

Gustavo Felisberto Valente

**COHOMOLOGIA ASSOCIADA A LADRILHAMENTOS
DE SUBSTITUIÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática Pura
e Aplicada para a obtenção do Grau
de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Daniel Gonçalves

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Valente, Gustavo
Cohomologia associada a ladrilhamentos de substituição
[dissertação] / Gustavo Valente ; orientador, Daniel
Gonçalves - Florianópolis, SC, 2013.
116 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de
Operadores. 3. Sistemas Dinâmicos. 4. C^* -álgebras. 5.
Topologia Algébrica. I. Gonçalves, Daniel. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Gustavo Felisberto Valente

**COHOMOLOGIA ASSOCIADA A LADRILHAMENTOS
DE SUBSTITUIÇÃO**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 22 de fevereiro 2013.

Prof. Chefe, Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Orientador

Prof. Dr. Samir Ahmad Mussa

Prof. Dr. Charles Starling

Prof. Dr. Marcelo Sobottka

AGRADECIMENTOS

A meus pais, por todo o apoio e força durante estes anos todos de faculdade. Amo vocês!

A meus amigos, de infância e faculdade, por tudo o que passamos juntos. Vocês fazem parte de meu caráter.

Aos meus mestres professores, desde os tempos de escola até o fim deste trabalho me mostrando o que eu queria ser. Graças a todos vocês eu decidi o que queria de minha vida e continuo lutando para conquistar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho serão descritas propriedades de ladrilhamentos nas mais diversas áreas da matemática como topologia, sistemas dinâmicos e topologia algébrica. Veremos um método para construir ladrilhamentos que não admitem simetrias de translação, isto é, não são periódicos. Tais ladrilhamentos são chamados de ladrilhamentos de substituição e iremos construir um complexo celular associado e determinar sua cohomologia. O estudo será aplicado a alguns exemplos.

Palavras-chave: Ladrilhamentos. Álgebras de Operadores. Sistemas Dinâmicos. Dinâmica Simbólica. C^* -álgebras. Topologia Algébrica.

ABSTRACT

In this essay we show properties of tilings in many areas of mathematics like topology, dynamic systems and algebraic topology. We describe a method to build a tiling that doesn't admit a symmetry of translation, i.e., it is not periodic. Such tilings are called substitution tilings and we will construct an associated cell complex in order to determine its cohomology. The study will be applied to some examples.

Keywords: Tilings. Operator Algebra. Dynamic Systems. Symbolic Dynamics. C^* -algebras. Algebraic Topology.

SUMÁRIO

Introdução	15
1 C*-ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ÉTALE	17
1.1 GRUPÓIDES TOPOLÓGICOS	17
1.2 CONSTRUÇÃO DA C*-ÁLGEBRA	21
2 LADRILHAMENTOS	31
2.1 LADRILHAMENTOS DE SUBSTITUIÇÃO	31
2.2 TOPOLOGIA DOS LADRILHAMENTOS	35
2.3 C*-ÁLGEBRA ASSOCIADA A UM LADRILHAMENTO ..	41
3 SISTEMAS DINÂMICOS ASSOCIADOS A LADRILHAMENTOS	49
3.1 SISTEMAS DINÂMICOS EM GERAL	49
3.2 DINÂMICA SIMBÓLICA	50
3.3 DINÂMICA DOS LADRILHAMENTOS	54
4 COHOMOLOGIA ASSOCIADA A UM LADRILHAMENTO	65
4.1 COHOMOLOGIA	65
4.2 LIMITE DIRETO	68
5 CÁLCULO DA COHOMOLOGIA PARA ALGUNS EXEMPLOS	73
5.1 LADRILHAMENTO FIBONACCI	73
5.1.1 Determinando $H^0(\Omega)$	77
5.1.2 Determinando $H^1(\Omega)$	78
5.2 LADRILHAMENTO THUE MORSE	80
5.2.1 Determinando $H^0(\Omega)$	83
5.2.2 Determinando $H^1(\Omega)$	84
5.3 LADRILHAMENTO OCTOGONAL	87
5.3.1 Determinando $H^0(\Omega)$	93
5.3.2 Determinando $H^1(\Omega)$	93
5.3.3 Determinando $H^2(\Omega)$	96
5.4 LADRILHAMENTO TRI-QUADRADO	99
5.4.1 Bijetividade	101
5.4.2 Forçar o bordo	104
5.4.3 Construção do complexo celular associado	105
Conclusão	113
REFERÊNCIAS	115

INTRODUÇÃO

O estudo de ladrilhamentos data desde a antiguidade, onde mosaicos eram usados para preencher paredes e tetos de catedrais e outras grandes obras. Além das aplicações estéticas de ladrilhamentos, existem também aplicações físicas, como a modelagem de cristais e de disposição de moléculas. Em 2011, um estudo envolvendo simetrias de ladrilhamentos levou Dan Shechtman a ganhar o prêmio Nobel de Química devido ao novo tipo de material denominado quasicristais que ele sintetizou (BOAVA, 2007; NOBELPRIZE.ORG, 26 Jan 2013). Neste trabalho serão descritas propriedades matemáticas dos ladrilhamentos. Tais propriedades variam no campo da topologia, sistemas dinâmicos e topologia algébrica. O texto será estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 tratamos de C^* -álgebras associadas a relações de equivalência étale. Começamos definindo grupoide, focando no exemplo formado por uma relação de equivalência. Posteriormente definimos duas funções importantes denominadas *range* e *source*. Estas funções serão usadas para definir uma topologia chamada étale para um conjunto de relações de equivalência. Em seguida consideramos o conjunto das funções contínuas de suporte compacto definidas sobre um conjunto de relações de equivalência. Este conjunto, chamado $C_c(R)$ será munido de uma operação binária, uma involução e uma norma. Depois de muitos resultados envolvendo a condição étale conseguimos provar que $C_c(R)$ é uma C^* -álgebra.

No Capítulo 2 definiremos ladrilhamentos, bem como todos os elementos associados e veremos algumas propriedades envolvendo simetria nestes objetos. Descreveremos um método para construir um ladrilhamento, e chamaremos os ladrilhamentos formados através deste método de ladrilhamentos de substituição. Consideramos o conjunto de todos os ladrilhamentos de substituição que podem ser formados com uma certa condição inicial e chamaremos este conjunto de Ω . Em seguida definiremos uma relação de equivalência em Ω de forma que este conjunto das relações de equivalência seja étale (e, portanto, pelo capítulo anterior, temos uma C^* -álgebra).

No Capítulo 3 definimos elementos básicos de sistemas dinâmicos e de complexos celulares. Em seguida aplicamos estes resultados no estudo dos ladrilhamentos de substituição, definindo o complexo celular associado a um ladrilhamento.

No Capítulo 4 definimos cohomologia em geral e adaptamos a

definição para os complexos celulares definidos previamente. Em seguida definimos o limite direto e o utilizamos para poder aplicar um teorema que diz que a cohomologia associada a um ladrilhamento é o limite direto de um sistema direto de cohomologias associadas aos complexos celulares dos ladrilhamentos.

No Capítulo 5 aplicamos o teorema descrito anteriormente em alguns exemplos. Para isto foi feito o processo passo-a-passo, utilizando todos os conceitos apresentados nos capítulos anteriores.

1 C*-ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ÉTALE

Neste capítulo estudaremos a estrutura de grupóide. Essa estrutura compartilha algumas propriedades da estrutura de grupo, como a noção de inverso e, de forma parcial, a noção de associatividade. A maior parte destes resultados podem ser encontrados nas referências (RENAULT, 1980, Capítulo 1.1) e (WHITTAKER, 2005, Capítulo 3)

1.1 GRUPÓIDES TOPOLÓGICOS

Em um grupo (H, \cdot) temos o elemento unidade, denotado por $e \in H$, que satisfaz as igualdades $e \cdot x = x \cdot e = x$ para todo $x \in H$. Também vale que todo elemento de H é invertível, isto é, para cada $x \in H$ existe um elemento inverso denotado por $x^{-1} \in H$ que satisfaz $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$. Com isto temos que para todo $x, y \in H$ valem as igualdades:

$$y(x \cdot x^{-1}) = y \cdot e = y \quad \text{e} \quad (x^{-1} \cdot x)y = e \cdot y = y.$$

Igualdades desse tipo estarão presentes nos grupóides.

Um grupóide G não necessariamente admite uma operação associativa, tampouco possui elemento unidade. Em um grupóide a operação associativa só está definida para um subconjunto de $G \times G$. Quanto à unidade, esta aparece sob a forma descrita no parágrafo anterior, através dos elementos do tipo $x \cdot x^{-1}$ e $x^{-1} \cdot x$. Para tanto, exigiremos que todo elemento $x \in G$ admite um “inverso”. A palavra “inverso” foi escrito entre aspas pois esta noção é diferente da noção de inverso de um grupo.

Definição 1. Um *grupóide* é uma quádrupla $(G, i, G^{(2)}, m)$ em que G é um conjunto, i é uma involução em G denotada por $i(x) = x^{-1}$, $G^{(2)}$ é um subconjunto de $G \times G$ e m é uma função de $G^{(2)}$ em G denotada por $m(x, y) := x \cdot y = xy$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. (x, x^{-1}) e (x^{-1}, x) pertencem a $G^{(2)}$ para todo $x \in G$.
2. Se (x, y) e (y, z) pertencem a $G^{(2)}$ então (xy, z) e (x, yz) pertencem a $G^{(2)}$ e $(xy)z = x(yz)$.
3. Se $(x, y) \in G^{(2)}$ então $x(y \cdot y^{-1}) = x$ e $(x^{-1} \cdot x)y = y$.

Observe na propriedade 3 que o produto $x(y \cdot y^{-1})$ está bem definido, isto é, $(x, y \cdot y^{-1}) \in G^{(2)}$. De fato, por hipótese $(x, y) \in G^{(2)}$ e pela propriedade 1, $(y, y^{-1}) \in G^{(2)}$. Assim, pela propriedade 2, $(x, y \cdot y^{-1}) \in G^{(2)}$. O mesmo vale para o produto $(x^{-1} \cdot x)y$.

Neste texto iremos nos referir a um grupóide somente através do conjunto no qual está definida a involução. Por exemplo, o grupóide $(G, i, G^{(2)}, m)$ será chamado de grupóide G . A função m é denominada *produto*. Como i é uma involução então $(x^{-1})^{-1} = x$.

Podemos considerar um grupóide como sendo um conjunto com inversos e um produto associativo parcialmente definido. Note que todo grupo G é um grupóide no qual $G^{(2)} = G \times G$. Isto segue do fato que a operação de G está definida em todo o conjunto $G \times G$ e é associativa, satisfazendo as igualdades da definição (ver introdução desta seção).

Se (x, y) pertence a $G^{(2)}$ dizemos que x é *combinável com y* e chamamos o conjunto $G^{(2)}$ de *conjunto dos pares combináveis* de G . Não é verdade que se x é combinável com y então y é combinável com x , como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2. Seja X um conjunto e R uma relação de equivalência em X , isto é, R é um subconjunto de $X \times X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Reflexividade: $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$;

Simetria: Se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$;

Transitividade: Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

Faremos de R um grupóide definindo a involução por $(x, y)^{-1} = (y, x)$, o conjunto dos pares combináveis por $R^{(2)} := \{((x, y), (y, z)) \mid x, y, z \in X\}$ e o produto como sendo $(x, y)(y, z) = (x, z)$.

Demonstração. Verifiquemos as propriedades de grupóide:

1. Seja $(x, y) \in R$ e note que $((x, y), (x, y)^{-1}) = ((x, y), (y, x)) \in R^{(2)}$. Analogamente se prova que $((x, y)^{-1}, (x, y)) \in R^{(2)}$.
2. Sejam $((x, y), (y, z))$ e $((y, z), (z, w))$ pertencentes a $R^{(2)}$, então $((x, y)(y, z), (z, w)) = ((x, z)(z, w)) \in R^{(2)}$. Analogamente se mostra que $((x, y), (y, z)(z, w)) \in R^{(2)}$. Verifiquemos a associatividade:

$$\begin{aligned} [(x, y)(y, z)](z, w) &= (x, z)(z, w) = (x, w); \\ (x, y)[(y, z)(z, w)] &= (x, y)(y, w) = (x, w). \end{aligned}$$

3. Seja $((x, y), (y, z)) \in R^{(2)}$ e note que

$$(x, y)[(y, z)(y, z)^{-1}] = (x, y)[(y, z)(z, y)] = (x, y)(y, y) = (x, y).$$

Analogamente se demonstra que $[(x, y)^{-1}(x, y)](y, z) = (y, z)$.

Fica provado que R é um grupóide. \square

Note que se $x \neq z$ então (x, y) é combinável com (y, z) mas (y, z) não é combinável com (x, y) . Neste texto, a letra G denotará um grupóide qualquer e a letra R denotará o grupóide das relações de equivalência de um conjunto X . O conjunto $[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$ é chamado de classe de equivalência de x .

Vamos introduzir o conceito de relação de equivalência gerada por uma coleção de elementos de $X \times X$. Para tanto, considere a seguinte proposição.

Proposição 3. *A interseção arbitrária de relações de equivalência é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Seja $\{R_i\}_{i \in I}$ uma coleção arbitrária de relações de equivalência e mostremos que $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ é uma relação de equivalência:

Reflexividade: Dado $x \in X$ temos que $(x, x) \in R_i$ para todo i . Portanto $(x, x) \in R$;

Simetria: Se $(x, y) \in R$ então $(x, y) \in R_i$ para todo i . Portanto $(y, x) \in R_i$ para todo i . Logo $(y, x) \in R$;

Transitividade: Dados (x, y) e (y, z) pertencentes a R temos que (x, y) e (y, z) pertencem a R_i para todo i . Portanto $(x, z) \in R_i$ para todo i . Logo $(x, z) \in R$.

Fica provado que R é uma relação de equivalência. \square

Definição 4. Seja $U \subset X \times X$. A relação de equivalência gerada por U é a interção de todas as relações de equivalência que contém U .

Definição 5. Seja G um grupóide. Definimos as funções $r : G \rightarrow G$ e $s : G \rightarrow G$ por $r(x) = xx^{-1}$ e $s(x) = x^{-1}x$. Estas funções serão denominadas, respectivamente, por *range* e *source*.

Note que $r(G) = s(G)$ pois valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} r(x) &= xx^{-1} = [(x^{-1})^{-1}]x^{-1} = s(x^{-1}); \\ s(x) &= x^{-1}x = x^{-1}[(x^{-1})^{-1}] = r(x^{-1}). \end{aligned}$$

Iremos denotar o conjunto $r(G)$ ($= s(G)$) por $G^{(0)}$ e denominá-lo *conjunto das unidades* de G . Este nome é sugerido pelo fato de $r(x) \cdot x = x \cdot s(x) = x$ para todo $x \in G$. De fato, dado $x \in G$, temos que:

$$\begin{aligned} r(x) \cdot x &= (xx^{-1}) \cdot x = [(x^{-1})^{-1}x^{-1}] \cdot x = (x^{-1})^{-1} \cdot [x^{-1}x] = x; \\ x \cdot s(x) &= x \cdot (x^{-1}x) = x \cdot [x^{-1}(x^{-1})^{-1}] = [xx^{-1}] \cdot (x^{-1})^{-1} = x. \end{aligned}$$

Exemplo 6. Se R é uma relação de equivalência em um conjunto X e G é o grupóide associado a R (ver Exemplo 2), então

$$\begin{aligned} r(x, y) &= (x, y)(x, y)^{-1} = (x, y)(y, x) = (x, x); \\ s(x, y) &= (x, y)^{-1}(x, y) = (y, x)(x, y) = (y, y). \end{aligned}$$

Logo o conjunto das unidades é o conjunto dos pares da forma (x, x) , com $x \in X$. Este é o conjunto *diagonal* de X .

Comumente se identifica X com a diagonal de $X \times X$ através da função biunívoca $(x, x) \mapsto x$. Assim pode-se reinterpretar as funções *range* e *source*, quando aplicada a relações de equivalência, como projeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente. Escreve-se $r(x, y) = x$ e $s(x, y) = y$ e estas funções passam a ter contra-domínio X .

Definição 7. Seja $(G, i, G^{(2)}, m)$ um grupóide munido de uma topologia τ e considere $G^{(2)}$ com a topologia induzida pela topologia produto. Se i e m são contínuas dizemos que G é um *grupóide topológico*.

Toda involução contínua é um homeomorfismo pois o inverso de uma involução é a própria função. Note que $r(x) = xx^{-1} = m(x, x^{-1})$ para todo $x \in G$. Daí, se m é contínua então a função *range* também o é. O mesmo vale para a função *source*.

Seja G um grupóide e considere U e V subconjuntos de G . Definimos UV como sendo o conjunto dos produtos xy em que $x \in U$ e $y \in V$, sempre e quando $(x, y) \in G^{(2)}$. Definimos também U^{-1} como sendo o conjunto dos elementos da forma x^{-1} em que $x \in U$.

Definição 8. Um conjunto é σ -compacto se é uma reunião enumerável de conjuntos compactos.

Definição 9. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é um *homeomorfismo local* se para todo $x \in X$ existe um conjunto aberto $U \ni x$ tal que $f(U)$ é aberto em Y e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.

Exemplo 10. Se X é um espaço topológico munido de uma topologia τ e $Y \in \tau$, então podemos munir Y de uma topologia induzida

naturalmente por τ da seguinte forma:

$$\tau_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}.$$

Isto é, um subconjunto de Y é aberto se e somente se é a interseção de Y com um aberto de X .

Com isto, a função *inclusão* $i : Y \rightarrow X$ dada por $i(x) = x$ é um homeomorfismo.

Demonstração. De fato, se $x \in Y$ então podemos tomar um aberto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset Y$ (pois $Y \in \tau$). Note que $i(U) = U$ pois i é inclusão e U é aberto em Y pois $U = U \cap Y$ (uma vez que $U \subset Y$). Também vale que $i|_U$ é homeomorfismo pois $i|_U$ é a função identidade (que é homeomorfismo). \square

Definição 11. Seja R uma relação de equivalência em um espaço metrizable compacto X e considere uma topologia para R . Dizemos que R é *étale* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. R é σ -compacto;
2. A diagonal de X é aberta;
3. Se U e V são abertos então U^{-1} e UV são abertos;
4. As função *range* e *source* são homeomorfismos locais.

1.2 CONSTRUÇÃO DA C^* -ÁLGEBRA

Nesta seção iremos provar que uma relação de equivalência étale tem uma C^* -álgebra associada.

Definição 12. Uma *álgebra* é um espaço vetorial X munido de uma função bilinear

$$X^2 \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto xy,$$

tal que

$$x(yz) = (xy)z \quad (x, y, z \in X).$$

Definição 13. Seja X uma álgebra sobre \mathbb{C} e considere uma involução $*$: $X \rightarrow X$. Dizemos que X é uma **-álgebra* se as seguintes propriedades são satisfeitas para todo $x, y \in X$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$;

2. $(xy)^* = y^*x^*$;
3. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$;

4. Se e é o elemento unidade de X então $e^* = e$.

Mais ainda, se X for normado e completo tal que, para todo $a, b \in X$,

1. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$;
2. $\|a^* \| = \|a\|$;
3. $\|a^*a\| = \|a\|^2$;

então dizemos que X é uma C^* -álgebra.

Exemplo 14. (MURPHY, 1990, Exemplo 1.1.7) Se X é um espaço vetorial normado, denotamos por $B(X)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados definidos em X . Então $B(X)$ é uma álgebra normada com as operações definidas ponto-a-ponto para a adição e a multiplicação por escalar, multiplicação dada por $(u, v) \mapsto u \circ v$, e a norma como sendo:

$$\|u\|_B := \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

Exemplo 15. (MURPHY, 1990, Exemplo 2.1.3) O conjunto $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes de ordem n com entradas em \mathbb{C} é uma $*$ -álgebra quando munido das operações usuais de matrizes: soma, produto e involução (transposta conjugada).

Proposição 16. (MURPHY, 1990, Exemplo 2.1.4) A soma direta de C^* -álgebras é uma C^* -álgebra.

Definição 17. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homomorfismo de $*$ -álgebras A e B e f preserva adjuntos, isto é, $f(x^*) = (f(x))^*$ para todo $x \in X$, então f é um $*$ -homomorfismo. Mais ainda, se f é uma bijeção então f é um $*$ -isomorfismo.

Seja R uma relação de equivalência étale e considere o conjunto $C_c(R)$ das funções $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ que são contínuas e que possuem suportes compactos. É fácil ver que $C_c(R)$ é um espaço vetorial com as operações usuais ponto-a-ponto. Vamos definir um produto e uma involução para $C_c(R)$ a fim de torná-lo uma $*$ -álgebra:

$$\begin{aligned} f \cdot g(x, z) &= \sum_{y \in [x]} f(x, y)g(y, z); \\ f^*(x, y) &= \overline{f(y, x)}. \end{aligned}$$

Antes de verificar as propriedades de *-álgebra precisamos provar que a fórmula que define o produto está bem-definida (isto é, que a soma envolvida é convergente) e que o conjunto $C_c(R)$ é fechado com relação a essas operações. Para tal, considere os seguintes lemas.

Lema 18. *Se R é uma relação de equivalência étale e $f \in C_c(R)$ então existe uma quantidade finita de conjuntos abertos U_1, \dots, U_N que cobrem o suporte de f . Mais ainda, para todo $i = 1, \dots, N$ as funções $r|_{U_i}$ e $s|_{U_i}$ são homeomorfismos.*

Demonstração. Como R é uma relação de equivalência étale então as funções *range* e *source* são homeomorfismos locais, isto é, para cada $(x, y) \in R$ existem abertos $V(x, y) \ni (x, y)$ e $W(x, y) \ni (x, y)$ tais que $r|_{V(x, y)}$ e $s|_{W(x, y)}$ são homeomorfismos. Considere o conjunto $U(x, y) = V(x, y) \cap W(x, y)$. É fácil ver que $r|_{U(x, y)}$ e $s|_{U(x, y)}$ são homeomorfismos pois $U(x, y) \subset V(x, y)$ e $U(x, y) \subset W(x, y)$ e a restrição de um homeomorfismo também é um homeomorfismo.

Seja K o suporte de f e note que $K \subset \bigcup_{(x, y) \in K} U(x, y)$. Como o suporte de f é compacto existe uma quantidade finita de abertos $U_1 := U(x_1, y_1), \dots, U_N := U(x_N, y_N)$ que cobrem K . Estes abertos satisfazem a propriedade desejada conforme descrito no parágrafo anterior. \square

Lema 19. *Se R é uma relação de equivalência étale sobre um conjunto X e $f \in C_c(R)$ então para cada classe $[x] \subset X$ existe uma quantidade finita de $y \in [x]$ tais que $f(x, y) \neq 0$. Similarmente, para todo $[x] \subset X$ existem finitos $y \in [x]$ tais que $f(y, x) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $[x] \subset X$. Pelo lema anterior existem abertos U_1, \dots, U_N tais que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ e as funções $r|_{U_i}$ e $s|_{U_i}$ são homeomorfismos. Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ mostremos que o conjunto $\{y \mid (x, y) \in U_i\}$ possui no máximo um elemento. De fato, se y_1 e y_2 são tais que $(x, y_1) \in U_i$ e $(x, y_2) \in U_i$ então $r(x, y_1) = r(x, y_2) \cong x$. Como $r|_{U_i}$ é homeomorfismo então $r|_{U_i}$ é injetivo e, portanto, $y_1 = y_2$.

Como $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ então $\{y \mid (x, y) \in K\} \subset \bigcup_{i=1}^N \{y \mid (x, y) \in U_i\}$.

Como cada conjunto da união contém no máximo um elemento então $\{y \mid (x, y) \in K\}$ contém no máximo N elementos e, portanto, é finito. Agora, note que $\{y \mid (x, y) \in K\} = \{y \in [x] \mid (x, y) \in K\}$.

Como K é o suporte de f então

$$\begin{aligned} \{y \in [x] \mid (x, y) \in K\} &= \{y \in [x] \mid (x, y) \in \text{supp}(f)\} \supset \\ &\supset \{y \in [x] \mid f(x, y) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Como $\{y \in [x] \mid (x, y) \in K\}$ é finito então $\{y \in [x] \mid f(x, y) \neq 0\}$ também o é. Isto significa que existe uma quantidade finita de $y \in [x]$ tais que $f(x, y) \neq 0$ como queríamos demonstrar. A mesma demonstração se aplica ao caso $f(y, x)$. \square

Este lema é suficiente para provar que a fórmula que define o produto está bem definida. De fato, fixado $x \in X$ o lema nos diz que existe uma quantidade finita de $y \in [x] = [z]$ tais que $f(x, y) \neq 0$ e $g(y, z) \neq 0$. Logo a soma $\sum_{y \in [x]} f(x, y)g(y, z)$ é finita e, portanto,

convergente. Este lema também garante que somas do tipo $\sum_{y \in [x]} f(x, y)$ são finitas e, portanto, valem as propriedades de somatório finito.

Lema 20. *Sejam R uma relação de equivalência étale e $f, g \in C_c(R)$ com a seguinte propriedade:*

Existem abertos U e V tais que $\text{supp}(f) \subset U$ e $\text{supp}(g) \subset V$ e $r|_U, r|_V, s|_U$ e $s|_V$ são homeomorfismos.

Nestas condições o produto $f \cdot g \in C_c(R)$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} f \cdot g(x, z) &= \sum_{y \in [x]} f(x, y)g(y, z) \\ &= \begin{cases} \sum_{y \in [x]} f(x, y)g(y, z) & \text{se } x \in r(U) \text{ e } z \in s(V) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \end{aligned}$$

Na demonstração do lema anterior tínhamos que se $x \in r(U)$ então existe um único y tal que $(x, y) \in U$ e se $z \in s(V)$ existe um único y' tal que $(y', z) \in V$. Mais ainda, pela definição do produto se $y \neq y'$ então $f \cdot g(x, z) = 0$. Portanto se o produto é não-nulo podemos assumir que existe um único y tal que $f \cdot g(x, z) = f(x, y)g(y, z)$.

Note que $(x, y) = r|_U^{-1} \circ r(x, y)$ e $(y, z) = s|_V^{-1} \circ s(y, z)$ e, portanto,

$$f \cdot g(x, z) = f(r|_U^{-1} \circ r(x, y))g(s|_V^{-1} \circ s(y, z)).$$

Esta função é contínua uma vez que ela é, pontualmente, o produto e a composição de funções contínuas sobre o mesmo elemento (x, y) . \square

Proposição 21. *Se R é uma relação de equivalência étale e $f, g \in C_c(R)$ então $f \cdot g \in C_c(R)$.*

Demonstração. Sejam K_f e K_g os suportes de f e g , respectivamente. Como f e g são contínuas de suporte compacto pelo Lema 18 existem abertos U_1, \dots, U_N que cobrem K_f e abertos V_1, \dots, V_M que cobrem K_g . Mais ainda, as funções *range* e *source* restritas àqueles abertos são homeomorfismos.

Como K_f e K_g são compactos então existe uma partição da unidade subordinada às coberturas $\{U_1, \dots, U_N\}$ e $\{V_1, \dots, V_M\}$, isto é,

existem funções contínuas f_1, \dots, f_N e g_1, \dots, g_M tais que $1 = \sum_{i=1}^N f_i$ e $1 = \sum_{j=1}^M g_j$ em que $\text{supp}(f_i) \subset U_i$ e $\text{supp}(g_j) \subset V_j$. Portanto $f = \sum_{i=1}^N f_i f$

e $g = \sum_{j=1}^M g_j g$.

Para cada i , note que $\text{supp}(f_i f) \subset \text{supp}(f_i) \subset U_i \subset K_f$ e, portanto, $f_i f \in C_c(R)$ (pois $\text{supp}(f_i f)$ é um subconjunto fechado do compacto K_f). Analogamente temos $g_j g \in C_c(R)$ para todo j .

Temos, portanto, funções $f_i f$ e $g_j g$ nas hipóteses do lema anterior. Logo $f_i f \cdot g_j g \in C_c(R)$ para todo $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq M$.

Como $f = \sum_{i=1}^N f_i f$ e $g = \sum_{j=1}^M g_j g = g$ então o produto

$$fg = \left(\sum_{i=1}^N f_i f \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^M g_j g \right) = \sum_{i,j} (f_i f \cdot g_j g),$$

o qual é uma soma de funções de $C_c(R)$. Logo $f \cdot g \in C_c(R)$. \square

O produto e a involução definidos acima se assemelham com as operações matriciais de multiplicação e adjunção. De fato, o modelo matricial nos ajuda a compreender a *-álgebra¹ $C_c(R)$ como veremos no exemplo a seguir.

¹A demonstração de que $C_c(R)$ é uma *-álgebra encontra-se em (BEUTER, 2011, página 41)

Exemplo 22. Considere o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação de equivalência R gerada por $\{(1, 2), (3, 4), (4, 5)\}$, isto é,

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), \\ (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ e considere a matriz

$$M(f) = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f(2,1) & f(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(3,3) & f(3,4) & f(3,5) & 0 \\ 0 & 0 & f(4,3) & f(4,4) & f(4,5) & 0 \\ 0 & 0 & f(5,3) & f(5,4) & f(5,5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(6,6) \end{pmatrix}.$$

Como a imagem de f é finita então o suporte de f é compacto e, portanto, $f \in C_c(R)$. Vamos mostrar que a função $f \mapsto M(f)$ é um *-isomorfismo entre as *-álgebras $C_c(R)$ e $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$.

Antes de demonstrar o exemplo acima, note que podemos identificar o conjunto $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ com o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Segue do Exemplo 15 e da Proposição 16 que $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ é uma *-álgebra.

Demonstração. Injetividade: Sejam $f, g \in C_c(R)$ com $f \neq g$, então existe $(i, j) \in R$ tal que $f(i, j) \neq g(i, j)$. É fácil ver que a matriz de f diferirá da matriz de g na linha i e coluna j .

Sobrejetividade: Seja

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$$

e considere a função $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(i, j) = a_{ij}$. É fácil ver que a matriz de f é exatamente a matriz exibida acima.

Linearidade: Segue imediatamente da definição de soma de funções e das operações de matrizes.

Morfismo de *-álgebras: Basta notar que se $A = [a_{ij}]_{6 \times 6}$ e $B = [b_{ij}]_{6 \times 6}$ são matrizes então $A^* = [\overline{a_{ji}}]$ e $AB = [\sum_{k=1}^6 a_{ik}b_{kj}]$.

Por outro lado, definindo $f(i, j) = 0 = g(i, j)$ quando $(i, j) \notin R$ podemos concluir das definições de involução e produto em $C_c(R)$ que $M(f^*) = [f^*(i, j)] = [\overline{f(j, i)}] = M(f)^*$ e $M(fg) = [fg(i, j)] = [\sum_{k=1}^6 f(i, k)g(k, j)] = [f(i, j)][g(i, j)] = M(f)M(g)$.

Fica provado que a função $f \mapsto M(f)$ é um *-isomorfismo entre as *-álgebras $C_c(R)$ e $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. \square

É fácil generalizar o exemplo acima para o caso em que X é um conjunto finito e R é uma relação de equivalência qualquer de X . Como X é finito então as classes de equivalência também são finitas. Sejam $[x_1] = \dots = [x_n]$ as classes de equivalência. O conjunto $C_c(R)$ será isomorfo a $M_{\#[x_1]}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{\#[x_n]}(\mathbb{C})$.

Agora nos resta definir uma norma para $C_c(R)$ a fim de torná-lo uma C^* -álgebra. Para tal, considere as seguintes definições.

Definição 23. Seja R uma relação de equivalência num conjunto X . Dado $x \in X$ definimos o espaço de Hilbert $l^2([x])$ como

$$l^2([x]) = \{z : [x] \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{i \in [x]} |z(i)|^2 < \infty\}.$$

É comum denotarmos $z(i)$ por z_i . O produto interno utilizado em $l^2([x])$ é o produto interno canônico, isto é,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i \in [x]} z_i \overline{w_i}.$$

Definição 24. Seja R uma relação de equivalência étale num conjunto X . Dado $x \in X$ definimos a *representação reduzida* $\pi_x : C_c(R) \rightarrow B(l^2[x])$ por

$$\pi_x(f)z(i) = \sum_{j \in [x]} f(i, j)z_j.$$

Note que, pelo Lema 19, a fórmula que define a representação reduzida está bem definida. O nome representação se dá pelo fato de π_x ser um *-homomorfismo. Isto será demonstrado em breve. Antes, vamos compreender melhor a definição de representação reduzida.

Considere o Exemplo 22. Naquele exemplo, tínhamos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação de equivalência R gerada por $\{(1, 2), (3, 4), (4, 5)\}$.

Fixemos $x \in X$, digamos, o número 1. Então $[1] = \{1, 2\}$ e $l^2(\{1, 2\})$ é o conjunto de todas as funções $z : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ que são quadrado somáveis. Ora, qualquer função com domínio finito é quadrado somável. Assim, $l^2(\{1, 2\}) = \mathcal{F}(\{1, 2\}, \mathbb{C}) \sim \mathbb{C}^2$. Segue que $B(l^2[1]) = B(\mathbb{C}^2)$

Vamos analisar a função $\pi_1 : C_c(R) \rightarrow B(\mathbb{C}^2)$. Por definição, $\pi_1(f) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é dado por

$$(\pi_1(f))(z_1, z_2) = (f(1, 1)z_1 + f(1, 2)z_2, f(2, 1)z_1 + f(2, 2)z_2).$$

Se escrevermos em forma de vetor coluna:

$$(\pi_1(f))(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} f(1, 1)z_1 + f(1, 2)z_2 \\ f(2, 1)z_1 + f(2, 2)z_2 \end{pmatrix}.$$

Isto pode ser interpretado como um produto de matrizes:

$$(\pi_1(f))(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} f(1, 1) & f(1, 2) \\ f(2, 1) & f(2, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Então podemos interpretar $\pi_1(f)$ como sendo a matriz de f restrito aos pares (i, j) onde $i, j \in [1]$. Mais geralmente, se X é finito e R é relação de equivalência qualquer então o operador $\pi_x(f)$ é a matriz de f restrito aos pares (i, j) onde $i, j \in [x]$. Este operador atua em $\mathbb{C}^{\#[x]}$.

Proposição 25. *A função $\pi_x : C_c(R) \rightarrow B(l^2[x])$ é um *-homomorfismo.*

Demonstração. É fácil ver que $\pi_x(f+g) = \pi_x(f) + \pi_x(g)$ e que $\pi_x(\lambda f) = \lambda \pi_x(f)$, falta mostrar que $\pi_x(fg) = \pi_x(f)\pi_x(g)$ e que $\pi_x(f^*) = \pi_x(f)^*$.

Sejam $f, g \in C_c(R)$ e note que, dados $z \in l^2[x]$ e $i \in [x]$ temos

$$\begin{aligned} \pi_x(fg)z(i) &= \sum_{j \in [x]} fg(i, j)z_j = \\ &= \sum_{j \in [x]} \sum_{k \in [x]} f(i, k)g(k, j)z_j = \\ &= \sum_{k \in [x]} \sum_{j \in [x]} f(i, k)g(k, j)z_j. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \pi_x(f)\pi_x(g)z(i) &= \sum_{k \in [x]} f(i, k)\pi_x(g)z_k = \\
 &= \sum_{k \in [x]} f(i, k) \sum_{j \in [x]} g(k, j)z_j = \\
 &= \sum_{k \in [x]} \sum_{j \in [x]} f(i, k)g(k, j)z_j.
 \end{aligned}$$

Logo $\pi_x(fg)z(i) = \pi_x(f)\pi_x(g)z(i)$ para todo $z \in l^2[x]$ e para todo $i \in [x]$. Portanto $\pi_x(fg) = \pi_x(f)\pi_x(g)$.

Mostremos agora que $\pi_x(f^*) = \pi_x(f)^*$ usando o produto interno de $l^2[x]$, isto é, que $\langle \pi_x(f)u, v \rangle = \langle u, \pi_x(f^*)v \rangle$.

$$\begin{aligned}
 \langle u, \pi_x(f^*)v \rangle &= \sum_{i \in [x]} u_i \overline{\pi_x(f^*)v(i)} = \\
 &= \sum_{i \in [x]} u_i \overline{\sum_{j \in [x]} f^*(i, j)v_j} = \\
 &= \sum_{i \in [x]} u_i \sum_{j \in [x]} \overline{f^*(i, j)v_j} = \\
 &= \sum_{i \in [x]} u_i \sum_{j \in [x]} f(j, i)\overline{v_j} = \\
 &= \sum_{i \in [x]} \sum_{j \in [x]} u_i f(j, i)\overline{v_j} = \\
 &= \sum_{i \in [x]} \sum_{j \in [x]} f(j, i)u_i\overline{v_j} = \\
 &= \sum_{j \in [x]} \sum_{i \in [x]} f(j, i)u_i\overline{v_j} = \\
 &= \sum_{j \in [x]} \left(\sum_{i \in [x]} f(j, i)u_i \right) \overline{v_j} = \\
 &= \sum_{j \in [x]} \pi_x(f)u(j)\overline{v_j} = \\
 &= \langle \pi_x(f)u, v \rangle
 \end{aligned}$$

□

Estamos a caminho de definir uma norma para $C_c(R)$, mas antes precisamos de uns números auxiliares. Se $f \in C_c(R)$ então

$$\begin{aligned} \|f\|_r &:= \sup_{x \in X} \sum_{y \in [x]} |f(x, y)|; \\ \|f\|_s &:= \sup_{y \in X} \sum_{x \in [y]} |f(x, y)|; \\ \|f\|_* &:= \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}. \end{aligned}$$

Proposição 26. Para todo $x \in X$ tem-se $\|\pi_x(f)\|_B \leq \|f\|_*$

Demonstração. Sejam $f \in C_c(R)$ e $u, v \in \ell^2[x]$, então

$$\begin{aligned} |\langle \pi_x(f)u, v \rangle| &= \left| \sum_{i \in [x]} \pi_x(f)u(i)\bar{v}_i \right| = \\ &= \left| \sum_{i \in [x]} \sum_{j \in [x]} f(i, j)u_j\bar{v}_i \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i \in [x]} \sum_{j \in [x]} \|f\|_* u_j\bar{v}_i \right| = \\ &= \|f\|_* \left| \sum_{i \in [x]} \sum_{j \in [x]} u_j\bar{v}_i \right| \leq \\ &\leq \|f\|_* \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

O último passo provém da desigualdade de Cauchy-Schwarz. □

A proposição anterior nos garantirá a existência do supremo a seguir.

Definição 27. A norma reduzida de $C_c(R)$ é definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \{\|\pi_x(f)\|_B\}$$

Definição 28. A C^* -álgebra reduzida de uma relação de equivalência étale é o completamento de $C_c(R)$ na métrica induzida pela norma reduzida. Este conjunto é denotado por $C_r^*(R)$.

2 LADRILHAMENTOS

Neste capítulo veremos os conceitos em torno do estudo de ladrilhamentos. Estes conceitos serão baseados em diversas referências, mas primariamente será considerado o artigo (ANDERSON; PUTNAM, 1998).

Definição 29. Um *ladrilho* é um subconjunto de \mathbb{R}^d homeomorfo a uma bola fechada em \mathbb{R}^d . Um *ladrilhamento parcial* é uma coleção de ladrilhos em \mathbb{R}^d com interiores dois-a-dois disjuntos, e seu *suporte* é a união de seus ladrilhos. Um *ladrilhamento* é um ladrilhamento parcial cujo suporte é \mathbb{R}^d .

Proposição 30. *A quantidade de ladrilhos em um ladrilhamento é enumerável.*

Demonstração. Seja T um ladrilhamento e considere, para cada ladrilho $t \in T$, um ponto $x(t) \in \mathbb{R}^d$ em seu interior¹. Pela definição de ponto interior existe uma bola aberta centrada em x_t inteiramente contida em t . Como \mathbb{Q}^d é denso em \mathbb{R}^d então esta bola aberta contém um elemento $q_t \in \mathbb{Q}^d$. Pelo axioma da escolha podemos definir uma função $f : T \rightarrow \mathbb{Q}^d$ dada por $f(t) = q_t$. Esta função é claramente injetora pois as bolas estão inteiramente contidas em cada ladrilho. Como \mathbb{Q}^d é enumerável então T também o é. \square

Definimos expansões e translações de um ladrilhamento parcial T da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lambda T &= \{\lambda t \mid t \in T\} && \text{para } \lambda \in \mathbb{R}^+; \\ T + u &= \{t + u \mid t \in T\} && \text{para } u \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Um ladrilhamento parcial finito é chamado de *padrão*.

2.1 LADRILHAMENTOS DE SUBSTITUIÇÃO

Nesta seção vamos construir uma coleção de ladrilhamentos a partir de uma regra de substituição.

Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto finito de ladrilhos, os quais serão denominados *protoladrilhos*. Seja $\hat{\Omega}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos parciais que contém somente translações desses protola-

¹Existe pois todo ladrilho é homeomorfo a uma bola fechada, o qual tem interior não-vazio.

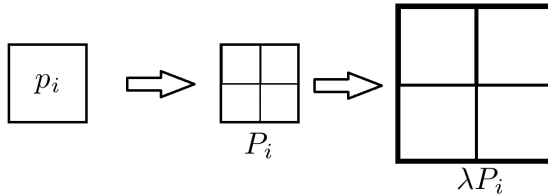


Figura 1: Esquema representando uma possível regra de substituição para um protoladrilho quadrado de \mathbb{R}^2 .

drilhos, isto é, para todo ladrilho t existe um vetor $u \in \mathbb{R}^d$ tal que $t = p_i + u$ para algum protoladrilho p_i .

Vamos assumir que existe uma constante de inflação $\lambda > 1$ e uma regra de substituição que associa a cada protoladrilho p_i um ladrilhamento parcial P_i com suporte em p_i tal que λP_i pertence à $\hat{\Omega}$ (veja figura 1). A operação descrita acima corresponde a uma função $w : \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \hat{\Omega}$. Note que podemos estender a regra de substituição w a qualquer ladrilho de um ladrilhamento parcial de $\hat{\Omega}$ considerando a função $\omega : \bigcup_{T \in \hat{\Omega}} T \rightarrow \hat{\Omega}$ que atua da seguinte forma:

$$\omega(t) = \omega(p_i + u) := w(p_i) + \lambda u.$$

Uma *substituição* $\hat{\omega} : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ é definido por $\hat{\omega}(T) = \bigcup_{t \in T} \omega(t)$. Isto é, uma função que toma um ladrilhamento parcial e aplica a regra de substituição em todos os ladrilhos.

Um ladrilhamento de substituição é um ladrilhamento no qual todo padrão está contido em uma iteração da substituição de algum ladrilho. Em outras palavras, um ladrilhamento de substituição é um ladrilhamento com a seguinte propriedade:

Para todo padrão P existe uma iteração $n \in \mathbb{N}$ e um ladrilho $t \in T$ tal que $P \subset \omega^n(t)$.

Vamos construir um ladrilhamento de substituição a partir de um conjunto finito de protoladrilhos e de uma regra de substituição.

Lema 31. *Seja t um ladrilho, então existe uma iteração k tal que $\omega^k(t)$ contenha um ladrilho que não intercepta a fronteira de $\lambda^k t$.*

Demonstração. Seja B uma bola aberta contida em t (existe pois t é homeomorfo a uma bola) e considere d seu diâmetro. Segue da definição

de substituição que λB está contido no suporte de $\omega(t)$. De fato para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $\lambda^n B$ está contido no suporte de $\omega^n(t)$. Como $\lambda > 1$ então a sequência dos números reais $\{\lambda^n d\}_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente.

Como a quantidade de protoladrilhos é finita então os diâmetros de todos os protoladrilhos são limitados. Seja p o maior diâmetro entre todos os protoladrilhos. Como $\{\lambda^n d\}_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^k d > 2p$. Segue que $\omega^k(t)$ contém uma bola cujo diâmetro é maior que o dobro de todos os protoladrilhos. Logo existe um ladrilho contido nesta bola e, portanto, que não intercepta a fronteira de $\lambda^k t$. \square

Lema 32. *Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de protoladrilhos, então existe um protoladrilho p_i e um número natural k tal que $\omega^k(p_i)$ contém uma translação de p_i que não intercepta a fronteira de $\lambda^k p_i$.*

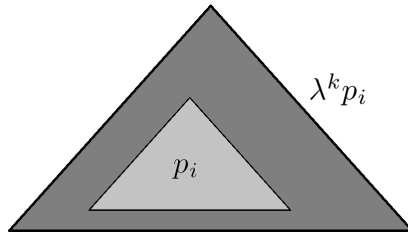


Figura 2: Na figura, uma cópia do protoladrilho “dentro” do ladrilhamento parcial maior.

Demonstração. Tome p_1 e escolha, pelo lema anterior, k_1 tal que $\omega^{k_1}(p_1)$ contenha um ladrilho que não intercepta a fronteira de $\lambda^{k_1} p_1$. Seja t_1 este ladrilho. Se t_1 é uma translação de p_1 então o resultado segue bastando tomar $k = k_1$.

Caso contrário suponha, sem perda de generalidade, que t_1 é translação de p_2 . Então itere novamente ω até que $\omega^{k_1+k_2}(p_1)$ contenha um ladrilho que não intercepta a fronteira de $\lambda^{k_1+k_2} p_1$. Seja t_2 este ladrilho e considere os seguintes casos:

- Se t_2 é uma translação de p_1 então o resultado segue bastando tomar $k = k_1 + k_2$.
- Se t_2 é uma translação de p_2 então o resultado segue bastando tomar $k = k_2$ e notar que

$$\omega^{k_2}(t_1) = \omega^{k_2}(p_2 + v) = \omega^{k_2}(p_2) + \lambda^{k_2} v.$$

Ou seja, $\omega^{k_2}(t_1) - \lambda^{k_2}v = \omega^{k_2}(p_2)$. Como t_2 não intercepta a fronteira de $\omega^{k_2}(t_1)$ então $t_2 - \lambda^{k_2}v$ não intercepta a fronteira de $\omega^{k_2}(t_1) - \lambda^{k_2}v = \omega^{k_2}(p_2)$. Como t_2 é translação de p_2 então $t_2 - \lambda^{k_2}v$ também o é. Segue que existe uma translação de p_2 que não intercepta a fronteira de $\omega^{k_2}(p_2)$.

- Se t_2 não é translação de p_1 nem de p_2 , suponha sem perda de generalidade que t_2 é translação de p_3 e repita o procedimento.

Este processo não pode se repetir indefinidamente pois a quantidade de protoladrilhos é finita. Portanto existe um protoladrilho p_i e uma iteração k tal que uma translação de p_i não intercepta a fronteira de $\lambda^k p_i$. \square

Lema 33. *Nas condições do lema anterior existe k inteiro e um ladrilho t tal que $t \in \omega^k(t)$.*

Demonstração. Nas condições do lema anterior existe um protoladrilho p_i e uma iteração k tal que o ladrilhamento parcial $\omega^k(p_i)$ contém uma translação de p_i que não intercepta a fronteira de $\lambda^k p_i$. Seja t_i este ladrilho, isto é, $t_i = p_i + v$, com $v \in \mathbb{R}^d$, e considere o vetor

$$u = \frac{v}{1 - \lambda^k}. \quad (2.1)$$

Primeiramente lembre que $\omega^k(p_i + u) = \omega^k(p_i) + \lambda^k u$. Mas $p_i + v \in \omega^k(p_i)$, então $p_i + v + \lambda^k u \in \omega^k(p_i + u)$. Somando e substraindo u temos que

$$p_i + u + (v - u + \lambda^k u) \in \omega^k(p_i + u). \quad (2.2)$$

Da equação 2.1 temos que $u(1 - \lambda^k) = v$, ou seja, $u - \lambda^k u = v$. Segue que $\lambda^k u - u = -v$. Portanto

$$v - u + \lambda^k u = 0. \quad (2.3)$$

Substituindo 2.3 em 2.2, temos que

$$p_i + u \in \hat{\omega}^k(\{p_i + u\}).$$

O ladrilho $t = p_i + u$ é o ladrilho procurado. \square

Teorema 34. *Existe um ladrilhamento de substituição.*

Demonstração. Construiremos um ladrilhamento de substituição a partir do ladrilho entregue pelo lema anterior. De fato, seja k inteiro e um

ladrilho t tal que $t \in \omega^k(t)$, então $\{t\} \subset \omega^k(t)$. Portanto $\omega^k(t) \subset \omega^{2k}(t)$. Logo $\{t\} \subset \omega^k(t) \subset \omega^{2k}(t)$. Por indução segue que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\{t\} \subset \omega^k(t) \subset \omega^{2k}(t) \subset \dots \subset \omega^{ik}(t).$$

Dessa forma a sequência de ladrilhos $\{\omega^{ik}(t)\}$ é tal que seus suportes formam uma sequência crescente de conjuntos em \mathbb{R}^d cuja união é \mathbb{R}^d (isso porque a constante de inflação λ é maior que 1). Portanto

$$\hat{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^{ik}(t)$$

é um ladrilhamento de substituição. \square

Denotaremos por $\Omega := \Omega(\{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \omega)$ o conjunto de todos ladrilhamentos de substituição associados ao conjunto de protoladrilhos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e à regra de substituição fixados.

2.2 TOPOLOGIA DOS LADRILHAMENTOS

Nesta seção definiremos uma métrica para Ω . Nesta métrica, dois ladrilhamentos estão próximos quando eles coincidem em uma grande bola centrada na origem a menos de uma pequena translação.

Sejam $u \in \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^d$ e $T \in \Omega$, definimos

$$T(u) := \{t \in T \mid u \in t\}, \quad T(U) := \bigcup_{u \in U} T(u).$$

Note que $T(u)$ é unitário se $u \in \text{Int}(t)$ e finito se $u \in \partial t$.

Dizemos que dois ladrilhamentos T e T' coincidem em U se $T(U) = T'(U)$.

Vamos ver como esses conjuntos se comportam com relação à translação de um ladrilhamento.

Proposição 35. *Se T é um ladrilhamento e v é um vetor de \mathbb{R}^d então para todo $u \in \mathbb{R}^d$ vale que $(T + v)(u) = T(u - v) + v$.*

Demonstração. Segue de

$$\begin{aligned} t \in (T + v)(u) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \in T + v \text{ e } u \in t \Leftrightarrow t - v \in T \text{ e } u - v \in t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t - v) \in T(u - v) \Leftrightarrow t \in T(u - v) + v. \end{aligned}$$

□

Obviamente podemos estender a proposição acima para subconjuntos U de \mathbb{R}^d , isto é, se T é um ladrilhamento e v é um vetor de \mathbb{R}^d então para todo $U \subset \mathbb{R}^d$ vale que $(T + v)(U) = T(U - v) + v$.

Agora vamos definir uma função que servirá como métrica para o conjunto dos ladrilhamentos de substituição. Sejam $T, T' \in \Omega$ e considere

$$d(T, T') = \inf\{1, \varepsilon \mid \text{existem } u, v \in \mathbb{R}^d \text{ com } \|u\|, \|v\| < \varepsilon \text{ tais} \\ \text{que } T + u \text{ e } T' + v \text{ coincidem em } B_{1/\varepsilon}(0).\}$$

Aqui, $\|\cdot\|$ é a norma usual de \mathbb{R}^d e $B_r(x)$ é a bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^d$ e raio r .

Para provar que d é uma métrica, precisamos do seguinte lema.

Lema 36. *Se a e b são números positivos tais que $a + b \leq 1$ então*

$$\frac{1 - ab}{a} \geq \frac{1}{a + b}.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} 1 - a(a + b) &\geq 0 \\ 1 - a^2 - ab &\geq 0 \\ b - a^2b - ab^2 &\geq 0 \\ a + b - a^2b - ab^2 &\geq 0 + a \\ (a + b)(1 - ab) &\geq a \\ \frac{1 - ab}{a} &\geq \frac{1}{a + b}. \end{aligned}$$

□

Proposição 37. *d é uma métrica.*

Demonstração. Obviamente $d(T, T') \geq 0$ pois $d(T, T')$ é o ínfimo de números positivos.

Também é fácil ver que $d(T, T) = 0$ pois T coincide consigo para qualquer bola centrada na origem.

Reciprocamente, se $d(T, T') = 0$ então para todo $\varepsilon > 0$ existem vetores $u, v \in \mathbb{R}^d$ com $\|u\|, \|v\| < \varepsilon$ tais que $T + u$ coincide com $T + v$ na bola $B_{1/\varepsilon}(0)$.

Escolha, para cada $n \in \mathbb{N}$, valores ε_n da forma $1/n$. Então existem vetores u_n e v_n em \mathbb{R}^d com $\|u_n\|, \|v_n\| < 1/n$ tais que $T + u_n$ coincide com $T + v_n$ na bola $B_n(0)$. Isto significa que para bolas arbitrariamente grandes, o ladrilhamento T' se distingue de T apenas por um vetor desprezível. Conclui-se que $T = T'$ em \mathbb{R}^d .

Falta mostrar a desigualdade triangular. Para tal, sejam T, T', S ladrilhamentos e mostremos que para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que

$$d(T, T') \leq d(T, S) + d(S, T') + \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Se $d(T, S) + d(S, T') + \varepsilon \geq 1$ então a desigualdade vale pois $d \leq 1$. Suponha, portanto, que $d(T, S) + d(S, T') + \varepsilon < 1$.

Seja $\delta_1 = d(T, S) + \frac{\varepsilon}{2}$, então $d(T, S) < \delta_1 < 1$. Pela definição de $d(T, S)$ existem vetores $u, v \in \mathbb{R}^d$ com $\|u\|, \|v\| < \delta_1$ tais que $T + u$ coincide com $S + v$ na bola $B_{1/\delta_1}(0)$.

Analogamente, se $\delta_2 = d(S, T') + \frac{\varepsilon}{2}$ então $d(S, T') < \delta_2 < 1$ e existem vetores $u', v' \in \mathbb{R}^d$ com $\|u'\|, \|v'\| < \delta_2$ tais que $S + u'$ coincide com $T' + v'$ na bola $B_{1/\delta_2}(0)$.

Como $T + u$ coincide com $S + v$ na bola $B_{1/\delta_1}(0)$ então $T + u + u'$ coincide com $S + v + u'$ na bola $B_{1/\delta_1}(u') =: B_1$.

Da mesma forma, $S + u' + v$ coincide com $T' + v' + v$ na bola $B_{1/\delta_2}(v) =: B_2$.

Como os centros u' e v têm norma menor que 1 e os raios δ_1 e δ_2 são ambos maiores que 1 então as bolas B_1 e B_2 contêm a origem (e portanto tem interseção não-vazia). Note que nesta interseção os ladrilhamentos $T + u + u'$ e $T' + v + v'$ coincidem. Seja $\delta = \delta_1 + \delta_2 = d(T, S) + d(S, T') + \varepsilon$. Se mostrarmos que $\|u + u'\|, \|v + v'\| < \delta$ e que $B_{1/\delta}(0) \subset B_1 \cap B_2$ então pela definição de $d(T, T')$ temos que $d(T, T') \leq \delta = d(T, S) + d(S, T') + \varepsilon$, que é o que queremos demonstrar.

De fato, $\|u + u'\| \leq \|u\| + \|u'\| < \delta_1 + \delta_2 = \delta$. O mesmo vale para $\|v + v'\|$. Falta mostrar que $B_{1/\delta}(0) \subset B_1 \cap B_2$.

Primeiramente note que se $y \in \mathbb{R}^d$ é tal que $\|y\| < r - \|x\|$ então $y \in B_r(x)$. Com isto concluímos que se $y \in \mathbb{R}^d$ é tal que $\|y\| < \frac{1}{\delta_1} - \|u'\|$ então $y \in B_{1/\delta_1}(u') = B_1$. Mas note que

$$\frac{1}{\delta_1} - \|u'\| \geq \frac{1}{\delta_1} - \delta_2 = \frac{1 - \delta_1\delta_2}{\delta_1}.$$

Pelo lema,

$$\frac{1 - \delta_1\delta_2}{\delta_1} \geq \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{1}{\delta}.$$

Portanto, se $y \in \mathbb{R}^d$ é tal que $\|y\| < \frac{1}{\delta}$ então $\|y\| < \frac{1}{\delta_1} - \|u'\|$. Em outras palavras, $B_{1/\delta}(0) \subset B_1$.

De forma análoga se conclui que se $B_{1/\delta}(0) \subset B_2$. Logo $B_{1/\delta}(0) \subset B_1 \cap B_2$. \square

Neste texto, quando nos referirmos à topologia de Ω (ou qualquer subconjunto de Ω) estaremos nos referindo à topologia relativa à métrica d , isto é, a topologia gerada pelas bolas abertas (na métrica d).

Note que se T é um ladrilhamento de substituição e $x \in \mathbb{R}^d$ então $T + x$ também o é. Isto significa que o conjunto dos ladrilhamentos de substituição é invariante por translação. Assim tem-se que $T + \mathbb{R}^d := \{T + x \mid x \in \mathbb{R}^d\}$ é um subconjunto de Ω .

Definimos Ω_T como sendo o completamento do conjunto $T + \mathbb{R}^d$ através da métrica d . Este conjunto coincide com o conjunto Ω (ANDERSON; PUTNAM, 1998, Corolário 3.5). Isto é, todo ladrilhamento de substituição em Ω pode ser aproximado por translações de um dado ladrilhamento $T \in \Omega$.

Definição 38. Um ladrilhamento $T \in \Omega$ é dito ser *periódico* se existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $T = T + x$.

Em outras palavras, um ladrilhamento é periódico se admite uma simetria de translação.

O teorema seguinte mostra que regras de substituição que admitem ladrilhamentos periódicos não são invertíveis, por exemplo, a regra do quadrado exibida na figura 1 não é invertível.

Teorema 39. *Se $\hat{\omega}$ é invertível, então Ω não admite ladrilhamentos periódicos.*

Demonstração. Mostremos que $T \neq T + v$ para todo $T \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^d$.

Como o conjunto dos protoladrilhos é finito, podemos tomar p o protoladrilho com menor diâmetro e, dado $v \in \mathbb{R}^d$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{-n}\|v\| < \text{diam}(p)$ (existe pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n}\|v\| = 0$).

Dado $T \in \Omega$, como ω é bijetiva, temos que $\omega^{-n}(T)$ é um ladrilhamento de Ω . Para todo $t \in \omega^{-n}(T)$ temos $\text{Int}(t) \cap \text{Int}(t + \lambda^{-n}v) \neq \emptyset$, o que, juntamente com fato de que os ladrilhos são limitados, significa que nenhum ladrilho de $\omega^{-n}(T)$ coincide com algum ladrilho de $\omega^{-n}(T) + \lambda^{-n}v$. Portanto $\omega^{-n}(T) \neq \omega^{-n}(T) + \lambda^{-n}v$ e logo $T \neq T + v$. \square

Assumiremos no restante do trabalho três condições sobre a regra de substituição, as quais são satisfeitas pela maioria dos exemplos interessantes:

1. ω é bijetiva, uma vez que precisaremos de uma inversa para ω .
2. A substituição é *primitiva*, isto é, existe uma iteração $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo ladrilho t , o conjunto $\omega^n(t)$ contém uma cópia de todos os protoladrilhos. Isto é necessário para que ω seja topologicamente mixing (ANDERSON; PUTNAM, 1998, Proposição 3.1), isto é, para todo par de abertos $U, V \subset \Omega$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\omega^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > N$. Isto não será demonstrado pois foge do escopo do trabalho.
3. Todos os ladrilhamentos de Ω tem *complexidade local finita*, isto é, para todo $r > 0$ existe uma quantidade finita de padrões, a menos de translação, cujo suporte tem diâmetro menor do que r . Esta condição implica na compacidade de Ω conforme veremos a seguir (Teorema 41).

Ademais, por simplicidade de notação, iremos deixar de distinguir entre ω e $\hat{\omega}$. Tal abuso de notação é justificado, uma vez que a atuação de ambas funções é intuitivamente a mesma.

Proposição 40. *A função $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$ é uma função bicontínua.*

Demonstração. Basta mostrar que

$$\begin{aligned} d(\omega(T), \omega(T')) &\leq \lambda d(T, T'); \\ d(\omega^{-1}(T), \omega^{-1}(T')) &\leq \lambda d(T, T'). \end{aligned}$$

A primeira desigualdade será demonstrada usando o seguinte fato:

Se T e T' coincidem em uma bola de centro zero e raio r então $\omega(T)$ e $\omega(T')$ coincidem na bola de centro zero e raio λr .

Considerando isto, sejam T, T' ladrilhamentos em Ω e considere $u, u' \in \mathbb{R}^d$ tais que $\|u\|, \|u'\| \leq d$ e $T - u = T' - u'$ em $B_{1/d}(0)$ (ou seja, $d(T, T') \leq d$). O objetivo é mostrar que $d(\omega(T), \omega(T')) \leq \lambda d$.

Como $T - u$ e $T' - u'$ coincidem na bola de centro zero e raio $1/d$ então usando o fato acima temos que $\omega(T) - \lambda u$ e $\omega(T') - \lambda u'$ coincidem na bola de centro zero e raio λ/d .

Como $\lambda > 1$ então $\lambda/d > 1/(\lambda d)$. Segue que $B_{\lambda/d} \supset B_{1/(\lambda d)}$ e, portanto, $\omega(T) - \lambda u = \omega(T') - \lambda u'$ em $B_{1/(\lambda d)}$.

Note que $\|\lambda u\| = \lambda \|u\| \leq \lambda d$ (pois $\lambda > 1 > 0$) e, analogamente, $\|\lambda u'\| \leq \lambda d$. Logo

$$d(\omega(T), \omega(T')) \leq \lambda d(T, T').$$

A segunda desigualdade será demonstradas usando o seguinte fato:

$$\text{Se } T' = T + x \text{ então } \omega^{-1}(T') = \omega^{-1}(T) + \lambda^{-1}x.$$

Considerando isto, sejam T, T' ladrilhamentos tais que $T' = T + x$ com $\|x\| \leq d$ (isto é, $d(T, T') \leq d$). Pelo fato acima temos que $\omega^{-1}(T') = \omega^{-1}(T) + \lambda^{-1}x$. E como $\lambda > 1$ então $\lambda^{-1} < 1 < \lambda$. Segue que

$$\|\lambda^{-1}x\| = \lambda^{-1}\|x\| \leq \lambda^{-1}d < \lambda d.$$

Donde segue que

$$d(\omega^{-1}(T), \omega^{-1}(T')) \leq \lambda d(T, T').$$

□

Teorema 41. Ω é compacto.

Esta demonstração usa o método da diagonal de Cantor e ela será esboçada a seguir.

Seja $\{T_n\}_n$ uma sequência de ladrilhamentos em Ω . A ideia é forçar os ladrilhamentos a coincidirem por perturbações cada vez menores mas em padrões cada vez maiores. Pela hipótese da complexidade local finita a bola $B_1(0)$ possui uma quantidade finita de padrões a menos de translação.

Portanto os elementos da sequência também tem estes “tipos” de padrões na bola $B_1(0)$. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos um destes “tipos” de padrões na bola $B_1(0)$ aparecerá infinitamente na sequência. Isto é, podemos extrair uma subsequência de $\{T_n\}_n$, denotada por $\{T_n^1\}_n$, com a seguinte propriedade:

Para todo $n \geq 1$, T_n^1 coincide com $T_n + v_n$ na bola $B_1(0)$ para algum vetor $v_n \in \mathbb{R}^d$.

Note que $\{\|v_n\|\}_n$ é uma sequência limitada pois todos os padrões repetitivos estão dentro da bola $B_1(0)$ que tem diâmetro limitado. De fato, podemos encontrar tais vetores com norma menor que 2 (diâmetro de $B_1(0)$).

Considere a bola $B_2(0)$. Novamente esta bola possui uma quantidade finita de padrões a menos de translação. De forma análoga ao parágrafo acima, existe uma subsequência de $\{T_n^1\}_n$, denominada $\{T_n^2\}_n$, tal que cada ladrilhamento T_n^2 coincide com alguma translação de T_n^1 na bola $B_2(0)$. Estas translações continuam sendo limitadas por

2, pois todos os ladrilhamentos T_n^2 são elementos da sequência $\{T_n^1\}_n$. Todavia, a bola na qual os ladrilhamentos coincidem tem raio maior, a saber, igual a 2.

Temos, portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, ladrilhamentos T_n^2 com a seguinte propriedade:

$$T_n^2 \text{ coincide com } T_n^1 + v_n \text{ na bola } B_2(0) \text{ para algum vetor } v_n \in \mathbb{R}^d \text{ com } \|v_n\| < 2.$$

Como $B_2(0) = B_{1/\frac{1}{2}}(0)$ então $d(T_n^2, T_n^1) < 1/2$

Por indução, teremos sequências $\{T_n^k\}_k$ em que, para cada $k > 2$, os ladrilhamentos $\{T_n^k\}_n$ coincidem com T_n^{k-1} na bola $B_k(0) = B_{1/\frac{1}{k}}(0)$ a menos de uma translação menor que $2 < k$. Logo $d(T_n^k, T_n^{k-1}) < 1/k$.

Escolha, portanto, a subsequência de $\{T_n\}_n$ dada por $\{T_n^n\}_n$ e mostremos que ela é convergente. Seja $\varepsilon > 0$ e considere $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$. Como $d(T_N^N, T_N^{N-1}) < 1/N < \varepsilon$ então para todo $n > N$ temos que $d(T_n^n, T_n^{n-1}) < 1/n < 1/N < \varepsilon$. Logo a sequência $\{T_n^n\}_n$ é de Cauchy. Como Ω é completo (pois é o completamento de um conjunto) então esta subsequência é convergente.

Temos, portanto, que toda sequência de Ω tem uma subsequência convergente. Logo Ω é compacto.

2.3 C*-ÁLGEBRA ASSOCIADA A UM LADRILHAMENTO

Nesta seção veremos propriedades acerca dos ladrilhamentos a fim de construir uma C*-álgebra associada a eles.

Seja $x : \bigcup_{T \in \Omega} T \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função com as propriedades de que para todo ladrilho t e vetor v :

$$x(t) \in \int(t) \quad \text{e} \quad x(t+v) = x(t) + v.$$

Em outras palavras, a imagem de t por x é um ponto do interior de t e se um ladrilho t' é a translação de um ladrilho t (mesmo que pertencente a um ladrilhamento distinto), então a imagem de t' por x é a translação da imagem de t por x . O ponto $x(t)$ é chamado punção de t .

Seja $x(T)$ o conjunto de todas as punções de um ladrilhamento T , isto é $x(T) = \{x(t) \mid t \in T\}$. Note que este conjunto é fechado e enumerável. Fechado pois as punções são pontos isolados, uma vez que elas ficam no interior de cada ladrilho. Enumerável pois a quantidade de ladrilhos é enumerável.

Definimos

$$\Omega_p := \{T \in \Omega \mid \text{existe } t \text{ tal que } x(t) = 0\}.$$

Noutras palavras, Ω_p é o conjunto de todos os ladrilhamentos com uma punção na origem.

Note que sempre existe t tal que $\{t\} \subset T(0)$. O que a condição de igualdade diz é que $T(0)$ deve ser unitário, isto é, a origem não pode pertencer à dois ladrilhos. Ou seja, a origem é um ponto interior de algum ladrilho. Isto justifica o fato de a origem ser uma punção.

Iremos mostrar que Ω_p é homeomorfo ao conjunto de Cantor, isto é, é Hausdorff, compacto, não tem pontos isolados e sua topologia é gerada por conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados. Esta caracterização de conjuntos homeomorfos ao conjunto de Cantor é o Teorema de Brouwer. O fato de Ω_p ser Hausdorff é mencionado em (KELLENDONK; PUTNAM, 2000, Seção 5).

Proposição 42. Ω_p é compacto.

Demonstração. Como Ω_p é um subconjunto do conjunto compacto Ω então basta mostrar que Ω_p é fechado. Isto será feito mostrando que seu complementar é aberto.

Seja T um ladrilhamento que não pertence à Ω_p , isto é, a origem não é a punção de nenhum ladrilho. Como o conjunto das punções é fechado então existe uma bola em torno da origem que não intercepta nenhuma punção. Seja r o raio desta bola. Assim, se $u \in \mathbb{R}^d$ é tal que $\|u\| < r$ então $T + u$ também não contém uma punção na origem. Logo $B_r(T)$ não contém ladrilhamentos em Ω_p .

Segue que Ω_p é fechado e, portanto, é compacto. \square

Para mostrar que os abertos básicos de Ω_p são conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados precisamos do seguinte lema.

Lema 43. Existe um $R > 0$ tal que para todo ladrilhamento $T \in \Omega_p$ e para todo $v \in \mathbb{R}^d$ com $0 < |v| < R$ tem-se que $T + v \notin \Omega_p$.

Demonstração. Sejam p_1, \dots, p_n os protoladrilhos e considere suas respectivas punções $x(p_i)$. Por definição $x(p_i)$ é um ponto interior de p_i , então existe um raio $R_i > 0$ tal que $B_{R_i}(x(p_i)) \subset p_i$. Seja $R = \min\{R_1, \dots, R_n\}$.

Lembre que se t é um ladrilho então $t = p_i + u$ para algum protoladrilho p_i e algum vetor $u \in \mathbb{R}^d$. Também vale que $x(t) = x(p_i) + u$. Portanto

$$B_R(x(t)) = B_R(x(p_i) + u) = B_R(x(p_i)) + u \subset p_i + u = t. \quad (2.4)$$

Daí, dado $T \in \Omega_p$ tem-se que existe t tal que $T(0) = \{t\}$ e $x(t) = 0$. Se $v \in \mathbb{R}^d$ é tal que $0 < |v| < R$ então $v \in B_R(0) = B_R(x(t)) \subset t$ (equação 2.4). O mesmo vale para $-v$. Como toda bola aberta é um conjunto aberto então $-v$ é um ponto interior de $B_R(0)$ e, portanto, de t também. Logo $T(-v) = \{t\}$.

Lembre que $(T + v)(0) = T(-v) + v$. De onde se conclui que $(T + v)(0) = \{t\} + v$. Vamos mostrar que $x(t + v) \neq 0$ e aí temos que $T + v \notin \Omega_p$. De fato, $x(t + v) = x(t) + v = v \neq 0$ como queríamos demonstrar. \square

Note que se R é o raio do lema então para todo r com $0 < r < R$ vale também a mesma tese.

A seguir vamos mostrar que a topologia de Ω_p é gerada por conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados. Para isto vamos definir uma coleção de conjuntos, os quais serão geradores da topologia de Ω_p .

Sejam $T \in \Omega_p$, P um padrão em T e $t \in P$. Então $P - x(t)$ é um padrão contendo uma punção na origem. Considere o conjunto de todos os ladrilhamentos em Ω_p que contém o padrão $P - x(t)$ e denote por $U(P, t)$, isto é,

$$U(P, t) = \{T' \in \Omega \mid P - x(t) \subset T'\}.$$

Note que $U(P, t) \subset \Omega_p$ pois $P - x(t)$ contém uma punção na origem (a saber, a punção do ladrilho t). Este conjunto pode ser visto como o conjunto de todos os ladrilhamentos que contém o padrão P na origem.

Seja \mathcal{U} a coleção de todos os conjuntos da forma $U(\cdot, \cdot)$.

Proposição 44. *A coleção \mathcal{U} gera a topologia de Ω_p .*

Demonstração. Como a topologia de Ω_p é gerada pelas bolas abertas, então basta mostrar que \mathcal{U} é uma base de vizinhanças para a topologia da métrica de Ω_p , isto é, valem as duas condições:

- Para toda bola aberta B contendo um elemento T existe um aberto de \mathcal{U} contendo T e contido em B , isto é,
- Para todo aberto de $U(P, t) \in \mathcal{U}$ com $T \in U(P, t)$ existe uma bola aberta B tal que $T \in B \subset U(P, t)$.

Seja R o raio do lema anterior e considere $T \in \Omega_p$. Então existe t tal que $T(0) = \{t\}$ e $x(t) = 0$. Na demonstração do lema vimos que para todo $v \in \mathbb{R}^d$ com $0 < |v| < R$ vale que $T + v$ contém uma cópia de t na origem. Mais ainda, existe um padrão P em T contendo uma cópia de t tal que $P \subset T(B_{1/R}(0))$. Então $U(P, t) \subset B_R(T)$.

Se $r > 0$ é tal que $r < R$ então o resultado segue pois r também satisfaz a tese do lema. Se $r > R$ então $U(P, t) \subset B_R(T) \subset B_r(T)$. Logo se $B_r(T)$ é uma bola aberta contendo T então existe um padrão P e um ladrilho $t \in T$ tal que $T \in U(P, t) \subset B_r(T)$

Reciprocamente, seja $U(P, t) \in \mathcal{U}$ e considere um ladrilhamento $T \in U(P, t)$. Escolhendo o raio R do lema anterior temos que $P - x(t) \cap B_{1/R}(0) = P - x(t)$. Portanto $B_R(T) \subset U(P, t)$. Logo $T \in B_R(T) \subset U(P, t)$. \square

Proposição 45. *A coleção \mathcal{U} é formada por conjuntos que são, simultaneamente, abertos e fechados.*

Demonstração. Como \mathcal{U} é uma base para a topologia da métrica de Ω_p então todos os elementos de \mathcal{U} são abertos. Mostremos que os elementos de \mathcal{U} são fechados.

Seja $U(P, t) \in \mathcal{U}$ e considere $r > 0$ tal que o suporte de $P - x(t)$ está contido na bola $B_{1/r}(0)$. Considere também R o raio do lema anterior. Seja $\varepsilon = \min\{r, R\}$ Vamos mostrar que $U(P, t)$ é fechado através de seqüências. Seja T_n uma seqüência em $U(P, t)$ convergindo a um certo $T \in \Omega_p$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ vale $d(T_n, T) < \varepsilon$. Pelo lema anterior e pela complexidade local finita temos que $T(B_{1/\varepsilon}(0)) = T_n(B_{1/\varepsilon}(0))$ para todo $n > N$. Como o suporte de $P - x(t)$ está contido em $B_{1/r}(0)$ então $T \in U(P, t)$. Logo, $U(P, t)$ é fechado. \square

Proposição 46. *(WHITTAKER, 2005, Proposição 4.6) Ω_p não tem pontos isolados.*

Demonstração. Esta demonstração não será feita aqui pois foge do escopo do trabalho. \square

Teorema 47. *Ω_p é homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

Demonstração. Segue das proposições 42, 45 e 46. \square

Vamos definir uma relação de equivalência étale para Ω_p a fim de construirmos uma C^* -álgebra. Defina

$$R_p := \{(T, T - x(t)) \mid T \in \Omega_p \text{ e } t \in T\}.$$

Note que $T - x(t) \in \Omega_p$ pois $x(t)$ é uma punção.

Note que podemos identificar R_p com $\Omega_p \times \mathbb{R}^d$ através da função

$$(T, T - x(t)) \in R_p \leftrightarrow (T, x(t)) \in \Omega_p \times \mathbb{R}^d.$$

A topologia usada em R_p é a topologia induzida por esta função considerando a topologia produto em $\Omega_p \times \mathbb{R}^d$. Isto implica que a identificação acima é um homeomorfismo.

Também significa que uma seqüência $(T_n, T_n - x(t_n))$ em R_p converge para $(T, T - x(t))$ se e somente se ambos $d(T_n, T)$ e $|x(t_n) - x(t)|$ convergem à zero. Portanto R_p é um espaço métrico com a seguinte métrica:

$$d((T, T - x(t)), (T', T' - x(t'))) = d(T, T') + |x(t) - x(t')|$$

De forma análoga ao feito anteriormente, vamos encontrar uma coleção de conjuntos que geram a topologia de R_p .

Sejam P um padrão em T e t, t' ladrilhos em P . A função

$$T \in U(P, t) \mapsto T + x(t) - x(t') \in U(P, t')$$

é um homeomorfismo, seu gráfico está contido em R_p e é denotado por $U(P, t, t')$. Consideraremos a coleção \mathcal{V} de conjuntos da forma $U(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Proposição 48. *A coleção \mathcal{V} gera a topologia de R_p .*

Demonstração. Seja $R > 0$ o raio do lema 43 e considere $(T, T - x(t)) \in R_p$.

Seja B a bola de centro $(T, T - x(t))$ e raio R e mostremos que B está contido em um conjunto de \mathcal{V} , isto é, da forma $U(\cdot, \cdot, \cdot)$. Seja $(T', T' - x(t')) \in B$, então pela definição da topologia de R_p temos que $d(T, T') < R$ e $|x(t) - x(t')| < R$. Pelo lema 43 temos que $T \cap B_{1/R}(0) = T' \cap B_{1/R}(0)$, portanto $|x(t) - x(t')| = 0$. Assim, se $P = (T \cap B_{1/R}(0)) \cup t$ e $T(0) = \{s\}$ então $T' \in U(P, s)$ e, portanto, $t = t'$. Segue que $(T', T' - x(t')) \in U(P, s, t)$, donde $B \subset U(P, s, t)$.

Por outro lado, seja $U(P, t, t') \in \mathcal{V}$ e considere $(T, T + x(t) - x(t')) \in U(P, t, t')$. Escolha o raio $R > 0$ do lema 43 e $r > 0$ tal que $(P - x(t)) \cap B_{1/r}(0) = P - x(t)$. Sendo $\varepsilon = \min\{R, r\}$ temos que a bola de centro $(T, T + x(t) - x(t'))$ e raio ε está contida em $U(P, t, t')$. Donde se conclui que as topologias geradas pelas bolas abertas e pela coleção \mathcal{V} são as mesmas. \square

Antes de mostrar que R_p é uma relação de equivalência étale vamos apresentar umas propriedades úteis com relações aos elementos de \mathcal{U} e \mathcal{V} .

Lema 49. *Seja $T \in U(P_1, t) \cap U(P_2, t')$ e considere, sem perda de generalidade, que $x(t) = x(t')$. Então $t = t'$.*

Demonstração. Seja $T \in U(P_1, t) \cap U(P_2, t')$, então $P_1 - x(t) \subset T$ e $P_2 - x(t') \subset T$. Note que ambos $P_1 - x(t)$ e $P_2 - x(t')$ contêm a origem no interior dos ladrilhos t e t' , logo $t - x(t) = t' - x(t')$ e, portanto, $t = t'$. \square

Proposição 50. *Se $U = U(P, t, t')$ então $U^{-1} = U(P, t', t)$*

Demonstração. Seja $(T', T) \in U^{-1}$, então $(T, T') \in U = U(P, t, t')$. Portanto $T \in U(P, t)$ e $T' = T + x(t) - x(t') \in U(P, t')$. Logo $T' + x(t') - x(t) = T \in U(P, t)$. Temos, portanto, que o par $(T', T' + x(t') - x(t))$ pertence à $U(P, t', t)$, isto é, $U^{-1} \subset U(P, t', t)$.

Por outro lado, se $(T', T) \in U(P, t', t)$ então $T' \in U(P, t')$ e T é da forma $T' + x(t') - x(t) \in U(P, t)$. Portanto $T + x(t) - x(t') = S$, donde $(T', T) = (T + x(t) - x(t'), T)$. Segue que

$$(T', T)^{-1} = (T, T + x(t) - x(t')) \in U(P, t, t') = U.$$

Logo $(T', T) \in U^{-1}$ e, portanto, $U(P, t', t) \subset U^{-1}$. \square

Proposição 51. *Sejam $U = U(P_1, t_1, t'_1)$, $V = U(P_2, t_2, t'_2)$ e considere, sem perda de generalidade, que $x(t'_1) = x(t_2)$. Então $t'_1 = t_2$ e*

$$UV = U(P_1 \cup P_2, t_1, t'_2).$$

Demonstração. Seja $(T, T') \in UV$, então (T, T') é da forma $(T, S)(S, T')$ com $(T, S) \in U$ e $(S, T') \in V$. Como $U = U(P_1, t_1, t'_1)$ e $V = U(P_2, t_2, t'_2)$ então

- $T \in U(P_1, t_1)$ e $S = T + x(t_1) - x(t'_1) \in U(P_1, t'_1)$;
- $S \in U(P_2, t_2)$ e $T' = S + x(t_2) - x(t'_2) \in U(P_2, t'_2)$.

Segue que $S \in U(P_1, t'_1) \cap U(P_2, t_2)$. Pelo lema 49, $t'_1 = t_2$. Portanto $T' = S + x(t_2) - x(t'_2) = T + x(t_1) - \cancel{x(t'_1)} + \cancel{x(t_2)} - x(t'_2) = T + x(t_1) - x(t'_2)$.

Logo $(T, T') = (T, T + x(t_1) - x(t'_2))$. Note que $T \in U(P_1, t_1) \subset U(P_1 \cup P_2, t_1)$. Como $T + x(t_1) - x(t'_2) \in U(P_1 \cup P_2, t'_2)$ então $(T, T') \in U(P_1 \cup P_2, t_1, t'_2)$. \square

Agora podemos demonstrar que R_p é uma relação de equivalência étale quando munido da topologia gerada por \mathcal{V} (ou, equivalentemente, da topologia induzida pela topologia produto de $\Omega_p \times x(T)$).

Proposição 52. *R_p é σ -compacto.*

Demonstração. Basta mostrar que para todo $r > 0$ o conjunto

$$K_r := \{(T, T + x(t)) \in R_p \mid \|x(t)\| \leq r\}$$

é compacto.

De fato, K_r pode ser identificado com o conjunto $\Omega_p \times (x(T) \cap B_r(0))$. É fácil ver que o conjunto $x(T) \cap B_r(0)$ é finito e, portanto, compacto. Também já vimos que o conjunto Ω_p é compacto (Teorema 42). Portanto K_r é compacto.

Ora, se K_r é compacto então $R_p = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} K_r$ é σ -compacto. □

Proposição 53. *A diagonal de Ω_p é aberta.*

Demonstração. A diagonal de Ω_p é o conjunto dos pares (T, T) com $T \in \Omega_p$, isto é,

$$\{(T, T + 0) \mid T \in \Omega_p\} \subset R_p.$$

Este conjunto pode ser identificado com o conjunto dos pares $(T, 0)$ em que $T \in \Omega_p$. Este conjunto é igual à $\Omega_p \times \{0\}$ que, por sua vez, é aberto em $R_p \cong \Omega_p \times U$ pois U é discreto. □

Proposição 54. *Se U e V são abertos então U^{-1} e UV são abertos.*

Demonstração. Segue das proposições 50 e 51. □

Proposição 55. *As funções range e source são homeomorfismos locais.*

Demonstração. Vamos demonstrar que a função range $r : R_p \rightarrow \Omega_p$ dada por $r(T, T') = T$ é um homeomorfismo local. O caso source segue de forma análoga.

Seja $(T, T') \in R_p$, então $T' = T - x(t)$ para algum $t \in T$. Considere um padrão P que contenha a origem e o ladrilho t (por exemplo, o padrão $T(B)$ em que B é uma bola de centro zero e raio suficientemente grande de forma que $B \supset \{t\}$). Considere, também, o aberto de R_p dado por $U(P, t, t')$ e mostremos que r restrito a este aberto é um homeomorfismo.

Injetividade: Sejam $(T_1, T'_1), (T_2, T'_2) \in U(P, t, t')$ tais que

$$r(T_1, T'_1) = r(T_2, T'_2),$$

então $T_1 = T_2$ e $T'_1 = T_1 + x(t) - x(t') = T_2 + x(t) - x(t') = T'_2$ e, portanto, $(T_1, T'_1) = (T_2, T'_2)$.

Sobrejetividade: Seja $T_0 \in U(P, t)$ e considere $T'_0 = T_0 + x(t) - x(t')$, então $(T_0, T'_0) \in U(P, t, t')$ e $r(T_0, T'_0) = T_0$.

Continuidade: Segue da definição da topologia de R_p . A topologia produto é a menor topologia cujas projeções são contínuas. Como range e source são projeções (quando aplicadas à relações de equivalência) então o resultado segue.

Continuidade da inversa: Sejam $(T_1, T'_1), (T_2, T'_2) \in U(P, t, t')$, então $T'_1 = T_1 + x(t) - x(t')$ e $T'_2 = T_2 + x(t) - x(t')$. Daí

$$\begin{aligned} d((T_1, T'_1), (T_2, T'_2)) &= d(T_1, T_2) + |x(t) - x(t') - (x(t) - x(t'))| = \\ &= d(T_1, T_2) + |0| = d(T_1, T_2). \end{aligned}$$

Portanto o resultado segue.

□

Teorema 56. R_p é uma relação de equivalência étale.

Demonstração. Segue das proposições 52, 53, 54 e 55.

□

3 SISTEMAS DINÂMICOS ASSOCIADOS A LADRILHAMENTOS

No capítulo anterior construímos o espaço topológico Ω dos ladrilhamentos de substituição e vimos que existe uma função ω atuando naquele espaço. Neste capítulo veremos que (Ω, ω) é um sistema dinâmico topológico e mostraremos que este sistema dinâmico é “semelhante” a um outro sistema dinâmico proveniente de um espaço com limite inverso.

3.1 SISTEMAS DINÂMICOS EM GERAL

Nesta seção estudaremos os sistemas dinâmicos e veremos o que significa dizer que dois sistemas dinâmicos são topologicamente conjugados. Estes conceitos são definidos a partir do texto (BRIN; STUCK, 2002).

Definição 57. Um *sistema dinâmico* é um par (X, f) em que X é um conjunto e $f : X \rightarrow X$ é uma função.

Se X é um espaço topológico compacto então (X, f) é denominado sistema dinâmico *topológico*.

Exemplo 58. Vimos no Teorema 41 que Ω é compacto, então (Ω, ω) é um sistema dinâmico topológico.

Definição 59. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos topológicos. Dizemos que (X, f) é *topologicamente conjugado* a (Y, g) se existe um homeomorfismo contínuo $\pi : X \rightarrow Y$ tal que $\pi f = g\pi$.

Escrevemos $(X, f) \sim (Y, g)$ para denotar que (X, f) é topologicamente conjugado a (Y, g) .

Proposição 60. *Ser topologicamente conjugado é uma relação de equivalência.*

Demonstração. **Reflexividade** Seja (X, f) um sistema dinâmico e note que se $\pi : X \rightarrow X$ é a função identidade então π é um homeomorfismo e $\pi f = f = f\pi$. Portanto $(X, f) \sim (X, f)$.

Simetria Sejam (X, f) e (Y, g) tais que $(X, f) \sim (Y, g)$, então existe um homeomorfismo $\pi : X \rightarrow Y$ tal que $\pi f = g\pi$. Note que

$\pi^{-1} : Y \rightarrow X$ também é um homeomorfismo e que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}g &= \pi^{-1}g(\pi\pi^{-1}) = \pi^{-1}(g\pi)\pi^{-1} = \\ &= \pi^{-1}(\pi f)\pi^{-1} = (\pi^{-1}\pi)f\pi^{-1} = f\pi^{-1}.\end{aligned}$$

Isto significa que $(Y, g) \sim (X, f)$.

Transitividade Sejam (X, f) , (Y, g) e (Z, h) sistemas dinâmicos tais que $(X, f) \sim (Y, g)$ e $(Y, g) \sim (Z, h)$, então existem homeomorfismos $\pi_1 : X \rightarrow Y$ e $\pi_2 : Y \rightarrow Z$ tais que $\pi_1 f = g\pi_1$ e $\pi_2 g = h\pi_2$.

Considere a função $\pi_2\pi_1 : X \rightarrow Z$. é claro que esta função é um homeomorfismo pois ela é uma composição de homeomorfismos. Note também que

$$\begin{aligned}(\pi_2\pi_1)f &= \pi_2(\pi_1 f) = \pi_2(g\pi_1) = \\ &= (\pi_2 g)\pi_1 = (h\pi_2)\pi_1 = h(\pi_2\pi_1).\end{aligned}$$

Logo $(X, f) \sim (Z, h)$. □

Podemos, pois, dizer que dois sistemas dinâmicos são topologicamente conjugados se um deles for topologicamente conjugado ao outro.

3.2 DINÂMICA SIMBÓLICA

Em alguns exemplos de ladrilhamento pode-se modelar seu estudo através da dinâmica simbólica, isto é, será atribuído símbolos aos elementos de um ladrilhamento. Isto será feito pois muitas propriedades são difíceis de se verificar quando interpretamos ladrilhos como pontos no espaço \mathbb{R}^d ou, intuitivamente, figuras geométricas.

Definição 61. Um *alfabeto* é um conjunto finito não-vazio e seus elementos são denominados *letras*.

Exemplo 62. Os exemplos mais conhecidos de alfabetos são os alfabetos utilizados para escrever. No caso lusófono o alfabeto utilizado consiste de 26 letras e é conhecido como o *alfabeto latino* ou *romano*.

Exemplo 63. Um outro exemplo de alfabeto, mais abstrato, seria o conjunto

$$\{0, 1, \alpha, \beta, x, y, \Lambda, \Delta, \cdot, \circ, \dots\}$$

Definição 64. Uma *seqüência finita* de elementos de um conjunto X é uma função $x : I_n \rightarrow X$ em que $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \geq 1$.

Denotamos uma seqüência finita por uma lista (x_1, x_2, \dots, x_n) em que $x_k = x(k)$ com $k \in I_n$.

Definição 65. Uma *palavra* de um alfabeto \mathcal{A} é uma seqüência finita de elementos de \mathcal{A} .

Exemplo 66. A seqüência finita (a, c, s, s) é uma palavra do alfabeto romano.

Normalmente denotamos uma palavra suprimindo as vírgulas e os parênteses. No exemplo acima temos, portanto, a palavra *acss*.

Definição 67. O *comprimento* de uma palavra $x : I_n \rightarrow \mathcal{A}$ é o número de elementos do conjunto I_n , isto é, n .

Utilizando a palavra do exemplo 66, temos que a palavra *acss* tem comprimento quatro. Dizemos portanto que a palavra *acss* tem quatro letras (ainda que haja repetição da letra s).

Dados dois conjuntos A e B definimos B^A como sendo o conjunto de todas as funções $f : A \rightarrow B$. No caso particular em que $A = I_n$ denotaremos $B^{I_n} := B^n$. Deste modo, o conjunto de todas as palavras com n letras de um alfabeto \mathcal{A} é denotado por \mathcal{A}^n . Por exemplo, se $\mathcal{A} = \{a, b\}$ então $\mathcal{A}^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$. Assim, o conjunto de todas as palavras de um alfabeto \mathcal{A} é o conjunto

$$\mathcal{A}^\infty := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}^i.$$

Definição 68. Uma *concatenação* é uma operação binária $\cdot : \mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty \rightarrow \mathcal{A}^\infty$ definida por

$$\cdot(x_1x_2 \dots x_n, y_1y_2 \dots y_m) = x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_m.$$

Denotaremos a concatenação de $(X, Y) \in \mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty$ por XY .

Note que a concatenação de palavras não é uma operação comutativa. De fato, se $X = ab$ e $Y = ba$ então $XY = abba$ mas $YX = baab$. Todavia esta operação é associativa. Com efeito, sejam

$X = x_1x_2 \dots x_n$, $Y = y_1y_2 \dots y_m$ e $Z = z_1z_2 \dots z_p$, então

$$\begin{aligned} (XY)Z &= (x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_m)z_1z_2 \dots z_p = \\ &= x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_mz_1z_2 \dots z_p = \\ &= x_1x_2 \dots x_n(y_1y_2 \dots y_mz_1z_2 \dots z_p) = \\ &= X(YZ). \end{aligned}$$

No momento temos que $(\mathcal{A}^\infty, \cdot)$ é um semigrupo. Vamos agora incluir um elemento neutro neste conjunto a fim de torná-lo um monóide. Seja ϵ um elemento denominado *palavra vazia*. Esta palavra tem comprimento zero. Extenderemos a concatenação de forma que ϵ seja o elemento neutro, isto é, se $X \in \mathcal{A}^*$ então $X\epsilon = \epsilon X = X$. Vamos chamar este novo conjunto de $\mathcal{A}^* := \mathcal{A}^\infty \cup \{\epsilon\}$.

Definição 69. Sejam $X, Y \in \mathcal{A}^*$. Dizemos que Y é um *fator* de X (e denotamos por $Y \subset X$) se existem palavras $Z, Z' \in \mathcal{A}^*$ (possivelmente vazias) tais que $X = ZYZ'$.

Exemplo 70. A palavra *as* é um fator de *aspp*, bem como as palavras *asp* e *spp*.

Claro que toda palavra é fator de si mesma, basta tomar $Z = Z' = \epsilon$.

Até o momento temos o monóide (\mathcal{A}^*, \cdot) . Iremos definir um conjunto de elementos que terão o papel de tornar (\mathcal{A}^*, \cdot) um grupo. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um alfabeto e considere o conjunto $\mathcal{A}' := \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$. Extenda a concatenação de forma que $a_k a'_k = a'_k a_k = \epsilon$ para todo $k \in I_n$. Com isso temos o grupo $\Gamma_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}'$.

Definição 71. Uma *sequência bi-infinita* ou *cadeia* de elementos de um conjunto X é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e o contradomínio é o conjunto X .

Assim, o conjunto de todas as cadeias de um alfabeto \mathcal{A} é o conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

Definição 72. Uma *matriz* ou *bloco* de elementos de um conjunto X de ordem $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$ é uma função $A : I_n \times I_m \rightarrow X$.

Denotamos tais funções arranjando as imagens em uma tabela com n linhas e m colunas em que o valor que está na i -ésima linha e j -ésima coluna ($i \in I_n$ e $j \in I_m$) é o elemento $A(i, j)$, o qual será denotado por a_{ij} .

Exemplo 73. Se $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $n = 2$ e $m = 3$ então a função

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma matriz do alfabeto \mathcal{A} de ordem 2×3 .

Quando nos referimos a uma matriz ou bloco de ordem $n \times m$ podemos simplesmente dizer *matriz* $n \times m$ ou *bloco* $n \times m$. Note que uma matriz $n \times m$ de um alfabeto \mathcal{A} é um elemento do conjunto $\mathcal{A}^{n \times m} := \mathcal{A}^{I_n \times I_m}$.

Da mesma forma que definimos o conjunto de todas as palavras como sendo a reunião de todas as palavras de comprimento finito, podemos definir o conjunto de todas as matrizes como sendo a reunião de todas as matrizes de ordem finita. Portanto o conjunto de todas as matrizes de um alfabeto \mathcal{A} é o conjunto

$$M(\mathcal{A}) := \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{n \times m}.$$

Definição 74. Uma *malha* de elementos de um conjunto X é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o contradomínio é X

Exemplo 75. Se $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ e $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ é dado por

$$f(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } |i + j| \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então denotamos f por

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que a posição $(0, 0)$ está denotada por um ponto.

Observe que o conjunto de todas as malhas de um alfabeto \mathcal{A} é o conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

3.3 DINÂMICA DOS LADRILHAMENTOS

Nesta seção estudaremos o conceito de complexo celular. Esses complexos servirão como base para definir o sistema dinâmico procurado para comparar com (Ω, ω) .

A definição de complexo celular é baseada na definição de (KINSEY, 1993, Definição 4.1) e o que sucede é adaptado de (ANDERSON; PUTNAM, 1998, Seção 4)

Definição 76. Seja X um espaço topológico de Hausdorff e considere o conjunto $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Considere também os seguintes conjuntos:

- (0) Seja K_0 um subconjunto finito de elementos de X . Esses elementos serão chamados de *vértices* ou *0-células*;
- (1) Seja K_1 um conjunto finito de subconjuntos de X tal que $K_1 \setminus K_0$ seja uma união disjunta finita de subconjuntos $e \subset X$ com a seguinte propriedade: existe um homeomorfismo $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f((0, 1)) = e$ e $f(0), f(1) \in \partial(e)$. Os elementos de K_1 são denominados *arestas* ou *1-células*;
- (2) Seja K_2 um conjunto finito de subconjuntos de X tal que $K_2 \setminus K_1$ seja uma união disjunta finita de subconjuntos $\sigma \subset X$ com a seguinte propriedade: existe um homeomorfismo $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ tal que $f(\text{Int}(\mathbb{B}^2)) = \sigma$ e $f(\partial(\mathbb{B}^2)) = \partial(\sigma) \subset K_1$. Os elementos de K_2 são denominados *faces* ou *2-células*;
- (k) Seja K_k um conjunto finito de subconjuntos de X tal que $K_k \setminus K_{k-1}$ seja uma união disjunta finita de subconjuntos $\sigma \subset X$ com a seguinte propriedade: existe um homeomorfismo $f : \mathbb{B}^k \rightarrow X$ tal que $f(\text{Int}(\mathbb{B}^k)) = \sigma$ e $f(\partial(\mathbb{B}^k)) = \partial(\sigma) \subset K_{k-1}$. Os elementos de K_k são denominados *k-células*.

O *complexo celular* é o conjunto $K := \bigcup_{k=0}^n K_k$.

Seja t um ladrilho e defina $T^{(0)}(t) := \{t\}$ e, para $k > 0$,

$$T^{(k)}(t) := \{t' \in T \mid t' \cap T^{(k-1)}(t) \neq \emptyset\}.$$

Chamamos esses conjuntos de *coroas* de t .

Considere Ω com a topologia descrita no capítulo anterior, \mathbb{R}^d com a topologia usual e $\Omega \times \mathbb{R}^d$ com a topologia produto. Dizemos que



Figura 3: Da esquerda para a direita: uma 0-célula, 1-célula e 2-célula.

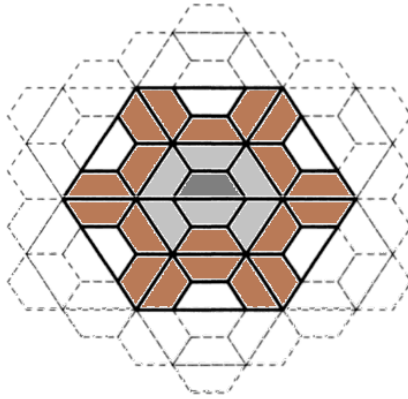


Figura 4: Em destaque as diversas coroas de t

dois pares (T_1, u_1) e (T_2, u_2) em $\Omega \times \mathbb{R}^d$ são k -equivalentes se existem ladrilhos $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$ tais que $u_1 \in t_1$, $u_2 \in t_2$ e $T_1^{(k)}(t_1) - u_1 = T_2^{(k)}(t_2) - u_2$. Denotamos esta relação de equivalência por \sim_k e a classe de um par $(T, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ por $(T, u)_k$. Seja Γ_k o espaço quociente $\Omega \times \mathbb{R}^d / \sim_k$ munido da topologia quociente. Neste trabalho, iremos considerar somente $k = 0, 1$.

Vamos ilustrar o que este espaço Γ_k representa. Seja T um ladrilhamento e considere $u \in \mathbb{R}^d$. Vamos analisar o conjunto $(T, u)_k$. Um par (T', u') pertence ao conjunto $(T, u)_k$ se existem ladrilhos $u \in t \in T$ e $u' \in t' \in T'$ tais que $T^{(k)}(t) - u = T'^{(k)}(t') - u'$.

No caso $k = 0$ isto significa que $\{t\} - u = \{t'\} - u'$. Ou seja, ao sobrepormos os pontos u e u' , temos que ter coincidência entre os ladrilhos t e t' . Veja ilustração a seguir.

No caso $k = 1$ temos $T(\{t\}) - u = T'(\{t'\}) - u'$. Então estamos comparando a coroa 1 de t com a coroa 1 de t' , ambos relativo ao seu

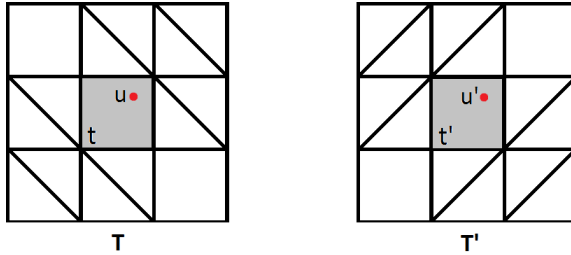


Figura 5: Os pontos u e u' estão na mesma posição relativo aos ladrilhos que os contém.

respectivo ladrilhamento. Neste caso, devemos ter coincidência não só de um ladrilho que contém os pontos, como também de toda a coroa daquele ladrilho. Veja ilustração 6 a seguir.

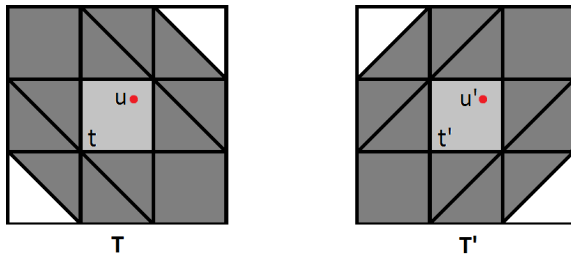
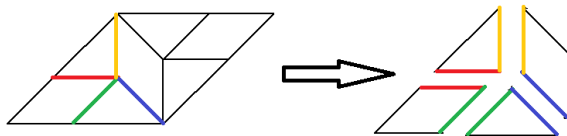


Figura 6: Os conjuntos em destaque correspondem às coroas de t e t' , respectivamente, e não coincidem quando sobrepostos.

Note que podemos utilizar somente um ladrilhamento e analisar todos os pontos do plano que estejam contidos em uma bola suficientemente grande a ponto de cobrir todas as possíveis adjacências entre ladrilhos. De fato, fixado $T \in \Omega$ seja $(T', u') \in \Omega \times \mathbb{R}^d$, então existe $u \in \mathbb{R}^d$ tal que $(T, u) \sim_k (T', u')$ (pois $\Omega = \Omega_T$ conforme descrito na página 38). Segue que toda classe $(T', u')_k \in \Gamma_k$ pode ser representado por $(T, u)_k$ para um mesmo T .

é fácil ver que, para construir este complexo celular, basta notar que as 0-células e 1-células são, respectivamente, os vértices e arestas dos ladrilhos, identificadas sempre que forem comum a mais de um ladrilho. Por exemplo:



Quanto às 2-células, elas serão os próprios protoladrilhos no caso $k = 0$ ou, conforme mencionado anteriormente, as possíveis coroas existentes no ladrilhamento. Será visto no último capítulo diversos exemplos de construção do complexo celular associado a um ladrilhamento.

Note que $(T, u)_k = (T - u, 0)_k$ pois $(T - u, 0) \in (T, u)_k$. De fato, seja $t \in T$ contendo u e considere o ladrilho $t - u \in T - u$. É claro que $t - u$ contém a origem e que $T^{(k)}(t) - u = (T - u)^{(k)}(t - u)$ (segue da proposição 35).

Proposição 77. Γ_k é um espaço compacto.

Demonstração. Como estamos assumindo que os ladrilhamentos de Ω possuem complexidade local finita (ver página 39) então existe um raio r tal que a bola $B_r(0)$ contém todos os possíveis padrões de adjacências de ladrilhos de $T \in \Omega$. Daí, se $(T', u') \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ então existe $u \in B_r(0)$ tal que $(T, u)_k \sim (T', u')_k$.

Isto significa que para toda classe $(T', u')_k \in \Gamma_k$ existe $u \in \overline{B_r(0)}$ tal que $(T, u) \in (T', u')_k$. Em outras palavras, a função $\pi : \{T\} \times \overline{B_r(0)} \rightarrow \Gamma_k$ definida por $\pi(T, u) = (T, u)_k$ é sobrejetora. Como estamos usando a topologia quociente então π é contínua. O domínio de π é o conjunto $\{T\} \times \overline{B_r(0)}$, o qual é compacto pois é o cartesiano de um conjunto unitário com uma bola fechada do \mathbb{R}^d . Logo $\Gamma_k = \pi(\{T\} \times \overline{B_r(0)})$ é compacto. \square

Proposição 78. A função $\gamma_k : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_k$ dada por $\gamma_k((T, u)_k) = (\omega(T), \lambda u)_k$ é contínua e sobrejetora.

Demonstração. Primeiramente mostremos que a função γ_k está bem definida, isto é, que os valores da função em uma classe independem da escolha do representante. Para tal, sejam $(T', u') \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ tal que $(T', u') \sim (T, u)$ e mostremos que $\pi(T', u') = \pi(T, u)$, isto é, que $(\omega(T'), \lambda u')_k = (\omega(T), \lambda u)_k$.

De fato, como $(T', u') \sim (T, u)$ então existem ladrilhos t, t' tais que $u \in t \in T$, $u' \in t' \in T'$ e $T^{(k)}(t) - u = T'^{(k)}(t') - u'$. Então

$t \sim u = t' \sim u'$. Aplicando a substituição temos:

$$\begin{aligned}\omega[T^{(k)}(t) - u] &= \omega[T'^{(k)}(t') - u'] \\ \omega[T^{(k)}(t)] - \lambda u &= \omega[T'^{(k)}(t')] - \lambda u'\end{aligned}$$

Note que podemos escolher um ladrilho s em $\omega(\{t\})$ tal que $\lambda u \in s$ e de forma que $\omega(T)^{(k)}(s) - \lambda u = \omega[T^{(k)}(t)] - \lambda u$. Analogamente existe s' em $\omega(\{t'\})$ tal que $\lambda u' \in s'$ e de forma que $\omega(T')^{(k)}(s') - \lambda u' = \omega[T'^{(k)}(t')] - \lambda u'$. Segue que

$$\omega(T)^{(k)}(s) - \lambda u = \omega(T')^{(k)}(s') - \lambda u'$$

para alguns s, s' tais que $\lambda u \in s \in \omega(\{t\}) \subset \omega(T)$ e $\lambda u' \in s' \in \omega(\{t'\}) \subset \omega(T')$. Isto significa que $(\omega(T'), \lambda u')_k = (\omega(T), \lambda u)_k$ como queríamos demonstrar.

Mostremos que a função γ_k é contínua. Note que a função $u \in \mathbb{R}^d \mapsto \lambda u \in \mathbb{R}^d$ é contínua. Pela proposição 40 temos que a função $T \in \Omega \mapsto \omega(T) \in \Omega$ é contínua. Como $\Omega \times \mathbb{R}^d$ está equipado com a topologia produto então a função

$$(T, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mapsto (\omega(T), \lambda u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$$

é contínua. Como Γ_k está equipado com a topologia quociente então a função

$$(T, u)_k \in \Gamma_k \mapsto (\omega(T), \lambda u)_k \in \Gamma_k$$

também é contínua.

Para mostrar que $\gamma_k : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_k$ é sobrejetora basta notar que dado um elemento $(T, u)_k \in \Gamma_k$ podemos escolher o elemento

$$(\omega^{-1}(T), \lambda^{-1}u)_k \in \Gamma_k$$

e observar que

$$\gamma_k(\omega^{-1}(T), \lambda^{-1}u)_k = (\omega[\omega^{-1}(T)], \lambda[\lambda^{-1}u])_k = (T, u)_k.$$

□

Definição 79. Seja $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos e considere, para $i \leq j$, funções $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ tais que:

- f_{ii} é a identidade em X_i
- $f_{ij} = f_{ik}f_{kj}$ para todo $i \leq k \leq j$.

Definimos o *limite inverso* de (X_i, f_{ij}) como sendo o conjunto

$$\varprojlim (X_i, f_{ij}) := \left\{ x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid x_i = f_{ij}(x_j) \right\}.$$

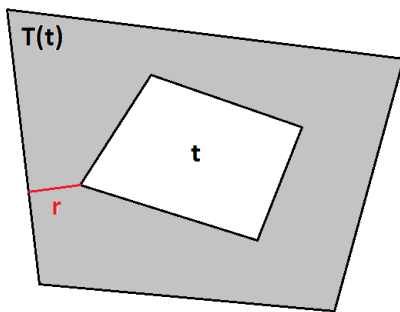
Se $X_i = \Gamma_k$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $f_{ij} = \gamma_k$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ então $\varprojlim (\Gamma_k, \gamma_k) := \{x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_k \mid x_i = \gamma_k(x_{i+1})\}$. Seja $\Omega_k := \varprojlim (\Gamma_k, \gamma_k)$ e considere a topologia produto para Ω_k .

Definimos uma função $\omega_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_k$ por $\omega_k(x)_i := \gamma_k(x_i) = x_{i-1}$ para todo i . Note que esta função atua como um shift à direita e ela possui uma inversa definida por $\omega^{-1}(x)_i = x_{i+1}$ para todo i . Também temos que ω_k é contínua pois γ_k é contínua e o espaço Ω_k está munido com a topologia produto.

Teorema 80. *Os sistemas dinâmicos (Ω, ω) e (Ω_1, ω_1) são topologicamente conjugados.*

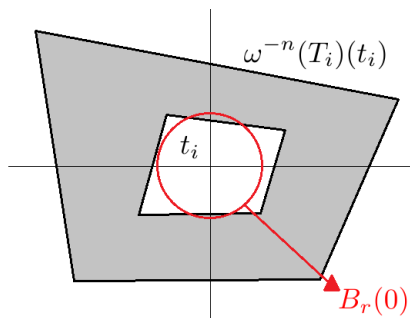
Demonstração. Defina $\pi : \Omega \rightarrow \Omega_1$ por $\pi(T) = \{x_i\}_{i=0}^\infty$ em que $x_i = (\omega^{-i}(T), 0)_1$. Note que $\gamma_1(x_i) = x_{i-1}$ para todo $i > 0$ e, portanto, π está bem definida.

Mostremos que π é injetiva. De fato, suponha que $\pi(T_1) = \pi(T_2)$ e seja $r = \inf\{d(t, \partial[\cup T(t)]) \mid t \in T \in \Omega\}$.



$r > 0$ pois a substituição tem complexidade local finita. Mostremos que $T_1 = T_2$ da seguinte forma: para cada $R > 0$ os ladrilhamentos T_1 e T_2 coincidem na bola de centro zero e raio R .

Seja $R > 0$ e considere n natural tal que $r\lambda^n > R$ (tal n existe pois $\lambda > 1$). Agora, como $\pi(T_1)_n = \pi(T_2)_n$ então $(\omega^{-n}(T_1), 0)_1 = (\omega^{-n}(T_2), 0)_1$. Isto significa que existem ladrilhos na origem $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$ tais que os conjuntos $\omega^{-n}(T_1)(t_1)$ e $\omega^{-n}(T_2)(t_2)$ coincidem. Estes conjuntos contêm a bola de centro zero e raio r .



Aplicando a substituição n vezes temos que os conjuntos $T_1(t_1)$ e $T_2(t_2)$ coincidem e estes conjuntos contêm a bola de centro zero e raio $r\lambda^n$. Logo, T_1 e T_2 coincidem em $B_{r\lambda^n}(0) \supset B_R(0)$.

Falta mostrar que π é sobrejetiva. De fato, dado um elemento arbitrário de Ω_1 , digamos, $\{(T_i, u_i)_1\}_{i=0}^\infty$, já vimos que este elemento é igual à $\{(T_i - u_i, 0)_1\}_{i=0}^\infty$. Sendo $S_i = T_i - u_i$ temos que $\{(T_i, u_i)_1\}_{i=0}^\infty = \{(S_i, 0)_1\}_{i=0}^\infty$. Vamos, portanto, encontrar um ladrilhamento $T \in \Omega$ tal que $\pi(T) = \{(S_i, 0)_1\}_{i=0}^\infty$. Considere

$$T = \bigcup_{i=0}^{\infty} \hat{\omega}^i \left(\bigcap_{0 \in s \in S_i} S_i(s) \right).$$

Primeiramente mostremos que T é um ladrilhamento. De fato, $S_i(s)$ é um ladrilhamento parcial e a interseção de ladrilhamentos parciais é um ladrilhamento parcial (pois a interseção não fere a propriedade de interiores disjuntos). Falta mostrar que a união não fere a propriedade de interiores disjuntos. Isto segue do fato de que $\{(S_i, 0)_1\}_{i=0}^\infty \in \Omega_1$. De fato, sendo $y_i = (S_i, 0)_1$ temos que $\gamma_1(y_i) = y_{i-1}$ para todo $i > 0$ e, portanto, $(\omega(S_i), 0)_1 = (S_{i-1}, 0)_1$. Logo existem t_{i-1}, t_i tais que $S_{i-1}(t_{i-1}) = \omega(S_i)(t_i)$. Então na união $S_{i-1}(t_{i-1}) \cup \omega(S_i)(t_i)$ não há sobreposição de ladrilhos. Por indução conclui-se que T é um ladrilhamento parcial.

De forma análoga ao teorema 34 se demonstra que o suporte de T é todo o espaço euclidiano. Logo T é um ladrilhamento. Como $S_i \in \Omega$ e T foi criado a partir de substituição em S_i então T também pertence à Ω . Falta mostrar que $\pi(T) = \{(S_i, 0)_1\}_{i=0}^\infty$. Para isso, mostremos que a cordenada n de $\pi(T)$ é igual à $(S_n, 0)_1$. De fato, a cordenada n de $\pi(T)$ é a classe $(\omega^{-n}(T), 0)_1$. Temos que T é formado por colagens de padrões cada vez maiores de S_0, S_1, S_2 , e assim por diante. Nestas colagens não há sobreposições de ladrilhos, portanto o

padrão que contém a origem no ladrilhamento T é o mesmo padrão que contém a origem de quaisquer dos ladrilhamentos S_n . Isto mostra que $(\omega^n(T), 0)_1 = (S_n, 0)_1$.

Mostremos agora que π é bicontínua. De fato, ω é homeomorfismo então a função

$$\pi_1^{(i)} : T \in \Omega \mapsto \omega^{-i}(T) \in \Omega$$

também o é (para todo i). Como $\Omega \times \{0\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^d$ está munido com a topologia produto então

$$\pi_2 : T \in \Omega \mapsto (T, 0) \in \Omega \times \{0\}$$

é um homeomorfismo. Como Γ_1 está equipado com a topologia quociente então

$$\pi_3 : (T, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mapsto (T, u)_1 \in \Gamma_1$$

é um homeomorfismo. Finalmente, como estamos considerando a topologia produto para Ω_1 então

$$\pi = \prod_{i=0}^{\infty} \pi_3 \pi_2 \pi_1^{(i)}(T)$$

é um homeomorfismo, uma vez que é um cartesiano de composições de homeomorfismos.

Para concluir, mostremos que $\pi\omega = \omega_1\pi$. Seja $T \in \Omega$, então

$$\pi\omega(T) = \pi(\omega(T)) = \{(\omega^i(\omega(T)), 0)_1\}_{i=0}^{\infty} = \{(\omega^{i+1}(T), 0)_1\}_{i=0}^{\infty}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega_1\pi(T) &= \omega_1(\pi(T)) = \omega_1(\{(\omega^i(T), 0)_1\}_{i=0}^{\infty}) = \\ &= \{\gamma_1((\omega^i(T), 0)_1)\}_{i=0}^{\infty} = \{(\omega^{i+1}(T), 0)_1\}_{i=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

□

Sob a adição de uma hipótese para a substituição temos que (Ω, ω) e (Ω_0, ω_0) são topologicamente conjugados.

Definição 81. Dizemos que a substituição *força o bordo* se existe um iteração N tal que para qualquer ladrilho t e para quaisquer ladrilhamentos T e T' contendo t , tem-se que $\hat{\omega}^N(T)$ e $\hat{\omega}^N(T')$ coincidem não só em $\hat{\omega}^N(\{t\})$ como também em todos os ladrilhos que interceptam $\hat{\omega}^N(\{t\})$.

Em outras palavras, uma substituição *força o bordo* quando existe um natural N tal que se $(T, u)_0 = (T', u')_0$ então $(\omega^N(T), \lambda^N u)_1 = (\omega^N(T'), \lambda^N u')_1$.

Teorema 82. *Se a substituição força o bordo então os sistemas dinâmicos (Ω, ω) e (Ω_0, ω_0) são topologicamente conjugados.*

Demonstração. Defina $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ por $f((T, u)_1) = (T, u)_0$. Note que se $T_1^{(1)}(t_1) - u_1 = T_2^{(1)}(t_2) - u_2$ então $T_1^{(0)}(t_1) - u_1 = T_2^{(0)}(t_2) - u_2$. Segue que f está bem definida. Defina, agora, a função $\pi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_0$ por $\pi(x)_i = f(x_i)$, para $i \geq 0$. Mostremos que π é um homeomorfismo que conjugua as ações ω_1 e ω_0 .

Para mostrar a injetividade precisamos da hipótese de forçar o bordo, portanto seja N proveniente desta hipótese. Suponha que $\pi(\{x_i\}_{i=0}^\infty) = \pi(\{y_i\}_{i=0}^\infty)$ em que $x_i = (T_i, u_i)_1$ e $y_i = (T'_i, u'_i)_1$. Então $(T_i, u_i)_0 = (T'_i, u'_i)_0$ para todo $i \geq 0$; em particular para $i > N$. A condição de forçar o bordo nos diz que $(\omega^N(T_{j+N}), \lambda^N u_{j+N})_1 = (\omega^N(T'_{j+N}), \lambda^N u'_{j+N})_1$; isto é, $\gamma^N((T_{j+N}, u_{j+N})_1) = \gamma^N((T'_{j+N}, u'_{j+N})_1)$. Segue que $(T_j, u_j)_1 = (T'_j, u'_j)_1$, ou seja, $x_j = y_j$.

Mostremos a sobrejetividade. Seja $\{(T_i, u_i)_0\}_{i=0}^\infty \in \Omega_0$. Como Ω é compacto (teorema 41), a sequência de ladrilhamentos $\{\omega^n(T_n - u_n)\}_{n=0}^\infty$ admite uma subsequência $\{\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k})\}_{k=0}^\infty$ convergente a algum ladrilhamento $T \in \Omega$. Agora, $\{(\omega^{-i}(T), 0)_1\}_{i=0}^\infty \in \Omega_1$, vamos mostrar que $\pi(\{(\omega^{-i}(T), 0)_1\}_{i=0}^\infty) = \{(T_i, u_i)_0\}_{i=0}^\infty$. De fato,

$$\pi(\{(\omega^{-i}(T), 0)_1\}_{i=0}^\infty) = \{(\omega^{-i}(T), 0)_0\}_{i=0}^\infty.$$

Então devemos mostrar que $(\omega^{-i}(T), 0)_0 = (T_i, u_i)_0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, fixe $i \in \mathbb{N}$. Note que $x_0 = \gamma_0(x_1) = \gamma_0(\gamma_0(x_2)) = \dots = \gamma_0^n(x_n)$, então $(T_0, u_0)_0 = (\omega^n(T_n), \lambda^n u_n)_0 = (\omega^n(T_n - u_n), 0)_0$.

Segue da complexidade local finita que, entre todos os ladrilhamentos $\omega^n(T_n - u_n)$, existe uma quantidade finita de ladrilhos diferentes que contém a origem. Portanto para todo $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k})$ concorda com T na bola de centro zero e raio $1/\varepsilon$. Seja R um número maior que o diâmetro de todos os protoladrilhos (existe pois a quantidade de protoladrilhos é finita) e considere $\varepsilon = 1/(\lambda^i R) > 0$, então existe k tal que $\omega^{n_k}(T_{n_k} - u_{n_k})$ concorda com T na bola de centro zero e raio $\lambda^i R$. Logo

$$(\omega^{-i}(T), 0)_0 = (\omega^{n_k-i}(T_{n_k} - u_{n_k}), 0)_0 = \gamma_0^{n_k-i}(T_{n_k}, u_{n_k})_0 = (T_i, u_i)_0.$$

π é contínua pois $\pi = \prod_{i=0}^\infty f_i$ em que f_i é a função contínua

$(T_i, u_i)_1 \in \Gamma_1 \mapsto (T_i, u_i)_0 \in \Gamma_0$. Como Ω é compacto e vimos no teorema anterior que Ω é homeomorfo à Ω_1 então Ω_1 também é compacto. Temos então que π é uma função contínua e bijetora com domínio compacto, logo é homeomorfismo.

Note que

$$\begin{aligned} \pi\omega_1(\{(T_i, u_i)_1\}_{i=0}^\infty) &= \pi(\{\gamma_1((T_i, u_i)_1)\}_{i=0}^\infty) = \\ &= \pi(\{(\omega(T_i), \lambda u_i)_1\}_{i=0}^\infty) = \{(\omega(T_i), \lambda u_i)_0\}_{i=0}^\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\omega_0\pi(\{(T_i, u_i)_1\}_{i=0}^\infty) = \omega_0(\{(T_i, u_i)_0\}_{i=0}^\infty) = \{(\omega(T_i), \lambda u_i)_0\}_{i=0}^\infty.$$

□

4 COHOMOLOGIA ASSOCIADA A UM LADRILHAMENTO

Vimos no capítulo anterior que podemos construir um complexo celular através das identificações de Γ_k . Nesse complexo temos vértices, arestas e faces. Consideraremos uma orientação para esse complexo de que seja compatível com a relação de equivalência de Γ_k . Neste capítulo iremos construir os grupos de cohomologia associados a esses complexo celulares.

4.1 COHOMOLOGIA

Os conceitos desta seção são baseados em (STARLING, 2003, Seção 3.1) e (SADUN, 2008, Capítulo 3).

Seja $X = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ uma coleção de conjuntos e defina $C^i := \{f : X_i \rightarrow G\}$ em que G é um grupo abeliano. Suponha que exista um conjunto de funções $\partial_i : C^{i-1} \rightarrow C^i$ tais que $\partial_{i+1}\partial_i = 0$ (aqui estamos convencionando $C^{-1} := \{0\}$ e, portanto, ∂_0 é sempre a função nula). Ou seja, temos o sistema:

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_0} C^0 \xrightarrow{\partial_1} C^1 \xrightarrow{\partial_2} C^2 \xrightarrow{\partial_3} C^3 \rightarrow \dots$$

Como $\partial_{i+1}\partial_i = 0$ então $\text{Im}(\partial_i)$ é um subgrupo normal de $\ker(\partial_{i+1})$ e, portanto, podemos considerar o conjunto quociente

$$H^i(X) = \ker(\partial_{i+1}) / \text{Im}(\partial_i).$$

Este conjunto é chamado de *i-ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em G*.

Seja T um ladrilhamento e considere Γ_k o complexo celular descrito no Capítulo anterior. Sejam V , E e F o conjunto dos vértices, arestas e faces do complexo celular, respectivamente, e considere

$$\begin{aligned} C^0 &:= \{f : V \rightarrow \mathbb{Z}\}; \\ C^1 &:= \{f : E \rightarrow \mathbb{Z}\}; \\ C^2 &:= \{f : F \rightarrow \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Como \mathbb{Z} é um grupo abeliano então os conjuntos acima também são grupos abelianos quando munido das operações usuais entre funções (ponto-a-ponto). Estes conjuntos são isomorfos, respectivamente, aos

conjuntos $\mathbb{Z}^{\#V}$, $\mathbb{Z}^{\#E}$ e $\mathbb{Z}^{\#F}$.

As funções $\partial_i : C^{i-1} \rightarrow C^i$ serão definidas da seguinte forma: Para $i = 1$ define-se $\partial_1(f)(a) = f(t(a)) - f(i(a))$ em que $i(a)$ e $t(a)$ são, respectivamente, o ponto inicial e terminal de uma aresta a . Para $i = 2$ define-se $\partial_2(f)(\sigma) = \sum_{e \text{ aresta de } \sigma} \pm f(e)$ em que o sinal de cada parcela depende se a orientação da aresta é coincidente (positivo) ou é contrária (negativo) à orientação da face σ . Veja a figura a seguir para ilustração desta função.

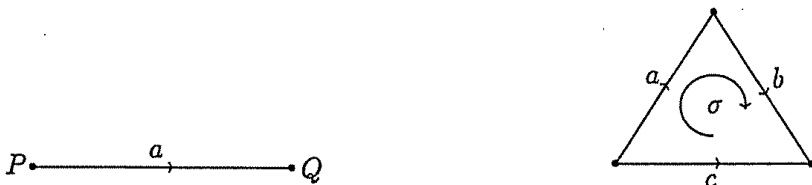


Figura 7: $\partial_1(f)(a) = f(Q) - f(P)$ e $\partial_2(f)(\sigma) = f(a) + f(b) - f(c)$.

Temos, pois, o seguinte sistema:

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_0} C^0 \xrightarrow{\partial_1} C^1 \xrightarrow{\partial_2} C^2 \xrightarrow{\partial_3} \{0\}$$

Proposição 83. Para $i = 0, 1, 2$ vale que $\partial_{i+1}\partial_i = 0$.

Demonstração. Os casos $i = 0, 2$ seguem do fato que $\partial_0 = \partial_3 = 0$ e o caso $i = 1$ pode ser obtido a partir da adaptação do Teorema 6.17 em (KINSEY, 1993). \square

Segue desta proposição que $\text{Im}(\partial_i) \subset \ker(\partial_{i+1})$. Mais ainda, como imagens e núcleos de homomorfismos entre grupos abelianos são subgrupos normais então $\text{Im}(\partial_i)$ é um subgrupo normal de $\ker(\partial_{i+1})$. Temos, portanto, o i -ésimo grupo de cohomologia associado ao complexo Γ_k , o qual é dado por

$$H^i(\Gamma_k) = \ker(\partial_{i+1}) / \text{Im}(\partial_i).$$

Note que no caso dos ladrilhamentos só iremos trabalhar com $i = 0, 1, 2$.

Estamos interessados no grupo de cohomologia associado a um ladrilhamento, isto é, $H^i(\Omega)$. Para isto, temos o teorema 91, que será apresentado posteriormente e nos descreve um método para encontrar $H^i(\Omega)$ através dos grupos $H^i(\Gamma_1)$. Este método consiste em calcular o

limite direto do sistema direto $(H^i(\Gamma_1), \gamma_1^*)$ em que γ_1^* é uma função induzida pela função γ_1 introduzida na proposição 78. A seguir veremos a definição da função γ_1^* .

Lembre que $\gamma_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ é definida por $\gamma_1((T, u)_1) = (\omega(T), \lambda u)_1$, isto é, γ_1 toma a coroa em torno dos ladrilhos que contém u e a leva na coroa em torno dos ladrilhos de $\omega(T)$ que contém λu . Veja ilustração a seguir.

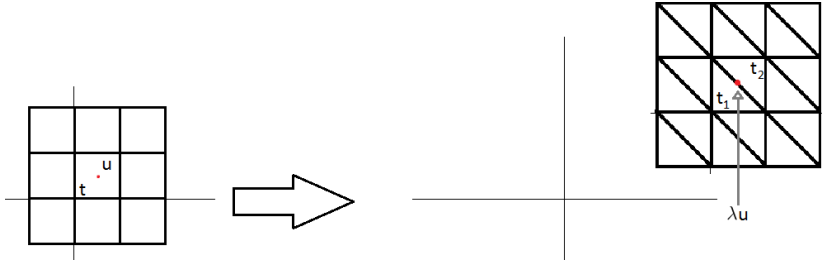


Figura 8: Note que γ_1 leva a coroa de t na coroa de $t_1 \cup t_2$.

Agora definimos γ_1^* como sendo a função que associa um elemento de $H^2(\Gamma_1)$ (isto é, uma classe de equivalência de uma função em $\ker(\partial_3)$) em um outro elemento de $H^2(\Gamma_1)$ da seguinte forma:

$$\gamma_1^*(f)(t) = \sum_{t_i \in \hat{\omega}(\{t\})} f(t_i).$$

Portanto, no exemplo ilustrado na figura 8 temos que $\gamma_1^*(f)(t) = f(t_1) + f(t_2)$.

Podemos estender a definição de γ_1^* para funções de $H^1(\Gamma_1)$ de forma análoga:

$$\gamma_1^*(f)(e) = \sum_{e_i \in \hat{\omega}(\{e\})} \pm f(e_i)$$

em que o sinal depende da orientação das arestas. Veja a figura 9 a seguir para ilustração da função.

Será observado nos exemplos que $\gamma_1^* : H^2(\Gamma_1) \rightarrow H^2(\Gamma_1)$ pode ser representado por uma matriz quadrada de ordem igual à dimensão de $H^2(\Gamma_1)$ e que o elemento na linha i e coluna j é a quantidade de vezes que a coroa de t_j aparece no conjunto $\omega(t_i)$. O mesmo vale substituindo $H^2(\Gamma_1), t_i, t_j$ por $H^1(\Gamma_1), e_i, e_j$.

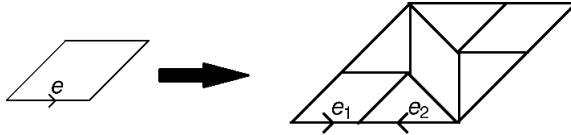


Figura 9: Neste exemplo, $\gamma_1^*(e) = f(e_1) - f(e_2)$.

4.2 LIMITE DIRETO

O teorema principal do trabalho envolve um certo limite direto, portanto este capítulo é dedicado à introdução de tal conceito. Utilizaremos alguns resultados desta seção no próximo capítulo. À exceção do último teorema, este conteúdo pode ser encontrado em (SADUN, 2008, Seção 3.1).

Definição 84. Seja $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de grupos abelianos e considere, para $n \leq m$, homomorfismos $f_{nm} : G_n \rightarrow G_m$ com as seguintes propriedades:

- f_{nn} é a identidade em G_n , e
- $f_{nm} = f_{km} f_{nk}$ para todo $n \leq k \leq m$.

Então o par (G_n, f_{nm}) é chamado de *sistema direto*.

No caso em que para todo $n \leq m \in \mathbb{N}$ temos $G_n = G$ e $f_{nm} = f$, denotaremos o sistema direto simplesmente por (G, f) .

Para ilustrar a definição, considere um sistema direto (G_n, f_{nm}) . Então temos

$$G_0 \xrightarrow{f_{01}} G_1 \xrightarrow{f_{12}} G_2 \xrightarrow{f_{23}} G_3 \rightarrow \dots$$

e a função f_{03} é, por exemplo, a composição $f_{23} f_{12} f_{01}$.

Definição 85. Seja (G_n, f_{nm}) um sistema direto. Dizemos que G é um limite direto de (G_n, f_{nm}) se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} G_0 & \xrightarrow{f_{01}} & G_1 & \xrightarrow{f_{12}} & G_2 & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \\ G & \xrightarrow{\text{Id}} & G & \xrightarrow{\text{Id}} & G & \rightarrow & \dots \end{array}$$

em que Id é a função identidade e π_j é a projeção no conjunto quociente. Isto é, se $\pi_m f_{nm} = \pi_n$ para todo $n \leq m$.

Proposição 86. *O limite direto é único no sentido que se G e H são limites diretos então os grupos G e H são isomorfos.*

Demonstração. Sejam? □

Exemplo 87. Considere o seguinte sistema direto:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

Isto é, $G_n = \mathbb{Z}$ e $f_{nm}(x) = 0(x) := 0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Então $\varinjlim(\mathbb{Z}, 0) = \{0\}$.

Demonstração. Note que todos os elementos se tornam eventualmente zero bastando, para isso, aplicar a função somente uma vez. Logo todos os elementos são equivalentes à zero, portanto temos somente uma classe de equivalência, a trivial. Segue que $\varinjlim(\mathbb{Z}, 0) = \{0\}$. □

Exemplo 88. Considere o seguinte sistema direto:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

Isto é, $G_n = \mathbb{Z}$ e $f_{nm}(x) = \times 2(x) := 2^{m-n}x$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Então $\varinjlim(\mathbb{Z}, \times 2) = \mathbb{Z}[1/2] := \{p/2^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração. O conjunto $\mathbb{Z}[1/2]$ é chamado de *conjunto dos números racionais diádicos* e este exemplo, em conjunto com o exemplo anterior, mostra que a escolha dos homomorfismos que compõem o sistema direto influencia no resultado do limite direto, ainda que os grupos abelianos escolhidos sejam os mesmos.

Primeiro vamos procurar um candidato à limite. Denotemos por x_n o elemento $x \in \mathbb{Z}$ em que $\mathbb{Z} = G_n$. Note que $x_n \sim x_m$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{nk}(x_n) = f_{mk}(x_m)$. Então $2^{k-n}x_n = 2^{k-m}x_m$, ou seja, $x_n = \frac{2^{k-m}x_m}{2^{k-n}} = \frac{2^n x_m}{2^m}$. Note que, no numerador temos representados todos os números inteiros, e no denominador somente potências de dois. Logo os representantes das classes variam no conjunto $\{p/2^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}[1/2]$.

Neste exemplo temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 & & \\ \mathbb{Z}[1/2] & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}[1/2] & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}[1/2] & \rightarrow & \dots \end{array}$$

em que a projeção no conjunto quociente é dada por $\pi_j(x) = \frac{x}{2^j}$.

Seja $x \in \mathbb{Z} = G_n$ e considere $m \geq n$. Então $\pi_m(f_{nm}(x)) = \frac{2^{m-n}x}{2^m} = \frac{x}{2^n} = \pi_n(x)$, como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 89. Considere o seguinte sistema direto:

$$G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow \dots$$

em que G é um grupo e φ é um isomorfismo de grupos. Ou seja, $G_n = G$ e $f_{nm} = \varphi^{m-n}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Então $\varinjlim(G, \varphi) = G$.

Vamos procurar um candidato ao limite. Denotemos por x_n o elemento $x \in G_n$. Note que $x_n \sim x_m$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{nk}(x_n) = f_{mk}(x_m)$. Então $\varphi^{k-n}(x_n) = \varphi^{k-m}(x_m)$. Aplicando a inversa de φ^{k-n} em ambos os membros temos $x_n = \varphi^{n-k} \varphi^{k-m}(x_m) = \varphi^{n-m}(x_m)$.

Portanto os representantes das classes de equivalência variam no conjunto $\{\varphi^p(x) \mid p \in \mathbb{Z}, x \in G\}$. Como φ é um isomorfismo então esse conjunto é igual a G .

Demonstração. Vamos procurar um candidato ao limite. Denotemos por x_n o elemento $x \in G_n$. Note que $x_n \sim x_m$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{nk}(x_n) = f_{mk}(x_m)$. Então $\varphi^{k-n}(x_n) = \varphi^{k-m}(x_m)$. Aplicando a inversa de φ^{k-n} em ambos os membros temos

$$x_n = \varphi^{n-k} \varphi^{k-m}(x_m) = \varphi^{n-m}(x_m).$$

Portanto os representantes das classes de equivalência variam no conjunto $\{\varphi^p(x) \mid p \in \mathbb{Z}, x \in G\}$. Como φ é um isomorfismo então esse conjunto é igual a G .

De forma análoga ao exemplo anterior, mostremos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\varphi} & G & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \\ G & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{i} & G & \rightarrow & \dots \end{array}$$

em que a projeção no conjunto quociente é dada por $\pi_j = \varphi^{-j}$.

Seja $x \in G = G_n$ e considere $m \geq n$. Então

$$\pi_m f_{nm} = \varphi^{-m} \varphi^{m-n} = \varphi^{-m+m-n} = \varphi^{-n} = \pi_n$$

como queríamos demonstrar. \square

Proposição 90. *Sejam (A, f) e (B, g) sistemas diretos, então*

$$\varinjlim(A \oplus B, f \oplus g) = \varinjlim(A, f) \oplus \varinjlim(B, g).$$

Demonstração. Sejam G e H os limites diretos de (A, f) e (B, g) , respectivamente.

Temos por hipótese que existem projeções nos conjuntos quocientes π_i^A, π_j^B tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{f} & A & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_0^A & & \downarrow \pi_1^A & & \downarrow \pi_2^A & & \\ G & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{i} & G & \rightarrow & \dots \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{g} & B & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_0^B & & \downarrow \pi_1^B & & \downarrow \pi_2^B & & \\ H & \xrightarrow{i} & H & \xrightarrow{i} & H & \rightarrow & \dots \end{array}.$$

Portanto $\pi_m^A f^{m-n} = \pi_n^A$ e $\pi_m^B g^{m-n} = \pi_n^B$. Segue que

$$\pi_n^A \oplus \pi_n^B = \pi_m^A f^{m-n} \oplus \pi_m^B g^{m-n} = (\pi_m^A \oplus \pi_m^B)(f^{m-n} \oplus g^{m-n}).$$

Sendo $\pi_n = \pi_n^A \oplus \pi_n^B$ temos pela equação acima que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus B & \xrightarrow{f \oplus g} & A \oplus B & \xrightarrow{f \oplus g} & A \oplus B & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \\ G \oplus H & \xrightarrow{i} & G \oplus H & \xrightarrow{i} & G \oplus H & \rightarrow & \dots \end{array}.$$

□

Teorema 91. (ANDERSON; PUTNAM, 1998, Teorema 6.1) *Seja T um ladrilhamento de substituição e considere Γ_1 o complexo celular associado. Então $H^i(\Omega)$ é isomorfo ao limite direto do sistema de grupos abelianos*

$$H^i(\Gamma_1) \xrightarrow{\gamma_1^*} H^i(\Gamma_1) \xrightarrow{\gamma_1^*} H^i(\Gamma_1) \rightarrow \dots,$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$

Se a substituição força o bordo, então a mesma conclusão vale substituindo Γ_1 e γ_1 por Γ_0 e γ_0 .

Demonstração. A demonstração deste teorema foge do escopo do trabalho. □

5 CÁLCULO DA COHOMOLOGIA PARA ALGUNS EXEMPLOS

Nesta seção aplicaremos os resultados vistos em todo este trabalho. Primeiramente verificaremos as hipóteses sobre a substituição que sustentam a maior parte dos teoremas deste trabalho. Tais hipóteses são as apresentadas na página 38. A bijetividade, em geral, envolve outros conceitos não apresentados neste trabalho, portanto citaremos aqui as referências nas quais podem ser encontradas: para ladrilhamentos unidimensionais ver (QUEFFÉLEC, 1987), para o ladrilhamento de Ammann, ver (GRUNBAUM; SHEPHARD, 2013).

5.1 LADRILHAMENTO FIBONACCI

Este é um ladrilhamento de dimensão 1, portanto só teremos vértices e arestas. Este ladrilhamento é construído a partir da regra de substituição apresentada na figura acima com $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Simbolicamente, esta substituição pode ser escrita como $\omega(0) = 01$ e $\omega(1) = 0$.

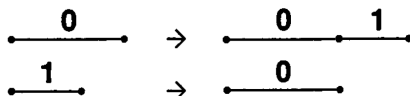


Figura 10: Substituição do ladrilhamento Fibonacci.

Segue uma ilustração de um padrão do ladrilhamento:



Figura 11: A cadeia Fibonacci.

Vejam se esta regra de substituição satisfaz as hipóteses deste trabalho.

Primitividade: Se $t = 0$ então $\omega(t) = 01$, o qual contém cópia de ambos os protoladrilhos. Se $t = 1$ então $\omega(t) = 0$ e, portanto, $\omega^2(t) = 01$. Logo ω é primitiva para $k = 2$.

Complexidade local finita: É claro que todo ladrilhamento de substituição unidimensional tem complexidade local finita pois só há uma quantidade finita de possibilidades de dispor cópias de finitos segmentos em um intervalo de comprimento fixo.

Verifiquemos se ω força o bordo. Para tal, fixe um ladrilho qualquer, por exemplo, 0. Vamos mostrar, primeiro, que não é possível ter três ladrilhos 0 seguidos:

Lema 92. *Na cadeia Fibonacci não há dois ladrilhos 1 seguidos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um trecho do ladrilhamento onde figura o padrão 11. O único ladrilho que é mapeado em 1 é o ladrilho 0. Portanto devemos ter $\omega(00) = 11$. Mas isso é um absurdo pois $\omega(00) = 0101 \neq 11$. \square

Este lema diz que a única possibilidade para $T(1)$ é 010. Portanto é fácil ver que escolhendo $t = 1$ a substituição sempre força o bordo.

Lema 93. *Na cadeia Fibonacci figuram, no máximo, dois ladrilhos 0 seguidos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um trecho do ladrilhamento onde figura o padrão 000. Note que $\omega(00) = 0101$, $\omega(01) = 010$, $\omega(10) = 001$ e $\omega(11) = 00$. Portanto para termos dois zeros seguidos é necessário que usemos os padrões 10 ou 11 mas, pelo lema anterior, não é possível ter 11 no ladrilhamento. Logo, a única possibilidade de termos dois zeros seguidos é usando o padrão 10. No entanto, $\omega(10) = 001$, logo não é possível encontrar o padrão 000 no ladrilhamento. \square

Falta verificar se a substituição força o bordo com o ladrilho $t = 0$. De fato, seguem as possibilidades para $T(t)$ (baseando-se no último lema):

$$0t1 \quad 1t0 \quad 1t1$$

Aplicando ω temos

$$01\omega(t)0 \quad 0\omega(t)01 \quad 0\omega(t)0$$

Portanto $T(\omega(t))$ nesses casos são

$$1\omega(t)0 \quad 0\omega(t)0$$

Portanto ω não força o bordo para $k = 1$.

Vejam os se ω força o bordo para $k = 2$. Vamos aplicar ω em todas as possibilidades para $T(\omega(0))$ descritas acima:

$$0\omega^2(t)01 \quad 01\omega^2(t)01$$

Novamente, temos possibilidades distintas para $T(\omega^2(0))$, e elas são

$$0\omega^2(t)0 \quad 1\omega^2(t)0$$

Portanto ω não força o bordo para $k = 2$.

Note que isto acontecerá repetidamente, observe o diagrama de conjuntos $T(\omega^k(t))$ a seguir:

$$\begin{aligned} 0t1 &\mapsto 1\omega(t)0 \mapsto 0\omega^2(t)0 \mapsto 1\omega^3(t)0 \mapsto \dots \\ 1t0 &\mapsto 0\omega(t)0 \mapsto 1\omega^2(t)0 \mapsto 0\omega^3(t)0 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Em geral podemos tomar $t = 0$, $T = \dots 001 \dots$ e $T' = \dots 100 \dots$ e então teremos:

- Se $k \neq 0$ e par então $T(\omega^k(t)) = 0\omega^k(t)0$ e $T'(\omega^k(t)) = 1\omega^k(t)0$, que não coincidem.
- Se k é ímpar então $T(\omega^k(0)) = 1\omega^k(0)0$ e $T'(\omega^k(0)) = 0\omega^k(0)0$, que não coincidem.

Logo, ω não força o bordo.

Portanto, pelo teorema 91, nos interessa o conjunto Γ_1 ; isto é, o complexo associado ao ladrilhamento considerando coroas de ladrilhos.

Considere o protoladrilho 0 e vamos analisar que possibilidades de coroas temos. Na figura 12 há um exemplo. Vamos denotar esta coroa por três algarismos, que são os três números que aparecem na ordem de leitura da identificação. Também de acordo com figura 12, esta coroa seria o 001. Seguindo desta forma conseguimos quatro coroas na cadeia Fibonacci, a menos de translação: 001, 100, 101 e 010 (note que não figuram neste ladrilhamento dois números 1 seguidos e nem mais de dois números zero seguidos). Chamemos estas coroas de a , b , c e d , respectivamente.

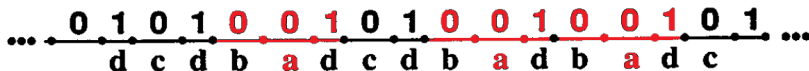


Figura 12: Identificação das coroas.

Na identificação dos vértices, obtemos três deles: o que separa 0 de 0, o que separa 0 de 1 e o que separa 1 de 0 (lembre que não há dois 1 seguidos na cadeia Fibonacci). Chamá-los-emos, respectivamente, de α , β e γ .

Usando a orientação de leitura (da esquerda para a direita), temos o complexo celular associado à cadeia Fibonacci, o qual está ilustrado a seguir:

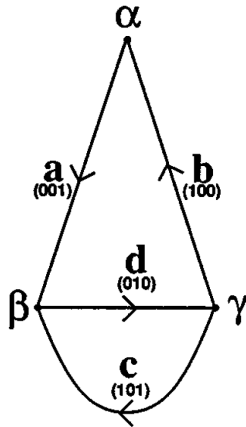


Figura 13: Complexo associado à cadeia Fibonacci.

Note que o complexo celular tem três vértices e quatro arestas, ou seja, $V = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ e $E = \{a, b, c, d\}$. Logo $C^0 \simeq \mathbb{Z}^3$ e $C^1 \simeq \mathbb{Z}^4$. Portanto temos

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_2} \{0\}.$$

Vamos analisar o comportamento das funções ∂_i para $i = 0, 1, 2$.

- $\partial_0 = 0$ e, portanto, $\text{Im}(\partial_0) = \{0\}$
- ∂_1 é definida por $f \in C^0 \mapsto \partial_1 f \in C^1$ em que

$$\begin{aligned} \partial_1 f(a) &= f(t(a)) - f(i(a)) = f(\beta) - f(\alpha); \\ \partial_1 f(b) &= f(t(b)) - f(i(b)) = f(\alpha) - f(\gamma); \\ \partial_1 f(c) &= f(t(c)) - f(i(c)) = f(\beta) - f(\gamma); \\ \partial_1 f(d) &= f(t(d)) - f(i(d)) = f(\gamma) - f(\beta). \end{aligned}$$

Note que $\partial_1 f = 0$ se, e somente se,

$$\partial_1 f(a) = \partial_1 f(b) = \partial_1 f(c) = \partial_1 f(d) = 0,$$

ou seja, $f(\beta) - f(\alpha) = f(\alpha) - f(\gamma) = f(\beta) - f(\gamma) = f(\gamma) - f(\beta) = 0$, isto é, $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$.

Portanto o núcleo de ∂_1 é o conjunto das funções $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$, isto é, o conjunto das funções constantes. Com o isomorfismo $C^0 \simeq \mathbb{Z}^3$ identificamos as funções constantes com o conjunto $\{(z, z, z) \mid z = f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Segue que $\ker \partial_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Note que isto vale qualquer que seja o complexo celular pois segue somente da definição de ∂_1 como diferença de pares de vértices.

Quanto à imagem, note que temos a seguinte representação matricial para ∂_1 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a terceira coluna é o oposto da soma das outras duas e as duas primeiras colunas são linearmente independentes então o posto de ∂_1 é igual a 2. Logo $\text{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^2$ e seus geradores são $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $u_2 = (1, 0, 1, -1)$.

- $\partial_2 = 0$ e, portanto, $\ker(\partial_2) \simeq \mathbb{Z}^4$.

Portanto,

$$\begin{aligned} H^0(\Gamma_1) &= \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_0) \simeq \mathbb{Z} / \{0\} \simeq \mathbb{Z} \\ H^1(\Gamma_1) &= \ker(\partial_2) / \text{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^4 / \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Note que H^0 sempre é igual a \mathbb{Z} pois $\ker(\partial_1)$ e $\text{Im}(\partial_0)$ são sempre isomorfos a \mathbb{Z} e a $\{0\}$, respectivamente.

Agora vamos ver o comportamento de γ_1^* definido na página 67 a fim de determinar $H^0(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$.

5.1.1 Determinando $H^0(\Omega)$

O vértice α , que é o vertice que separa dois zeros consecutivos (denotado por 0.0) é levado pela substituição ao vértice γ , que é o

vértice 1.0 pois $\omega(0.0) = \omega(0).\omega(0) = \mathbf{01.01}$. Fazendo isto para os outros vértices temos:

$$\begin{aligned}\beta = 0.1 &\mapsto \mathbf{01.0} = \gamma; \\ \gamma = 1.0 &\mapsto \mathbf{0.01} = \alpha.\end{aligned}$$

Portanto a função γ_1^* é, de acordo com a definição dada na página 67, dada por $f \in H^i(\Gamma_1) \mapsto \partial_1^* f \in H^i(\Gamma_1)$ em que

$$\begin{aligned}\gamma_1^* f(\alpha) &= f(\gamma); \\ \gamma_1^* f(\beta) &= f(\gamma); \\ \gamma_1^* f(\gamma) &= f(\alpha).\end{aligned}$$

Matricialmente, γ_1^* fica assim: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cujo posto é 2.

Se o posto fosse 3 (dimensão da matriz) então γ_1^* seria imediatamente um isomorfismo e aí o exemplo 89 da página 70 resolveria este problema facilmente, pois neste caso $H^0(\Omega) = H^0(\Gamma_1)$. Como não é, devemos descobrir o comportamento da função $\gamma_1^* : H^0(\Gamma_1) \rightarrow H^0(\Gamma_1)$ quando olhado sob a ótica $\gamma_1^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Se soubermos o valor que o homomorfismo γ_1^* toma em $1 \in \mathbb{Z}$, saberemos o valor em todos os números inteiros pois $\gamma_1^*(z) = z\gamma_1^*(1)$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, vejamos qual o valor de $\gamma_1^*(1)$.

Pelo isomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ da página 77 temos que $1 \in \mathbb{Z} \mapsto (1, 1, 1) \in \mathbb{Z}$. Aplicando γ_1^* em $(1, 1, 1)$ temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto γ_1^* é a função identidade, o qual, por sua vez, é um isomorfismo. Logo $H^0(\Omega) = H^0(\Gamma_1) = \mathbb{Z}$.

5.1.2 Determinando $H^1(\Omega)$

A letra a representa a coroa $\mathbf{001}$. Aplicando a substituição nesta coroa temos

$$\omega(\mathbf{001}) = \omega(0)\omega(\mathbf{0})\omega(1) = \mathbf{01010} = \mathbf{0dcd0}.$$

Portanto a coroa de a é levada na coroa de cd . Segue que

$$\gamma_1^* f(a) = f(c) + f(d).$$

Façamos isto para as outras possíveis coroas:

$$b = 100 \quad \mapsto \quad 00101 = 0\mathbf{ad}c1$$

$$c = 101 \quad \mapsto \quad 0010 = 0\mathbf{ad}0$$

$$d = 010 \quad \mapsto \quad 01001 = 0\mathbf{d}ba1$$

Logo,

$$\gamma_1^* f(b) = f(a) + f(d)$$

$$\gamma_1^* f(c) = f(a) + f(d)$$

$$\gamma_1^* f(d) = f(b)$$

Portanto a matriz de γ_1^* fica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Note que a quarta coluna

é a soma da primeira com a terceira colunas, enquanto que todas as outras são linearmente independentes. Logo o posto de γ_1^* é igual a 3, o qual é diferente da ordem da matriz. Portanto não podemos garantir que γ_1^* seja um isomorfismo.

Como $H^1(\Gamma_1) \simeq \mathbb{Z}^2$ então vamos convencionar dois representantes para as classes $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Estes representantes devem ser linearmente independentes no espaço $H^1(\Gamma_1)$, isto é, um não pode ser o múltiplo do outro.

Um elemento de $H^1(\Gamma_1)$ é uma classe de equivalência de funções em $\ker(\partial_2) = C^2 \simeq \mathbb{Z}^4$ em que o elemento $(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4$ representa a função $f \in C^2 = \{f : E \rightarrow \mathbb{Z}\}$ definida por $f(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = z$ e $f(d) = w$. Dois elementos de \mathbb{Z}^4 são equivalentes se sua diferença pertence à imagem de ∂_1 , isto é, é uma combinação linear dos vetores $(-1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1, -1)$ (apresentados na página 77).

Primeiramente mostremos que $(0, 0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^4$ não pertence a classe de $(0, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4$. De fato, a diferença é $(0, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0)$, o qual não é combinação linear de u_1 e u_2 (a menos que se use a combinação linear nula).

Vamos, portanto, convencionar que o par $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ equivale ao elemento $(0, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4$ e o par $(0, 1) \in \mathbb{Z}^2$ equivale ao elemento

$(0, 0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^4$. Aplicando γ_1^* nestes elementos temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note que $(0, 0, 0, 1)$ pertence à classe de $(0, 1, 1, 0)$ pois

$$(0, 0, 0, 1) - (0, 1, 1, 0) = (0, -1, -1, 1) = -u_1 - u_2$$

e $(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 0)$. Esta é a soma dos pares $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Portanto, $(0, 1, 1, 0)$ equivale ao par $(1, 1)$.

Temos, portanto,

$$(1, 0) \mapsto (0, 1, 0, 0) \xrightarrow{\gamma_1^*} (0, 0, 0, 1) \mapsto (1, 1);$$

$$(0, 1) \mapsto (0, 0, 1, 0) \xrightarrow{\gamma_1^*} (1, 0, 0, 0) \mapsto (1, 0).$$

Segue que o sistema direto $(H^1(\Gamma_1), \gamma_1^*)$ é dado por (\mathbb{Z}^2, φ) em que φ é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, o qual é um isomorfismo. Logo

$$H^1(\Omega) = H^1(\Gamma_1) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

5.2 LADRILHAMENTO THUE MORSE

O ladrilhamento Thue Morse é dado pela seguinte regra de substituição:

$$\begin{array}{ccc} \text{---} \mathbf{0} \text{---} & \rightarrow & \text{---} \mathbf{0} \mathbf{1} \text{---} \\ \text{---} \mathbf{1} \text{---} & \rightarrow & \text{---} \mathbf{1} \mathbf{0} \text{---} \end{array}$$

Ou, simbolicamente: $0 \mapsto 01$ e $1 \mapsto 10$.

Note que os comprimentos dos segmentos são os mesmos, portanto $\lambda = 2$. É imediato que esta regra de substituição é primitiva pois, na primeira iteração, ambos os protoladrilhos têm imagens que contém cópias de todos os protoladrilhos.

Segue um padrão deste ladrilhamento (já identificando algumas coroas):

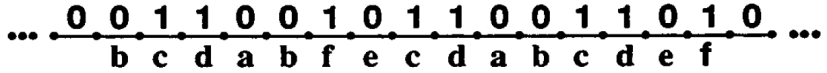


Figura 14: As letras representam as coroas.

De forma análoga ao do ladrilhamento Fibonacci, prova-se que não é possível ter três ladrilhos 0 seguidos. Portanto para mostrar que a substituição não força o bordo, basta verificar para os seguintes casos:

$$0t1 \quad 1t0 \quad 1t1$$

Vamos ver como são os padrões $T(\omega^k(0))$:

$$\begin{aligned} 0t1 &\mapsto 1\omega(t)1 \mapsto 0\omega^2(t)1 \mapsto 1\omega^3(t)1 \mapsto \dots \\ 1t0 &\mapsto 0\omega(t)0 \mapsto 1\omega^2(t)0 \mapsto 0\omega^3(t)0 \mapsto \dots \\ 1t1 &\mapsto 0\omega(t)1 \mapsto 1\omega^2(t)1 \mapsto 0\omega^3(t)1 \mapsto \dots \end{aligned}$$

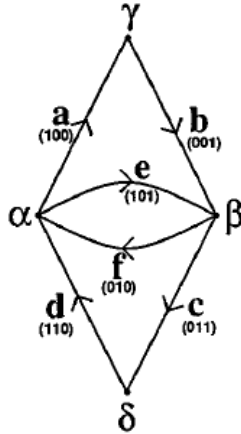
Note que se $T = \dots 001\dots$ e $T' = \dots 100\dots$ então temos os seguintes casos:

k par: Neste caso $T(\omega^k(0)) = 0\omega^k(0)1 \neq 1\omega^k(0)0 = T'(\omega^k(0))$.

k ímpar: Neste caso $T(\omega^k(0)) = 1\omega^k(0)1 \neq 0\omega^k(0)0 = T'(\omega^k(0))$.

Logo ω não força o bordo.

Portanto, pelo teorema 91 temos que $H^i(\Omega) \simeq \varinjlim (H^i(\Gamma_1), \gamma_1^*)$. Fazendo as devidas identificações no ladrilhamento Thue Morse (usando como referência a figura 14) temos o seguinte complexo celular:



As orientações foram dadas baseando-se na ordem de leitura do ladrilhamento unidimensional (da esquerda para a direita).

Temos, pois, $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Logo,

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{\partial_2} \{0\}.$$

A função ∂_1 toma uma função $g : V \rightarrow \mathbb{Z}$ e a leva a uma função $\partial_1 g : E \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$\begin{aligned} \partial_1 g(a) &= g(\gamma) - g(\alpha) \\ \partial_1 g(b) &= g(\beta) - g(\gamma) \\ \partial_1 g(c) &= g(\delta) - g(\beta) \\ \partial_1 g(d) &= g(\alpha) - g(\delta) \\ \partial_1 g(e) &= g(\beta) - g(\alpha) \\ \partial_1 g(f) &= g(\alpha) - g(\beta) \end{aligned}$$

A matriz da função ∂_1 é a seguinte: $\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Note que a quarta coluna é o oposto da soma das outras três, as quais, por sua vez, são linearmente independentes. Portanto $\text{Im}(\partial_1) =$

\mathbb{Z}^3 . Um possível conjunto de geradores para $\text{Im}(\partial_1)$ é a lista de vetores:

$$\begin{aligned} &(-1, 0, 0, 1, -1, 1) \quad , \\ &(0, 1, -1, 0, 1, -1) \quad e \\ &(1, -1, 0, 0, 0, 0) \quad . \end{aligned}$$

Já vimos que $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}$ independente do ladrilhamento. Logo,

$$\begin{aligned} H^0(\Gamma_1) &= \ker(\partial_1)/\text{Im}(\partial_0) \simeq \mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}; \\ H^1(\Gamma_1) &= \ker(\partial_2)/\text{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^6/\mathbb{Z}^3 \simeq \mathbb{Z}^3. \end{aligned}$$

5.2.1 Determinando $H^0(\Omega)$

Verifiquemos o comportamento da substituição nos vértices:

$$\begin{aligned} \alpha = 1.0 &\mapsto \mathbf{10.01} = \gamma \\ \beta = 0.1 &\mapsto \mathbf{01.10} = \delta \\ \gamma = 0.0 &\mapsto \mathbf{01.01} = \alpha \\ \delta = 1.1 &\mapsto \mathbf{10.10} = \beta \end{aligned}$$

Portanto a matriz de γ_1^* é $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cujo posto é 4 (que é igual à dimensão da matriz) e, portanto, γ_1^* é um isomorfismo. Logo $H^0(\Omega) = H^0(\Gamma_1) = \mathbb{Z}$

5.2.2 Determinando $H^1(\Omega)$

Verifiquemos o comportamento da substituição nas coroas:

$$\begin{aligned}
 a = 100 &\mapsto 100101 = \mathbf{abfe} \\
 b = 001 &\mapsto 010110 = \mathbf{fecd} \\
 c = 011 &\mapsto 011010 = \mathbf{cdef} \\
 d = 110 &\mapsto 101001 = \mathbf{efab} \\
 e = 101 &\mapsto 100110 = \mathbf{abcd} \\
 f = 010 &\mapsto 011001 = \mathbf{cdab}
 \end{aligned}$$

Portanto $\gamma_1^* : H^0(\Gamma_1) \rightarrow H^0(\Gamma_1)$ toma uma função $g \in H^0(\Gamma_1)$ e a leva na função $\gamma_1^*g \in H^0(\Gamma_1)$ dada por

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^*g(a) &= g(b) + g(f) \\
 \gamma_1^*g(b) &= g(e) + g(c) \\
 \gamma_1^*g(c) &= g(d) + g(e) \\
 \gamma_1^*g(d) &= g(f) + g(a) \\
 \gamma_1^*g(e) &= g(b) + g(c) \\
 \gamma_1^*g(f) &= g(d) + g(a)
 \end{aligned}$$

Portanto sua matriz é $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cujo posto é 5. De fato,

note que as cinco primeiras colunas são linearmente independentes e a última é combinação linear das outras. Com efeito, sendo c_i a i -ésima coluna dessa matriz tem-se que

$$c_5 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4 + c_5$$

e, portanto, o posto da matriz não é a sua dimensão. Logo não podemos garantir que γ_1^* seja um isomorfismo.

Como $H^1(\Gamma_1) \simeq \mathbb{Z}^3$ então vamos definir representantes para as

classes de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Considere os vetores:

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 1, 0, 0, 1, 0) \\ f_2 &= (0, 0, 1, 1, 0, 1) \\ f_3 &= (0, 1, 0, -1, 1, -1) \end{aligned}$$

Em seguida provaremos que estes vetores são linearmente independentes no conjunto quociente, isto é, nenhum destes vetores pertence à classe de outro, nem de uma combinação linear dos outros.

Mostremos primeiro que f_2 não pertence à classe de λf_1 , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. De fato, para que f_2 pertença à classe de λf_1 é necessário que $f_2 - \lambda f_1 = (-\lambda, -\lambda, 1, 1, -\lambda, 1) \in \text{Im}(\partial_1)$, ou seja, é combinação linear dos vetores apresentados na página 83:

$$\begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema não tem solução, logo f_2 é linearmente independente de f_1 no conjunto quociente. De forma análoga se prova que f_3 não pertence à classe de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Vamos, portanto, convencionar

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3 &= [(1, 1, 0, 0, 1, 0)] \in \ker(\partial_2)/\text{Im}(\partial_1) \\ (0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^3 &= [(0, 0, 1, 1, 0, 1)] \in \ker(\partial_2)/\text{Im}(\partial_1) \\ (0, 0, 1) \in \mathbb{Z}^3 &= [(0, 1, 0, -1, 1, -1)] \in \ker(\partial_2)/\text{Im}(\partial_1) \end{aligned}$$

Aplicando γ_1^* temos

$$\begin{aligned} \gamma_1^*(1, 1, 0, 0, 1, 0) &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \gamma_1^*(0, 0, 1, 1, 0, 1) &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \gamma_1^*(0, 1, 0, -1, 1, -1) &= (0, 1, 0, -1, 1, -1) \end{aligned}$$

Note que $(1, 1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 0, 0, 1, 0) + (0, 0, 1, 1, 0, 1)$, então

$$\begin{aligned} [(1, 1, 1, 1, 1, 1)] &= [(1, 1, 0, 0, 1, 0)] + [(0, 0, 1, 1, 0, 1)] = \\ &= (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &\mapsto [(1, 1, 0, 0, 1, 0)] \xrightarrow{\gamma_1^*} [(1, 1, 1, 1, 1, 1)] && \mapsto (1, 1, 0) \\ (0, 1, 0) &\mapsto [(0, 0, 1, 1, 0, 1)] \xrightarrow{\gamma_1^*} [(1, 1, 1, 1, 1, 1)] && \mapsto (1, 1, 0) \\ (0, 0, 1) &\mapsto [(0, 1, 0, -1, 1, -1)] \xrightarrow{\gamma_1^*} [(1, 1, 1, 1, 1, 1)] && \mapsto (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Segue que $\gamma_1^* : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ é dado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Escrevendo $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}$ temos que $\gamma_1^* = f \oplus \text{Id}$ em que Id é o operador identidade e $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, portanto

$$\varinjlim(\mathbb{Z}^3, \gamma_1^*) = \varinjlim(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}, f \oplus \text{Id}).$$

Pela proposição 90,

$$\varinjlim(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}, f \oplus \text{Id}) = \varinjlim(\mathbb{Z}^2, f) \oplus \varinjlim(\mathbb{Z}, \text{Id}).$$

Já vimos no exemplo 89 que se φ é um isomorfismo então $\varinjlim(\mathbb{Z}, \varphi) = \mathbb{Z}$. Como Id é um isomorfismo então

$$\varinjlim(\mathbb{Z}^2, f) \oplus \varinjlim(\mathbb{Z}, \text{Id}) = \varinjlim(\mathbb{Z}^2, f) \oplus \mathbb{Z}.$$

Falta calcular $\varinjlim(\mathbb{Z}^2, f)$. Note que

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (a + b, a + b) & \mapsto & 2(a + b, a + b) & \mapsto & 4(a + b, a + b) \end{array} .$$

Observe que $f(x) = 2x$ para todo x na diagonal de \mathbb{Z}^2 , e logo na primeira aplicação de f temos que sua imagem está contida na diagonal de \mathbb{Z}^2 .

Portanto considerando a função $\pi : (x, x) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto x \in \mathbb{Z}$ temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & \\ & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \rightarrow \dots \end{array} .$$

Do exemplo 88 temos que $\varinjlim(\mathbb{Z}, \times 2) = \mathbb{Z}[1/2]$. Como o diagrama

acima comuta então também vale que $\varinjlim(\mathbb{Z}^2, f) = \mathbb{Z}[1/2]$. Conclusão:

$$H^1(\Omega) = \mathbb{Z}[1/2] \oplus \mathbb{Z}.$$

5.3 LADRILHAMENTO OCTOGONAL

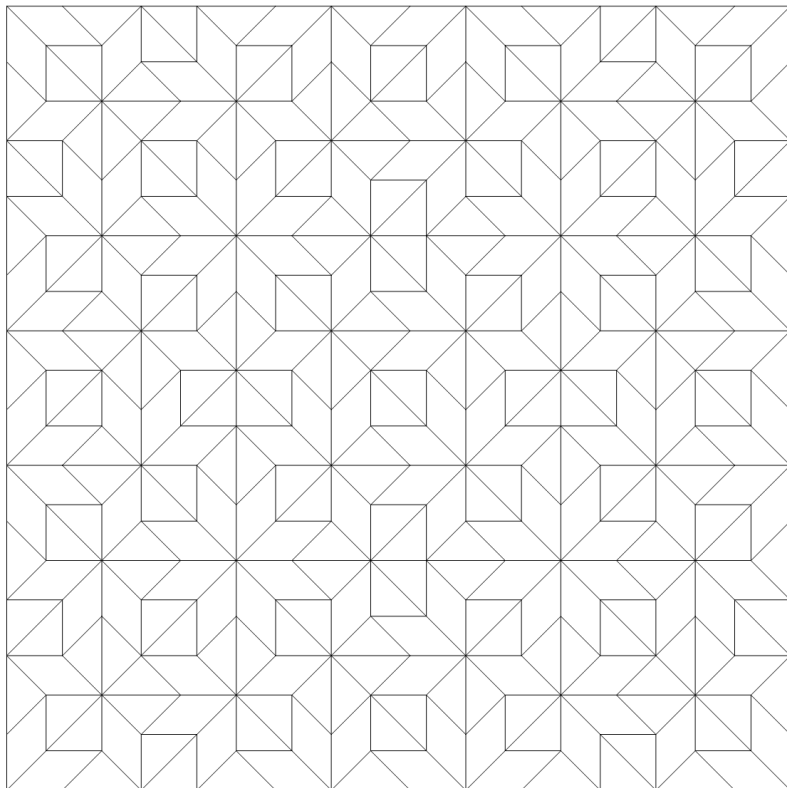


Figura 15: O ladrilhamento Octogonal

O ladrilhamento octogonal é construído a partir da substituição indicada na figura 16 abaixo.

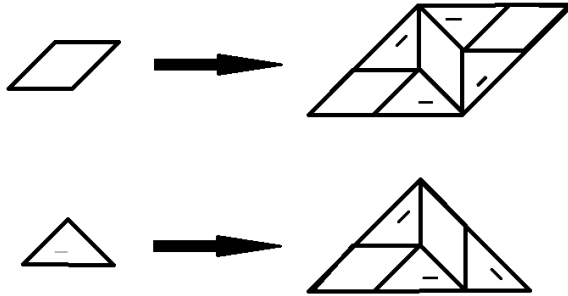


Figura 16: Substituição do Ladrilhamento Octogonal.

Neste caso $\lambda = 1 + \sqrt{2}$. Não são só estes ladrilhos que figuram no ladrilhamento, mas também todas as rotações em $n\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$, bem como todas as reflexões em torno de suas fronteiras. A substituição nestes casos se estende de maneira natural: por simetria. Dessa forma, um ladrilhamento octogonal tem 20 protoladrilhos: 4 rotações de losangos e 16 rotações de triângulos. Com poucas iterações se verifica que esta substituição é primitiva.

A regra de substituição do ladrilhamento octogonal força o bordo (KELLENDONK; PUTNAM, 2000). Portanto estamos interessados em calcular o grupo de cohomologia dos espaços Γ_0 , o qual é construído através dos protoladrilhos.

Ao final do processo observamos que são identificados 16 arestas e somente 1 vértice. Com estas informações podemos construir o complexo associado ao ladrilhamento octogonal (ver página 89). As orientações dadas foram arbitrárias.

Como são identificados 1 vértice, 16 arestas e 20 ladrilhos então temos

$$\begin{aligned} V &= \{v\}, \\ E &= \{e_1, e_2, \dots, e_{16}\}, \\ F &= \{t_1, t_2, \dots, t_{20}\}; \end{aligned}$$

em que a numeração dos índices corresponde à numeração da figura 17.

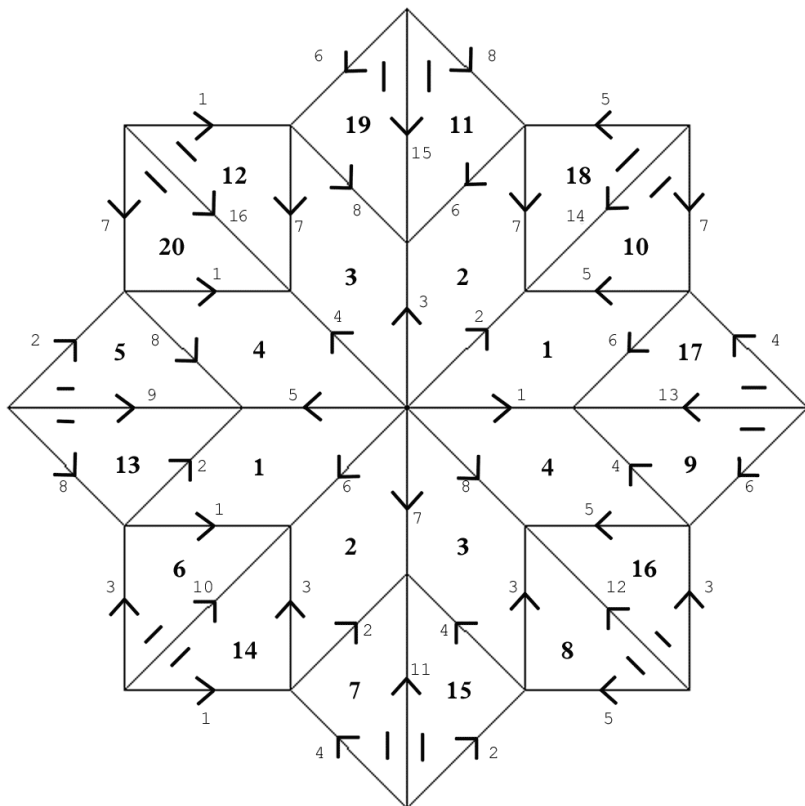


Figura 17: Complexo associado ao ladrilhamento octogonal.

Segue que

$$\begin{aligned} C^0 &\simeq \mathbb{Z}, \\ C^1 &\simeq \mathbb{Z}^{16}, \\ C^2 &\simeq \mathbb{Z}^{20}; \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^{16} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{20} \xrightarrow{\partial_3} \{0\}.$$

Como já vimos anteriormente, $H^0(\Gamma_0) = \mathbb{Z}$. Vamos estudar as funções ∂_1 , ∂_2 e ∂_3 a fim de determinar os grupos faltantes $H^1(\Gamma_0)$ e $H^2(\Gamma_0)$.

Como só há 1 vértice no complexo celular então todas as arestas têm pontos inicial e terminal iguais. Então para toda $f \in C^0$ tem-se que

$$\partial_1 f(e) = f(t(e)) - f(i(e)) = f(v) - f(v) = 0.$$

Logo $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}$ (o que já sabíamos) e $\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$.

Por definição, $\partial_3 = \{0\}$ e, portanto, $\ker(\partial_3) = \mathbb{Z}^{20}$ e $\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$.

Quanto à ∂_2 , dado $f \in C^1$, veja página 91 para saber o valor de $\partial_2 f$ em cada ladrilho. Foi usada a figura da página 89 como referência e a orientação convencionalizada foi a anti-horária.

A matriz referente a esta função tem dimensões muito grandes para ser inserida aqui. Ela pode ser encontrada na página 92.

$$\begin{aligned}
\partial_2 f(t_1) &= f(e_1) - f(e_6) + f(e_5) - f(e_2) \\
\partial_2 f(t_2) &= f(e_2) - f(e_7) + f(e_6) - f(e_3) \\
\partial_2 f(t_3) &= f(e_3) - f(e_8) + f(e_7) - f(e_4) \\
\partial_2 f(t_4) &= f(e_4) - f(e_1) + f(e_8) - f(e_5) \\
\partial_2 f(t_5) &= f(e_9) - f(e_8) - f(e_2) \\
\partial_2 f(t_6) &= f(e_{10}) - f(e_1) - f(e_3) \\
\partial_2 f(t_7) &= f(e_{11}) - f(e_2) - f(e_4) \\
\partial_2 f(t_8) &= f(e_{12}) - f(e_3) - f(e_5) \\
\partial_2 f(t_9) &= f(e_{13}) - f(e_4) - f(e_6) \\
\partial_2 f(t_{10}) &= f(e_{14}) - f(e_5) - f(e_7) \\
\partial_2 f(t_{11}) &= f(e_{15}) - f(e_6) - f(e_8) \\
\partial_2 f(t_{12}) &= f(e_{16}) - f(e_7) - f(e_1) \\
\partial_2 f(t_{13}) &= f(e_8) + f(e_2) - f(e_9) \\
\partial_2 f(t_{14}) &= f(e_1) + f(e_3) - f(e_{10}) \\
\partial_2 f(t_{15}) &= f(e_2) + f(e_4) - f(e_{11}) \\
\partial_2 f(t_{16}) &= f(e_3) + f(e_5) - f(e_{12}) \\
\partial_2 f(t_{17}) &= f(e_4) + f(e_6) - f(e_{13}) \\
\partial_2 f(t_{18}) &= f(e_5) + f(e_7) - f(e_{14}) \\
\partial_2 f(t_{19}) &= f(e_6) + f(e_8) - f(e_{15}) \\
\partial_2 f(t_{20}) &= f(e_7) + f(e_1) - f(e_{16})
\end{aligned}$$

O posto de ∂_2 é 11, então $\text{Im}(\partial_2) \simeq \mathbb{Z}^{11}$. Pelo teorema do núcleo e imagem, o núcleo deve ter dimensão 5. De fato, $\ker(\partial_2) \simeq \mathbb{Z}^5$ e é gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1); \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0); \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1); \\ v_4 &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1); \\ v_5 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_0) &= \ker(\partial_2)/\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}^5/\{0\} \simeq \mathbb{Z}^5; \\ H^2(\Gamma_0) &= \ker(\partial_3)/\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}^{20}/\mathbb{Z}^{11} \simeq \mathbb{Z}^9. \end{aligned}$$

5.3.1 Determinando $H^0(\Omega)$

Como já vimos, $H^0(\Gamma_0) = \mathbb{Z}$ e, portanto, só possui um gerador. Logo γ_0^* é sempre um isomorfismo, donde $H^0(\Omega) = H^0(\Gamma_0) = \mathbb{Z}$.

5.3.2 Determinando $H^1(\Omega)$

Vamos ver o comportamento da substituição nas arestas. Para isso, usaremos como exemplo as substituições da figura 16, mais especificamente as bases dos ladrilhos (que no complexo celular são as arestas e_1 e e_9). É fácil ver que é possível extrair todas as substituição usando como referência a figura da página 89.

Note que a base do losango da figura 16, que é a aresta e_1 do complexo celular, é levado, na substituição, para as bases dos ladrilhos t_1 e t_{17} do complexo celular. Essas bases são as arestas e_1 e e_{13} . Portanto para toda $f \in H^1(\Gamma_0)$ tem-se

$$\gamma_0^* f(e_1) = f(e_1) + f(e_{13}).$$

Por outro lado, a base do triângulo da figura 16, que é a aresta e_9 do complexo celular, é levado, na substituição, para as bases dos ladrilhos t_1 , t_{17} e t_8 do complexo celular. Essas bases são as arestas e_1 ,

e_{13} e e_5 . Portanto para toda $f \in H^1(\Gamma_0)$ tem-se

$$\gamma_0^* f(e_1) = f(e_1) + f(e_{13}).$$

Ou seja, se $f \in H^1(\Gamma_0)$ então $\gamma_0^* f$ é dado por:

$$\begin{aligned} \gamma_0^* f(e_1) &= f(e_1) - f(e_{13}); \\ \gamma_0^* f(e_2) &= f(e_2) - f(e_{14}); \\ \gamma_0^* f(e_3) &= f(e_3) - f(e_{15}); \\ \gamma_0^* f(e_4) &= f(e_4) - f(e_{16}); \\ \gamma_0^* f(e_5) &= f(e_5) - f(e_9); \\ \gamma_0^* f(e_6) &= f(e_6) - f(e_{10}); \\ \gamma_0^* f(e_7) &= f(t_7) - f(t_{11}); \\ \gamma_0^* f(e_8) &= f(t_8) - f(t_{12}); \\ \gamma_0^* f(e_9) &= f(t_1) - f(t_5) - f(t_{13}); \\ \gamma_0^* f(e_{10}) &= f(t_2) - f(t_6) - f(t_{14}); \\ \gamma_0^* f(e_{11}) &= f(t_3) - f(t_7) - f(t_{15}); \\ \gamma_0^* f(e_{12}) &= f(t_4) - f(t_8) - f(t_{16}); \\ \gamma_0^* f(e_{13}) &= -f(t_1) + f(t_5) - f(t_9); \\ \gamma_0^* f(e_{14}) &= -f(t_2) + f(t_6) - f(t_{10}); \\ \gamma_0^* f(e_{15}) &= -f(t_3) + f(t_7) - f(t_{11}); \\ \gamma_0^* f(e_{16}) &= -f(t_4) + f(t_8) - f(t_{12}). \end{aligned}$$

Sua representação matricial pode ser encontrada na próxima página.

O posto desta matriz coincide com sua dimensão: 16. Portanto γ_0^* é um isomorfismo entre os espaços $H^1(\Gamma_0)$. Logo o limite direto do sistema direto $(H^1(\Gamma_0), \gamma_0^*)$ é igual a $H^1(\Gamma_0)$. Pelo teorema 91, tem-se que

$$H^1(\Omega) = H^1(\Gamma_0) = \mathbb{Z}^5$$

5.3.3 Determinando $H^2(\Omega)$

Vamos ver o comportamento da substituição nos ladrilhos. Novamente iremos usar como exemplo os ladrilhos da figura 16 (que no complexo celular são os ladrilhos t_1 e t_5) e depois fica claro que é possível extrair todas as substituições através da figura da página 89.

Note que o ladrilho t_1 , ao ser substituído, apresenta 2 cópias do ladrilho t_1 e 1 cópia dos ladrilhos t_3 , t_6 , t_{10} , t_{13} e t_{17} . Portanto se $f \in H^2(\Gamma_0)$ então γ_0^*f avaliado em t_1 é dado por

$$\gamma_0^*f(t_1) = 2f(t_1) + f(t_3) + f(t_6) + f(t_{10}) + f(t_{13}) + f(t_{17}).$$

Quanto ao ladrilho t_5 , note que sua substituição contém uma cópia dos ladrilhos t_1 , t_3 , t_8 , t_{10} e t_{17} . Portanto se $f \in H^2(\Gamma_0)$ então γ_0^*f avaliado em t_5 é dado por

$$\gamma_0^*f(t_5) = f(t_1) + f(t_3) + f(t_8) + f(t_{10}) + f(t_{17}).$$

Ou seja, se $f \in H^2(\Gamma_0)$ então γ_0^*f é dado pelos valores apresentados na página 97 e sua matriz é a da página 98.

$$\begin{aligned}
\gamma_0^* f(t_1) &= 2f(t_1) + f(t_3) + f(t_6) + f(t_{10}) + f(t_{13}) + f(t_{17}); \\
\gamma_0^* f(t_2) &= 2f(t_2) + f(t_4) + f(t_7) + f(t_{11}) + f(t_{14}) + f(t_{18}); \\
\gamma_0^* f(t_3) &= f(t_1) + 2f(t_3) + f(t_8) + f(t_{12}) + f(t_{15}) + f(t_{19}); \\
\gamma_0^* f(t_4) &= f(t_2) + 2f(t_4) + f(t_5) + f(t_9) + f(t_{16}) + f(t_{20}); \\
\gamma_0^* f(t_5) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_8) + f(t_{10}) + f(t_{17}); \\
\gamma_0^* f(t_6) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_9) + f(t_{11}) + f(t_{18}); \\
\gamma_0^* f(t_7) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_{10}) + f(t_{12}) + f(t_{19}); \\
\gamma_0^* f(t_8) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_5) + f(t_{11}) + f(t_{20}); \\
\gamma_0^* f(t_9) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_6) + f(t_{12}) + f(t_{13}); \\
\gamma_0^* f(t_{10}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_5) + f(t_7) + f(t_{14}); \\
\gamma_0^* f(t_{11}) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_6) + f(t_8) + f(t_{15}); \\
\gamma_0^* f(t_{12}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_7) + f(t_9) + f(t_{16}); \\
\gamma_0^* f(t_{13}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_9) + f(t_{16}) + f(t_{18}); \\
\gamma_0^* f(t_{14}) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_{10}) + f(t_{17}) + f(t_{19}); \\
\gamma_0^* f(t_{15}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_{11}) + f(t_{18}) + f(t_{20}); \\
\gamma_0^* f(t_{16}) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_{12}) + f(t_{13}) + f(t_{19}); \\
\gamma_0^* f(t_{17}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_5) + f(t_{14}) + f(t_{20}); \\
\gamma_0^* f(t_{18}) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_6) + f(t_{13}) + f(t_{15}); \\
\gamma_0^* f(t_{19}) &= f(t_2) + f(t_4) + f(t_7) + f(t_{14}) + f(t_{16}); \\
\gamma_0^* f(t_{20}) &= f(t_1) + f(t_3) + f(t_8) + f(t_{15}) + f(t_{17}).
\end{aligned}$$

O posto desta matriz coincide com sua dimensão: 20. Portanto γ_0^* é um isomorfismo entre os espaços $H^2(\Gamma_0)$. Logo o limite direto do sistema direto $(H^2(\Gamma_0), \gamma_0^*)$ é igual a $H^2(\Gamma_0)$. Pelo teorema 91, tem-se que

$$H^2(\Omega) = H^2(\Gamma_0) = \mathbb{Z}^9$$

5.4 LADRILHAMENTO TRI-QUADRADO

O ladrilhamento tri-quadrado é definido através da seguinte regra de substituição:

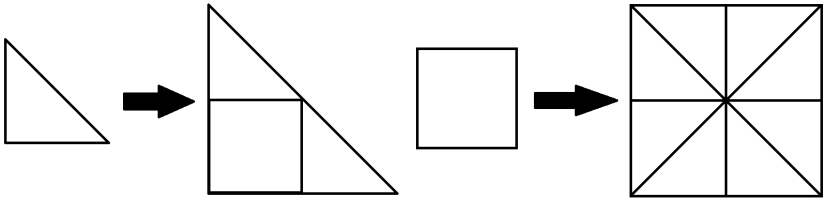


Figura 18: Substituição do ladrilhamento tri-quadrado

Os triângulos são retângulos isósceles e os quadrados tem medida de comprimento de lado igual à dos catetos dos triângulos. Portanto o fator de expansão desta substituição é $\lambda = 2$.

Note que na substituição do quadrado apareceram outros triângulos além do ilustrado do lado esquerdo. A regra nestes casos se estende por simetria. Portanto temos **cinco protoladrilhos** (quatro triângulos e um quadrado). Neste trabalho vamos efetuar, sem perda de generalidade, a substituição utilizando o quadrado como protoladrilho inicial.

Observe a seguir (figura 19) mais duas etapas da substituição (feitas sobre o patch à extrema direita da figura 18):

Note que ao sobrepor uma malha quadriculada sobre o ladrilhamento, como na figura 20 abaixo, obtemos um padrão de disposição de ladrilhos. Tendo em vista este padrão iremos representar simbolicamente o ladrilhamento tri-quadrado.

Baseado na figura 20, os quadrados (como o destacado em verde) serão simbolizados pela letra a , as formas como a destacada em azul serão simbolizados pela letra b e as como em amarelo pela letra c . Assim, o padrão acima é representado simbolicamente pela matriz:

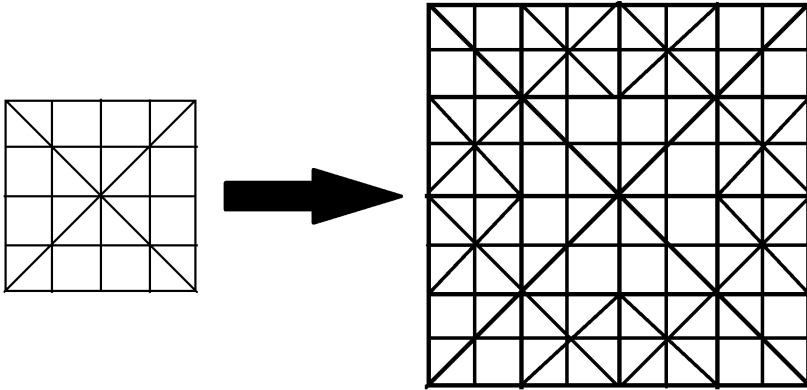


Figura 19: Um patch maior do ladrilhamento tri-quadrado

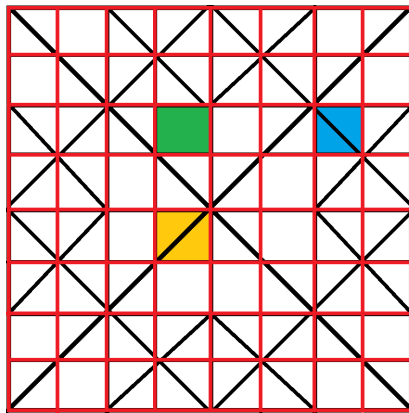


Figura 20: Malha quadriculada em vermelho e os padrões de disposição de ladrilhos

$$\begin{array}{cccccccc}
 b & a & b & c & b & c & a & c \\
 a & b & c & b & c & b & c & a \\
 b & c & b & a & a & c & b & c \\
 c & b & a & b & c & a & c & b \\
 b & c & a & c & b & a & b & c \\
 c & b & c & a & a & b & c & b \\
 a & c & b & c & b & c & b & a \\
 c & a & c & b & c & b & a & b
 \end{array} \tag{5.1}$$

E a substituição fica determinada da seguinte forma:

$$a \mapsto \begin{matrix} b & c \\ c & b \end{matrix} \quad b \mapsto \begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix} \quad c \mapsto \begin{matrix} a & c \\ c & a \end{matrix}$$

5.4.1 Bijetividade

Por definição ω é sobrejetiva. Para mostrar a injetividade iremos mostrar que podemos desconstruir a substituição. Isto é suficiente devido a seguinte proposição:

Proposição 94. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Se existir $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f : A \rightarrow A$ é a função identidade então f é injetiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$, então $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Como $g \circ f$ é a função identidade. Logo $x = y$ como queríamos demonstrar. \square

Temos que a substituição é dada pela seguinte regra simbólica:

$$a \mapsto \begin{matrix} b & c \\ c & b \end{matrix} \quad b \mapsto \begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix} \quad c \mapsto \begin{matrix} a & c \\ c & a \end{matrix}$$

Vamos nos referir a esses blocos 2×2 por *blocos fundamentais*. A seguir iremos descrever um algoritmo para desconstruir o ladrilhamento. O algoritmo consiste nos seguintes passos:

1. Procurar, para cada letra a , as seguintes coroas:

$$\begin{array}{cccccccc} x & \mathbf{b} & \mathbf{y} & & x & x & x & & \mathbf{y} & \mathbf{c} & x & & x & x & x \\ x & \mathbf{a} & \mathbf{b} & & \mathbf{b} & \mathbf{a} & x & & \mathbf{c} & \mathbf{a} & x & & x & \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ x & x & x & & \mathbf{y} & \mathbf{b} & x & & x & x & x & & x & \mathbf{c} & \mathbf{y} \end{array}$$

Neste capítulo, as letras x e y representam letras quaisquer (não necessariamente todos iguais).

2. Iremos demonstrar (proposição 96) que as letras y são iguais a a e, portanto, podemos desconstruir os blocos em vermelho para o protoladrilho b (nos dois casos à esquerda) ou c (nos dois casos à direita).

3. Para não haver ambiguidade, iremos demonstrar (proposição 97) que não ocorrerá os seguintes casos:

$$\begin{array}{cc} x & b & x & & x & c & x \\ b & a & b & & c & a & c \\ x & b & x & & x & c & x \end{array}$$

4. Com os passos acima, teremos garantido a desconstrução de todas as letras b e c . Os blocos que restarem serão mapeados na letra a .

Note que o ladrilhamento é composto por colagens dos blocos fundamentais. Então podemos tirar diversas conclusões sobre como esses blocos podem ser colados. Tais conclusões serão apresentados nos lemas a seguir:

Lema 95. *No ladrilhamento tri-quadrado não é possível encontrar quaisquer das seguintes adjacências:*

$$\begin{array}{ccc} b & b & \begin{array}{c} b \\ b \end{array} & c & c & c \\ & & & c & c & c \end{array}$$

Demonstração. Suponha, por absurdo e sem perda de generalidade, que exista $b \ b$ no ladrilhamento tri-quadrado.

Como b é imagem de a ou b então as únicas possibilidades de concatenar dois b 's são as seguintes:

$$a \ a \mapsto \begin{array}{cc} b & c \\ c & b \end{array} \quad a \ b \mapsto \begin{array}{cc} b & c \\ c & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} b & a \\ c & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} b & a \\ c & b \end{array}$$

$$b \ a \mapsto \begin{array}{cc} b & a \\ a & b \end{array} \quad b \ b \mapsto \begin{array}{cc} b & a \\ a & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} b & a \\ c & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} b & a \\ c & b \end{array}$$

Em todos os casos não há $b \ .$. Os outros casos se faz de forma análoga. \square

Proposição 96. *Sempre que houver os seguintes blocos*

$$\begin{array}{cc} b & y & b & a & y & c & a & c \\ a & b & y & b & c & a & c & y \end{array}$$

então $y = a$.

Demonstração. Iremos demonstrar o caso $\begin{smallmatrix} b & y \\ a & b \end{smallmatrix}$. Os casos seguintes se faz de forma análoga.

Pelo lema 95, $y \neq b$. Suponha, por absurdo, que $y = c$. Como $\begin{smallmatrix} b & c \\ a & b \end{smallmatrix}$ não é um bloco fundamental então temos que “montar” este bloco através de colagens de blocos fundamentais. Vamos tentar montar aquele bloco das seguintes maneiras:

$$\begin{array}{cccc} & & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{b} & c & x \\ \mathbf{x} & \mathbf{a} & b & x \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ & & a & b \\ & & x & x \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & x & x \\ \mathbf{x} & \mathbf{b} & c & x \\ x & a & \mathbf{b} & \mathbf{x} \\ x & x & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{array}$$

Note que, nos dois primeiros casos (da esquerda e do centro), não há blocos fundamentais que os satisfazem. No terceiro caso, note que só é possível ter duas pré-imagens:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{a} & a \\ b & \mathbf{a} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{cc} \mathbf{a} & c \\ b & \mathbf{a} \end{array}$$

Repetindo o raciocínio usado anteriormente, observamos que ambos não são blocos fundamentais. Portanto vamos identificar quais são os blocos fundamentais que os compõem.

No primeiro caso (da esquerda), como não há bloco fundamental com $a \ a$ ou $\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}$ então temos que analisar cada letra como sendo proveniente de um bloco fundamental. No entanto, para formarmos $\begin{smallmatrix} a & a \\ b & a \end{smallmatrix}$ teríamos que ter algum bloco fundamental com b na entrada $(1, 2)$, e isto não é possível. O caso do bloco $\begin{smallmatrix} a & c \\ b & a \end{smallmatrix}$ se faz de forma análoga.

Em todos os casos temos um absurdo. Logo nossa suposição de que $y = c$ é falsa. \square

Proposição 97. *No ladrilhamento tri-quadrado não é possível encontrar as seguintes vizinhanças para a letra a :*

$$\begin{array}{cc} x & b & y & & y & c & x \\ b & a & b & & c & a & c \\ y & b & x & & x & c & y \end{array}$$

Demonstração. Vamos demonstrar o caso em que a vizinhança de a é

o ilustrado no bloco do lado esquerdo. O outro caso é análogo.

Suponha, por absurdo, que tal bloco exista no ladrilhamento tri-quadrado. Pela proposição anterior, as letras y são iguais a b . A única maneira possível de colar os blocos fundamentais de forma que tenhamos o bloco desejado — e respeitando o lema 95 — é a seguinte:

$$\begin{array}{cccc}
 & & b & c & b & a \\
 a & b & & c & b & a & b \\
 b & a & \mapsto & b & a & b & c \\
 & & a & b & c & b
 \end{array}$$

Por sua vez, a única maneira de formar o bloco $\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}$ é usando $\begin{smallmatrix} b \\ b \end{smallmatrix}$. Contradição com o lema 95. □

Agora podemos usar o algoritmo descrito na página 101 para desconstruir este ladrilhamento. Conseqüentemente a substituição do ladrilhamento tri-quadrado é uma função injetiva e, portanto, o ladrilhamento tri-quadrado é um ladrilhamento aperiódico.

5.4.2 Forçar o bordo

Para mostrar que a substituição não força o bordo considere os conjuntos $T(a)$ e $T'(a)$ a seguir:

$$\begin{array}{cccccc}
 c & b & c & b & c & b \\
 b & a & a & a & a & c \\
 a & b & c & b & c & a
 \end{array} \tag{5.2}$$

Estes conjuntos foram retirados do padrão 5.1 acima.

Aplicando ω nestes blocos temos:

$$\begin{array}{cccccc}
 a & c & b & a & a & c & b & a & a & c & b & a \\
 c & a & a & b & c & a & a & b & c & a & a & b \\
 b & a & b & c & b & c & b & c & b & c & a & c \\
 a & b & c & b & c & b & c & b & c & b & c & a \\
 b & c & b & a & a & c & b & a & a & c & b & c \\
 c & b & a & b & c & a & a & b & c & a & c & b
 \end{array} \tag{5.3}$$

Como vimos, basta analisarmos o comportamento da substituição nos ladrilhos vizinhos. No ilustrado acima, tais ladrilhos estão destacados em vermelho. Para simplificar o raciocínio, vamos verificar o comporta-

mento da substituição somente nas palavras que ficam imediatamente acima de $\omega^k(a)$ ($k \in \mathbb{N}$). Se demonstrarmos que estas palavras nunca coincidem então o problema está resolvido.

Note que nos blocos 5.2, acima das letras a tínhamos as letras b e c . Nos blocos 5.3, as palavras que estão acima de $\omega(a)$ são ab e ca . Estas palavras são as segundas linhas dos blocos fundamentais de b e c . De fato, as palavras que estão imediatamente acima de $\omega^k(a)$ são sempre as segundas linhas da substituição. Então vamos considerar a substituição somente sobre a segunda linha dos blocos fundamentais (chama-lo-emos de ω_0):

$$a \mapsto cb \quad b \mapsto ab \quad c \mapsto ca$$

Vamos mostrar que, qualquer que seja a iteração k , as palavras $\omega_0^k(b)$ e $\omega_0^k(c)$ não coincidem. Isso demonstra que o ladrilhamento não força o bordo, uma vez que estas palavras pertencem ao conjunto $T(\omega^k(a))$.

Note que $\omega_0^2(b) = cbab$ e $\omega_0^2(c) = cacb$. Nestes casos temos que a primeira e última letras coincidem, então evidentemente nas próximas substituições as partes inicial e final das palavras $\omega_0^k(b)$ e $\omega_0^k(c)$ também serão iguais. Deste modo concluímos que, sempre que houver coincidência de letras em $\omega_0^k(b)$ e $\omega_0^k(c)$, podemos descartar tais letras e substituir apenas nas que diferem. Abaixo será apresentado uma tabela com as substituições sobre b e c , mas sempre que houver coincidência de letras em $\omega_0^k(b)$ e $\omega_0^k(c)$ elas serão descartadas nas próximas iterações:

x	$\omega_0(x)$	$\omega_0^2(x)$	$\omega_0^3(x)$	$\omega_0^4(x)$	$\omega_0^5(x)$
b	ab	$\cancel{c}ba\cancel{b}$	$a\cancel{b}c\cancel{b}$	$\cancel{c}b\cancel{c}a$	$a\cancel{b}c\cancel{b}$
c	ca	$\cancel{c}a\cancel{c}\cancel{b}$	$\cancel{c}b\cancel{a}\cancel{b}$	$\cancel{c}a\cancel{c}\cancel{b}$	$\cancel{c}b\cancel{a}\cancel{b}$

Note que no passo $k = 5$ temos repetição do passo $k = 3$. Assim, para qualquer iteração $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar duas letras a no ladrilhamento tri-quadrado com as vizinhanças descritas pelos blocos 5.2 e verificamos que a suas vizinhanças não coincidem.

Logo a substituição do ladrilhamento tri-quadrado não força o bordo.

5.4.3 Construção do complexo celular associado

Como a substituição do ladrilhamento tri-quadrado não força o bordo, então o complexo celular associado é relativo ao espaço Γ_1 , ou seja, os polígonos deste complexo são os ladrilhos do ladrilhamento

levando em conta suas adjacências, isto é, suas coroas.

Começamos com um padrão simples, digamos, $\omega^2(a)$:

$$\begin{array}{cccc}
 & & b & a & a & c \\
 a \xrightarrow{\omega} & b & c & \omega & a & \mathbf{b} & c & a \\
 & c & b & \xrightarrow{\omega} & a & c & b & a \\
 & & & & c & a & a & b
 \end{array}$$

Note que a letra b em destaque tem a vizinhança $a \mathbf{b} c$, vamos de-

notar esta vizinhança por b_1 e repetir o procedimento para as outras letras em destaque. É claro que não podemos analisar a vizinhança dos que estão na fronteira. Temos portanto:

$$\begin{array}{ccc}
 b & a & a \\
 b_1 = a & b & c \\
 & a & c & b
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 b & c & a \\
 b_2 = c & b & a \\
 & a & a & b
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & a & c \\
 c_1 = b & c & a \\
 & c & b & a
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 b & c & a \\
 c_2 = c & b & a \\
 & a & a & b
 \end{array}$$

Aplicando a substituição mais vezes, somos capazes de determinar todas as vizinhanças das letras. Veja as duas páginas a seguir para a lista completa.

$a_1 = \begin{matrix} c & b & c \\ b & a & a \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_2 = \begin{matrix} b & c & b \\ a & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$	$a_3 = \begin{matrix} c & b & a \\ b & a & b \\ c & a & c \end{matrix}$	$a_4 = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & c \\ b & a & b \end{matrix}$
$a_5 = \begin{matrix} b & a & b \\ c & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$	$a_6 = \begin{matrix} c & a & c \\ b & a & b \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_7 = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & a \\ b & c & b \end{matrix}$	$a_8 = \begin{matrix} c & b & a \\ a & a & b \\ c & b & c \end{matrix}$
$a_9 = \begin{matrix} c & b & a \\ b & a & b \\ a & a & c \end{matrix}$	$a_{10} = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & a \\ b & a & a \end{matrix}$	$a_{11} = \begin{matrix} c & b & a \\ a & a & b \\ a & a & c \end{matrix}$	$a_{12} = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & c \\ b & a & a \end{matrix}$
$a_{13} = \begin{matrix} c & b & a \\ b & a & a \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_{14} = \begin{matrix} b & a & b \\ a & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$	$a_{15} = \begin{matrix} c & a & a \\ b & a & a \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_{16} = \begin{matrix} a & a & b \\ a & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$
$a_{17} = \begin{matrix} c & a & c \\ b & a & a \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_{18} = \begin{matrix} a & c & b \\ a & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$	$a_{19} = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & a \\ b & a & b \end{matrix}$	$a_{20} = \begin{matrix} c & b & a \\ a & a & b \\ a & b & c \end{matrix}$
$a_{21} = \begin{matrix} a & c & b \\ c & a & a \\ b & c & a \end{matrix}$	$a_{22} = \begin{matrix} c & b & a \\ a & a & b \\ c & a & c \end{matrix}$	$a_{23} = \begin{matrix} c & a & a \\ b & a & b \\ a & b & c \end{matrix}$	$a_{24} = \begin{matrix} a & a & b \\ c & a & c \\ b & c & a \end{matrix}$

$$\begin{array}{cccc}
 b & a & a & b & c & a & b & a & b & b & c & b & b & c & b & c \\
 b_1 = a & b & c & b_2 = c & b & a & b_3 = a & b & c & b_4 = c & b & c & b & a & a & \\
 a & c & b & a & a & b & b & c & b & b & a & a & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 b & c & a & b & c & b & b & c & b & a & c & b & a & c & b & c \\
 b_5 = c & b & c & b_6 = c & b & a & b_7 = c & b & a & b_8 = a & b & c & b & c & b & \\
 a & c & b & b & a & b & b & c & a & b & c & b & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 a & a & b & b & c & b & b & a & a & a & a & b & a & a & b & c \\
 b_9 = c & b & c & b_{10} = c & b & a & b_{11} = a & b & c & b_{12} = a & b & c & b & c & b & \\
 b & c & b & b & a & a & b & c & b & b & c & b & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 b & c & a & b & a & b & b & c & b & b & c & a & b & c & a & c \\
 b_{13} = c & b & c & b_{14} = a & b & c & b_{15} = c & b & c & b_{16} = c & b & a & b & c & b & \\
 b & c & b & a & c & b & a & c & b & b & a & b & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 b & c & b & b & c & b \\
 b_{17} = c & b & a & b_{18} = c & b & c \\
 a & a & b & b & c & b
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 a & a & c & a & b & c & a & b & c & c & b & c & c & b & c & c \\
 c_1 = b & c & a & c_2 = a & c & b & c_3 = b & c & b & c_4 = b & c & b & a & a & c & \\
 c & b & a & c & a & a & c & b & a & a & a & c & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 c & a & c & c & b & c & c & b & c & c & b & a & c & b & a & c \\
 c_5 = b & c & a & c_6 = a & c & b & c_7 = a & c & b & c_8 = b & c & a & c & b & c & \\
 c & b & c & c & a & c & a & b & c & c & b & c & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 c & a & a & c & b & c & a & a & c & a & b & c & a & b & c & c \\
 c_9 = b & c & b & c_{10} = a & c & b & c_{11} = b & c & a & c_{12} = b & c & b & c & b & c & \\
 c & b & c & a & a & c & c & b & c & c & b & c & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 c & a & a & c & a & c & a & b & c & c & b & c & c & b & c & c \\
 c_{13} = b & c & a & c_{14} = b & c & a & c_{15} = a & c & b & c_{16} = b & c & b & c & b & a & \\
 c & b & c & c & b & a & c & a & c & c & b & a & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 c & b & c & c & b & c \\
 c_{17} = a & c & b & c_{18} = b & c & b \\
 c & a & a & c & b & c
 \end{array}$$

De fato sabemos que esta é a lista completa pois, ao aplicar a substituição nestas vizinhanças, nota-se que não aparece nenhuma vizinhança nova (isto é, que não havia sido previamente listada).

Fizemos estas substituições do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & b \quad a \quad b \quad c \quad b \quad c \\
 & & & a \quad b \quad c \quad b \quad c \quad b \\
 b_1 = a & \begin{array}{ccc} b & a & a \\ \mathbf{b} & c & \\ a & c & b \end{array} & \xrightarrow{\omega} & \begin{array}{cccccc} b & c & \mathbf{b} & \mathbf{a} & a & c \\ c & b & \mathbf{a} & \mathbf{b} & c & a \\ b & c & a & c & b & a \\ c & b & c & a & a & b \end{array}
 \end{array}$$

Note que a letra b em destaque foi substituído por $\begin{smallmatrix} b & a \\ a & b \end{smallmatrix}$ e, se observamos suas respectivas vizinhanças, temos que

$$b_1 \xrightarrow{\omega} \begin{array}{cc} b_6 & a_1 \\ a_3 & b_1 \end{array}$$

Iremos listar nas próximas duas páginas todas as substituições:

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 \mapsto \begin{array}{cc} b_{12} & c_{12} \\ c_3 & b_4 \end{array} & a_2 \mapsto \begin{array}{cc} b_{13} & c_{13} \\ c_4 & b_5 \end{array} & a_3 \mapsto \begin{array}{cc} b_{12} & c_{12} \\ c_3 & b_4 \end{array} & a_4 \mapsto \begin{array}{cc} b_{12} & c_3 \\ c_{12} & b_7 \end{array} \\
 a_5 \mapsto \begin{array}{cc} b_{15} & c_8 \\ c_{10} & b_5 \end{array} & a_6 \mapsto \begin{array}{cc} b_8 & c_{16} \\ c_3 & b_{10} \end{array} & a_7 \mapsto \begin{array}{cc} b_5 & c_9 \\ c_{10} & b_{15} \end{array} & a_8 \mapsto \begin{array}{cc} b_9 & c_3 \\ c_{16} & b_{10} \end{array} \\
 a_9 \mapsto \begin{array}{cc} b_{12} & c_3 \\ c_{12} & b_7 \end{array} & a_{10} \mapsto \begin{array}{cc} b_5 & c_9 \\ c_7 & b_{18} \end{array} & a_{11} \mapsto \begin{array}{cc} b_9 & c_3 \\ c_{18} & b_7 \end{array} & a_{12} \mapsto \begin{array}{cc} b_5 & c_{13} \\ c_7 & b_{13} \end{array} \\
 a_{13} \mapsto \begin{array}{cc} b_{12} & c_{12} \\ c_3 & b_4 \end{array} & a_{14} \mapsto \begin{array}{cc} b_{18} & c_8 \\ c_4 & b_5 \end{array} & a_{15} \mapsto \begin{array}{cc} b_8 & c_{18} \\ c_3 & b_4 \end{array} & a_{16} \mapsto \begin{array}{cc} b_{18} & c_8 \\ c_4 & b_5 \end{array} \\
 a_{17} \mapsto \begin{array}{cc} b_8 & c_{18} \\ c_3 & b_4 \end{array} & a_{18} \mapsto \begin{array}{cc} b_{13} & c_{13} \\ c_4 & b_5 \end{array} & a_{19} \mapsto \begin{array}{cc} b_5 & c_9 \\ c_7 & b_{18} \end{array} & a_{20} \mapsto \begin{array}{cc} b_9 & c_3 \\ c_{16} & b_{10} \end{array} \\
 a_{21} \mapsto \begin{array}{cc} b_5 & c_9 \\ c_{10} & b_{15} \end{array} & a_{22} \mapsto \begin{array}{cc} b_9 & c_3 \\ c_{18} & b_7 \end{array} & a_{23} \mapsto \begin{array}{cc} b_8 & c_{16} \\ c_3 & b_{10} \end{array} & a_{24} \mapsto \begin{array}{cc} b_{15} & c_8 \\ c_{10} & b_5 \end{array}
 \end{array}$$

$$b_1 \mapsto \begin{matrix} b_6 & a_1 \\ a_3 & b_1 \end{matrix} \quad b_2 \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_6 \\ a_8 & b_3 \end{matrix} \quad b_3 \mapsto \begin{matrix} b_6 & a_{13} \\ a_9 & b_1 \end{matrix} \quad b_4 \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{15} \\ a_{20} & b_{11} \end{matrix}$$

$$b_5 \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{17} \\ a_{22} & b_1 \end{matrix} \quad b_6 \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{23} \\ a_{20} & b_3 \end{matrix} \quad b_7 \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{23} \\ a_{11} & b_{14} \end{matrix} \quad b_8 \mapsto \begin{matrix} b_{16} & a_{15} \\ a_9 & b_1 \end{matrix}$$

$$b_9 \mapsto \begin{matrix} b_{17} & a_{13} \\ a_{11} & b_1 \end{matrix} \quad b_{10} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{23} \\ a_{20} & b_3 \end{matrix} \quad b_{11} \mapsto \begin{matrix} b_6 & a_1 \\ a_9 & b_1 \end{matrix} \quad b_{12} \mapsto \begin{matrix} b_6 & a_{13} \\ a_9 & b_1 \end{matrix}$$

$$b_{13} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{17} \\ a_{11} & b_1 \end{matrix} \quad b_{14} \mapsto \begin{matrix} b_6 & a_{13} \\ a_3 & b_1 \end{matrix} \quad b_{15} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{15} \\ a_{22} & b_1 \end{matrix} \quad b_{16} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_6 \\ a_{20} & b_3 \end{matrix}$$

$$b_{17} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{23} \\ a_8 & b_3 \end{matrix} \quad b_{18} \mapsto \begin{matrix} b_2 & a_{15} \\ a_{11} & b_1 \end{matrix}$$

$$c_1 \mapsto \begin{matrix} a_2 & c_6 \\ c_1 & a_4 \end{matrix} \quad c_2 \mapsto \begin{matrix} a_5 & c_2 \\ c_5 & a_7 \end{matrix} \quad c_3 \mapsto \begin{matrix} a_{14} & c_2 \\ c_1 & a_{19} \end{matrix} \quad c_4 \mapsto \begin{matrix} a_{16} & c_2 \\ c_{11} & a_{21} \end{matrix}$$

$$c_5 \mapsto \begin{matrix} a_{18} & c_6 \\ c_1 & a_{12} \end{matrix} \quad c_6 \mapsto \begin{matrix} a_{24} & c_2 \\ c_5 & a_{21} \end{matrix} \quad c_7 \mapsto \begin{matrix} a_{24} & c_2 \\ c_{14} & a_{10} \end{matrix} \quad c_8 \mapsto \begin{matrix} a_{16} & c_{15} \\ c_1 & a_{12} \end{matrix}$$

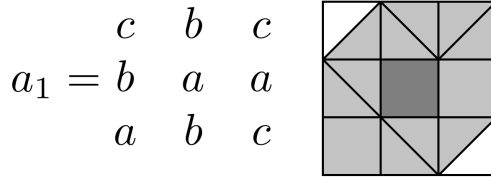
$$c_9 \mapsto \begin{matrix} a_{18} & c_{17} \\ c_1 & a_{10} \end{matrix} \quad c_{10} \mapsto \begin{matrix} a_{24} & c_2 \\ c_5 & a_{21} \end{matrix} \quad c_{11} \mapsto \begin{matrix} a_2 & c_6 \\ c_1 & a_{12} \end{matrix} \quad c_{12} \mapsto \begin{matrix} a_{14} & c_2 \\ c_1 & a_{10} \end{matrix}$$

$$c_{13} \mapsto \begin{matrix} a_{18} & c_6 \\ c_1 & a_{12} \end{matrix} \quad c_{14} \mapsto \begin{matrix} a_{18} & c_6 \\ c_1 & a_4 \end{matrix} \quad c_{15} \mapsto \begin{matrix} a_5 & c_2 \\ c_5 & a_{21} \end{matrix} \quad c_{16} \mapsto \begin{matrix} a_{16} & c_2 \\ c_1 & a_{19} \end{matrix}$$

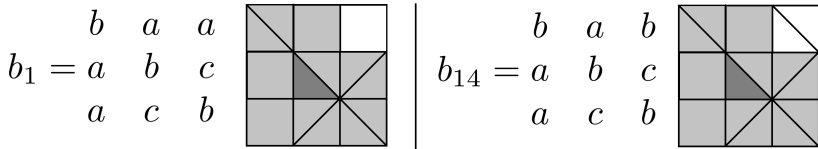
$$c_{17} \mapsto \begin{matrix} a_{24} & c_2 \\ c_5 & a_7 \end{matrix} \quad c_{18} \mapsto \begin{matrix} a_{16} & c_2 \\ c_1 & a_{10} \end{matrix}$$

Agora, para determinar a quantidade de coroas precisamos voltar aos polígonos.

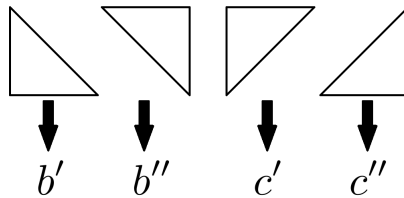
Considere a vizinhança da letra a a seguir e a sua representação geométrica:



Note que o quadrado intercepta polígonos que representam todas as letras adjacentes. Portanto temos 24 coroas de quadrados neste ladrilhamento, o qual é a mesma quantidade de vizinhanças para a letra a . Isto não ocorre com os outros protoladrilhos, por exemplo:



Neste caso o protoladrilho em destaque tem duas cópias com a mesma coroa (parte em destaque menos intenso), ainda que as vizinhanças das letras sejam distintas. Temos, portanto, que retirar essas duplicidades. Note que pelo formato dos ladrilhos da letra b , as duplicidades só podem ocorrer nas letras que estão no canto superior direito ou (exclusivo) no canto inferior esquerdo. Vamos dar novos nomes a estes tipos de ladrilhos:



Nos ladrilhos do tipo b' , devemos analisar as vizinhanças de b e retirar as duplicidades que acontecem no canto superior *direito* da

vizinhança. De fato, $b'_1 = b'_{14}$ como visto acima e também vale:

$$b'_2 = b'_{17} \quad b'_3 = b'_{11} \quad b'_5 = b'_{15} \quad b'_6 = b'_{16} \quad b'_{13} = b'_{18}$$

Descontando as 6 duplicidades das 18 vizinhanças de b , concluímos que há 12 coroas distintas para os ladrilhos do tipo b' .

No caso de b'' temos que descontar as duplicidades no canto inferior esquerdo, daí:

$$b''_1 = b''_{11} \quad b''_2 = b''_{16} \quad b''_3 = b''_{14}$$

$$b''_5 = b''_{13} \quad b''_6 = b''_{17} \quad b''_{15} = b''_{18}$$

No caso de c' temos que descontar as duplicidades no canto inferior direito, daí:

$$c'_1 = c'_{11} \quad c'_2 = c'_{15} \quad c'_3 = c'_{12}$$

$$c'_5 = c'_{14} \quad c'_6 = c'_{17} \quad c'_{16} = c'_{18}$$

No caso de c'' temos que descontar as duplicidades no canto superior esquerdo, daí:

$$c''_1 = c''_{14} \quad c''_2 = c''_{17} \quad c''_3 = c''_{16}$$

$$c''_5 = c''_{11} \quad c''_6 = c''_{15} \quad c''_{12} = c''_{18}$$

Em cada um dos casos acima temos 12 coroas distintas para os ladrilhos triangulares.

Como temos 24 coroas de quadrados e 12 coroas para cada um dos 4 tipos de triângulos, então o ladrilhamento tri-quadrado tem 72 coroas de ladrilhos e, portanto, o complexo celular associado tem 72 polígonos.

Os próximos passos para calcular a cohomologia associada ao ladrilhamento tri-quadrado não foram feitos aqui, bem como não se encontram na literatura. Pretendemos continuar os estudos acerca deste exemplo a fim de concluí-lo.

CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou diversas áreas da matemática a fim de aplicar os resultados obtidos em exemplos de múltiplos níveis de dificuldade. O próximo passo em uma pesquisa desta natureza seria estudar a K -teoria associada à C^* -álgebra descrita neste trabalho. Esta K -teoria está intimamente ligada aos grupos de cohomologia determinados neste trabalho como pode ser visto em (ANDERSON; PUTNAM, 1998, Teorema 6.1).

Conforme mencionado no capítulo anterior, o cálculo da cohomologia associada ao ladrilhamento tri-quadrado ainda não está concluído e os esforços para finalizá-lo ainda estão em andamento. Espero poder concluir este exemplo pois o mesmo não se encontra em qualquer referência. De fato, a conclusão deste trabalho demanda algum esforço computacional, pois devemos iterar uma substituição simbólica e analisar o comportamento das vizinhanças para múltiplas coroas. Acredito que seja possível programar um software capaz de fazer tal algoritmo.

Também creio que o método descrito para o ladrilhamento tri-quadrado de simbolização dos ladrilhos seja possível de ser generalizado para outros ladrilhamentos bidimensionais, contanto que esses ladrilhamentos satisfaçam certas hipóteses. Essas hipóteses devem ser tais que seja possível traçar uma malha quadriculada de forma que os padrões “dentro” dessa malha sejam passíveis de serem associados a um certo alfabeto. Ou seja, a generalização pode se dar nos exemplos em que for possível utilizar a estratégia da página 100.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. E.; PUTNAM, I. F. Topological invariants for substitution tilings and their associated c^* -algebras. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 18, n. 03, p. 509–537, 1998. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/S0143385798100457>.
- BEUTER, V. M. *Álgebras Associadas às Relações de Equivalência*. 2011. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/pos/Viviane_Maria_Beuter.pdf.
- BOAVA, G. *Caracterizações da C^* -álgebra Gerada por uma Compressão Aplicadas a Cristais e Quasicristais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/pos/Giuliano_Boava.pdf.
- BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521808415. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=3wA3c7-orE8C>.
- GRUNBAUM, B.; SHEPHARD, G. *Tilings and Patterns*. Dover Publications, 2013. (Dover Books on Mathematics Series). ISBN 9780486469812. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=zY6nPwAACAAJ>.
- KELLENDONK, J.; PUTNAM, I. F. Tilings; c^* -algebras, and k -theory. In: *In: Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI. [S.l.: s.n.], 2000. p. 177–206.*
- KINSEY, L. *Topology Surfaces*. Springer New York, 1993. (Undergraduate Texts in Mathematics Series). ISBN 9780387941028. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=AKghdMm5W-YC>.
- MURPHY, G. *C^* -Algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990. ISBN 9780125113601. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=emNvQgAACAAJ>.
- NOBELPRIZE.ORG. *The Nobel Prize in Chemistry 2011*. 26 Jan 2013. Disponível em: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/.

QUEFFÉLEC, M. *Substitution Dynamical Systems, Spectral Analysis*. Springer-Verlag, 1987. (Lecture Notes in Mathematics, N° 1294). Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=jkrvAAAAMAAJ>>.

RENAULT, J. *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Springer-Verlag, 1980. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 9780387099774. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=NDfvAAAAMAAJ>>.

SADUN, L. *Topology of Tiling Spaces*. Amer Mathematical Society, 2008. (University Lecture Series). ISBN 9780821847275. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=IWsz-b6_1GYC>.

STARLING, C. B. *Computation of the Ruelle-Sullivan Map for Substitution Tilings*. Dissertação (Mestrado) — University of Victoria, 2003. Disponível em: <<http://mysite.science.uottawa.ca/cstar050/starlingscthesis.pdf>>.

WHITTAKER, M. F. *Groupoid C^* -Algebras of the Pinwheel Tiling*. 2005. Disponível em: <http://dspace.library.uvic.ca:8080/bitstream/handle/1828/776/whittaker_2005.pdf>.