segue da condição (2.39) na definição de  $\widehat{\Pi_T \mathbf{v}}$ .

Resta ainda provar (2.50). Note que para  $\hat{\mathbf{p}}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}^n(\hat{T})$ , utilizando (2.44) e (2.40), temos



$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} \widehat{\Pi}_T \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \, d\hat{x} &= \int_T |J| A^{-1} \Pi_T \mathbf{v} \cdot |J| A^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{k-1} |J|^{-1} \, dx = \\
&= \int_T \Pi_T \mathbf{v} \cdot |J| A^{-T} A^{-1} \mathbf{p}_{k-1} \, dx = \\
&= \int_T \mathbf{v} \cdot |J| A^{-T} A^{-1} \mathbf{p}_{k-1} \, dx = \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \, d\hat{x}.
\end{aligned}$$

Aqui utilizamos que  $|J| A^{-T} A^{-1} \mathbf{p}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}^n(T)$ . ■

Com isso, podemos provar a estimativa de erro ótima para a interpolação de Raviart-Thomas.

**Teorema 2.9** *Existe uma constante  $C$  dependendo de  $k$ ,  $n$  e  $\sigma$  tal que, para qualquer  $\mathbf{v} \in H^m(T)^n$  e  $1 \leq m \leq k+1$ ,*

$$\|\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^m \|\nabla^m \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \quad (2.52)$$

**Demonstração:** A estratégia utilizada para demonstrar esse teorema é mostrar para um elemento de referência  $\hat{T}$  e depois usar a transformação de Piola e os lemas anteriores para provar o caso geral. Denotaremos por  $\hat{C}$  uma constante genérica dependendo de  $k$ ,  $n$  e  $\hat{T}$ .

Para cada face  $\hat{F}_i$  de  $\hat{T}$ , sejam  $\{p_j^i\}_{1 \leq j \leq N}$  uma base para  $\mathcal{P}_k(\hat{F}_i)$  e  $\{\mathbf{p}_m\}_{1 \leq m \leq M}$  uma base para  $\mathcal{P}_{k-1}(\hat{T})^n$ . Então, associada a estas bases, podemos introduzir uma base de  $RT_k(T)$ ,  $\{\phi_j^i, \psi_m\}$ , definida por

$$\int_{\hat{F}_i} \phi_j^i \cdot \mathbf{n}_i p_s^r = \delta_{ir} \delta_{js}, \quad \int_{\hat{T}} \phi_j^i \cdot \mathbf{p}_m = 0$$

para  $i, r = 1, \dots, n+1$ ,  $j, s = 1, \dots, N$  e  $m = 1, \dots, M$  e

$$\int_{\hat{T}} \psi_m \cdot \mathbf{p}_l = \delta_{ml}, \quad \psi_m \cdot \mathbf{n}_i = 0$$

para  $m, l = 1, \dots, M$  e  $i = 1, \dots, n+1$ .

Então

$$\Pi_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^N \left( \int_{\hat{F}_i} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_i p_j^i \right) \phi_j^i(\hat{x}) + \sum_{m=1}^M \left( \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}_m \right) \psi_m(\hat{x}).$$

Agora, do teorema do traço (2.1) em  $\hat{T}$  temos

$$\left| \int_{\hat{F}_i} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_i p_j^i \right| \leq \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{F}_i)} \|p_j^i\|_{L^2(\hat{F}_i)} \leq \hat{C} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{H^1(\hat{T})}.$$

Além disso,

$$\left| \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}_m \right| \leq \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{T})} \|\mathbf{p}_m\|_{L^2(\hat{T})} \leq \hat{C} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{T})}$$

com  $\hat{C}$  dependendo de  $p_j^i$  e  $\mathbf{p}_m$ .

Portanto, obtemos

$$\|\Pi_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{T})} \leq \hat{C} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{H^1(\hat{T})} \quad (2.53)$$

A partir dessa desigualdade iremos mostrar o resultado desejado para um elemento  $T$  qualquer.

Pelo lema 2.10 e fazendo uma mudança de variáveis temos

$$\int_T |\Pi_T \mathbf{v}|^2 dx = \int_{\hat{T}} |J|^{-2} |A \Pi_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}}|^2 |J| d\hat{x} \leq \frac{\|A\|^2}{|J|} \int_{\hat{T}} |\Pi_{\hat{T}} \hat{\mathbf{v}}|^2 d\hat{x}.$$

Dessa forma, usando (2.6) e (2.53) obtemos

$$\int_T |\Pi_T \mathbf{v}|^2 dx \leq |J|^{-1} \frac{h_T^2}{\rho_T^2} \left( \int_T |\hat{\mathbf{v}}|^2 d\hat{x} + \int_{\hat{T}} |\hat{D} \hat{\mathbf{v}}|^2 d\hat{x} \right) \quad (2.54)$$

Mas, como  $\hat{\mathbf{v}} = |J|A^{-1}\mathbf{v}$  e  $\hat{D}\hat{\mathbf{v}} = |J|A^{-1}D\mathbf{v}$ , usando novamente (2.6) temos

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{v}}| &\leq |J| \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T} |\mathbf{v}| \\ |\hat{D}\hat{\mathbf{v}}| &\leq |J| \frac{h_{\hat{T}} h_T}{\rho_T \rho_{\hat{T}}} |D\mathbf{v}| \end{aligned}$$

e, portanto, de (2.54), por mudança de variável, temos

$$\|\Pi_T \mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 \leq \hat{C} \left( \frac{h_T^2}{\rho_T^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T^4}{\rho_T^2} \|D\mathbf{v}\|_{L^2(T)}^2 \right).$$

Como estamos assumindo a condição de regularidade,

$$\|\Pi_T \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \leq C \left( \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)} + h_T \|D\mathbf{v}\|_{L^2(T)} \right) \quad (2.55)$$

Por fim, como  $\mathcal{P}_k(T)^n \subseteq RT_k(T)$ , sabemos que  $\Pi_T \mathbf{q} = \mathbf{q}$ , para todo  $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_k^n(T)$  e então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}\|_{L^2(T)} &= \|\mathbf{v} - \mathbf{q} - \Pi_T(\mathbf{v} - \mathbf{q})\|_{L^2(T)} \leq \\ &\leq C (\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|_{L^2(T)} + h_T \|D(\mathbf{v} - \mathbf{q})\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Concluimos a demonstração usando o lema 2.1. ■

Introduziremos agora o espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas global. Assumindo que temos uma triangularização  $\{\mathcal{T}_h\}$  de  $\Omega$ , isto é,  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  e a interseção de dois elementos de  $\mathcal{T}_h$  é ou vazia, ou um vértice, ou uma aresta comum ou uma face e  $h$  é o tamanho da malha definido por

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

Assumiremos ainda que a triangularização é regular.

**Definição 2.11** *Associado a triangularização  $\mathcal{T}_h$  introduzimos o espaço global*

$$RT_k(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_T \in RT_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.56)$$

Uma ferramenta importante para a análise de erro é o operador

$$\Pi_h : H(\text{div}, \Omega) \cap \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)^n \rightarrow RT_k(\mathcal{T}_h)$$

definido por

$$\Pi_h \mathbf{v}|_T = \Pi_T \mathbf{v}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Note que esse operador está bem definido. De fato, por definição temos  $\Pi_T \mathbf{v} \in RT_k(T)$ . Resta mostrar que  $\Pi_h \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ . Sabendo que uma função pertence a  $H(\text{div}, \Omega)$  se, e somente se, tem componente normal contínua na interface entre os elementos, basta provar que as componentes normais de  $\Pi_h \mathbf{v}$  possuem esta propriedade. Seja  $F_i$  uma face compartilhada pelos elementos  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ . Como  $\mathbf{v} \in H^1(T)^n$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ , pelo lema 2.8 temos

$$\int_{F_i} \Pi_{T_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds = \int_{F_i} \Pi_{T_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds = \int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i p_k ds, \forall p_k \in \mathcal{P}_k(F_i),$$

$i = 1, \dots, n + 1$ . Assim,

$$\int_{F_i} (\Pi_{T_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i - \Pi_{T_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i) p_k ds = 0, \forall p_k \in \mathcal{P}_k(F_i), i = 1, \dots, n+1.$$

Pelo lema 2.7,  $\Pi_{T_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i - \Pi_{T_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \in \mathcal{P}_k(F_i)$ . Logo,  $\Pi_{T_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = \Pi_{T_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i$  na interface  $F_i$ , o que prova a continuidade da componente normal.

O espaço de elementos finitos que utilizaremos para aproximar a variável escalar  $u$  é o espaço dos polinômios de grau  $k$  por partes (não necessariamente contínuos), ou seja,

$$\mathcal{P}_k^{disc}(\mathcal{T}_h) = \{q \in L^2(\Omega) : q|_T \in \mathcal{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Vale destacar que, como nenhuma derivada da variável escalar aparece na forma fraca, não precisamos exigir continuidade no espaço para essa variável.

O lema a seguir nos fornece duas propriedades fundamentais para a análise do erro global.

**Lema 2.11** *O operador  $\Pi_h$  satisfaz*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) q \, dx = 0 \quad (2.57)$$

para todo  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)^n$  e para todo  $q \in \mathcal{P}_k^{disc}$ . Além disso,

$$\operatorname{div}(RT_k) = \mathcal{P}_k^{disc}. \quad (2.58)$$

**Demonstração:** Integrando por partes o lado esquerdo de (2.57) e usando a definição de  $\Pi_T \mathbf{v}$  (lema 2.8) segue que, para todo  $\mathbf{v} \in H^1(T)^n$  e qualquer  $q \in \mathcal{P}_k(T)$ ,

$$\int_T \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) q \, dx = - \int_T (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \nabla q \, dx + \int_{\partial T} (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} q \, ds = 0$$

e portanto a expressão (2.57) vale.

Mostremos agora o segundo resultado. Primeiramente, note que  $\operatorname{div}(RT_k) \subseteq \mathcal{P}_k^{disc}$  uma vez que, para  $\mathbf{v} \in RT_k(\mathcal{T}_h)$ , temos  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  e  $\mathbf{v}|_T \in RT_k(T)$  e portanto,  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$  e  $\operatorname{div}(\mathbf{v}|_T) \in \mathcal{P}_k(T)$ .

Por outro lado, do lema 2.2, sabemos que  $\operatorname{div} : H^1(\Omega)^n \rightarrow L^2(\Omega)$  é uma função sobrejetiva. Portanto, dado  $w \in \mathcal{P}_k^{disc} \subseteq L^2(\Omega)$ , existe  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$  tal que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = w$ . Então, por (2.57), temos que, para todo

$$q \in \mathcal{P}_k^{disc},$$

$$0 = \int_T \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) q \, dx = \int_T (w - \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v})) q \, dx.$$

E como  $w - \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v}) \in \mathcal{P}_k^{disc}$  temos que  $w - \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v}) = 0$ , ou ainda,  $\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v}) = w$ .

Concluimos assim que (2.58) vale. ■

A projeção  $L^2$ ,  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_k^{disc}$ , definida, para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , como

$$\int_{\Omega} (f - P_h f) q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc}$$

permite que escrevamos (2.57) e (2.58) na forma do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H(\operatorname{div}, \Omega) \cap \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)^n & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2(\Omega) \\ \Pi_h \downarrow & & \downarrow P_h \\ RT_k & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \mathcal{P}_k^{disc} \end{array} \quad (2.59)$$

De fato, se  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)^n$  então  $\Pi_h \mathbf{v} \in RT_k$ , como visto anteriormente, e  $\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v}) \in \mathcal{P}_k^{disc}$  por (2.58). Por outro lado,  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  e portanto  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ . Isso implica que  $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}) \in \mathcal{P}_k^{disc}$ . Agora, da definição da projeção  $L^2$  e de (2.57) temos que

$$\int_{\Omega} [P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v})] q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc}.$$

Assim,  $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v})$  em  $\mathcal{P}_k^{disc}$  e, portanto, o diagrama comuta.

Nosso próximo passo é obter uma estimativa de erro para a aproximação de elementos finitos mistos para o problema (2.7), isto é, encontrar  $(u_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{P}_k^{disc} \times RT_k$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mu \mathbf{p}_h \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in RT_k \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{p}_h \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc}. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

**Lema 2.12** *Se  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_h$  são soluções de (2.9) e (2.60) respectivamente*

então

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}$$

**Demonstração:** Subtraindo (2.60) de (2.9) temos

$$\int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} (u - u_h) \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in RT_k \quad (2.61)$$

e

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc}. \quad (2.62)$$

Usando (2.57), (2.59) e (2.62), obtemos

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc}$$

e, uma vez que temos (2.58), podemos tomar  $q = \operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h)$  e concluir que

$$\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) = 0$$

Portanto, tomando  $\mathbf{v} = \Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h$  em (2.61) obtemos

$$\int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx = 0.$$

e então,

$$\begin{aligned} \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \mu(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx = \\ &= \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \mu(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}) \, dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx \right\} = \\ &= \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \mu(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}) \cdot (\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \, dx \leq \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}. \\ &\Rightarrow \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Assim, temos a estimativa de erro ótima para a aproximação da variável vetorial  $\mathbf{p}$ .

**Teorema 2.10** *Se a solução  $\mathbf{p}$  do problema (2.8) pertence a  $H^m(\Omega)^n$ ,  $1 \leq m \leq k+1$ , então existe uma constante  $C$ , dependendo de  $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $k$ ,  $n$  e  $\sigma$ , tal que*

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^m \|\nabla^m \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.63)$$

**Demonstração:** O resultado segue do lema 2.12 e do teorema 2.9.  $\blacksquare$

Passamos agora a mostrar os resultados que estabelecerão uma estimativa de erro para a variável escalar  $u$ . Para isso, vamos utilizar a desigualdade,

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad (2.64)$$

que é uma consequência do caso  $m = 1$  do teorema 2.9. Ou ainda,

$$\|\Pi_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.65)$$

**Lema 2.13** *Se  $(u, \mathbf{p})$  e  $(u_h, \mathbf{p}_h)$  são soluções de (2.9) e (2.60) respectivamente, então existe uma constante  $C$  que depende de  $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $k$  e  $\sigma$  tal que*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \{ \|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} \} \quad (2.66)$$

**Demonstração:** Para todo  $q \in \mathcal{P}_k^{disc}$ , o lema 2.2 garante que existe  $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)$  tal que  $div \mathbf{w} = q$  e

$$\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por outro lado, se  $\mathbf{w}_h = \Pi_h \mathbf{w}$  então, por (2.65),

$$\|\mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)} = \|\Pi_h \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.67)$$

Agora, de (2.61) e da definição de  $P_h$ , temos que

$$\int_{\Omega} (P_h u - u_h) div \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mu (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in RT_k$$

uma vez que  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathcal{P}_k^{disc}$ .

Tomando  $\mathbf{v} \in RT_k$  de modo que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = P_h u - u_h$  e

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{v} \, dx \leq \\ &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e portanto, usando também o lema 2.12 e a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} + \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} + C \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \{ \|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} \} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como consequência temos a seguinte estimativa de erro para a aproximação da variável escalar  $u$ .

**Teorema 2.11** *Se a solução  $(u, \mathbf{p})$  do problema (2.8) pertence a  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)^n$ ,  $1 \leq m \leq k + 1$ , então existe uma constante  $C$  tal que*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^m \{ \|\nabla^m \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^m u\|_{L^2(\Omega)} \}. \quad (2.68)$$

**Demonstração:** O resultado segue do teorema 2.10, do lema 2.13 e da estimativa de erro para a projeção  $L^2$  dada no corolário 2.1. ■

Caso  $\Omega$  seja um polígono convexo ou um domínio suave e o coeficiente  $a(x)$  for suficientemente suave, temos a estimativa a priori

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.69)$$

e também obtemos uma estimativa de erro de alta ordem para  $\|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  usando o argumento de dualidade.

**Lema 2.14** *Se  $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$  e a desigualdade (2.69) vale, existe uma constante  $C$ , dependendo de  $\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ ,  $\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $c_0$  e  $\sigma$  tal que*

$$\|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \{ \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h)\|_{L^2(\Omega)} \}. \quad (2.70)$$



**Observação 2.6** A definição do espaço  $W^{1,\infty}(\Omega)$  pode ser encontrada em [1].

**Demonstração:** Considere o problema dual

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla\phi) = P_h u - u_h, & \text{em } \Omega \\ \phi = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Inicialmente, temos que

$$\|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (P_h u - u_h) \operatorname{div}(a\nabla\phi) \, dx.$$

Considerando que  $\Pi_h(a\nabla\phi) \in RT_k$  temos do lema 2.11 que

$$\int_{\Omega} (P_h u - u_h) \operatorname{div}(a\nabla\phi) \, dx = \int_{\Omega} (P_h u - u_h) \operatorname{div}(\Pi_h(a\nabla\phi)) \, dx.$$

Somando e subtraindo  $u$  no termo  $P_h u - u_h$  e usando a definição da projeção ortogonal obtemos

$$\int_{\Omega} (P_h u - u_h) \operatorname{div}(\Pi_h(a\nabla\phi)) \, dx = \int_{\Omega} (u - u_h) \operatorname{div}(\Pi_h(a\nabla\phi)) \, dx.$$

Agora, de (2.61), podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u - u_h) \operatorname{div}(\Pi_h(a\nabla\phi)) \, dx = \\ & = \int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h(a\nabla\phi) - a\nabla\phi) \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \nabla\phi \, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo termo do lado direito da expressão anterior e usando (2.62) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h(a\nabla\phi) - a\nabla\phi) \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \nabla\phi \, dx = \\ & = \int_{\Omega} \mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot (\Pi_h(a\nabla\phi) - a\nabla\phi) \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h)(\phi - P_h\phi) \, dx. \end{aligned}$$

Por fim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (2.64) e o corolário 2.1 concluímos que

$$\begin{aligned} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq Ch \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \\ & + Ch \|\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

em que utilizamos o fato de que  $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

O resultado segue usando (2.69) para a função  $\phi$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq Ch \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + Ch \|\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h)\|_{L^2(\Omega)} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.12** *Se  $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , a desigualdade (2.69) vale,  $\mathbf{p} \in H^{k+1}(\Omega)^n$  e  $f \in H^{k+1}(\Omega)$  então existe uma constante  $C$ , dependendo de  $\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ ,  $\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $c_0$  e  $\sigma$  tal que*

$$\|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+2} \{ \|\nabla^{k+1} \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^{k+1} f\|_{L^2(\Omega)} \}. \quad (2.71)$$

**Demonstração:** Da segunda equação de (2.60) temos que

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{p}_h - f) q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_k^{disc},$$

ou seja,  $\operatorname{div} \mathbf{p}_h = P_h f$ . Então,

$$\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) = f - P_h f$$

e portanto o resultado segue do teorema 2.10, do lema 2.14 e da estimativa de erro para a projeção  $L^2$  dada pelo corolário 2.1. \blacksquare

## 2.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentamos alguns exemplos que foram implementados. Mais detalhes sobre a implementação estão descritos no apêndice A.

Seja  $\Omega$  um domínio com fronteira de Lipschitz no plano, com vetor unitário normal exterior  $\nu$  na fronteira poligonal  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  ( $\Gamma_N$  é a fronteira de Neumann e  $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$  é a fronteira de Dirichlet fechada). Considere o problema: encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_D, & \text{em } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g, & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.72)$$

em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_N)$  e  $u_D \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

Definindo  $\mathbf{p} = \nabla u$  podemos dividir a primeira equação de (2.72)

em duas, ou seja,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{p} + f = 0, & \text{em } \Omega \\ \mathbf{p} = \nabla u, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.73)$$

em que  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ .

Para a formulação do problema iremos precisar dos seguintes espaços de funções:

$$H_{0,N}(\operatorname{div}, \Omega) := \{q \in H(\operatorname{div}, \Omega) / q \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_N\},$$

$$H_{g,N}(\operatorname{div}, \Omega) := \{q \in H(\operatorname{div}, \Omega) / q \cdot \mathbf{n} = g \text{ em } \Gamma_N\},$$

Então, para o problema (2.73), temos a seguinte formulação fraca: dado  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_N)$  e  $u_D \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , encontrar  $\mathbf{p} \in H_{g,N}(\operatorname{div}, \Omega)$  e  $u \in L^2(\Omega)$  tais que

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = \int_{\Gamma_D} u_D \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall \mathbf{q} \in H_{0,N}(\operatorname{div}, \Omega), \quad (2.74)$$

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p} \, dx = - \int_{\Omega} v f \, dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (2.75)$$

A existência e unicidade de solução  $(u, \mathbf{p})$  para o sistema (2.74)-(2.75) e sua equivalência com o problema (2.73) pode ser encontrada em [9].

Durante o processo de discretização do fluxo  $\mathbf{p}$  consideraremos o espaço de Raviart-Thomas de ordem 0,

$$RT_0(\mathcal{T}) = \{q \in L^2(T) / \forall T \in \mathcal{T}, \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \exists b \in \mathbb{R} \forall \mathbf{x} \in T, \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + b\mathbf{x} \text{ e } \forall E \in \mathcal{E}_{\Omega}, [q]_E \cdot \mathbf{n}_E = 0\},$$

em que  $\mathcal{T}$  é uma triangularização regular,  $\mathcal{E}_{\Omega}$  é o conjunto de arestas interiores e  $[q]_E := q|_{T_+} - q|_{T_-}$  denota o salto de  $q$  sobre a aresta  $E = T_+ \cap T_-$  compartilhada pelos elementos vizinhos  $T_+$  e  $T_-$  em  $\mathcal{T}$ .

Com a aproximação constante por partes sobre  $\mathcal{E}_N$   $g_h$  de  $g$ ,  $g_h|_E = \int_E g \, ds / |E|$  para cada  $E \in \mathcal{E}_N$  de comprimento  $|E|$ , temos os espaços discretos

$$M_{h,g} := \{\mathbf{q}_h \in RT_0(\mathcal{T}) / \mathbf{q}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega) / \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} = g_h \text{ em } \Gamma_N\}, \\ M_h := M_{h,0} = RT_0(\mathcal{T}) \cap H_{0,N}(\operatorname{div}, \Omega),$$

O problema discreto é: encontrar  $(u_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{P}_0^{disc} \times M_{h,g}$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \mathbf{q}_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \mathbf{q}_h dx = \int_{\Gamma_D} u_D \mathbf{q}_h \cdot \nu ds, \forall q_h \in M_{h,0} \quad (2.76)$$

$$\int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_h dx = - \int_{\Omega} v_h f dx, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_0^{disc} \quad (2.77)$$

Sendo  $\{\psi_j\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , uma base-aresta de  $RT_0(\mathcal{T})$  com  $M_{h,0} = \operatorname{span}\{\psi_1, \dots, \psi_N\} \subset RT_0(\mathcal{T})$ . Com respeito a essa base temos as componentes  $x_{\psi} = (x_1, \dots, x_N)$  de  $\mathbf{p}_h = \sum_{k=1}^N x_k \psi_k \in M_{h,g}$  e

denotamos por  $x_u = (x_{N+1}, \dots, x_{N+L})$  as componente de  $u \in \mathcal{P}_0^{disc}$  relativas a base  $\{\chi_l\}$ , isto é,  $u_h|_{T_l} = x_{N+l}$  para  $l = 1, \dots, L$  e para uma enumeração  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_L\}$  dos  $L = \operatorname{card}(\mathcal{T})$  elementos. Então, da formulação fraca discreta escrevemos o seguinte sistema linear, cujas incógnitas são  $(x_1, \dots, x_M)$  e  $(x_{N+1}, \dots, x_{N+L})$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M x_k \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_k dx + \sum_{l=1}^L x_{N+l} \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_j dx &= \int_{\Gamma_D} u_D \psi_j \cdot \nu ds \\ &- \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_m dx, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M x_k \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_k dx &= - \int_{T_l} f dx \\ &- \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_m dx \end{aligned} \quad (2.79)$$

para  $j = 1, \dots, M$ ,  $l = 1, \dots, L$  e  $x_{M+m} := g_h|_{E_m}$ ,  $m = M+1, \dots, N$  correspondem a fronteira de Neumann.

Apresentamos a seguir 4 exemplos. Resolvemos cada um deles usando uma malha inicial com 2 triângulos e 4 nós como na figura abaixo. O refinamento é feito usando o método da biseção, isto é, em cada elemento conectam-se os pontos médios das três arestas. Dessa forma, como pode ser visto nos dois refinamentos abaixo, cada elemento divide-se em quatro novos elementos.

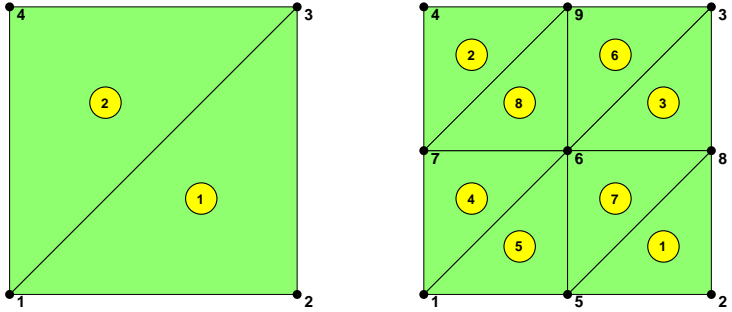


Figura 1: Malha inicial e refinamento 1.

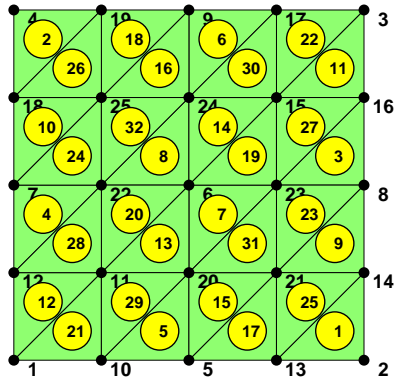


Figura 2: Malha malha com 2 refinamentos.

A partir dessa malha inicial, fizemos 6 refinamentos uniformes na malha, resolvendo os problemas em cada um desses refinamentos. Denotamos por

$$e_u(nref) = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

e

$$e_p(nref) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}$$

os erros na norma  $L^2$ , para cada nível de refinamento  $nref$  e,

$$\alpha_u = \frac{\ln\left(\frac{e_u(nref)}{e_u(nref-1)}\right)}{\ln(0.5)}, \quad \alpha_p = \frac{\ln\left(\frac{e_p(nref)}{e_p(nref-1)}\right)}{\ln(0.5)}.$$

as taxas de convergência de  $u$  e  $\mathbf{p}$ , respectivamente.

O motivo de utilizamos estas expressões para calcular as taxas de convergência é que, dados  $h_1$  e  $h_2$  os diâmetros de duas malhas  $\mathcal{T}_{h_1}$  e  $\mathcal{T}_{h_2}$ , então temos estimativas para os erros na forma

$$\begin{aligned} \|e_{h_1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch_1^\alpha \{\|\nabla \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\} \\ \|e_{h_2}\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch_2^\alpha \{\|\nabla \mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\} \\ \Rightarrow \frac{e_{h_1}}{e_{h_2}} &\approx \frac{h_1^\alpha}{h_2^\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, se  $h_2 = 2h_1$ , ou seja,  $\mathcal{T}_{h_1}$  é um refinamento uniforme de  $\mathcal{T}_{h_2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\|e_{h_1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|e_{h_2}\|_{L^2(\Omega)}} &\approx \frac{h_1^\alpha}{(2h_1)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{\|e_{h_1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|e_{h_2}\|_{L^2(\Omega)}}\right) &\approx \alpha \ln(0.5). \end{aligned}$$

**Observação 2.7** *Para fazer o cálculo do erro na norma  $L^2(\Omega)$  utilizamos quadratura gaussiana com 7 pontos.*

Nos dois exemplos a seguir consideramos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.80)$$

**Exemplo 2.1** *Seja*

$$f(x, y) = -2(x^2 + y^2)(x^4 - x^3 + 26x^2y^2 - 21x^2y - 21xy^2 + 16xy + y^4 - y^3).$$

*A solução exata para este problema é dada pela função*

$$u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 xy(1-x)(1-y).$$

*Neste caso, obtivemos os seguintes resultados:*

nref	$e_u$	$\alpha_u$	$e_p$	$\alpha_p$
0	0.017544	0	0.12427	0
1	0.011117	0.65812	0.081418	0.61005
2	0.0071232	0.64223	0.062231	0.38771
3	0.0036015	0.98393	0.036103	0.78551
4	0.0017801	1.0166	0.018795	0.94179
5	0.00088613	1.0064	0.0094951	0.98509
6	0.00044253	1.0018	0.0047599	0.99625

Tabela 1: Erros na norma  $L^2$  e taxa de convergência no exemplo 2.1.

Como tanto  $u$  quanto  $\mathbf{p}$  pertencem a  $H^1(\Omega)$  temos que a convergência deve ser da ordem de  $h$ , ou seja,  $\alpha = 1$ . Essa taxa é confirmada para ambas as variáveis como pode ser visto na tabela.

Abaixo os gráficos da solução exata, da solução aproximada e do erro absoluto. Para melhor visualização utilizou-se  $nref = 5$ .

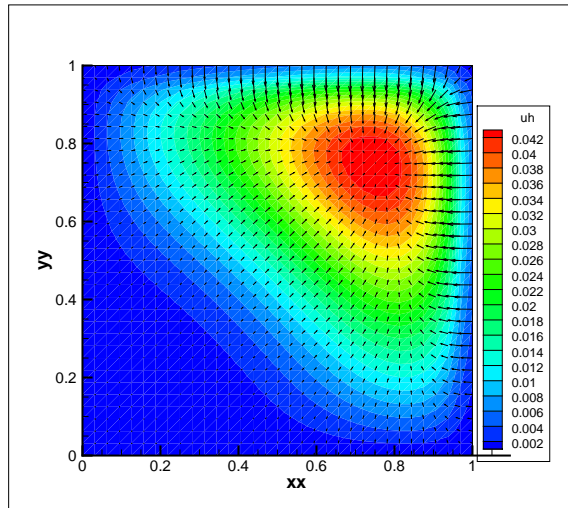


Figura 3: Solução aproximada do exemplo 2.1.

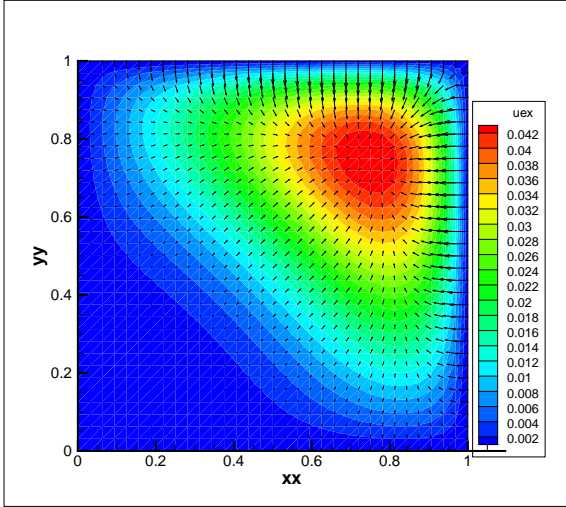
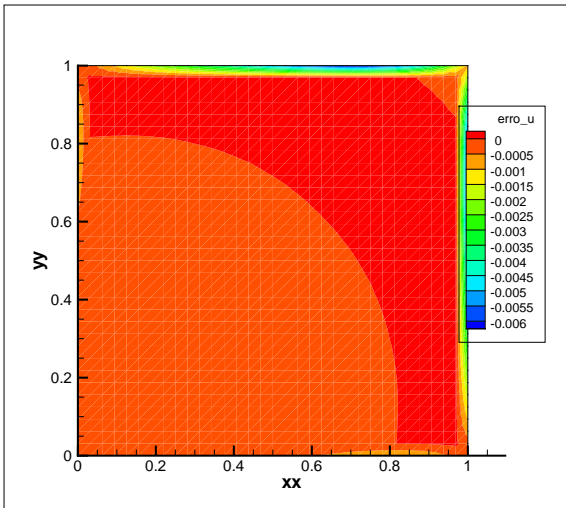


Figura 4: Solução exata do exemplo 2.1.

Figura 5: Erro absoluto de  $u$  no exemplo 2.1.



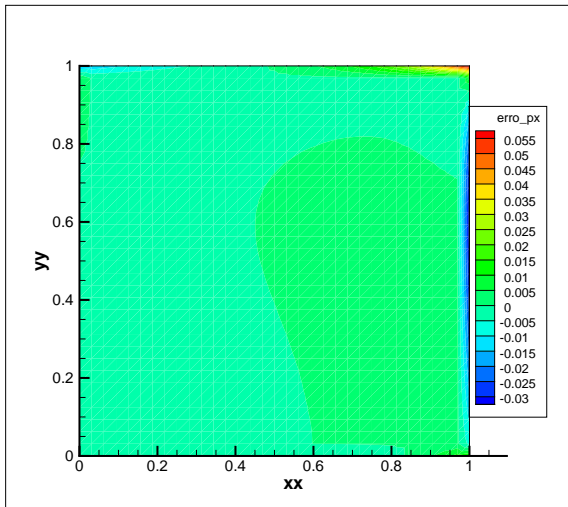


Figura 6: Erro absoluto de  $p_x$  no exemplo 2.1.

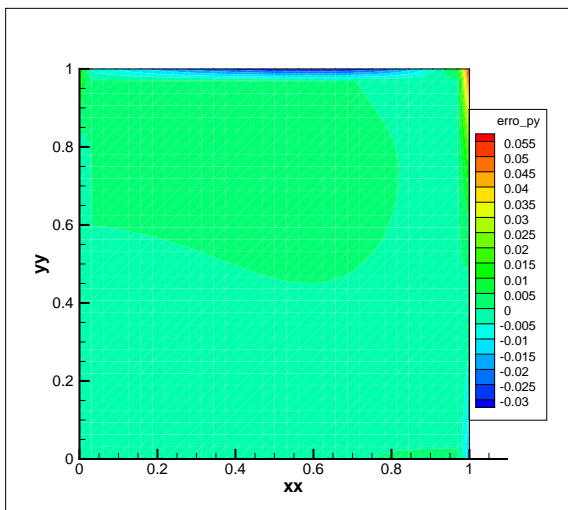


Figura 7: Erro absoluto de  $p_y$  no exemplo 2.1.

**Exemplo 2.2** *Seja*

$$f(x, y) = -2(9x^6 - 9x^5 - 13x^4y^2 + 19x^4y + 10x^3y^2 - 16x^3y - 13x^2y^4 + 10x^2y^3 + 19xy^4 - 16xy^3 + 9y^6 - 9y^5)/9(x^2 + y^2)^{8/3}.$$

A solução exata para este problema é dada por

$$u(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2/3}xy(1 - x)(1 - y).$$

Neste caso, obtivemos os seguintes resultados:

nref	$e_u$	$\alpha_u$	$e_p$	$\alpha_p$
0	0.040408	0	0.25651	0
1	0.029609	0.44862	0.2354	0.12393
2	0.019664	0.5905	0.18774	0.32633
3	0.010506	0.90435	0.13263	0.50134
4	0.0053411	0.97597	0.088836	0.5782
5	0.0026837	0.99293	0.057997	0.61516
6	0.001344	0.99765	0.037341	0.63524

Tabela 2: Erros na norma  $L^2$  e taxa de convergência no exemplo 2.2.

Diferente do primeiro exemplo, temos  $u \in H^1(\Omega)$  mas  $\mathbf{p} \notin H^1(\Omega)$ . Isso pode ser percebido na tabela acima uma vez que a taxa de convergência para  $u_h$  foi da ordem de  $h$  mas a taxa de convergência de  $\mathbf{p}_h$  não chegou a isso.

Abaixo os gráficos da solução exata, da solução aproximada e do erro absoluto.

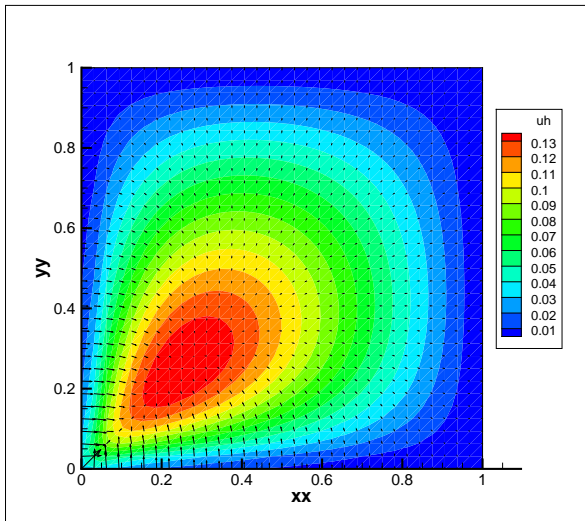


Figura 8: Solução aproximada do exemplo 2.2.

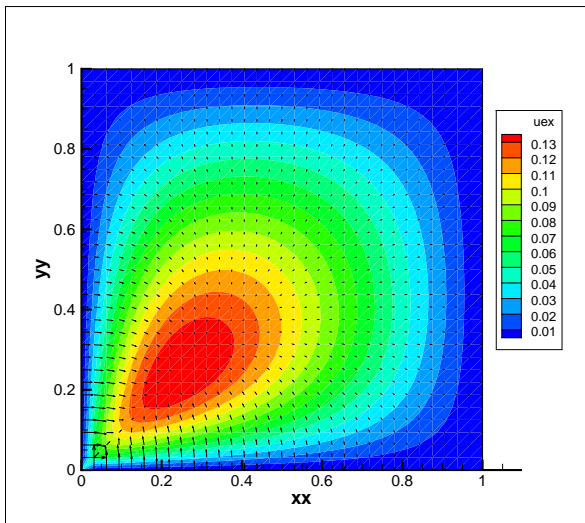


Figura 9: Solução exata do exemplo 2.2.

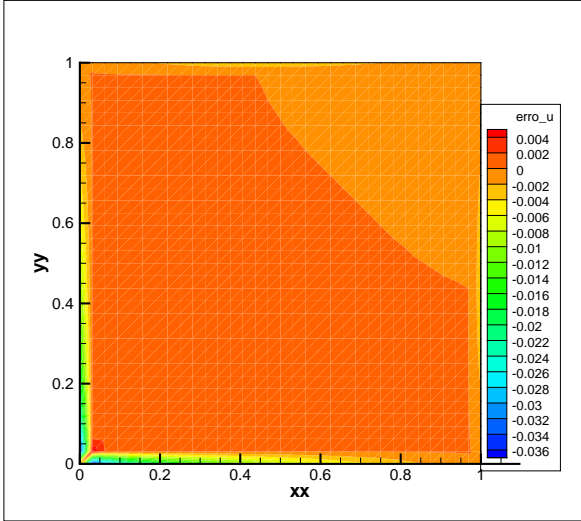


Figura 10: Erro absoluto de  $u$  no exemplo 2.2.

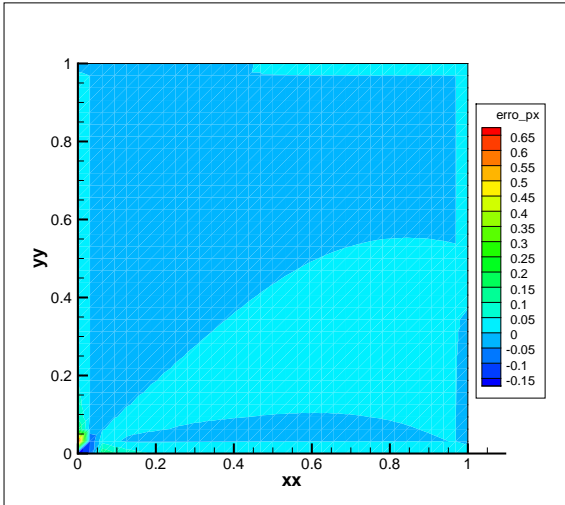


Figura 11: Erro absoluto de  $p_x$  no exemplo 2.2.

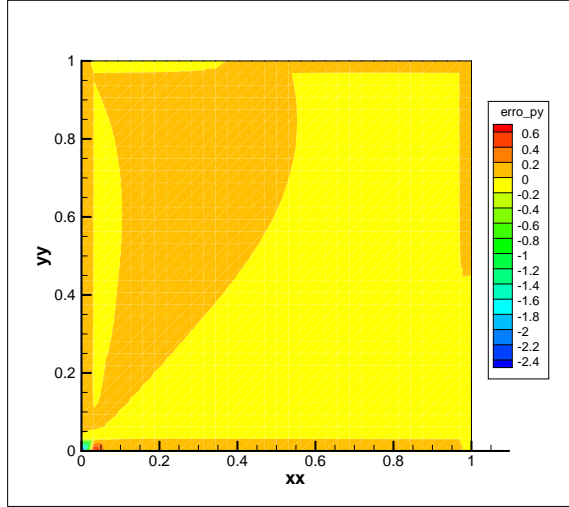


Figura 12: Erro absoluto de  $\mathbf{p}_y$  no exemplo 2.2.

Consideramos agora o problema:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla u) + u = f, & \text{em } \Omega \\ u = u_D, & \text{em } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g, & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.81)$$

com  $D$  uma função satisfazendo as seguintes condições:

- $D(x, y) \geq k > 0, \forall (x, y) \in \Omega$ ,  $k$  constante,
- $D(x, y) \in W_1^\infty(\Omega)$ ,

**Observação 2.8** *Note que a equação acima não está no formato do problema para o qual estudamos as estimativas de erro, porém essas estimativas ainda continuam valendo.*

Definindo  $\mathbf{p} = D\nabla u$  podemos dividir a primeira equação de (2.81) em duas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{p} - u = -f, & \text{em } \Omega \\ \mathbf{p} - D\nabla u = 0, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.82)$$

em que  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^2$  com  $\operatorname{div} \mathbf{p} \in L^2(\Omega)$ .

Assim, temos a formulação fraca do problema (2.82): dados  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_N)$ ,  $u_D \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $D$  satisfazendo as condições citadas anteriormente, encontrar  $p \in H_{g,N}(\text{div}, \Omega)$  e  $u \in L^2(\Omega)$  tais que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, dx + \int_{\Omega} u \nabla D \cdot \mathbf{q} \, dx + \int_{\Omega} u D \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = \\ = \int_{\Gamma_D} u_D D \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall \mathbf{q} \in H_{0,N}(\text{div}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p} \, dx - \int_{\Omega} uv \, dx = - \int_{\Omega} v f \, dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (2.84)$$

O problema discreto é: encontrar  $(u_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{P}_0^{\text{disc}} \times M_{h,g}$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \mathbf{q}_h \, dx + \int_{\Omega} u_h \nabla D \cdot \mathbf{q}_h \, dx + \int_{\Omega} u_h D \operatorname{div} \mathbf{q}_h \, dx = \\ = \int_{\Gamma_D} u_D D \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,0}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_h \, dx - \int_{\Omega} u_h v_h \, dx = - \int_{\Omega} v_h f \, dx, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_0^{\text{disc}}. \quad (2.86)$$

Note que, sendo  $u_h = \sum_{l=1}^L x_{N+l} \chi_{N+l}$ , com  $\{\chi_{N+j}\}$ ,  $j = 1, \dots, L$

base de  $\mathcal{P}_0^{\text{disc}}$ , temos que

$$\int_{\Omega} u_h \chi_{N+m} \, dx = x_{N+m} \int_{T_m} dx = x_{N+m} |T_m|, \quad \forall m \in \{1, \dots, L\} \quad (2.87)$$

Então, da formulação fraca discreta, escrevemos o seguinte sistema linear, cuja as incógnitas são  $\mathbf{x}_p = (x_1, \dots, x_M)$  e  $\mathbf{x}_u = (x_{N+1}, \dots, x_{N+L})$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M x_k \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_k \, dx + \sum_{l=1}^L x_{N+l} \int_{T_l} D \operatorname{div} \psi_j \, dx + \\ + \sum_{l=1}^L x_{N+l} \int_{T_l} \nabla D \cdot \psi_j \, dx = \int_{\Gamma_D} u_D D \psi_j \cdot \nu \, ds \\ - \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_m \, dx, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\sum_{k=1}^M x_k \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_k dx - x_{N+l} |T_l| = - \int_{T_l} f dx - \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_m dx \quad (2.89)$$

para  $j = 1, \dots, M$ ,  $l = 1, \dots, L$  e  $(x_{M+1}, \dots, x_N) := (g_h|_{E_m}, m = M+1, \dots, N)$ .

Dessa forma, temos um sistema linear da forma:

$$\begin{bmatrix} B & C + F \\ C^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

em que a matriz  $B$  decorre do primeiro termo lado esquerdo de (2.88),  $C$  (e  $C^T$ ) decorre do segundo termo do lado esquerdo de (2.88),  $F$  corresponde ao terceiro termo do lado esquerdo de (2.88) e  $D_{ij} = -|T_i|$  se  $i = j$  e  $D_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Além disso,  $\mathbf{f}_p$  e  $\mathbf{f}_u$  são, respectivamente, o lado direito de (2.88) e de (2.89).

Para os dois últimos exemplos, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla u) + u = f, & \text{em } \Omega = [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.91)$$

com solução exata  $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ .

Nessa condições temos  $u$  e  $\mathbf{p}$  pertencentes a  $H^1(\Omega)$  e portanto a taxa de convergência esperada deve ser da ordem de  $h$ .

**Exemplo 2.3** Tomando  $D(x, y) = 5$  temos  $f(x, y) = 11\sin(x)\sin(y)$ .

Neste caso, confirmamos a taxa de convergência esperada pelos resultados apresentados na tabela abaixo.

nref	$e_u$	$\alpha_u$	$e_p$	$\alpha_p$
0	1.0582	0	4.5184	0
1	0.76613	0.46596	4.9124	-0.12059
2	0.40414	0.92272	2.5084	0.96964
3	0.20473	0.98113	1.258	0.99559
4	0.1027	0.99533	0.62944	0.99905
5	0.05139	0.99883	0.31477	0.99977
6	0.0257	0.99971	0.15739	0.99994

Tabela 3: Erros na norma  $L^2$  e taxa de convergência no exemplo 2.3.

*Abaixo os gráficos da solução exata, da solução aproximada e do erro absoluto.*

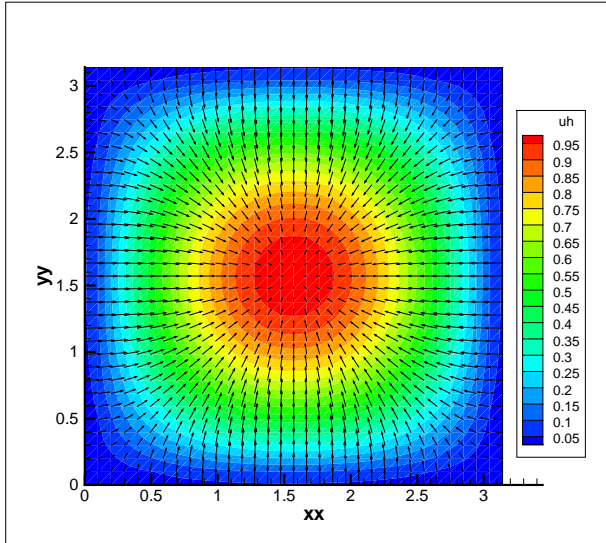


Figura 13: Solução aproximada do exemplo 2.3.



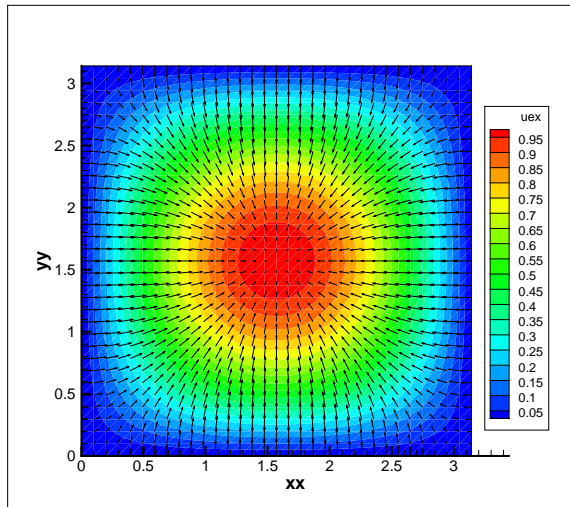


Figura 14: Solução exata do exemplo 2.3.

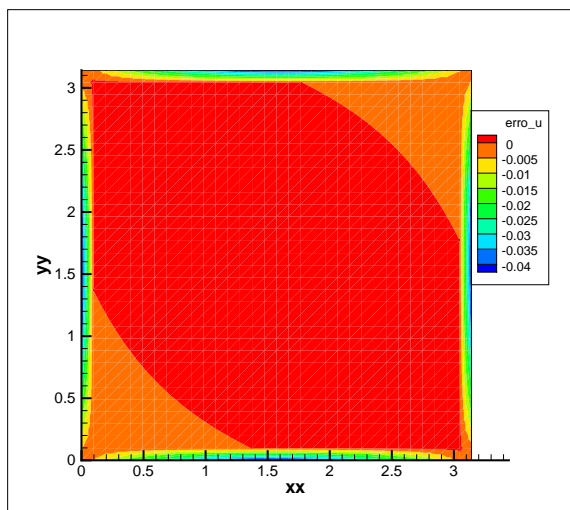


Figura 15: Erro absoluto de  $u$  no exemplo 2.3.

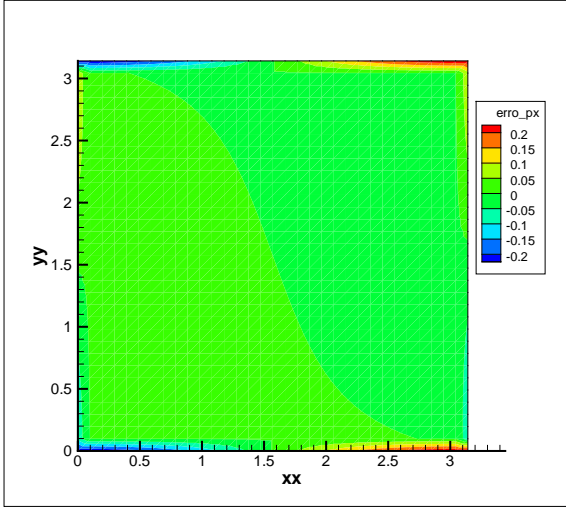


Figura 16: Erro absoluto de  $p_x$  no exemplo 2.3.

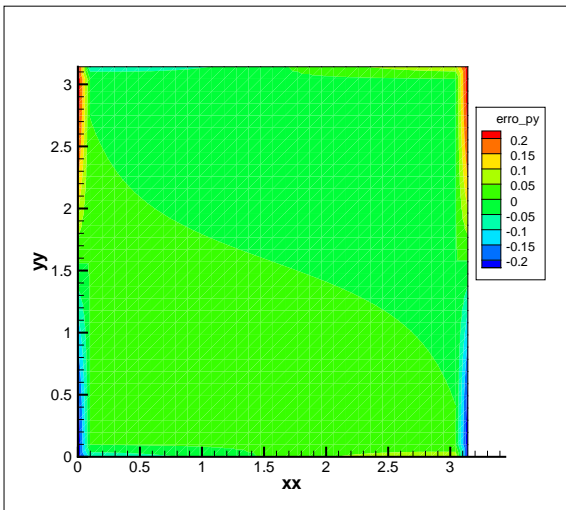


Figura 17: Erro absoluto de  $p_y$  no exemplo 2.3.

**Exemplo 2.4** Tomando  $D(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  temos

$$f(x, y) = 3\sin(x)\sin(y) + 2x^2\sin(x)\sin(y) + 2y^2\sin(x)\sin(y) - 2x\cos(x)\sin(y) - 2y\cos(y)\sin(x).$$

Neste caso, obtivemos os seguintes resultados:

nref	$e_u$	$\alpha_u$	$e_p$	$\alpha_p$
0	1.0725	0	9.6244	0
1	0.78519	0.44989	8.259	0.22073
2	0.40625	0.95065	4.9893	0.72712
3	0.20499	0.98681	2.5994	0.94069
4	0.10273	0.99671	1.3129	0.98539
5	0.051394	0.99918	0.65812	0.99635
6	0.025701	0.99979	0.32927	0.99909

Tabela 4: Erros na norma  $L^2$  e taxa de convergência no exemplo 2.4.

Abaixo os gráficos da solução exata, da solução aproximada e do erro absoluto.

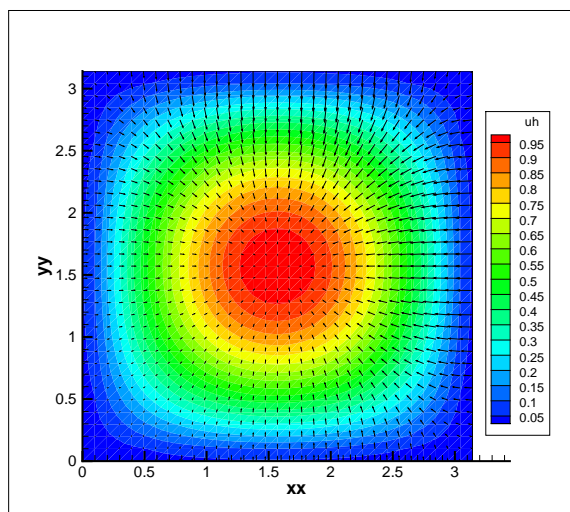


Figura 18: Solução aproximada do exemplo 2.4.

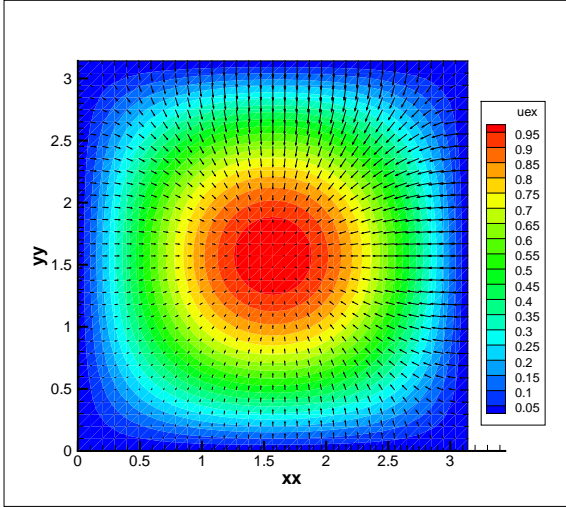


Figura 19: Solução exata do exemplo 2.4.

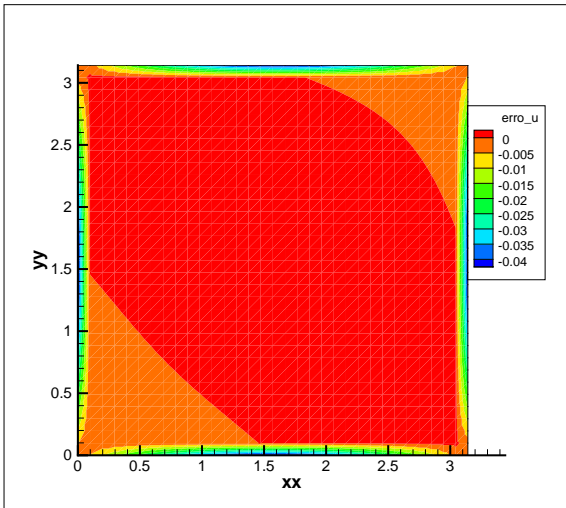


Figura 20: Erro absoluto de  $u$  no exemplo 2.4.

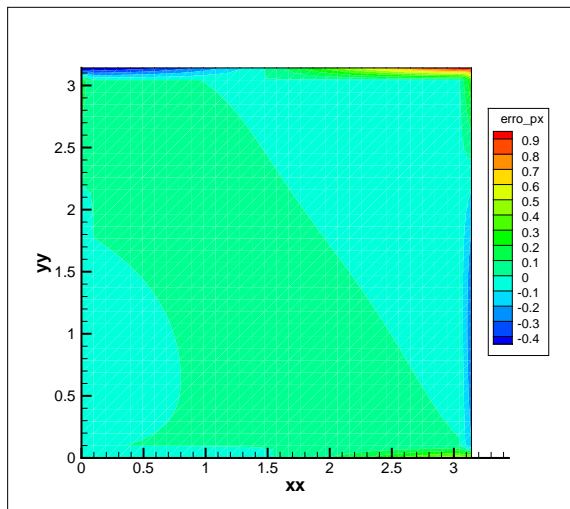


Figura 21: Erro absoluto de  $p_x$  no exemplo 2.4.

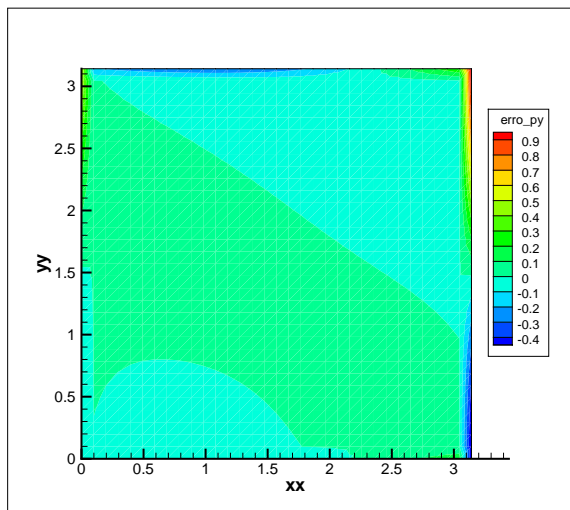


Figura 22: Erro absoluto de  $p_y$  no exemplo 2.4.



### 3 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE SEGUNDA ORDEM

Dedicamos este capítulo a fazer um estudo e uma análise de um método de estimativa *a posteriori* e de um refinamento adaptativo para problemas elípticos de segunda ordem. Além disto, vamos comparar os resultados obtidos a partir deste estimador com o que se encontrou com refinamentos uniformes.

O estudo de estimativa de erro *a posteriori* para os métodos de elementos finitos iniciou-se por volta da década de 70. Uma estimativa *a posteriori* caracteriza-se por expressar o erro em termos da aproximação. Geralmente, essa estimativa é dada localmente, ou seja, tem-se uma estimativa para o erro da aproximação em cada um dos elementos da malha. Maiores detalhes sobre esse tipo de estimativa podem ser encontrados em [2] e [25].

O processo de refinamento adaptativo baseado em estimativas *a posteriori* tem por objetivo identificar e tratar regiões do domínio do problema onde o erro da aproximação encontrada não é suficientemente boa, sem a necessidade de refinar a malha em locais onde ela já é satisfatória. Dessa forma, é possível obter o mesmo erro de aproximação de um refinamento uniforme com menor custo computacional.

O estimador utilizado neste trabalho foi o descrito em [5]. Maiores detalhes sobre a implementação do refinamento adaptativo está descrito no apêndice A.

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja  $\Omega$  um domínio com fronteira de Lipschitz no plano, com vetor unitário normal exterior  $\nu$  na fronteira poligonal  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  ( $\Gamma_N$  é a fronteira de Neumann e  $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$  é a fronteira de Dirichlet fechada). Dados  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_N)$  e  $u_D \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , queremos encontrar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_D, & \text{em } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g, & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.1)$$

Definindo  $\mathbf{p} = \nabla u$  podemos dividir a primeira equação de (3.1)

em duas, ou seja,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{p} + f = 0, & \text{em } \Omega \\ \mathbf{p} = \nabla u, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ .

Como visto, o problema discreto é: encontrar  $(u_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{P}_0^{\text{disc}} \times M_{h,g}$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \mathbf{q}_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \mathbf{q}_h dx = \int_{\Gamma_D} u_D \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} ds, \forall \mathbf{q}_h \in M_{h,0}, \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_h dx = - \int_{\Omega} v_h f dx, \quad \forall v_h \in L_h. \quad (3.4)$$

A formulação fraca discreta, utilizando um sistema linear com incógnitas  $(x_1, \dots, x_M)$  e  $(x_{N+1}, \dots, x_{N+L})$ , como feito na seção 2.5, é:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M x_k \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_k dx &+ \sum_{l=1}^L x_{N+l} \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_j dx = \int_{\Gamma_D} u_D \psi_j \cdot \mathbf{n} ds \\ &- \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_m dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M x_k \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_k dx &= - \int_{T_l} f dx \\ &- \sum_{m=M+1}^N g_h|_{E_m} \int_{T_l} \operatorname{div} \psi_m dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

para  $j = 1, \dots, M$  e  $l = 1, \dots, L$ , em que  $(x_{M+1}, \dots, x_N) = (g_h|_{E_m}, m = M+1, \dots, N)$ .

### 3.2 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  domínio com fronteira de Lipschitz  $\Gamma = \partial\Omega$  afim por partes e  $\mathcal{T}$  uma triangularização de  $\Omega$ , ou seja,  $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \bar{\Omega}$ .

Denotaremos por  $\mathcal{N}$  o conjunto de todos os vértices da triangularização e  $\mathcal{E}$  o conjunto de todas as arestas de  $\mathcal{T}$ . Separamos  $\mathcal{E}$  em dois conjuntos disjuntos:  $\mathcal{E}_{\Gamma} = \{E \in \mathcal{E} : E \subset \Gamma\}$  e  $\mathcal{E}_{\Omega} = \{E \in \mathcal{E} : E \not\subset \Gamma\}$ . Ainda faremos duas distinções no conjunto  $\mathcal{E}_{\Gamma}$ :  $\mathcal{E}_{\Gamma_D}$  e  $\mathcal{E}_{\Gamma_N}$  para as fronteiras com condição de Dirichlet e com condição de Neumann, respectivamente.



Por fim, para cada  $z \in \mathcal{N}$ , denotaremos por  $\mathcal{E}_z = \{E \in \mathcal{E} : z \in E \cap \mathcal{N}\}$  e o *patch*  $\omega_z = \text{int} \left( \bigcup \mathcal{T}_z \right)$ ,  $\mathcal{T}_z = \{T \in \mathcal{T} : z \in T \cap \mathcal{N}\}$ . Para cada aresta  $E$  denotamos por  $\nu_E$  o vetor normal unitário exterior.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_D, & \text{em } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g, & \text{em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.7)$$

Seja  $\mathcal{S}_D^1(\mathcal{T})$  o conjunto das funções afins contínuas por partes que satisfazem a condição de Dirichlet. Suponha que  $\mathbf{p}_h \in [L^2(\Omega)]^2$  satisfaz:

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in \mathcal{S}_D^1(\mathcal{T}) \quad (3.8)$$

Nosso objetivo nessa seção é estimar o erro  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}$ . Faremos isso através do erro de uma aproximação suave  $\mathbf{q}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})^d$  para  $\mathbf{p}_h$  que construiremos utilizando o método de suavização de primeira ordem de fluxos introduzido em [10] e [11]. Seja  $\mathbf{p}_h$  solução de (3.5)-(3.6). Definimos então o indicador de erro

$$\eta_M = \min_{\mathbf{q}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})^d} \|\mathbf{p}_h - \mathbf{q}_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.9)$$

Aplicando a desigualdade triangular temos

$$\eta_M \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} + \min_{\mathbf{q}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})^d} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

O segundo termo do lado direito da desigualdade anterior é de alta ordem (*h.o.t.*). De fato, para um  $\mathbf{p}$  suficientemente suave, esse termo converge em  $O(h^2)$  enquanto  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}$  é da ordem de  $O(h)$  (ver [10]). Ou seja,

$$\eta_M \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} + h.o.t.$$

Essa propriedade é conhecida como eficiência do estimador.

Além disso, é possível mostrar que o estimador  $\eta_M$  também satisfaz a propriedade de confiança (ver [10]), ou seja,  $\eta_M$  satisfaz

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{conf} \eta_M + h.o.t.$$

Ao invés de utilizar o estimador  $\eta_M$ , utilizaremos  $\eta_A$  definido

como

$$\eta_M \leq \eta_A = \|\mathbf{p}_h - A\mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)}$$

de forma que  $A : L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})^d$  satisfaz  $A\mathbf{p}_h = \mathbf{q}_h$  em (3.9) e que trata de forma adequada as condições de fronteira (esse tratamento ficará mais claro a seguir).

Para cada vértice  $z \in \mathcal{N}$ , seja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z &= \{a \in \mathbb{R}^d : \forall E \in \mathcal{E}_z \cap \mathcal{E}_N, g(z) = a \cdot \nu_E \text{ e} \\ &\quad \forall E \in \mathcal{E}_z \cap \mathcal{E}_D, \nabla_E u_D(z) = (a)_E\} \end{aligned}$$

um subespaço afim de  $\mathbb{R}^d$ . A condição  $\nabla_E u_D(z) = (a)_E$  quer dizer que a derivada direcional de  $u_D$  na direção de  $E$ ,  $\nabla_E u_D(z)$ , é igual a projeção de  $a$  sobre  $E$ .

**Observação 3.1** *Note que as condições de Dirichlet e Neumann sobre o gradiente  $\mathbf{p} = \nabla u$  são garantidas se, para cada vértice da fronteira  $z \in \mathcal{N}$ , tivermos  $p(z) \in \mathcal{A}_z$ .*

Definimos também os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} P_k(\mathcal{T}) &= \{v_h \in L^\infty : \forall T \in \mathcal{T}, v_h|_T \in P_k(T)\}, \\ \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) &= P_1(\mathcal{T}) \cap \mathcal{C}(\Omega) = \text{span}\{\varphi_z : z \in \mathcal{N}\}, \\ P_h &= P(\mathcal{T}) = \{p_h \in L^\infty(\Omega)^d : \forall T \in \mathcal{T}, p_h|_T \in P_k(T)\} \subseteq P_1(\mathcal{T})^d, \\ \mathcal{Q}_h &= \{q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})^d : \forall z \in \mathcal{N} \cup \Gamma, q_h(z) \in \mathcal{A}_z\}. \end{aligned}$$

As funções  $\varphi_z$ ,  $z \in \mathcal{N}$  denotam uma base nodal para  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ , ou seja,  $\varphi_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$  satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_z(x) = 1, & \text{se } x = z \\ \varphi_z(x) = 0, & \text{se } x \in \mathcal{N} \setminus \{z\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dessa forma, podemos descrever  $\omega_z$ , definido anteriormente, como

$$\omega_z = \{x \in \Omega : \varphi_z(x) > 0\}.$$

Assim, definimos o operador  $A : P_h \rightarrow \mathcal{Q}_h$  como

$$A\mathbf{p}_h = \sum_{z \in \mathcal{N}} A_z(\mathbf{p}_h|_{\omega_z})\varphi_z \quad (3.11)$$

com  $A_z$  definido por  $A_z : \pi_z \circ M_z : P_1(\mathcal{T})^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . O operador  $M_z : P_1(\mathcal{T})^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é responsável pelo processo de suavização e é definido

pela integral média de  $\mathbf{p}_h$

$$p_z = M_z(p_h) = \int_{\omega_z} p_h dx = \frac{1}{|\omega_z|} \int_{\omega_z} p_h dx$$

em que  $|\omega_z|$  denota a área de  $\omega_z$ . Já o operador  $\pi_z : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  denota a projeção ortogonal sobre  $\mathcal{A}_z$ .

Indicamos [5] e o exemplo 4.1 de [11] para maiores detalhes sobre como tratar da implementação do estimador.

Sobre essas condições, o teorema a seguir garante a confiança dos estimadores  $\eta_M$  e  $\eta_A$  sobre o um termo de alta ordem que depende da suavidade de  $f$ ,  $u_D$  e  $g$ .

**Teorema 3.1** *Suponha que  $\Gamma_N$  seja conexo e que  $\Gamma_D$  pertence a apenas uma componente conexa de  $\partial\Omega$  e seja  $f|_T \in H^1(T)$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}$ . Então existem constantes  $C_{efic}$  e  $C_{conf}$  tais que*

$$C_{efic}\eta_A - h.o.t \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{conf}\eta_A + h.o.t. \quad (3.12)$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [11].

### 3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = u|_D, & \text{em } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g, & \text{em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.13)$$

em que  $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ .

Denotamos por

$$\begin{aligned} e_u(nref) &= \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ e_p(nref) &= \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

os erros do potencial  $u$  e do fluxo  $\mathbf{p}$  na norma  $L^2$ , respectivamente, para cada nível de refinamento  $nref$  e,

$$\alpha_u = \frac{\ln\left(\frac{e_u(nref)}{e_u(nref-1)}\right)}{\ln\left(\frac{N(nref-1)}{N(nref)}\right)}, \quad \alpha_p = \frac{\ln\left(\frac{e_p(nref)}{e_p(nref-1)}\right)}{\ln\left(\frac{N(nref-1)}{N(nref)}\right)},$$

em que  $N(nref)$  é o número de incógnitas do problema nesse nível.

Além disso, denotamos por  $\eta$  o valor calculado pelo estimador em (3.11).

**Observação 3.2** *Para fazer o cálculo do erro na norma  $L^2(\Omega)$  utilizamos quadratura gaussiana com 7 pontos.*

**Exemplo 3.1** *Sejam  $u_D = 0$  em  $\Gamma_D = \{0\} \times [-1, 0] \cup [0, 1] \times \{0\}$  e*

$$g(r, \varphi) = 2/3r^{-1/3}(-\sin(\varphi/3), \cos(\varphi/3)) \cdot n$$

*dada em coordenadas polares  $(r, \varphi)$  em  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ . Além disso, seja  $f(x, y) = 0$ . A solução exata para este problema é dada por*

$$u(r, \varphi) = r^{2/3} \sin(2\varphi/3).$$

*Primeiramente, resolvemos este problema em uma sequência de malhas refinadas uniformemente com o método da bisseção, usando a malha inicial como na figura 31. A tabela a seguir apresenta os erros do potencial e do fluxo além do indicador de erro de fluxo  $\eta$ . Como pode ser observado, o indicador superestima o valor do erro do fluxo, porém o índice de eficiência  $i_{eff} = \frac{\eta}{e_p}$  aparenta convergir para 1.5 quando o diâmetro da malha diminui. Como o objetivo do indicador é estimar o erro, esperava-se que o índice de eficiência convergisse para 1. Além disso, a taxa de convergência do erro e do indicador de erro também são muito próximas, o que indica a eficiência do indicador considerado.*

ref	$e_u$	$\alpha_u$	$e_p$	$\alpha_p$	$\eta$	$i_{efic}$	$\alpha_\eta$	$N$
0	0.4036	0	0.4437	0	0.6379	1.4377	0	1478
1	0.1835	0.5399	0.2848	0.3037	0.4705	1.6524	0.2084	1478
2	0.0873	0.5224	0.1846	0.3051	0.2947	1.5972	0.3291	1503
3	0.0423	0.5159	0.1188	0.3137	0.1862	1.5669	0.3274	1662
4	0.0207	0.5116	0.0759	0.3209	0.1177	1.5500	0.3287	3966
5	0.0102	0.5082	0.0483	0.3256	0.0744	1.5402	0.3302	15342

Tabela 5: Erros  $L^2$ , taxas de convergência, erro a posteriori e índice de eficiência para o exemplo 1.

*Abaixo apresentamos os gráficos da solução aproximada e do estimador de erro. Para melhor visualização utilizou-se  $nref = 3$ .*

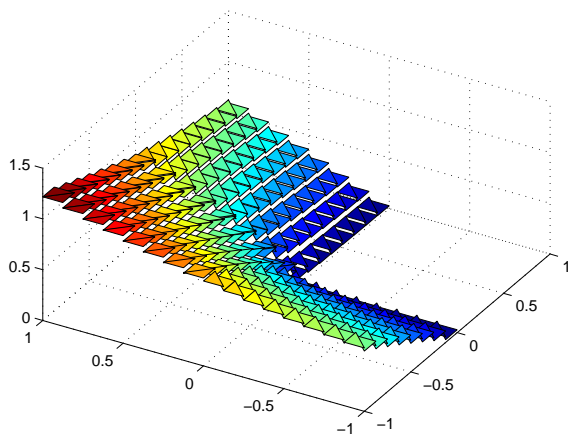


Figura 23: Solução aproximada do exemplo 3.1.

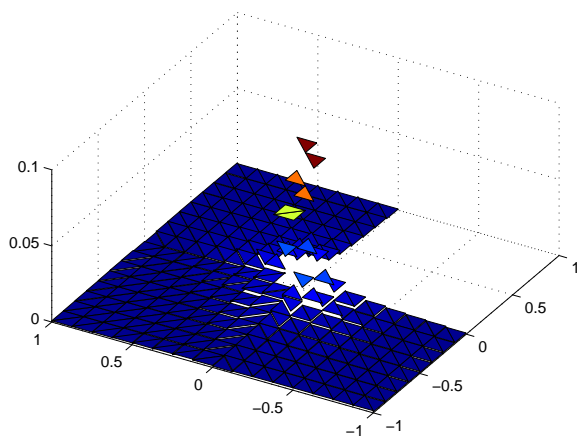


Figura 24: Estimador do exemplo 3.1.

*As figuras abaixo mostram o estimador e o erro na norma  $L^2$  nos refinamentos adaptativos 1, 4, 8, 12, 16 e 19.*

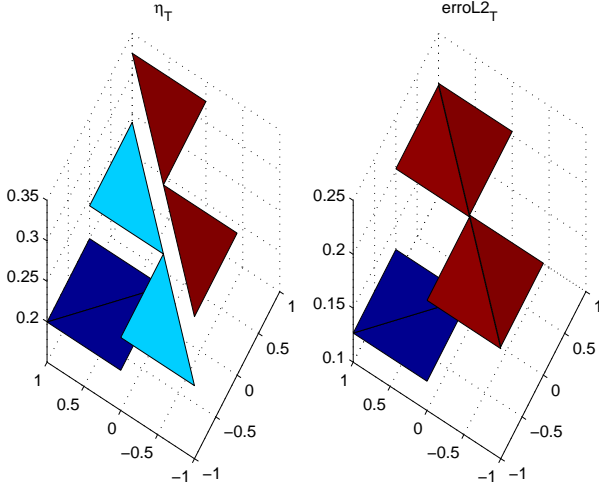


Figura 25: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 1.

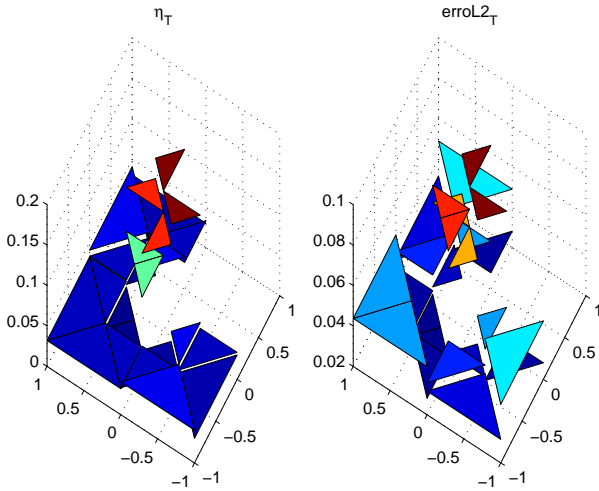


Figura 26: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 4.

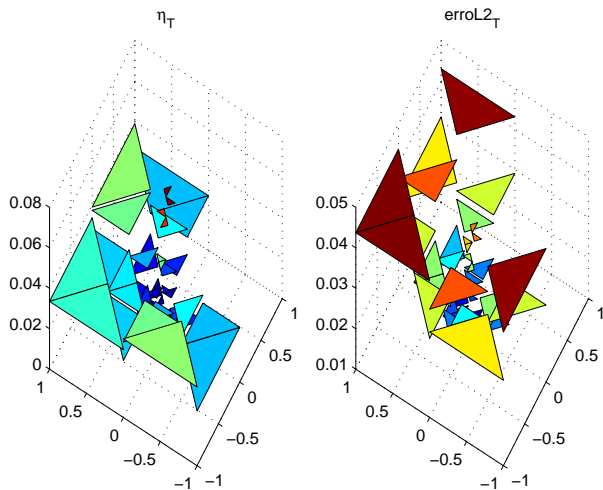


Figura 27: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 8.

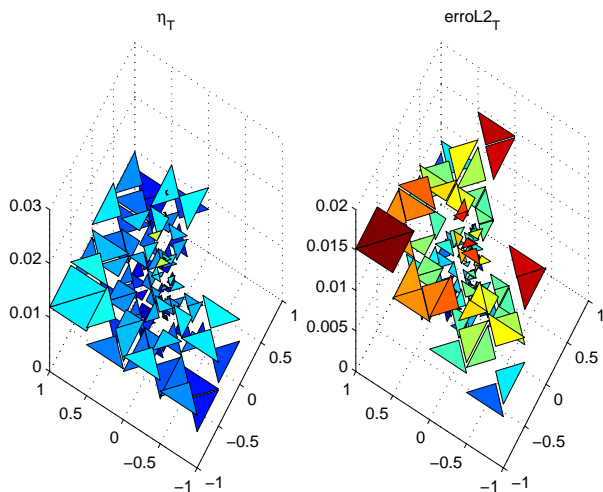


Figura 28: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 12.

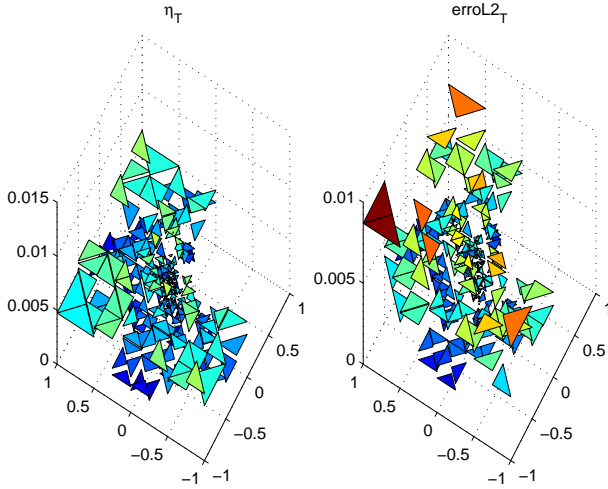


Figura 29: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 16.

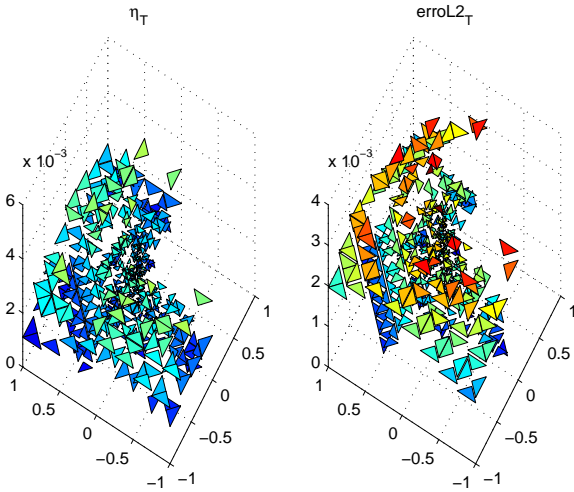


Figura 30: Estimador e erro na norma  $L^2$  no refinamento 19.



*A seguir apresentamos as malhas respectivas as figuras 25 a 30.*

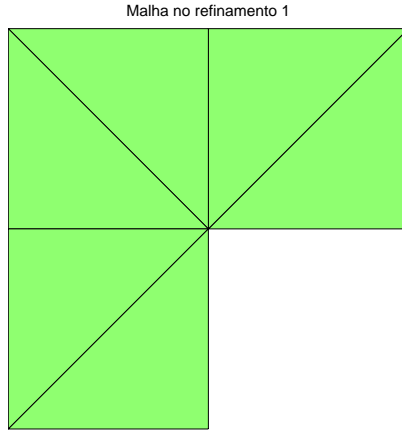


Figura 31: Malha no refinamento 1.

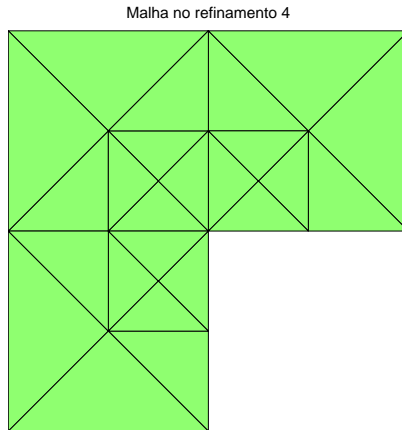


Figura 32: Malha no refinamento 4.

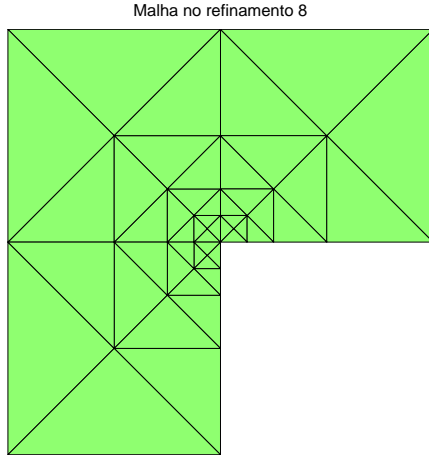


Figura 33: Malha no refinamento 8.

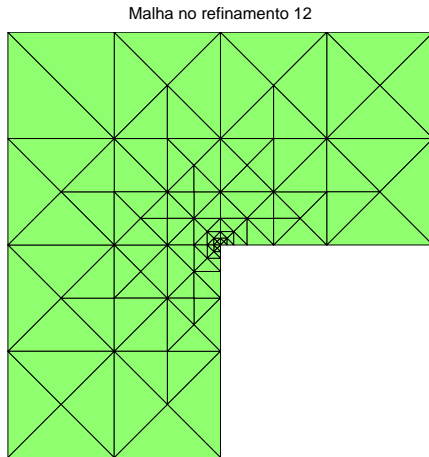


Figura 34: Malha no refinamento 12.

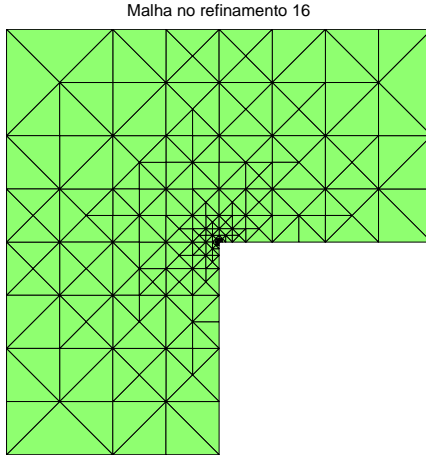


Figura 35: Malha no refinamento 16.

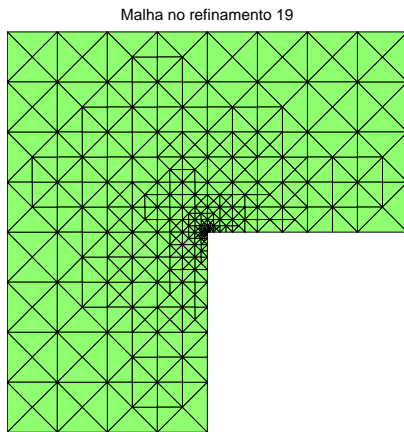


Figura 36: Malha no refinamento 19.

Comparando as figuras 24 e 36 podemos perceber que o método é eficiente na identificação dos locais com maior erro.

O gráfico abaixo mostra uma comparação entre o erro e o estimador ao utilizarmos refinamento uniforme e refinamento adaptativo.

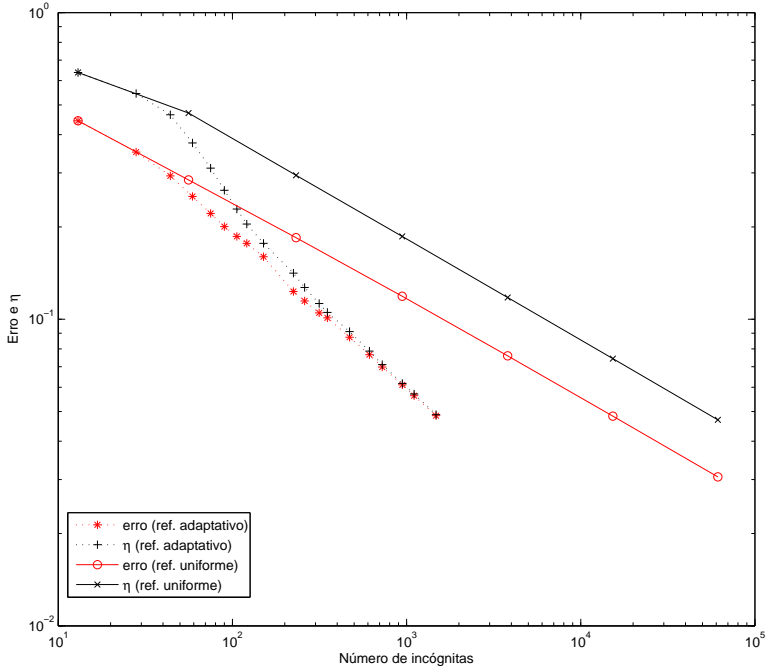


Figura 37: Erro e estimador usando refinamento uniforme e adaptativo para o exemplo 3.1.

Como mostra a figura acima, o indicador de erro praticamente coincide com o erro de fluxo, confirmando assim a eficiência observada na tabela 5. Além disso, o erro decresce mais rápido para malhas adaptativas do que para malhas uniformes, o que reduz significativamente o esforço computacional necessário para resolver o problema com uma tolerância de erro predefinida.

O critério de refinamento utilizado foi: marcar os elementos  $T \in$

$\mathcal{T}$  tais que

$$\frac{1}{2} \max_{T' \in \mathcal{T}} \eta_A(T') \leq \eta_A(T).$$

O método de refinamento utilizado foi a biseccção, descrito em [12].



## 4 MEFM PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DEGENERADOS

Nesse capítulo estudamos o método de elementos finitos mistos para equações parabólicas degeneradas. Daremos uma atenção especial para a equação

$$\partial_t u^{1/m} + \Delta u = f,$$

para alguma constante  $m$ , conhecida como equação de meios porosos. Esse problema pode ser subdividido em duas categorias: a equação de difusão rápida, quando  $m > 1$ , e a equação de difusão lenta, quando  $m < 1$ .

Esse interesse decorre das diversas aplicações que essa equação possui, dentre elas, em problemas de fluidos como a descrição de escoamento de gás por um meio poroso, a recuperação secundária de petróleo em engenharia de reservatório e infiltração de líquidos em rochas, em problemas de transferência de calor como radiação de calor em plasmas. Em [24] podem ser encontrada a teoria matemática de equações de meios porosos e diversas aplicações.

### 4.1 FORMULAÇÃO MISTA

Considere a equação de Richards na forma mista

$$\begin{cases} \partial_t b(u) + \nabla \cdot \mathbf{p} = f, & \text{em } J \times \Omega \\ \mathbf{p} + (\nabla u + k(b(u))\mathbf{l}) = 0, & \text{em } J \times \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

com  $J = (0, T]$  o intervalo no tempo,  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ) é o domínio com fronteira suave  $\Gamma$ .

Neste capítulo iremos estudar a equação (4.1) com a condição inicial  $u = u_0$  em  $t = 0$ . Além disso, vamos considerar  $\Gamma$  fronteira de Dirihlet homogênea na fronteira  $\partial\Omega$ . Por fim, vamos assumir que  $k(\cdot) \equiv 0$ . Logo, o problema que vamos considerar é:

$$\begin{cases} \partial_t b(u) + \nabla \cdot \mathbf{p} = f, & \text{em } J \times \Omega \\ \mathbf{p} + \nabla u = 0, & \text{em } J \times \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ u = u_0, & \text{em } t = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Assumiremos as seguintes condições sobre a função  $b$ :

- (C1)  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  é aberto, limitado e tem fronteira Lipschitz contínua.
- (C2)  $b(\cdot) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ , não decrescente e Holder contínua, ou seja, existem  $\alpha \in (0, 1]$  e  $C_b > 0$  tal que

$$|b(u_1) - b(u_2)| \leq C_b |u_1 - u_2|^\alpha \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

- (C3) A condição inicial satisfaz  $u_0 \in L^2(\Omega)$ .

**Observação 4.1** *Note que, caso  $b'$  anule-se para determinados valores, o problema deixa de ser parabólico e passa a ser elíptico. Para evitar isso, definimos  $b_\varepsilon(u) = b(u) + \varepsilon u$ , para alguma perturbação pequena  $\varepsilon > 0$ , e utilizaremos  $b_\varepsilon$  ao invés de  $b$ .*

**Definição 4.1** *Para  $1 \leq p < \infty$ , definimos o espaço de Hilbert  $L^p(0, T; X)$  como o conjunto das funções  $u : (0, T) \rightarrow X$  fortemente mensuráveis e tais que*

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno em  $L^2(\Omega)$ , uma formulação fraca conforme para o problema (4.2) é: encontrar  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  tal que  $b(u) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$  e

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u(t)), \phi(t) \rangle + \langle \nabla u(t), \nabla \phi(t) \rangle dt = 0, \quad \forall \phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Resultados sobre existência, unicidade e limitação essencial para a solução fraca desse problema podem ser encontrados em [18]. Em particular, em [18] são provadas as seguinte condições de regularidade:

$$\begin{aligned} b(u) &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \\ \mathbf{p} &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Podemos definir o problema variacional misto, com integração no tempo, para (4.2): encontrar  $(u, \mathbf{p}) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$  tal que  $\int_0^t \mathbf{p}(s) ds \in L^2(\Omega)$  e

$$\langle b(u(t)) - b(u_0), w \rangle + \langle \nabla \cdot \int_0^t \mathbf{p}(s) ds, w \rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$\langle \int_0^t \mathbf{p}(s) ds, \mathbf{v} \rangle - \langle \int_0^t u(s) ds, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (4.4)$$



para todo  $t \in (0, T]$ ,  $w \in L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ , com  $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ .

A proposição a seguir garante a equivalência entre a formulação fraca conforme e a formulação mista apresentada acima.

**Proposição 4.1** *A função  $u$  é solução do problema conforme se, e somente se,  $(u, \mathbf{p})$  é solução do problema variacional misto. Além disso, nesse caso temos  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .*

**Demonstração:** A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [20].

## 4.2 PROBLEMA DISCRETO

Seja  $\tau = T/N$  o passo no tempo dado, para algum  $N \geq 1$ . Então temos  $t_n = n\tau$  ( $n = 1, \dots, N$ ) e seja  $\mathcal{T}_h$  uma triangularização do domínio  $\Omega$ . Denotamos por  $h$  o diâmetro da malha.

Inicialmente, discretizamos a primeira equação de (4.2) no tempo fazendo:

$$\partial_t b(u) \approx \frac{b(u^n) - b(u^{n-1})}{\tau}.$$

Substituindo essa expressão na equação, multiplicamos as duas equações pelas funções de teste  $w \in L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$  e integramos sobre o domínio. Por fim, integramos por partes a segunda equação.

Assim, obtemos o problema discreto no tempo: dado  $u^{n-1}$ , encontrar  $(u^n, \mathbf{p}^n) \in L^2(\Omega) \times H(\text{div}, \Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \langle b(u^n) - b(u^{n-1}), w \rangle + \tau \langle \nabla \cdot \mathbf{p}^n, w \rangle = \langle f^n, w \rangle \\ \langle \mathbf{p}^n, \mathbf{v} \rangle + \tau \langle u^n, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = 0 \end{cases}$$

para todo  $w \in L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ . Ou ainda,

$$\begin{cases} \langle b(u^n), w \rangle + \tau \langle \nabla \cdot \mathbf{p}^n, w \rangle = \langle b(u^{n-1}), w \rangle + \langle f^n, w \rangle \\ \langle \mathbf{p}^n, \mathbf{v} \rangle + \tau \langle u^n, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

em que  $f^n(\mathbf{x}) = f(t_n, \mathbf{x})$ .

**Observação 4.2** *Para iniciar a sequência utilizamos  $u^0 = u_0$  dado.*

Agora, sendo  $\mathcal{P}_0^{disc} \subseteq L^2(\Omega)$  e  $RT_0(\Omega) \subseteq H(\text{div}, \Omega)$  (definidos no capítulo anterior) espaços de dimensão finita, temos a formulação mista discreta para o problema (4.2): dado  $u_h^{n-1}$ , encontrar  $(u_h^n, \mathbf{p}_h^n) \in$

$\mathcal{P}_0^{disc} \times RT_0(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \langle b(u_h^n), w_h \rangle + \tau \langle \nabla \cdot \mathbf{p}_h^n, w_h \rangle = \langle b(u_h^{n-1}), w \rangle + \langle f^n, w \rangle \\ \langle \mathbf{p}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle + \langle \nabla u_h^n, \mathbf{v}_h \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

para todo  $w_h \in \mathcal{P}_0^{disc}$  e  $\mathbf{v}_h \in RT_0(\Omega)$ .

**Observação 4.3** Para o passo inicial, tomamos  $u_h^0 \in \mathcal{P}_0^{disc}$  de forma a satisfazer a condição  $b(u_h^0) = P_h b(u_0)$  em todo  $T \in \mathcal{T}_h$ .

### 4.3 ESTIMATIVA DE ERRO A PRIORI

Veremos agora uma estimativa de erro *a priori* para o problema que estamos tratando. As demonstrações foram omitidas, porém indicamos [20] para maiores detalhes.

O lema a seguir é uma estimativa de erro para o problema misto discreto no tempo (4.5). Assumimos que o passo no tempo é suficientemente pequeno.

**Lema 4.1** Assumindo válidas (C1)–(C3), para qualquer  $K = 1, \dots, N$  temos a estimativa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle b(u(t)) - b(u^n), u(t) - u^n \rangle dt + \\ & + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau. \end{aligned}$$

**Corolário 4.1** Assumindo que  $\partial_t b(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e  $b'(\cdot) \geq C > 0$  a estimativa do lema 4.1 torna-se ótima:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle b(u(t)) - b(u^n), u(t) - u^n \rangle dt + \\ & + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau^2, \end{aligned}$$

para  $K = 1, \dots, N$ .

**Lema 4.2** *Assumindo (C1)–(C3), para qualquer  $K = 1, \dots, N$  temos*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) - u^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &+ C \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle b(u(t)) - b(u^n), u(t) - u^n \rangle dt \end{aligned}$$

Segue dos lemas 4.1 e 4.2 o seguinte teorema.

**Teorema 4.1** *Assumindo válidas as condições (C1) – (C3), sejam  $(u, \mathbf{p})$  e  $(u^n, \mathbf{p}^n)$  soluções dos problemas (4.2) e (4.5), respectivamente, com  $n = 1, \dots, N$ . Para qualquer  $K \in \{1, \dots, N\}$  temos*

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle b(u(t)) - b(u^n), u(t) - u^n \rangle dt + \\ &\quad + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) - u^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau. \end{aligned}$$

Passamos agora aos resultados preliminares necessários para a estimativa de erro para o problema discreto. Para isso, seja  $\mathcal{T}_h$  uma triangularização regular de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ , em que  $h$  é o diâmetro da malha.

Os dois lemas a seguir apresentam uma estimativa de erro entre a solução do problema discreto no tempo e o problema discreto.

**Lema 4.3** *Supondo válidas as condições (C1) – (C3) e sendo  $(u^n, \mathbf{p}^n)$  e  $(u_h^n, \mathbf{p}_h^n)$  soluções de (4.5) e (4.6), respectivamente, com  $n = 1, \dots, N$  então temos*

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^K \left\{ \langle b(u^n) - b(u_h^n), u^n - u_h^n \rangle + \|b(u^n) - b(u_h^n)\|_{L^{1+\frac{1}{\alpha}}(\Omega)}^{1+\frac{1}{\alpha}} \right\} + \\ &\quad + \tau \left\| \sum_{n=1}^K (\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^K \left\{ \|\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n\|^2 + \|P_h u^n - u^n\|_{L^{1+\alpha}(\Omega)}^{1+\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

**Lema 4.4** *Nas condições do lema 4.3, para qualquer  $K = 1, \dots, N$  temos*

$$\tau \left\| \sum_{n=1}^K (P_h u^n - u_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \sum_{n=1}^K \langle b(u^n) - b(u_h^n), u^n - u_h^n \rangle + \right. \\ \left. + \tau \left\| \sum_{n=1}^K (\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^K \|\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n\|^2 \right\}$$

Dos lemas 4.3 e 4.4 obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 4.2** *Assumindo válidas as condições (C1) – (C3), sejam  $(u^n, \mathbf{p}^n) \in L^2(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)$  e  $(u_h^n, \mathbf{p}_h^n) \in \mathcal{P}_0^{\operatorname{disc}} \times RT_0(\Omega)$  soluções dos problemas (4.5) e (4.6), respectivamente, em que  $n = 1, \dots, N$ . Para qualquer  $K = 1, \dots, N$  temos*

$$\sum_{n=1}^K \left\{ \langle b(u^n) - b(u_h^n), u^n - u_h^n \rangle + \|b(u^n) - b(u_h^n)\|_{L^{1+\frac{1}{\alpha}}(\Omega)}^{1+\frac{1}{\alpha}} \right\} + \\ + \tau \left\| \sum_{n=1}^K (P_h u^n - u_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left\| \sum_{n=1}^K (\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq C \sum_{n=1}^K \left\{ \|\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n\|^2 + \|P_h u^n - u^n\|_{L^{1+\alpha}(\Omega)}^{1+\alpha} \right\}.$$

Assumiremos ainda uma última condição:

$$(C4) \quad \mathbf{p}^n \in H^1(\Omega)^d \text{ para } n = 1, \dots, N \text{ e } \sum_{n=1}^N \tau \|\mathbf{p}^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\tau \frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}.$$

A partir dos teoremas 4.1 e 4.2 e das estimativas para as projeções, (2.64) e (2.1), obtemos a estimativa de erro para o problema misto discreto.

**Teorema 4.3** *Assumindo válidas as condições (C1) – (C4), para qual-*

quer  $K = 1, \dots, N$ , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|b(u(t)) - b(u_h^n)\|_{L^{1+\frac{1}{\alpha}}(\Omega)}^{1+\frac{1}{\alpha}} dt + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) - u_h^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_h^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \tau + h^2 \tau^{-\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por fim, no caso de difusão lenta, a estimativa pode ser melhorada.

**Corolário 4.2** *Assumindo que  $\partial_t b(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $b'(\cdot) \geq C > 0$  e supondo válidas as condições (C1) – (C4), para qualquer  $K = 1, \dots, N$ , temos*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|b(u(t)) - b(u_h^n)\|_{L^{1+\frac{1}{\alpha}}(\Omega)}^{1+\frac{1}{\alpha}} dt + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) - u_h^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \left\| \sum_{n=1}^K \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_h^n) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \tau^2 + h^2 \tau^{-\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nesse caso, supondo  $\tau = h \frac{1+\alpha}{2}$  temos que

$$\tau^2 + h^2 \tau^{-\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}} = h^{1+\alpha} + h^2 h^{\alpha-1} = 2h^{\alpha+1}.$$

Portanto, a ordem de convergência será de  $h^{\alpha+1}$ .

#### 4.4 MÉTODO DE NEWTON

As seguintes condições são assumidas de forma a permitir o desenvolvimento que faremos a seguir.

- $b(\cdot) \in C^1$  é Lipschitz contínua e não decrescente.
- $b(u_0)$  é essencialmente limitada e  $u_0 \in L^2(\Omega)$
- $|b'(x) - b'(y)| \leq |x - y|^\alpha$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , em que  $\alpha \in (0, 1]$ .

O termo  $b(u_h^n)$  na formulação (4.6) é não linear. Por esse motivo, vamos aplicar o método de Newton para linearizar o problema. Para

isso, utilizamos a aproximação

$$b'(u_h^{n,i-1}) \approx \frac{b(u_h^{n,i}) - b(u_h^{n,i-1})}{u_h^{n,i} - u_h^{n,i-1}}$$

Uma descrição mais detalhada do método de Newton pode ser encontrada em [6].

Assim, fixado  $n \in \{1, \dots, N\}$  e  $i > 0$ , e assumindo  $u_h^{n-1}, u_h^{n,i-1} \in \mathcal{P}_0^{disc}$  dados, escrevemos o problema usando o método de Newton como: encontrar  $(u_h^{n,i}, \mathbf{p}_h^{n,i}) \in \mathcal{P}_0^{disc} \times RT_0(\mathcal{T})$  tal que

$$\begin{cases} \langle b'(u_h^{n,i-1})u_h^{n,i}, w_h \rangle + \tau \langle \nabla \cdot \mathbf{p}_h^{n,i}, w_h \rangle = \langle f^n, w_h \rangle + \\ + \langle b(u_h^{n-1}), w_h \rangle - \langle b(u_h^{n,i-1}), w_h \rangle + \langle b'(u_h^{n,i-1})u_h^{n,i-1}, w_h \rangle \\ \langle \mathbf{p}_h^{n,i}, \mathbf{v}_h \rangle - \langle u_h^{n,i}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

para todo  $w_h \in \mathcal{P}_0^{disc}$  e  $\mathbf{v}_h \in RT_0(\mathcal{T})$ .

**Observação 4.4** Para cada passo no tempo utilizamos  $u_h^{n,0} = u_h^{n-1}$ .

Seja  $\{\chi_j\}_{1 \leq j \leq M}$  base para  $\mathcal{P}_0^{disc}$ , em que  $\chi_j$  é a função característica de  $T_j$  e  $\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq L}$  base de  $RT_0(\mathcal{T})$  definida no capítulo 2. Escrevemos então  $u_h^{n,i}$  e  $\mathbf{p}_h^{n,i}$  em termos dessas bases

$$u_h^{n,i} = \sum_{j=1}^M \alpha_j^{n,i} \chi_j, \quad \mathbf{p}_h^{n,i} = \sum_{j=1}^L \beta_j^{n,i} \psi_j$$

Logo, para  $w_h = \chi_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,

$$\begin{aligned} \langle b'(u_h^{n,i-1})u_h^{n,i}, \chi_m \rangle &= \int_{\Omega} b'(u_h^{n,i-1})u_h^{n,i} \chi_m \, dx = \\ &= \int_{T_m} b'(u_h^{n,i-1}) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j^{n,i} \chi_j \right) \, dx = \\ &= \alpha_m^{n,i} \int_{T_m} b'(u_h^{n,i-1}) \, dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{p}_h^{n,i}, \chi_m \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{p}_h^{n,i} \chi_m \, dx = \\ &= \int_{T_m} \nabla \cdot \mathbf{p}_h^{n,i} \, dx = \sum_{j=1}^L \beta_j^{n,i} \int_{T_m} \operatorname{div} \psi_j \, dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

e, para  $\mathbf{v}_h = \psi_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,

$$\langle \mathbf{p}_h^{n,i}, \psi_l \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{p}_h^{n,i} \cdot \psi_l \, dx = \sum_{j=1}^L \beta_j^{n,i} \int_{\Omega} \psi_j \cdot \psi_l \, dx \quad (4.12)$$

$$\langle u_h^{n,i}, \nabla \cdot \psi_l \rangle = \int_{\Omega} u_h^{n,i} \nabla \cdot \psi_l \, dx = \sum_{j=1}^M \alpha_j^{n,i} \int_{T_j} \operatorname{div} \psi_l \, dx \quad (4.13)$$

## 4.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para os casos tratados nos exemplos numéricos consideramos o problema:

$$\partial_t(u^{1/m}) + \Delta u = f, \text{ em } (0, T] \times \Omega \quad (4.14)$$

em que  $m > 1$  é dado,  $\Omega = [0, L] \times [0, L]$  e  $T$  é o tempo final. Note que, tomando  $\alpha = 1/m$  a condição (C3) é satisfeita.

Nos 3 exemplos mostrados aqui utilizamos  $m = 2$  e  $L = 1$ . Sendo assim,

$$b(u) = u^{1/m} = u^{1/2} \Rightarrow b'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

e portanto, a expressão (4.10) fica no seguinte formato:

$$\begin{aligned} \langle b'(u_h^{n,i-1}) u_h^{n,i}, \chi_m \rangle &= \alpha_m^{n,i} \int_{T_m} b'(u_h^{n,i-1}) \, dx = \\ &= \alpha_m^{n,i} |T_m| b'(u_h^{n,i-1})|_{T_m} \end{aligned} \quad (4.15)$$

uma vez que  $b'(u_h^{n,i-1})|_{T_m}$  é constante em cada  $T_m$ .

Portanto, a forma matricial de (4.9) em cada iteração do método de Newton é

$$\begin{bmatrix} B & C \\ \tau C^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

em que as matrizes  $B$  e  $C$  são como em (2.90),  $D$  é uma matriz diagonal com componentes da forma de (4.15) e

$$r_j = \langle f^n + b(u_h^{n-1}) - b(u_h^{n,i-1}) + b'(u_h^{n,i-1}) u_h^{n,i-1}, \chi_j \rangle$$

O erro da aproximação é calculado pela expressão (4.7).

Como critério de parada para o método de Newton utilizou-se

uma tolerância de  $10^{-12}$ .

Dessa forma, a taxa de convergência esperada é de 1.5 e o fator de redução esperado é de  $\sqrt{8} \approx 2.8284$ .

Nos dois exemplos a seguir, os passos no tempo foram escolhido de forma que fosse possível comparar os resultados obtidos com os resultados apresentados em [20].

**Exemplo 4.1** *Considere a função:*

$$u(t, x, y) = \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{m}}} \left[ 1 - \frac{(x^2 + y^2)(m-1)}{4m^2(t+1)^{\frac{1}{m}}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad (4.16)$$

conhecida como solução de Barenblatt para o problema (4.14) com  $f = 0$  e condições de fronteira definidas por  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . O gráfico da solução de Barenblatt é mostrado na figura abaixo.

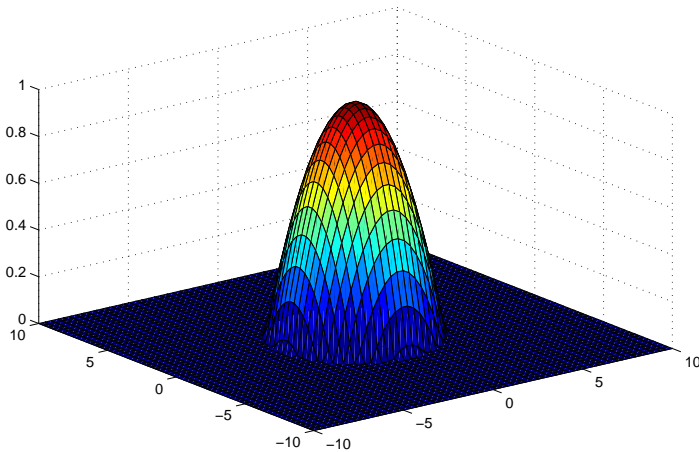


Figura 38: Gráfico da solução de Barenblatt.



Para este caso, com  $T = 2$ , obtivemos os seguintes resultados:

$\tau$	$h$	<i>Erro</i>	Taxa de conv.	Fator de Red.
0.333	0.17678	3.67486e-003	0	0
0.181818	0.08839	1.18005e-003	1.6388	3.1141
0.10526316	0.04419	3.89498e-004	1.5992	3.0297
0.0625	0.02210	1.47378e-004	1.4021	2.6428

Tabela 6: Resultados do exemplo 4.1.

Como é possível ver na tabela acima, o método converge com taxas próximas às taxas teóricas. Porém, uma confirmação mais precisa não foi possível pois a solução do problema é pouco regular. De fato, como a solução de Barenblatt possui suporte compacto para  $t \geq 0$ , propriedade esta conhecida como propagação de velocidade finita, ela tende a comporta-se de forma suave no interior do suporte mas de forma íngreme próxima a interface do suporte.

No exemplo abaixo, trabalhamos com um problema em que a solução é mais suave.

**Exemplo 4.2** Considere agora a função

$$u(t, x, y) = e^{-t}xy(1-x)(1-y). \quad (4.17)$$

como solução do problema (4.14). O lado direito do problema é

$$f(t, x, y) = \frac{2x(x-1)}{e^t} + \frac{2y(y-1)}{e^t} - \frac{xy(x-1)(y-1)}{2e^t \sqrt{\frac{xy(x-1)(y-1)}{e^t}}}$$

e as condições de Dirichlet e inicial são dadas por  $u|_{\partial\Omega}$  e  $u(0, x, y)$ , respectivamente. Para este caso, obtivemos os seguintes resultados:

$\tau$	$h$	<i>Erro</i>	Taxa de conv.	Fator de Red.
0.333	0.17678	5.65724e-004	0	0
0.181818	0.08839	1.73213e-004	1.7075	3.2661
0.10526316	0.04419	5.32718e-005	1.7011	3.2515
0.0625	0.02210	1.81292e-005	1.5551	2.9384

Tabela 7: Resultados do exemplo 4.2.

*Como é possível ver na tabela, neste caso as taxas de convergência são bem mais próximas das taxas teóricas, dentro das malhas computacionais acessíveis.*

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho é o estudo do método de elementos finitos mistos tanto do ponto de vista de resultados teóricos, mostrando resultados sobre convergência nas duas variáveis, como do ponto de vista computacional, desenvolvendo e analisando implementações para esse tipo de método.

O estimador utilizado não se mostrou muito capaz de identificar apenas as áreas que precisavam ser realmente refinadas quando utilizamos condições de Dirichlet na fronteira do domínio. Apesar disso, como mostrado no trabalho, obteve-se um bom desempenho com condições de Neumann.

Dentre os muitos caminhos que podemos seguir a partir do trabalho apresentado e dos resultados obtidos, um que chama a atenção é estudar outros estimadores de erro e analisar os resultados obtidos. Outra linha a ser seguida é a adaptação na variável temporal baseada no número de iterações para o método de Newton. Por fim, outro fator que pode ser estudado são as diversas formas de lidar com a degeneração no problema do capítulo 4.



## APÊNDICE A – Implementações



O objetivo deste apêndice é descrever detalhes do processo de implementação dos códigos feitos para o trabalho. Relatamos aqui alguns detalhes sobre geração de malha, estrutura de dados e bibliotecas.

Todas as implementações foram feitas utilizando o MATLAB. Os gráficos foram feitos utilizando o próprio MATLAB e o software Tecplot **360**.

## A.1 PACOTE iFEM

A biblioteca iFEM tem por objetivo fornecer um conjunto de ferramentas robustas e eficientes para implementação de problemas utilizando métodos de refinamento de malha adaptativos. Maiores detalhes sobre esse pacote podem ser encontrados no seu manual [12].

O ambiente começou a ser desenvolvido por Long Chen e seus colegas na Universidade de Pequim em 2006 tendo sido concluído em 2008. Suas rotinas foram escritas utilizando Matlab.

Uma característica muito marcante nesse pacote é a atenção dada para a alocação dos dados através de matrizes esparsas.

Utilizamos os recursos desta biblioteca quando realizamos os refinamentos uniformes (nos capítulos 2 e 4) e adaptativos (no capítulo 3).

Devido à diferença na estrutura dos dados sobre as condições de fronteira, criamos uma rotina de conversão desses dados do formato padrão para o formato do iFEM e outra para fazer a conversão contrária.

No caso de refinamentos uniformes, após a conversão dos dados utilizamos a função `uniformbisect.m` para realizar o refinamento da malha.

No caso de refinamentos adaptativos, tendo a estimativa de erro, calculada pela função `Aposteriori.m`, utilizamos a função `mark.m` para marcar os elementos a serem refinados. Em seguida, convertemos as informações sobre a fronteira de Dirichlet e Neumann para o formato do iFEM e utilizamos a função `bisect.m` que retorna a nova lista de nós, elementos e condições de fronteira. Por fim, convertemos os dados para o formato original.

A estrutura básica dos dados é composta por **3** matrizes:

- *node*: Matriz de dimensão  $N \times 2$ , onde  $N$  é o número de nós da malha, contendo as coordenadas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dos nós da malha.
- *elem*: Matriz de dimensão  $NT \times 3$ , onde  $NT$  é número de ele-

mentos da malha, contendo a lista dos elementos. Em cada linha os **3** números indicam a linha da matriz *node* que armazena as coordenadas do vértice do elemento.

- *bdEdge*: Matriz de dimensão  $NT \times 3$  contendo as informações sobre as condições de contorno. Existem **3** possíveis valores: **0**, **1** e **2**; sendo que **0** denota que a aresta oposta ao nó correspondente em *elem* é uma aresta interior, **1** denota uma aresta na fronteira de Dirichlet e **2** denota aresta na fronteira de Neumann.

## A.2 IMPLEMENTAÇÃO DE BAHRIAWATI - CARSTENSEN

Os códigos apresentados na referência [5] foram o ponto de partida para as implementações feitas durante o trabalho.

Antes de mais nada, os dados sobre a malha para o problema são adquiridos a partir de quatro arquivos:

- *node.dat*: Contém a lista de nós da malha.
- *elem.dat*: Contém a lista de elementos da malha. Essa lista é feita baseada no índice de cada nó em *node.dat*.
- *dirichlet.dat*: Lista de arestas correspondentes as condições de Dirichlet.
- *neumann.dat*: Lista de arestas correspondentes as condições de Neumann.

Além das matrizes com os dados desses quatro arquivos, três outras estruturas de dados são contruídas (através da função *edge.m*) para auxiliar na resolução do problema.

- *nodes2element*: Matriz esparsa quadrada de dimensão  $N$  definida como:

$$nodes2element(\mathbf{k}, l) = \begin{cases} j, & \text{se } (\mathbf{k}, l) \text{ são nós do elemento } T_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, para dois elementos vizinhos  $T_+$  e  $T_-$  com índices  $j_+$  e  $j_-$  compartilhando os vértices *node(k)* e *node(l)*, temos  $nodes2element(\mathbf{k}, l) = j_+$  e  $nodes2element(l, \mathbf{k}) = j_-$ .

- *nodes2edge*: Matriz esparsa simétrica de dimensão  $N$  definida



como:

$$\mathit{nodes2edge}(k, l) = \begin{cases} \mathbf{j}, & \text{se a aresta } \mathbf{E}_j \text{ conecta os nós } \mathbf{k} \text{ e } \mathbf{l}; \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- *edge2element*: Matriz com 4 colunas e número de linhas igual ao número de arestas da malha. As duas primeiras colunas da linha  $\mathbf{j}$  contém os índices dos nós que compoem a aresta  $\mathbf{j}$ . A terceira e quarta coluna são definidas como:

$$\mathit{edge2element}(\mathbf{j}, [3, 4]) = \begin{cases} [\mathbf{m}, \mathbf{n}], & \text{se a aresta } \mathbf{E}_j \text{ pertence} \\ & \text{aos elementos } \mathbf{m} \text{ e } \mathbf{n}; \\ [\mathbf{m}, \mathbf{0}], & \text{se a aresta } \mathbf{E}_j \text{ pertence} \\ & \text{ao elemento } \mathbf{m} \text{ e está na} \\ & \text{fronteira do domínio.} \end{cases}$$

Note que a partir da matriz *edge2element* podemos rapidamente obter as arestas pertencentes ao interior do domínio usando o comando `find(edge2element(:,4))` e as arestas da fronteira do domínio com o comando `find(edge2element(:,4)==0)`.

Definimos agora as funções de base-aresta local e global.

**Definição A.1** *Sejam  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$  arestas do triângulo  $\mathbf{T}$  opostas aos vértices  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  e  $\mathbf{P}_3$ , respectivamente, e seja  $\mathbf{n}_{\mathbf{E}_j}$  o vetor unitário normal a  $\mathbf{E}_j$  escolhido com uma orientação global fixa. Seja  $\mathbf{n}_j$  denotando o vetor unitário normal exterior a  $\mathbf{T}$  em  $\mathbf{E}_j$ . Definimos*

$$\psi_{\mathbf{E}_j}(\mathbf{x}) = \sigma_j \frac{|\mathbf{E}_j|}{2|\mathbf{T}|} (\mathbf{x} - \mathbf{P}_j), \quad \text{para } \mathbf{j} = 1, 2, 3 \text{ e } \mathbf{x} \in \mathbf{T}.$$

em que  $\sigma_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{E}_j}$  é igual a 1 caso  $\mathbf{n}_{\mathbf{E}_j}$  aponte para fora do elemento e  $-1$  caso contrário. O valor  $|\mathbf{E}_j|$  denota o comprimento de  $\mathbf{E}_j$  e  $|\mathbf{T}|$  denota a área de  $\mathbf{T}$ .

**Definição A.2** *Dada uma aresta  $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ , ou existem dois elementos  $\mathbf{T}_+$  e  $\mathbf{T}_-$  de  $\mathcal{T}$  de modo que  $\mathbf{E} = \partial\mathbf{T}_+ \cap \partial\mathbf{T}_-$  ou existe um único elemento  $\mathbf{T}_+ \in \mathcal{T}$  de modo que  $\mathbf{E} \subset \partial\mathbf{T}_+$ . Então, se  $\mathbf{T}_\pm$  é a envoltória convexa de  $\mathbf{E}$  e do vértice  $\mathbf{P}_\pm$  oposto a  $\mathbf{E}$  em  $\mathbf{T}_\pm$ , definimos*

$$\psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \pm \frac{|\mathbf{E}|}{2|\mathbf{T}_\pm|} (\mathbf{x} - \mathbf{P}_\pm), & \text{para } \mathbf{x} \in \mathbf{T}_\pm, \\ \mathbf{0} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O lema a seguir apresenta algumas propriedades sobre as funções de base  $\psi_E$  necessárias tanto para os resultados teóricos quanto para as implementações.

**Lema A.1** *Valem*

a)

$$\psi_E \cdot n_E = \begin{cases} 1 & \text{sobre } E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b)  $\psi_E \in H(\text{div}, \Omega)$ .

c)  $\{\psi_E : E \in \mathcal{E}\}$  forma uma base para  $RT_0(\mathcal{T})$ .

d)

$$\text{div } \psi_E = \begin{cases} \pm \frac{|E|}{|T_{\pm}|}, & \text{em } T_{\pm}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Demonstração:** A demonstração desse lema pode ser encontrada em [5].

Para cada elemento  $T$  com arestas  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  denotamos por  $\psi_j = \psi_{E_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Definição A.3** *Definimos as matrizes locais  $B_T$ ,  $C_T$  por*

$$(B_T)_{jk} = \int_T \psi_j \cdot \psi_k \, dx, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

$$C_T = \text{diag} \left( \int_T \text{div} \psi_1 \, dx, \int_T \text{div} \psi_2 \, dx, \int_T \text{div} \psi_3 \, dx \right)$$

**Lema A.2** *Sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  vértices de um elemento, sejam*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 0 & P_1 - P_2 & P_1 - P_3 \\ P_2 - P_1 & 0 & P_2 - P_3 \\ P_3 - P_1 & P_3 - P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$B_T = \frac{1}{48|T|} C_T^T N^T M N C_T$$

**Demonstração:** A demonstração desse lema pode ser encontrada em [5].

A partir deste lema e do lema A.1 temos formas eficientes de calcular as matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .

Quanto ao lado direito dos problemas, utilizamos sempre quadratura numérica com um ponto para aproximar as integrais. Por exemplo, no termo correspondente a função  $f$  temos

$$\int_{T_l} f(x) dx \approx |T_l| f(z_{T_l}), \quad l = 1, \dots, L$$

em que  $z_{T_l}$  é o baricentro de  $T_l$ .

### A.3 LISTA DE ARQUIVOS

Dedicamos esta seção do trabalho para descrever os principais arquivos (*scripts* e funções) utilizados. O intuito disso é fornecer uma referência que possibilite o entendimento do processo de resolução dos problemas bem como sirva de base a futuros interessados em utilizar os códigos. Uma parte desses códigos foram copiados das bibliotecas descritas em [5] e em [12] e os demais foram implementados por nós.

#### A.3.1 Rotinas do capítulo 1

Os *scripts* e funções utilizadas na implementação dos problemas do capítulo 2 foram:

- `createOutputFile.m` - Responsável por calcular as coordenadas baricêntricas, calcular as médias nos nós e gerar o arquivo de saída `Malha.plt` com os dados para os gráficos.
- `eBMFem.m` - Constrói a matriz e o lado direito do sistema e o resolve.
- `edge.m` - Gera as matrizes auxiliares que relacionam os nós, os elementos e as arestas.
- `errNormL2.m` - Responsável por calcular o erro na norma  $L^2$  da solução aproximada.
- `f.m` - Lado direito do problema.

- `funErro.m` - Função que avalia a erro da aproximação  $u_h$  e  $p_h$  em um ponto dado.
- `Globals2D.m` - Declara um conjunto de variáveis globais necessárias para o código.
- `main.m` - Arquivo principal, responsável por coordenar a resolução do problema e a geração de resultados.
- `meshGen2D.m` - Carrega os dados do problema e realiza os refinamentos necessários (durante o refinamento é necessário fazer a conversão entre as diferentes estruturas de dados para a condição de Dirichlet).
- `phiE.m` - Função de base-aresta (não é mais utilizada nessa versão do código).
- `ShowDisplacement.m` - Plota a solução aproximada  $u_h$ .
- `ShowFlux.m` - Plota a solução aproximada  $p_h$ .
- `showResult.m` - Responsável por coordenar os gráficos gerados no Matlab chamando as funções de plot.
- `solExata.m` - Função com a solução exata do problema.
- `StartUp2D.m` - Calcula os dados para a quadratura de Gauss (pontos, pesos, transformação afim e jacobiano).
- `u_D.m` - Condição de fronteira de Dirichlet.

### A.3.2 Rotinas do capítulo 2

Os *scripts* e funções utilizadas na implementação dos problemas do capítulo 4 foram:

- `buildMatrix.m` - Constroi as matrizes  $B$  e  $C$  que formam a matriz global.
- `createOutputFile.m` - Responsável por calcular as coordenadas baricêntricas, calcular as médias nos nós e gerar o arquivo de saída `Malha.plt` com os dados para os gráficos.
- `edge.m` - Gera as matrizes auxiliares que relacionam os nós, os elementos e as arestas.

- `errNormL2.m` - Responsável por calcular o erro na norma  $L^2$  da solução aproximada.
- `erroRaduPopKanbner.m` - Calcula o erro da aproximação utilizando a expressão (4.7).
- `f.m` - Lado direito do problema.
- `fluxEB.m` - Retorna uma matriz de tamanho  $3NT \times 2$  com as coordenadas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{p}_h$  em cada vértice de cada um dos 3 vértices de cada elemento.
- `funb.m` - Calcula o valor da função  $\mathbf{b}$  ou da sua derivada.
- `funErro.m` - Função que avalia a erro da aproximação  $\mathbf{u}_h$  e  $\mathbf{p}_h$  em um ponto dado.
- `Globals2D.m` - Declara um conjunto de variáveis globais necessárias para o código.
- `main.m` - Arquivo principal, responsável por coordenar a resolução do problema e a geração de resultados.
- `meshGen2D.m` - Carrega os dados do problema e realiza os refinamentos necessários (durante o refinamento é necessário fazer a conversão entre as diferentes estruturas de dados para a condição de Dirichlet).
- `ShowDisplacement.m` - Plota a solução aproximada  $\mathbf{u}_h$ .
- `solExata.m` - Função com a solução exata do problema.
- `Startup2D.m` - Calcula os dados para a quadratura de Gauss (pontos, pesos, transformação afim e jacobiano).
- `u_D.m` - Condição de fronteira de Dirichlet.
- `u0.m` - Condição inicial do problema.

### A.3.3 Rotinas do capítulo 3

Os *scripts* e funções utilizadas na implementação dos problemas do capítulo 3 foram:

- `Aposteriori.m` - Cálculo da estimativa de erro a posteriori.

- `bisect.m` - Responsável por fazer o refinamento dos elementos marcados.
- `createOutputFile.m` - Responsável por calcular as coordenadas baricênticas, calcular as médias nos nós e gerar o arquivo de saída `Malha.plt` com os dados para os gráficos.
- `eBMFem.m` - Constrói a matriz e o lado direito do sistema e o resolve.
- `edge.m` - Gera as matrizes auxiliares que relacionam os nós, os elementos e as arestas.
- `errNormL2.m` - Responsável por calcular o erro na norma  $L^2$  da solução aproximada.
- `errNormL2T.m` - Calcula o erro na norma  $L^2$  sobre cada elemento.
- `f.m` - Lado direito do problema.
- `funErro.m` - Função que avalia a erro da aproximação  $u_h$  e  $p_h$  em um ponto dado.
- `g.m` - Condição de Neumann.
- `Globals2D.m` - Declara um conjunto de variáveis globais necessárias para o código.
- `main.m` - Arquivo principal para o caso uniforme, responsável por coordenar a resolução do problema e a geração de resultados.
- `mainAdap.m` - Arquivo principal para o caso adaptativo, responsável por coordenar a resolução do problema e a geração de resultados.
- `makeAdap.m` - Gerencia o processo de adaptação de malha, ou seja, chama a função que marca os elementos e a função que refina a malha, bem como converte os dados necessários entre as estruturas de dados.
- `mark.m` - Responsável por marcar os elementos da malha que serão refinados.
- `meshGen2D.m` - Carrega os dados do problema e realiza os refinamentos necessários (durante o refinamento é necessário fazer a conversão entre as diferentes estruturas de dados para a condição de Dirichlet).

- `showAposteriori.m` - Plota vetores  $\mathbf{p}_h$  e  $\mathbf{q}_h$  em cada vértice da malha.
- `showCompEtaVsL2.m` - Plota o estimador, o erro na norma  $L^2$  e o índice  $i_T = \eta_T / \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^2(T)}$  para cada elemento.
- `showDisplacement.m` - Plota a solução aproximada  $\mathbf{u}_h$ .
- `showExactFlux.m` - Plota o fluxo exato.
- `ShowFlux.m` - Plota a solução aproximada  $\mathbf{p}_h$ .
- `showResult.m` - Chama `showDisplacement.m` e `showFlux.m` e plota a malha.
- `showSmoothFlux.m` - Plota  $\mathbf{q}_h$ .
- `solExata.m` - Função com a solução exata do problema.
- `StartUp2D.m` - Calcula os dados para a quadratura de Gauss (pontos, pesos, transformação afim e jacobiano).
- `u_D.m` - Condição de fronteira de Dirichlet.





## REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [2] AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. New York: Wiley-Interscience, 2003.
- [3] ATKINSON, K.; HAN, W. *Theoretical Numerical Analysis*. New York: Springer, 2009.
- [4] BABUSKA, I. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, n. 20, p. 179–192, 1973.
- [5] BAHRIAWATI, C.; CARSTENSEN, C. Three MATLAB Implementations of the Lowest-Order Raviart-Thomas MFEM with A Posteriori Error Control. *Computational Methods in Applied Mathematics*, v. 5, n. 4, p. 333–361, 2005.
- [6] BÖSING, P. R. *Método de Galerkin Descontínuo para Equações Elípticas de Alta Ordem*. Tese (Doutorado) — USP, 2006.
- [7] BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer, 2008.
- [8] BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 8, n. R2, p. 129–151, 1974.
- [9] BREZZI, F.; FORTIN, M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. New York: Springer, 1991.
- [10] CARSTENSEN, C. All First-Order Averaging Techniques for a Posteriori Finite Element Error Control on Unstructured Grids are Efficient and Reliable. *Mathematics of Computation*, v. 73, n. 247, p. 1153 – 1165, 2003.
- [11] CARSTENSEN, C.; BARTELS, S. Each Averaging Technique Yields reliable a posteriori error control in FEM on Unstructured Grids. Part I: Low Order Conforming, Nonconforming and Mixed FEM. *Mathematics of Computation*, v. 71, n. 239, p. 945–969, 2002.
- [12] CHEN, L. *iFEM: an innovative finite element method package in MATLAB*. California, 2008.

- [13] CROUZEIX, M.; RAVIART, P. A. Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, n. 7, p. 33–76, 1973.
- [14] DOLEJSKÍ, V.; ERN, A.; VOHRALÍK, M. A framework for robust a posteriori error control in unsteady nonlinear advection-diffusion problems. Não publicado.
- [15] DURÁN, R. G. *Mixed Finite Element Methods*. Buenos Aires, Argentina.
- [16] HOPPE, R. H. *Mixed finite element methods*. Houston, Texas, 2012.
- [17] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: J. Wiley, 1989.
- [18] LUCKHAUS, S.; ALT, H. W. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Mathematische Zeitschrift*, Springer-Verlag, v. 183, n. 3, p. 311–341, 1983.
- [19] RADU, F. A. *Mixed finite element discretization of Richards' equation: error analysis and application to realistic infiltration problems*. Tese (Doutorado) — Naturwissenschaftlichen Fakultaten der Friedrich-Alexander-Universität, Nuremberg, 2004.
- [20] RADU, F. A.; POP, I. S.; KNABNER, P. Error estimates for a mixed finite element discretization of some degenerate parabolic equations. *Numerische Mathematik*, v. 109, n. 2, p. 285 – 311, 2008.
- [21] RADU, F. A.; POP, I. S.; KNABNER, P. Newton-Type Methods for the Mixed Finite Element Discretization of Some Degenerate Parabolic Equations. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, p. 1192 – 1200, 2006.
- [22] RIVIÈRE, B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. Philadelphia: SIAM, 2008.
- [23] THOMÉE, V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Holanda: Springer, 2006.
- [24] VÁZQUEZ, J. L. *The Porous Medium Equation, Mathematical Theory*. Grã-Bretanha: Oxford University Press, 2007.

- [25] VERFÜRTH, R. *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. EUA: Oxford University Press, 2013.
- [26] ZHANG, Q.; WU, Z.-L. Numerical Simulation for Porous Medium Equation by Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method. *Journal of Scientific Computing*, v. 38, n. 2, p. 127 – 148, 2009.
- [27] ZWILLINGER, D. *Handbook of Differential Equations*. 3<sup>a</sup>. ed. Boston, Massachusetts: Academic Press, 1997.