

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA**

SELMA FELISBINO HILLESHEIM

**OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM SALA DE AULA:
PERSPECTIVAS DE ENSINO PARA A REGRA DE SINAIS**

Florianópolis
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Selma Felisbino Hillesheim

**OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS EM SALA DE AULA:
PERSPECTIVAS DE ENSINO PARA A REGRA DE SINAIS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Mércles Thadeu Moretti.

Florianópolis

2013

H651n Hillesheim, Selma Felisbino

Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais [dissertação] / Selma Felisbino Hillesheim ; orientador, Mércles Thadeu Moretti. – Florianópolis, SC, 2013.

1 v.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Centro de Ciências da Educação, Centro de Ciências Biológicas. Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica.

Inclui bibliografia.

1 Números Negativos. 2. Regra de Sinais. 3. Princípio de Extensão. 4. Registros de Representação Semiótica. 5. Congruência Semântica. I. Moretti, Mércles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. III. Título.



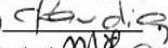
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E
TECNOLÓGICA

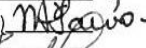
“Os números inteiros em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais.”

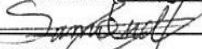
Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

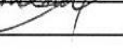
APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 26/02/2013

Prof. Dr. Mérciles Thadeu Moretti (CFM/MTM/UFSC – Orientador) 

Profª. Drª. Cláudia Glavam Duarte (MEN/CED/UFSC – Examinadora) 

Profª. Drª. Maria Auxiliadora Vilela Paiva (IFES/EDUCIMAT - Examinadora) 

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC-SP - Examinador) 

Profª. Drª. Sônia Elena Palomino Bean (CFM/MTM/UFSC – Suplente) 


Dr. Carlos Alberto Marques

Coordenador do PPGECT


SELMA FELISBINO HILLESHEIM

Florianópolis, Santa Catarina, fevereiro de 2013.

Este trabalho é dedicado às pessoas que me ensinaram o verdadeiro sentido da vida, aos meus filhos, Alyce e Lucas.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são sinais dos sentimentos mais profundos da essência humana. Neste momento, sinto a necessidade de agradecer as pessoas especiais que compartilharam comigo esse percurso, e que sem as quais não teria chegado a esse ponto da caminhada. No período de dois anos, é impossível citar todas as pessoas que fizeram parte desse caminhar... Então, ousou citar algumas, que definitivamente fizeram a diferença nesse período de minha vida. Agradeço,

Ao Prof. Mérciles Thadeu Moretti, por ter aceitado o desafio de orientar este trabalho. Agradeço a confiança, as oportunidades, a paciência e as aprendizagens que acompanharam esses dois anos de orientações. Sem a sua generosidade e confiança, eu não teria chegado até aqui.

Aos professores do Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da UFSC, de modo especial, a Prof^a Claudia Glavam Duarte pelo carinho e apreço que teve pelo nosso trabalho e pelas valiosas contribuições nas bancas de qualificação e defesa desta dissertação. À Prof^a Vivian Leyser da Rosa, pelos calorosos debates nas suas aulas de Seminários de Dissertação I. Ao Prof. Frederico Firmo de Souza Cruz, à Prof^a Sônia Maria da S. C. de Souza Cruz, ao Prof. Walter Antonio Bazzo e ao Prof. Carlos Alberto Marques pelas reflexões que contribuíram muito para a minha formação acadêmica. Ao Prof. Davi Costa, à Prof^a Cláudia Regina Flores e à Prof^a Joseane Pinto de Arruda pelos valiosos debates promovidos nas aulas de Discussão crítica de artigos de pesquisa em Educação Matemática, que contribuíram muito para a tessitura deste trabalho.

À Prof^a Neiva Ignês Grando pela atenção e pelas sugestões impressas na banca de qualificação. À Prof^a Maria Auxiliadora Paiva Vilela, que com seu olhar atento, deu-me valiosas contribuições para a escrita deste trabalho e, sobretudo, por aceitar prontamente o convite a participar da banca de defesa desta dissertação. Da mesma forma, agradeço ao Prof. Saddo Ag Almouloud pelas reflexões e contribuições propostas na banca de defesa.

Aos colegas da turma de mestrado de 2011, com os quais pude vivenciar momentos ímpares que deixaram saudades. Em especial, ao amigo da turma, Adriano Né, sempre pronto a me ajudar nos momentos difíceis, e à querida Rosangela Kirst da Silveira, amiga de todas as horas.

À direção da escola que me recebeu de braços abertos, viabilizando a realização das atividades de investigação. Também, de

modo especial, aos alunos que participaram da pesquisa pela disponibilidade e colaboração.

Ao professor Ivo Zimmermann, pelo carinho e atenção que despendeu na correção deste trabalho, e a professora Heloísa, amiga e colega de trabalho, pelo auxílio nas traduções.

À amiga Rosânia Jochen Farias pelo ombro amigo nas horas difíceis e pelas palavras de conforto, me fazendo acreditar que tudo iria dar certo.

E, finalmente, gostaria de agradecer aos meus amores:

- Meu companheiro Sônio, que esteve sempre ao meu lado, mesmo nos momentos mais críticos, incentivando e motivando a continuar, inclusive quando parecia inevitável a desistência frente às dificuldades. Aos frutos do nosso amor, nossos filhos Alyce e Lucas, que são a minha razão de viver, iluminando cada dia da minha existência.
- Meus pais, Manoel (*in memoriam*) e Arlinda que tanto me ensinaram sobre a vida e sobre os seus verdadeiros valores. A vocês devo tudo o que sou. A você mãe que sempre me ensinou, através do seu exemplo, que todo o sonho é possível de ser realizado, basta acreditar e ser persistente na sua busca.
- Minha família querida, irmãos, irmãs, sogro, sogra, cunhados, cunhadas, sobrinhos, sobrinhas, que acompanharam confiantemente as pequenas vitórias, deixando explícitos o orgulho e a confiança na minha vontade de vencer, me incentivando na conquista desse sonho.

Meu carinho e respeito por vocês são incondicionais!

Meus sinceros agradecimentos a todos vocês que permitiram a concretização desse sonho!

É na inconclusão do ser, que se sabe como tal, que se funda a educação como processo permanente. Mulheres e homens se tornaram educáveis na medida em que se reconheceram inacabados. Não foi a educação que fez mulheres e homens educáveis, mas a consciência de sua inconclusão é que gerou sua educabilidade. É também na inconclusão de que nos tornamos conscientes, e que nos incerta no movimento permanente de procura, que se alicerça a esperança (FREIRE, 2002).

RESUMO

A trajetória histórica do conceito de número negativo foi lenta e surpreendente. A hesitação em aceitar os números negativos foi uma característica marcante no seu processo de consolidação. A regra de sinais para a multiplicação é apresentada por Diofanto de Alexandria ainda no 3^o século d. C. No entanto, somente em 1867 é que Hankel consegue demonstrá-la e, assim, resolve o problema do ponto de vista matemático. Mas, do ponto de vista didático/pedagógico, o problema persiste ainda hoje. Glaeser e Coquin-Viennot enfatizam que o modelo comercial, utilizado para o ensino das propriedades aditivas, contribui para a formação de obstáculos no ensino das propriedades multiplicativas dos relativos. O modelo comercial, que é o mais encontrado e que busca uma explicação para essas regras com exemplos práticos, encontra na noção de congruência semântica de Duval uma forte oposição por conta de uma associação codificada entre verbos e operação, por exemplo: perder/escorregar associados à operação de subtração, enquanto que ganhar/subir são associados à adição. Pautados nas colocações de Caraça, a respeito do princípio de extensão, inferimos que o ensino das operações com relativos deve seguir esse mesmo princípio. A ideia trazida por esse autor é de que há, em matemática, uma propensão para generalização de resultados, ampliando as propriedades para universos cada vez mais amplos. Assim, por esse princípio, prevaleceu a regra usual dos sinais por ser essa a regra que conserva as propriedades de distributividades à direita e à esquerda já observada com os números positivos. Nesse contexto, emerge uma indagação: De que forma o “princípio de extensão” pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação de números negativos? Na busca por uma melhor compreensão desta questão, organizamos uma sequência para o ensino dos números negativos em uma turma de 7^o ano de uma escola pública municipal de São José em Santa Catarina. Essa aplicação, em sala de aula, faz transparecer um caminho possível para o ensino dos negativos sem apelarmos para modelos do tipo comercial e sem comprometer as propriedades multiplicativas desses números.

Palavras-chave: Números Negativos. Regra de Sinais. Princípio de Extensão. Registros de Representação Semiótica. Congruência Semântica.

ABSTRACT

The historical path of the negative number concept may be considered slow and, at the same time, surprising. The hesitation in accepting negative numbers was a striking feature in their consolidation process. The rule of signs theory for multiplication was presented by Diophantus of Alexandria in the third century A.D. It was only in 1867, however, that Hankel was able to prove this theory, solving the problem from a mathematical point of view. On the other hand, from the educational and pedagogical point of view, the problem is still topical today. Glaeser and Coquin-Viennot emphasize the fact that the commercial model, which is used in addition teaching, contributes to the emergence of barriers in the multiplication teaching of relative numbers. This commercial model, the most common one seeking for explanations to these rules using practical examples, meets with great resistance from Duval's semantic concept of coherence due to a codified combination between verbs and operations, e.g. to lose/to slide related to subtraction; to gain/to increase related to addition. Based on Caraça's arguments on the extension principle, it is possible to infer that the teaching of relative numbers operations should follow the same principle. The idea supported by this author is that there is in mathematics a bias for generalizing results, which expands all the properties to broader universes. Therefore, according to this principle, the usual rule of signs theory prevailed, since this rule is the one that preserves the distributive properties in the left- and right-hand sides already observed with positive numbers. In such context one is able to question: In what way does the "extension principle" may contribute to the process of teaching and learning multiplication of negative numbers? Aiming to propose a better understanding of such issue, it was possible to organize a determined sequence related to the teaching of negative numbers to a Year 7 Class (Junior High) at the Public Municipal School of São José, in the State of Santa Catarina. This experience in the classroom demonstrates it is possible to teach negative numbers without calling for commercial models and without compromising their multiplicative properties.

Keywords: Negative Numbers. Rule of Signs Theory. Extension Principle. Records of Semiotic Representation. Semantic Coherence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Explicação para a adição de números inteiros	69
Figura 2 - Demonstração da subtração de números inteiros	71
Figura 3 - Demonstração para a subtração de números inteiros	72
Figura 4 - Tabela utilizada para a apresentação da multiplicação de números inteiros	73
Figura 5 – Reta r	86
Figura 6 – Representação geométrica da adição $(-3) + (+5)$	96
Figura 7 - Representação geométrica da adição $(-2) + (+7)$	101
Figura 8 - Representação geométrica da adição $(+5) + (-8)$	106
Figura 9 – Disco colorido do jogo “Tiro ao Alvo”	126
Figura 10 - Item a da quarta questão da segunda lista de atividades	128
Figura 11 - Quadro mágico proposto aos alunos	130
Figura 12 - Justificativa apresentada pelo aluno 03	145
Figura 13 – Justificativa apresentada pelo aluno 18	145
Figura 14 - Justificativa apresentada pelo aluno 07	145
Figura 15 - Resposta apresentada pelo aluno 35	148
Figura 16 - Resposta apresentada pelo aluno 01	148
Figura 17 - Resposta apresentada pelo aluno 12	149
Figura 18 - Resposta apresentada pelo aluno 10	149
Figura 19 - Resposta apresentada pelo aluno 24	149
Figura 20 - Resposta apresentada pelo aluno 31	150
Figura 21 - Resposta apresentada pelo aluno 31	151
Figura 22 - Resposta apresentada pelo aluno 06	152
Figura 23 - Resposta apresentada pelo aluno 01	153
Figura 24 - Resposta apresentada pelo aluno 17	154
Figura 25 - Justificativa apresentada pelo aluno 14	154
Figura 26 - Justificativa apresentada pelo aluno 26	155
Figura 27 - Justificativa apresentada pelo aluno 11	155
Figura 28 - Justificativa apresentada pelo aluno 07	155
Figura 29 - Resposta apresentada pelo aluno 31	157
Figura 30 - Resposta apresentada pelos alunos 02 e 21	164
Figura 31 - Resposta apresentada pelos alunos 12 e 08	165
Figura 32 - Resposta apresentada pelos alunos 21 e 02	165
Figura 33 - Resposta apresentada pelos alunos 18 e 29	166
Figura 34 - Resposta apresentada pelos alunos 30 e 39	167
Figura 35 - Resposta apresentada pelos alunos 03 e 09	168
Figura 36 - Resposta apresentada pelos alunos 13 e 07	170
Figura 37 - Resposta apresentada pelos alunos 06 e 38	170
Figura 38 - Justificativa apresentada pelo aluno 07	174

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Apresentação da multiplicação de números negativos	62
Tabela 2 - Apresentação da sequência completa da multiplicação de números negativos	62
Tabela 3 - Apresentação da multiplicação de números inteiros	70
Tabela 4- Tabela comparativa dos modelos encontrados na análise dos livros didáticos	75
Tabela 5- Sequência formada na multiplicação de números inteiros	80
Tabela 6 – A regra usual e outra regra de sinais	108
Tabela 7 – Comparação entre duas regras de sinais para multiplicação	109
Tabela 8 – Tabela das cores do jogo “Tiro ao Alvo”	127
Tabela 9 – Tabela apresentada aos alunos durante a atividade	130
Tabela 10 - Resultados referentes à questão 1 do teste da multiplicação	153
Tabela 11 - Resultados referentes à questão 3 do teste da multiplicação	158
Tabela 12 - Resultados referentes à questão 7 do teste da subtração	169

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
2 CONTEXTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DA REGRA DE SINAIS	29
2.1 Um pouco da história antiga sobre os números negativos	29
2.2 Alguns aspectos históricos dos números negativos na Idade Média	32
2.3 Elementos históricos importantes a respeito dos números negativos na Idade Moderna	36
2.4 Os números negativos na Idade Contemporânea: o começo de uma nova história	42
3 OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: NA SALA DE AULA, NO LIVRO DIDÁTICO, NOS PCN E NCTM	49
3.1 Os números inteiros relativos na sala de aula	49
3.2 Análise das abordagens dos números relativos encontradas nos livros didáticos do PNDL-2011	57
3.3 O que nos dizem os PCN e NCTM a respeito do ensino dos números inteiros relativos?	77
4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA E PRINCÍPIO DE EXTENSÃO	85
4.1 O princípio de extensão de Caraça	85
4.2 Os Registros de Representação Semiótica	91
4.3 Os níveis de compreensão na concepção dos relativos	112
5 CAMINHOS DA PESQUISA: METODOLOGIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS APRESENTADOS	115
5.1 Metodologia	115
5.2 Aplicação da sequência didática	121
5.2.1 A introdução conceitual dos números inteiros	122
5.2.2 O ensino da operação de adição de números inteiros	124
5.2.3 O ensino da operação de multiplicação de números inteiros e a regra de sinais	131
5.2.4 O ensino da operação de subtração de números inteiros	139
5.3 Resultados apresentados	143
5.3.1 Análise do teste da adição de números relativos	144
5.3.2 Análise do teste da multiplicação de números relativos	153
5.3.3 Análise do teste da subtração de números inteiros relativos	162

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	173
REFERENCIAS	179
APÊNDICES	187
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	189
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	191
APÊNDICE C – TESTE DE ADIÇÃO	211
APÊNDICE D – TESTE DA MULTIPLICAÇÃO	213
APÊNDICE E – TESTE DA SUBTRAÇÃO	215

1 INTRODUÇÃO

O ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos. A dificuldade enfrentada pelos alunos na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos direcionou o tema da nossa pesquisa para o ensino dos números inteiros com ênfase nas operações de adição, multiplicação e subtração.

A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo¹. Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética*, ele menciona: “Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos” (2007, p. 22).

No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém Hankel, em 1867, demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza. Hankel² (*apud* GLAESER, 1981, p. 338), diferentemente de Laplace, que acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, aborda a questão numa outra dimensão, os números não são descobertos, são imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana, portanto, uma convenção.

Essas duas percepções do saber matemático vão ao encontro de que Caldeira (2007) chama de visão internalista e externalista³. Aproximamo-nos da versão construtivista dos conhecimentos matemáticos por percebemos que o conhecimento matemático se dá na inter-relação do homem com o mundo, que ele é construído por meio da ação do homem. Nesse sentido, nas situações de ensino, o aluno constrói

¹ Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no 3^o século da nossa Era.

² HANKEL, H. **Théorie des complexen Zahlssysteme**. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

³ Caldeira (2007) diferencia a visão internalista e externalista da matemática. “A primeira vê a matemática como a-histórica e não tendo nenhuma ligação com a sociedade e a cultura, a segunda, ao contrário, vê a matemática como dependente da cultura, histórica e socialmente construída” (p. 119).

seus conceitos a partir de problematizações, de ações reflexivas sobre materiais e atividades do saber matemático.

De acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números. Hoje, do ponto de vista matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. Entretanto, do ponto de vista didático/pedagógico, muitos obstáculos⁴ ainda precisam ser ultrapassados. Por meio do modelo metafórico, o aluno é facilmente convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (-3), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+2), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em $(-3) \times (-2) = +6$. Como uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? “Nessas condições, não se está introduzindo um *falso contrato didático* quando se utiliza o modelo concreto para apresentar o conjunto dos números relativos?” (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183, grifos do autor, tradução nossa)⁵.

Esse questionamento de Coquin-Viennot nos provocou um desconforto. Que, de certa forma, vem ao encontro dos problemas que vivenciamos na sala de aula ao longo da nossa vida profissional. Enquanto professora, o ensino da regra de sinais sempre gerou um certo desconforto. O fato da multiplicação de dois números negativos não estar relacionado a situações contextualizadas, como as situações da

⁴ A palavra obstáculo, de acordo com o dicionário Michaelis (2009), significa “tudo o que impede ou torna difícil fazer alguma coisa; embaraço, impedimento, barreira.” Entretanto, esse termo possui interpretações diversas na comunidade científica. Para Brousseau, um obstáculo corresponde a um conhecimento, a um conceito e não a uma dificuldade ou uma falta de conhecimento (CID, 2000). Contudo, Glaeser (1981), ao analisar a epistemologia dos números negativos utilizou o termo obstáculo associado a ideia de dificuldade, barreira e sintoma. Para Glaeser, um dos objetivos mais importantes da didática da matemática é o de determinar os obstáculos que impedem a compreensão e a aprendizagem dessa ciência. Mas, de acordo com Brousseau (*apud* CID, 2000) é necessário distinguir um obstáculo de uma dificuldade, sugerindo que as dificuldades propostas por Glaeser podem servir como ponto de partida na busca pelos verdadeiros obstáculos. Não é nosso objetivo, neste trabalho, travarmos um debate acerca das concepções a respeito do termo obstáculo. Porém, este termo será usado por nós no transcórre deste trabalho associado a ideia de dificuldades, aproximando-nos da concepção de Glaeser (1981).

⁵ Dans ces conditions n'est-ce pas introduire un *faux contrat didactique* que d'utiliser un modèle concret pour présenter l'ensemble des nombres relatifs?

adição, nos desafiou a buscarmos subsídios teóricos e metodológicos a fim de melhorar a nossa prática de ensino a respeito dos problemas que se estabelecem no ensino dos números relativos, principalmente, da regra de sinais.

As operações de adição, multiplicação e subtração com números relativos se mostram como uma barreira que precisa ser transposta nas situações de ensino e aprendizagem da sala de aula. A explicação da regra de sinais apresentada por Hankel (*apud* GLAESER, 1981), mostrou que a única regra possível é aquela que preserva a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação à direita e a esquerda. Dessa maneira, as mesmas propriedades que regem os números positivos foram estendidas também para os negativos.

Essa capacidade que o homem civilizado tem para fazer generalizações e abstrações, Caraça (1963) chama de “princípio de extensão”. O trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios foi que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos. O homem por meio das suas abstrações e generalizações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi essa barreira que Hankel (*apud* GLAESER, 1981) derrubou ao mostrar que a explicação para a regra de sinais $- \times - = +$ não poderia ser procurada na natureza, pois ela é fruto do pensamento humano e, como tal, precisa atender as regras da consistência interna da própria matemática.

O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), pode facilitar o entendimento do aluno a respeito de problemas aditivos de números relativos, assim como os que aparecem nos livros didáticos, porém essa abordagem pode trazer obstáculos para a compreensão de problemas multiplicativos.

Nesse sentido, pensamos que:

É necessário para a construção do pensar matemático também uma formalização da linguagem matemática, e trabalhar a sua construção, permite uma melhor compreensão das produções e das problematizações da matemática nas condições ontológicas (SAD⁶, *apud* ANJOS, 2008, p. 91).

⁶ SAD, Lígia A. História da matemática e epistemologia da aprendizagem. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1., 2005, Natal. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 4., 2005. **Anais...** Natal: UFRN, 2005.

Além dessa questão, podemos analisar o ensino das operações dos relativos numa outra perspectiva, o da congruência e da não congruência semântica, introduzida por Duval (2012). Um dos obstáculos enfrentados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica.

Para isso, de acordo com Duval (2004), ela deve atender as condições de correspondência semântica entre as unidades significativas que as constituem, manter a mesma ordem de apreensão possível destas unidades nas duas representações e converter a unidade significativa na representação de chegada. Porém quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro não ocorre de imediato.

Na sala de aula, a adição de números relativos é apresentada contextualizadamente com exemplos que podem convencer rapidamente, até mesmo a um leigo no assunto. Porém, a multiplicação de números relativos é explicada dogmaticamente. Sob o ponto de vista da perspectiva da congruência semântica, a adição de números relativos nem sempre representa um ganho e a subtração nem sempre representa uma perda. Na multiplicação de números inteiros, a ideia de adição de parcelas iguais encontra como obstáculo a multiplicação de dois números negativos. Então, embrenhados, nesse contexto conturbado, emergiu o nosso problema de pesquisa: De que forma o “princípio de extensão” pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação de números negativos?

Movidos por este questionamento, propomo-nos a realizar nossa pesquisa tendo como objetivo geral: Analisar uma sequência de ensino em que as operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros relativos serão abordados por meio do “princípio de extensão”, e verificar as suas possíveis contribuições no processo de ensino e aprendizagem. E, para operacionalizar nosso objetivo central, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- fazer um levantamento histórico a respeito das dificuldades encontradas no passado com relação ao surgimento e a consolidação do número negativo e da regra de sinais;
- analisar a abordagem que os PCN, NCTM e os livros didáticos de matemática do 7^o ano, apontados pelo PNL D 2011, trazem sobre os números inteiros relativos;

- apontar as possibilidades que o “princípio de extensão” e a congruência semântica trouxeram para o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração de números inteiros relativos;
- organizar e aplicar uma sequência de ensino pautado no “princípio de extensão” e avaliar as possibilidades de ensino dos números relativos, conduzido por meio desse princípio.

Visando a atender os objetivos deste trabalho, sentimos necessidade de buscar na história da matemática, de como aconteceu o processo de consolidação do número negativo. Uma história de muitas idas e vindas, traçadas sob uma trajetória não linear, que apresentou muita hesitação a respeito dos negativos. Essa trajetória histórica, apresentamos no segundo item intitulado – *Contexto histórico do surgimento da regra de sinais*.

Bem, se historicamente o contexto do surgimento dos números negativos foi conturbado, precisamos saber se esses problemas ainda persistem nas salas de aulas atuais. Como o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração com números inteiros são apresentadas nos livros didáticos atuais? O que nos apontam os PCN e NCTM a respeito do ensino dos números negativos? Essas são algumas das questões que abordamos na terceira parte do nosso trabalho – *Os números inteiros relativos: na sala de aula, no livro didático, nos PCN e NCTM*.

No quarto item – *Fundamentos teóricos para o ensino de números inteiros relativos: congruência semântica e o princípio de extensão* - apresentamos o embasamento teórico que nos deu suporte para construir uma sequência de ensino que se opôs ao modelo comercial e conduziu o ensino dos relativos, atendendo ao “princípio de extensão”. Exploramos situações que se apresentam no ensino dos números relativos, relacionados à congruência semântica e propomos reflexões à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Na quinta parte do nosso trabalho – *Caminhos da pesquisa: metodologia e análise dos resultados apresentados* - sentimos a necessidade de apresentar uma abordagem diferente para a adição dos relativos, a fim de não comprometer o ensino da multiplicação desses números. Assim, neste capítulo, apresentamos a nossa metodologia de trabalho, a postura que assumimos na condução do ensino dos números relativos, o relato da nossa experiência e a análise dos dados obtidos por meio da aplicação da sequência didática.

Por fim, apresentamos as *Considerações finais* em que enfatizaremos os principais achados do estudo, buscando atender aos nossos objetivos e responder o problema de pesquisa que fomentou todo o nosso trabalho. Também, apresentamos algumas considerações acerca das implicações futuras desta pesquisa, principalmente, as relacionadas à prática pedagógica referente ao ensino dos números negativos.

2 CONTEXTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DA REGRA DE SINAIS

Neste capítulo, abordaremos alguns aspectos da história do número negativo, bem como do surgimento e da consolidação da regra de sinais da multiplicação desses números, que se mostram relevantes no contexto histórico geral. Uma história de incertezas, de idas e vindas e de muitas hesitações na aceitação da ideia de número negativo. Acreditamos que esses aspectos históricos poderão trazer significativas contribuições para o entendimento das dificuldades encontradas pelos matemáticos, no passado, e sua estreita relação com as dificuldades encontradas hoje por nossos alunos no que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos.

2.1 Um pouco da história antiga sobre os números negativos

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é, em geral, atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele, pouco se sabe, até mesmo o período em que viveu. No entanto, os historiadores apontam evidências e tendem a situá-lo no século III de nossa era. Esse algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Prisma (EVES, 2004, p. 207).

A regra que estabelece que “ $- \times - = +$ ” aparece no começo do livro I da sua Aritmética de forma explícita: “Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos” (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22). Porém, em nenhum momento Diofanto apresenta uma justificativa para tal regra. Ele apenas a usava nos cálculos intermediários e não aceitava as raízes negativas na solução das equações quadráticas (BOYER, 2010).

No oriente, a matemática assumiu um caráter prático voltado às questões administrativas, organizações públicas e cobrança de impostos. Não se encontra na matemática oriental registros de demonstrações ou argumentações sobre os cálculos, apenas uma prescrição de como aplicar as regras. Inicialmente, foi dada ênfase à aritmética prática e a medição, no entanto, com o passar do tempo, fortes tendências levam a abstração, e a aritmética se transformou em álgebra (STRUIK, 1992).

Contrariando a posição de Struik (1992), a respeito de não se encontrar na matemática oriental demonstrações sobre cálculos, Joseph (1991) defende, ao longo das 494 páginas do seu livro “La Cresta Del Pavo Real: las matemáticas y sus raíces no europeas”, a posição de que a

atividade matemática fora da Europa tem sido ignorada, desvalorizada e distorcida. O autor afirma que existe uma certa resistência com relação aos conhecimentos matemáticos anteriores ao período da matemática grega, comparando-a com “rabiscos de crianças que estão aprendendo a escrever em oposição a grande literatura” (KLINE, 1962 *apud* JOSEPH, 1991, p. 32). Essa visão atribui à matemática egípcia e babilônica a ideia de que essas matemáticas não tinham regras gerais, careciam de demonstrações e não eram abstratas. Entretanto, não se pode negar que nas resoluções dos problemas que foram apresentadas por esses povos, tanto no papiro de Ahmes como nas tábuas babilônicas “indicaria que existia uma compreensão da generalidade das regras subjacentes” (JOSEPH, 1991, p. 181). Assim, o autor reconhece que diferentes culturas, em diferentes momentos da história têm contribuído para os conhecimentos matemáticos do mundo, cada qual com suas características próprias (p. 34).

De acordo com Struik (1992), grande parte do que sabemos sobre os conhecimentos egípcios encontram-se em dois papiros: *Papiro de Rhind* e *Papiro de Moscovo*. Esses papiros apresentam problemas que estão baseados numa matemática pautada no sistema de numeração decimal. De acordo com Lumpkin (1996, *apud* PONTES, 2010; ANJOS, 2008), apesar da ideia de número negativo não ter sido registrada na civilização egípcia, eles já mostravam indicativos desses números ao utilizarem malhas quadriculadas na construção de pirâmides. Eles escolhiam uma linha no nível do chão como sendo a linha zero e numeravam as outras linhas como sendo cúbico acima de zero e abaixo de zero. Mesmo assim, de acordo com Eves (2004, p. 67), “a matemática do Egito antigo nunca alcançou o nível da matemática da Babilônia”.

Na civilização babilônica, perto do ano 2000 a. C., a aritmética da Babilônia já tinha se desenvolvido e passado para a álgebra retórica. Encontram-se registros que apontam que eles resolviam equações lineares e quadráticas e, também, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadradas. No entanto, encontravam apenas raízes positivas. Sua geometria tinha base em problemas práticos relacionados com a medição, mas a forma geométrica era apenas uma forma de apresentar uma questão algébrica (STRUIK, 1992; EVES, 2004).

O estudo da matemática antiga chinesa pode ser encontrada na mais importante obra da matemática chinesa *Jiu zhang suan-shu* (*Chiu chang suan shu*), ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Essa obra foi produzida, muito provavelmente, durante a dinastia Han (206 a. C. – 220 d. C.) e constitui um livro totalmente voltado à matemática. Sua

matemática consiste num conjunto de problemas, e uma série desses problemas conduziria a sistemas de equações lineares. A solução dessas equações lineares era efetuada por transformações de matrizes. E nessas matrizes é que encontramos pela primeira vez na história o registro de números negativos (STRUIK, 1992, p. 67). Um número negativo era representado traçando uma diagonal na sua última coluna, por exemplo, - 12 era representado por $\begin{array}{r} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array}$ (JOSEPH, 1991, p. 207).

Parece que aos chineses a ideia de números negativos não causaram problemas, já estavam acostumados a calcular manipulando duas coleções de barras vermelhas e pretas, correspondendo a números positivos e negativos, respectivamente. Contudo, os chineses não aceitavam a ideia de que um número negativo pudesse ser raiz de alguma equação, eram usados apenas como intermediários na execução de algum tipo de cálculo (BOYER, 2010).

Em contraste à matemática chinesa, a história da matemática grega nos aponta que o conceito de número negativo não foi registrado nesse período. O principal objetivo da matemática grega expresso nos primeiros estudos foi o de compreender o lugar do homem no universo. Desta forma, a matemática auxiliaria a ordenar as ideias em sequências lógicas e a encontrar a ordem no caos. Dois grupos de pensadores merecem ser destacados na matemática grega. De um lado estavam os “sofistas” preocupados em desenvolver uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. E, de outro, os “pitagóricos” que davam importância ao estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Estudavam geometria, aritmética, astronomia e música. A aritmética era especulativa, e pouco tinha em comum com a dos babilônicos (STRUIK, 1992).

De acordo com Eves (2004), uma das características da matemática grega era a sua persistência com as rigorosas demonstrações, alcançando uma existência independente. Os gregos dispunham de duas maneiras principais para resolver equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Ao que tudo indica, esses métodos se originaram dos pitagóricos. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois

[...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não

exatamente como números (KASNER; NEWMAN, 1968, *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 51).

Segundo Struik (1992, p. 108), os matemáticos gregos fizeram uma separação entre “aritmética” e “logística”. A “aritmética” (*arithmoi*) era a ciência dos números que expressava um número natural, uma “quantidade composta por unidades”. Enquanto a “logística” era o cálculo prático que estava baseado num sistema de numeração que mudou com o tempo. Isso mostra que:

Historicamente, os números negativos não surgiram na *contagem*, mas nos *cálculos*; ou seja, surgiram na Logística, mais explicitamente na resolução de equações. Isso se concretizou com Diofanto (*fl.* Século III), na sua obra *Arithmetiké*, que era essencialmente um trabalho da Logística Teórica. Nessa obra, Diofanto desenvolveu resoluções de equações usando implicitamente as regras de sinais, todavia desconsiderou a existência independente dos números negativos (ANJOS, 2008, p. 24, grifos do autor).

A matemática grega não aceitou a existência independente do número negativo, no entanto, as regras de sinais aparecem implicitamente na obra de Diofanto como uma tentativa de abreviar os cálculos. Diofanto não aceitou a ideia de número negativo isoladamente, estes aparecem somente como cálculos intermediários.

2.2 Alguns aspectos históricos dos números negativos na Idade Média

A ciência chinesa influenciou e deixou sua marca na ciência de outras sociedades, por exemplo, o sistema decimal e os números negativos podem ter vindo da China para a Índia. No entanto, não podemos negar que a ciência indiana também exerceu influência sobre a China. “A influência indiana na China pode ser tão antiga como a introdução do budismo na China” (STRUİK, 1992, p. 128).

Os hindus se destacaram como calculadores, no entanto sua geometria deixava a desejar, pois era muito empírica e, em geral, ligada à mensuração. Como eram excelentes aritméticos, deram importantes contribuições à álgebra. “Ao contrário de Diofanto, que procurava *uma qualquer das soluções racionais* de uma equação indeterminada, os

hindus empenhavam-se em encontrar *todas as soluções inteiras possíveis*” (EVES, 2004, p. 256, grifos do autor).

Na matemática hindu, o mais relevante matemático do século VII foi Brahmagupta (598-665). Segundo Boyer (2010), Brahmagupta fez contribuições importantes à álgebra ao considerar duas raízes, mesmo as negativas, como solução das equações quadráticas. Pela primeira vez, em sua obra, encontra-se a aritmética sistematizada dos números negativos e do zero. Sua obra fornece, também, as seguintes regras operatórias envolvendo os números negativos:

Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador (BOYER, 2010, p. 150).

No entanto, Brahmagupta complicou-se um pouco ao afirmar que $0/0 = 0$, porém para o caso de $a/0$ ele não se comprometeu. Outro matemático hindu que teve destaque na segunda metade da Idade Média foi Bhaskara (1114 a cerca de 1185). Ele foi responsável por preencher algumas lacunas apresentadas na obra de Brahmagupta como, por exemplo, o problema da divisão por zero. Na sua obra mais conhecida, o *Lilavati*, cujo título é o nome da sua filha, Bhaskara reuniu problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando suas novas observações. O *Lilavati* apresenta uma série de problemas sobre os itens prediletos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressão aritmética e geométrica e outros (BOYER, 2010, p. 152).

Bhaskara, em um de seus livros, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$ encontrando as raízes $x = 50$ e $x = -5$ como solução do problema. Para a raiz negativa, ele manifestou um certo cepticismo. No entanto, não se pode desconsiderar que, de certa forma, os números negativos ganharam com isso uma vagarosa aceitação (STRUIK, 1992, p. 117).

No período de 650 a 750, os árabes não demonstravam muito interesse intelectual, foi somente na segunda metade do oitavo século que se observou um despertar cultural no Islã. Neste período, foram chamados para Bagdá estudiosos da Síria e da Mesopotâmia, a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o califado de al – Mamum se estabeleceu em Bagdá uma “Casa da Sabedoria” onde se encontrava

entre os mestres, um matemático e astrônomo chamado Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi que escreveu obras de astronomia e matemática. Dentre essas obras, a mais importante foi *Al-jabr Wa'l muqabalah* da qual teve origem o termo *álgebra*.

A álgebra apresentada nesta obra está mais próxima da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, no entanto nem al-Khowarizmi nem outros matemáticos árabes usaram a sincopação ou números negativos (BOYER, 2010, p. 156). As contribuições de al-Khowarizmi foram importantes no contexto histórico da matemática, pois foi ele uma das principais fontes pela qual os numerais indianos e a álgebra árabe chegou à Europa (STRUİK, 1992, p. 122).

Outro matemático que também se destacou no campo da álgebra geométrica foi Omar Khayyam. Ele resolveu as equações cúbicas geometricamente, no entanto não aceitava as raízes negativas e, com frequência, não encontrava todas as raízes positivas (EVES, 2004).

A matemática árabe sofreu influência das matemáticas grega e hindu. No entanto, a matemática árabe possui características próprias, em geral tinham uma boa e clara apresentação e uma organização sistemática dos cálculos. Apesar do conhecimento que os árabes tinham a respeito das regras que regem os números negativos, eles rejeitavam as raízes negativas e não utilizavam nenhum tipo de abreviatura ou símbolo de notação (BOYER, 2010).

Na Europa, com a expansão do comércio, o interesse pela matemática na Idade Média se espalhou vagarosamente. A matemática especulativa quase desapareceu nesse período, era apenas apreciada pelos filósofos escolásticos. Os homens práticos estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação. Desejos que foram influenciados diretamente pelo crescimento das cidades mercantis (STRUİK, 1992).

O *Liber abaci* – Livro do ábaco – de autoria de Leonardo de Pisa (1175-1250) constitui-se num manual para práticas comerciais transitando entre prática e teoria. Leonardo era filho de comerciante e nascido na cidade de Pisa, também conhecido como Fibonacci, escreveu esse livro no regresso da viagem que fez pelo oriente como mercador, nele constam várias informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens (STRUİK, 1992).

Para Boyer (2010), Fibonacci foi, sem dúvida, o matemático mais original e capaz do mundo medieval, e muito de sua obra era demasiado avançado para ser entendido pelas pessoas que viveram na sua época. Pycior (1997 *apud* ANJOS, 2008) assumiu que Fibonacci em sua obra

Flos (1225) aceitou os números negativos como raízes de uma equação. No entanto, Eves (2004), a respeito da obra *Liber abaci*, afirma que: “As raízes negativas e imaginárias não são admitidas e a álgebra é retórica” (p. 293).

Conforme a maioria dos historiadores, a estrutura que Fibonacci seguiu nas resoluções das equações foi similar ao modelo propagado por al-Khowarizmi o que levaria a crer que Fibonacci usou demonstrações geométricas. Consequentemente, isso indicaria uma certa restrição à aceitação dos números negativos como raízes de equação, a qual só seria válido, para representação de dívidas (ANJOS, 2008, p. 30).

O uso dos números negativos passou a ser admitido com a expansão das relações financeiras no comércio, que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. A ideia de tirar 8 de 5 apresentava um aspecto milagroso, assim

[...] foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 5 menos 7 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5 (SINGH, 1972, *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 52).

Nesse contexto, o número negativo acabou sendo usado com finalidades contábeis. No entanto, apesar de útil, a ideia dos negativos associada a um débito não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se trava da regra dos sinais (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

2.3 Elementos históricos importantes a respeito dos números negativos na Idade Moderna

No início da Renascença, a maior parte dos matemáticos tinha origem alemã ou italiana. Contudo, em 1484, foi composto na França um manuscrito intitulado de *Triparty em La science des nombres* de autoria de Nicolas Chuquet. Nesse manuscrito, a segunda metade da última parte trata da resolução de equações, onde traz uma novidade importante: pela primeira vez, ao escrever $4x = -2$, Chuquet expressou um número negativo isolado numa equação algébrica (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), o início do século XVI foi marcado por grandes algebristas alemães. Um deles Michael Stifel (1486-1567), ex-monge e professor de matemática em Jena, escreveu *Arithmetica integra* publicada em 1544. Essa obra apresenta-se dividida em três partes: os números racionais, números irracionais e álgebra. Dentre os vários assuntos que aborda, o aspecto mais importante é o seu tratamento sobre os números negativos, radicais e potências. “Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pode reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que parecia como única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial quando usar + e quando -” (BOYER, 2010, p. 193). Ele tinha conhecimento sobre as propriedades dos números negativos, embora não os aceitasse como raiz de uma equação e costumava chamá-los de “números absurdos”.

Em 1545, muito dos problemas não resolvidos pela *Arithmetica integra*, com relação à resolução das equações cúbicas e quárticas, foram superadas e tornaram-se conhecidas com a publicação da *Ars magna* de Cardano (1501-1576). No entanto, deve ser mencionado que Cardano não foi o descobridor original da solução da cúbica e da quártica. Depois de um juramento de manter segredo sobre a solução, conseguiu arrancar de Tartaglia a solução da cúbica.

Cardano era médico e um respeitado professor em Bolonha e Milão. Seguidor de al-Khowarizmi, pensava em equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de classes gerais. Cardano encontrou dificuldades para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ utilizando o seu método, pois ele conhecia a raiz 4, e, com a aplicação da regra, chegava-se a $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, no entanto, não entendia como a sua regra faria sentido nessa situação. Ele chamava essas raízes de “números fictícios” ou “números falsos”

correspondendo aos números negativos e suas raízes complexas (BOYER, 2010).

De acordo com Eves (2004), a *Ars Magna* foi o primeiro grande tratado dedicado especialmente à álgebra, escrito em latim. Uma de suas importantes contribuições se deve ao fato de que, nele, se dá atenção às raízes negativas e ao cálculo de números complexos (p. 307).

Com a resolução das equações cúbicas, um novo tipo de número começa a aparecer: os negativos. Até o momento, os matemáticos podiam negar a existência de um número negativo ou de uma raiz quadrada negativa alegando que equações do tipo $x + 1 = 0$ e $x^2 + 4 = 0$ não são resolúveis. No entanto, com a resolução das cúbicas, sempre que as três raízes de uma equação são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva ao cálculo de uma raiz quadrada negativa. Nesse contexto, aparece a figura de um algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), que teve a brilhante ideia dos imaginários conjugados que levariam ao número real 4. Porém, as observações de Bombelli não contribuíram na resolução efetiva das cúbicas, pois só funcionava se ele conhecesse antecipadamente o valor de uma das raízes. Entretanto, Bombelli apontou o papel importante que os imaginários conjugados iriam desempenhar futuramente (BOYER, 2010, p. 197).

A falta de suporte matemático expressado por Bombelli cedeu espaço ao simbolismo expressado por François Viète (1540-1603). Esse jurista francês, nascido em Fontenay, ligado à corte de Henrique IV, fez contribuições no campo da aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Mas, foi sem dúvida, na álgebra que ele deu as mais importantes contribuições. Segundo Boyer (2010, p. 208),

Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados.

Desse modo, aparece pela primeira vez uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Embora Viète tenha contribuído de maneira significativa no campo da álgebra, não considerava as raízes negativas. Fato que o impossibilitou de enunciar as relações entre raízes e coeficientes, na resolução das equações cúbicas. Cabendo a Girard, em 1629, enunciar claramente

essas relações. Girard, ao contrário de Viète, admitia as raízes negativas e imaginárias (BOYER, 2010).

Outro matemático francês que se destacou foi René Descartes (1596-1650), natural de Touraine, residiu muitos anos na Holanda e morreu em Estocolmo. “Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e *encontrar a verdade nas ciências*” (STRUIK, 1992, p. 162, grifos do autor). Assim como os platônicos acreditavam na harmonia do universo, os cartesianos acreditam num método geral baseado na razão. Na sua obra *La Géométrie*, publicada em 1637, inclui a aplicação da álgebra à geometria. O livro I fornece instruções detalhadas de como resolver as equações quadráticas geometricamente, contribuindo de certa forma para a não aceitação de raízes negativas, tomando-as como raízes “falsas” (BOYER, 2010).

O desconforto provocado pelos números negativos ainda perdurou por um certo tempo. No entanto, percebe-se que tal assunto incomoda os matemáticos a tal ponto que se sentem desafiados a buscar uma explicação plausível para o assunto. Um exemplo é Simon Stevin (1548-1620), um importante matemático Belga do século XVI. Ele se propôs na sua “Aritmética” (1634) apresentar uma demonstração da regra de sinais que segue:

Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. Explicação do dado: Suponhamos $8 - 5$ multiplicado por $9 - 7$ da seguinte maneira: $- 7$ vezes $- 5$ são $+ 35$ (+ 35, porque, como diz o teorema, $-$ vezes $-$ dá $+$). A seguir $- 7$ vezes 8 faz $- 56$ ($- 56$, porque, como é dito no teorema, $-$ por $+$ dá $-$). E semelhante seja $8 - 5$ multiplicado por 9 , & darão produtos $72 - 45$; depois adicione $+ 72 + 35$, são 107 . Depois adicione os $- 56 - 45$, são 101 ; e subtraindo o 101 de 107 resta 6 , para o produto da tal multiplicação. Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que $+$ multiplicado por $+$ dá mais, & que $-$ por $-$ dá $+$, & que $+$ por $-$, ou $-$ por $+$ dá $-$. Demonstração. O número a multiplicar $8 - 5$ vale 3 , & o multiplicador $9 - 7$ vale 2 . Mas multiplicando 2 por 3 , o produto é 6 . Logo o produto acima também 6 , é o produto verdadeiro. Mas o valor

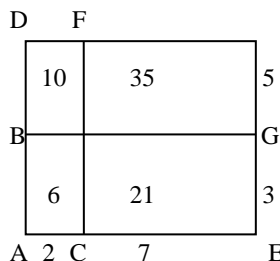
encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto +, & - por - dá produto +, & + por -, ou - por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro.

$$\begin{array}{r} 8 - 5 \\ \hline 9 - 7 \\ - 56 + 35 \\ \hline 72 - 45 \\ \hline 6 \end{array}$$

(GLAESER, 1981, p. 312, tradução nossa)

Observemos que o argumento apresentado por Stevin é apenas uma verificação de um caso particular que não apresenta uma generalização. Outro aspecto que pode ser considerado é o fato que em nenhum momento ele considera a ideia de número negativo isolado, o sinal de menos que aparece, por exemplo, no 56 não representa um número negativo, mas apenas uma operação de subtração que precisa ser realizada para que o cálculo seja efetuado. No entanto, ele ainda prossegue com uma demonstração geométrica. Vejamos:

Outra demonstração geométrica: Suponhamos AB 8 - 5 (a saber AD8 - DB5). Depois AC9 - 7 (a saber AE9 - EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 - EF56 - DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. Conclusão. Logo mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar.



(GLAESER, 1981, p. 312, tradução nossa)

O exemplo de Stevin nos mostra como a geometria oferece apoio à aritmética, contribuindo para a comprovação de que a regra funciona. Para Glaeser (1981), a demonstração geométrica apresentada por Stevin pode servir de base para o desenvolvimento geral de $(a - b) \times (c - d) = ac - ad - bc + bd$. No entanto, observamos que nesse período histórico a regra $- \times - = +$ só é usada como um procedimento transitório.

O sintoma de evitamento dos números negativos, assim denominado por Glaeser (1981), vai continuar incomodando muitos matemáticos. Pierre Fermat (1601-1665) pode ser citado, como exemplo, ao fazer que seu amigo Jacques de Billy escrevesse conselhos sobre como proceder diante de uma “raiz falsa” no caso das equações diofantinas, a fim de se obter uma solução “aceitável” (GLAESER, 1981, p. 315). Outro personagem que mostrou uma insatisfação com relação aos negativos foi Thomas Harriot (1560-1621) que pensou ter provado em seu “*Artes Analíticas Aplicadas*” (1631) a impossibilidade das raízes negativas (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Nesse contexto, podemos observar que mesmo os matemáticos que viveram na mesma época assumiram posturas contraditórias a respeito dos negativos. Enquanto Fermat e Harriot hesitavam os negativos, Stevin e Euler faziam tentativas de demonstrar a regra de sinais, apesar de não obterem êxito em seus ensaios.

Leonardo Euler (1707-1783) foi um importante matemático suíço que atuou em vários ramos da matemática. Euler, assim como outros matemáticos da época, também se mostrou perturbado a respeito da regra de sinais e, na sua obra de cunho pedagógico intitulada “*Elementos da Álgebra*”, destinada aos iniciantes, ele ofereceu uma explicação sobre a regra de sinais. Glaeser apresenta a argumentação de Euler em três partes, vejamos:

1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade: três dívidas de “a escudos” fazem uma dívida de “3 a escudos”. Então $b \times (-a) = -ab$.
2. Pela comutatividade, Euler deduz que $(-a) \times b = -ab$.
3. Resta determinar o que é o produto $(-a)$ pelo $(-b)$. É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab . Se trata então de se decidir entre $+ab$ e $-ab$. Mas como $(-a) \times b$ vale $-ab$, não resta mais como única possibilidade que $(-a) \times (-b) = +ab$ (!!!) (1981, p. 319, tradução nossa).

O malabarismo apresentado por Euler para justificar a regra de sinais demonstra que ele não tinha ainda conhecimentos suficientes para esclarecer convincentemente os pontos obscuros apresentados pela regra de sinais. Na mesma obra, segundo Glaeser (1981), Euler concebe o número negativo como sendo uma letra precedida com o sinal – (menos). Euler não consegue estabelecer uma ideia para a formação do conceito de número negativo, nem muito menos concebê-los como sendo quantidades menores que zero.

Para começar a mudança na questão da aceitação dos números negativos, o final do século XVII foi marcado pelo nascimento de um importante matemático chamado Colin MacLaurin (1698-1746). A sua obra “*Tratado da Álgebra*”, publicado dois anos após a sua morte, tornou-se referência na Grã-Bretanha e sobre o continente. Nesse livro, ele aborda a ideia de número negativo como sendo uma quantidade tomada no sentido oposto à positiva.

Assim, a quantidade negativa, bem longe de ser rigorosamente menos que nada, não é menos real em sua espécie que a quantidade positiva, mas ela é posta num sentido oposto; de onde não se segue mais que uma quantidade considerada única, não seria negativa; ela só é por comparação, e quanto a quantidade que chamamos positiva não há nada a mais que seja oposto a ele. Não se saberia subtrair uma maior: por exemplo, seria absurdo de querer subtrair uma maior quantidade de matéria de uma menor (MACLAURIN, 1748, *apud* GLAESER, 1981, p. 317, tradução nossa)⁷.

MacLaurin não consegue conceber as quantidades negativas isoladamente, o que futuramente causará conflitos ao não fazer a distinção entre zero absoluto e zero origem. No entanto, de acordo com

⁷ Ainsi la quantité négative, bien-loin d'être rigoureusement moindre que rien, n'est pas moins réelle dans son espece que la quantité positive, mais elle est prise dans un sens opposé; d'ou il suit qu'une quantité considérée seule ne scauroit être négative, qu'elle ne l'est que par comparaison, & que quand la quantité qu'on appelle positive, n'en a point d'autre qui lui soit opposée, on n'en scauroit soustraire une plus grande: par exemple, il seroit absurd de vouloir soustraire une plus grande quantité de matiere d'une plus petite.

Pontes (2010), MacLaurin passa a entender o número como uma ação e não mais como um estado.

Nessa mesma obra, segundo Glaeser (1981), MacLaurin apresenta uma justificação para a regra de sinais utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição e sua dedução contribuiu para o início de um formalismo até então inexistente. Sua explicação se baseava na seguinte ideia: Se $+a - a = 0$, então se multiplicarmos essa expressão por um número positivo $+n$, teremos o primeiro termo $+na$, e como segundo termo $-na$, pois o produto também deverá ser zero, logo $-na + na$, também deverá ser zero. E quando a expressão $+a - a$ for multiplicada por um número negativo, esse produto também deverá ser zero. Assim se multiplicarmos a expressão $+a - a$ por $-n$, teremos $-na$ como o primeiro termo e $+na$ para o segundo termo, pois os dois termos precisam ser anulados.

Dessa forma, ele enuncia a regra de sinais colocando que o produto de dois números com sinais diferentes é negativo, e o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. Apesar das importantes contribuições de MacLaurin a respeito dos números relativos, ele não foi capaz de apresentar a teoria dos números relativos, mas seus estudos foram tomados como referência pelos matemáticos da posteridade.

2.4 Os números negativos na Idade Contemporânea: o começo de uma nova história

O século dezenove, de acordo com Boyer (2010), mais do que qualquer outra época, merece ser considerada a Idade de Ouro da matemática. Dentre os muitos matemáticos que se destacaram nesse período, podemos citar o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Como seu pai era um artesão, então, o duque de Brunswick, reconhecendo em Gauss uma criança prodígio, assumiu a sua educação. O jovem estudou em Göttingen e em 1799 obteve o grau de doutor.

A sua carreira foi marcada por estudos realizados no campo da astronomia, geodésia e principalmente na matemática. Partes de suas descobertas foram publicadas na sua dissertação em 1799, onde deu a primeira prova do chamado “teorema fundamental da álgebra” e nas *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. Estas correspondem a uma reunião de todos os trabalhos anteriores a Gauss que tratam sobre a teoria dos números, na qual Gauss faz importantes contribuições.

Em 1831, Gauss em um de seus tratados, apresenta uma nova teoria dos números complexos, em que elucidou muitos enigmas apresentados na aritmética e a lei da reciprocidade quadrática se tornou

mais simples que nos números reais. Gauss ao representar os números complexos por pontos num plano afastou para sempre o mistério que ainda assombrava os números complexos (BOYER, 2010; STRUIK, 1992).

O estilo de imprimir rigor à análise iniciado por Gauss no século XIX foi ampliado e aprofundado por Cauchy (1789-1857), o mais importante analista da primeira metade do século (EVES, 2004). Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris e dentre as suas muitas contribuições na matemática, foi ele o primeiro a estabelecer uma confusão entre os sinais operatórios e predicativos. Como operatórios, os sinais (+ ou -) poderiam designar uma ação: aumentar e diminuir. E, como predicativos qualificariam um estado: positivo ou negativo.

No entanto, essas definições caíram em contradição quando Cauchy tenta justificar as propriedades aditivas dos relativos e, de repente, ele abandona o modelo metafórico e aborda a multiplicação de números relativos dogmáticamente. “O modelo metafórico apresentado no início, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação” (GLAESER, 1981, p. 334, tradução nossa). A discussão levantada por Cauchy a respeito dos sinais operatórios e predicativos irá posteriormente despertar o interesse de Hankel, mas, nesse momento, ele não consegue apresentar os números relativos de forma clara.

As dificuldades enfrentadas por Cauchy também podem ser percebidas em Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nas suas conferências pedagógicas realizadas na Escola Normal Superior, declarando algumas dificuldades a respeito da teoria dos números relativos. Vejamos como Laplace apresenta a justificação da regra de sinais:

(A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: temos apenas que conceber que o produto de $-a$ por $-b$ seja o mesmo que o de a por b . Para tornar essa identidade sensível, nós observamos que o produto de $-a$ por $+b$ é $-ab$ (visto que o produto é $-a$ repetido tantas vezes que quando tem unidades em b). Observamos em seguida que o produto de $-a$ por b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim o produto de $-a$ por $+b$ é $-ab$, o produto de $-a$ por $-b$ deve ser de

sinal contrário ou igual à $+ ab$ para o destruir (*apud* GLAESER, 1981, p. 333, tradução nossa)⁸.

Na sua justificativa, observamos alguns aspectos familiares à demonstração apresentada por Euler, no entanto, Laplace consegue avançar no aspecto referente à demonstração da propriedade distributiva e o desapego a um modelo físico. Mesmo assim, Laplace não consegue propor uma extensão formal para os números relativos. Talvez isso possa estar ligado com a forma de Laplace apresentar suas demonstrações. Na sua maneira de escrever não explicava nada, quando satisfeito com o resultado, não se importava em deixá-los sem demonstração. A matemática, para Laplace, era como uma caixa de ferramentas a serem usadas na explicação da natureza (EVES, 2004, p. 486).

A partir da segunda metade do século XVIII surge na Inglaterra um grupo de matemáticos com o objetivo de reformar o ensino e a notação do cálculo. Dentre eles, George Peacock (1791-1858), que foi uma figura de destaque na reforma da matéria na Inglaterra, principalmente no que se refere à álgebra, pois lá ainda havia quem achasse que os números negativos não tinham validade (BOYER, 2010, p. 368).

Peacock publicou em 1830 o “*Tratado em Álgebra*” e nessa obra ele apresenta uma distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica. De acordo com Eves, a álgebra aritmética era considerada por Peacock “como sendo o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números” (2004, p.576). Dessa forma, apenas as operações com números inteiros positivos seriam possíveis. Ao contrário, a álgebra simbólica

[...] adota as regras da álgebra aritmética, mas remove todas as restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na álgebra

⁸ (La règle des signes) présente quelques difficultés: on a peine à concevoir que le produit de $-a$ par $-b$ soit le meme que celui de a par b . Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit de $-a$ par $+b$ est $-ab$ (puisque le produit n'est que $-a$ repete autant de fois qu'il y a d'unités dans b). Nous observerons ensuite que le produit de $-a$ par $b-b$ est nul, puisque le multiplicateur est nul; ainsi le produit de $-a$ par $+b$ étant $-ab$, le produit de $-a$ par $-b$ doit être de signe contraire ou égal à $+ab$ pour le détruire.

aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas (PEACOCK, 1842, *apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Essa justificativa apresentada por Peacock, em que ele transita de uma álgebra para outra, era chamada por ele como “*princípio de permanência das formas equivalentes*”.

Para incluir os novos símbolos -1, -2, -3,... em uma aritmética ampliada a qual englobe tanto os inteiros positivos como os negativos nós devemos, certamente, definir operações com eles de um modo tal que as regras originais das operações aritméticas sejam preservadas. Por exemplo, a regra $(-1) \times (-1) = 1$ a qual estabelecemos para governar a multiplicação de inteiros negativos, é uma consequência do nosso desejo de preservar a lei distributiva $a.(b + c) = ab + ac$. Pois se nós tivéssemos estabelecido que $(-1) \times (-1) = -1$, então, fazendo $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, nós deveríamos ter tido $-1.(1 - 1) = -1 - 1 = -2$, enquanto por outro lado nós realmente temos $-1.(1 - 1) = 1 \times 0 = 0$. Levou muito tempo para que os matemáticos percebessem que a ‘regra dos sinais’, junto com todas as outras definições governando os inteiros negativos e frações não podem ser ‘provadas’. Elas são criadas por nós com o objetivo de obter liberdade de operação ao mesmo tempo que preservando as leis fundamentais da aritmética. O que pode – e deve – ser provado é apenas que com base nestas definições as leis comutativa, associativa e distributiva da aritmética são preservadas (COURANT; ROBBINS, 1987, *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 56).

Essa visão moderna apresentada por Peacock, fazendo valer para a álgebra simbólica as mesmas regras da álgebra aritmética, provoca uma verdadeira evolução para a formação da teoria dos números relativos.

Como consequência das contribuições de Peacock, o alemão Hermann Hankel (1839-1873) publica em 1867 a obra *Theorie der Komplexen Zahlensysteme* que amplia o conceito de número de uma

forma mais clara e explícita. Ele observava que “a condição para construir uma aritmética universal é pois uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções” (BOYER, 2010, p. 389). Assim como fez Peacock, Hankel também estabeleceu um *Princípio da permanência das leis formais*:

Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo (HANKEL, 1867 *apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Pautado nesse princípio de permanência e conhecendo as propriedades aditivas de \mathbb{R} e a multiplicação de \mathbb{R}^+ , Hankel propõe prolongar a multiplicação de \mathbb{R}^+ para \mathbb{R} e enuncia o seguinte Teorema: “A única multiplicação sobre \mathbb{R} , que prolonga a multiplicação usual sobre \mathbb{R}^+ , respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais”.

Demonstração:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$$

$$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$$

De onde

$$(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$$

(GLAESER, 1981, p. 338)

Observamos que, de certa maneira, essa demonstração pode ser encontrada em documentos anteriores, no entanto, Hankel, ao contrário de Laplace que procurava uma explicação na natureza, aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Dessa forma, a regra de sinais é uma convenção com vistas à manutenção da consistência interna da própria matemática.

Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que

se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL, 1867, *apud* SCHBRING, 2007, p. 6).

A revolução cumprida por Hankel, recusando a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

No transcorrer da história da construção dos números relativos, percebemos que, enquanto os matemáticos estavam presos em buscar exemplos que explicavam esses números, eles não fizeram grandes progressos. A difícil aceitação dos números negativos que se fez presente durante todo esse percurso, ainda se mostrou presente por um certo período, mesmo após a revolução cumprida por Hankel.

Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática a respeito da hesitação dos relativos. Mencionaremos um trecho de Hoffmann (1884)⁹, citado por Schubring, onde posta um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, se os professores tiverem que dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: “Eu temerei ver os olhos de surpresa e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?” (2007, p. 17).

Carlo Bourlet em 1896 introduziu na França um manual de ensino secundário sobre os números relativos. Nele ele apresenta as propriedades aditivas dos números relativos baseados sobre o modelo comercial e sobre a referência de um ponto sobre um eixo. Contudo, no capítulo seguinte, a multiplicação logo se mostra dogmática (GLAESER, 1981, p. 343).

⁹ HOFFMANN, J.C.V. Zwei wichtige Fragen über das Negative, beantwortet vom Herausgeber. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, vol. 15, p. 580-582, 1884

Apesar da aceitação do conceito de número negativo e suas operações, na comunidade dos matemáticos profissionais, terem sido aceitas, após a publicação de Hankel, na comunidade de professores esse debate ainda perdurou por muito tempo. A resistência dos professores em aceitar que a regra de sinais não pode ser provada, que $- \times -$ precisa ser mais para preservar o formalismo matemático, já existente, foi um fator de destaque no percurso histórico da aceitação da regra de sinais.

Agora, fazendo uma ponte desse contexto histórico aos nossos dias atuais, podemos nos perguntar: Depois de passados mais de um século, quais as mudanças apresentadas em nossos manuais escolares? Como acontece o processo de ensino dos números relativos para as nossas crianças de hoje? Essas entre tantas outras indagações são algumas das questões que iremos abordar no próximo capítulo.

3 OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: NA SALA DE AULA, NO LIVRO DIDÁTICO, NOS PCN E NCTM

Neste capítulo, realizaremos um estudo buscando levantar os problemas enfrentados na sala de aula no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos. Faremos, também, uma análise de como os livros didáticos de matemática, do 7^o ano, abordam os números inteiros, principalmente, de como eles apresentam a regra de sinais para a multiplicação desses números. Finalizando o capítulo, buscaremos, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), os caminhos apontados por esses documentos para o ensino dos números relativos.

3.1 Os números inteiros relativos na sala de aula

No Brasil, os números inteiros relativos são apresentados formalmente aos alunos no 7^o ano¹⁰, e muitas dificuldades podem ser percebidas no seu processo de ensino e aprendizagem. A não compreensão do conceito de números relativos e sua repercussão ao longo da trajetória estudantil tem sido uma preocupação dos professores de matemática e de pesquisadores (COQUIN-VIENNOT, 1985; PASSONI, 2002; PONTES, 2010; ALVES; MAIA, 2011) que buscam explicações para as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem desses números, bem como, procuram outros modelos de ensino para os números inteiros.

Os alunos chegam ao 7^o ano associando a ideia de número a uma grandeza. Isto pode ser percebido nos mais variados assuntos contemplados no currículo das séries iniciais do ensino fundamental e do 6^o ano. Até o 6^o ano, operações do tipo $a - b$ só podem ser resolvidas se $a \geq b$, pois é impossível conceber, por exemplo, a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas.

A perturbação se instala quando a subtração ($a - b$) é aplicada a casos em que $b > a$, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de números – os negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 62).

¹⁰ O 7^o ano corresponde à antiga 6^a série do Ensino Fundamental de oito anos.

Dessa forma, nos anos que antecedem o 6^o ano, a concepção formada pelos alunos a respeito da operação de adição está fortemente relacionada a um aumento e a subtração está ligada ao ato de tirar/diminuir. Essas concepções prévias que os alunos trazem consigo, de acordo com Fischbeim (1987)¹¹ e Hefendehl-hebeker (1991)¹², citados por Nascimento, contribuem ainda mais para gerar dificuldades e conflitos que se estabelecem entre o “significado prático de magnitude ou associação de quantidades com número anterior ao ensino da aritmética e o conceito de número negativo” (NASCIMENTO, 2004, p. 2).

Essa dificuldade encontrada hoje no ensino, também, pode ser percebida na trajetória histórica da construção do conceito de número negativo. William Frende (1757-1841)¹³, citado por Medeiros e Medeiros (1992), expressou, em seu “Princípios de Álgebra”, que “um número se presta a ser subtraído de um número maior do que ele mesmo, mas tentar subtrair de um número menor do que ele mesmo é ridículo” (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 55). Para Schubring, essa dificuldade está relacionada ao fato de que “operar com números negativos implicava em operar com um outro conceito de número que não aquele subjacente às operações comumente assumidas como geralmente válidas na aritmética” (SCHUBRING, 2007, p. 2).

No conjunto dos números inteiros relativos as concepções que os alunos trazem sobre as operações de adição e subtração simplesmente caem por terra, uma vez que neste conjunto adicionar nem sempre representa um aumento, assim como subtrair nem sempre representa diminuir. Para Teixeira (1993), o conceito de adição deve ser ampliado no conjunto dos números inteiros relativos, não pode mais se limitar a ideia de acrescentar. Da mesma forma, “subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Por exemplo, $-4 - (-5) = -4 + 5$ ou ainda, $-4 - (+5) = -4 - 5$.

¹¹ FISCHBEIM, E. **Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach** (D. Reidel Publishing Co., Dordrecht), 1987, p. 97-102.

¹² HEFENDEHL-HEBEKER, L. Obstacles in Their evolution From Intuitive to Intellectual Construts. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, .(1, 1991, p. 26-32.

¹³ FREND apud KLINE, M. **Mathematics in the Western Culture**. Middlesex, Peregrine Books, 1987.

Ainda, seguindo essa linha de pensamento das operações com números inteiros, a multiplicação, no conjunto dos números inteiros, não pode mais ser completamente compreendida como uma adição de parcelas iguais. Vejamos o caso quando um dos fatores é positivo e o outro negativo, ele pode ser facilmente compreendido como a repetição do fator negativo conforme indica o operador positivo, por exemplo, $(+2) \times (-5)$ pode ser expressa como $(-5) + (-5)$. O mesmo raciocínio se aplica quando temos dois fatores positivos. Mas, para Teixeira (1993, p. 65), a multiplicação com números inteiros relativos encontra um obstáculo: como mostrar que $(-1) \times (-1) = 1$?

Nesse sentido, para que o aluno consiga lidar com essas situações e possa dominar as operações com números inteiros relativos, se faz necessário que ele amplie o seu conceito de número. De acordo com Teixeira (1993, p. 62):

A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas. Entretanto, se, do ponto de vista formal e lógico, esse raciocínio nos é apresentado atualmente como coerente e organizado, sabemos que na perspectiva histórica ou da evolução do pensamento matemático, tal ampliação encontrou muitas dificuldades e obstáculos.

Sendo assim, uma das principais contribuições de Förstemann (1791-1836)¹⁴, citado por Schubring (2007), foi sublinhar a diferença ontológica entre números e grandezas. Nas palavras de Förstemann,

Grandezas são: linhas, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões de tempo, conjunto de pessoas ou de livros. Números, no entanto, são apenas expressões das relações entre grandezas da mesma espécie (FÖRSTEMANN, 1817, *apud* SCHUBRING, 2007, p. 5).

Dessa forma, não podemos realizar as operações algébricas com grandezas, mas somente com os números. Essa ideia de Förstemann foi

¹⁴ FÖRSTEMANN, W. A. Über den Gegensatz positiver und negativer Größen. Nordhausen: Happach, 1817.

amplamente abraçada e disseminada por Gauss, na qual provocou mudanças no modo de perceber que os “conceitos matemáticos não representavam mais coisas, mas relações entre coisas” (ASSIS NETO, 1995, p. 3). Nesse sentido, a contribuição de Gauss foi de perceber que a “Matemática é, no sentido mais geral possível, a ciência das relações na qual se abstrai de todos os conteúdos das relações” (GAUSS, 1809, *apud* ASSIS NETO, 1995, p. 3).

Os resultados das pesquisas desenvolvidas por Borba e Guimarães (2009) apontam que os números positivos e negativos podem assumir diferentes significados nos mais diversos contextos. Nesse sentido, um número positivo poderá representar uma *medida positiva*, uma *transformação positiva* ou uma *relação positiva*¹⁵. Da mesma forma, porém com sentido contrário, um número negativo poderá representar uma *medida negativa*, uma *transformação negativa* ou uma *relação negativa* que, matematicamente, podem ser representados por um mesmo símbolo, no entanto cognitivamente envolvem significados diferentes. A autora aponta como conclusão dos seus estudos quanto à compreensão dos números inteiros relativos que “(...) é mais fácil entender o significado de número relativo enquanto medida do que o significado de relação” (BORBA; GUIMARÃES, 2009, p. 99). No entanto,

É importante que o número seja entendido enquanto relação, para além de uma simples resposta às questões *quantos são? E quanto mede?* Acostumar a criança a *pensar em relações*, ajudá-la a superar o obstáculo do pensamento substancial e ensiná-la a trabalhar corretamente a relação entre *Matemática e aplicação da Matemática* são diretrizes básicas para o professor de Matemática (ASSIS NETO, 1995, p. 4, grifos do autor).

Esse trabalho de acostumar à criança a pensar a matemática como uma relação é um processo desafiador, pois, para além das fronteiras do espaço escolar, estudos apontam que, apesar da

¹⁵ A autora caracteriza a medida positiva como dinheiro possuído, temperatura acima de zero, saldo credor de um campeonato. A transformação positiva pode ser entendida como dinheiro depositado ou ganho, subida de temperatura, pontos ganhos em um jogo. E, relação positiva como dinheiro, temperatura, pontos a mais que a medida inicial.

apresentação formal do conceito de número negativo ser feita somente no 7º ano, as crianças em séries anteriores já possuem algumas noções intuitivas acerca de números negativos.

A pesquisa realizada por Maranhão, Camejo e Machado (2008) nos relata uma experiência com alunos do 2º, em que um desses alunos para resolver a subtração $35 - 27$ fez o seguinte raciocínio: “Eu tiro 20 do 30 e 7 do 5 [$30 - 20 = 10$; $5 - 7 = -2$]” (p. 163). Chegando ao resultado 8. Esse caso foi levado para cinco professoras-alunas do 6º semestre do curso de pedagogia, para que elas realizassem uma análise da situação. Os relatórios apresentados pelas professoras-alunas mostraram um certo desconforto em lidar com a situação. Apenas uma professora-aluna admitiu a existência do número negativo. As demais atribuíram o sinal negativo do 2 a operação de subtração. Essa experiência comprova que os professores das séries iniciais também precisam estar preparados para saber trabalhar com situações que envolvam o conceito de números negativos. Caso contrário, poderão contribuir para a formação de entraves que, futuramente, afetaram no processo de ensino e aprendizagem desses números.

Buscando descobrir o que os alunos já sabem antes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo, Moretti e Borba (2004) realizaram a aplicação de um teste com 65 crianças de 9 a 12 anos numa escola particular do Recife. O teste foi composto por 11 questões contendo situações de jogo, compras, saldo bancário, deslocamento em elevadores, viagens e esportes. Os resultados da pesquisa mostraram que:

Antes de serem formalmente introduzidas ao conceito de inteiro relativo as crianças são capazes de resolver não só problemas inseridos em contextos de jogos – como observado em estudos anteriores – mas também em questões mais formais como as usualmente trabalhadas na escola (MORETTI; BORBA, 2004, p. 19).

Desse modo, podemos perceber que a noção intuitiva de número negativo ultrapassa as barreiras do espaço escolar. A pesquisa realizada por Santos (1990, *apud* MORETTI; BORBA, 2004, p. 4) mostrou que os agricultores com apenas 2,9 anos de média de frequência escolar conseguiram resolver situações hipotéticas envolvendo as operações de adição, subtração e divisão com números relativos. Esse autor concluiu que a ausência do ensino formal não impediu a realização

dos cálculos com números negativos por parte dos agricultores. Isso porque eles se basearam nas suas experiências cotidianas em relação a lucros e prejuízos.

Pensando ainda na ideia de número negativo fora do espaço escolar, Lins e Gimenez (1997) propõem uma reflexão bastante interessante a esse respeito. Eles argumentam que o significado do número negativo “da rua” se diferencia do significado de número negativo da escola. Nas palavras dos autores:

Na rua encontramos, sim, números negativos – temperaturas negativas e saldo bancário negativo -, mas certamente não são os números negativos da escola. Temperaturas, por exemplo, não são jamais somadas (Qual o resultado de somar a temperatura de Fortaleza com a de São Paulo?), e menos ainda multiplicamos os números negativos da rua (Três abaixo de zero vezes cinco abaixo de zero? Débito vezes débito?). Muitos de vocês podem estar pensando: ‘Mas temperaturas e dívidas são bons recursos didáticos...’ Sugerimos que o leitor que achou estranho o que dissemos anteriormente pare e reflita: Quando usamos como recursos as dívidas, e queremos produzir significado para $(-3) \times (-5)$, não é verdade que o primeiro fator quer dizer ‘perder 3 vezes’ e não ‘uma dívida de três’? Você acha que faz sentido multiplicar duas *dívidas*? (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 13, grifos do autor)

Não se trata aqui de defendermos o número negativo da rua ou o da escola, mas sabermos que cada uma dessas concepções precisa ser levada em consideração nos momentos de ensino, cada qual com o seu potencial. Não se trata de legitimar uma em detrimento da outra. “A ideia de valorizar o que a rua sabe apenas como ponto de partida faz parte de um discurso que, embora pareça razoável do ponto de vista didático, é perverso do ponto de vista cultural” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 19). Foi justamente esse pensamento de número negativo atrelado ao pensamento concreto que travou durante um longo período histórico o debate a respeito da multiplicação desses números, na comunidade acadêmica. Entretanto, somente

[...] quando a matemática acadêmica assume que definitivamente não há significado na rua para a

multiplicação de números negativos, e passa a buscar, então, um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 13).

Saindo do espaço de fora da escola e voltando agora para contexto da sala de aula, segundo Borba (2009), os alunos associam mais rapidamente o significado de um número inteiro relativo enquanto medida do que como relação. Os professores ao apresentarem os números relativos aos alunos como medidas, associando ao número positivo a ideia de um ganho e ao número negativo a ideia de uma perda, como eles aparecem na rua, conseguem obter sucesso nas suas aulas, e os alunos compreendem facilmente as operações de adição e subtração com esses números. Contudo, esse modo de ensinar os números inteiros relativos encontra dificuldades quando o professor apresenta a multiplicação desses números, assim como aquela sofrida pelos matemáticos do passado. Como explicar que uma perda multiplicada por uma perda se transformou num ganho? Exemplificando, $(-2) \times (-3) = +6$.

O que antes era completamente contextualizado com situações concretas, que poderiam ser vivenciadas e compreendidas pelos alunos, agora na multiplicação precisa ser entendido como uma regra sem relação nenhuma com o que foi aprendido anteriormente. E, a partir desse momento, se instala a grande confusão entre as regras de sinais da adição e as regras de sinais da multiplicação de números inteiros relativos.

O modelo comercial, assim denominado por Gleaser (1981), em que os números relativos estão associados à ideia de ganho/perda não têm relação nenhuma com a regra de sinais “menos vezes menos dá mais”. No entanto,

[...] como é concreto e ele facilita muito a compreensão dos relativos no início de sua aprendizagem, os alunos o adotam e querem utilizá-lo enquanto não é mais adaptado: não somente, ele não explica mais nada, mas ele representa mais nada, ele não funciona mais ao

nível do símbolo (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183, tradução nossa)¹⁶.

Nesse sentido, “a noção do número negativo só pode ser definido corretamente pelo nível do pensamento formal”¹⁷ (MICHELOT, 1966, *apud* COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183), pois, ao contrário, segundo Coquin-Viennot, não estaríamos introduzindo um falso contrato didático ao utilizarmos um modelo concreto para apresentarmos os números relativos? Quando o professor se utiliza desse modelo comercial, ele procura somente facilitar a apresentação e a aprendizagem dos números relativos, no entanto “[...] esse modelo comercial é tão prático, tal que ele é reforçado durante todo o início da aprendizagem que ele se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma *concepção* dos relativos”¹⁸ (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 184, grifos do autor).

Dessa forma, segundo Coquin-Viennot, o processo de ensino e aprendizagem da multiplicação, que procede a adição dos números relativos, pode encontrar dificuldades se a concepção desses números for plantada somente em bases concretas. Assim, para que a multiplicação dos números relativos possa ser alcançada e compreendida pelos alunos, de acordo com essa autora, é preciso que ocorra uma reversão desse quadro. Porém, essa concepção está tão bem estabelecida, que ela, nela mesmo constitui um verdadeiro obstáculo para a compreensão das propriedades multiplicativas dos números relativos (1985, p. 184).

Ainda, segundo Coquin-Viennot (1985), a apresentação dos números relativos pautados somente no “modelo comercial” pode trazer prejuízos ao ensino da multiplicação desses números, bem como dificultar a aprendizagem de outros conceitos. Sabemos, por meio de

¹⁶ [...] comme il est concret et qu’il facilite beaucoup la compréhension des relatives au début de leur apprentissage, les élèves l’adoptent et veulent l’utiliser aloir qu’il n’est plus adapté: non seulement, il n’explique plus rien, mais il ne représente plus rien, il ne fonctionne meme plus au niveau du symbole.

¹⁷ La notion de nombre négatif ne peut être définie correctement qu’au niveau de la pensée formelle.

¹⁸ [...] ce modèle commercial est si pratique qu’il est renforcé pendant tout le début de l’apprentissage et qu’il s’installe définitivement dans l’esprit de l’élève non plus comme um modele, mais comme une *conception* des relatifs.

pesquisas¹⁹, que o livro didático desempenha um papel importante junto ao trabalho dos professores, seja no planejamento das suas aulas, seja na construção das concepções por parte dos alunos.

Assim, faz-se necessário realizarmos neste trabalho uma análise das abordagens trazidas nos livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011 sobre a apresentação dos números relativos e, principalmente, como é feita a apresentação da multiplicação desses números, mais especificamente, da multiplicação de dois números inteiros negativos. Isso poderá nos auxiliar a compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros.

3.2 Análise das abordagens dos números relativos encontradas nos livros didáticos do PNLD-2011

Neste tópico, realizamos uma análise dos livros didáticos de matemática do 7^o ano apontados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático de 2011, pois acreditamos na sua significativa influência no direcionamento e no planejamento da prática docente. O PNLD é um programa do governo federal que tem por objetivo oferecer livros didáticos de qualidade, de forma gratuita, em ciclos trienais, a alunos e professores de escolas públicas da educação básica. Os livros didáticos, após serem avaliados, são publicados no Guia de Livros Didáticos. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem os títulos que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico (BRASIL, 2010).

Nesse contexto, pensamos ser de fundamental importância analisar a forma de como os números inteiros relativos são abordados por esses livros apontados no PNLD de matemática para o 7^o ano, uma vez que eles representam a fonte em que todas as escolas públicas brasileiras buscam os seus exemplares de livros didáticos de matemática.

Queremos esclarecer que não é nosso objetivo aprofundar questões políticas acerca do PNLD, mas somente utilizá-lo como um caminho que nos apontou os livros didáticos de matemática que estão sendo usados nas escolas públicas brasileiras no tempo presente. Desse modo, podemos avaliar e refletir sobre as formas de como os números

¹⁹ Os trabalhos desenvolvidos por Bastos (2004) e Oliveira & Araújo (2007) apontam sobre as influências que o livro didático de matemática exerce no trabalho docente.

negativos e as operações de adição, multiplicação e subtração vêm sendo conduzidas nas escolas.

O guia do livro didático de matemática é constituído por dez coleções aprovadas no PNLD – 2011, que serão elencadas a seguir. Nós realizamos a análise dos livros do 7^o ano, especificamente, no que diz respeito à apresentação dos números inteiros e as operações de adição, subtração e multiplicação. Preocupamo-nos com a apresentação dos números inteiros e as operações de adição e subtração, pois acreditamos que a forma de como é conduzido o ensino dessas operações pode influenciar na aprendizagem da multiplicação desses números. Porém, antes de começarmos o trabalho da análise dos livros didáticos, sentimos necessidade de explicitar algumas questões sobre as formas de apresentação das operações de adição, subtração e multiplicação dos relativos.

Entre as diversas abordagens que existem para as operações de adição e subtração com números inteiros, Gonzàles (1990, *apud* PONTES, 2010, p. 27) propõe três modelos básicos: o aritmético, o algébrico e o geométrico. No modelo aritmético, mostra-se a insuficiência do conjunto dos naturais para as subtrações em determinadas situações. No ensino, é recorrente o uso de metáforas, abordando situações cotidianas de ganho (positivo) e perda (negativo), ou seja, o modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981). Entretanto, Gonzàles recomenda que essas situações sejam usadas com moderação, a fim de não comprometer o ensino da multiplicação desses números.

Ainda, de acordo com este autor, o modelo geométrico emprega essencialmente a reta numérica com origem em O, e sobre esta reta se realizam os deslocamentos para a direita (positivo) e para a esquerda (negativo). O modelo algébrico parte da equação para achar uma quantidade x desconhecida, como os problemas de Verngnaud citados por Damm (2005).

Segundo Pontes (2010), esses três modelos também podem ser aplicados à operação de multiplicação. O modelo aritmético explica a multiplicação de dois números positivos, usando a ideia de soma de parcelas iguais. A multiplicação de um número positivo por um número negativo recai na proposta da multiplicação anterior.

A multiplicação de dois números negativos requer a aplicação da propriedade do elemento neutro da adição, a utilização da multiplicação de um número inteiro por zero e a aplicação da

propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PONTES, 2010, p. 28).

Ainda, de acordo com o modelo aritmético, encontramos em Moretti (2012, p.701) um tipo de modelo chamado *Modelo didático que se baseia no prolongamento da reta numérica dos naturais*, que está em consonância com as características do modelo aritmético. Segundo Moretti (2012), esse tipo de modelo se baseia no prolongamento da reta dos naturais, incluindo à esquerda do zero os números negativos. Nessa reta, o crescimento acontece da esquerda para a direita. Assim, para completar a sequência: $-2 \times 2 = -4$; $-2 \times 1 = -2$; $-2 \times 0 = 0$; $-2 \times (-1) = +2$ a multiplicação de dois números negativos precisa ser positivo.

Para justificar a multiplicação de números relativos, o modelo geométrico se baseia no cálculo da área de retângulos. Um exemplo desse tipo de modelo pode ser encontrado com detalhes em Moretti (2012, p. 698). No modelo algébrico, a abordagem para a multiplicação de números relativos acontece de modo formal, como as justificativas históricas apresentadas por Colin MacLaurin e Hankel, já apresentadas no capítulo anterior.

Ao explicitar os modelos de justificativas para os diferentes tipos de abordagens para a adição, a multiplicação e a subtração dos números inteiros relativos, estamos buscando uma fundamentação para melhor podermos analisar as diferentes formas que os livros didáticos apresentam para essas operações. Baseados nesses três modelos, é que faremos a análise dos livros. Segue, agora, a relação dos livros do PNDL – 2011, na mesma ordem em que eles se apresentam no guia, e a análise dos mesmos.

Matemática

Esse livro de autoria de Edwado Bianchini (2006) é iniciado com a apresentação dos números inteiros nos mais variados contextos, como: altitude, extrato bancário, temperatura, tabela de saldo de gols, etc. A adição de números relativos é apresentada como deslocamentos sobre a reta numérica, para a esquerda se o número for negativo e para a direita se o número for positivo. No final, ele apresenta as regras para a adição num quadro amarelo com os seguintes dizeres: “A soma de dois ou mais números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando o sinal comum” (BIANCHINI, 2006, p. 21). Após apresentar a soma de números inteiros com sinais diferentes anuncia:

A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos e dando ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso esses números sejam opostos, a soma será igual a zero (BIANCHINI, 2006, p. 22).

Os exercícios propostos para a adição não evocam o modelo comercial e seguem a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica. A subtração é apresentada logo na sequência e, para ser resolvida, há necessidade de ser transformada numa soma do primeiro número com o oposto do segundo, para então prosseguir com os deslocamentos sobre a reta numérica. Vejamos, nas palavras do autor: “A subtração de dois números inteiros é calculada somando-se o primeiro número ao oposto do segundo” (p. 27).

A multiplicação de números inteiros se estabelece como uma soma de parcelas iguais. No caso da multiplicação de dois números positivos, por exemplo, $(+2) \times (+5) = (+5) + (+5) = +10$, um dos fatores indica a quantidade de vezes que o outro fator deve ser somado. Essa ideia também é usada para justificar a multiplicação de um número positivo por um número negativo.

Para explicar o produto entre dois números negativos, o autor recorre ao oposto de um dos fatores, vejamos: “O produto $(-2) \times (-4)$ pode ser representado por $-(+2) \times (-4)$. Como $(+2) \times (-4) = -8$, temos: $-(+2) \times (-4) = -(-8) = +8 = 8$. Portanto: $(-2) \times (-4) = 8$ ” (p. 36). Na sequência, são explicitadas as regras de sinais para a multiplicação de números inteiros num quadro amarelo da seguinte forma: “Em qualquer multiplicação de números inteiros, temos: o produto de dois números de *mesmo sinal* é um *número positivo*; o produto de dois números de *sinais diferentes* é um *número negativo*” (p. 36, grifos do autor). Após esta explanação, o autor propõe alguns exercícios, para a aplicação do conteúdo proposto, por meio de cálculos aritméticos e algébricos e situações problemas envolvendo a ideia de pontos ganhos ou perdidos em jogos.

A Conquista da Matemática – Edição Renovada

Nesse livro cujos autores são José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci (2009), os números inteiros são apresentados no segundo capítulo. A ideia de número inteiro e sua apresentação

aconteceram ao longo de dezesseis páginas, sendo contempladas nos mais variados contextos. Podemos observar nos exercícios uma forte tendência em relacionar o número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda, embora eles também tenham sido apresentados como temperaturas e altitudes, tomando com referência a reta numérica.

A operação de adição é introduzida com a soma de dois números com sinais iguais. Por meio de situações problemas envolvendo a ideia de pontos ganhos ou perdidos em partidas de jogos esportivos e dos movimentos realizados pelo elevador, os autores propõem a resolução das situações enunciadas através de deslocamentos sobre a reta numérica. A seguir, concluem:

Quando os dois números forem positivos, a soma será um número positivo. Quando os dois números forem negativos, a soma será um número negativo. O módulo do resultado é igual à *soma* dos módulos das parcelas (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 49, grifos do autor).

A adição de números com sinais diferentes é apresentada de forma análoga e, no fechamento, os autores destacam: “Quando dois números tiverem sinais diferentes, o sinal do resultado corresponderá ao sinal do número que está mais distante da origem. O módulo do resultado é igual à *diferença* entre os módulos das parcelas” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 51, grifos do autor).

A subtração é apresentada logo em seguida, utilizando a ideia da soma do primeiro número com o oposto do segundo. Os autores apresentam situações problemas envolvendo a subtração de temperaturas, propondo a sua resolução por meio de deslocamentos sobre a reta numérica, neste caso, a reta numérica é representada pelo termômetro. Concluindo, os autores anunciam que: “Subtrair dois números é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 57).

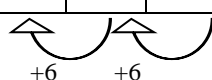
Os autores apresentam a operação de multiplicação de dois números positivos como uma multiplicação de dois números naturais. Assim, $(+3) \times (+2) = 6 \times 2 = 12$ ou $+12$, pois $+3 = 3$ e $+2 = 2$. A seguir, os autores destacam que: “A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo” (p. 64). A multiplicação de dois números com sinais diferentes é conduzida utilizando-se a ideia de soma de parcelas iguais. E, sem maiores detalhes, os autores concluem que: “A multiplicação de um número inteiro positivo por um número

inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um número inteiro negativo” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 64).

Com relação à multiplicação de dois números negativos os autores propõem uma tabela a ser completada. A tabela inicia-se com os produtos de dois números com sinais diferentes, já conhecidos. Pela observação dos resultados encontrados percebe-se uma certa regularidade, que deve ser obedecida para que se possa concluir o preenchimento dessa sequência. Vejamos como essas tabelas se apresentam

Tabela 1 - Apresentação da multiplicação de números negativos

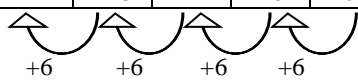
×	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
-6	?	?	?	?	0	-6	-12



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 65)

Tabela 2 - Apresentação da sequência completa da multiplicação de números negativos.

×	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
-6	+24	+18	+12	+6	0	-6	-12



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 65)

Logo abaixo das tabelas, os autores anunciam a regra: “A multiplicação de dois números negativos resulta em um número inteiro positivo” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 65). Os exercícios propostos para a multiplicação de números inteiros atende, na sua maioria, a aplicação das regras, por meios de várias atividades do tipo “calcule”.

Aplicando a Matemática

Os autores desse livro, Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis (2010), apresentam os números negativos no terceiro capítulo. Os números negativos são explorados juntamente com os números decimais e fracionários, não havendo uma separação entre números naturais, inteiros e racionais. Assim, a ideia de número negativo é apresentada por meio de situação problemas envolvendo movimentações bancárias, temperaturas e os pontos mais altos e mais baixos dos continentes em relação ao nível do mar. Nos exercícios propostos para esta etapa, percebemos a ênfase em situações problemas que relacionam a ideia de número positivo a um ganho e de número negativo a uma perda.

As operações de adição e subtração são apresentadas simultaneamente. Inicia-se com a operação de adição que é explorada utilizando o recurso de bolinhas pretas (cargas positivas) e brancas (cargas negativas) que se anulam. Desse modo, a operação $(-5) + 3$ é representada por cinco bolinhas brancas e três bolinhas pretas, cada bolinha branca pode anular uma bolinha preta, restando então duas bolinhas brancas, ou seja, -2.

Para a subtração do tipo $(-3) - (-4)$ é representado inicialmente o número (-3) por um grupo de três bolinhas brancas. Como a operação exige a retirada de quatro bolinhas brancas, acrescentou-se então uma bolinha branca e uma preta neste grupo, não alterando a sua carga, uma vez que elas se anulam. Agora, temos no grupo quatro bolinhas brancas e uma preta, fato que permite a retirada das quatro bolinhas brancas, restando uma bolinha preta, ou seja, o resultado da operação é 1.

Em momento algum, as regras para a adição de números relativos foi explicitada pelos autores. Os exercícios propostos para as operações de adição e subtração seguiram os moldes expostos anteriormente, sempre associando os números negativos e positivos a cargas que se neutralizam.

O entendimento da multiplicação de números relativos é apresentado pelos autores através das movimentações de um ciclista sobre uma linha numerada atendendo as seguintes regras:

Pedalar para a esquerda (oeste) significa andar no sentido negativo, e pedalar para a direita (leste) significa andar no sentido positivo. O tempo no futuro é representado por um valor positivo, o

tempo no passado é representado por um número negativo (CARVALHO; REIS, 2010, p. 119).

Desse modo, para efetuar a multiplicação $(-3) \times (-4)$ os autores sugerem que devemos imaginar que o ciclista está em 0, movendo-se para a esquerda (oeste) a uma velocidade de 3km/h. O resultado dessa multiplicação representa a posição do ciclista a quatro horas atrás, ou seja, o ciclista estava a 12 km à direita de 0, +12.

Ainda, como uma forma de reforçar a multiplicação de números relativos, os autores sugerem que o resultado encontrado na situação acima seja conferido, observando-se a sequência de números que aumenta de 4 em 4. Para atender a regra, os próximos resultados precisam ser 4, 8 e 12 (CARVALHO; REIS, 2010, p. 122).

$$\begin{aligned} 2 \times (-4) &= -8 \\ 1 \times (-4) &= -4 \\ 0 \times (-4) &= 0 \\ (-1) \times (-4) &= 4 \\ (-2) \times (-4) &= 8 \\ (-3) \times (-4) &= 12 \end{aligned}$$

Como aconteceu nas operações de adição e subtração, aqui também os autores não explicitaram as regras de sinais para a multiplicação dos relativos. Os exercícios propostos para a multiplicação seguiram os moldes que os autores utilizaram para a apresentação dessa operação, utilizando a ideia de deslocamento sobre a reta numerada atrelada a ideia de tempo futuro e tempo passado, assim como a utilização de sequências numéricas a serem completadas.

Matemática – Ideias e Desafios

Os números inteiros nesse livro, de autoria de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga (2009), apresentam-se logo no seu primeiro capítulo. A ideia de número negativo é explorada em situações de movimentação bancária, temperaturas e altitudes.

A operação de adição é conduzida por meio de deslocamentos sobre a reta numérica. O número positivo representa um deslocamento para a direita e o negativo para a esquerda. Após vários exemplos de movimentações sobre a reta, as autoras propõem um resumo das situações analisadas. Vejamos:

Adição de dois números com sinais iguais:

- Os dois são positivos:

$$(+4) + (+6) = +10$$

O sinal da soma é positivo e o módulo é a soma dos módulos das parcelas.

- Os dois são negativos:

$$(-2) + (-5) = -7$$

O sinal da soma é negativo e o módulo é a soma dos módulos das parcelas.

Adição de dois números com sinais diferentes:

- $(+8) + (-3) = +5$

O sinal da soma é o sinal do número maior em módulo (+) e o módulo é a diferença entre os módulos das parcelas.

- $(-10) + (+8) = -2$

O sinal da soma é o sinal do número de maior módulo (-) e o módulo é a diferença entre os módulos das parcelas (MORI; ONAGA, 2009, p. 37).

A seguir, as autoras apresentam algumas situações problemas que envolvem o cálculo da adição dos relativos nos mais variados contextos. A subtração de números inteiros é apresentada como a soma do primeiro número pelo oposto do segundo. Assim, para resolver a operação $(+5) - (-2)$ as autoras colocam que “Eliminamos os parênteses e trocamos $- (-2)$ por $+2$ ” (p. 39), para, então, poder realizar os deslocamentos sobre a reta numérica.

A multiplicação de dois números inteiros positivos e de dois números com sinais diferentes é conduzida pela ideia da soma de parcelas iguais, por meio dos deslocamentos sobre a reta numérica. Na multiplicação de dois números negativos, foi utilizado o recurso do oposto. Assim, a multiplicação $(-3) \times (-5)$ pode ser substituída por $- (+3) \times (-5) = - (-15) = +15$. As autoras também apresentaram uma tabela com os produtos do número (-5) pelos números inteiros, formando uma sequência numérica que deve ser completada, observando o resultado anterior. E, finalmente, apresentam, explicitamente, as regras de sinais para a multiplicação desses números:

O produto de dois números com sinais iguais é um número inteiro positivo, com módulo igual ao produto dos módulos dos fatores. [...] O produto de dois números inteiros com sinais diferentes é um número inteiro negativo, com módulo igual

ao produto dos módulos dos fatores (MORI; ONAGA, 2009, p. 48).

Como exercícios de aprendizagem, as autoras indicam a resolução de situações problemas e alguns do tipo “efetue”.

Matemática

Esse livro tem como autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (2009). Nele, os números positivos e negativos são abordados no sexto capítulo nos mais variados contextos: temperatura, altitude, os andares de um prédio, cálculos contábeis, entre outros.

A operação de adição é apresentada, exclusivamente, através de situações problemas relacionando a ideia de número positivo a um ganho/lucro e o número negativo a uma perda/prejuízo. Observe um exemplo: “O lucro de 120 paga o prejuízo de 80; resta um lucro de 40 mil reais. Indicamos assim: $120 + (-80) = 40$ ” (IMENES; LELLIS, 2009, p. 118). Como conclusão, aparece em um balão a fala de um menino: “Eu acho que sei fazer adições. É só pensar em juntar lucros e prejuízos” (p.118). As atividades propostas para essa operação seguem nos mesmos moldes, trabalhando com saldos contábeis.

Ainda, nesse contexto contábil, a operação de subtração é apresentada. Subtrair um número negativo pode ser entendido como subtrair uma dívida que corresponde ao mesmo que somar, ou seja, obter um ganho. Assim, se o saldo bancário era de -90 e precisar retirar (subtrair) -30 o saldo final será de -60 , pois $-(-30)$, segundo os autores, é o mesmo que $+30$. As atividades propostas para a subtração seguem na mesma direção, situações de jogos e saldos bancários relacionando a ideia de positivo a um ganho e negativo a uma perda. As regras de sinais para essas operações não foram explicitadas em momento algum pelos autores.

No décimo capítulo do livro, os autores apresentam a operação de multiplicação. O produto de dois números positivos ou de um número positivo por um número negativo foi abordado através da soma de parcelas iguais. E a multiplicação de dois números negativos foi conduzido por meio da observação dos produtos obtidos na sequência numérica em que o número (-4) foi multiplicado pelos números de 0 a 4 em ordem decrescente. Em seguida, os autores lançam o desafio: “Quais são as próximas multiplicações da sequência? Mantendo o padrão, devem ser $(-1) \times (-4)$, $(-2) \times (-4)$ e assim por diante. E, mantendo o

padrão, quais serão os resultados? Tente responder!” (IMENES; LELLIS, 2009, p. 208).

Em nenhum momento, os autores anunciam que o produto de dois números negativos deve ser positivo. Eles desafiam os estudantes para que eles possam chegar a esta conclusão através das observações das sequências numéricas. Os exercícios apontados pelos autores seguem o mesmo caminho; completar sequências numéricas, anotando as conclusões, efetuar os produtos, entre outros.

Matemática e Realidade

A ideia de números positivos e negativos é apresentada logo no primeiro capítulo. Os autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado (2009) abordam a ideia de número negativo em diversas situações como: temperatura, saldo de gols em campeonatos de futebol, saldo bancário e altitude.

A abordagem feita para a operação de adição é exclusivamente contábil. Parte-se de uma situação problema de movimentação bancária, onde são realizados depósitos (positivos) e retiradas (negativos) de dinheiro, calculando o saldo final da conta. Por fim, os autores anunciam as regras para essa operação: “Para adicionar números negativos, adicionamos os valores absolutos e damos ao resultado o sinal de negativo” (DOLCE; MACHADO, 2009, p. 26). E, “Para adicionar um número positivo a um número negativo, subtraímos os valores absolutos e damos ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso sejam números opostos, a soma é zero” (DOLCE; MACHADO, 2009, p. 27). Os exercícios propostos para a operação de adição enfatizam situações de saldo bancário e saldo de pontos de jogos.

A operação de subtração foi explorada por meio de situações problemas, envolvendo a variação de temperaturas e ilustradas por deslocamentos no termômetro. Após a explanação das situações, os autores transformam a operação de subtração em uma soma do primeiro número com o oposto do segundo. Nas palavras dos autores: “A diferença entre dois números inteiros é igual a soma do primeiro com o oposto do segundo” (DOLCE; MACHADO, 2009, p. 37). As atividades propostas para essa operação são parecidas com as indicadas para a adição, apenas se diferenciam por apresentar mais questões de cálculo aritmético.

Seguindo com as operações, depois da subtração, os autores apresentam a operação de multiplicação. Essa operação é abordada como uma soma de parcelas iguais para o caso da multiplicação de dois

números positivos e para a multiplicação de dois números com sinais diferentes. A multiplicação de um número positivo por um número negativo foi introduzida com a seguinte situação:

Se uma pessoa compra um fogão para pagar em 6 prestações de R\$ 133,00, quanto será somado ao saldo de sua conta no banco? Cada prestação acarreta um débito de R\$ 133,00 na conta. O débito total será de: $6 \times 133 = 798$. Do saldo da conta serão subtraídos R\$ 798,00 ou, o que dá no mesmo, será somado o valor de $- R\$ 798,00$ (DOLCE; MACHADO, 2009, p. 44).

Após essa explanação e a demonstração das parcelas repetidas nas multiplicações de números com sinais diferentes, os autores destacam: “Para *multiplicar um número positivo por outro negativo*, em qualquer ordem, multiplicamos os valores absolutos e damos ao produto o sinal negativo” (p. 45, grifos do autor).

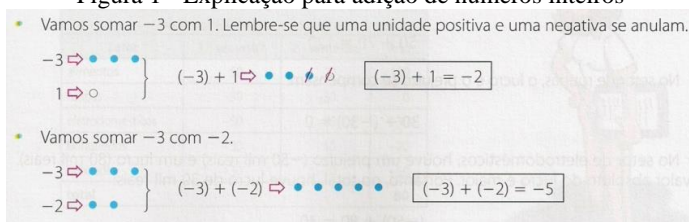
A multiplicação de dois números negativos também foi conduzida como uma soma de parcelas iguais. Vejamos como os autores colocam essa questão: “ $(-3) \times (-7)$ deve ser a soma de 3 parcelas iguais ao oposto de (-7) ; $(-3) \times (-7) = -(-7) - (-7) - (-7) = 7 + 7 + 7 = 21$ ” (p. 46). Após outro exemplo parecido ao citado, os autores anunciam que: “Para *multiplicar dois números negativos*, multiplicamos os valores absolutos e damos ao produto o sinal positivo” (p. 46, grifos do autor). Os exercícios apresentados para essa operação contemplam o preenchimento de tabelas multiplicativas e cálculo de produtos.

Matemática na medida certa

Os autores desse livro, Marília Ramos Centurión e José Jakubovik (2010), apresentam os números inteiros no seu primeiro capítulo. A ideia de números positivos e negativos é explorada em diversas situações como: temperaturas, altitudes, quadro de botões de um elevador, saldos bancários e linha do tempo.

A adição de números inteiros é introduzida, utilizando bolinhas brancas, representando os números positivos, e bolinhas azuis, representando os números negativos. Juntas, uma bolinha branca e uma bolinha azul se anulam. Vejamos:

Figura 1 - Explicação para adição de números inteiros



Fonte: Centurión e Jakubovic (2010, p.23)

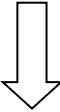
A seguir, os autores trazem um exemplo da aplicação de adição de números inteiros. O exemplo apresenta uma situação problema com uma tabela de lucros e prejuízos dos vários setores de um supermercado. E os cálculos são realizados a fim de saber o saldo final desse supermercado. Concluindo, os autores destacam: “Veja que é possível achar a soma de números inteiros com processos simples. Basta pensar em unidades positivas ou negativas (bolinhas brancas e azuis) ou em lucros e prejuízos” (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2010, p. 25). As atividades propostas para essa operação apresentam situações problemas contábeis, adição utilizando bolinhas brancas e azuis e atividades de cálculo aritmético.

Com o mesmo exemplo das bolinhas brancas e azuis, os autores introduzem a subtração de números inteiros. Assim, para efetuar $(-4) - (-1)$ tem-se 4 bolinhas azuis e tira-se 1, restando 3 bolinhas azuis, ou seja, -3 . E, para efetuar $3 - (-2)$, é preciso acrescentar 2 bolinhas brancas e 2 azuis, pois é impossível retirar duas bolinhas azuis de três brancas. Ao total tem-se 5 bolinhas brancas e 2 azuis, agora tira-se as 2 bolinhas azuis, restando 5 brancas, ou seja, $3 - (-2) = +5$. Após essas demonstrações, os autores sugerem que a subtração seja transformada na soma do primeiro número com o oposto do segundo. As atividades propostas para essa operação seguem os moldes das apresentadas para a adição.

É preciso destacar que as regras de sinais, tanto para a adição quanto para a subtração, não foram explicitadas em nenhum momento pelos autores. Com relação à operação de multiplicação, ela é apresentada logo após a operação de subtração. De uma maneira bem sucinta, os autores apresentam a ideia de multiplicação como uma soma de parcelas iguais, para o caso de dois números positivos e para o caso de dois números com sinais diferentes. Partindo das multiplicações

conhecidas, uma tabela de produtos é construída formando uma sequência. Vejamos como ficou essa tabela:

Tabela 3 - Apresentação da multiplicação de números inteiros

$4 \cdot (-3) = -12$	 aumenta 3 unidades
$3 \cdot (-3) = -9$	
$2 \cdot (-3) = -6$	
$1 \cdot (-3) = -3$	
$0 \cdot (-3) = 0$	
$(-1) \cdot (-3) = 3$	
$(-2) \cdot (-3) = 6$	
$(-3) \cdot (-3) = 9$	

Fonte: Centurión e Jakubovic (2010, p. 42)

Partindo da observação dos produtos obtidos, procurando preservar o padrão estabelecido, percebe-se que a multiplicação de dois números negativos precisa ser positivo. A seguir, a regra para a multiplicação de números inteiros é anunciada: “Multiplicamos os seus módulos. O produto será positivo se os dois fatores tiverem sinais iguais e será negativo se os dois fatores tiverem sinais diferentes” (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2010, p. 42). Nas atividades propostas para esta operação, encontramos adições para serem escritas na forma de multiplicação e exercícios do tipo “calcule”.

Projeto Radix – Matemática

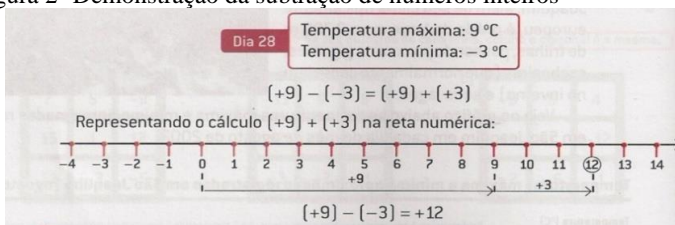
Nesse livro de autoria de Jakson da Silva Ribeiro (2010), os números positivos e negativos são apresentados no sexto capítulo. A ideia de número positivo e negativo aparece relacionada mais especificamente a temperaturas, mas aparece, também, de forma menos expressiva, nas situações problemas envolvendo extratos bancários e altitudes.

A adição de números inteiros é introduzida por meio de uma situação problema de movimentações de lucros e prejuízos de um supermercado. Para saber o saldo do primeiro bimestre, nesse supermercado, foi utilizada a reta numérica. Assim, o número positivo (lucro) indica um deslocamento para a direita e o número negativo

(prejuízo) um deslocamento para a esquerda. Dessa forma, o lucro foi representado por (+10) e o prejuízo por (-7), resultando num lucro de 3, ou seja, +3. As atividades para esta operação propõem a realização de deslocamentos sobre a reta, situações problemas contábeis e vários exercícios de cálculo aritmético.

Para apresentar a subtração de números inteiros, o autor utiliza um gráfico das temperaturas máximas e mínimas registradas na cidade de São Joaquim (SC) no ano de 2007. Partindo desse gráfico, ele propõe calcular a diferença entre as temperaturas máximas e mínimas registrada em dois dias diferentes. Vejamos como o autor conduziu essa demonstração:

Figura 2- Demonstração da subtração de números inteiros



Fonte: Ribeiro (2010, p. 106)

Percebemos que autor destaca que subtrair um número é o mesmo que somar o primeiro número com o oposto do segundo número. Nas atividades propostas para esta operação, temos sequências numéricas para serem completadas e expressões numéricas envolvendo a adição e a subtração de inteiros. É importante destacar que, em nenhum momento, o autor explicita as regras de sinais para a adição de números relativos.

A multiplicação de números inteiros é apresentada como a soma de parcelas iguais, para o caso da multiplicação de dois números positivos e para a multiplicação de dois números com sinais diferentes. Na multiplicação de dois números negativos, o autor usou o recurso de substituir um dos fatores pelo seu simétrico. Vejamos a sua demonstração: “ $(-2) \cdot (-3) = - (+2) \cdot (-3) = - (-6) = +6$ ” (p. 110). A seguir anuncia as regras:

Em uma multiplicação de dois fatores em que um dos fatores é um número positivo e o outro, um número negativo, o produto é um número negativo. [...] Em uma multiplicação de dois fatores em que ambos são negativos, o produto é um número positivo (RIBEIRO, 2010, p. 110).

Os exercícios para essa operação propõem a resolução de situações problemas, sequências numéricas a serem completadas e expressões numéricas.

Tudo é Matemática

Os números inteiros são apresentados nesse livro, cuja autoria é de Luiz Roberto Dante (2010), no seu segundo capítulo. A ideia de número positivo e negativo é explorada por meio de situações do cotidiano como: fuso horário, temperatura, altitude, saldo de gols no campeonato de futebol e movimentações bancárias.

A operação de adição de números inteiros é conduzida através de situações problemas de temperatura e, também, de profundidade, usando, como recurso de resolução, deslocamentos sobre a reta numérica. Nas atividades propostas para esta operação, o autor propõe exercícios que instigam os alunos a perceberem certa generalização na soma de números inteiros com sinais iguais e também com sinais diferentes. Isso utilizando o processo de movimentações sobre a reta numérica, tomando o número positivo como um deslocamento para a direita e o número negativo um deslocamento para a esquerda.

De modo bem sucinto, o autor apresenta a operação de subtração de números inteiros, argumentando que essa operação nos números naturais nem sempre é possível, mas no conjunto dos inteiros a subtração é sempre possível. A seguir, é apresentada a resolução de expressões numéricas, envolvendo a adição e a subtração de números inteiros, sem maiores explicações. Vejamos como o autor procedeu:

Figura 3 - Demonstração para a subtração de números inteiros

Observe a expressão numérica abaixo e veja como seu valor pode ser calculado.

$$(-5) + (+4) - (+3) + (-2) - (-1) = -5 + 4 - 3 - 2 + 1 = -10 + 5 = -5$$

oposto de +3 oposto de -1

Fonte: Dante (2010, p. 37)

Após essa breve apresentação da subtração, são propostas cinco expressões numéricas como atividades de aprendizagem. Em seguida, a operação de multiplicação é introduzida. O autor não demonstra a multiplicação de números inteiros, ele sugere o preenchimento da tabela abaixo, observando-se as regularidades.

Figura 4- Tabela utilizada para a apresentação da multiplicação de números inteiros

×	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	coluna do +1
+3	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+3
+2	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+2
+1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-1
-2	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-2
-3	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-3

Fonte: Dante (2010, p. 38)

Partindo dos resultados encontrados na tabela, é feito o seguinte questionamento: “Como devemos fazer para obter o resultado de uma multiplicação de dois números com sinais diferentes (um positivo e outro negativo)?” (DANTE, 2010, p. 39). A respeito da multiplicação de dois números negativos, é solicitado que, utilizando a tabela, seja registrado o resultado de algumas multiplicações entre dois números negativos. A partir desses resultados, é sugerido que: “Troque ideias com seus colegas e, depois, escreva como obter o resultado em uma multiplicação de dois números inteiros negativos” (p. 39). Não foi explicitado pelo autor, em momento algum, a regra de sinais para a multiplicação de números relativos. As atividades propostas conduziram para que essas regras emergissem em meio às regularidades apresentadas na tabela.

Vontade de Saber Matemática

Nesse livro de autoria de Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro, os números positivos e negativos são apresentados no quarto capítulo, contemplando, também, os números positivos e negativos na sua forma decimal e fracionária. Inicialmente, esses números foram explorados nos mais variados contextos do cotidiano como: saldo bancário, temperatura e altitude.

A operação de adição foi introduzida a partir de uma situação problema, envolvendo movimentações bancárias, onde o número positivo aparece relacionado à ideia de ganho/dépósito e o número negativo a retirada/débito. Para resolver as operações oriundas da movimentação bancária, foi utilizado o deslocamento sobre a reta numérica. Os números positivos representavam os deslocamentos

realizados para a direita e os números negativos os deslocamentos para a esquerda.

Após a demonstração da operação de adição, as suas regras são anunciadas: “Nas adições cujas parcelas têm o mesmo sinal, adicionamos os valores absolutos dessas parcelas e conservamos o sinal” (SOUZA; PATARO, 2009, p. 94). “Nas adições cujas parcelas têm sinais contrários, subtraímos os valores absolutos dessas parcelas e conservamos o sinal do número de maior valor absoluto” (SOUZA; PATARO, 2009, p. 95). As atividades de aprendizagem propostas para essa operação estão de acordo com o modelo utilizado na sua apresentação, seguindo a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica e situações problemas abordando saldos contábeis.

Utilizando-se o contexto da variação de temperaturas, apresenta-se a operação de subtração. Essa operação foi abordada como sendo a soma do primeiro número pelo oposto do segundo, podendo, desta forma, ser representada por deslocamentos na reta numérica. Nas palavras dos autores: “Subtrair números positivos e números negativos é equivalente a adicionar o minuendo ao oposto do subtraendo” (p. 100).

A multiplicação de números positivos e negativos segue a ideia da soma de parcelas iguais, tanto para a multiplicação de dois números positivos, quanto para a multiplicação de dois números com sinais diferentes. Para explicar a multiplicação de dois números negativos, foi utilizada a ferramenta do oposto de um número. Assim, para calcular a multiplicação $(-3) \times (-4)$, os autores demonstram a seguinte forma: “Substituímos -3 por $-(+3)$, pois $+3$ é o oposto de -3 , e efetuamos o cálculo. $(-3) \times (-4) = -(+3) \times (-4) = -(-12) = 12$ ” (p. 103).

Após essa explicação, os autores destacam que: “Em uma multiplicação de dois fatores, em que: ambos têm o mesmo sinal, o resultado é sempre um número positivo; um fator é positivo e outro negativo, o resultado é sempre um número negativo” (p. 103). Como atividades propostas para essa operação, enfatizam-se o cálculo numérico e algumas situações problemas relacionadas a movimentações bancárias.

Com a análise do livro “Vontade de Saber Matemática”, finalizam-se os nossos trabalhos de apreciação dos livros didáticos apontados pelo Guia do livro didático do PNDL – 2011. Pautados nos registros da nossa análise, apresentaremos agora uma tabela comparativa com os modelos que foram encontrados nos livros didáticos analisados.

Os critérios para a categorização das justificativas apresentadas para as operações de adição, subtração e multiplicação, apresentadas nos livros didáticos, estão de acordo com modelos aritmético, algébrico e

geométrico apontados por Gonzáles (1990, *apud* PONTES, 2010), no que diz respeito às operações de adição e subtração. E, para a operação de multiplicação, de acordo com Pontes (2010), esses modelos também podem ser aplicados, como já mencionados anteriormente.

Dentre as diversas abordagens apresentadas nos livros didáticos para a multiplicação de números negativos, encontramos duas vertentes para o modelo aritmético. Uma utiliza como justificativa para a multiplicação de números de sinais diferentes a soma de parcelas iguais e para a multiplicação de dois números negativos, utiliza o recurso da multiplicação do primeiro pelo simétrico do segundo, ou vice versa.

A outra apresenta a multiplicação de números negativos, observando os produtos obtidos numa sequência numérica. Assim, a regra de sinais emerge em meio a generalizações. Então, pensamos ser de fundamental importância diferenciar esses dois modos de apresentação aritmética da multiplicação de números relativos. Por isso, na tabela, utilizamos a expressão aritmética 1 para nos referirmos ao primeiro caso, e, aritmética 2, para indicarmos o segundo caso. Vejamos, agora, os resultados da análise por meio da tabela comparativa:

Tabela 4- Tabela comparativa dos modelos encontrados na análise dos livros didáticos

Modelos Livros	Adição			Subtração			Multiplicação			
	Arit.	Geo.	Alg.	Arit.	Geo.	Alg.	Arit. 1	Arit. 2	Geo.	Alg.
Matemática (2006)		x			x		x			
A Conquista da Matemática – Edição Renovada (2009)		x			x			x		
Aplicando a Matemática (2010)	x			x				x		
Matemática – Ideias e Desafios (2009)		x			x		x			
Matemática (2009)	x			x				x		

Matemática e Realidade (2009)	x				x		x			
Matemática na medida certa (2010)	x			x				x		
Projeto Radix – Matemática (2010)	x				x		x			
Tudo é Matemática (2010)		x		x				x		
Vontade de Saber Matemática (2009)	x				x		x			

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Com base na análise dos livros, percebemos que 60% deles utilizam o modelo aritmético para abordar a adição de números inteiros. Os autores se basearam em situações problemas que relacionaram o número positivo a ideia de ganho/ lucro/ crédito e a ideia de número negativo atrelada a perda/débito/prejuízo. A operação de adição foi apresentada geometricamente em 40% dos livros analisados, por meio de situações em que realizaram os deslocamentos sobre a reta numérica, onde os números positivos representavam movimentações para a direita e o número negativo para a esquerda. Em nenhum dos livros analisados, a operação de adição foi apresentada utilizando o modelo algébrico.

Embora a operação da adição tenha sido apresentada em 60% dos casos pelo modelo aritmético, a operação de subtração não seguiu esse padrão. Somente 40% dos livros apresentaram a operação de subtração, utilizando esse modelo. Os demais apresentaram a operação de subtração, utilizando a ideia da soma do primeiro pelo oposto do segundo, para então poder realizar os deslocamentos sobre a reta numérica, caracterizando-se como modelo geométrico. O modelo algébrico para a apresentação da subtração não foi encontrado nos livros analisados. É importante destacar que, em todos os livros apreciados, a operação de subtração foi apresentada após a adição, antecedendo a apresentação da operação de multiplicação.

Com relação à apresentação da operação de multiplicação, não encontramos nos livros didáticos os modelos geométrico e algébrico. Todos os livros utilizaram o modelo aritmético para justificar a multiplicação de números inteiros. Alguns livros, 50%, utilizaram como

explicação para a multiplicação de números com sinais diferentes a soma de parcelas iguais e, para o caso de dois números negativos, a multiplicação do primeiro pelo simétrico do segundo. Os demais livros apresentaram como justificativa para a multiplicação de números inteiros a ideia da sequência numérica, onde a multiplicação de dois números negativos se justifica para atender o padrão da sequência formada.

No decorrer deste tópico, no qual realizamos a análise dos livros didáticos, podemos ter um panorama geral das diversas abordagens encontradas nos manuais escolares referentes às operações de adição, subtração e multiplicação. Agora, será que a forma de como os livros didáticos apresentaram as operações de adição, subtração e multiplicação dos números inteiros atendem aos documentos oficiais, como PCN e NCTM?

3.3 O que nos dizem os PCN e NCTM a respeito do ensino dos números inteiros relativos?

Nesta parte do nosso trabalho, realizamos uma consulta aos documentos oficiais para sabermos quais as orientações que eles trazem a respeito do ensino dos números inteiros e quais as suas recomendações para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação desses números.

Nos Parâmetros curriculares Nacionais de Matemática (PCN), para as séries iniciais do ensino fundamental – 1^a a 4^a séries - (BRASIL, 1997) os números negativos são citados em poucos momentos. Tanto no primeiro ciclo (1^a e 2^a séries) quanto no segundo ciclo (3^a e 4^a séries) parte-se da ideia que os conhecimentos numéricos são construídos num processo dialético. O aluno, nesse processo, perceberá a existência das diferentes categorias de números, criadas em função de diferentes problemas enfrentados pela humanidade ao longo da história, entre eles os negativos. Destaca-se, também, a preocupação evidente no tratamento de número como uma relação, o que futuramente possibilitará uma melhor aceitação dos números negativos.

De acordo com os PCN para as séries finais do ensino fundamental – 5^a a 8^a séries – (BRASIL, 1998, p. 66), no terceiro ciclo²⁰, os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, podendo, desse modo, representar diferença, falta,

²⁰ O terceiro ciclo corresponde a 5^a e a 6^a séries do ensino fundamental de 8 anos.

orientação e posições relativas. A apresentação dos números inteiros pode apoiar-se nas concepções intuitivas que os alunos trazem a respeito desses números por meio das situações vivenciadas, por eles, de ganhos e perdas num jogo, débitos e créditos, temperaturas, entre outras. Entretanto, advertem que o estudo desses números não deverá restringir-se somente a situações práticas, deve abranger outros aspectos que promovam a compreensão das regras do cálculo, com esses números, pela observação de regularidades.

Na parte em que os PCN tratam sobre conceitos e procedimentos para o terceiro ciclo, a respeito dos números relativos, eles apontam o

[...] reconhecimento dos números inteiros em diferentes contextos – cotidianos e históricos - e exploração de situações problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos (BRASIL, 1998, p. 71).

Nada consta sobre o ensino da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros para o terceiro ciclo do ensino fundamental, como também não aponta de forma explícita como deva acontecer o ensino das operações de adição e subtração desses números.

Contudo, no quarto ciclo²¹ deste documento, destinado a séries finais do ensino fundamental, podemos constatar a apresentação dos números inteiros com mais detalhes. Primeiramente, nos é apresentado um pequeno histórico a respeito dos números negativos. A seguir, os PCN afirmam que na escola o estudo dos números inteiros apresenta dificuldades e que a aprendizagem, ao longo do ensino fundamental, tem sido insatisfatória. Neste sentido, é importante reconhecer os obstáculos que o aluno enfrenta ao entrar em contato com esses números. A saber:

- conferir significado às quantidades negativas;
- reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero-origem);
- perceber a lógica dos números negativos que contraria a lógica dos números naturais – por

²¹ O quarto ciclo corresponde a 7^a e 8^a séries do ensino fundamental de 8 anos.

exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”;

- interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que x é positivo e y é negativo) (BRASIL, 1998, p. 98).

Assim, com o intuito de superar esses obstáculos, o documento apresenta alguns exemplos de recurso que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem desses números. O primeiro deles é a representação geométrica dos números inteiros numa reta numérica orientada, por meio dela podem ser explorados vários segmentos desse conteúdo, tais como:

- visualizar o ponto de referência (origem) a partir da qual se definem os dois sentidos;
- identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;
- reconhecer a ordenação dos inteiros: dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está à esquerda (no sentido positivo da reta numérica); assim, dados dois números positivos será maior o que estiver mais distante do zero e dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero;
- comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles; inferir regras para operar com adição e subtração, como: $(+3) + (-5) = +3 - 5 = -2$ (BRASIL, 1998, p. 98-99)

Ainda, para explorar as operações de adição e subtração, o documento indica outro recurso: o ábaco de inteiros,

[...] que consiste em duas varetas verticais fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar os pontos (BRASIL, 1998, p. 99).

Para a apresentação da multiplicação de números inteiros, os PCN indicam que essa operação pode ser trabalhada por meio de

tabelas. Inicialmente, se fará o registro do produto entre dois números positivos. A seguir, a multiplicação entre um número positivo por um número negativo pode ser interpretada como a soma de parcelas negativas e resolvida por procedimentos aditivos, por exemplo, $(+2) \times (-5) = (-5) + (-5) = -10$. Através da observação das regularidades das seqüências numéricas construídas, pode-se chegar à multiplicação de dois números negativos, compreendendo que este produto precisa ser positivo para manter o padrão numérico observado na seqüência. Ilustrando:

Tabela 5- Seqüência formada na multiplicação de números inteiros

x	-2	-1	0	1	2	3	×
	-6	-3	0	3	6	9	3
	-4	-2	0	2	4	6	2
	-2	-1	0	1	2	3	1
	0	0	0	0	0	0	0
	+2	+1	0	-1	-2	-3	-1
	+4	+2	0	-2	-4	-6	-2

Fonte: Brasil (1998) y

Podemos observar que os produtos obtidos entre os números da primeira linha (x) com os da última coluna (y), na posição vertical, decrescem de cima para baixo, para $x > 0$ e crescem para $x < 0$. Na posição horizontal, da direita para a esquerda, os produtos crescem para $y > 0$ e decrescem para $y < 0$.

De um modo geral, os PCN apontam que o trabalho com números inteiros não pode estar relacionado somente a situações concretas. Contudo, adverte que o ensino, conduzido exclusivamente pelo caminho formal, corre o risco de reduzir o estudo a um formalismo vazio. “Assim, devem-se buscar situações que permitam aos alunos reconhecer alguns aspectos formais dos números inteiros a partir de experiências práticas e do conhecimento que possuem sobre os números naturais” (BRASIL, 1998, p. 100).

Vejamos, agora, o que nos dizem o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)- Princípios e Normas para a Matemática Escolar à respeito do ensino dos números inteiros e das suas operações de adição, subtração e multiplicação.

Segundo as Normas (NCTM, 2008), os inteiros negativos devem ser introduzidos no período do 3^o ao 5^o anos de escolaridade

[...] através da utilização de modelos familiares, como a temperatura ou dívidas de dinheiro. A reta

numérica também constitui um modelo útil e adequado, e os alunos deverão reconhecer que os pontos situados a esquerda de 0, numa reta numérica horizontal, podem ser representados por números menores que 0 (NCTM, 2008, p. 175).

No período que corresponde do 6^o ao 8^o anos de escolaridade, as Normas (NCTM, 2008) apontam para a importância de os alunos aprofundarem os seus conhecimentos a respeito dos inteiros relativos, devendo adquirir competência na sua utilização para a resolução de problemas. Os alunos deverão ampliar os seus conhecimentos informais a respeito dos negativos, decorrente de suas experiências cotidianas, como as temperaturas ou a redução do número de metros numa jogada de futebol americano. Neste sentido,

Os inteiros positivos e negativos deverão ser percebidos como úteis na indicação de variações ou valores relativos. Os alunos poderão ainda avaliar a utilidade dos inteiros negativos quando trabalharem com equações, cujas resoluções exijam a sua utilização, como em $2x + 7 = 1$ (NCTM, 2008, p. 256).

Pelo exposto, pode ser percebido que, embora este documento, NCTM (2008), indique a compreensão dos negativos pela ampliação dos conhecimentos informais adquiridos pelos alunos, nada consta a respeito, especificamente, da regra de sinais nem de indicações para a condução das operações de adição, subtração e multiplicação com esses números. Entretanto, de acordo com Pontes (2010), no Caderno 9 da Coleção Temas Matemáticos do NCTM, intitulado o sistema dos inteiros²², aparece uma sugestão para a multiplicação de números inteiros relativos. Vejamos:

Nessa justificativa, é sugerida a multiplicação da sequência dos números inteiros de 4 até -4 pelo número positivo 5. Iniciando pelo produto $4 \times 5 = 20$ e seguindo até o produto $0 \times 5 = 0$ pode ser observado que o primeiro fator vai diminuindo de um em um, que o segundo fator permanece igual e que os produtos vão diminuindo de cinco em

²²NCTM. The system of integers. Washington, 1968. (Topics in Mathematics for Elementary School Teachers), Booklet Number 9.

cinco unidades. Portanto, continuando a realizar os produtos até $-4 \times 5 = -20$, obtemos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} 4 \times 5 &= 20 \\ 3 \times 5 &= 15 \\ 2 \times 5 &= 10 \\ 1 \times 5 &= 5 \\ 0 \times 5 &= 0 \\ -1 \times 5 &= -5 \\ -2 \times 5 &= -10 \\ -3 \times 5 &= -15 \\ -4 \times 5 &= -20 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o produto de um número negativo por um número positivo é um número negativo. Em seguida, é usada a mesma estratégia para multiplicar os números inteiros de 4 a -4 pelo número negativo -5, inicialmente de 4 até 0, para que a sequência dos produtos seja percebida e, em seguida de -1 a -4, que geram os produtos:

$$\begin{aligned} 4 \times -5 &= -20 \\ 3 \times -5 &= -15 \\ 2 \times -5 &= -10 \\ 1 \times -5 &= -5 \\ 0 \times -5 &= 0 \\ -1 \times -5 &= +5 \\ -2 \times -5 &= +10 \\ -3 \times -5 &= +15 \\ -4 \times -5 &= +20 \end{aligned}$$

De acordo com a sequência anterior, concluímos que o produto de um número negativo por um número negativo é um número positivo (PONTES, 2010, p. 104).

Nessa sugestão, podemos perceber que o ensino da regra de sinais para a multiplicação aconteceu pela via formal. Ela está em consonância com a indicação apontada pelos PCN. Entretanto, a regra de sinais, para a multiplicação de números inteiros, é sugerida pelos PCN somente para as últimas séries do ensino fundamental.

Nesses documentos, PCN e NCTM, há diversas sugestões de ensino para a compreensão do campo aditivo dos relativos. Contudo, o

ensino da multiplicação de números negativos, em ambos os documentos, é sugerido por meio de uma sequência numérica em que um padrão precisa ser preservado. Ou seja, a compreensão de que a multiplicação de dois números negativos precisa ser positivo, deve acontecer pela via formal, fugindo de exemplos do cotidiano.

Finalizando este capítulo, cabe, agora, tecermos algumas considerações sobre o tema discutido neste tópico. O ensino dos números inteiros encontra dificuldades, principalmente, no que se refere à multiplicação desses números e suas regras de sinais. O fato da adição de números relativos ser conduzida por meio do modelo aritmético, utilizando-se de situações problemas contábeis, pode trazer prejuízos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números.

Vimos, por meio da análise dos livros didáticos, que a maioria deles apresenta a operação de adição, utilizando-se do modelo aritmético. Entretanto, esse mesmo argumento, utilizado para explicar a adição de números inteiros, não é suficiente para explicar a multiplicação entre dois números negativos. Assim, os PCN apontam que o ensino dos números inteiros não deve ser conduzido exclusivamente por exemplos práticos. Mas, que, partindo das situações vivenciadas pelos alunos, estes sejam levados a fazer generalizações e possam compreender que a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros atende as regras da consistência interna da própria matemática. A sugestão de ensino, apresentada pelo caderno 9 do NCTM, apresenta um modelo que atende a esta perspectiva.

Neste contexto, cabe agora fazermos alguns questionamentos: Quais os limites/possibilidades que o ensino da operação de adição, conduzida pelo modelo geométrico, pode trazer para o entendimento da operação de multiplicação? Por que a operação de subtração, nos livros didáticos, é sempre apresentada após a adição e antes da multiplicação? Quais os efeitos de apresentar o ensino da operação de subtração após o ensino da multiplicação, uma vez que esta operação se utiliza da regra de sinais para fazer as simplificações necessárias para o desenvolvimento dos cálculos? Estes, entre outros questionamentos, nos servem como mola propulsora para a continuação do nosso trabalho. E, no próximo capítulo, buscaremos fundamentação teórica para podermos refletir sobre estes, dentre outros tantos, questionamentos.

4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA E PRINCÍPIO DE EXTENSÃO

Neste capítulo, fizemos uma explanação de diversas teorizações referentes ao processo de ensino dos números relativos. Defendemos a ideia, acompanhando Glaeser (1981), que o modelo comercial de ganho/perda, usualmente utilizado no ensino da adição de números inteiros relativos, cria obstáculos para o ensino da multiplicação desses números. Deste modo, Caraça (1963) nos aponta o “princípio de extensão” como uma proposta de ensino para os relativos, defendendo o ensino da adição desses números como uma extensão dos naturais e a regra de sinais para a multiplicação como a única que preserva a distributividade à esquerda e a direita. E, amparados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, analisamos como se apresentam os casos de congruência semântica no processo de ensino e aprendizagem dos inteiros relativos.

4.1 O princípio de extensão de Caraça

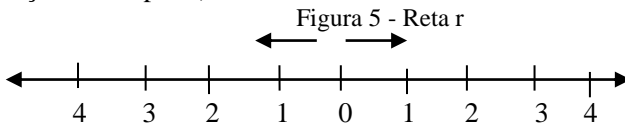
Se o processo de ensino e aprendizagem dos números relativos encontra dificuldades, o que fazer? Na busca por uma resposta a esse questionamento fomos desafiados a procurar subsídios teóricos e metodológicos que nos auxiliassem a encontrar um caminho que pudesse trazer melhorias ao processo de ensino e aprendizagem desses números, diferentemente daquela prática que se encontra instaurado em nossas escolas, conforme tratamos no capítulo anterior.

Glaeser (1981) nos provoca ao dizer que o “bom modelo” utilizado para ensinar as propriedades aditivas, baseado no “modelo comercial” associando a ideia de ganho a um número positivo e ao número negativo ao de uma perda, pode trazer riscos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números. Desta forma, o ensino dos números relativos precisa sofrer mudanças, não podendo mais se prender somente nos exemplos baseados em situações cotidianas, haja vista que, historicamente, o número negativo não surgiu num contexto aritmético, mas, sim, num contexto algébrico.

Contudo, o ensino atual dos números inteiros se introduz em um contexto aritmético, tanto nas situações que introduz como nas técnicas que utilizam para resolvê-las, contexto em que não são

necessários como estratégia de resolução. Como consequência, o estabelecimento de suas regras de cálculo fica totalmente a mercê do modelo concreto que se utiliza para introduzi-los, e este tratamento didático contribui, todavia, ainda mais para agravar o obstáculo epistemológico (CID, 2000, p. 13).

Dessa forma, Costa (1971) complementa ao apontar no sentido de que a origem histórica da noção de número negativo não está atrelada a classe de grandezas, mas que ela emergiu “[...] na necessidade de interpretar o resultado de uma subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo” (COSTA, 1971, p. 222). Seguindo o mesmo pensamento, Caraça nos apresenta a operação de subtração sob a perspectiva de deslocamentos sobre uma reta. E, que para orientar esses deslocamentos, há necessidade de se determinar um sinal que indique o sentido do movimento. “Esse sinal pode ser qualquer, mas há necessidade de tomar um sobre o qual nos entendamos para sempre” (CARAÇA, 1963, p. 96).



Fonte: (CARAÇA, 1963, p. 96)

Assim, de acordo com Caraça (1963), imaginamos um móvel que se desloca sobre a reta r , partindo do 0, considerado a origem, ele se desloca três medidas e em seguida muda o sentido do movimento e se desloca duas medidas, ao final dos movimentos se encontra a uma distância da origem. Caraça propõe que podemos obter o resultado do deslocamento deste móvel por meio de uma subtração do tipo $3 - 2 = 1$.

No entanto, Caraça afirma, que nem sempre isto é possível, pois se considerarmos um móvel que parte da origem e se desloca quatro medidas, pára e retrocede seis medidas, a sua posição final será duas medidas à esquerda da origem; “mas este resultado é impossível de obter por uma subtração” (p. 96), visto que o minuendo 4 é menor que o subtraendo 6. Nas palavras de Caraça, “se desejamos obter, sempre, resultados de problemas como os postos acima, temos que nos libertar da impossibilidade da subtração” (p. 97). Para isso se instaura a necessidade da criação de um novo campo numérico, os números relativos.

Para Caraça, a definição de um número relativo é dada da seguinte forma: “Seja, a e b dois números reais quaisquer: a diferença $a - b$ chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$ ” (CARAÇA, 1963, p. 97). Nesse sentido, a representação dos números relativos na reta numérica é organizada a partir da origem que passa a corresponder ao número zero.

Nessa reta, a partir do zero, tomam-se dois sentidos opostos, estabelecendo-se que a direita do zero corresponde ao sentido positivo e a esquerda do zero o sentido negativo. Agora, nesta reta dos relativos, podemos então representar os movimentos mencionados anteriormente sobre a reta, da seguinte forma: a diferença $3 - 2$ é o número relativo positivo 1; a diferença $4 - 6$ é o número relativo negativo -2 .

Segundo Caraça, “os elementos novos que aparecem no campo dos relativos são os números negativos; os números positivos são os números reais anteriormente conhecidos, incorporados agora no novo campo com uma qualificação nova” (CARAÇA, 1963, p. 97).

Com a ampliação dos conjuntos numéricos, muitas impossibilidades foram resolvidas ao longo do caminho, por exemplo:

- a) a divisão de 3 por 2 que antes não era possível nos Naturais, agora ela é perfeitamente solucionada no campo dos números racionais;
- b) A $\sqrt{5}$ que não era possível de ser calculada nos racionais, com a ampliação para os Reais, ela foi definitivamente elucidada;
- c) A subtração do tipo $4 - 7$ que não era solucionada nos Naturais, passou a ser compreendida e resolvida no campo dos Relativos.

Bem, parece-nos, então, que a ampliação dos conjuntos numéricos até aqui resolveram todas as impossibilidades. No entanto, com a introdução dos números relativos, vimos surgir um outro tipo de impossibilidade diferente de tudo o que havia se apresentado até o momento, estamos falando das raízes de índice par com radicando negativo.

Como consequência da regra de sinais da multiplicação, aplicadas a potenciação, podemos perceber que a potência com expoente par será positiva, e, a potência com expoente ímpar manterá o mesmo sinal da base. Como a potenciação é a operação inversa da radiciação, estamos frente, nas palavras de Caraça, a uma nova impossibilidade.

[...] essa dificuldade pode dar origem a um novo campo numérico que se obterá por negação dessa negação. Isto é evidentemente realizável mas, antes de o fazer, ponhamos a pergunta - vale a pena? Haverá porventura problemas cuja plena

resolução exija a ultrapassagem da negação mencionada? (CARAÇA, 1963, p. 104).

O transcorrer da própria história mostrou que sim. Não era apenas uma questão particular que poderia ser resolvido optando-se por adotar a regra $- \times - = -$ e, assim, poder calcular, por exemplo, $\sqrt{-25} = -5$, uma vez que nesta lógica $(-5) \times (-5) = -25$. Esta questão vai além, tendo em vista que os matemáticos se depararam, no transcorrer da história, com situações problemas que recaiam em equações cujo algebrismo de resolução fazia surgir uma raiz quadrada negativa, e isso impedia a continuação do cálculo formal. Mas a situação do problema os fazia entender que era possível achar um resultado.

Vejam o seguinte problema proposto por Caraça: “Seja v o volume dum cubo de aresta x , e v' o de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo, determinar x de modo tal que seja $v = v' + 1$ ” (1963, p. 160). Este problema leva à equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ e, conseqüentemente, a fórmula de

resolução $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}}$, cujo resultado depende do cálculo²³ da $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

O fato da impossibilidade de calcular uma raiz quadrada negativa no Conjunto dos números Reais e a situação que apontava para a existência dessa raiz contribuiu para que os matemáticos avançassem no cálculo. Essa dicotomia fez com que os matemáticos mantivessem a regra $- \times - = +$ e, com essa atitude, permitiu-se a criação de um novo número, o imaginário.

Que essa necessidade imperiosa tenha sido posta em relevo pelas equações de 3º grau, e não pelas do 2º grau (nas quais, porém, o fato da impossibilidade analítica já aparecera muitos séculos antes), mostra bem que o progresso da Matemática se não realiza sempre em obediência a um plano lógico de desenvolvimento interno, mas, muitas vezes, pelas pressões exteriores, que a

²³ Caraça (1963, p. 161) em nota de rodapé afirma que raiz desta equação está compreendida entre 1,8 e 1,9, pois para $x = 1,8$ é $v = 5,832 < v' + 1 = 6,4$ e para $x = 1,9$ é já $v = 6,859 > v' + 1 = 6,7$.

obrigam a procurar, às apalpadelas, o seu caminho (CARAÇA, 1963, p. 161).

Com a engenhosa ideia da criação do símbolo i (unidade imaginária) e da igualdade $i^2 = -1$, foi possível ultrapassar o obstáculo relacionado às raízes de índice par com radicando negativo. Assim, $\sqrt{-9} = \pm 3i$ e, como consequência, fez-se necessário criar um novo campo numérico, o campo dos Complexos. Nas palavras de Costa (1971, p. 222):

A necessidade de levantar essa exceção, de modo a tornar possíveis todas as operações sobre os números reais, teve como resultado a criação dos números complexos. Essa nova classe de números é, portanto, de origem algébrica.

Essa capacidade que o homem civilizado, de hoje, tem para fazer generalizações e abstrações, ao contrário do homem primitivo e até mesmo de alguns filósofos que percebiam os números como impregnados na natureza, Caraça chama de “princípio de extensão”, nas suas palavras:

[...] o homem tem tendência a generalizar e entender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão (CARAÇA, 1963, p. 10).

Esse trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios, do qual Caraça nos fala, foi o que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos e das suas operações. Assim, “As operações sobre números relativos definem-se por extensão imediata das operações com o mesmo nome estudadas no campo real” (CARAÇA, 1963, p. 100).

O homem pelas suas generalizações e abstrações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal

das operações. Foi justamente este obstáculo que Hankel (1867, *apud* GLAESER, 1981) conseguiu superar ao mostrar que a explicação para a regra de sinais $- \times - = +$ não poderia ser procurada na natureza, e que ela precisaria ser demonstrada formalmente²⁴.

No entanto, no transcorrer da história, podemos perceber que os números negativos assim como os números complexos foram rejeitados durante muito tempo, porém a hesitação lógica perdeu espaço frente às vantagens práticas. Neste caso, a $\sqrt{-1}$ que representava uma operação impossível era aplicada no cálculo como um instrumento intermediário a fim de se obter resultados reais como, por exemplo, $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. Desta forma, a multiplicação de dois números impossíveis resultava em um número real.

Segundo Costa, os números complexos perderam o seu aspecto paradoxal de resultados de operações impossíveis quando foram aplicados ao cálculo das grandezas vetoriais (1971, p. 224). Assim, podemos perceber que “as extensões sucessivas da ideia de número se justificam pela necessidade que temos de simbolizar certas grandezas concretas, com a sua divisibilidade, a sua orientabilidade, a sua continuidade” (COSTA, 1971, p. 224).

No processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos esse processo de generalização também precisa estar presente, uma vez que a descoberta da existência do número negativo está ligada a existência do positivo. Desta forma,

A compreensão do que seja número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações, na medida em que a criança descobre que se negativo é menor do que positivo, há um ponto de onde positivo e negativo se originam. Isso leva, por sua vez, à necessidade de nova ampliação, porque, nos naturais, a assimilação do zero foi feita com base no significado da ausência de quantidade. Agora, é preciso ampliar este significado, ou seja, diferenciá-lo da concepção de zero origem (TEIXEIRA, 1993, p. 63).

²⁴ Neste trabalho, entendemos como ensino formal aquele que atende aos princípios da consistência interna da matemática, atendendo as regras para a formação de fórmulas e permitindo generalizações.

Da mesma maneira que a concepção do zero precisa ser ampliada, também, a concepção das operações de adição, subtração e multiplicação precisam sofrer novas significações no conjunto dos números inteiros relativos. Uma vez que até o 6^o ano as crianças são levadas a associar a ideia de adição com a ideia de juntar, a ideia de subtração atrelada a tirar, e, por sua vez, a multiplicação é vista como uma adição de parcelas iguais. No entanto, estas concepções precisam ganhar um novo significado no conjunto dos relativos. Além das operações, o sinal de + (mais) que outrora representava uma adição, agora nos relativos pode representar um estado. Da mesma forma, o sinal de - (menos) que no conjunto dos Naturais representava uma operação de subtração, agora também passa a ser considerado como um sinal predicativo. Neste sentido, vale salientar que:

Os números positivos e negativos representam estados e operações, por exemplo: - 2 representa ao mesmo tempo 2 unidades abaixo de zero, portanto, que se localizam na região negativa, como também significa “2 a menos que”, indicando a operação de deslocamento, que produzirá transformações em um certo sentido (no caso de número negativo significa deslocar a esquerda e, de positivo, deslocar a direita) (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Esta confusão entre os sinais operatórios e predicativos, de acordo com Glaeser (1981), foi percebida primeiramente por Cauchy em meados do século XIX que os diferenciou como sinais operatórios aqueles que designam uma ação (aumentar, diminuir) e os predicativos aqueles que qualificam um estado (positivo ou negativo).

No nível de aprendizagem, essas ampliações e ressignificações das operações dos naturais para os relativos requerem uma atenção especial. Podemos pensar no sentido da congruência semântica apresentada por Raymond Duval através da sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

4.2 Os Registros de Representação Semiótica

Nesta teoria, o estudo da matemática se estabelece com base em representações, pois os objetos matemáticos não sendo acessíveis pela percepção o fazem pela representação. Desta forma, surge a necessidade das representações semióticas para poder dar representantes aos objetos

matemáticos e, por outro lado, a possibilidade de operar com esses objetos matemáticos dependem de um sistema de representação semiótico.

Desse modo, percebe-se que surge um novo regime de saber pautado na ordem da representação, onde a apreensão do objeto matemático passa por intermédio de suas representações. Essas representações foram o ponto principal para o desenvolvimento do conhecimento matemático, pois elas são imprescindíveis na formação e na construção de conhecimentos.

[...] o conhecimento é veiculado e limitado pelas representações. Limitado porque, para se ter conhecimento, é preciso que o objeto do conhecimento esteja em presença do sujeito do conhecimento – é preciso que o objeto do conhecimento seja dado a conhecer, o que ocorre por meio das representações. Estas possibilitam o acesso aos objetos do conhecimento. (...) As representações, enquanto parte concreta que relaciona o objeto do conhecimento e o sujeito que aprende, se estabelece como elemento importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007, p. 185).

Porém, é imprescindível salientar “[...] o entendimento de que nenhum dos registros de representação ‘é’ o objeto matemático, mas eles apenas o ‘representam’, estão ‘no lugar dele’ para, assim, permitir o acesso a esses objetos matemáticos” (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 45). Nesse sentido, é que Duval (1993) chama a atenção para o paradoxo cognitivo do pensamento matemático:

[...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, de outro, é somente pelo meio de representações semióticas que uma atividade sobre os objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles só podem tratar com representações

semióticas? (DUVAL, 1993, p. 38, tradução nossa)²⁵.

Muitas vezes no ensino não damos a devida importância ao paradoxo cognitivo do pensamento matemático devido ao fato de estarmos mais atentos às representações mentais do que às representações semióticas. Segundo Duval, as representações mentais dizem respeito “[...] às conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto [...]” (DUVAL, 1993, p. 38, tradução nossa)²⁶, ao passo que, as representações semióticas “[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem seus embaraços próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 1993, p. 39, tradução nossa)²⁷.

Ainda, segundo Duval, essas representações semióticas não são somente para fins de comunicação, mas também são essências para as atividades cognitivas do pensamento. Neste sentido, os registros de representação semiótica são fundamentais tanto para a criação de objetos matemáticos como para a sua apreensão.

Numa aula de matemática, por exemplo, o -2 , objeto externo, é utilizado para estabelecer a relação com as noções e ideias do conceito desse número. Desta forma, o emprego do signo é como um instrumento internalizado, operado em nível mental. Assim, dois deslocamentos à esquerda na reta dos números inteiros, a temperatura de dois graus abaixo de zero, dois metros de profundidade são instrumentos externos. As respectivas representações são signos internos.

Esse processo de comunicação e interpretação dos signos na mente do sujeito é denominado semiose. Em outras palavras, a semiose é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica. Atrelado a esse processo, temos também a noesis, que é a apreensão conceitual de um objeto. Logo, percebe-se que, de acordo com Duval, “[...] a *noesis* é

²⁵ [...] d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques?

²⁶ [...] des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet [...].

²⁷ [...] sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signification et de fonctionnement.

inseparável da *semiose*” (DUVAL, 1993, p. 40, grifos do autor, tradução nossa)²⁸.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece como uma atividade fundamental para a apreensão conceitual dos objetos, que, por sua vez, não deve ser confundido com suas representações. O objeto deve ser reconhecido em cada uma das suas representações possíveis, pois somente nessas condições é que a representação dá acesso ao objeto representado (DUVAL, 1993).

Dentre a diversidade de representações semióticas, Duval agrupa-as em quatro grandes grupos de registros, sendo eles: a linguagem natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas (2005). Segundo Duval (1993), para que um sistema semiótico possa ser considerado um registro de representação, ele deve promover três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: A formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

a) *A formação de uma representação identificável* como uma representação de um registro dado tem por finalidade assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação, como também a possibilidade de sua utilização para tratamentos. De um modo geral, são regras de conformidade que já se encontram estabelecidas, dessa forma não é competência do sujeito criá-las, mas apenas usá-las para reconhecer as representações. Neste sentido, não cabe aos nossos alunos criar o conjunto dos números relativos, mas apropriar-se dele e de suas regras de conformidade para a construção das operações fundamentais.

b) *O tratamento* de uma representação é a transformação interna a um registro, ou seja, é a transformação dessa representação dentro do registro onde ela foi formada, sendo que, em cada registro, há regras de tratamentos próprios que variam em quantidade e natureza. Por exemplo, quando trabalhamos com a operação de adição de números relativos, o tratamento exige a compreensão das regras algorítmicas próprias desses números.

Precisamos ressaltar que os tratamentos estão ligados a forma e não ao conteúdo do objeto matemático, neste sentido tomemos o exemplo fornecido por Duval (2012, p. 99):

$4/2$, $(1+1)$ e $\sqrt{4}$ são formas escritas que designam um mesmo número, quer dizer, são expressões

²⁸ [...] la *noésis* est inséparable de la *sémiosis*.

que fazem referência a um mesmo objeto. Mas não possuem o mesmo significado, uma vez que não são reveladores do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade. Uma simples mudança na escrita é suficiente para exibir propriedades diferentes do objeto, mesmo se for mantida a mesma referência.

Desse modo, os tratamentos efetuados com número fracionário $\frac{4}{2}$, são diferentes dos tratamentos efetuados com a expressão $(1 + 1)$, embora as duas expressões sejam representações do mesmo objeto matemático.

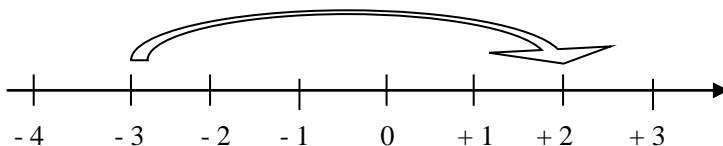
O fato de que duas representações distintas para um mesmo objeto têm cada uma delas sentidos diferentes, logo, tratamentos diferenciados, implicam em um custo cognitivo também diferente. Somar dois números fracionários, por exemplo, não tem o mesmo custo cognitivo que somar os mesmos dois números em sua forma decimal. Como foi visto, tudo depende do sentido que se dá para cada uma das formas da apresentação do objeto matemático (FLORES, 2006, p. 97).

Na maioria das vezes, no ensino não nos preocupamos com os diferentes tipos de registros para um mesmo objeto matemático e dificilmente nos damos conta de que as diferentes formas de representar o objeto matemático possam apresentar dificuldades para nossos alunos. Assim, nos processos pedagógicos, geralmente, somente esse tipo de transformação interna – tratamento - que chama a atenção, pois ele corresponde aos procedimentos de justificação e prova.

c) A *conversão* é a transformação de uma representação dada em um registro, em uma representação de um outro registro, mantendo os mesmos objetos revelados, conservando a sua totalidade, ou apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. Não podemos, de forma alguma, confundir a conversão com o tratamento. A conversão se estabelece entre registros diferentes, enquanto o tratamento acontece dentro do mesmo registro. Por exemplo, passar a representação da

operação numérica $(-3) + (+5)$ para uma representação geométrica na reta dos inteiros indica uma conversão. Ilustrando:

Figura 6 - Representação geométrica da adição $(-3) + (+5)$



Fonte: Autora (2013)

No entanto, o simples cálculo dessa operação $(-3) + (+5)$ sem uma mudança de registros consiste num tratamento. A conversão não tem um papel de prova ou justificação nos processos matemáticos, talvez, por esse motivo, ela não desperte tanto a atenção nesses processos.

[...] como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2005, p. 16).

Assim, de acordo com este autor, podemos perceber que a essência da atividade matemática repousa na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo. Baseado nesse raciocínio, Duval levanta a hipótese de que a compreensão em matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representações semióticas. Nas palavras de Duval, “a compreensão da matemática implica a capacidade de mudar de registro” (2005, p. 21). Neste sentido, percebemos então, em consonância com esse autor, que é no trânsito entre esses diversos registros de representação que se encontra a “chave” para a aprendizagem em matemática.

Duval (1993) chama a atenção para o cuidado que devemos ter ao tratar da conversão, para que esta não seja confundida com a codificação e a interpretação. Pois, segundo ele, a interpretação requer uma mudança de quadro teórico, ou uma mudança de contexto, o que não implica numa mudança de registro. E a codificação é a transcrição

efetuada em meio a uma série de substituições, aplicando regras de correspondência ou utilizando substituições. Porém, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação. “Não existem, e não podem existir regras de conversão como existem regras de conformidade e regras de tratamento” (DUVAL, 1993, p. 43, tradução nossa)²⁹.

A atividade de conversão pode ser analisada ao compararmos a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, e esse processo de substituição de uma expressão de uma rede semântica a uma expressão de outra rede semântica aparece, muitas vezes, em situações de aprendizagem, como um salto dificilmente transponível para os estudantes. É relativamente a essa substitutividade que duas relações devem ser consideradas: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica.

Congruência semântica e a atividade de conversão

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. Sobre este assunto, Duval destaca:

Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão (DUVAL, 2012, p.100).

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. Para isso, ela deve atender a três condições, de acordo com Duval (2004, p. 53):

- Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.

²⁹ Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement.

- Univocidade “semântica” terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
- A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

Porém, quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro não ocorre de imediato (DUVAL, 2004, p. 17).

Em outras palavras, poderíamos dizer, “a grosso modo”, que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorre tão facilmente, diz-se que não há congruência semântica. Dessa forma, o problema da congruência ou da não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

Paulo tem 12 figurinhas e perdeu 5 em uma partida.

Neste exemplo, podemos destacar a identidade entre a frase e a expressão $12 - 5$, onde o verbo “perdeu” pode ser facilmente associado à operação de subtração. Percebemos que as ordens da apresentação dos dados numéricos na frase são conservados na mesma ordem da operação. Desta forma, podemos dizer que existe a congruência semântica entre a frase e a expressão. Neste caso também pode ser notada a equivalência referencial entre a frase e a expressão aritmética.

Porém, na seguinte situação: “No início de uma tarde de inverno de uma cidade da Serra Catarinense, os termômetros registram três graus Celsius e, no início da noite, os termômetros registraram dois graus Celsius negativos. Qual a variação da temperatura nesse período?” Esta situação possui congruência semântica com a expressão $(+3) + (-2)$. Entretanto, a situação e a expressão não são referencialmente equivalentes. A situação descrita acima não possui congruência semântica com a expressão $(-2) - (+3)$, contudo a situação e a expressão

aritmética são referencialmente equivalentes e conduzem a resolução correta do problema.

Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes (DUVAL, 2012, p.100).

Ainda, nesse sentido, Moretti aponta para os reflexos da congruência semântica no ensino:

Problemas discursivos que são semanticamente congruentes com a expressão matemática, mas que não são referencialmente equivalentes, levam a uma taxa muito baixa de sucesso; da mesma forma acontece com problemas que são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. A resolução de problemas que solicitam a passagem de um registro discursivo para um registro aritmético ou algébrico exige a equivalência referencial (MORETTI, 2012, p. 705).

Nessa direção, o professor deve ficar atento ao fato de que nem sempre a congruência semântica conduz a resultados bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos, e que, produzindo diferentes formulações para um mesmo problema, poderá, desta forma, contribuir para uma verdadeira compreensão matemática.

Dois fenômenos podem ser observados, no que se refere à natureza cognitiva, nas operações de conversão. Primeiramente, as variações de congruência semânticas, já expostas anteriormente, e a segunda diz respeito à heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada” (DUVAL, 2005, p. 20).

Segundo Duval (2005), no ensino da matemática, na maioria das vezes, um sentido de conversão é privilegiado, reforçando a falsa ideia de que o treinamento realizado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Esta é uma visão muito ingênua que se propaga nas situações de ensino da matemática. Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem perceber o mesmo

objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes. Por exemplo, a representação do cálculo de uma adição de números relativos e a sua representação através de deslocamentos na reta numérica, dificilmente um aluno, em nível de ensino fundamental e até mesmo médio, consegue estabelecer as relações entre o cálculo e a sua representação geométrica na reta numérica, e vice-versa.

Essa coordenação está longe de ser natural e observa-se, então, o que Duval chama de um “enclausuramento de registros de representação” (DUVAL, 1993, p. 52). O aluno “enxerga” o objeto matemático apenas por um sistema de representação. Essa ausência de coordenação não impede toda a compreensão, mas esta compreensão limitada, que se dá através do mono-registro, conduz um trabalho às cegas onde o aluno não tem um controle do sentido do que é feito. Duval (2012) afirma que mudanças na escrita permitem mostrar propriedades diferentes de um mesmo objeto matemático, porém conservando a mesma referência.

Os diferentes registros de representação se completam, dando-nos uma melhor compreensão do objeto matemático. A aprendizagem de um objeto matemático torna-se significativa quando o aluno, além de realizar os tratamentos em diferentes registros de representação, consegue, também, naturalmente converter um registro de representação em outro. Do ponto de vista cognitivo, de acordo com Duval (2005), a atividade de conversão é essencial na condução à compreensão.

Conseguir registrar as compreensões matemáticas e compreender o significado da escrita dentro da matemática são atividades essenciais no fazer matemático, possibilitando uma aprendizagem mais significativa. Desse modo, para construir o saber, o aprendiz aplica os seus

[...] conhecimentos e modos de pensar ao objeto de estudo; age, observa, seleciona os aspectos que mais chamam a sua atenção, estabelece relações entre vários aspectos deste objeto e atribui significados a ele, chegando a uma interpretação própria (MICOTTI, 1999, p. 158).

Dessa forma, Duval (2005) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Uma vez que o principal papel da representação semiótica é que ela pode ser convertida em representações

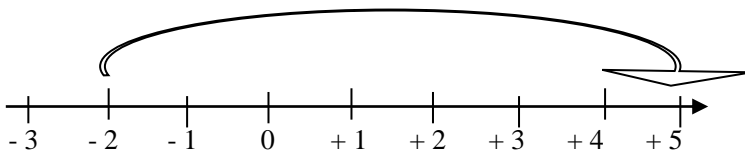
equivalentes em um outro sistema semiótico, que podem levar a significações diferentes pelo sujeito, de um mesmo objeto matemático.

Contudo, ainda, em conformidade com este autor, esse processo não se estabelece tão facilmente, tendo em vista que os alunos apresentam muita dificuldade no estudo da matemática. Em determinadas situações, o aluno até consegue representar um objeto matemático de maneiras diferentes, mas é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto.

Ao fazer uma análise do desenvolvimento dos conhecimentos e a dos obstáculos encontrados nas representações do raciocínio, Duval (2004) ressalta que os obstáculos encontrados pelos alunos na compreensão de textos e na aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos podem ser compreendidos através dos três fenômenos que estão estreitamente ligados.

O primeiro diz respeito *aos vários registros de representação semiótica*. No ensino da matemática, dispomos de uma variedade de registros de representação semiótica: a linguagem natural, a linguagem simbólica, as figuras geométricas, os gráficos. Esses registros não podem ser considerados como um mesmo tipo de registro, eles são sistemas de representações muito diferentes que atuam cada um, de maneira específica sobre a aprendizagem. Mais especificamente, no caso dos números relativos, dispomos de uma variedade de registros para representar um mesmo objeto. Por exemplo, a frase “Pela manhã os termômetros registraram -2°C , com o passar do dia, as temperaturas subiram 7°C ”, pode ser representada pela expressão $(-2) + (+7)$ e, também, por meio de um deslocamento na reta numérica:

Figura 7 - Representação geométrica da adição $(-2) + (+7)$



Fonte: Autora (2013)

Neste exemplo, nós apresentamos o mesmo objeto matemático, utilizando três registros de representação semiótica diferentes. A linguagem natural, representada pela frase, a linguagem simbólica utilizada através do cálculo e a representação geométrica apresentada através da reta numérica.

O segundo fenômeno, de acordo com Duval (2004), refere-se à *diferenciação entre o representante e o representado*, em outras palavras, a diferença existente entre a forma e o conteúdo de uma representação semiótica. A forma escolhida para representar o objeto matemático influencia no conteúdo da sua representação. Duas expressões podem fazer referência a um mesmo objeto, porém elas não possuem a mesma significação, haja vista que elas não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista. As diferentes formas de representar um objeto matemático permitem exibir propriedades diferentes desse objeto mantendo a mesma referência. No exemplo que citamos acima, podemos perceber que apesar de os três registros utilizados representarem o mesmo objeto, eles possuem significações diferentes.

Nesse sentido, Duval (1993) ressalta a complementaridade dos registros dizendo que “*toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representados*” (DUVAL, 1993, p. 49, grifos do autor, tradução nossa)³⁰. Desse modo, podemos observar que a variedade de registros, utilizados para o ensino de um objeto matemático, poderá contribuir para que o sujeito tenha uma ideia global a respeito desse objeto matemático, permitindo que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

O terceiro fenômeno diz respeito à *coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica*. Para efetuar a conversão de um sistema semiótico num outro sistema semiótico, não bastam regras de correspondência, mesmo porque se existisse uma regra não seria conversão. O maior obstáculo que se instala na realização espontânea da coordenação dos diferentes registros de representação semiótica está relacionado ao fenômeno da não-congruência semântica. No exemplo que citamos anteriormente, dificilmente um aluno estabelece uma relação direta entre o cálculo e a sua representação na reta numérica, uma vez que não há uma congruência semântica.

Para analisarmos as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, precisamos estudar a conversão das representações, os procedimentos cognitivos que levam o aluno a apreensão do objeto matemático. A articulação de diferentes registros, de acordo com Duval (2005), é uma condição necessária para a

³⁰ [...] *toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente* et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés.

compreensão em matemática, no entanto, várias abordagens didáticas não levam isto em conta, porque o que chama a atenção nos processos de ensino são os tratamentos e não a conversão.

O papel da diversidade dos registros de representação para o funcionamento do pensamento humano

Segundo Duval (1993), a necessidade de uma diversidade de registros para o funcionamento do pensamento humano se funda sobre três aspectos: a economia de tratamento, a complementaridade dos registros e a conceitualização implica uma coordenação do registro de representação.

Sobre a economia de tratamento, Duval sublinha que “A existência de muitos registros permite mudar de registro, e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais poderosa” (1993, p. 49)³¹. Desse modo, efetuar o cálculo numérico da expressão $(-2) + (+15) + (-27) + (+12)$ é mais econômico do que resolvê-lo através de deslocamentos sobre a reta numérica. São registros diferentes que apresentam um custo de tratamento completamente diferente.

Com relação à complementaridade de registros, Duval destaca que:

[...] a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que o representamos. Esta seleção se faz em função de possibilidades e de embaraços semióticos do registro escolhido (DUVAL, 1993, p. 49, tradução nossa)³².

Dessa forma, uma situação representada na linguagem natural não oferece as mesmas possibilidades de representações que um cálculo

³¹ L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante.

³² [...] la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilités et des contraintes sémiotiques du registre choisi.

numérico ou que uma representação geométrica, como nos exemplos citados anteriormente. Isto porque, como nos aponta Duval (1993), toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e que as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático exprimem aspectos diferentes do mesmo conteúdo.

A complementaridade de registro é fundamental, pois nenhum dos registros é capaz de representar o objeto matemático em seu todo. Esse fato acaba exigindo que o professor promova um trabalho utilizando-se de várias representações do mesmo objeto matemático, visando tanto o desenvolvimento das capacidades globais do indivíduo, como a não confusão do objeto matemático com a sua representação.

Para Duval, a conceitualização implica uma coordenação do registro de representação. Assim,

A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (DUVAL, 1993, p. 51, tradução nossa)³³.

Esta coordenação, de acordo com este autor, entre pelo menos dois registros de representação, está longe de ser natural, isto porque os alunos não conseguem perceber o mesmo objeto através de representações diferentes. A este fato Duval chama de um “enclausuramento de registros de representação” (DUVAL, 1993, p. 52).

No ensino da multiplicação de números relativos, geralmente nos livros didáticos, a operação é dada e se espera que o aluno apresente o resultado, dificilmente o caminho inverso é proposto. Desse modo, como o aluno poderá perceber que a frase “O produto de dois números inteiros é - 6” e a expressão $(-2) \times (+3)$ representam o mesmo objeto matemático³⁴? Duval (1993) salienta que a ausência de uma coordenação não impede toda a compreensão, contudo esta

³³ La compréhension (intégrative) d’un contenu conceptuel repose sur la coordination d’au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l’activité cognitive de conversion.

³⁴ Não só o produto $(-2) \times (+3)$ representa -6, mas também $(+2) \times (-3)$, $(-6) \times (+1)$ e $(+6) \times (-1)$.

compreensão limitada a um só registro faz com que os conhecimentos adquiridos tornem-se pouco ou nada mobilizados.

Dentre as razões que podem explicar o fenômeno do enclausuramento de registros de representação, Duval (1993) associa os fenômenos da congruência semântica. Haja vista que, quando há congruência semântica, a conversão é realizada quase que intuitivamente. No entanto, quando não há congruência semântica, a conversão é muito custosa e torna-se quase que como uma barreira intransponível. No ensino dos inteiros relativos, o fenômeno da não congruência semântica pode ser percebido em muitas situações, como por exemplo, já citado anteriormente, o cálculo de uma expressão numérica e a sua representação na reta numérica. Mas, agora vamos tratar de um outro caso de não congruência semântica nos relativos, o que diz respeito as operações de adição, subtração e multiplicação desses números.

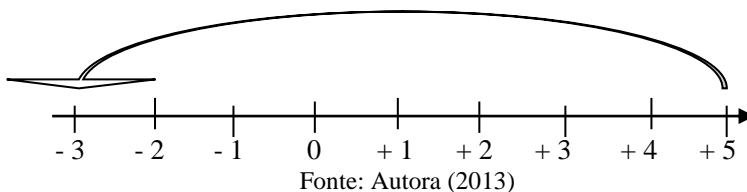
A congruência semântica e as operações de adição, subtração e multiplicação com os números inteiros relativos

Na atividade matemática, o ato de substituir uma fórmula ou um cálculo por uma outra expressão referencialmente equivalente é essencial. Você já pensou na possibilidade de resolver uma situação problema sem substituí-la por outra forma de registro permanecendo somente na linguagem natural? Neste sentido, a substitutividade de expressões é uma propriedade que está ligada a estrutura de todo registro semiótico, ela é uma conduta muito importante e frequente nos procedimentos matemáticos.

Os procedimentos utilizados na atividade matemática implicam numa substitutividade tanto inter-registro quanto intra-registro, ambos pautados numa mesma referência.

A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência e não-congruência semântica são importantes (DUVAL, 2012, p.113).

Para mostrar, por exemplo, que o deslocamento da reta:

Figura 8 - Representação geométrica da adição $(+5) + (-8)$ 

pode ser representado pela operação $(+5) + (-8)$ exigiu uma substituição inter-registro, que não apresenta uma congruência semântica com a sua representação geométrica. A congruência semântica conduziria a expressão $(+5) + (-3)$ que, por sua vez, se diferencia da equivalência referencial.

Nas operações com relativos, é que os fenômenos de congruência semântica se destacam. Até a apresentação dos números inteiros os alunos concebiam, nos naturais, que a adição estava rigorosamente atrelada a ideia de juntar. A subtração corresponderia à operação de tirar, e a multiplicação como uma adição de parcelas iguais.

Contudo, mesmo que estes conceitos sejam ampliados nos relativos, os fenômenos da não congruência semântica insistem em aparecer. Seja a seguinte situação, por exemplo, “Um submarino encontra-se a -250 metros de profundidade. Depois de passados 30 minutos encontra-se a -180 metros. Esse submarino subiu ou desceu? Quantos metros?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão $(-180) - (-250)$ o que resulta numa subida de 70 metros realizada pelo submarino. No entanto, a expressão possui congruência semântica com a situação seria $(-250) - (-180)$ o que levaria ao resultado -70 , que significa dizer, o submarino desceu 70 metros.

Vejamus uma outra situação: “A temperatura registrada durante a madrugada, em uma cidade, foi de -6°C e no decorrer do dia a temperatura aumentou 10°C . Qual foi a variação da temperatura máxima registrada neste dia?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão $(-6) + (+10)$ o que indica que a temperatura máxima foi de $+4^{\circ}$.

No entanto, apesar da operação ser de adição foi preciso diminuir os valores absolutos dos números para chegar ao resultado correto. Do ponto de vista da congruência semântica, não seria de se estranhar que um aluno chegasse ao resultado $+16$, uma vez que a operação indicada é uma adição.

Contudo, de acordo com Caraça, nos relativos tem-se que:

$a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$; $a - (-b) = a - (0 - b) = a + b - 0 = a + b$, isto é, somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo. No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama adição algébrica (CARAÇA, 1963, p. 101).

Desse modo, no caso dos relativos, a operação de adição pode representar situações em que há acréscimo ou decréscimo, ou até mesmo somas que dão resultado zero. Assim, “a adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Da mesma forma que a adição, a subtração também precisa ser ampliada. Para Teixeira,

[...] a construção operatória da subtração supõe a assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que em uma dada reunião ou associação de elemento ($a + b = c$), é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença ($c - b$), ou seja, pela operação inversa (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

No entanto, neste trabalho, concordamos com Moretti (2012) e defendemos a ideia de que a operação de subtração deve ser apresentada aos alunos depois da operação de multiplicação, uma vez que neste ponto os alunos já conhecem as regras de sinais e poderão simplificar expressão do tipo " $a - (-b)$ " e " $a - (+b)$ ". Desta forma, o resultado da expressão simplificada, aplicando a regra de sinais, conduziria ao que Caraça (1963) chama de adição algébrica, podendo ser tratada como deslocamentos sobre a reta dos inteiros, da mesma forma como acontece com a adição dos relativos.

Defendemos esse ponto de vista, pois acreditamos que, ao apresentar a operação da subtração como a operação inversa, estaríamos conduzindo os alunos a efetuarem “manobras meio fantasiosas” para a realização dessa operação. E, assim conduzindo o aluno ao questionamento: Por que precisamos recorrer à operação inversa para efetuar a subtração, uma vez que a adição não exige essa transformação?

A resposta a essa pergunta encontra-se justamente na regra de sinais. Para que a subtração nos inteiros seja efetuada, precisamos aplicar a regra de sinais a fim de obtermos uma adição algébrica. “Dada a natureza do sistema dos inteiros, a subtração nada mais é que a composição entre operadores, ou seja, uma adição” (TEIXEIRA, 1993, p. 65).

No caso da multiplicação dos relativos, a barreira encontrada para o seu ensino encontra-se na ideia que a multiplicação, nos naturais, é concebida como uma soma de parcelas iguais. Nos inteiros, a multiplicação de um número positivo por outro positivo, já dominada nos naturais, e a multiplicação de um número positivo por um número negativo pode ser perfeitamente entendida como uma repetição de parcelas. Por exemplo, $(+3) \times (-5)$ pode ser concebido como três deslocamentos de (-5) que resulta em -15 . Da mesma forma a multiplicação de dois números positivos, por exemplo, $(+4) \times (+2)$ pode ser entendido como quatro deslocamentos de $(+2)$ que resulta em $+8$.

Todavia, esses exemplos se deparam com um obstáculo quando se tenta explicar a multiplicação de dois números negativos. Nesse sentido, Moretti (2012) nos apresenta o ensino da regra de sinais para o campo multiplicativo, obedecendo ao Teorema de Hankel atendendo a ideia do “princípio de extensão” proposto por Caraça, já citado anteriormente. De acordo com o princípio de extensão, devemos estender a propriedade distributiva dos positivos para o caso dos negativos.

Moretti (2012) nos apresenta um exemplo com o objetivo de explorar as distributividades à direita e à esquerda. Ele propõe um quadro com duas regras de sinais na qual serão aplicadas a expressão $(-3) \times (-5 + 1)$, vejamos:

Tabela 6 - A regra usual e outra regra de sinais

Regra usual	Regra 2
$+\times+=+$	$+\times+=+$
$+\times-=-$	$+\times-=-$
$-\times+=-$	$-\times+=-$
$-\times-=-+$	$-\times-=-$

Fonte: Moretti (2012)

“Observemos que na Regra 2 colocamos que $- \times - = -$ o que é diferente do que está definido na regra usual. Apliquemos estas duas regras à expressão $(1-3) \times (-5+1)$ ”:

Tabela 7 - Comparação entre duas regras de sinais para a multiplicação

$(1-3) \times (-5+1)$	Cálculo com a Regra usual	Cálculo com a Regra 2
Eliminando ambos os parênteses	-2×-4 $= +8$	-2×-4 $= -8$
Eliminando o parêntese à esquerda e usando a distributividade	$-2 \times (-5+1)$ $= -2 \times -5 -2 \times (+1)$ $= 10 - 2$ $= +8$	$-2 \times (-5+1)$ $= -2 \times -5 -2 \times (+1)$ $= -10 -2$ $= -12$
Eliminando o parêntese à direita e usando a distributividade	$(1-3) \times -4$ $= 1 \times -4 -3 \times (-4)$ $= -4 + 12$ $= +8$	$(1-3) \times -4$ $= 1 \times -4 -3 \times (-4)$ $= -4 - 12$ $= -16$

Fonte: Moretti (2012, p. 710)

Este exemplo mostra que os resultados obtidos pela regra usual se mantêm, mesmo quando resolvidos de modos diferentes. O mesmo não acontece com a regra 2. Este tipo de situação poderá conduzir o aluno a fazer generalizações e abstrações. E,

[...] com base em abstrações de níveis mais complexos, é possível compreender que se Z é uma ampliação de N , o produto de Z tem que ser uma extensão de N , portanto distributivo com relação à soma, comutativo e associativo (TEIXEIRA, 1993, p. 65).

Esse processo conduz as justificativas algébricas formais, tal como demonstrou Hankel.

A congruência semântica pode ser percebida na multiplicação dos relativos principalmente quando estes números estão associados ao modelo comercial. Como uma dívida multiplicada por uma outra dívida pode se transformar num ganho? De acordo com Duval, o fenômeno da congruência semântica exerce um papel importante no interior de um mesmo registro, mais particularmente, no discurso natural.

Se a formulação da questão é congruente à formulação das informações dadas no enunciado do problema e se essa formulação é também congruente a uma formulação possível da resposta, esta resposta será mais rápida do que no caso da não-congruência (DUVAL, 2012, p. 104).

Segundo Duval (2012), a não-congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático, uma vez que, a

[...] atividade matemática pode ser bem sucedida se a sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulações ou de representações congruentes e, a mesma tarefa matemática dada como uma variante que implique uma manipulação de dados não congruentes, pode conduzir ao insucesso (DUVAL, 2012, p. 110).

Desse modo, a passagem da frase “o produto de dois números inteiros é + 10” para a expressão “ $(-2) \times (-5)$ ” exige uma manipulação de dados não-congruentes e uma substitutividade inter-registro, passando da linguagem natural para a linguagem numérica³⁵. Esta passagem exige um custo cognitivo elevado, o que pode contribuir para um insucesso. De acordo com Duval, os problemas ligados à substituição inter-registro constituem um interesse particular para o ensino geral da matemática, pois

[...] aprender a articular vários registros de representação da informação e aprender a diferenciar diversos tipos de funcionamentos cognitivos poderão ser uma finalidade do ensino de matemática que se mostra interessante e útil aos não matemáticos (DUVAL, 2012, p. 116).

Os estudos realizados por Damm (2005) a respeito dos problemas aditivos, apontam que a aprendizagem desses problemas deve começar pela compreensão dos enunciados. Uma vez que esses problemas podem apresentar ou não congruência semântica com os

³⁵ Esta frase pode ser substituída por outros produtos de dois inteiros, mas em todos os casos exigirá uma mudança inter-registro.

enunciados, o que de acordo com Duval (2005), constitui uma barreira difícil de ser ultrapassada pela maioria dos alunos. Neste sentido, Damm propõe um “modelo” de representação que comporta dois eixos distintos:

- Um primeiro eixo sobre o qual são marcadas as diferentes relações correspondentes às diferentes etapas (antes, depois, primeiro, segundo etc.) da situação descrita no enunciado;
- Um segundo eixo onde os dados operatórios são situados em função da situação (temporal ou outra) que lhe é designada no texto (DAMM, 2005, p.43).

Segundo Damm, este tipo de organização permite que a passagem do texto ao tratamento aditivo ocorra naturalmente. O material utilizado por Damm, nas suas experiências realizadas em situações de ensino e aprendizagem, permite deslocamentos sobre uma semirreta graduada (DAMM, 2005, p. 44). Este fato conduz a situações representáveis, como por exemplo: o personagem que se desloca no elevador de seu prédio; o personagem que passeia de barco num lago; o personagem que escala uma montanha; o personagem que passeia na rua onde mora. Nas palavras da autora:

Nossa experiência consistiu então em propor um instrumento representativo aos alunos e ensiná-lo a utilizar essas representações. Os resultados obtidos nos problemas reconhecidos como os mais difíceis em diferentes pesquisas (os problemas não-congruentes) mostraram um aumento significativo de acertos. Esse aumento de acertos apresenta duas características: a) é muito importante para todos esses problemas, uma vez que passamos de taxas de 10% ou 20% antes do trabalho com as representações, para taxas de 60% a 80% após a sequência didática; b) o mais importante é a estabilidade dos resultados, verificada um ano após, em classes que haviam trabalhado com as representações bidimensionais (DAMM, 2005, p. 46).

À respeito da representação auxiliar, utilizada por Damm, Duval (1999) salienta que ela “[...] serve de material para operações cuja

realização são necessárias para compreender o que a representação principal representa” (DUVAL, 1999, p. 61). Assim, o ensino da adição de números relativos pode ser conduzido através de deslocamentos sobre um eixo graduado, utilizando-se uma representação auxiliar: a reta numérica. Estaremos desse modo, atendendo a ideia do “princípio de extensão” proposto por Caraça (1963), já citado anteriormente. E, também favorecendo para que a passagem de um registro de representação a um outro registro possa ocorrer de maneira mais natural possível, tanto nos problemas onde há congruência semântica, quanto nos problemas em que não há congruência semântica.

4.3 Os níveis de compreensão na concepção dos relativos

Coquin-Viennot (1985), a partir da aplicação de 14 questões a um grupo de 366 alunos entre 11 a 15 anos (equivalente às quatro últimas séries do ensino fundamental no Brasil), estabelece uma hierarquia nas concepções que os alunos apresentam a propósito dos relativos. As primeiras oito questões, desse teste, são de nível introdutório, pondo em jogo aspectos variados dos relativos tais como: soma algébrica, relação de ordem, etc. que de modo geral só possuem solução em \mathbb{Z} . Os exercícios 9 a 12 são propostos pelos manuais didáticos no momento da apresentação da noção dos números relativos, eles apresentam uma solução nos naturais, contudo as soluções nos inteiros são mais econômicas. O exercício 13 exige procedimentos algébricos ou aritméticos na sua resolução, e o exercício 14 utiliza os relativos numa situação geométrica.

Com base nos resultados apresentados, Coquin-Viennot (1985, p. 175-179) tentou limitar grupos homogêneos de procedimentos o que possibilitou a formação das concepções dos relativos. A saber:

Nível I – nessa concepção, os relativos são tratados como naturais, desse modo o número é considerado nada mais que uma quantidade ou medida, podendo ser apenas positivo. Percebe-se que somente a relação de ordem começa a ser adquirida.

Nesse nível, encontramos como resposta a questão: “Classificar em ordem crescente (utilizando o sinal $<$): -7, 5, -2, 6” a seguinte ordem “ $2 < 5 < 6 < 7$ ” utilizando, desse modo, a ordem dos naturais. Já na resposta “ $-2 < -7 < 5 < 6$ ” pode ser percebido a classificação dos negativos antes dos positivos, embora ainda apareça $-2 < -7$.

Nível II – os alunos, nessa concepção, utilizam os naturais sempre que é possível e permitido para obter uma boa resposta. Os números positivos e negativos são utilizados separadamente, fazendo uma síntese em seguida, e os problemas multiplicativos são apenas delineados.

Como exemplo de resposta para a questão: “Calcule: $S = 2 - 2 + 0 - 1 - 3 + 5$ ” foi encontrado “ $+7 - 6 = +1$ ” e também “~~2~~ - ~~2~~ + 0 - 1 - 3 + 5 = - 4 + 5 = 1” que mostra a separação das somas entre números positivos e negativos.

Nível III – os problemas aditivos são resolvidos nos relativos e a relação de ordem é estabelecida. A reta numérica é unificada, no entanto os problemas multiplicativos não são ainda corretamente resolvidos.

Por exemplo, nesse nível de compreensão, os problemas de ordenação numérica, como já citado anteriormente, são corretamente respondidos. Assim, como os de ordenação no campo aditivo requeridos pela questão: “x e y são dois números tais que $x > y$. Escrever a relação de ordem para $x - 2$ e $y - 3$ ”. Contudo, os problemas multiplicativos de ordenação ainda não foram alcançados como podemos perceber nas respostas a questão: “x e y são dois números naturais tais que $x > y$. Escrever a relação de ordem para $-3x$ e $-3y$ ”. Respostas: $-3x > -3y$; $-3 > -3$; $-3 = -3$ e também $-3x < -3y$. Os alunos se prendem ao fato de que como $x > y$ conseqüentemente a relação de ordem mais provável deve ser $-3x > -3y$, não levando em consideração que há uma multiplicação por um número negativo, o que acarreta numa inversão da relação.

Nível IV – esse nível de compreensão corresponde a um grupo muito pequeno de alunos. A resolução de problemas aditivos é efetivamente realizada no conjunto dos inteiros relativos, mesmo os problemas que possuem uma solução nos naturais, e os problemas multiplicativos são assimilados.

Na análise da passagem de uma concepção a outra, Coquin-Viennot (1985) aponta que o nível IV é atingido por poucos alunos do nível III, ou seja, embora esses alunos dominem muito bem os problemas aditivos, eles encontram dificuldades na resolução dos problemas multiplicativos. De acordo com Coquin-Viennot, “[...] é justamente esse bom domínio aditivo, ou mais ainda seu fundamento

sobre o modelo concreto [...] que faz obstáculo à instalação do modelo multiplicativo” (1985, p.180, tradução nossa)³⁶.

Coquin-Viennot destaca que Michelot (1966)³⁷ procurou demonstrar que a noção do número negativo só pode ser definida corretamente pelo pensamento formal e declara que: “Aderimos plenamente a esta noção dos relativos que só podem ser definidos ao nível formal” (1985, p. 183, tradução nossa)³⁸. Deste modo, podemos perceber que a posição de Coquin-Viennot e Michelot está em consonância com o “princípio de extensão” proposto por Caraça e o *princípio de permanência* estabelecido por Hankel, estendendo para os negativos a propriedade distributiva da multiplicação.

Assim, no próximo capítulo, propomos uma sequência de ensino em que os números relativos serão abordados pela via formal, atendendo ao “princípio de extensão” que está em consonância com o *princípio de permanência*. Apresentamos a adição dos relativos como deslocamentos sobre a reta numérica. A operação de multiplicação, atendendo ao princípio de extensão, e, a subtração como uma simplificação das expressões do tipo “ $a - (-b)$ ” e “ $a - (+b)$ ” em “ $a + b$ ” e “ $a - b$ ” onde a utilização da regra de sinais se faz presente para que a expressão possa ser substituída por uma adição algébrica como propõe Caraça.

³⁶ [...] c’est justement cette bonne maîtrise du domaine additif, ou plutôt son fondement sur un modèle concret [...] qui fait obstacle à l’installation du modèle multiplicative.

³⁷ Michelot, A. La notion de zero. Paris: Vrin, 1985.

³⁸ Nous adhérons pleinement à cette notion des relatifs qui ne peuvent être définis qu’au niveau formel.

5 CAMINHOS DA PESQUISA: METODOLOGIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS APRESENTADOS

Optamos por uma pesquisa direcionada para o Ensino da Matemática, mais especificamente, para o ensino da regra de sinais dos inteiros relativos, o que nos impulsionou a criação e aplicação de uma sequência didática. Desta forma, neste capítulo, iremos expor a nossa metodologia de trabalho adotada para propor esta sequência. Nela, os números inteiros relativos são abordados pelo “princípio de extensão” proposto por Caraça (1963), opondo-se ao modelo comercial assim denominado por Glaeser (1981), levantando-se as situações de congruência semântica que se apresentam nesse processo e a sua repercussão no processo de ensino e aprendizagem. Finalizando, faremos a análise dos dados obtidos por meio da aplicação da sequência didática.

5.1 Metodologia

Nosso trabalho caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, pois, em se tratando de uma pesquisa educacional, pensamos que ela atenderá melhor aos objetivos da mesma. Na abordagem qualitativa, encontramos características que são mais adequadas ao trabalho que desenvolvemos na sala de aula, que foi o de propor uma abordagem para o ensino da regra de sinais dos relativos no 7^o ano do ensino fundamental. Essas características, segundo Bogdan e Biklen (*apud*, LUDKE; ANDRÉ, 1986), são: a) *Tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como principal instrumento*: atendendo a essa característica, a nossa pesquisa foi realizada numa turma do 7^o ano numa escola municipal do município de São José no início do ano letivo de 2012, onde atuamos, simultaneamente, como professora titular da turma e pesquisadora. b) *Os dados coletados são descritivos*: propusemos à turma uma sequência didática apresentando os números inteiros relativos e a regra de sinais pelo princípio de extensão, onde fizemos a descrição do processo de ensino, bem como dos resultados apresentados. c) *A preocupação com o processo é muito maior que o produto*: nossa atenção esteve voltada especialmente as reações apresentadas pelos alunos durante a sequência de ensino e, claro, com vistas a apontar perspectivas futuras de ensino para a regra de sinais, pautadas nos constrangimentos e avanços apresentados durante o processo de ensino. d) *O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador*: os entraves

apresentados durante a sequência de ensino e sua repercussão na formação do conceito pelos alunos foram analisados criteriosamente. e) *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo*: não nos preocupamos em buscar evidências que comprovem as nossas hipóteses, de que o ensino da adição, utilizando somente o modelo comercial, em concordância com Coquin-Viennot (1985), poderá contribuir para a formação de entraves no ensino da multiplicação desses números, mas procuramos formar as abstrações a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima. Dessa forma, podemos perceber que a pesquisa qualitativa

[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.13).

O fato de que não procuremos evidências que comprovem nossas hipóteses não implica em dizer que não estamos pautados num quadro teórico que nos oriente na coleta e na análise dos dados. Pelo contrário, apesar do tema de nossa pesquisa ter emergido das dificuldades encontradas no exercício de nossa profissão, encontramos fundamentos teóricos que nos mostram que essa mesma dificuldade enfrentada hoje para o ensino dos números relativos, mais especificamente para a regra de sinais $- \times - = +$, foi alvo de muita polêmica e evitamento, usando o termo de Glaeser (1981), no percurso da sua trajetória histórica.

Dentre as várias formas que pode assumir a pesquisa qualitativa, adotamos, em nosso trabalho, o estudo de caso, por se tratar de uma pesquisa realizada em uma turma de 7^o ano de uma escola pública municipal, que atende alunos oriundos dos bairros da periferia do município de São José no estado de Santa Catarina. Trata-se de uma escola que atende alunos de todas as séries do ensino fundamental no período matutino e vespertino. E, no período noturno, oferece as séries finais do ensino fundamental e o ensino médio na modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Atendendo, aproximadamente, um mil e cem alunos nos três turnos.

No ano de 2012, a escola atendeu a quatro turmas de 7^o anos, duas no período matutino e duas no período vespertino. A escolha de uma dessas turmas deveu-se ao fato de ser, neste ano escolar, que os números inteiros relativos são sistematizados pela primeira vez.

Optamos por uma turma do turno vespertino por ser este o nosso horário de trabalho, e a escolha entre as turmas desse período foi aleatória.

A turma onde ocorreu a aplicação da sequência didática era composta por 39 alunos e observamos que ela possuía um número expressivo de alunos fora da idade/série, num total de 27 alunos. Este é o nono ano que lecionamos nesta escola, sempre trabalhando com as turmas de 5^a, 6^a e 7^a séries do período vespertino³⁹. Devido a esse fato, a maioria dos alunos dessa turma já tiveram a oportunidade de ter aulas conosco, somente 3 alunos não se encaixam nesse grupo. E, de certa forma, podemos dizer que já existe um contrato didático⁴⁰ implícito nesta relação devido ao relacionamento que ambos construíram ao longo da trajetória escolar. Estamos cientes que esta característica pode ter interferido nos resultados da pesquisa, no entanto, acreditamos que tal conhecimento prévio não influenciou negativamente na aplicação da sequência didática.

Segundo Chizzotti (1991), o estudo de caso é caracterizado para designar as pesquisas que coletam e registram dados de um caso particular ou de vários casos com o intuito de organizar um relatório ordenado e crítico de uma experiência visando à tomada de decisões a seu respeito ou propor uma ação transformadora. No nosso caso, a pesquisa foi realizada em uma turma na qual os números inteiros relativos foram abordados por meio da ideia de extensão apresentada por Caraça e Hankel.

Nessa direção, em consonância com Moretti (2012), apresentamos a regra de sinais para a adição como o modelo do prolongamento dos números naturais para a reta numérica dos inteiros, como sugerido nos PCN (BRASIL, 1998), que não deixa de ser uma aplicação do princípio de extensão. Para o campo multiplicativo, o modelo baseado no Teorema de Hankel que tem por base a ideia de extensão da propriedade da distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos. E, para a subtração, aplicamos a regra de sinais da multiplicação como um meio de simplificar as expressões do

³⁹ Estas séries correspondem, respectivamente, ao 6^o, 7^o e 8^o anos do Ensino Fundamental constituído de nove anos.

⁴⁰ De acordo com Silva “A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a sua transgressão. O conjunto de cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber constitui o chamado *contrato didático*” (SILVA, 2008, p. 49, grifos do autor).

tipo " $a - (+b)$ " e " $a - (-b)$ " em " $a - b$ " e " $a + b$ " para assim poder realizar a soma algébrica na reta dos inteiros como propõe Caraça (1963).

Estivemos, também, pautados no resultado apresentado pela pesquisa realizada por Pontes (2010), na qual, segundo os entrevistados, a melhor justificativa apresentada para o entendimento da regra de sinais é aquela apresentada no Caderno 9 da Coleção Temas Matemáticos do *National of Teachers of Mathematics* – NCTM, intitulado O sistema dos inteiros que, assim como o Teorema de Hankel, tem por base a ideia de extensão da propriedade da distributividade dos números positivos para o caso dos números negativos.

Como instrumento de coleta de dados, utilizamos a observação participante, por entender que, por intermédio desse instrumento, o pesquisador se encontra em contato direto com o fenômeno observado. Dessa forma, poderá recolher as ações dos seus atores no seu contexto natural. Porém, segundo Ludke e André (1986, p. 25), para que a observação se torne um instrumento válido de investigação científica, ela

[...] precisa ser antes de tudo controlada e sistemática. Isso implica a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador. Planejar a observação significa determinar com antecedência “o quê” e “o como” observar.

No nosso caso, que atuamos como professora titular da turma e pesquisadora, apresentando uma nova perspectiva de ensino para a regra de sinais, foi preciso ter muita clareza dos procedimentos que foram adotados e os aspectos relevantes que precisaram ser observados e considerados durante a intervenção didática.

Nossa pesquisa esteve estruturada nos obstáculos epistemológicos que foram apontados por Glaeser (1981)⁴¹ referentes à compreensão dos números relativos, nos níveis das concepções dos relativos, apresentado por Coquin-Viennot (1985) e nos resultados da pesquisa realizada por Pontes (2010), com o interesse de saber em que medida os alunos, de hoje, ultrapassaram os obstáculos epistemológicos apontados por Glaeser (1981).

⁴¹ Ver nota de rodapé de número 4.

Os obstáculos epistemológicos elencados por Glaeser são: Inaptidão para manipular quantidades isoladas; dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; dificuldade em unificar a reta numérica para incluir os números negativos; a ambiguidade dos dois zeros (zero absoluto e zero como origem); dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos (fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal); desejo de um modelo explicativo unificador. Esses obstáculos enfrentados no passado pelos matemáticos, aqui levantados por Glaeser, apesar do tempo transcorrido desde então, ainda não foram ultrapassados no campo do ensino no presente.

Assim, como os obstáculos elencados por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985), a partir de questões aplicadas a um grupo de alunos, estabeleceu uma hierarquia de concepções dos relativos. E, partindo desses níveis de compreensão, a autora destaca que o “modelo comercial” se instala no entendimento do aluno como uma concepção dos relativos dificultando, desse modo, o ensino das propriedades multiplicativas desses números. Uma vez instalada essa concepção, impõe-se uma barreira a ser enfrentada no ensino da multiplicação dos relativos, especialmente no caso da multiplicação de dois números negativos.

Ainda, nessa direção, podemos citar o trabalho realizado, recentemente, por Pontes (2010). Essa pesquisadora, no desenvolvimento de sua tese, realizou testes diagnósticos por meio da aplicação de questões, envolvendo os relativos com alunos do ensino fundamental, médio e superior, cujo objetivo foi avaliar até que ponto os alunos ultrapassaram os obstáculos epistemológicos apontados por Glaeser (1981). Os resultados apresentados na pesquisa mostraram que 29 dos 45 alunos pesquisados nos três níveis de ensino apresentaram alguma dificuldade em dar sentido aos números negativos e 19 mostraram insegurança no trabalho com a reta numérica. O desejo de um modelo concreto unificador não foi observado nos resultados dos dados obtidos, segundo Pontes (2010), isso se deve ao fato dos alunos reproduzirem a prática dos seus professores, que no ensino das operações com números inteiros relativos se pautam num ensino que privilegia o uso de regras pré-estabelecidas.

Assim, de acordo com Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) e Pontes (2010), temos de um lado a introdução dos relativos sendo apresentada de forma contextualizada e de outro, observamos que o ensino das operações está atrelado ao uso de regras que trazem muitos prejuízos para o ensino. Nesse sentido, é preciso estudar a viabilidade de

uma abordagem epistemologicamente mais satisfatória para o ensino dos números inteiros relativos, principalmente, para a regra de sinais.

Nesse sentido, nós confeccionamos um módulo com uma sequência de ensino em que introduzimos os números inteiros relativos por meio de atividades que visaram o ensino dos inteiros relativos, atendendo o “princípio de extensão”, assim denominado por Caraça (1963). A operação de adição foi apresentada como deslocamentos na reta numérica; a multiplicação e a regra de sinais como a única que preserva a distributividade à esquerda e à direita; e, a subtração por meio da simplificação das expressões, utilizando a regra de sinais da multiplicação, tornando-a uma adição algébrica, podendo, desse modo, ser resolvida por deslocamentos na reta numérica.

Na nossa sequência de ensino, buscamos apresentar os números negativos como uma ampliação dos naturais, opondo-se ao modelo comercial, no sentido de associar o número negativo a uma perda e o número positivo a um ganho. Mas isso poderia ter ocasionado alguns problemas, pois o livro didático adotado pela escola não aborda os números negativos nesta mesma perspectiva. E, também, o contexto social em que os alunos estão inseridos, a sua família, amigos, podem interferir na formação da concepção de número negativo e mais especificamente na aprendizagem da regra de sinais.

No início da sequência didática foi difícil conciliar e atuar como professora titular da turma, pesquisadora e observadora simultaneamente, mas como o ambiente da sala de aula nos era familiar, em pouco tempo, estávamos cumprindo os três papéis com naturalidade. Encaminhávamos os trabalhos com a turma e, na medida em que íamos fazendo os atendimentos individuais e em grupo, atuando como professora, nosso lado pesquisador e observador entrava em cena. Apesar do grande desafio que foi atuar nesses três papéis, mesmo assim ainda pensávamos que esta opção seria mais adequada, do que correr o risco de termos um outro personagem atuando como professor. Pois, neste caso, poderíamos não ter a compreensão integral, por parte desse professor, dos nossos objetivos reais e da sequência didática que foi realizada.

Desse modo, estivemos conscientes que toda a nossa ação foi planejada detalhadamente para que nossa pesquisa atendesse aos critérios de cientificidade. Fizemos a exposição dos objetivos e as condições de realização da pesquisa para a turma. (Termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelos pais dos alunos e pela direção da escola). Conversamos com a turma e instauramos o contrato didático.

Então, pudemos fazer a aplicação da sequência de ensino para os números inteiros relativos, culminando no ensino da regra de sinais. Essa sequência de ensino foi dividida em três etapas que contemplou: as operações de adição, multiplicação e, por último, a subtração com números inteiros. A sequência de ensino foi constituída por aulas expositivas dialogadas, trabalhos individuais e em grupo, pesquisa, exercícios de aprendizagem, troca de ideias entre alunos, entre alunos e professor a fim de institucionalizar a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros relativos. O registro das observações foi realizado por meio da observação cuidadosa descrita em relatórios, aplicação de testes ao final de cada bloco de ensino, e, as produções realizadas pelos alunos em classe ou extra classe.

Para auxiliar nosso trabalho de validação dos resultados nos apoiamos nas quatro categorias de análise, formuladas a partir da hierarquia nas concepções dos alunos a propósito dos relativos, proposto por Coquin-Viennot (1985). Assim sendo, adotamos as seguintes categorias: os números relativos são tratados como naturais; os negativos são tratados separadamente dos positivos; a reta numérica é unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos; os problemas multiplicativos são assimilados. Estas categorias serão explicitadas mais adiante. Agora iremos relatar a aplicação da sequência didática.

5.2 Aplicação da sequência didática

A nossa sequência didática ocorreu no ano letivo de 2012, em uma turma de 7^o ano, numa escola da rede municipal de São José, onde fizemos parte do quadro de professores efetivos da escola desde 2004. Nos primeiros contatos com a turma, no início do ano letivo, fizemos as apresentações, e, neste momento, pudemos perceber que dos 39 alunos da turma, somente 3 eram alunos novos, os demais já haviam sido nossos alunos em anos anteriores. Este fato facilitou o nosso relacionamento.

A nossa sequência didática foi constituída por três blocos de ensino. O primeiro bloco diz respeito ao ensino da adição dos inteiros. O segundo bloco se destina ao ensino da multiplicação dos relativos e a regra de sinais, E, finalizando, no terceiro bloco, apresentamos a subtração dos números inteiros e propusemos atividades que retomam as três operações que fizeram parte da sequência de ensino. Entretanto, antes da aplicação da sequência didática prevista, atuamos como

professora titular da turma iniciando as aulas, apresentando o conjunto dos números inteiros relativos.

Não é nosso objetivo, aqui, detalhar esse momento de ensino, contudo, pensamos ser fundamental relatar, em linhas gerais, como os números relativos foram introduzidos para a turma, pois isso pode ter influenciado no ensino da regra de sinais e das operações com esses números.

5.2.1 A introdução conceitual dos números inteiros

A apresentação dos números inteiros aconteceu por intermédio de problematizações de situações em que esses números aparecem, como, por exemplo, na tabela de saldo de gols, nas temperaturas, no extrato bancário, no nível do mar. Por meio da exploração dessas ideias, propusemos aos alunos que trouxessem recortes de jornais, de revistas e de livros, ocorrendo, assim, a formalização da ideia de número negativo. Então, pedimos para que os alunos desenhassem um termômetro, do jeito que eles imaginassem. O resultado foi apresentado à turma, e eles elegeram o desenho do termômetro mais completo, que coincidiu com o modelo tradicional de um termômetro, com temperaturas positivas acima do zero e negativas abaixo do zero.

Nesta atividade do desenho do termômetro, é interessante ressaltar que dos 36 desenhos, 4 desenhos apresentavam somente as temperaturas positivas e não se observou a presença do zero; 3 desenhos apresentavam as temperaturas positivas acima do zero e as negativas abaixo de zero, no entanto, o sinal da temperatura estava colocado depois do número; 5 desenhos apresentavam as temperaturas negativas abaixo de zero na ordem correta e as temperaturas positivas acima de zero na ordem inversa; 5 desenhos apresentavam as temperaturas positivas (sem o sinal +) acima de zero na ordem correta e as temperaturas abaixo de zero estavam na ordem certa, contudo, não foi registrado o sinal desses números, o que os torna positivos; 14 desenhos estavam com as temperaturas registradas corretamente; 2 desenhos apresentaram o termômetro digital; 2 desenhos apresentaram o termômetro com as temperaturas positivas e negativas uma ao lado da outra; 1 desenho apresentou o zero no centro do termômetro, mas os números acima e abaixo do zero eram todos positivos numa ordem completamente aleatória. Desse modo, podemos perceber que dos 36 alunos que participaram da atividade, 14 já conseguiam dispor corretamente os números inteiros na sequência correta e os outros 22

encontravam-se em processo de construção e de assimilação desse novo campo numérico.

Partindo dessa atividade, propusemos aos alunos que este termômetro fosse agora desenhado na posição horizontal e, em conjunto com a turma, após vários questionamentos sobre como organizar esses números nessa reta, chegou-se a reta numérica dos inteiros relativos, atentando ao fato que este campo numérico surge da ampliação dos Naturais.

Chamou-nos atenção que, ao dispor os números na reta, os alunos destacaram que, primeiramente, deveríamos localizar o zero nesta reta, para então podermos colocar os positivos e os negativos adequadamente. Nesta fase, realizamos uma atividade entregando para cada aluno um número inteiro entre -20 à $+20$ e explicamos que cada um deveria colocar o número que recebeu no cordão que se encontrava esticado horizontalmente em frente ao quadro, prendendo-o com um grampo de roupa. E, acrescentamos dizendo que o cordão com os números estaria representando um termômetro na posição horizontal.

Primeiramente, a turma percebeu que precisava colocar o zero no cordão, para então poder colocar o $+1$ a direita do zero e o -1 a esquerda do zero e seguindo a sequência, os demais números. Quando o cordão estava completamente preenchido, nós levamos os alunos a pensarem na continuidade daqueles números dispostos no cordão, e que esses números constituem o conjunto dos Números Inteiros Relativos, representado por Z . Pedimos, então, para que os alunos pesquisassem o significado do símbolo Z para os números inteiros.

Na aula seguinte, a turma apresentou o resultado da pesquisa, apontando que o conjunto dos números inteiros é representado por Z , por ter se originado da palavra alemã *zahl*, que significa número ou algarismo. Nas aulas seguintes, foram realizados exercícios em duplas, em que foram propostas atividades de construção da reta numérica, localização de pontos na reta numérica, conceito de número positivo, negativo, neutro, conjunto numéricos (Naturais e Inteiros).

O conceito de oposto de um número inteiro foi trabalhado na reta numérica como sendo o número que se encontra a mesma distância do zero, porém no lado oposto. O módulo de um número inteiro foi apresentado como o da distância que esse número se encontra do zero. E a comparação de números inteiros foi explorada por meio de situações que envolviam temperaturas. Finalizando esta etapa da apresentação dos números inteiros, aplicamos um teste diagnóstico que foi resolvido individualmente pelos alunos.

Por meio dos resultados apresentados, observamos que os alunos conseguiram reconhecer o $+1$ como o menor número inteiro positivo, entretanto, o reconhecimento do -1 como o maior negativo, encontrou-se em processo de formação. A ideia do menor número negativo e do maior número positivo, no conjunto dos inteiros, não foi percebida. A turma conseguiu identificar o oposto e o módulo de um número inteiro, assim como construir e localizar os números inteiros na reta numérica.

Quanto a possibilidade de fazer deslocamentos sobre a reta numérica, os alunos encontravam ainda um certo desconforto, ou seja, não se sentiam seguros ao realizarem esses deslocamentos. Ao serem levados a interpretar o gráfico que apresentava o balanço mensal das finanças de uma empresa (lucro e prejuízo), conseguiram identificar o mês de maior lucro e o mês de maior prejuízo. Contudo, não conseguiram fazer o balanço total para o semestre, na qual foi indicado, ou seja, não conseguiram ainda resolver uma adição de números inteiros.

5.2.2 O ensino da operação de adição de números inteiros

Os nossos objetivos a serem alcançados por meio da nossa sequência didática para a adição de números inteiros foram:

- compreender os processos usados para a adição de números inteiros na reta numérica;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos;
- diferenciar os sinais operatórios dos sinais predicativos.

Desse modo, a fim de atender aos nossos objetivos, este bloco de ensino foi composto por 8 aulas de 45 minutos. A introdução da adição de números inteiros aconteceu por meio de uma problematização. Nós propusemos a construção do desenho de um prédio com um andar térreo, nove andares acima do térreo e dois andares abaixo do térreo destinado as garagens.

A seguir, juntamente com a turma, cada um desses andares foi representado por um número inteiro. O térreo foi numerado por zero, os andares acima por números positivos e as garagens por números negativos. Assim, nós apresentávamos os deslocamentos nesse prédio e fazíamos o registro, no quadro, desses deslocamentos por meio de expressões numéricas e anotando o ponto de chegada como resultado

dessa expressão, por exemplo: partindo do térreo, descer 2 andares e, em seguida, subir 1 andar, foi representado pela expressão: $0 + (- 2) + (+ 1) = - 1$.

Nessas expressões nós destacávamos a diferença entre o sinal operatório (sinal que aparece fora dos parênteses indicando uma soma de deslocamentos) e o sinal predicativo (que é o sinal do número, indicando o deslocamento para cima como positivo e para baixo como negativo). Depois de vários deslocamentos neste prédio, nós propusemos que esse prédio fosse representado por uma reta numérica, e juntamente com a turma, ficou estabelecido que os deslocamentos, feitos sobre a reta, para a direita seriam positivos e os deslocamentos para a esquerda seriam negativos. Deste modo, nós juntamente com os alunos, efetuávamos a adição dos inteiros por meio de movimentos sobre a reta dos inteiros.

Para envolver ainda mais os alunos, nós organizamos a turma em quatro fileiras, deixando o corredor central da sala vazio. Os alunos dispostos nas fileiras estavam todos voltados para o centro da sala. No corredor, que foi organizado no centro da sala, colocamos um segmento da reta numérica de 7 metros de comprimento desenhada numa folha de papel pardo, e, juntamente com a turma, foi definido que os deslocamentos feitos à direita seriam considerados positivos e os deslocamentos feitos à esquerda como negativos.

Então, explicamos que, em duplas, eles iriam fazer deslocamentos sobre essa reta. Um aluno escrevia no quadro uma adição que representaria o deslocamento que o colega realizaria sobre a reta colocada no chão da sala e, ao final, registraria o ponto de chegada como o resultado da adição. No início os alunos se mostraram um pouco receosos em participar da atividade, mas logo tomaram gosto e se prontificaram a participar. As primeiras duplas propuseram adições de no máximo 4 parcelas, enquanto as últimas duplas propuseram adições com mais de seis parcelas, favorecendo, desta forma, a um cálculo mais trabalhoso.

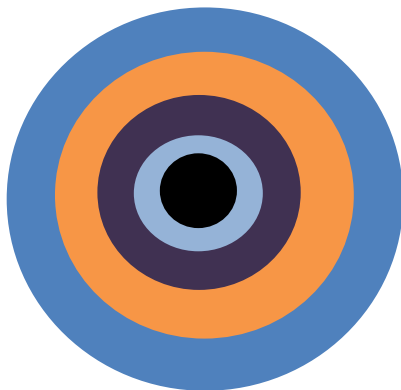
Durante a realização da atividade, a turma se mostrou participativa, embora a atividade tenha gerado na turma um pouco de barulho, compreensível, pois eles estavam conversando sobre as possibilidades de cálculos que poderiam ser resolvidos sobre a reta.

Após a realização dessas atividades que exigiram uma certa movimentação, pensamos ser o momento de proporcionar momentos de concentração e sistematização do que havia sido trabalhado até o momento. Para isso, organizamos a turma em duplas para resolverem uma lista de atividades, que era composta por exercícios sobre a adição

dos inteiros realizados por meio de deslocamentos sobre a reta numérica. Os alunos sentiram dificuldades para realizar as somas que apresentavam números com dois algarismos, pois isso os forçava, de certo modo, a fazer algumas generalizações, uma vez que a realização do deslocamento sobre a reta tornou-se trabalhoso.

Depois da realização e da correção da lista de exercícios, propusemos à turma o jogo do “tiro ao alvo”⁴². Para esta atividade, organizamos a turma em grupos e explicamos as regras do jogo, explicitando que cada participante do grupo teria o direito de jogar o milho cinco vezes sobre o disco colorido, montando, assim, a expressão numérica que determinaria a sua pontuação. Cada integrante do grupo deveria estar atento aos cálculos do colega, para que não ocorressem somas erradas e falsas pontuações. Após a realização dos cálculos, da primeira rodada, far-se-ia o mesmo procedimento para a segunda, e, ao final, cada equipe somaria a sua pontuação geral. Em conjunto com a turma, decidimos os valores referentes a cada cor do alvo, conforme a tabela⁴³:

Figura 9 – Disco colorido do jogo “tiro ao alvo”



Fonte: Autora (2013)

⁴² Este jogo é similar ao jogo de dardos, no entanto fizemos uma adaptação. O disco colorido ao invés de ficar na parede fica sobre a carteira na posição horizontal. E, os dardos foram substituídos por milho de pipoca.

⁴³ Este disco mede aproximadamente 20 cm de diâmetro.

Tabela 8 - Tabela das cores do jogo "tiro ao alvo"

Cores	Pontos
Azul escuro	- 5
Laranja	- 3
Roxo	+ 2
Azul claro	+ 5
Preto	+ 10
Arremesso fora	0

Fonte: Autora (2013)

Na sequência, fizemos uma simulação, demonstrando para a turma uma jogada. Por exemplo: 1^o arremesso: azul claro; 2^o arremesso: roxo; 3^o arremesso: preto; 4^o arremesso: foi fora e 5^o arremesso: azul escuro. Fomos registrando a adição no quadro, que, no final, ficou assim: $(+ 5) + (+ 2) + (+ 10) + 0 + (- 5) = + 12$. Logo, os pontos feitos, por nós, corresponderam a + 12.

Durante a realização do jogo, fomos prestando esclarecimentos e ajudando os grupos nos cálculos. Na resolução dos cálculos, alguns alunos sentiram a necessidade de fazer o desenho da reta numérica para auxiliá-los nas adições. Outros, porém, conseguiram efetuar os cálculos sem o auxílio da reta numérica, efetuaram os cálculos mentalmente imaginando os deslocamentos sobre a reta. Podemos perceber, então, que alguns alunos já se encontravam no caminho das abstrações, enquanto outros ainda estavam em processo de construção.

Após a finalização do jogo, nós questionamos a turma sobre as estratégias que eles utilizaram para realizar os cálculos na execução do jogo. Alguns alunos responderam que se apoiaram nos deslocamentos sobre a reta numérica. Outros responderam que fizeram os cálculos de “cabeça”, quer dizer, mentalmente. Nesta conversa, tentávamos extrair algumas generalizações a respeito da regra de sinais, no entanto, eles se mostravam ainda imaturos.

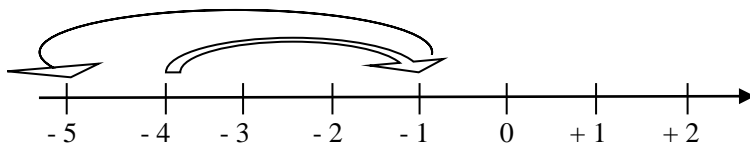
Então, sugerimos algumas adições de números inteiros que apresentavam sinais iguais e outras com sinais diferentes no quadro e perguntávamos: Vocês conseguem perceber alguma característica em comum nesses cálculos? Eles responderam, baseados nos deslocamentos sobre a reta, por exemplo, $(+4) + (-7) = -3$, pois, partindo do mais quatro, faremos um deslocamento de 7 unidades para a esquerda e chegaremos no -3. Em nenhum momento, falaram que se os sinais fossem diferentes deveríamos diminuir e conservar o sinal do número maior em módulo. Nós tentávamos induzi-los a fazer generalizações,

mas, naquele momento, não obtivemos êxito. Embora tivéssemos percebido que, quando os alunos falaram que efetuaram os cálculos “de cabeça”, já apontava para um processo de generalizações, mesmo assim, ainda não foi possível externalizar esse pensamento.

Prosseguindo com a sequência de ensino, nós propusemos aos alunos a resolução de atividades escritas com exercícios que envolviam a adição de números inteiros nos mais variados contextos. Dentre as questões da segunda lista desse bloco, os alunos apresentaram dificuldades para resolver as seguintes questões: Primeiramente a questão referente à formação de uma sequência numérica que dizia assim: “Observe as sequências de números: a) 12, 7, 2, -3, -8, -13,...Como essa sequência foi formada? b) -7, -3, +1, +5, +9, +13,...Como essa sequência foi formada?” Os alunos não conseguiram perceber, na sequência, o ordenamento da qual elas se formavam. Então, durante a resolução das atividades, nós atendemos ao chamado das duplas que solicitavam nossa ajuda na resolução da questão e problematizávamos ainda mais perguntando: Nessa sequência, o que aconteceu para que, partindo do 12, o próximo número seja o 7? E partindo do 7, o próximo ser o 2? Nessa forma de fazer a pergunta, o aluno quase que instantaneamente respondia que foi diminuindo 5. Uma aluna respondeu, baseada nos deslocamentos sobre a reta, dizendo que “andou 5 para a esquerda”. Assim, nós fomos esclarecendo as dúvidas em relação ao item **a**, e os alunos resolveram o item **b** sozinhos.

Outra questão em que os alunos apresentaram dificuldades para resolver foi a questão que apresentava os deslocamentos sobre a reta numérica e pedia para que eles escrevessem uma expressão numérica que representasse esses deslocamentos.

Figura 10 - Item *a* da quarta questão da segunda lista de atividades



Fonte: Autora (2013)

Os alunos confundiam o número de chegada da seta com o deslocamento proposto. Assim, eles escreviam a expressão $(-4) + (-1) + (-5)$ para representar os movimentos sobre a reta que deveria ser $(-4) + (+3) + (-4) = -5$.

Então, enquanto prestávamos assistência as duplas, chamamos a atenção dos alunos para que eles percebessem que aquele ponto de chegada representaria o resultado da operação e não o seu deslocamento. Nós relembramos a atividade realizada na sala, em que eles andaram sobre o segmento da reta numérica desenhada no chão, os números da expressão representavam os deslocamentos que deveriam ser realizados e o ponto de chegada representaria o resultado da operação.

Desse modo, nós prosseguimos indagando os grupos: Onde é o ponto de partida? O deslocamento foi para a direita ou para a esquerda? Quantas casas? Depois, deslocou-se novamente? Para onde? Quantas casas? Assim, o grupo a medida que respondia as nossas perguntas, registrava a expressão e, no final, anotava o resultado.

Nessa mesma lista de atividades, propusemos também expressões numéricas, envolvendo números inteiros com dois ou mais algarismos. E quando realizamos a correção dessas expressões, promovemos um debate em que os alunos expuseram a sua maneira de resolver os cálculos. Então, alguns alunos colocaram que se basearam nos deslocamentos sobre a reta para efetuar os cálculos. Outros disseram que fizeram o cálculo mentalmente, imaginando os deslocamentos.

Neste momento, nós aproveitamos algumas adições da lista para destacar a adição de números com sinais iguais, e a adição de números com sinais diferentes. E partindo dessas adições e seus respectivos resultados, perguntamos à classe: O que acontece quando eu adiciono números com sinais diferentes? Por exemplo: $(-10) + (+15) = +5$ e $(-15) + (+13) = -2$ Eu somo ou diminuo esses números? E o resultado, por que, às vezes, é positivo e, às vezes, é negativo? E quando eu adiciono números com sinais iguais, por exemplo: $(-1) + (-3) = -4$ e $(+4) + (+2) = +6$, o que acontece? Eu somo ou diminuo esses números? E o sinal, o que acontece com eles?

Foi interessante que, partindo dessa problemática, os alunos começaram a perceber algumas regularidades, dizendo que quando os sinais são diferentes os valores dos números são subtraídos. E ao serem indagados a respeito dos sinais, argumentaram dizendo que seria o do número maior, pois o deslocamento estaria sobre aquele lado da reta. Mas nós retrucávamos perguntando: O (-15) é maior que o $(+13)$? Então, eles colocaram que deveria desconsiderar o sinal e nós complementamos com a ideia de módulo.

Com relação à adição de números com sinais iguais, prontamente perceberam que ocorreu uma soma dos valores permanecendo o mesmo sinal, argumentando que se estão do lado negativo e continuam para a esquerda chegarão num valor negativo. Desse modo, nesse momento, já

foi possível fazer algumas generalizações, mesmo que em fase inicial. Já se percebeu que alguns alunos não precisavam mais desenhar a reta numérica e fazer deslocamentos para realizarem uma adição de números relativos, outros, porém, ainda se encontravam em processo de abstração.

Após a realização desse debate e da correção das atividades, propusemos a última lista de atividades desse bloco. Essa lista era constituída por exercícios que envolviam deslocamentos sobre a reta, situações problemas, envolvendo temperaturas e pirâmides. Contudo, os alunos apresentaram dificuldades especialmente em duas questões. Uma delas pedia para completar o quadrado mágico de modo que as somas nas linhas verticais, horizontais e diagonais fossem todas iguais.

Figura 11 - Quadro mágico proposto aos alunos

2		-2
	-1	
		-4

Fonte: Autora (2013)

Os alunos sentiram dificuldades para encontrar o número que completaria a linha, coluna ou diagonal que completasse a soma requerida. Então, fomos prestando assistência aos grupos mostrando e explicando por meio da reta numérica, que, por exemplo, se a soma deveria ser -3, e em uma das colunas a soma dos dois números era -6, perguntávamos ao grupo: Qual deverá ser o deslocamento sobre a reta para que se chegue no -3? Com isso, os alunos perceberam que precisavam fazer um deslocamento de 3 casas para a direita, o que resultaria no +3, número este, que completaria a coluna indicada. Assim, o grupo foi compreendendo e seguiu completando o quadrado mágico.

A outra questão dizia respeito ao contexto de movimento bancário, vejamos:

Dona Judite foi ao banco e verificou a movimentação de sua conta corrente:

Tabela 9 - Tabela apresentada aos alunos durante a atividade

Data	Descrição	Valor	Saldo
21/04	Depósito	+R\$ 120,00	+R\$ 165,00
23/04	Cheque debitado	- R\$ 87,00	

02/05	Saque	- R\$ 65,00	
05/05	Depósito	+R\$ 415,00	
12/05	Saque	- R\$ 390,00	

Fonte: Autora (2013)

De acordo com a tabela, responda: a) Qual era o saldo ao final do dia 23/04? b) Qual era o saldo anterior ao depósito de R\$ 120,00? c) Em quais dias o saldo ficou negativo? O que isso representa? d) Em quais dias o saldo ficou positivo? O que isso representa?

As dúvidas levantadas pelos grupos estavam diretamente relacionadas aos termos contábeis que foram apresentados na questão, por exemplo, depósito, cheque debitado, saldo, saque. Estes termos se mostraram desconhecidos pelo grupo, o que acabou criando barreiras para a realização da mesma. Na medida que os grupos foram esclarecendo as suas dúvidas referentes aos termos, foram conseguindo realizar as operações necessárias para resolverem a questão.

Finalizando este bloco de atividades da sequência didática, nós aplicamos um teste com a turma a fim de analisar o nível de compreensão desses alunos, de acordo com os níveis de aprendizagem apresentados por Coquin-Viennot (1985), na qual estão baseadas as nossas categorias de análise. Realizamos, também, uma análise das situações de ensino em que a ideia de congruência semântica se destaca e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. Esses resultados serão apresentados mais adiante.

5.2.3 O ensino da operação de multiplicação de números inteiros e a regra de sinais

Neste bloco de ensino, os objetivos que direcionaram o nosso trabalho foram:

- compreender os processos usados para a multiplicação de números inteiros aplicando a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a multiplicação desses números;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição e multiplicação de números inteiros.

Assim, com o intuito de atender aos nossos objetivos traçados, este bloco de ensino foi composto por 7 aulas de 45 minutos. A apresentação da operação da multiplicação dos relativos e da regra de sinais aconteceu por meio de problematizações com o intermédio de um debate caloroso.

Nós iniciamos a aula resolvendo no quadro algumas adições com números inteiros relativos por meio de deslocamentos sobre a reta dos números inteiros relativos. A seguir, sugerimos algumas multiplicações. Primeiramente, uma multiplicação de dois números positivos, e perguntávamos para a classe: Como essa multiplicação pode ser representada por meio de uma adição?

No caso, a multiplicação era $(+2) \times (+3)$ e a turma, com a nossa ajuda, sugeriu que fosse $(+3) + (+3)$ que resultaria $+6$, pois teríamos, partindo do zero, fazendo dois deslocamentos de $+3$. Logo, nós apontávamos que, então, o resultado de $(+2) \times (+3)$ também seria $+6$. Depois, colocamos no quadro uma multiplicação de um número positivo por um número negativo, a saber, $(+2) \times (-3)$ e questionamos a turma sobre como poderíamos representar aquela multiplicação através de uma adição. A turma prontamente sugeriu que fosse $(-3) + (-3)$ que resultaria e -6 , pois teríamos, partindo do zero, dois deslocamentos de -3 sobre a reta. E nós colocávamos, então, que o resultado de $(+2) \times (-3)$, também, deveria ser -6 .

A seguir, escrevemos no quadro uma multiplicação de um número negativo por um número positivo: $(-2) \times (+4)$ e perguntamos para a turma de que modo poderíamos representar essa multiplicação por meio de uma adição. Num primeiro momento, os alunos disseram que poderia ser $(+4) + (+4)$, então, interferimos, colocando que é o número positivo que determina a quantidade de vezes que a parcela precisa ser somada.

Nesse caso, poderíamos escrever a multiplicação $(-2) \times (+4)$ como $(+4) \times (-2)$, usando a propriedade comutativa da multiplicação. Assim, a turma logo apontou que a multiplicação poderia ser representada por $(-2) + (-2) + (-2) + (-2)$ que teria -8 como resultado. Então, nós ressaltávamos que $(+4) \times (-2)$, também, seria -8 . A seguir, escrevemos no quadro as seguintes multiplicações:

$$+3 \times (+4) =$$

$$+2 \times (+4) =$$

$$+1 \times (+4) =$$

$$0 \times (+4) =$$

$$-1 \times (+4) =$$

$$-2 \times (+4) =$$

$$-3 \times (+4) =$$

E, juntamente, com a turma fomos resolvendo as multiplicações. A turma foi dizendo os resultados naturalmente. Depois, nós pedimos para que os alunos analisassem os números dispostos na primeira coluna, e perguntamos: Como estão dispostos estes números? A classe respondeu que eles estavam em ordem decrescente. Depois, pedimos para que eles analisassem os números da segunda coluna. A turma colocou que os números eram os mesmos. E, finalmente, nós pedimos para que eles analisassem os números dispostos na terceira coluna. Prontamente, a turma percebeu que os números formavam uma sequência que estava diminuindo sempre 4.

Então, nós e a classe, fizemos uma sistematização a respeito da multiplicação de dois números positivos e de um número positivo por um número negativo. Obtivemos êxito, pois a turma logo concluiu que na multiplicação de dois números positivos o resultado seria positivo, e na multiplicação de um número positivo por um número negativo, o resultado seria negativo. Nesse momento, nós lançamos a pergunta: E qual será o resultado da multiplicação de dois números negativos? A turma fica em silêncio. Nada de argumentações. Depois surgem algumas sugestões: positivo, outro disse negativo. Mas, nada que fosse uma posição firme. Então, nós anotamos no quadro as seguintes multiplicações:

$$+3 \times (-4) =$$

$$+2 \times (-4) =$$

$$+1 \times (-4) =$$

$$0 \times (-4) =$$

$$-1 \times (-4) =$$

$$-2 \times (-4) =$$

$$-3 \times (-4) =$$

A turma foi respondendo na medida que foi sendo indagada, quando chegou à multiplicação $(-1) \times (-4)$, nós fizemos uma pausa para analisarmos a sequência que estava sendo formada pelos resultados. E a turma percebeu que estava aumentando 4 unidades. Então, perguntamos para a classe: Para continuar essa sequência, qual deverá ser o resultado da multiplicação $(-1) \times (-4)$? Eles responderam dizendo que deveria ser o +4, pois o número anterior foi o zero, e, zero + 4 é +4.

E, assim, concluíram as multiplicações. Mas, nós problematizamos um pouco mais, propusemos a seguinte multiplicação: $(1 - 4) \times (-5 + 1)$ e perguntamos a turma como poderia ser resolvida esta expressão. Um aluno levantou a possibilidade de resolver os parênteses, chegando à multiplicação $(-3) \times (-4)$ que deveria, pela sequência anterior, resultar em $+12$. Depois, nós sugerimos que fosse resolvido apenas o primeiro parênteses, chegando à multiplicação $(-3) \times (-5 + 1)$ que resultaria em $-3 \times (-5) - 3 \times (+1) = +15 - 3 = +12$. Por último, sugerimos que fosse resolvido apenas o segundo parênteses, chegando à multiplicação $(1 - 4) \times (-4)$ que resultaria em $1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 + 16 = +12$.

Neste momento, interrogamos a turma sobre os resultados encontrados para as três maneiras diferentes de resolvermos a multiplicação, e os alunos colocaram que de todas as formas o resultado permaneceu sempre o mesmo. Mas, nós continuamos problematizando: Mas, se adotarmos que $- \times - = -$, será que isso também vai acontecer?

Então, fizemos no quadro, ao lado do cálculo realizado anteriormente, os mesmos cálculos, porém adotando $- \times - = -$. Primeiramente, resolvendo os parênteses, chegando a $(-3) \times (-4) = -12$. A seguir, resolvendo o primeiro parênteses, chegando a $(-3) \times (-5 + 1) = -3 \times (-5) - 3 \times (+1) = -15 - 3 = -18$. Para finalizar, resolvendo o segundo parênteses, temos $(1 - 4) \times (-4) = 1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 - 16 = -20$. Concluídos os cálculos, nós perguntamos a classe a respeito dos resultados encontrados nas três maneiras diferentes de resolver a multiplicação adotando a possibilidade de $- \times - = -$, e, a turma observou que os resultados foram todos diferentes, logo concluíram que essa regra não pode ser válida. Finalizando o debate, nós, juntamente com a turma, fizemos a sistematização da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros relativos e registramos as seguintes conclusões:

- Na multiplicação de dois números positivos, o resultado deverá ser positivo.
- Na multiplicação de um número positivo por um número negativo, o resultado deverá ser negativo.
- Na multiplicação de dois números negativos, o resultado deverá ser positivo.

Por meio da nossa observação, cuidadosa, das reações apresentadas pelos alunos, podemos perceber que, embora os alunos tenham compreendido a necessidade de $- \times -$ ser $+$, por meio da demonstração feita aplicando a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, a receptividade dos alunos não foi muito boa,

devido ao seu teor genérico e abstrato. A receptividade dos alunos à demonstração da regra de sinais por meio da construção da sequência foi melhor recebida, percebida e compreendida pelos alunos. Talvez, se tivéssemos abordado a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição de uma outra forma, a reação dos alunos tivesse sido diferente, mas isso já é tema para futuras pesquisas.

Prosseguindo com a sequência didática, propusemos a turma um jogo de dominó, envolvendo a multiplicação de inteiros. Organizamos a turma em grupos com 4 alunos, e explicamos que as regras do jogo obedeceriam às regras do dominó tradicional, porém as pedras eram compostas por perguntas e respostas que deveriam ser colocadas numa sequência unindo-se a cada pergunta a pedra correspondente a sua resposta, ou a cada resposta uma questão que a representasse. Durante o desenvolvimento do jogo, percebemos que muitos alunos apresentavam dificuldades para multiplicar os números, não com relação aos sinais, mas com relação à multiplicação de seus valores, por exemplo, $7 \times 8 = 72$; ou ainda, $(-1) \times (-1) = +2$. Outra situação identificada foi a confusão das operações de multiplicação com a adição de números inteiros relativos, por exemplo, um aluno ao resolver $(-3) \times (+2)$, deu como resposta -1 . No entanto, na maioria dos grupos, essas dificuldades foram sendo superadas com a ajuda e a interferência dos próprios colegas da equipe. Após a realização do jogo, organizamos os alunos em grupos com três alunos e passamos para a resolução de atividades escritas.

Na resolução da primeira lista de atividades desse bloco, os alunos apresentaram dificuldades para resolver a questão que pedia para completar uma sequência e responder de acordo com essa sequência. A questão dizia assim: Complete a sequência apresentada na tabela e responda:

$3 \times 12 = 36$
$2 \times 12 = 24$
$1 \times 12 = 12$
$0 \times 12 =$
$-1 \times 12 =$
$\times =$
$\times =$

- O que acontece com o 1º fator quando se lê as contas de cima para baixo?
- O que acontece com o 2º fator quando se lê as contas de cima para baixo?
- O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo?
- Com base no que você observou: Um número negativo vezes um número positivo dá um produto...

Os grupos precisaram do nosso auxílio, pois esta questão exigia um certo grau de generalização. Com a nossa interferência para ajudar a interpretar e completar a tabela, os alunos foram compreendendo e conseguiram responder a questão.

Outra dúvida levantada pelos grupos, nesta primeira lista de exercícios, foi com relação à questão em que apareciam algumas multiplicações e adições na forma de expressões numéricas. Os alunos apresentaram dificuldades, porque não sabiam qual das operações deveria ser resolvida primeiro, mas com a nossa interferência foram conseguindo desenvolver os cálculos, mesmo que, muitas vezes, não estivesse completamente correto.

Concluída a primeira lista de atividades desse bloco, passamos para a resolução da segunda lista de exercícios. Esta lista de atividades foi resolvida em sala de aula com a nossa assistência. Os alunos foram organizados em duplas e, durante a resolução das atividades, alguns alunos apresentaram dificuldades para entender a expressão “não nulo” que apareceu na 1ª questão. Nessa questão, foi solicitado que se marcasse (V) para a alternativa verdadeira ou (F) para a alternativa falsa nas proposições a seguir:

- a) () O produto de um número inteiro por zero dá o próprio número.
- b) () Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo.
- c) () Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo.

Ao serem esclarecidos sobre o tema, seguiram resolvendo a questão. Os grupos, também, sentiram necessidade de se certificarem a respeito da 3ª questão desta lista. Nessa questão, foi solicitado que eles montassem uma operação que atendesse aos critérios estabelecidos. Assim, eles precisavam montar uma operação para os seguintes critérios: A soma de dois números inteiros é -7 ; e o produto de dois números inteiros é $+10$.

Os alunos nos perguntavam se era para fazer uma conta que apresentasse aquele resultado. E, na nossa interação com o grupo, é que se percebeu a dificuldade que eles apresentavam com relação aos termos soma e produto. Os alunos sabiam que precisavam montar uma operação, porém não sabiam qual. Com a nossa intervenção nos grupos, foi possível esclarecer as dúvidas, porém não atendemos a todos os grupos, pois estes não solicitaram a nossa ajuda.

Após a resolução da lista de atividades, nós organizamos a classe numa circunferência, mas, como a turma era muito numerosa, foi preciso fazer uma semicircunferência dentro da circunferência. Em

seguida, deu-se início a discussão e correção da segunda lista de atividades desse bloco.

Nós conduzimos a discussão, começando pela primeira questão, fazendo a leitura de cada uma das proposições com intervalo para as devidas reflexões. Ao lermos a primeira proposição (o produto de um número inteiro por zero dá o próprio número), alguns alunos disseram que a proposição era falsa, outros, porém disseram ser verdadeira. Ao serem indagados sobre a justificativa, um dos alunos citou como exemplo que $0 + (-2)$ dá -2 .

Neste momento, nós interferimos perguntando sobre o significado da expressão produto. Um aluno respondeu dizendo que era o resultado. E, nós perguntamos novamente: resultado do quê? Ele respondeu: “De uma conta”. Nós retrucamos: Que conta? Outro aluno respondeu: “De vezes”. Então, nós voltamos ao exemplo dado e perguntamos: Este pode ser um exemplo de produto? A classe respondeu que não, pois representava uma soma. Um aluno trouxe outro exemplo $0 \times (+3)$ dá 0 , por isso a alternativa é falsa. A turma concordou com o exemplo, citaram outros e concluíram que a proposição era falsa.

Com relação à segunda proposição (Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo), os alunos não manifestaram sua opinião, então, nós indagamos: O que quer dizer não nulo? Um aluno respondeu: Nulo é zero, então não nulo deve ser que não pode ser o zero. E, perguntamos a classe: Quais os exemplos de números não nulos? Eles responderam: 2, 3, 5,... (somente números positivos).

Então, sentimos a necessidade de complementar com: -3 , -4 , $+3$, -2 , etc. Depois, prosseguimos voltando a proposição e perguntando para a turma: Que tipo de exemplos podemos dar para essa proposição? Um aluno citou $(-3) \times (+3)$ dá -9 , outro aluno citou $(+5) \times (-5)$ dá -25 . Então, perguntamos: Que sinal apresentou o resultado de cada multiplicação. E a classe respondeu: negativo. Um aluno se pronunciou dizendo que ele não havia pensado nos números, mas apenas nos sinais, que como eles eram opostos um era positivo e o outro negativo, assim a multiplicação seria sempre negativo, por isso a proposição era verdadeira. A turma, após essa problematização, também chegou à mesma conclusão.

Na terceira proposição (Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo), os alunos já se manifestaram com exemplos, dizendo que a proposição era verdadeira, pois $(-5) \times (-5)$ dá $+25$ e $(+4) \times (+4)$ dá $+16$.

Com relação a terceira questão dessa lista de atividades, em que foi solicitado montar uma operação de acordo com os critérios, no

primeiro critério (A soma de dois números inteiros é -7), os alunos citaram vários exemplos como: $(-2) + (-5)$, $(-10) + (+3)$, entre outros, mas teve um exemplo que merece ser destacado $(+3) + (-4)$. Nós registramos, no quadro, todos os exemplos citados, inclusive este, e na medida que realizávamos o registro, indagávamos a turma sobre o exemplo colocado. E quando colocamos o exemplo $(+3) + (-4)$, um aluno disse que este não servia, pois o resultado seria -1 , obtendo o respaldo da turma. No segundo critério (O produto de dois números inteiros é $+10$), a turma esgotou todas as possibilidades de multiplicações rapidamente. Referente a essa lista de atividades, pensamos ser estas as considerações mais importantes, pois envolveram reflexões que visaram generalizações.

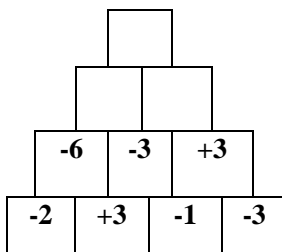
Prosseguindo com a nossa sequência didática, propomos a resolução da última lista de atividades desse bloco. Para a resolução desta lista, os alunos foram organizados em duplas. Durante a resolução das atividades, percebemos que os alunos apresentavam dificuldades para resolverem a questão dois desta lista. Nesta questão, foi solicitado a eles que escrevessem uma operação para cada situação, utilizando os números da tabela.

-4	3	-2	-8	+7	0
----	---	----	----	----	---

- Uma multiplicação de dois fatores com resultado igual a $+32$.
- Uma adição de três parcelas com resultado igual a -7 .
- Uma multiplicação de três fatores com o resultado igual a 24 .

As dúvidas apresentadas pelos alunos diziam respeito aos termos fatores e parcelas expressos na questão. Com a nossa interferência no esclarecimento desses termos, rapidamente as duplas apresentavam uma operação que atendesse aos critérios propostos pela questão.

Na questão três desta lista de atividades, os alunos apresentaram dificuldades para descobrir a operação que servia de base para completar a pirâmide. Eles precisavam descobrir o “segredo” da pirâmide e determinar o número inteiro que deve estar no alto dessa pirâmide.



Na resolução deste exercício, foi percebida uma confusão entre as operações de adição e multiplicação com números inteiros, que foi sendo contornada com a nossa intervenção nos grupos.

Outra situação que deve ser discutida diz respeito à quinta questão desta lista de atividades. Nesta questão, foi solicitado aos alunos que completassem a tabela:

a	b	a × b
-2	-3	
	+4	- 20
- 4		+32
+ 12	+ 8	

Dois fatores podem ter contribuído para que os alunos apresentassem dificuldades nesta questão. Um deles pode ser o fato de apresentar os números por meio de letras. Outro pode ser o fato de ora pedir o produto dos números e ora pedir um dos fatores da multiplicação que resultaria num determinado produto. Esse vai e vem na resolução da operação de multiplicação gerou um certo desconforto nos alunos. Finalizando este bloco de ensino, nós aplicamos um teste diagnóstico cujos resultados serão apresentados mais adiante.

5.2.4 O ensino da operação de subtração de números inteiros

Neste bloco de ensino, os objetivos que direcionaram o nosso trabalho foram:

- compreender a lógica dos processos usados para a subtração de números inteiros, aplicando a regra de sinais da multiplicação para simplificar as expressões;

- resolver situações problemas, envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a subtração de números inteiros relativos;
- resolver expressões numéricas, envolvendo adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

Para atingir essa meta, este bloco de ensino foi composto por 4 aulas de 45 minutos. A introdução da operação da subtração de números inteiros foi conduzida por meio de problematizações. Nós propusemos à classe a seguinte situação: “Vamos supor uma noite de inverno numa cidade da Serra Catarinense, os termômetros registraram $+ 4^{\circ} \text{C}$ no início da noite. Durante a madrugada da mesma noite, os termômetros chegaram a registrar $- 2^{\circ} \text{C}$. Qual foi a variação da temperatura nesta noite?” Alguns alunos prontamente responderam 6 graus. E indagamos: Subiu 6 graus ou diminuiu 6 graus? Eles responderam que havia diminuído. A seguir, problematizamos um pouco mais, perguntando a turma como poderíamos representar esta situação.

A turma ficou silenciosa, pensando. Até que um aluno disse que poderia ser representado através do termômetro. Neste momento, desenhamos o termômetro no quadro, registrando as temperaturas -2° e $+ 4^{\circ}$, e podemos constatar, juntamente com a turma, que a variação da temperatura realmente foi de $- 6^{\circ} \text{C}$. A seguir, perguntávamos a turma de que maneira poderíamos representar essa situação através de uma operação. Então, foram surgindo várias possibilidades citadas pelos alunos, e nós fomos registrando cada uma delas no quadro.

A partir dos registros, fomos indagando a turma sobre a validade ou não da operação realmente representar a situação problema. Um aluno levantou a possibilidade de ser $(+4) + (-2)$, então questionamos se o resultado dessa adição seria $- 6$. E, eles responderam que não. Assim, fomos prosseguindo, até que interferimos fazendo outras simulações como, por exemplo: Se a temperatura estava em $+20^{\circ}$ passou para $+ 26^{\circ}$, quanto à temperatura variou? Eles responderam $+ 6$. Nós perguntávamos novamente: Que cálculo vocês realizaram? Os alunos responderam $26 - 20$.

Então, indagamos novamente: E se a temperatura fosse $+ 4$ e passasse para $+18$, qual seria a variação? Os alunos responderam 14. Nós perguntamos: que conta vocês realizaram? Eles disseram $18 - 4$. A seguir, nós fizemos os seguintes registros no quadro: $(+26) - (+20) = +6$, $(+18) - (+4) = +14$, procurando levar os alunos a observarem que, para descobrirmos a variação da temperatura, precisamos diminuir a temperatura final da temperatura inicial. Assim, voltamos a perguntar

para a turma: Como poderíamos representar a variação da temperatura na cidade da situação problema? Então, um aluno disse que poderia ser $(-2) - (+4)$, porque -2 era a temperatura final e $+4$ a temperatura inicial.

Deste modo, fizemos o registro da operação no quadro juntamente com as outras escritas anteriormente. E procuramos levar os alunos a observarem que a operação $(-2) - (+4)$ pode ser escrita sem os parênteses, assim $-2 - 4$, pois para eliminarmos os parênteses utilizamos a regra de sinais da multiplicação, obtendo uma expressão mais simples que pode ser resolvida por meio de deslocamentos na reta numérica. Finalizando o debate, organizamos a classe em duplas para resolução de uma lista de atividades.

Durante a resolução das atividades, fomos prestando assistência as duplas, esclarecendo as suas dúvidas. Os alunos apresentaram dificuldades na resolução da questão 3 dessa lista, que pedia para que eles completassem as sentenças com os sinais operatórios de $+$, $-$ e \times nos itens: a) $(-3) \underline{\quad} (-2) = - 1$ b) $(-2) \underline{\quad} (-5) = + 10$ c) $(+10) \underline{\quad} (- 14) = + 24$ d) $(-12) \underline{\quad} (- 3) = - 15$.

Os alunos, na maioria das vezes, colocavam o sinal sem se preocuparem em como ficaria a operação após a sua escrita na forma reduzida. No momento em que realizávamos o atendimento dos alunos, nós chamávamos a sua atenção para que eles atentassem a esse detalhe. E nesse instante alguns alunos começaram a perceber este aspecto da operação.

Prosseguindo com a sequência de ensino, organizamos a turma em grupos e propusemos o jogo das argolas. Para a realização do jogo cada grupo recebeu um tabuleiro contendo 12 hastes presas verticalmente nele e 4 argolas, 2 azuis e 2 vermelhas. Cada uma das hastes presas ao tabuleiro representou um número, esses números estavam dispostos alternando um positivo e um negativo, como no esquema a seguir:

+16	-24	+4
-12	+20	-8
+8	-16	+24
+12	-20	-4

Explicamos à turma que nesse jogo, as argolas vermelhas nos fazem ganhar pontos e as azuis perder pontos. Para esclarecer,

realizamos uma jogada, como exemplo: Arremessamos as argolas vermelhas nos números -24 e +8, e as argolas azuis nos números +16 e -4 e escrevemos a expressão que representou a jogada no quadro, da seguinte forma:

$$0 + (-24) + (+8) - (+16) - (-4) = -28$$

↑
↑
↑
↑
↑

Início
ganha
ganha
perde
perde

Assim, explicamos que cada jogador ao fazer sua jogada irá arremessar as quatro argolas, fazer a sua expressão efetuando os seus cálculos adequadamente. Após a explicação sobre as regras do jogo, demos início às atividades.

Durante a realização do jogo, fomos prestando assistência aos grupos que solicitavam nossa ajuda. Os grupos nos chamavam, principalmente, para certificar-se que haviam realizado o cálculo corretamente. As equipes se mostraram interessadas em realizar o jogo e montavam as expressões sem dificuldades. Os integrantes do grupo se ajudavam mutuamente na execução dos cálculos, faziam as devidas simplificações e realizavam a soma algébrica.

Ao final do jogo, promovemos um debate com a turma a fim de identificar as estratégias que eles utilizaram durante o jogo. Dois alunos disseram que eles procuraram jogar as argolas vermelhas nos números que eram positivos e as argolas azuis nos negativos, a fim de obter como resultado um número positivo que fosse o maior possível.

Neste diálogo com a turma, tentamos fazer com que os alunos observassem que, no conjunto dos números inteiros, nem sempre a adição equivale a um aumento e nem sempre a subtração significa diminuir, fazendo desta forma, uma conexão com as situações vivenciadas por eles através do jogo das argolas. Pensamos que os nossos objetivos, ao optarmos por este jogo na situação didática, foram atingidos, pois os alunos aplicaram seus conhecimentos na execução do jogo, bem como conseguiram perceber que, no conjunto dos inteiros, as operações de adição e subtração apresentam aspectos diferentes daqueles apresentados nos naturais.

Ao serem indagados sobre a atividade, os alunos disseram que gostaram da atividade, pois desta forma “aprenderam brincando” de maneira descontraída, contando com a ajuda dos colegas e da professora. Finalizando esta sequência de ensino, os alunos foram organizados em duplas para a realização do teste diagnóstico da

subtração de números inteiros, cujos resultados serão apresentados mais adiante.

5.3 Resultados apresentados

A nossa sequência didática foi constituída por três blocos de ensino. O primeiro foi referente ao ensino da adição de números inteiros, o segundo se preocupou com o ensino da multiplicação dos relativos e da regra de sinais e o terceiro apresentou a subtração dos inteiros. Cada um desses blocos foi organizado com aulas devidamente planejadas, buscando sempre conduzir o ensino dessas operações pela via formal, fugindo do modelo comercial, como foi apresentado no item anterior. Ao final de cada um dos blocos de ensino, aplicamos um teste que foi realizado em sala de aula, em que eles puderam consultar seu material (caderno, livro didático, lista de exercícios) durante a realização do mesmo.

Cabe salientar que, devido à extensa duração da nossa sequência didática, não poderíamos descrever, neste trabalho, todas as falas e detalhes que se fizeram presentes no decorrer da pesquisa. Até porque numa turma com 39 alunos, com aulas de 45 minutos atendendo o calendário letivo da escola, não teríamos como observar e registrar todos os minuciosos detalhes da sequência de ensino. Então, optamos por fazer as nossas análises pautadas somente nos resultados dos testes. Porém, isso não significa dizer que todas as situações vivenciadas durante a sequência didática serão desconsideradas, pois acreditamos que os frutos dessa sequência poderão ser observados implicitamente nos resultados apresentados nos testes.

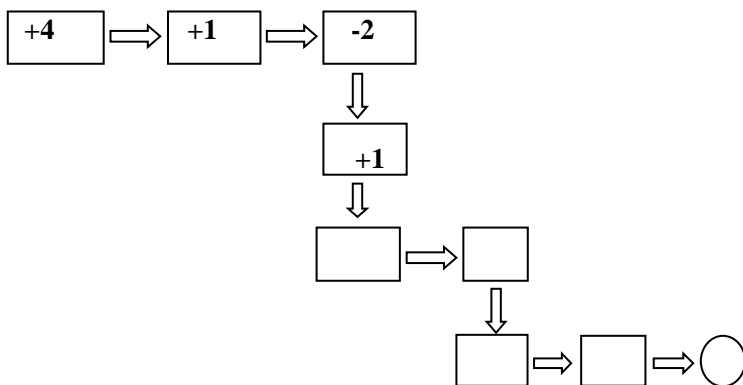
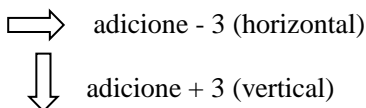
Queremos esclarecer, também, que, na confecção dos testes, tomamos o cuidado de formular e selecionar questões que fossem de fácil acesso e entendimento por parte dos alunos, no que diz respeito ao vocabulário apresentado, pois compactuamos com Damm (2005), acreditando que a origem das dificuldades na resolução de problemas deve ser procurada na compreensão do enunciado.

A partir desses testes, realizamos a análise dos resultados apresentados na pesquisa, atendendo as nossas categorias de análise, a saber: os números relativos são tratados como naturais; os negativos são tratados separadamente dos positivos; a reta numérica é unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos; os problemas multiplicativos são assimilados. Optamos por estas categorias de análise porque acreditamos que elas nos apontarão uma hierarquia nas concepções dos alunos, a propósito dos relativos, após a nossa

intervenção didática. Então, para uma melhor organização do nosso trabalho, optamos por analisar cada um desses testes separadamente.

5.3.1 Análise do teste da adição de números relativos

Para a realização deste teste, os alunos utilizaram o tempo de uma aula (45 minutos), estando presentes 36 dos 39 alunos que compõem a turma. O teste foi realizado individualmente. A primeira questão do teste solicitava que eles completassem a trilha conforme a indicação das setas:



Em que número você chegou? _____

De todos os alunos pesquisados apenas um deixou a questão em branco. Quinze alunos completaram a trilha corretamente, seis acertaram a questão parcialmente, e, quatorze alunos erraram completamente os cálculos. Podemos observar que esta questão exigia, além do domínio da adição de números inteiros, uma atenção especial para a posição da seta, que ora adicionava (+3) e ora adicionava (-3). Isto pode ter influenciado nos resultados, pois os alunos teriam que atender a dois comandos ao mesmo tempo; prestar atenção na posição da seta e realizar a operação.

Na segunda questão, foi solicitado que os alunos resolvessem quatro adições com números inteiros: duas adições de números com

sinais iguais e duas adições de números inteiros com sinais diferentes. Em seguida, deveriam elaborar justificativas para as resoluções. A primeira adição $+12 + (-5)$ foi respondida de modo correto por 28 alunos, erroneamente por 7 e, ainda, 1 aluno deixou em branco. Entre as justificativas apresentadas pelos alunos que resolveram de forma correta este item, identificamos quatro categorias. Nas justificativas mais frequentes, 19 alunos apontaram a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica. Vejamos alguns exemplos:

Figura 12 - Justificativa apresentada pelo aluno 03

Justificativa
deu +7 por na reta
se ele tem no +12 e
volta -5 vai para no +7

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Figura 13 - Justificativa apresentada pelo aluno 18

Imaginando a reta
numérica

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Um grupo de seis alunos apresentou como justificativa o fato de ter somado/diminuído os números. Dois alunos apresentaram justificativas aleatórias. Um aluno apresentou como justificativa o modelo comercial (ganho/perda), vejamos:

Figura 14- Justificativa apresentada pelo aluno 07

temho +12 receio de -5 ma
poroio quanto temho = +7

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

É importante destacar que este aluno (07) já cursou esta mesma série no ano letivo de 2011. Mesmo que este tipo de situação não tenha sido evidenciada na sequência de ensino deste ano, o aluno ainda recorre a situações de ensino vivenciadas em anos anteriores. Neste sentido, podemos destacar as palavras de Coquin-Viennot (1985) quando ela nos coloca que este modelo comercial que é utilizado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas “[...] se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma

concepção dos relativos” (1985, p. 184, grifos do autor, tradução nossa)⁴⁴.

Parece que esta ideia ficou tão fortemente consolidada, que nem mesmo a sequência didática, apresentando a adição dos relativos por meio de movimentos na reta numérica, foi capaz de se abalar. Foi interessante perceber que entre as respostas incorretas, dois alunos utilizaram como justificativa o deslocamentos sobre a reta numérica.

A segunda adição desta questão correspondia à soma de dois números positivos: $(+ 8) + (+ 9)$. Do total dos sujeitos, 26 resolveram de modo correto; 7 erraram e 3 deixaram em branco. Podemos observar que, apesar de ser uma adição de dois números positivos, a quantidade de acertos diminuiu referente à adição de um número positivo e um número negativo, elencados anteriormente.

Com relação às justificativas apresentadas pelos 26 alunos que acertaram, 16 citaram movimentos sobre a reta numérica; 6 elencaram a ação de somar/diminuir; 3 apresentaram justificativas aleatórias e um utilizou o modelo comercial, todos seguindo o padrão como os apresentados no primeiro item da questão.

O terceiro item apresentou a soma de um número negativo com um número positivo $(- 17) + (+3)$ que foi respondida corretamente por 26 alunos; 9 alunos erraram e 1 deixou em branco. Nas justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram a questão, as categorias elencadas, anteriormente, se mantêm, dentre elas 19 alunos citaram os deslocamentos sobre a reta numérica; 2 utilizaram o modelo comercial; 2 empregaram a ideia de somar/subtrair; 2 empregaram uma justificativa aleatória e 1 não justificou. Merece ser mencionado que os dois alunos que utilizaram o modelo comercial como justificativa já cursaram esta série no ano anterior.

O último item correspondia a uma soma de dois números negativos $(- 8) + (- 5)$. Do total de alunos que participaram deste teste, 27 resolveram corretamente; 7 erraram e 2 não responderam. No conjunto das justificativas apresentadas para as respostas corretas, foram percebidas 3 justificativas que alegaram ter somado os números, pois eles apresentavam sinais iguais. Neste caso, notamos um pequeno grupo começando a fazer generalizações.

⁴⁴[...] s’installe définitivement dans l’esprit de l’élève non plus comme un modele, mais comme une *conception* des relatifs.

Na medida em que se abstrai das diferentes associações de números positivos e negativos, um invariante, expresso na ideia de operador aditivo que produz transformações de acordo com os elementos em jogo, é possível chegar às generalizações expressas nas regras da adição: sinais iguais somam-se e conservam-se os sinais; sinais diferentes ou opostos subtraem-se e conserva-se o sinal do de módulo maior (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Estas generalizações, nós acreditamos terem sido construídas por meio da descoberta das relações de regularidades apresentadas nos vários deslocamentos realizados sobre a reta numérica.

As demais justificativas seguiram dentro do padrão das apresentadas nos itens anteriores, 17 se pautaram nos deslocamentos sobre a reta numérica; 2 utilizaram o modelo comercial; 3 empregaram a ideia de somar/diminuir não referenciando os sinais; 1 baseou-se num modelo aleatório e 1 não apresentou justificativa.

Foi possível perceber que, em nenhum dos casos apresentados, nos quatro itens desta questão, os alunos fizeram alusão a uma regra de sinais pré-estabelecida, mesmo aquelas justificativas das respostas incorretas. Neste sentido, acreditamos ter contribuído de alguma forma para a compreensão da operação da adição de números inteiros de maneira mais significativa, ao optar pelo ensino dos números inteiros não enfatizando o modelo comercial e conduzindo o processo de ensino atendendo ao “princípio de extensão”.

Na terceira questão deste teste, retirada do livro didático de matemática do Projeto Araribá (2006, p. 28), foi solicitado aos alunos que eles lessem e respondessem as questões: “Um caracol pretendia chegar ao topo de um muro; no entanto, subia alguns centímetros e escorregava outros” (p.28). O primeiro item da questão, apresentava a seguinte situação: “Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto?”.

Esta questão foi respondida corretamente por 15 alunos, nas quais alegaram que houve um avanço de dois centímetros; parcialmente correta por 10 alunos e 11 não responderam corretamente. Dentre os alunos que acertaram parcialmente, pode ser percebido uma certa confusão entre os termos avanço e retrocesso. Vejamos um exemplo:

Figura 15 - Resposta apresentada pelo aluno 35

a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Retrocesso de 2cm

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Este aluno, apesar de ter realizado corretamente os deslocamentos necessários, chegando ao resultado +2, associou esta posição final a um retrocesso e não a um avanço como indica o sinal de positivo.

Dentre os alunos que não responderam corretamente, podemos perceber que eles se prenderam ao fato do caracol ter escorregado seis, não levando em consideração o primeiro deslocamento de subir oito centímetros. Vejamos um caso:

Figura 16 - Resposta apresentada pelo aluno 01.

a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Retrocesso de 6 cm

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

O segundo item desta questão apresentava a seguinte situação: “Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto?” Neste item, encontramos 10 respostas corretas, identificando que houve um retrocesso de -2 ; parcialmente correta 10; 15 alunos não responderam corretamente e 1 não respondeu a questão.

Dentre as respostas parcialmente corretas, podemos destacar dois grupos de respostas: retrocesso de 2, sem colocar o sinal, o que o torna um número positivo; e, avanço de -2 , que indica que houve uma movimentação correta sobre a reta numérica, porém nota-se uma confusão entre os termos avanço e retrocesso. Em meio às respostas incorretas, podemos notar que os alunos ficaram presos as movimentações realizadas pelo caracol, indicando que houve avanços e retrocessos e não consideraram o balanço final das movimentações realizadas por ele. Vejamos alguns exemplos:

Figura 17 - Resposta apresentada pelo aluno 12.

b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? retrocesso de 15 e avanço de 4

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Figura 18 - Resposta apresentada pelo aluno 10

b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? Um avanço de 4 cm.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

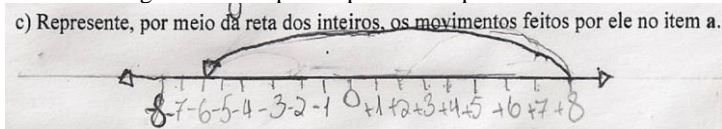
Em ambos os casos apresentados, os alunos não consideraram o conjunto de movimentos realizados pelo caracol, apenas consideraram alguns desses movimentos. E, de um modo geral, classificaram estes movimentos adequadamente, conforme aparece na questão, associando os termos escorregou a um retrocesso e subir a um avanço.

No terceiro tópico da questão três, foi solicitado aos alunos que eles representassem, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos pelo caracol no primeiro item. Dentre os desenhos apresentados como respostas a esta alternativa, 24 estavam corretos; 1 parcialmente correto e 11 estavam incorretos.

A resposta parcialmente correta apresentou os movimentos adequadamente, no entanto os números positivos estavam à esquerda do zero e os negativos a direita do zero. Nas respostas incorretas, percebemos dois tipos de situação: o desenho da reta foi realizado com sucesso, no entanto não houve o registro das movimentações.

Outra situação está fortemente ligada a não congruência semântica entre os movimentos realizados pelo caracol e o seu registro na reta numérica, observemos um exemplo:

Figura 19 - Resposta apresentada pelo aluno 24.



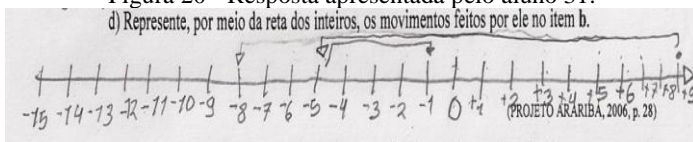
Fonte: Dados da pesquisa (2012)

No momento em que o aluno faz a conversão da linguagem natural, “subiu 8 cm e escorregou 6” para o registro geométrico, a congruência semântica conduz a associação do (+8) ao (-6). No entanto,

a equivalência referencial indica que, partindo do +8, devemos voltar seis. Neste caso, de acordo com Duval (1993), a congruência semântica destaca-se da equivalência referencial e o sucesso da resposta, para esta questão, depende da equivalência referencial.

No último item desta questão, os alunos deveriam representar, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos pelo caracol no segundo item da questão. Do total dos alunos que participaram do teste, 23 fizeram o registro corretamente; 10 incorretos e 3 deixaram a questão em branco. A maior parte dos desenhos incorretos, neste item, estavam relacionados a contagem inadequada dos movimentos, vejamos:

Figura 20 - Resposta apresentada pelo aluno 31.



Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste desenho, assim como em outros que foram apresentados neste item, o aluno contou 15 marcações e não 15 intervalos, o que fez com que ele chegasse no -5 e não no -6. No entanto, o próximo movimento foi realizado com sucesso, porém como este dependia do movimento anterior, chegou-se ao resultado final incorreto. Nos outros casos de respostas incorretas, repetiu-se o caso do item anterior, os alunos fizeram o desenho da reta numérica corretamente, contudo não houve o registro dos deslocamentos.

Na quarta questão deste teste, foi solicitado que os alunos resolvessem a seguinte situação problema: “Pedro está jogando bolinhas de gude. Na primeira partida perde seis. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, ele nem perdeu, nem ganhou. O que aconteceu na segunda partida?” Como resposta a esta situação, 18 alunos obtiveram êxito; 2 disseram que “ele parou de jogar”, 4 alunos apontaram que “ele perdeu bolinhas”, 4 deixaram a questão em branco e 8 alunos apresentaram respostas variadas como, por exemplo: “ não ganhou nem perdeu bolinhas”, “continua com a mesma percentagem de bolinhas”, “ $-6 + (0) = 0$ ”, entre outras.

Nesta questão, podemos perceber como o fato da não congruência semântica entre a expressão e o seu registro contribui para um elevado índice de insucessos, confirmando-se as previsões de Duval (2012). Se a mesma situação fosse apresentada de uma outra forma, na qual houvesse

uma congruência semântica entre a expressão e o seu registro, certamente o índice de acertos teria sido maior.

Na última questão do teste, foi proposta a seguinte situação: Maria resolveu fazer bombons para vender. Foi então a uma doçaria para fazer o levantamento do custo da matéria prima.

Material	Gastos
Leite condensado	R\$ 18,00
Chocolate	R\$ 27,00
Formas para bombons	R\$ 6,00
Embalagens	R\$ 8,00

No primeiro item da questão foi colocado que: “Maria pensou em pedir R\$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê?” Este item foi respondido corretamente por 21 alunos, eles justificaram que o dinheiro não seria suficiente, pois os gastos seriam de 59 reais, ultrapassando o valor previsto. Do total de alunos, 11 responderam parcialmente correto, 3 não responderam corretamente e 1 não respondeu a questão. Dos 11 alunos que acertaram parcialmente, todos alegaram que o dinheiro não seria suficiente, no entanto ao apresentarem suas justificativas percebemos que eles erraram nos cálculos, vejamos:

Figura 21 - Resposta apresentada pelo aluno 31.

a) Maria pensou em pedir R\$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? O dinheiro não seria suficiente, porque iria dar 66 R\$ e ela só tinha 50 R\$.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Nesta resposta, assim como nas demais que acertaram parcialmente, houve um equívoco nos cálculos aritméticos. Apesar de o cálculo poder ser realizado, utilizando-se somente números naturais, mesmo assim ainda houve uma elevada taxa de erros. Dentre os alunos que não responderam corretamente, todos justificaram que o dinheiro seria suficiente para cobrir as despesas, vejamos:

Figura 22 - Resposta apresentada pelo aluno 06.

a) Maria pensou em pedir R\$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? Sim, porque os materiais são baratos
 R\$ 9,00 reais

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste caso, assim como nos casos que acertaram parcialmente, houve problemas na resolução da adição dos valores da matéria prima.

No segundo item desta questão, foi proposta a seguinte situação: “Se Maria conseguisse comprar o material descrito acima e produzisse 150 bombons com ele. Se ela vendesse cada bombom por R\$ 2,00, teria lucro ou prejuízo? De quanto?” Do total dos alunos que realizaram o teste, apenas 6 responderam corretamente a questão; 16 acertaram parcialmente; 8 erraram e 6 não responderam.

Dentre os 16 que acertaram parcialmente, todos responderam que teria lucro, mas os valores do lucro variavam a cada resposta. Alguns consideraram lucro de 300 reais, sem descontar o valor dos produtos comprados. Outros descontaram as despesas, porém esses cálculos não foram realizados corretamente. Entre os alunos que erraram este item, encontramos justificativas de que haveria prejuízo, apresentando diferentes valores a cada resposta.

Analisando de uma maneira geral os resultados apresentados por este teste e estabelecendo uma relação com as nossas categorias de análise, podemos observar que os números relativos não são mais tratados como números naturais, ou seja, os alunos já ultrapassaram o nível I de compreensão, que trata os relativos como naturais. Não foi possível observar, neste teste, indícios que evidenciem o nível II onde os negativos são tratados separadamente dos positivos.

Com relação ao terceiro nível de compreensão, foi possível perceber, por meio da questão 3 do teste, que os alunos já unificaram a reta numérica. E a adição de números relativos, quando apresentada através de uma expressão numérica, como na questão 2, obteve um índice maior de acertos do que quando apresentada por meio de situações problemas, como na questão 3. Neste teste ainda não pode ser observado o nível IV de compreensão dos relativos, mesmo porque a multiplicação dos relativos será discutida por meio dos resultados apresentados no próximo teste.

5.3.2 Análise do teste da multiplicação de números relativos

O teste referente à multiplicação de números inteiros foi realizado individualmente em sala de aula, durante uma aula de 45 minutos. O teste foi realizado por 37 dos 39 alunos que compõem a turma. A primeira questão solicitava aos alunos que resolvessem as operações, num total de 7 itens, e justificassem a sua resposta. O detalhamento dos índices referentes a esta questão está exposto na tabela a seguir:

Tabela 10 - Resultados referentes a questão 1 do teste da multiplicação.

Operação	Nº de acertos	Nº de erros	Em branco
$+ 15 + (+ 6)$	30	07	00
$(-32) + (- 16)$	15	21	01
$- 12 + (+ 13)$	19	16	02
$(+ 20) + (- 7)$	17	18	02
$(+ 6) \times (+ 15)$	16	18	03
$(- 8) \cdot (+ 3)$	21	13	03
$(- 9) \times (- 4)$	21	13	03

Fonte: Autora (2013)

A quantidade de alunos que responderam a segunda operação $[(-32) + (- 16)]$ errada nos chamou atenção. Ao analisarmos estas respostas, observamos que entre as 21 respostas incorretas, 11 delas apresentaram + 48 como resultado. Ou seja, houve uma confusão entre a regra de sinais da adição e da multiplicação de números relativos. Com relação ao conjunto geral de respostas incorretas desta questão, percebemos que ocorreu uma inversão entre as operações de adição e multiplicação, vejamos:

Figura 23 - Resposta apresentada pelo aluno 01

$$\begin{array}{l} (+ 6) \times (+ 15) = \\ \checkmark \\ + 21 \\ (- 8) \cdot (+ 3) = \\ \checkmark \\ - 5 \\ (- 9) \times (- 4) = \\ \checkmark \\ - 13 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Figura 24 - Resposta apresentada pelo aluno 17

$$+ 15 + (+ 6) = +90$$

$$(-32) + (- 16) = +412$$

$$- 12 + (+ 13) = -246$$

$$(+ 20) + (- 7) = -140$$

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Podemos observar na primeira figura que o aluno 01 trocou a operação de multiplicação por adição, e efetuou os cálculos corretamente, se fosse uma adição. Na segunda figura, ocorreu o contrário, o aluno 17 realizou a operação de multiplicação no lugar da adição, e multiplicou corretamente, inclusive aplicou a regra se sinais adequadamente.

Com relação às respostas incorretas para a multiplicação $(+ 6) \times (+ 15)$, observamos que das 18 respostas erradas, 7 delas realizaram a multiplicação dos sinais corretamente, no entanto erraram ao efetuar a multiplicação, obtendo como resposta, por exemplo, +80, +60, etc. Apenas 2 das 18 respostas incorretas apresentaram -90 como resultado desta operação, ou seja, efetuaram o cálculo adequadamente, porém erraram na aplicação da regra de sinais.

As justificativas apresentadas para cada um dos itens desta questão não estavam tão elaboradas como no teste da adição, os alunos foram mais sucintos em suas respostas. Porém, notamos que nas justificativas para a adição de números relativos prevaleceu a ideia de deslocamentos sobre a reta numérica. Nas justificativas apresentadas nas multiplicações, a predominância foi a de respostas curtas como:

Figura 25- Justificativa apresentada pelo aluno 14.

Eu multipliquei $(-9) \times (-4)$ que deu +36

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Desse modo, não podemos fazer uma análise mais apurada. No entanto, encontramos também algumas justificativas mais elaboradas, vejamos:

Figura 26 - Justificativa apresentada pelo aluno 26.

$(-8) \cdot (+3) = -24$	é que o positivo manda o negativo se repetir 3 vezes que dá -24
$(-9) \times (-4) = +36$	é que negativa com o negativo dá positivo.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Figura 27 - Justificativa apresentada pelo aluno 11.

$(+6) \times (+15) =$ <u>6×15</u> <u>$+90$</u>	Por que aumentou 6 vezes o +15 no resultado foi para no +90.
$(-8) \cdot (+2) =$	

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Nestes exemplos, assim como em outros, observamos que a regra sinais emerge em meio às regularidades que foram propostas durante a sequência de ensino. Nota-se que a regra de sinais não está completamente consolidada, mesmo porque os alunos ainda se encontram num processo de construção, o que exige um certo tempo para que possa se estabelecer plenamente.

Uma justificativa interessante merece destaque neste contexto, uma vez que ela é um forte exemplo de como o modelo comercial traz prejuízos ao ensino da multiplicação dos relativos:

Figura 28 - Justificativa apresentada pelo aluno 07.

$(+20) + (-7) =$ <u>$+13$</u>	tenho 20 reais dei 7 e fiquei com +13 reais.
$(+6) \times (+15) =$ <u>$+90$</u>	gostei em 6 dias 15 reais no final do mês com 90 reais.
$(-8) \cdot (+3) =$ <u>-24</u>	em 8 dias gostei pouco emprestado 3 reais.
$(-9) \times (-4) =$ <u>$+36$</u>	devo 9 x 4 reais no começo no final do mês paguei -36 reais.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Este aluno obteve sucesso em todos os seus cálculos e justificativas até o momento que se deparou com uma multiplicação entre dois números negativos. Então, o modelo comercial que se adequava tão bem até o momento, deixou de funcionar e o conduziu a um resultado errado. Neste sentido, Coquin-Viennot nos aponta que:

Essa concepção (na base concreta) não pode funcionar numa estrutura multiplicativa; é necessário revertê-la a fim de prosseguir a aprendizagem, mas ela está bem estabelecida, bem cômoda para resolver os problemas aditivos encontrados até aqui, que ela, nela mesmo, constitui um verdadeiro obstáculo para a instalação do nível IV (1985, p. 184, tradução nossa).⁴⁵

O nível IV que Coquin-Viennot menciona é justamente a concepção da multiplicação de números relativos. Em outras palavras, o modelo concreto que funciona muito bem para o ensino das propriedades aditivas constitui-se como um entrave para o ensino das propriedades multiplicativas desses números.

A segunda questão desse teste apresentava a seguinte situação: “Marcos vendeu sua moto, mas irá receber o dinheiro em 18 parcelas de R\$ 235,00.” Nestas condições, a questão solicitava, na primeira alternativa, que os alunos, utilizando números inteiros, escrevessem uma expressão numérica que representasse essa situação. Dos 37 alunos que participaram desse teste, temos os seguintes resultados: 24 escreveram a expressão numérica corretamente; 5 não conseguiram escrever a expressão corretamente e 8 deixaram a questão em branco. Neste caso, observamos que a necessidade de mudar de registro, passando da linguagem natural para a escrita numérica pode ter contribuído para os índices de respostas erradas e em branco.

No segundo item desta questão, os alunos deveriam escrever o valor total que Marcos iria receber. Como resposta a esta alternativa encontramos 12 respostas corretas; 21 incorretas e 4 em branco. Em relação ao item anterior, podemos perceber que, apesar de 24 alunos

⁴⁵ Cette conception (à base concrète) ne peut fonctionner dans une structure multiplicative; il faut la renverser pour poursuivre l'apprentissage, mais elle est si bien établie, si commode pour résoudre les problèmes additifs rencontrés jusque là, qu'elle, en elle-même, constitue un véritable obstacle à l'installation du niveau IV.

terem montado a expressão numérica corretamente, apenas 12 alunos efetuaram o cálculo corretamente. Os 21 alunos que erraram a resposta apresentaram dificuldades para efetuar a multiplicação entre os números 18 e 235.

No último item dessa questão, foi proposta a seguinte situação: “Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R\$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê?” Dentre os alunos que participaram do teste, encontramos 10 respostas corretas; 20 parcialmente corretas; 3 respostas incorretas e 4 em branco. Com relação às respostas parcialmente corretas, todos alegaram que o dinheiro não seria suficiente, porém ao justificarem a sua resposta apresentaram valores não correspondentes com a situação, por exemplo:

Figura 29 - Resposta apresentada pelo aluno 31

c) Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R\$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê?

não, porque na moto que ele vendeu ele vendeu ela por 4.230,00 e iria faltar 6.667 e 77 centavos

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Os alunos sabiam que o dinheiro não seria suficiente, no entanto erraram ao efetuar os cálculos.

Na terceira questão desse teste, os alunos deveriam colocar no lugar de cada letra um número inteiro que atendesse as operações propostas pelo quadro:

-7	.	-4	=	A
=				+
+29				-10
+				=
C	=	-2	×	B

O detalhamento dos índices de acertos referentes aos valores encontrados para as letras deste quadro está exposto na tabela a seguir:

Tabela 11 - Resultados referentes a questão 3 do teste da multiplicação

Incógnita	Nº de acertos	Nº erros	Em branco
A	30	03	04
B	11	20	06
C	08	23	06

Fonte: Autora (2013)

Com base nesta tabela, podemos observar que 81,08% dos alunos que participaram do teste obtiveram sucesso na multiplicação $(-7) \times (-4)$ que corresponde ao valor da incógnita **A**, ou seja, a multiplicação de dois números negativos parece estar consolidada. Entretanto, apesar do alto índice de acertos para o valor da incógnita **A**, o percentual de acertos para a incógnita **B**, que correspondia a operação $(+28) + (-10)$, caiu para 29,72%, e, como o valor de C dependia de B ou da igualdade $(-7) = +29 + C$, este índice de acertos, conseqüentemente, também apresentou uma queda. Inferimos que estes baixos índices de acertos referentes as incógnitas **B** e **C**, decorrem da forma de como a questão foi apresentada, uma vez que, em oportunidades anteriores, os mesmos alunos já demonstraram não terem dificuldades para efetuarem uma adição e nem uma multiplicação entre um número positivo e um número negativo.

Nesse teste, a quarta questão foi retirada do livro didático Matemática do Projeto Araribá, que propôs a seguinte situação:

Sérgio e Paulo estavam brincando com um jogo que funcionava segundo as regras: a cada resposta certa, o jogador anda 3 casas para frente; a cada resposta errada, anda 2 casas para trás. Ganharia o jogo quem primeiro alcançasse a 25ª casa. Os dois jogadores responderam a um total de 20 questões cada um. Sérgio acertou 12 e Paulo acertou 13 (2006, p. 72).

Nestas condições, no primeiro item da questão foi perguntado: “Quantas questões cada um deles errou?” Dentre os alunos que realizaram o teste, 18 responderam corretamente; 17 erroneamente e 2 não responderam. Acreditamos que os alunos que não responderam corretamente este item tiveram dificuldades na leitura e na interpretação da questão, pois grande parte das respostas incorretas apresentou como resposta “Sérgio 12 e Paulo 13” justamente os valores que estavam no problema, representando a quantidade de acertos de cada um dos personagens.

O segundo item desta questão perguntava: “Quantas casas Sérgio andou para a frente? E para trás?” No conjunto das respostas, obtivemos 12 respostas corretas; 5 parcialmente corretas; 15 incorretas e 5 não foram respondidas. Nas respostas parcialmente corretas, todos acertaram o número de casas que Sérgio andou para a frente, porém erraram o número de casas que ele andou para trás. Novamente, neste item se apresenta a dificuldade que os alunos têm na interpretação textual, e podemos perceber, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, como passagem de um registro a outro é um processo custoso. Aqui as dificuldades que se apresentam não se encontram na ordem do tratamento dos registros, mas, sim, na conversão.

Como terceiro item desta questão foi perguntado: “Quantas casas Paulo andou para a frente? E para trás?” Dos alunos pesquisados, 11 acertaram a questão; 6 acertaram parcialmente; 15 erraram e 5 não responderam. Nas respostas parcialmente corretas, os alunos acertaram somente um dos casos, ou para a frente ou para trás. Nesta situação, podemos observar que os índices de acertos e de erros estão muito próximos com os apresentados no item anterior, acreditamos que os problemas também sejam da mesma natureza.

Dando continuidade ao trabalho, no quarto item da questão foi solicitado aos alunos que eles dissessem a casa em que cada um dos jogadores parou. No conjunto das respostas, obtivemos 5 corretas; 4 parcialmente corretas; 16 incorretas e 12 em branco. Com relação as respostas parcialmente corretas, os alunos acertaram somente uma das alternativas, acertaram a posição da casa de Paulo ou a de Sérgio.

No último item desta questão, foi perguntado: “Quem ganhou o jogo?” O resultado foi surpreendente, 31 alunos acertaram; 1 errou e 5 não responderam. Os resultados obtidos nesta questão não estão de acordo com o esperado, uma vez que, durante todo o desenvolvimento da questão, o índice de acertos foi bem inferior ao de erros e que o resultado final dependia desses acertos.

Como os alunos conseguiram acertar o vencedor sem ter realizado os deslocamentos solicitados no desenvolvimento do jogo? Então, estamos frente a um desafio. Será que os alunos contaram com a sorte, ou eles realizaram superficialmente os deslocamentos? Mesmo sem conseguir respostas imediatas a estes questionamentos, de um modo geral, percebemos por meio desta questão o quão difícil é para os estudantes mobilizarem os seus conhecimentos e realizarem a conversão. Como nos aponta Duval (2005), a mudança de registros muitas vezes é uma barreira intransponível para a maioria dos alunos, no entanto a coordenação de diferentes registros exercem um papel fundamental nos processos de compreensão.

Por fim, foi solicitado aos alunos, na última questão deste teste, que eles descobrissem o erro cometido por Jonas na resolução da expressão:

$$(-3) \cdot (+19 + 6) + (+3) \cdot (-1) + 4 =$$

$$(-3) \cdot (+25) + (-3) + 4 =$$

$$-75 - 3 + 4 = 74$$

A seguir, foi perguntado, no primeiro item da questão: “Qual foi o erro que Jonas cometeu ao resolver a expressão?” Apenas 3, dos 37 alunos participantes, perceberam que foi no sinal do 74; 11 alunos não responderam a questão; 9 alunos mencionaram que o erro estava no resultado final, porém apresentaram outros valores diferentes e não -74; 6 alunos justificaram que houve erro nos sinais, contudo não especificaram o caso; 8 alunos apresentaram respostas diversas como: “Ele trocou o sinal era +3 ele colocou -3” [08] ou ainda, “O erro foi que $(-1) + 4$ é igual a +3 não a mais 4” [26]⁴⁶. Podemos observar, por meio dos resultados apresentados para este item, que os alunos ainda se encontram num processo de entendimento dos procedimentos necessários para realizar o cálculo de uma expressão numérica. Talvez nesse exercício esse fato tenha tomado lugar de destaque devido ao grau de complexidade da questão.

No segundo tópico da questão foi perguntado: “Será que este tipo de erro é comum? Por quê?” Dentre o conjunto de respostas apresentadas para esta pergunta, encontramos 11 em branco; 4 disseram que sim, mas não justificaram; 5 disseram que sim e que o erro é comum

⁴⁶ Os números [08] e [26] referem-se a identificação dos alunos.

por falta de atenção, ou por fazer muito rápido não realizando as devidas correções; 9 afirmaram ser comum porque confundem os sinais dependendo da operação; 7 apresentaram respostas aleatórias não condizentes com a pergunta e apenas 1 resposta afirmou não ser comum este tipo de erro.

É possível observar, por meio das respostas apresentadas neste item, que os alunos estão conscientes das dificuldades que se estabelecem na realização do cálculo que envolve números relativos. Mesmo não tendo apontado corretamente o erro cometido por Jonas no desenvolvimento dos cálculos, eles foram capazes de perceber os riscos pertinentes na execução deste cálculo.

Finalizando a questão, foi solicitado aos alunos para que eles resolvessem a expressão que fora resolvida por Jonas. No conjunto total das respostas, obtivemos um número expressivo de respostas em branco: 21 alunos não resolveram a expressão; 7 alunos resolveram a expressão parcialmente correta; 6 erraram e apenas 3 alunos resolveram os cálculos corretamente.

Com base nestes resultados, percebemos que os alunos se encontram num processo de apropriação das propriedades multiplicativas dos relativos. O domínio das operações dos números inteiros ainda deve levar um certo tempo, os alunos, de acordo com os elementos da transposição didática, precisam de tempo para superar os seus bloqueios e atingir uma posição de equilíbrio frente as novas situações de aprendizagem⁴⁷.

Analisando os dados obtidos por meio da aplicação deste teste e estabelecendo relações com as nossas categorias de análise, percebemos que o nível I de compreensão já foi ultrapassado. Os alunos não tratam os relativos como se fossem naturais, prova disso pode ser encontrada nas respostas apresentadas na primeira questão, tanto nos resultados dos cálculos, quanto nas justificativas.

No que diz respeito ao nível II, em que os negativos são tratados separadamente dos positivos, não percebemos indícios desta

⁴⁷ De acordo com os elementos da transposição didática difundidos por Brousseau e Chevallard o tempo didático destaca-se do tempo de aprendizagem. O tempo didático corresponde ao tempo designado nos programas escolares e nos livros didáticos para o cumprimento do ensino de um conteúdo. No entanto, o tempo de aprendizagem é específico a cada sujeito, uns aprendem mais rápido do que outros. “O tempo de aprendizagem é aquele que está mais vinculado com as rupturas e os conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente reorganização de informações, e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender” (*apud* PAIS, 2008, p. 33 - 34).

separação. Isto porque os alunos efetuam a adição algébrica dos inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta e isso acaba contribuindo para que eles percebam o conjunto dos inteiros como uma união entre positivos, negativos e o zero.

Por meio das análises das respostas obtidas nas questões 1, 3 e 4 deste teste, notamos que o nível III de compreensão caminha para a sua consolidação. A reta numérica foi unificada, e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos. A predominância dos deslocamentos sobre a reta, nas justificativas apresentadas na primeira questão, nos convidam a pensar que a compreensão das propriedades aditivas por meio de deslocamentos sobre a reta contribuíram para o estabelecimento deste nível de compreensão.

Com relação ao nível IV de compreensão, notamos que os alunos se encontram em processo de assimilação das propriedades multiplicativas. O conjunto de respostas obtidas nas questões 1, 2, 3 e 4 mostrou que a multiplicação de números inteiros obteve um número considerável de sucessos. Entretanto, os alunos ainda não assimilaram completamente as propriedades multiplicativas dos relativos. Acreditamos que, no próximo teste, estas propriedades estejam mais bem definidas e compreendidas pela turma.

5.3.3 Análise do teste da subtração de números inteiros relativos

O teste deste bloco de ensino foi realizado em duplas, e os alunos puderam consultar seus materiais como cadernos, livro didático e listas de exercícios. O tempo de duração do teste foi de 1 hora, sendo realizado por 36 dos 39 alunos que compõem a turma. Os demais alunos faltaram no dia da aplicação do teste.

Na primeira questão do teste, foi solicitado aos alunos que resolvessem a seguinte situação problema: “Durante as férias, Carla e Mateus foram para a serra. No início da viagem, ainda em sua cidade, Mateus verificou que a temperatura local era de 25° C. Já, na serra, Carla viu que a temperatura era de 18° C. Qual foi a variação da temperatura ao longo da viagem?” Do total de alunos que participaram do teste, 28 alunos indicaram que houve uma variação de 7 graus; 4 alunos não indicaram a variação corretamente e 4 não responderam a questão. Por meio desta questão, podemos perceber que a maioria dos alunos consegue realizar deslocamentos sobre a reta numérica e realizar a subtração de números relativos.



Para os alunos resolverem a segunda questão, eles precisavam completar o quadrado mágico, nele a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais deveria ser sempre a mesma.

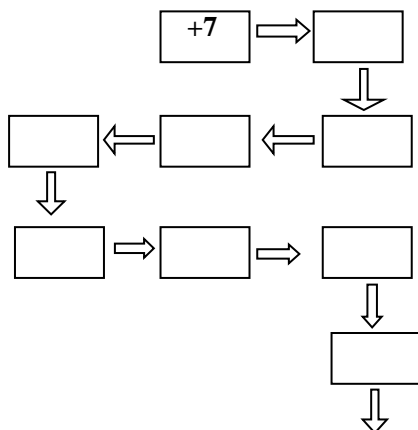
- 3		- 2
	0	
		+3

Do total de respostas, obtivemos 10 alunos que completaram os quadrados mágicos corretamente; 14 parcialmente corretos e 12 incorretos. Os quadrados mágicos completados de modo parcialmente corretos evidenciavam que os números que estavam localizados em lados opostos do zero eram opostos.

No entanto, os alunos não atentaram ao fato que a soma nas linhas e colunas também deveriam ser iguais a zero. Nesta questão, a dificuldade encontrada para a sua resolução não diz respeito à soma algébrica dos números, mas sim em elaborar uma soma algébrica que possa ser enquadrada nos critérios estabelecidos. Critérios estes, que os próprios alunos tiveram que buscar, neste caso, saber que a soma em todas as linhas eram iguais a zero.

Na terceira questão, os alunos deveriam completar a trilha conforme a indicação das setas:

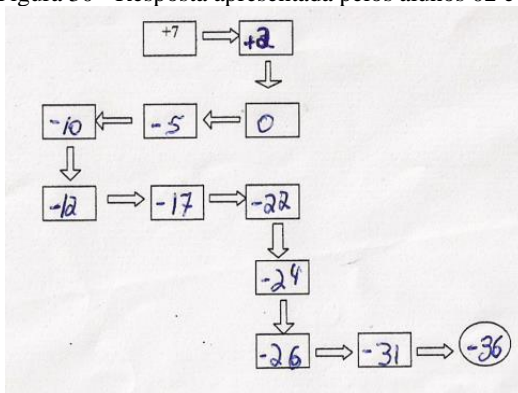
- Vertical: adicione (- 2) 
- Horizontal: subtraia (- 5) 





No final, os alunos deveriam indicar o resultado a que chegaram. Somente 4 alunos chegaram ao resultado final correto; 32 alunos não conseguiram completar a trilha corretamente. A maior dificuldade percebida está relacionada as operações e a mudança de sinais para resolver a subtração. Os alunos não relacionaram a expressão subtrair (-5) a somar 5, pois $-(-5)$ simplificando a expressão torna-se $+5$. Vejamos um exemplo do que estamos dizendo:

Figura 30 - Resposta apresentada pelos alunos 02 e 21.



Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste caso, assim como em outros que nos foram apresentados como resposta, podemos observar que logo no início, os alunos ao invés de subtraírem (-5) adicionaram (-5) , na sequência, adicionaram (-2) como o recomendado. Nos relativos, o fato da subtração de um número negativo estar associado a uma soma, constitui um obstáculo a ser superado. Isso porque a subtração nos relativos tem uma concepção diferente daquela encontrada nos naturais.

De acordo com Teixeira, a subtração de números relativos está associada a trabalhar com operadores negativos que operam transformações de oposição. Deste modo,

[...] a generalização do caráter de inversão presente na subtração para os inteiros é muito mais complexa, porque é preciso identificar com clareza a operação que está em jogo, tarefa não

muito simples, quando se trata de operar com números positivos e negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

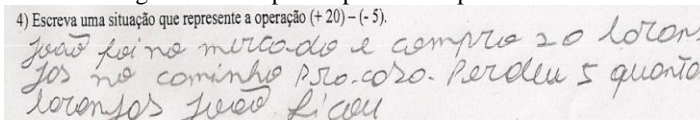
Percebemos por meio das respostas desta questão que a adição com números inteiros parece não apresentar dificuldades, uma vez que os alunos adicionaram corretamente o (-2). No entanto, a operação de subtração parece ainda não ter sido superada, encontra-se em processo de construção e aprimoramento.

A quarta questão do teste solicitava aos alunos que eles escrevessem uma situação que representasse a operação $(+ 20) - (- 5)$. Nenhum aluno conseguiu escrever uma situação que representasse realmente uma subtração de um número negativo; 22 alunos escreveram situações relacionadas a perder ou tirar, e 12 alunos não escreveram a situação.

No conjunto das respostas, foi possível perceber como o conceito da subtração ainda se encontra fortemente atrelado a concepção de tirar. Os alunos ainda não conseguiram ampliar o conceito de subtração nos relativos. Vejamos algumas situações que reforçam a nossa afirmação:

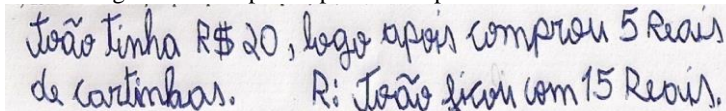
Figura 31 - Resposta apresentada pelos alunos 12 e 08.

4) Escreva uma situação que represente a operação $(+ 20) - (- 5)$.



Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Figura 32 - Resposta apresentada pelos alunos 21 e 02.



Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Estas situações expressam com detalhes a concepção de subtração que ainda está presente na turma. Embora tenha sido trabalhado para que eles tivessem esta concepção ampliada, parece que, neste momento, ela ainda não vingou. Isso não significa dizer que eles não terão este conceito ampliado, mas sim que esta concepção se encontra em processo de mudança.

Dentre as situações que nos foram apresentadas, merece ser destacado que houve uma situação especial. Nela os alunos perceberam

que precisariam efetuar uma adição para resolverem a situação. E, então, escreveram uma situação que envolvia uma adição, ao invés de escreverem uma situação que apresentasse a subtração um número negativo.

Figura 33 - Resposta apresentada pelos alunos 18 e 29.

4) Escreva uma situação que represente a operação $(+20) - (-5)$.

Minha mãe me deu 20 bolas e meu pai me deu mais 5 bolas. Com quantas bolas eu fiquei?

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste caso, não se pode dizer que os alunos não compreenderam que para subtrair um número negativo é preciso somar. No entanto, eles não conseguiram pensar numa situação que apresentasse realmente a subtração de um número negativo.

Na quinta questão, foi proposta aos alunos a seguinte situação: “Uma pessoa encontra-se em uma câmara frigorífica cuja temperatura é de -8°C . Ao sair, encontrará uma temperatura ambiente de 23°C . Qual a variação de temperatura que essa pessoa terá de suportar?”

Dos 36 alunos que participaram do teste, apenas 4 responderam corretamente; 26 erraram a questão e 6 alunos não responderam. Podemos observar dentre as respostas incorretas que, 14 alunos apontaram 15 graus como a variação da temperatura para esta situação. Ou seja, os alunos ao invés de subtrair (-8) , acabaram adicionando (-8) para encontrar a variação da temperatura. Isto porque, como já comentamos anteriormente, a subtração de números relativos significa trabalhar com operadores negativos que operam transformações de oposição. Neste caso, os alunos sabiam que precisavam da operação de subtração, no entanto eles não realizaram o jogo de sinais a fim de simplificar a expressão, obtendo, deste modo, uma soma.

É interessante perceber que a quinta questão é justamente uma situação que poderia ser usada como exemplo para a resolução da quarta questão. Na quarta questão, foi utilizado o registro numérico, enquanto que na quinta questão foi utilizada a linguagem natural. Embora os valores numéricos não sejam os mesmos, ambas as situações expressam o conceito de subtração, porém utilizando-se registros diferentes. Neste sentido, Duval (2009) coloca que a atividade de conversão não é simétrica, ou seja, nem sempre a conversão inversa permite reencontrar o registro de partida.

Podemos analisar esta questão, também sob a perspectiva da congruência semântica. A situação que foi proposta é semanticamente congruente a expressão $+23 - 8$, no entanto, neste caso, a congruência semântica destaca-se da equivalência referencial, conduzindo a um resultado incorreto.

De acordo com Duval, a maior parte dos insucessos cometidos pelos alunos nas atividades matemáticas está fortemente relacionada aos fenômenos da congruência semântica. “[...] a verdadeira fronteira, aquela que bloqueia muitos alunos é a congruência e a não congruência semântica no jogo da substituição de uma expressão a outra ou de uma representação a outra” (2012, p. 116). Assim, nesta questão, grande parte dos alunos seguiu o caminho da congruência semântica e não conseguiu resolver a questão adequadamente.

A sexta questão do teste apresentou um esquema que representou uma máquina que levava o número inteiro x a um outro número inteiro y .



Primeiramente, foi perguntado qual o valor de y para x igual a 1. Neste caso, para resolver a questão, os alunos deveriam substituir o valor de x por 1, multiplicar por (-3) e somar a $(+4)$ para obterem o valor de y . Dos alunos que participaram do teste, 8 responderam corretamente; 22 erroneamente e 6 não responderam a questão. Dentre as respostas incorretas, percebemos que os alunos substituíram adequadamente o valor de x , porém erraram na execução dos cálculos.

Figura 34 - Resposta apresentada pelos alunos 30 e 39

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste exemplo, assim como em outros que nos foram apresentados, percebemos que a dificuldade encontrada está centrada no campo do tratamento dos registros e não na atividade de conversão, pois a passagem da linguagem natural para o registro numérico aconteceu

espontaneamente. Neste caso, a congruência semântica está em consonância com a equivalência referencial, fato que contribuiu para o sucesso da conversão.

No segundo item, desta questão foi solicitado aos alunos que eles determinassem o valor de y quando x igual a zero. No conjunto das respostas, obtivemos 12 alunos que resolveram a questão corretamente; 18 não responderam corretamente e 6 alunos deixaram a questão sem resposta. Como este item da questão envolveu os mesmos procedimentos de resolução do item anterior, porém com valores diferentes, as características das respostas incorretas são muito parecidas; ou seja, os alunos converteram a linguagem natural num registro numérico, mas não resolveram os cálculos adequadamente.

Ainda, na mesma questão, o terceiro item pedia aos alunos que determinassem o valor de x quando y igual a 7. Do total das respostas obtidas, 8 alunos responderam corretamente; 20 erroneamente e 8 alunos não responderam a questão. Nas respostas corretas, observamos que os alunos resolveram a questão atribuindo valores a x , por tentativas, para encontrar o valor de y . Vejamos:

Figura 35 - Resposta apresentada pelos alunos 03 e 09.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left, it says $y = 7$. In the center, the student has written the equation $-1 \cdot (-3) + (-4) = 7$. Below this, the student has written $x = 0$ with a horizontal line drawn through it, indicating a guess or a step in their reasoning.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Como os alunos ainda não aprenderam a resolver equações pelo processo algébrico, eles resolveram por meio de tentativas, ou seja, eles precisavam encontrar um número que multiplicado por (-3) e somado com $(+4)$ desse como resultado 7. O raciocínio requerido para resolver este item foi diferente dos itens anteriores, exigiu uma elaboração de pensamento bem mais complexa. No entanto, o índice de acertos foi o mesmo apresentado no primeiro item.

Dentre as respostas incorretas, percebemos que os alunos substituíram o valor de y no lugar de x e encontraram um outro valor para y , e não o valor de x como sugeria a questão. Inferimos que este problema decorre das dificuldades de interpretação, levando os alunos a fazerem substituições erradas.

Finalizando a questão, o último item solicitava que os alunos determinassem o valor de x quando y igual a 13. Dos alunos que

realizaram o teste apenas 6 acertaram a questão; 20 não responderam corretamente e 10 alunos deixaram a questão em branco. Como este item da questão é parecido com o item anterior, as características das respostas também são muito parecidas. As respostas corretas foram realizadas por meio de tentativas e as respostas incorretas através de substituições inadequadas.

Na última questão do teste, os alunos deveriam realizar o cálculo de quatro expressões numéricas envolvendo a adição, a multiplicação e a subtração de números inteiros. O detalhamento dos índices referentes a esta questão encontra-se na tabela a seguir:

Tabela 12 - Resultados referentes a questão 7 do teste da subtração.

Expressão numérica	Nº de respostas certas	Nº de respostas parcialmente certas	Nº de respostas incorretas
$(-23) + (-14) - (-56)$	10	14	12
$(-5) \times (-3+14) - (21)$	10	12	14
$(-8-6) \times (-4) + (-3+7)$	08	12	16
$(-12+31) - (4) + (+26)$	16	06	14

Fonte: Autora (2013)

Nesta questão, todos os alunos resolveram as quatro expressões, não havendo nenhum caso de resposta em branco. Podemos observar que o número de alunos que resolveram as expressões corretamente, somado ao número de alunos que acertaram as expressões parcialmente, em todos os itens, somou mais que 50% da turma. Nas respostas parcialmente corretas, percebemos que os alunos realizaram o jogo de sinais corretamente na simplificação das subtrações.

Ao realizarem as multiplicações, erraram no cálculo aritmético, mas fizeram o jogo de sinais adequadamente. Observamos, também, por meio do desenvolvimento do cálculo dessas expressões, que os alunos apresentam oscilações nos seus cálculos. Ora resolvem corretamente uma adição com relativos, ora efetuam a mesma operação erroneamente. Este fato também se estende para as operações de subtração e de multiplicação. Acreditamos que essas oscilações façam parte do processo de construção das generalizações a respeito dessas operações. A partir do momento em que essas operações se estabelecerem plenamente, essas oscilações deixem de acontecer. Vejamos um exemplo que reforça a nossa posição:

Figura 36 - Resposta apresentada pelos alunos 13 e 07.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } (-23) + (-14) - (-56) = \\
 \quad +37 + 56 = \\
 \quad +93 \\
 \\
 \text{c) } (-8 - 6) \times (-4) + (-3 + 7) = \\
 \quad -14 \times (-4) + (-3 + 7) = \\
 \quad +56 + (+4) = \\
 \quad +56 + 4 = \\
 \quad +60
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste exemplo, assim como em outros que nos foram apresentados, observamos que, no primeiro item, a soma entre (-23) e (-14) resultou em +37. Entretanto, logo abaixo no item **c**, a mesma soma algébrica entre dois números negativos (-8 -6) resultou em -14. Podemos observar, ainda, que a simplificação da subtração, por meio da aplicação da regra de sinais, aconteceu naturalmente.

No conjunto das respostas incorretas, percebemos vários procedimentos de cálculo realizados de modo incorreto. Vejamos um caso:

Figura 37 - Resposta apresentada pelos alunos 06 e 38.

$ \begin{array}{l} \text{b) } (-5) \times (-3 + 14) - (-21) = \\ \quad (-5) \times +11 + 21 = \\ \quad -45 + 21 \\ \quad \underline{\quad} \\ \quad 24 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \text{c) } (-8 - 6) \times (-4) + (-3 + 7) = \\ \quad (-14) \times (-4) + (-3 + 7) = \\ \quad +56 - 3 + 7 \\ \quad +56 + 7 \\ \quad \underline{\quad} \\ \quad +63 \end{array} $
--	--

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Neste exemplo, podemos observar que a soma algébrica $(-3+14)$ resultou em $+9$, os alunos diminuíram os valores e consideraram o sinal do número maior em módulo, porém não obtiveram sucesso nessa diminuição. Por outro lado, no item **c**, eles realizaram a soma algébrica entre $+48$ e -3 corretamente, embora o resultado $+48$ não represente o resultado da multiplicação entre (-14) e (-4) . Notamos que todas as multiplicações apresentaram o produto com o sinal adequado e a simplificação na eliminação dos parênteses foi realizada com sucesso.

Com base nos resultados apresentados por meio da aplicação deste teste, e relacionando estes resultados com as nossas categorias de análise, apontamos algumas considerações. Com relação ao nível I, onde os relativos são tratados como os naturais, percebemos que os alunos não operam os relativos como se fossem naturais, uma vez que eles atendem as especificidades dos sinais, como foi apresentado nas figuras 25 e 26. Embora esses alunos não tenham efetuado o cálculo adequadamente, eles operaram os números considerando a sua condição de ser positivo ou negativo.

No que diz respeito ao nível II, em que os negativos são tratados separadamente dos positivos, percebemos que os alunos consideram o conjunto dos relativos como um todo. Isto porque as adições algébricas são efetuadas por meio de deslocamentos sobre a reta numérica dos inteiros. Embora nem sempre tenham sucesso em suas movimentações, como apresentamos no decorrer da análise das respostas, mesmo assim, não percebemos uma separação entre positivos e negativos na realização dos procedimentos de cálculo.

Percebemos que o nível III foi alcançado parcialmente pelos alunos. Neste nível de compreensão, a reta numérica é unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos. No que se refere à unificação da reta numérica, esta concepção parece ter se estabelecido, por meio das respostas obtidas por intermédio dos cálculos apresentados nas adições algébricas, uma vez que eles associam o cálculo a deslocamentos sobre a reta numérica. Contudo, no que diz respeito aos problemas aditivos serem resolvidos nos relativos, os alunos demonstraram dificuldades tanto para escreverem uma situação que representasse uma subtração, quanto para resolverem uma situação que envolvia a subtração de um número negativo, como nos mostraram os resultados das questões 4 e 5. Nas respostas encontradas para a questão 4, notamos o quanto a concepção de subtração ainda está atrelada a ideia de tirar. Esta concepção tão fortemente instituída nos naturais encontra agora dificuldades nos relativos.

Referente ao nível IV, onde os problemas multiplicativos são assimilados, percebemos por meio das questões 6 e 7 que os alunos conseguem efetuar adequadamente a multiplicação dos sinais, embora, muitas vezes, acabem errando no produto desses números. Observamos que, em relação ao teste aplicado para a multiplicação de números relativos, os alunos apresentaram um progresso considerável nos procedimentos realizados no cálculo das expressões numéricas. Antes, os alunos mal conseguiam apontar os erros na execução de uma expressão, agora já conseguem resolver uma expressão envolvendo a adição, a multiplicação e a subtração com números relativos, atendendo, assim, as nossas expectativas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho é uma tentativa de mostrar, em que medida o ensino dos números relativos conduzido por meio do “princípio de extensão” pode contribuir para minimizar os problemas enfrentados pelos alunos na multiplicação desses números. Historicamente, vimos que o processo de consolidação do conceito de número negativo sofreu hesitações tanto na comunidade dos matemáticos, quanto na comunidade dos professores. A procura por um bom modelo que explicasse a multiplicação $- \times - = +$, só se resolve quando a matemática acadêmica assume que não há significado na natureza que explique esse produto. Então, a academia passa a buscar um significado produzido com base nos princípios internos da própria matemática.

Se, historicamente, o processo de consolidação do número negativo enfrentou problemas ao procurar um bom modelo que explicasse a regra de sinais entre dois números negativos, ainda, hoje, passados mais de um século, presenciamos esse tipo de abordagem, em grande parte, dos livros didáticos. Então, sentimos a necessidade de buscar subsídios teóricos que fundamentassem a nossa sequência didática, na tentativa de amenizar os obstáculos enfrentados pelos alunos no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem dos relativos.

Nesse sentido, percebemos, por meio da nossa experiência, que o ensino da adição de números relativos, conduzido através de deslocamentos sobre a reta numérica, proporcionou aos alunos uma aprendizagem desprendida de regras pré-estabelecidas. Assim, os alunos por meio das movimentações, realizadas na reta numérica, foram capazes de sinalizar a formação de generalizações a respeito das regras de sinais para a adição de números inteiros.

Como o ensino da adição foi conduzido, atendendo o “princípio de extensão”, opondo-se ao modelo comercial, a maioria dos alunos não associou a ideia de ganho a um número positivo e a ideia de uma perda a um número negativo. Esse fato contribuiu para que os alunos aceitassem que o produto de dois números negativos precisa ser positivo para atender as condições internas da própria matemática.

Um forte exemplo de como o modelo comercial cria obstáculo na compreensão das propriedades multiplicativas dos números negativos, pode ser observado por meio da justificativa apresentada por um aluno, como nos mostra a figura a seguir:

Figura 38 - Justificativa apresentada pelo aluno 07

$(+20) + (-7) =$ +13	Tenho 20 reais dei 7 e fiquei com +13 reais.
$(+6) \times (+15) =$ +90	gostei em 6 dias 15 reais no final de 1 ano com 10 reais
$(-8) - (+3) =$ -11	em 8 dias gostei paguei 3 reais.
$(-9) \times (-4) =$ +36	deu 9 x 4 reais me pagou no final de mês paguei 36 reais.

Aqui o modelo comercial funcionou para explicar as operações.

Neste caso, o modelo comercial impediu o sucesso da resposta.

Fonte: Dados da pesquisa (2012)

Este exemplo corrobora o que vimos tentando mostrar ao longo deste trabalho. Apesar de toda uma sequência didática planejada a fim de não associar o número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda, por exemplo, esta concepção trazida de experiências anteriores não foi abalada. Nas justificativas apresentadas por esse aluno, percebemos, sem sombra de dúvidas, que o modelo comercial que serviu para explicar as propriedades aditivas e até mesmo algumas multiplicativas encontrou obstáculos para explicar a multiplicação entre dois números negativos.

Por meio das respostas obtidas pela aplicação dos testes, principalmente na terceira e na quarta questão do teste da adição, e, na quarta e quinta questão do teste da subtração, percebemos que as atividades que exigiram uma conversão de registros nem sempre foram resolvidos com sucesso. Isso porque as situações de ensino, em que a congruência semântica se destacou da equivalência referencial, seguindo Duval (2012), contribuíram para um número menor de acertos em relação aos casos em que a congruência semântica e a equivalência referencial conduziam aos mesmos resultados, como os resultados apresentados na primeira questão do teste da subtração.

Alertamos para o fato de que é preciso que o professor tenha um olhar atento a essas questões. Propor diferentes formulações para um mesmo tipo de problema pode ser um caminho que ajude a diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos, quando não há congruência semântica entre a situação e a expressão matemática correspondente. A utilização de vários registros de representação semiótica e a atividade de conversão, também, se mostram importantes neste processo, no sentido de conduzir o aluno a apropriação do objeto matemático.

Nessa direção, a variedade de registros utilizados para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação com números

relativos, poderá contribuir para que o aluno tenha uma ideia global a respeito do objeto matemático, permitindo, desse modo, que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

Na nossa sequência didática, a regra de sinais da multiplicação foi apresentada por meio de uma sequência de produtos, como a sugerida pelo Caderno 9 da Coleção NCTM (*apud* PONTES, 2010) e também de acordo com a demonstração sugerida por Moretti (2012), ambas utilizando argumentos aritméticos. Observamos nas reações dos alunos que a justificativa apresentada pelo Caderno 9 obteve uma melhor receptividade. Acreditamos que esta aceitação possa estar associada, de certo modo, ao fato de nós termos mobilizado os conhecimentos que já estavam ao alcance da maior parte dos alunos. Essa mobilização aconteceu no momento em que apresentamos, primeiramente, a multiplicação de dois números positivos e de um número positivo por um negativo através de deslocamentos sobre reta. Depois, para completar a sequência fizemos uma análise dos produtos que foram surgindo e, nesse momento, os alunos perceberam que para continuar a sequência, ou seja, para atender as regras inerentes à matemática, o $- \times -$ precisa ser $+$.

As simulações de multiplicação, utilizando as regras $- \times - = +$ e $- \times + = -$, apresentadas por Moretti (2012), que foram utilizadas na nossa sequência didática, reforçaram a necessidade de que a única regra que atende as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição é a regra usual. Apesar do seu caráter teórico estar a frente da capacidade de abstração dos alunos, culminando na sua baixa aceitação, os alunos também puderam constatar que a regra usual precisa ser mantida a fim de atender as regras específicas que fundamentam a matemática.

Após a apresentação da operação da adição, apresentamos a operação de multiplicação e, por fim, apresentamos a operação de subtração. Na apresentação da operação de subtração, utilizamos a regra de sinais da multiplicação, a fim de simplificarmos as expressões e obtermos uma soma algébrica. Com a expressão simplificada, os deslocamentos sobre a reta numérica tornaram-se possíveis e os cálculos puderam ser solucionados.

No momento que aconteceu a sequência de ensino da subtração, percebemos que os alunos já dominavam melhor as operações de adição e multiplicação. No entanto, o conceito de subtração nos relativos encontrou dificuldades, isto porque a concepção de subtração, que os alunos apresentaram, estava fortemente relacionada a ação de tirar. Como o foco do nosso trabalho foi a multiplicação, ficamos surpresos ao

ver emergir dos resultados dos testes esse obstáculo. Enquanto professora, continuamos atuando na turma até o final do ano letivo e tivemos condições de reverter essa situação, mas, como pesquisadora, pensamos que esse seria um tema para estudos posteriores.

A análise dos testes, orientados pelas categorias de análise, ancoradas na hierarquia das concepções estabelecidas por Coquin-Viennot (1985), possibilitou identificar os níveis de compreensão na qual os alunos se encontraram no final da aplicação da sequência didática. Nossas categorias de análise pautados na hierarquia das concepções são: Nível I - os números relativos são tratados como naturais; Nível II - os negativos são tratados separadamente dos positivos; Nível III - a reta numérica é unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos; Nível IV - os problemas multiplicativos são assimilados.

Acreditamos que o nível I tenha sido ultrapassado pela maioria dos alunos, pois as respostas apresentadas nos testes, principalmente na segunda questão do teste da adição e na primeira questão do teste da subtração, mostraram que os relativos não são mais tratados como se fossem naturais. Isso porque a operação de adição não foi associada a cálculos contábeis, ela esteve relacionada a realização de movimentações na reta numérica.

A operação de adição sendo apresentada como deslocamentos sobre a reta numérica contribuiu para que os alunos ultrapassassem o nível II. Assim, os negativos não são tratados separadamente dos positivos, como nos apontaram os resultados da terceira questão do teste da adição e a primeira questão do teste da subtração. Essa forma de conduzir o ensino da adição acabou contribuindo para que os alunos percebessem que o conjunto dos números inteiros é uma união entre o zero, os positivos e os negativos.

A maior parte dos alunos da turma, após a aplicação da sequência didática, encontrou-se nos níveis III e IV. Alguns, ainda, em processo de transição. Com relação ao nível III, percebemos que a reta numérica foi unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos inteiros, como nos apontaram os resultados da terceira questão do teste da adição e da primeira questão do teste da subtração. No entanto, os problemas subtrativos não foram alcançados pelos alunos, como nos mostraram os resultados da quarta e da quinta questão do teste da subtração. Os alunos não conseguiram se libertar da concepção de subtração atrelada a ideia de tirar, concebida nos naturais, e ampliar essa concepção nos relativos em que a subtração desses números significa trabalhar com operadores negativos que operam transformação de posição.

O nível IV foi atingido por um pequeno grupo de alunos, como nos mostrou o resultado da sexta e da sétima questão do teste da subtração e da segunda questão do teste da multiplicação. Esses alunos assimilaram os problemas multiplicativos, dominando completamente as operações de adição, subtração e multiplicação nos relativos. Isto indica que os demais alunos ainda se encontram em processo de transição. Contudo, os resultados apresentados, na terceira questão do teste da multiplicação [81,1% de acertos no cálculo da multiplicação $(-7) \times (-4)$], nos levam a acreditar que a multiplicação entre dois números negativos parece ter sido alcançada pela maioria dos alunos, após a nossa intervenção didática.

Como o nosso contato com a turma não se encerrou ao final da aplicação da sequência didática, continuamos observando os resultados da aplicação dessa sequência a longo prazo. E podemos relatar que foi muito bom poder participar de uma experiência completamente inovadora. Apesar de atuarmos como professora há dezoito anos no ensino fundamental, esta foi a primeira vez que apresentamos os números relativos e as suas operações de adição, multiplicação e subtração, atendendo ao “princípio de extensão”. Na nossa prática, sempre buscávamos exemplos práticos, do cotidiano dos alunos para introduzir e ensinar as propriedades aditivas dos números inteiros. Porém, quando chegava o momento da apresentação da multiplicação desses números, virávamos a página da contextualização e abríamos a página da dogmatização. Com esta postura, percebíamos a grande confusão que se estabelecia entre as regras de sinais da adição e da multiplicação de números inteiros nas situações de ensino.

Contudo a experiência que vivenciamos, nesse ano, conduzindo o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração atendendo o “princípio de extensão”, nos fez perceber que aquela confusão entre as regras de sinais da adição e da multiplicação foram quase extintas. Mesmo porque as regras para a adição foram construídas pelos alunos num processo de generalizações por meio dos deslocamentos sobre a reta numérica e, em nenhum momento, elas foram primordiais na solução de um cálculo.

Desse modo, a regra de sinais para a multiplicação dos inteiros pode ser apresentada sem nenhum constrangimento. Ela aconteceu num processo natural como uma continuidade da adição. A multiplicação de dois números positivos ou de um número positivo por um negativo seguiu a ideia de deslocamentos sobre a reta. Assim, os alunos num processo de observação, de experimentação, de tentativas e erros foram capazes de fazer generalizações, percebendo que a multiplicação entre

dois números negativos precisa ser positivo, a fim de atender as regras da consistência interna da própria matemática.

Os desafios que permanecem no processo de ensino e aprendizagem dos números relativos exigem a continuação das pesquisas, principalmente, no que se refere aos fenômenos da congruência semântica. Nesse sentido, as reflexões presentes, neste trabalho, não se esgotam, mas nos remetem a alguns questionamentos que poderão apontar estudos posteriores. Por que a subtração de números inteiros é apresentada, nos livros didáticos, sempre após a operação de adição? Quais as implicações, no ensino, de se apresentar a operação de subtração de números inteiros após a operação de multiplicação? Como conduzir o processo de ensino da subtração de números relativos, a fim de ampliar a concepção que os alunos apresentam dessa operação concebida nos Naturais? Quais os obstáculos enfrentados pelos alunos na conversão de situações que apresentam números inteiros em que a congruência semântica se destaca da equivalência referencial? Resumidamente, essas são algumas das reflexões que emergem do nosso trabalho, que podem apontar desdobramentos para futuras pesquisas.

REFERENCIAS

- ALVES, E. L.; MAIA, L. S. L. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** 1 CD-ROM.
- ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos**: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_86.pdf. Acesso em: 10 out. 2012.
- ASSIS NETO, F. R. de. Duas ou três coisas sobre o “menos vezes menos dá mais”. Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.
- BASTOS, M. S. O livro didático nas aulas de matemática: Um estudo a partir das concepções dos professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Pernambuco. **Anais...** 1 CD ROM
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática (7º ano)**. São Paulo, SP: Moderna 2006.
- BORBA, R. ; GUIMARÃES, G. (Orgs). **A pesquisa em educação matemática**: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.
- BOYER, Carl. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC, 2010.

CALDEIRA, A. D. Educação matemática: indivíduo, sociedade e cultura. In: GUÉRIOS, E; STOLTZ, T. **Educação, inclusão e exclusão social**: contribuições para o debate. Curitiba: Aos Quatro Ventos, 2007. p. 119-127.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1963.

CARVALHO, A. L. T ; REIS, L. F. **Aplicando a matemática (7^o ano)**. São Paulo, SP : Casa Publicadora Brasileira, 2010.

CENTURIÓN, M ; JAKUBOVIC, J. **Matemática na medida certa (7^o ano)**. São Paulo, SP : Scipione, 2010.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. São Paulo, SP : Cortez, 1991.

CID, E. Obstáculos epistemológicos em la enseñanza de los números negativos. In: JORNADAS DEL SEMINÁRIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EM DIDÁTICA DE LÃS MATEMÁTICAS, 15., 2000. **Anais eletrônico...** Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf>
Acesso em: 15 set. 2012.

COLOMBO, Janecler A. A; FLORES, Claudia R.; MORETTI, Méricles Thadeu. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 9, p. 180-203, 2007. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/>. Acesso em: 16 mar. 2012.

COLOMBO, Janecler A. A; FLORES, Claudia R.; MORETTI, Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetikè**, v. 16, p. 41-72, 2008. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/> Acesso em: 15 jan. 2012.

COQUIN-VIENNOT, Danièle. Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. **RDM**, v. 6, n. 2.3, 1985.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da matemática** e outros ensaios. São Paulo, SP: Grijalbo, Ed. USP, 1971.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática (7º ano)**. São Paulo, SP: Ática, 2010.

DAMM, R. F. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática**. 2ª ed. São Paulo, SP: Papyrus, 2005. p. 35-47.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales**. Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo**. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 1999.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticas y aprendizajes intelectuales. Colombia: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática**. 2. ed. São Paulo: Papyrus, 2005. p. 11-33.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012. Disponível em:

<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em : 14 set. 2012

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006. Disponível em : <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em : 14 set. 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 21. ed. São Paulo, SP: Paz e Terra, 2002.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy ; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: ed. renovada (7^o ano). São Paulo, SP: FTD, 2009.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM**, v.2., n.3, 1981.

IEZZE, G; DOLCE. O; MACHADO, A. **Matemática e Realidade (7^o ano)**. São Paulo, SP: Atual, 2009.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática (7^o ano)**. São Paulo, SP: Moderna, 2009.

JOSEPH, G. G. **La Cresta Del Pavo Real**: lãs matemáticas y SUS raíces no europeas. Madrid: Pirâmides, 1991.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papyrus, 1997.

LUDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **A Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo, SP: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**. São Paulo, SP: EDUC, 2008.

MARANHÃO, M. C. S. A; CAMEJO, A; MACHADO, S. Relatos em torno do cálculo de um aluno do 2^o ano do Ensino fundamental.

Zetetiké, Unicamp, v. 16, n. 29, 2008. Disponível em:
<http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/>. Acesso em: 25 set. 2012.

MEDEIROS, A. ; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema**, Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MICHAELIS. **Dicionário prático da língua portuguesa**. São Paulo: Ed. Melhoramentos, 2009.

MICOTTI, M. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação matemática: concepções & Perspectivas**. São Paulo: Ed.UNESP, 1999. p. 153-167.

MORETTI, D. M; BORBA, R. E. S. R. O que os alunos já sabem antes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 1 CD ROM.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012. Disponível em:
<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC36384011468.pdf>.
Acesso em: 10 mai. 2012.

MORI, I; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e Desafios** (7^o ano). São Paulo, SP: Saraiva, 2009.

NASCIMENTO, R. A. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 1 CD-ROM.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática, 2008.

OLIVEIRA, V. C. A.; ARAÚJO, A. C. S. Um estudo sobre a produção de significados para números relativos. In: ENCONTRO NACIONAL

DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...1**
CD ROM.

PASSONI, J. C. (Pré-) **Álgebra**: introduzindo os números inteiros. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação matemática). PUC/SP, 2002. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joao_passoni.pdf. Acesso em: 14 jun. 2011.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação matemática**. São Paulo, SP: EDUC, 2008. p. 11-48.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PROJETO ARARIBÁ. **Matemática (6^a série)**. São Paulo, SP: Moderna, 2006.

RIBEIRO, J. S. **Projeto radix (7^o ano)**. São Paulo, SP: Scipione, 2010.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. **Bolema**, Rio Claro, Ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação matemática**: uma (nova) introdução. EDUC, São Paulo, 2008. p. 49-75.

SOUZA, J; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática (7^o ano)**. São Paulo, SP: FTD, 2009.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posição**, v. 4, n. 1, março, 1993. Disponível em

<http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/home67.html>. Acesso em: 10 set. 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGCT Mestrado em Educação Científica e Tecnológica Termo

Meu nome é Selma Felisbino Hillesheim. Sou mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. Juntamente com meu orientador, Professor Doutor Méricles Thadeu Moretti, estou desenvolvendo a pesquisa: Os números relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais.

O objetivo dessa pesquisa é organizar e aplicar uma sequência de ensino que aborde os números inteiros relativos pelo *princípio de extensão* e verificar as suas possíveis contribuições no processo de ensino e aprendizagem.

O princípio teórico metodológico desta pesquisa é de ordem qualitativa, fazendo-se, no entanto, uso da estatística descritiva na elaboração de tabelas, gráficos, percentuais, se necessário. Nesse sentido, os instrumentos de investigação serão:

- a) a observação participante na turma do 7º ano;
- b) teste sobre os Números Inteiros Negativos e suas operações.

Nós garantimos que as informações fornecidas pelos alunos serão utilizadas apenas nesta pesquisa e que o nome do (a) aluno e da escola serão mantidos no anonimato.

Em caso de alguma dúvida, mesmo após a realização da pesquisa, colocamo-nos à disposição para maiores esclarecimentos através do e-mail selmafh@yahoo.com.br ou ainda pelo telefone (48) 99130371.

Assinaturas:

Selma Felisbino Hillesheim: _____

Eu, _____, fui esclarecido(a) sobre a pesquisa: OS NÚMEROS RELATIVOS EM SALA DE AULA: PERSPECTIVAS DE ENSINO PARA A REGRA DE SINAIS e concordo que meu filho(a) participe da sequência de ensino.

São José, _____ de _____ de 2012.

Assinatura: _____ RG: _____

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Sequência didática

Para uma melhor organização de nosso trabalho, nossa sequência didática foi dividida em três blocos de ensino. No primeiro bloco, trabalhamos com atividades relacionadas à adição de números inteiros relativos em que o processo de ensino foi conduzido, principalmente, usando-se o procedimento de deslocamento sobre a reta numérica dos inteiros relativos, não associando a ideia de um número positivo a um ganho, nem a ideia de um número negativo a uma perda. Demos destaque ao sinal predicativo e ao sinal operatório, a fim de que os alunos pudessem compreender suas diferenças. Mesmo não enfatizando a associação de um ganho a um número positivo e uma perda a um número negativo, estivemos propondo atividades que apresentaram esse tipo de situação para que os alunos pudessem ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos percebendo as diferenças entre sinal predicativo e sinal operatório. Para a realização desse bloco de atividades foram previstas de 7 a 8 aulas de 45 minutos.

No segundo bloco, apresentamos a multiplicação de números inteiros relativos baseado no Teorema de Hankel que tem por base a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos. Estivemos também pautados no resultado apresentado na pesquisa realizada por Pontes (2010), apresentando a multiplicação dos números inteiros numa abordagem aritmética vislumbrando possíveis generalizações. A previsão para a realização e aplicação das atividades deste bloco de ensino foi de 7 a 8 aulas de 45 minutos.

No terceiro bloco, apresentamos a subtração de números inteiros. Uma vez que os alunos já se apropriaram da regra de sinais para a multiplicação desses números, puderam fazer uso dessa regra nas simplificações das expressões numéricas e efetuarem os cálculos adequadamente. Optamos por apresentar a operação de subtração após a multiplicação, pois acreditamos que essa atitude poderá facilitar a aprendizagem desta operação, uma vez que expressões do tipo $(+5) - (-3)$ precisam ser simplificadas e escritas como $+5 + 3$ para serem operadas. Os livros didáticos apresentam como alternativa de resolução desta operação a estratégia de se escrever a subtração como a soma do oposto, por isso apresentam a operação de subtração antes da multiplicação de números inteiros. No entanto, a nosso ver, essa postura

poderá trazer dificuldades para o ensino desta operação por apresentar-se de forma arbitrária. Para a realização das atividades desse bloco a previsão foi de 3 aulas de 45 minutos.

Bloco I – Adição de números inteiros

Objetivos:

- compreender os processos usados para a adição de números inteiros na reta numérica;
- resolver situações problemas envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a adição de números inteiros relativos;
- diferenciar os sinais operatórios dos sinais predicativos.

1ª aula: A professora começou a aula pedindo para que os alunos desenhassem um prédio de apartamentos com 1 andar térreo, 9 andares acima do térreo, e 2 andares de garagens abaixo do térreo. A seguir, representaram cada andar desse prédio por um número inteiro. Então, a professora problematizou: Em que andar se encontra o elevador quando:

- a) partindo do térreo, subir 7 andares e, em seguida, subir mais 2 andares; _____
- b) partindo do primeiro andar, descer 3 andares; _____
- c) partindo do terceiro andar, subir quatro andares e, em seguida, descer 7 andares; _____
- d) partindo do térreo, descer 2 andares e, em seguida, subir 1 andar. _____

E, a partir desta situação direcionou o diálogo com a turma questionando a possibilidade de desenharmos o prédio na posição horizontal, como ele ficaria? Levando os alunos a perceberem as similaridades com a reta dos inteiros. E, então sobre a reta dos inteiros desenhada no quadro na posição horizontal, definiram como sentido positivo para os deslocamentos feitos para a direita, e, como sentido negativo os deslocamentos feitos para a esquerda. A professora propôs várias situações de deslocamento sobre a reta numérica e em conjunto com a turma determinou o ponto de chegada. Depois, a professora colocou no chão da sala um segmento de reta numerada, confeccionada com papel pardo, e disse que tínhamos ali uma “pista” e sobre esta pista nós iríamos nos deslocar como fizemos no quadro com a reta numérica, e pediu a participação dos alunos para fazerem os deslocamentos sobre a

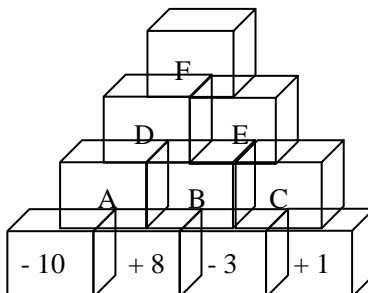
pista. Os alunos foram organizados em duplas, um aluno se deslocou na pista e o outro ditou o direcionamento, fazendo seus registros no quadro e no final registrou o ponto de chegada, por exemplo: João e José formaram uma dupla. João andou sobre a pista e José falou a sua trajetória aleatoriamente e anotou no quadro, assim: $(-2) + (+3) + (-1) + (+4) + (-5) = -1$. Nesse caso, o -1 representou o ponto de chegada. Na sequência, a professora chamou outras duplas para participarem da atividade.

2ª aula: No início da aula a professora fez uma retrospectiva da aula anterior e propôs a lista de atividades a seguir, que foi realizada em grupos de três alunos, contando com o auxílio da professora, e ao final da aula a professora recolheu a atividade.

1) Desenhe uma reta numérica. Partindo do zero, determine o número de chegada quando andamos:

- + 2, e em seguida, +7; _____
- 2, e em seguida, - 5; _____
- + 4, e em seguida, + 2; _____
- + 3, e em seguida, - 8; _____
- 3, e em seguida, +8; _____
- 1, e em seguida, - 3; _____

2) Cada letra equivale à soma dos números dos dois blocos imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto da pilha. (Faça o registro dos cálculos)



4) Efetue:

a) $(-8) + (+3) + (+2) + (-1) + (+3) =$ _____

b) $12 + (-13) + (-4) + (+5) + (-3) + 0 + (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $-3 + (+7) + (-6) + (+8) + (-3) + (+15) + (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $(-25) + (+3) + (-18) + (+21) + (-30) + (-16) = \underline{\hspace{2cm}}$

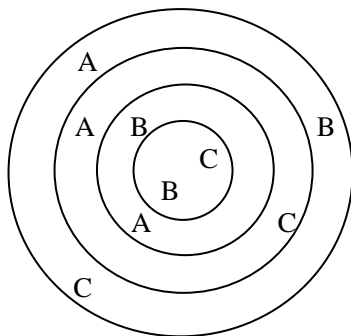
Explique qual foi o procedimento para resolver as expressões acima:

3ª aula: Nesta aula, a professora retomou as questões da aula anterior, procurando tirar as dúvidas dos alunos. Depois, organizou a classe em grupos de 4 ou 5 alunos para aplicar o jogo do tiro ao alvo. Cada equipe recebeu um alvo colorido, desenhado num pedaço de cartolina, e grãos de milho. Cada cor do alvo teve como valor um número inteiro, que foi decidido entre a classe e a professora. Estabelecido os valores, cada participante do grupo jogou o milho cinco vezes no alvo, montando a sua expressão numérica e calculou a sua pontuação. Cada integrante do grupo esteve atento aos cálculos do colega, para que não ocorressem somas erradas e falsas pontuações. Após a realização dos cálculos, da primeira rodada, repetiu-se o mesmo procedimento para a segunda, terceira e quarta rodadas. Ao final, cada equipe somou a sua pontuação geral e a equipe vencedora recebeu uma salva de palmas da turma. Logo após, a professora distribuiu para cada aluno um pirulito como uma forma de premiação pela participação, deixando claro, que nesse jogo todos somos vencedores, pois conquistamos o melhor prêmio que foi a aprendizagem.

4ª aula: A professora iniciou a aula questionando a turma sobre o que acharam da aula anterior? Em seguida, registrou no quadro as conclusões que a turma chegou e verificou se a turma já conseguia fazer algum tipo de generalização sobre a adição de números inteiros. No caso positivo, a professora institucionalizaria esse conhecimento, no caso de ser negativo, induziria a turma, fazendo perguntas e problematizando. Até que eles comessem a perceber que quando os números apresentam o mesmo sinal deveriam somar os valores absolutos dos números permanecendo com o mesmo sinal, e quando eles possuísem sinais diferentes deveriam diminuir permanecendo o sinal do número que apresentasse maior módulo. Mas, isso não foi imposto pela professora,

são ideias que deveriam emergir da classe após os debates. Em seguida, a professora propôs uma lista de atividades para ser feita em dupla, com o auxílio da professora, e entregue ao final da aula.

1) Pinte os discos abaixo na seguinte ordem, de dentro para fora: preto, amarelo, verde, laranja. André, Beto e Carlos estão jogando dardos. Veja os dardos que cada um deles arremessou:



Cor	Pontos
Preto	+9
Amarelo	+4
Verde	- 2
Laranja	- 6

Cada letra no disco corresponde ao dardo arremessado pelo seu respectivo jogador. Assim, a letra A representa os dardos de André, B os dardos de Beto e C os dardos de Carlos. Agora responda:

- Quantos pontos André fez? _____
- Quantos pontos Beto fez? _____
- Quantos pontos Carlos fez? _____
- Quem fez menos pontos? _____
- Quem venceu o jogo? _____

2) Observe as sequências de números:

- a) 12, 7, 2, -3, -8, -13,...

Como essa sequência foi formada? _____

- b) -7, -3, +1, +5, +9, +13,...

Como essa sequência foi formada? _____

3) Calcule:

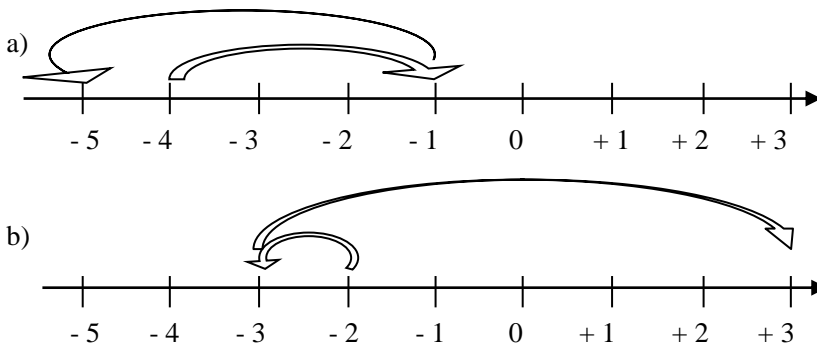
a) $2 + (-2) + 0 + (-1) + (-3) + (+6) =$

b) $(-10) + (+15) + (-28) + (+46) + (-28) + (-15) + (+13) =$

c) $(+26) + (-15) + (+65) + (-48) + (+23) + (-6) + (+11) =$

d) $45 + (-32) + (+59) + (-18) + (+21) + (-33) + (+45) =$

4) Escreva a expressão numérica que representa o desenho a seguir:



5ª aula: A aula iniciou com o diálogo entre a turma e a professora sobre as estratégias que foram utilizadas para resolver a lista de atividades da aula anterior, juntamente com a correção coletiva das mesmas. Os alunos tiveram a oportunidade de colocar para o grande grupo, a maneira que usaram para resolver os cálculos que foram propostos. E nessa exposição de ideias um ajudou o outro a entender e a encontrar maneiras diferentes e mais rápidas para efetuarem o mesmo tipo de cálculo. Após o debate a professora registrou no quadro as conclusões a que o grupo chegou.

6ª aula: A professora deu continuidade à aula anterior propondo uma lista de atividades que foram realizadas em grupos de três alunos, contando com o auxílio da professora.

1) Joana ganha 40 reais de sua mãe. Compra um livro por 30 reais. Seu pai lhe dá 8 reais. Joana vai ao cinema e gasta 13 reais.

a) Escreva uma expressão numérica que represente o saldo de Joana. _____

b) Qual é o saldo de Joana? _____

2) Desenhe uma reta numérica e represente nela, através de flechas, os seguintes movimentos:

a) $+8 + (+5) + (-13)$

b) $-4 + (+2) + (+5)$

3) Num certo dia de inverno a temperatura na cidade de Lages era 8°C e caiu 10°C durante a madrugada.

a) Escreva uma operação com números inteiros que represente a situação. _____

b) Qual a temperatura registrada durante a madrugada? Justifique _____

4) Complete o quadrado mágico sabendo que a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais é sempre a mesma.

2		- 2
	-1	
		- 4

5) Dona Judite foi ao banco e verificou a movimentação de sua conta corrente.

Data	Descrição	Valor	Saldo
21/04	Depósito	+ R\$ 120,00	+ R\$ 165,00
23/04	Cheque debitado	- R\$ 87,00	
02/05	Saque	- R\$ 65,00	
05/05	Depósito	+ R\$ 415,00	
12/05	Saque	- R\$ 390,00	

De acordo com a tabela, responda:

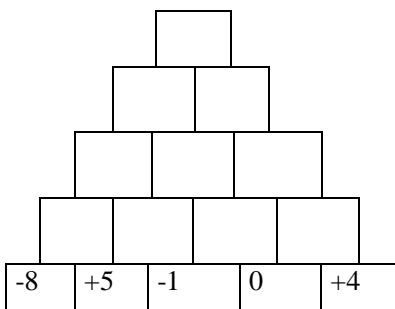
a) Qual era o saldo ao final do dia 23/04? _____

b) Qual era o saldo anterior ao depósito de R\$ 120,00? _____

c) Em quais dias o saldo ficou negativo? O que isso representa? _____

d) Em quais dias o saldo ficou positivo? O que isso representa?

6) Complete a pirâmide sabendo que o tijolo acima é a soma dos dois tijolos que o sustentam.



7ª aula: Nesta aula a professora aplicou um teste para verificar a aprendizagem da adição de números inteiros. Esse teste foi realizado individualmente e se encontra no apêndice C.

Bloco II – Multiplicação de números inteiros

Objetivos:

- compreender os processos usados para a multiplicação de números inteiros aplicando a ideia de extensão da propriedade distributiva dos números positivos para o caso dos números negativos;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a multiplicação de números inteiros;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição e multiplicação de números inteiros.

1ª aula: A professora iniciou a aula retomando a adição algébrica de números inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta numérica dos inteiros. Assim, introduziu a multiplicação de dois números inteiros positivos como sendo o deslocamento desse número tantas vezes como um dos fatores determinar, por exemplo: $(+2) \times (+3) = (+3) + (+3) = +6$. Ou seja, na reta dos números inteiros vamos ter dois deslocamentos de 3, partindo do zero, no sentido positivo e chegaremos no seis positivo. Nesse primeiro momento também foi apresentado à multiplicação de um número positivo por um número negativo, de maneira análoga a apresentada anteriormente. A multiplicação de um número negativo por outro número negativo esteve embasada no exemplo apresentado no caderno 9 da Coleção NCTM que apresenta o produto da multiplicação de dois números inteiros como uma sequência, cujo produto positivo é uma condição com vistas a manutenção da consistência interna da matemática, atendendo ao “princípio de extensão” de Caraça (1963). Como exemplo, a sequência de produtos:

$$\begin{array}{l}
 3 \times 4 = 12 \\
 2 \times 4 = 8 \\
 1 \times 4 = 4 \\
 0 \times 4 = 0 \\
 -1 \times 4 = -4 \\
 -2 \times 4 = -8 \\
 -3 \times 4 = -12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3 \times -4 = -12 \\
 2 \times -4 = -8 \\
 1 \times -4 = -4 \\
 0 \times -4 = 0 \\
 -1 \times -4 = +4 \\
 -2 \times -4 = +8 \\
 -3 \times -4 = +12
 \end{array}$$

Esta justificativa foi apontada na pesquisa realizada por Pontes (2010) como sendo a mais eficaz para o entendimento da regra de sinais, na opinião dos alunos da atualidade. Mas, também problematizamos utilizando a ideia Hankel que propõe a regra de sinais usual como a única que preserva a distributividade à direita e a esquerda. Dessa forma, colocamos a seguinte multiplicação para a classe e questionamos a turma a respeito de como poderíamos resolvê-la? $(1 - 4) \times (-5 + 1)$

- Eliminando os parênteses: $-3 \times (-4) = +12$

- Eliminando os parênteses à esquerda e usando a distributividade: $-3 \times (-5 + 1) = -3 \times (-5) - 3 \times (+1)$ como esse resultado deve ser o mesmo que o anterior, espera-se que os alunos cheguem a dizer que -3×-5 deve ser $+15$. Pois, $+15 - 3 = +12$.
- Eliminando os parênteses à direita e usando a distributividade: $(1 - 4) \times (-4) = 1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 + 16 = +12$

Para problematizar um pouco mais a professora sugeriu que se façamos os mesmos cálculos novamente, porém admitindo-se, segundo Moretti (2012), a possibilidade de $- \times -$ ser $-$. E teremos:

- Eliminando os parênteses: $(-3) \times (-4) = +12$
- Eliminando os parênteses à esquerda e usando a distributividade: $-3 \times (-5 + 1) = -3 \times (-5) - 3 \times (+1) = -15 - 3 = -18$.
- Eliminando os parênteses à direita e usando a distributividade: $(1 - 4) \times (-4) = 1 \times (-4) - 4 \times (-4) = -4 - 16 = -20$

Para finalizar a aula, a professora fez o levantamento juntamente com a turma sobre os pontos que eles perceberam ao se adotar $- \times - = -$. A seguir, fez juntamente com a turma a sistematização da regra de sinais para a multiplicação de números inteiros, fazendo o registro no quadro das conclusões que a turma chegou e dos pontos destacados pelos mesmos. Pretendia-se que eles chegassem à conclusão que é preciso adotar a regra usual para manter o mesmo resultado independente da maneira como os cálculos fossem efetuados.

2ª aula: A professora retomou a aula anterior pontuando a multiplicação de números inteiros e organizou a sala em grupos constituídos por 4 alunos. Cada grupo recebeu um jogo de dominó com a multiplicação de números inteiros. O intuito do jogo foi de proporcionar a fixação da regra de sinais que foi explorada na aula anterior de uma forma descontraída. O jogo constituiu-se por 28 peças feitas de cartolina e segue as regras do dominó tradicional, as pedras oferecem cálculos e respostas que devem ser colocadas na ordem correta. O jogador que não obter o resultado para jogar passa a vez para o próximo. Vence o jogo quem terminar as peças primeiro. E assim, passa para a próxima rodada. No final da aula a professora perguntou para a turma: como foi a aula? E, dessa forma, interagiu com eles buscando sanar e esclarecer as dúvidas que eles pudessem apresentar.

3ª aula: A aula foi iniciada com a professora perguntando para a turma:

- $(+ 2) \times (+ 5)$ é? Por quê?
- $(- 4) \times (+ 3)$ é? Por quê?
- $(- 5) \times (- 6)$ é? Por quê?

Após o debate com a turma a professora pediu para que eles se organizassem em grupos com três alunos para resolverem a lista de atividades a seguir, e ao término da aula foi recolhida pela professora:

1) Complete a sequência apresentada na tabela e responda:

$3 \times 12 = 36$
$2 \times 12 = 24$
$1 \times 12 = 12$
$0 \times 12 =$
$-1 \times 12 =$
$\times =$
$\times =$

a) O que acontece com o 1º fator quando se lê as contas de cima para baixo? _____

b) O que acontece com o 2º fator quando se lê as contas de cima para baixo? _____

c) O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo? _____

d) Com base no que você observou: “Um número negativo vezes um número positivo dá um produto _____”.

2) Agora observe e complete essa outra sequência apresentada na tabela e responda:

$4 \times (-8) = - 32$
$3 \times (-8) = -24$
$2 \times (-8) = - 16$
$1 \times (-8) =$
$0 \times (-8) =$
$\times =$
$\times =$

a) No que esta tabela difere da anterior? _____

b) O que acontece com o produto quando se lê as contas de cima para baixo? _____

c) Com base no que você observou: “Um número negativo multiplicado por número negativo dá um produto _____”.

3) Calcule e justifique o seu procedimento.

Cálculo	Justificativa
$(-3) \times (+4) =$	
$(-6) \times (-2 + 10) =$	
$(-7) \times (-2) + 4 - 2 \times (+6) =$	

4) Um avião estava a uma altitude de 400 metros. Para escapar de uma tempestade, o piloto subia 24 metros a cada 6 minutos. Qual foi a altitude atingida pelo avião após 30 minutos? Justifique sua resposta.

5) O professor João propôs a seguinte expressão para os alunos resolverem: $-5 \cdot (+3) - 4 \cdot (-10 - 3)$. Marcos e Juliana resolveram a expressão de modos diferentes veja:

Marcos	Juliana
$-5 \cdot (+3) - 4 \cdot (-10 - 3) =$	$-5 \cdot (+3) - 4 \cdot (-10 - 3) =$
$-15 - 4 \cdot (-13) =$	$-15 - 4 \cdot (-10) - 4 \cdot (-3) =$
$-15 + 52 =$	$-15 + 40 + (+12) =$
$+37$	$-15 + 40 + 12 =$
	$+37$

Com base nos cálculos realizados por Marcos e Juliana, responda:

a) Se eles resolveram os cálculos de modos diferentes, como eles conseguiram chegar ao mesmo resultado? _____

b) O resultado que eles chegaram está correto? Justifique. _____

c) Agora resolva do seu modo a expressão e justifique o seu procedimento.

Expressão	Justificativa
$-5 \cdot (+3) - 4 \cdot (-10 - 3) =$	

4ª aula: Nesta aula a professora retomou a adição e a multiplicação de números inteiros com o intuito de verificar se os alunos já conseguiam resolver as operações sem confusões entre os sinais a serem usados nas operações de adição e de multiplicação dos inteiros. Para isso a professora colocou no quadro operações de adição, de multiplicação e expressões envolvendo a adição e a multiplicação de números inteiros para serem resolvidas em conjunto com a turma. Por exemplo: $(-2) + (-4) = ?$, $(+13) + (-5) + (+8) + (-9) = ?$, $(-7) \times (-3) = ?$, $(+4 - 8) \times (-3) + 5 = ?$, etc. A seguir os alunos foram organizados em grupos com quatro alunos para realizarem as atividades propostas sendo recolhidas no final da aula:

1) Marque (V) se for verdadeira ou (F) se for falsa nas proposições a seguir.

- a. () O produto de um número inteiro por zero dá o próprio número.
- b. () Se um número inteiro não nulo for multiplicado por seu oposto, o resultado será sempre um número negativo.
- c. () Se um número inteiro não nulo for multiplicado por ele mesmo, o resultado será sempre um número positivo.

2) Justifique suas respostas dos itens da questão anterior.

a. _____

b. _____

c. _____

3) Escreva uma operação utilizando números inteiros que atenda aos critérios propostos:

Crítérios	Operação
A soma de dois números inteiros é -7	
O produto de dois números inteiros é $+10$	

4) Juliano e um amigo estão brincando de um jogo que tem as seguintes regras:

- Cada jogador inicia a partida com um saldo positivo de 10 fichas e deverá responder um total de 20 questões durante o jogo.
- A cada resposta correta o jogador recebe 3 fichas e a cada resposta incorreta perde 1 ficha.
- Será o vencedor aquele que tiver o maior saldo positivo de fichas.

a) Se Juliano acertar 10 questões, qual será seu saldo ao final do jogo?

b) Lorena, amiga de Juliano, acertou 15 questões. Qual foi seu saldo ao final do jogo?

c) Qual é o número de questões que um jogador deve acertar para ficar com 10 fichas ao final do jogo?

d) Qual é o maior número de fichas que um jogador pode acumular?

e) Nesse jogo é possível que um jogador fique com um saldo devedor de fichas. Qual é o número mínimo de questões que um jogador deve acertar para que isso não aconteça?

f) Existe a possibilidade de um jogador terminar o jogo com o saldo positivo de 1 ficha? Por quê?

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 50)

5ª aula: Esta aula foi utilizada para fazer um debate sobre as questões que foram propostas na aula anterior. A turma foi organizada formando uma circunferência e a professora devolveu as listas de atividades para cada aluno. A professora iniciou o debate pela questão 1 e pediu a participação da turma na discussão, levantando os principais aspectos da questão. Na sequência, a professora deu continuidade passando para as demais questões, sempre contando com a participação da turma. No final da aula a professora registrou no quadro os pontos que foram discutidos e sistematizados com a turma e pediu para que eles anotassem em seus cadernos, como uma forma de registrar o que foi discutido na sala de aula.

6ª aula: Nesta aula os alunos em duplas resolveram as seguintes atividades, contando com a assistência da professora para auxiliá-los nas dúvidas:

1) Analise cada uma das sequências e complete-as.

a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, _, _, _, _$

b) $-9, -6, -3, 0, 3, _, _, _, _$

c) $-8, -4, _, 4, 8, 12$

2) Utilizando os números apresentados na tabela, escreva uma operação para cada situação.

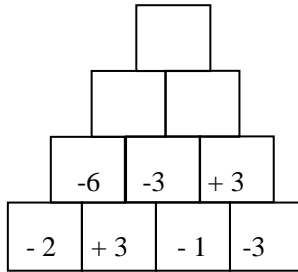
-4	3	-2	-8	+7	0
----	---	----	----	----	---

a) Uma multiplicação de dois fatores com resultado igual a $+32$ _____

b) Uma adição de três parcelas com resultado igual a -7 _____

c) Uma multiplicação de três fatores com o resultado igual a 24 _____

3) A pirâmide possui um “segredo”. Descubra o segredo e determine o número inteiro que deve estar no alto da pirâmide.



4) João tem uma coleção de miniaturas de 15 carros antigos. Durante um mês ele ganhou três novos carros, emprestou 2 e perdeu um carro. Quantos carros ele possui em sua estante neste momento? Qual das expressões abaixo representa o enunciado do problema?

a) $15 + 3 + 2 + 1$

b) $15 + (3 + 2 + 1)$

c) $15 + 3 - (2 + 1)$

d) $15 - 3 + (2 + 1)$

5) Complete a tabela:

a	b	a × b
-2	-3	
	+4	- 20
- 4		+32
+ 12	+ 8	

6) Escreva uma situação problema que possa representar a expressão numérica $(- 15) \cdot (+3) + (-2)$.

7) Efetue:

a) $(- 9) \cdot (+ 6) + (-15 - 1) \cdot (-2) =$

b) $-2 + 3 - 15 \cdot (-1) =$

c) $(- 18) + (- 3) - (- 4) \cdot (+ 6) \cdot (- 3) =$

7ª aula: Nesta aula a professora aplicou um teste sobre a multiplicação e a adição de números inteiros, realizado individualmente pelos alunos. Esse teste se encontra no apêndice D.

Bloco III – Subtração de números inteiros

Objetivos:

- compreender a lógica dos processos usados para a subtração de números inteiros aplicando a regra de sinais da multiplicação para simplificar as expressões do tipo $a - (-b)$ e $a - (+b)$;
- resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para a subtração de números inteiros relativos;
- resolver expressões numéricas envolvendo adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

1ª aula: A professora começou a aula propondo a seguinte situação problema: Numa certa noite de inverno na Serra catarinense os termômetros registraram $+4^{\circ}\text{C}$ no início da noite. Na madrugada desta mesma noite os termômetros chegaram a registrar -2°C . Quantos graus a temperatura variou nesta noite?

Com está situação a professora pediu a turma sugestões para solucionar o problema. Esperou-se que a turma mencionasse o desenho do termômetro, caso contrário a professora os direcionaria para tal. Com o desenho do termômetro feito e a solução do problema encontrada, a professora perguntou: Como podemos representar essa solução por meio de uma operação? Qual? Esperou-se que os alunos apontassem a subtração $-2 - (+4)$. Se este fato não ocorresse à professora faria várias simulações do tipo: Se a temperatura fosse de $+20^{\circ}$ e passasse para $+26^{\circ}$, qual seria a variação? Como vocês fizeram o cálculo? Até que eles apontassem a subtração como a operação a ser usada nessas situações. Depois de montada a expressão a professora atentou para a multiplicação dos sinais que deverá ser realizado a fim de simplificar a expressão para efetuar os cálculos. Assim: $(-2) - (+4) = -2 - 4 = -6$. A professora sugeriu que após a retirada dos parênteses o cálculo poderia ser efetuado por meio de deslocamentos sobre a reta numérica, como os realizados na adição. Após a explanação do assunto a professora pediu para que os alunos sentassem em dupla para realizarem as atividades que foram entregues e ao término da aula, recolhidas.

1) Um submarino encontra-se a $- 243$ metros de profundidade. Depois de duas horas, está a $- 180$ metros.

a) Ele subiu ou desceu? _____

b) Quantos metros? _____

2) Escreva uma operação que atenda aos critérios:

Crítérios	Operação
Uma subtração de dois números é $+4$	
A soma de três números é -5	
O produto de dois números é -16	

3) Complete as sentenças com os sinais $+$, $-$ ou \times .

a) $(-3) \underline{\quad} (-2) = - 1$

b) $(-2) \underline{\quad} (-5) = + 10$

c) $(+10) \underline{\quad} (- 14) = + 24$

d) $(-12) \underline{\quad} (- 3) = - 15$

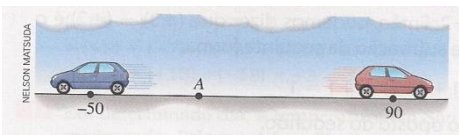
4) Efetue:

a) $(- 5) + (- 3) \times (- 2) =$

b) $(+ 8) - (- 13) =$

c) $(- 7) \times (- 5) - (- 2) =$

5) Os automóveis partiram da cidade A, mas em direções opostas. O primeiro percorre 50 km à esquerda de A, e o segundo 90 km à direita de A. Nessas condições, responda:



(Figura retirada do livro Matemática. BIANCHINI, p. 28, 2006)

- a) A distância entre eles aumentou ou diminuiu? _____
 b) Escreva uma operação que represente a situação: _____
 c) A que distância um carro se encontra do outro após o trajeto percorrido? _____

2ª aula: A professora começou a aula propondo o jogo das argolas. A sala foi dividida em grupos com 5 ou 6 alunos. Cada grupo recebeu um tabuleiro contendo 12 hastes presas verticalmente nele e 4 argolas, 2 azuis e 2 vermelhas. Cada uma das hastes presas ao tabuleiro representou um número, esses números estavam dispostos alternando um positivo e um negativo, como no esquema a seguir:

+16	-24	+4
-12	+20	-8
+8	-16	+24
+12	-20	-4

Neste jogo, as argolas vermelhas faziam você ganhar pontos e as azuis perder pontos. Por exemplo: Foram arremessadas as argolas vermelhas nos números -24 e +8, e as argolas azuis nos números +16 e -4 podemos escrever a expressão da seguinte forma:

$$0 + (-24) + (+8) - (+16) - (-4) = -28$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 Início ganha ganha perde perde

Cada jogador ao fazer sua jogada arremessou as quatro argolas e montou a sua expressão numérica efetuando os seus cálculos adequadamente. A seguir, passou-se a vez para o próximo e assim sucessivamente até que todos tenham completado a primeira rodada. O jogo foi concluído após o término da quarta rodada. Foi vencedor o aluno que alcançou o maior número de pontos na soma das quatro rodadas.

3ª aula: A professora iniciou a aula conversando com a turma sobre o jogo da aula anterior e levantou, juntamente com a turma, os pontos que eles acharam interessantes no jogo. A seguir fez os registros desses pontos no quadro para que eles pudessem anotar em seus cadernos.

Depois, pediu para que eles se sentassem em duplas para realizar o teste que se encontra no apêndice E.

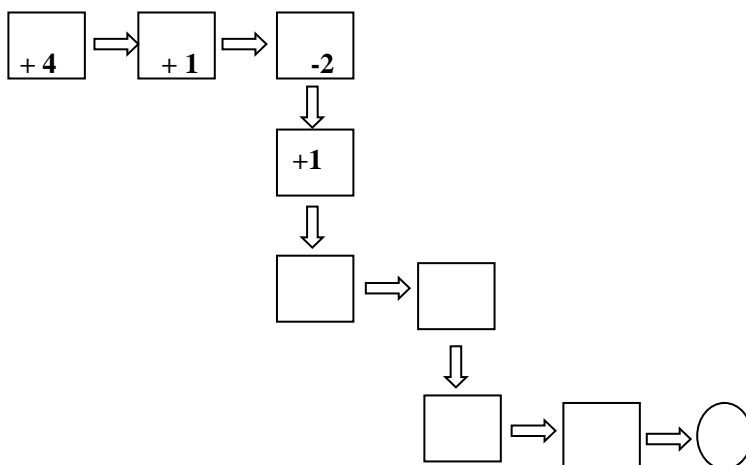
APÊNDICE C – TESTE DE ADIÇÃO

Teste da adição

1) Complete a trilha conforme a indicação das setas:

⇒ adicione - 3 (horizontal)

⇩ adicione + 3 (vertical)



Em que número você chegou? _____

2) Resolva as operações e justifique a sua resolução.

Operação	Justificativa
$+12 + (-5) =$	
$(+8) + (+9) =$	
$(-17) + (+3) =$	
$(-8) + (-5) =$	

3) Leia e responda as questões: Um caracol pretendia chegar ao topo de um muro; no entanto, subia alguns centímetros e escorregava outros.

- a) Certa vez ele subiu 8 cm e escorregou 6 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? _____
- b) Já em outra ocasião, ele subiu 9 cm, escorregou 15 cm e subiu 4 cm. Houve avanço ou retrocesso? De quanto? _____
- c) Represente, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos por ele no item **a**.
- d) Represente, por meio da reta dos inteiros, os movimentos feitos por ele no item **b**.

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 28)

4) Pedro está jogando bolinhas de gude. Na primeira partida perde seis. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, ele nem perdeu, nem ganhou. O que aconteceu na segunda partida? _____

5) Maria resolveu fazer bombons para vender. Foi então a uma doçaria para fazer o levantamento do custo da matéria prima. Veja a tabela:

Material	Gastos
Leite condensado	R\$ 18,00
Chocolate	R\$ 27,00
Formas para bombons	R\$ 6,00
Embalagens	R\$ 8,00

- a) Maria pensou em pedir R\$ 50,00 emprestado de sua mãe para comprar o material. Esse dinheiro seria suficiente? Por quê? _____
-
- b) Se Maria conseguisse comprar o material descrito acima e produzisse 150 bombons com ele. Se ela vendesse cada bombom por R\$ 2,00, teria lucro ou prejuízo? De quanto? _____

APÊNDICE D – TESTE DA MULTIPLICAÇÃO

Teste da multiplicação

1) Resolva as operações e justifique ao lado a sua resolução.

Operação	Justificativa
$+ 15 + (+ 6) =$	
$(-32) + (- 16) =$	
$- 12 + (+ 13) =$	
$(+ 20) + (- 7) =$	
$(+ 6) \times (+ 15) =$	
$(- 8) \cdot (+ 3) =$	
$(- 9) \times (- 4) =$	

2) Marcos vendeu sua moto, mas irá receber o dinheiro em 18 parcelas de R\$ 235,00.

a) Utilizando números inteiros, escreva uma expressão numérica que represente essa situação: _____

b) Qual o valor total que Marcos irá receber? _____

c) Se Marcos quiser comprar outra moto que custe R\$ 7.000,00, o dinheiro que irá receber será suficiente? Por quê? _____

3) Na figura, qual número inteiro deve ser colocado no lugar de cada letra?

- 7	.	- 4	=	A
=				+
+29				- 10
+				=
C	=	-2	×	B

4) Sérgio e Paulo estavam brincando com um jogo que funcionava segundo as regras: a cada resposta certa, o jogador anda 3 casas para frente; a cada resposta errada, anda 2 casas para trás. Ganharia o jogo quem primeiro alcançasse a 25ª casa. Os dois jogadores responderam a um total de 20 questões cada um. Sérgio acertou 12 e Paulo acertou 13.

- a) Quantas questões cada um deles errou? _____
 b) Quantas casas Sérgio andou para a frente? E para trás? _____
 c) Quantas casas Paulo andou para a frente? E para trás? _____
 d) Em qual casa cada um dos jogadores parou? _____
 e) Quem ganhou o jogo? _____

(PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 72)

5) Descubra o erro cometido por Jonas na resolução da expressão e responda:

$$(-3) \cdot (+19 + 6) + (+3) \cdot (-1) + 4 =$$

$$(-3) \cdot (+25) + (-3) + 4 =$$

$$-75 - 3 + 4 = 74$$

a) Qual foi o erro que Jonas cometeu ao resolver a expressão? _____

b) Será que este tipo de erro é comum? Por quê? _____

c) Como você resolveria essa expressão? (Demonstre seus cálculos)

APÊNDICE E – TESTE DA SUBTRAÇÃO





Teste da subtração

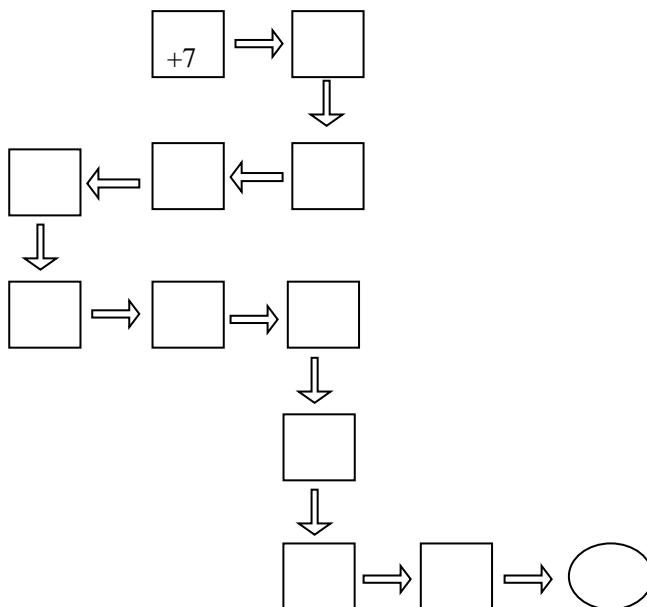
1) Durante as férias, Carla e Mateus foram para a serra. No início da viagem, ainda em sua cidade, Mateus verificou que a temperatura local era de 25°C . Já na serra, Carla viu que a temperatura era de 18°C . Qual foi a variação da temperatura ao longo da viagem?

2) Complete o quadrado mágico sabendo que a soma nas linhas verticais, horizontais e diagonais é sempre a mesma.

- 3		- 2
	0	
		+3

3) Complete a trilha conforme a indicação das setas:

- Vertical: adicione (- 2)  
- Horizontal: subtraia (- 5)  

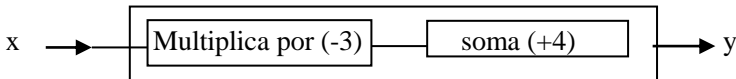


Em que número você chegou? _____

4) Escreva uma situação que represente a operação $(+ 20) - (- 5)$.

5) Uma pessoa encontra-se em uma câmara frigorífica cuja temperatura é de $- 8^{\circ} \text{C}$. Ao sair, encontrará uma temperatura ambiente de 23°C . Qual a variação de temperatura que essa pessoa terá de suportar?

6) O esquema abaixo representa uma máquina que leva um número inteiro x a outro número inteiro y .



Determine os valores de y para:
$x = 1$
$x = 0$

Determine os valores de x quando:
$y = 7$
$y = 13$

7) Para continuar seus estudos neste e nos próximos anos, é conveniente que adições, subtrações e multiplicações com números inteiros sejam efetuadas quase automaticamente, para isso é preciso exercitar. Resolva as expressões abaixo registrando seus cálculos.

a) $(- 23) + (- 14) - (- 56) =$

b) $(- 5) \times (-3 + 14) - (- 21) =$

c) $(- 8 - 6) \times (- 4) + (- 3 + 7) =$

d) $(- 12 + 31) - (- 4) + (+ 26) =$