



**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Universidade Virtual do Estado do Maranhão**  
**Departamento de Matemática**



**Curso de Especialização em Matemática na modalidade à distância**

## **Cálculo em Coordenadas Polares**

**Marcílio Feitosa Lima Veras**

**Orientadora: Silvia Martini de Holanda Janesch**

Pedreiras

17 de julho de 2009

**Universidade Federal de Santa Catarina**

**Universidade Virtual do Estado do Maranhão**

**Departamento de Matemática**

**Curso de Especialização em Matemática na modalidade a distância**

## **Cálculo em Coordenadas Polares**

Este trabalho foi apresentado ao curso de especialização em matemática na modalidade à distância da Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Estado do Maranhão, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de especialista em Matemática.

**Marcílio Feitosa Lima Veras**

Pedreiras

17 de julho de 2009



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
Departamento de Matemática**

**Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância**

**"Cálculo em Coordenadas Polares"**

**Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.**

**APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/08/2009**

Dr<sup>a</sup>. Silvia Martini de Holanda Janesch (CFM/UFSC - Orientadora)

Dr. Roberto Correa da Silva (CFM/UFSC - Examinador)

Dr. Inder Jeet Taneja (CFM/UFSC – Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2009.

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus. Também agradecer aos meus pais, por estarem ao meu lado sempre quando precisei, e principalmente nos momentos mais difíceis por me apoiarem e me incentivarem.

Com muito carinho agradeço a minha companheira Êryca, que nesta fase final me incentivou muito. São nas dificuldades que conhecemos e reconhecemos as pessoas, meu muito obrigado Êryca. Te amo!

Agradeço ainda a todos aqueles, amigos, colegas de trabalho ou de aula que durante este período estiveram ao meu lado me incentivando de alguma maneira.

E finalmente agradeço a Prof<sup>a</sup>. Dra Sílvia Martini de Holanda Janesch, pela ajuda e incentivo no desenrolar deste trabalho, muito obrigado.

# Sumário

<b>1 Introdução às coordenadas polares</b>	<b>8</b>
1.1 Sistema de coordenadas polares .....	8
1.2 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares .....	10
1.3 Curvas em coordenadas polares .....	16
1.4 Equações em coordenadas polares e suas respectivas curvas .....	25
1.5 Pontos de interseção de curvas em coordenadas polares .....	33
1.6 Retas tangentes a curvas polares .....	37
<b>2 Comprimento de curvas dadas na forma polar</b>	<b>44</b>
2.1 Curva e comprimento de arco na forma paramétrica .....	44
2.2 Comprimento de arco na forma polar .....	46
<b>3 Área em coordenadas polares</b>	<b>49</b>
3.1 Cálculo da área de uma curva polar .....	49
<b>Conclusão</b>	<b>57</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>
<b>Anexo 1</b>	<b>59</b>

## Introdução

A idéia básica da Geometria Analítica é a representação de pontos do plano ou do espaço por meio de conjuntos de números reais denominados *coordenadas*. Um ponto qualquer do plano terá a sua posição perfeitamente determinada por meio de um par ordenado de números reais que representam medidas das distâncias a dois eixos orientados, um deles vertical e o outro horizontal.

No século XVII, surgiram os primeiros estudos sistemáticos sobre Geometria Analítica. Os seus autores foram Pierre Fermat e René Descartes. Fermat, retomando a idéia dos construtores egípcios, refere-se a um ponto do plano por meio de um par de retas perpendiculares entre si. Este sistema, apesar de ter sido introduzido por Fermat, recebeu o nome de "Sistema Cartesiano" em homenagem a Descartes, que assinava o seu nome em latim: Cartesius.

Mas, com o decorrer do tempo e o avanço do Cálculo percebeu-se que este sistema de coordenadas não era tão eficiente na resolução de alguns problemas. Às vezes apareciam equações muito "estranhas" e complicadas. Então foram introduzidos muitos outros sistemas de coordenadas além do cartesiano, cada um para determinado propósito.

Um deles é o que iremos estudar, introduzido por Newton, muito utilizado no estudo das órbitas dos planetas, localização por radar de aeronaves e navios em alto mar, é o *sistema polar* ou *sistema de coordenadas polares*.

Veremos que em coordenadas polares existem infinitas representações para o mesmo ponto do plano. Faremos uma relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares, iremos ver algumas técnicas que facilitam no esboço das curvas polares e encontraremos os pontos de interseção de duas ou mais curvas.

Deduziremos a fórmula de comprimento de arco na forma paramétrica, e a partir desta, obteremos a fórmula de comprimento de arco na forma polar. Deduziremos também, a integral que fornece a área de região plana delimitada por uma curva dada na forma polar.

É de grande importância que o leitor tenha um conhecimento razoável de trigonometria, limites, derivadas e integrais. No Anexo 1 encontra-se algumas fórmulas que ajudarão bastante no entendimento de algumas questões.

# Capítulo 1

## Introdução às Coordenadas Polares

*Iniciaremos o estudo das coordenadas polares observando as várias maneiras de representar um ponto do plano. Apresentaremos a relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares, esboçaremos curvas em coordenadas polares e obteremos retas tangentes a curvas polares.*

### 1.1 Sistema de coordenadas polares

Nesta seção iremos estudar o sistema de coordenadas polares. Antes relembremos o sistema cartesiano.

**Definição 1.1.1.** Sejam os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , perpendiculares em  $O$  (origem do sistema). Dado um ponto  $P$  do plano, utilizando coordenadas cartesianas (retangulares), descrevemos sua localização no plano escrevendo  $P = (a, b)$  onde  $a$  é a projeção de  $P$  no eixo  $x$  e  $b$  a projeção de  $P$  no eixo  $y$ .

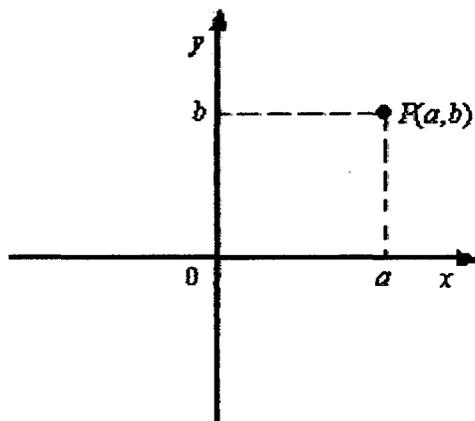


Figura 1.1.1: Representação de um ponto  $P$  em coordenadas cartesianas

**Definição 1.1.2.** Em coordenadas polares um ponto  $P$  é representado pelo par ordenado  $(r, \theta)$ , onde  $|r|$  é a distância de  $O$  (chamado origem ou pólo) até  $P$  e  $\theta$  é a medida do ângulo formado pelo segmento  $\overline{OP}$  e a semi-reta fixa  $\overline{OA}$ , que chamamos de eixo polar.

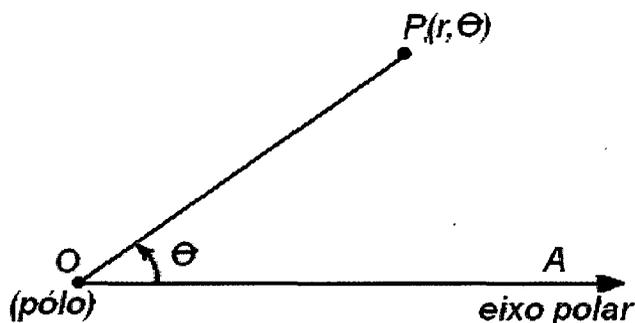


Figura 1.1.2: Representação de um ponto  $P$  em coordenadas polares

É comum chamar a primeira coordenada do ponto  $(r, \theta)$  de raio.

No sistema de coordenadas polares devemos fazer as seguintes observações:

- I – Se o ângulo  $A\hat{O}P$  for descrito no sentido anti-horário, então  $\theta > 0$ . Caso contrário  $\theta < 0$ .
- II – Se  $r < 0$ , o ponto  $P$  estará localizado na extensão do lado terminal de  $A\hat{O}P$ .
- III – O par ordenado  $(0, \theta)$ ,  $\theta$  qualquer, representará o pólo.

**Exemplo 1.1.1.** Represente os seguintes pontos num sistema de coordenadas polares;

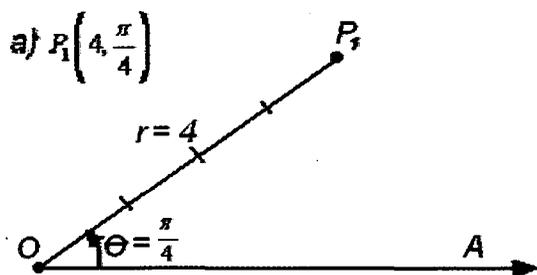


Figura 1.1.3.1: raio e ângulo positivos

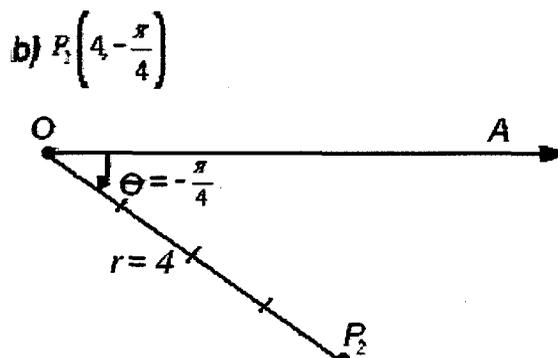


Figura 1.1.3.2: raio positivo e ângulo negativo

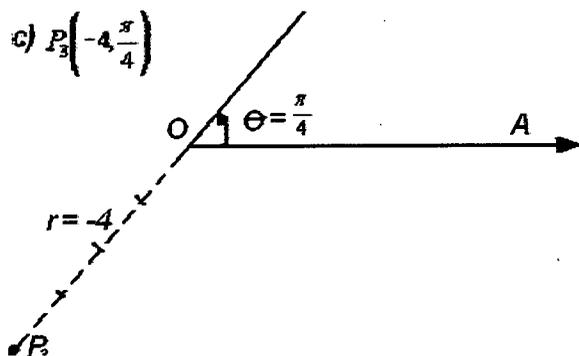


Figura 1.1.3.3: raio negativo e ângulo positivo.

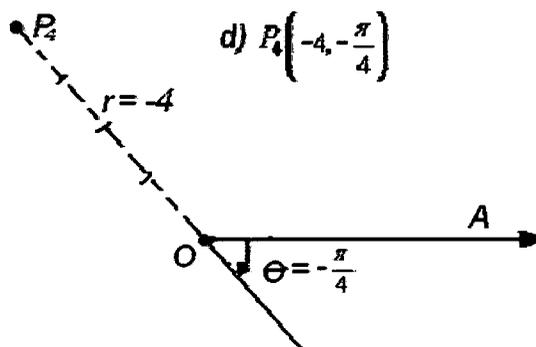


Figura 1.1.3.4: raio e ângulo negativos

### Observação 1.1.1

A representação de um ponto é única no sistema de coordenadas cartesianas. No sistema de coordenadas polares um ponto pode ser representado de infinitas maneiras.

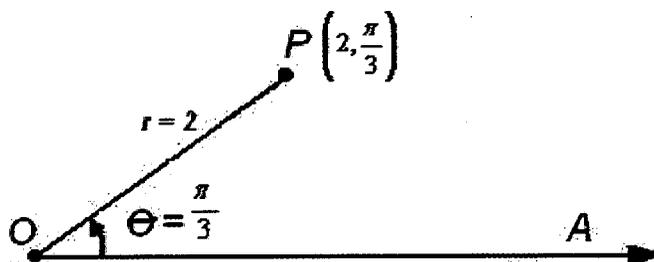


Figura 1.1.4: o ponto  $P$  representado de várias maneiras.

É fácil ver que o ponto  $P$  pode ser representado pelos pares ordenados da forma

$$\left(2, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \left(-2, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

## 1.2 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares

Em muitos casos é bastante complicado trabalhar com uma curva onde sua equação é dada em coordenadas cartesianas. Quando mudamos para as coordenadas polares não há mais esta dificuldade. Nesta seção estudaremos como converter pontos dados em coordenadas cartesianas para forma polar e vice-versa.

Para que possamos relacionar ambos os sistemas de coordenadas devemos fazer:

- (I) A origem do sistema de coordenadas cartesianas coincidir com o pólo do sistema de coordenadas polares, e
- (II) O eixo positivo  $x$  (abscissa) coincidir com o eixo polar;

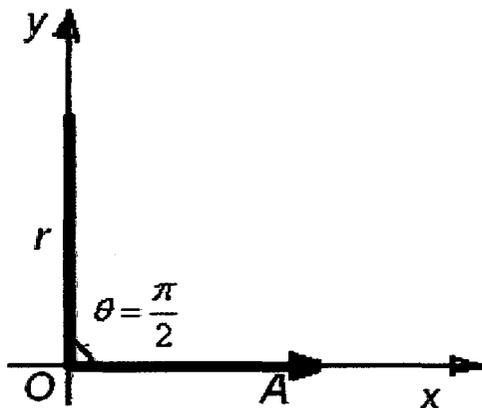
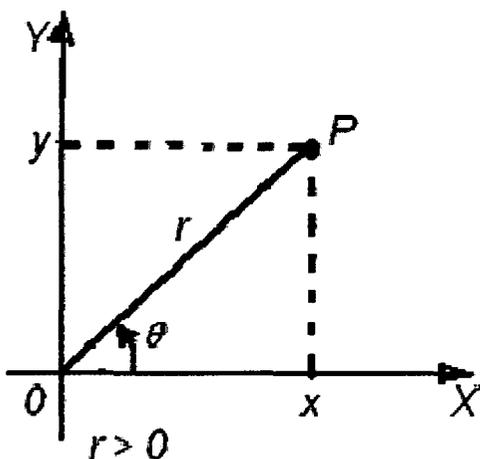


Figura 1.2.1: Sistemas de coordenadas cartesianas e polares com mesma origem

Seja  $P(x,y)$  um ponto em coordenadas cartesianas e  $(r,\theta)$  em coordenadas polares;

- (i) Se  $P$  está no 1º quadrante:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ e } \text{sen}\theta = \frac{y}{r},$$

temos

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\text{sen}\theta$$

Figura 1.2.2.1:  $P$  no 1º quadrante com raio positivo

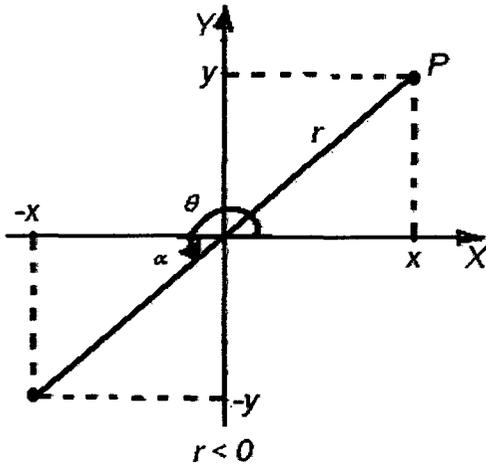


Figura 1.2.2.2:  $P$  no 1º quadrante com raio negativo

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \pi) &= \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos\theta \cos\pi + \text{sen}\theta \text{sen}\pi = \frac{-x}{r} \\ \Rightarrow -\cos\theta &= \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \text{sen}(\theta - \pi) &= \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}\theta \cos\pi - \text{sen}\pi \text{sen}\theta = \frac{-y}{r} \\ \Rightarrow -\text{sen}\theta &= \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{y}{r} \end{aligned}$$

(ii) Se  $P$  está no 2º quadrante:

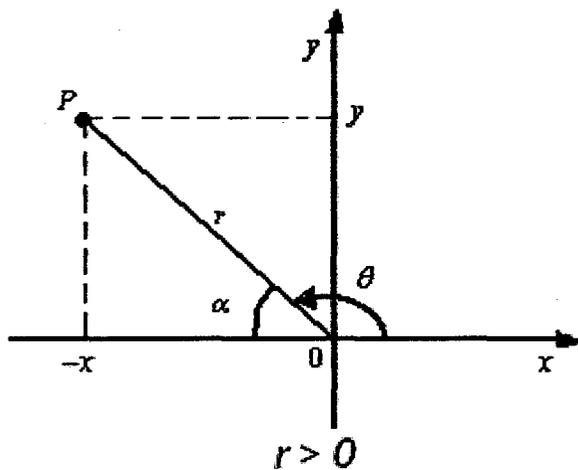


Figura 1.2.2.3:  $P$  no 2º quadrante com raio positivo

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r} \Rightarrow \\ \cos\pi \cos\theta + \text{sen}\pi \text{sen}\theta &= \frac{-x}{r} \Rightarrow \\ -\cos\theta &= \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \text{sen}\alpha &= \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen}(\pi - \theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow \\ \text{sen}\pi \cos\theta - \text{sen}\theta \cos\pi &= \frac{y}{r} \Rightarrow \\ \text{sen}\theta &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

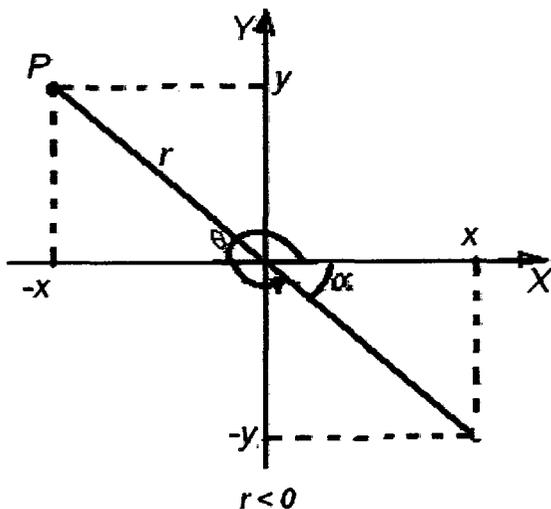


Figura 1.2.2.4:  $P$  no 2º quadrante com raio negativo

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} \Rightarrow \cos(2\pi - \theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow \\ \cos 2\pi \cos\theta + \text{sen} 2\pi \text{sen}\theta &= \frac{x}{r} \Rightarrow \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \text{sen}\alpha &= \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}(2\pi - \theta) = \frac{-y}{r} \Rightarrow \\ \text{sen} 2\pi \cos\theta - \text{sen}\theta \cos 2\pi &= \frac{-y}{r} \Rightarrow \\ -\text{sen}\theta &= \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{y}{r} \end{aligned}$$

(iii) Se P está no 3º quadrante:

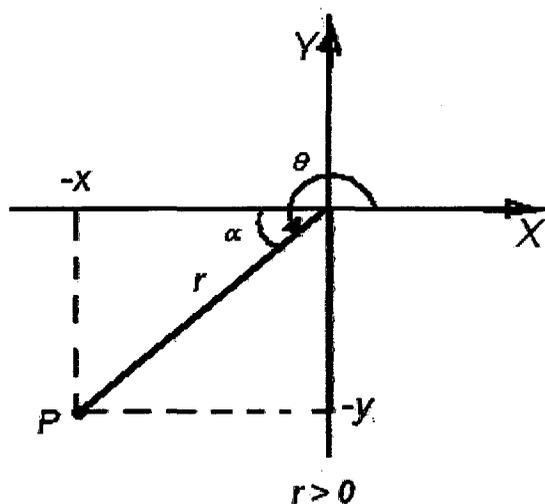


Figura 1.2.2.5: P no 3º quadrante com raio positivo

$$\cos \alpha = \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos(\theta - \pi) = \frac{-x}{r} \Rightarrow$$

$$\cos \theta \cos \pi + \text{sen} \theta \text{sen} \pi = \frac{-x}{r} \Rightarrow$$

$$-\cos \theta = \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}(\theta - \pi) = \frac{-y}{r} \Rightarrow$$

$$\text{sen} \theta \cos \pi - \text{sen} \pi \cos \theta = \frac{-y}{r} \Rightarrow$$

$$-\text{sen} \theta = \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

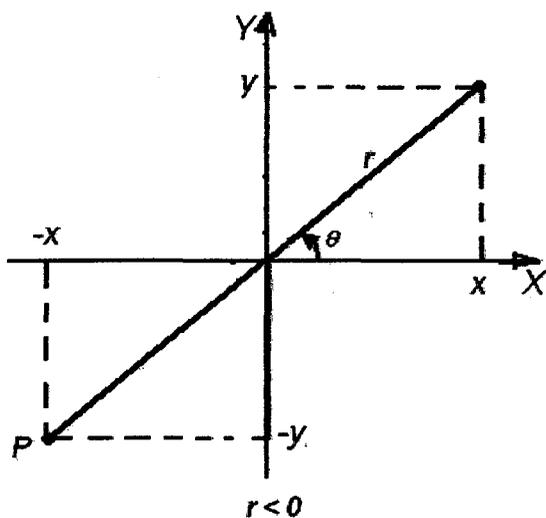


Figura 1.2.2.6: P no 3º quadrante com raio negativo

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \text{ e } \text{sen} \theta = \frac{y}{r},$$

temos,

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \text{sen} \theta$$

(iv) Se P está no 4º quadrante:

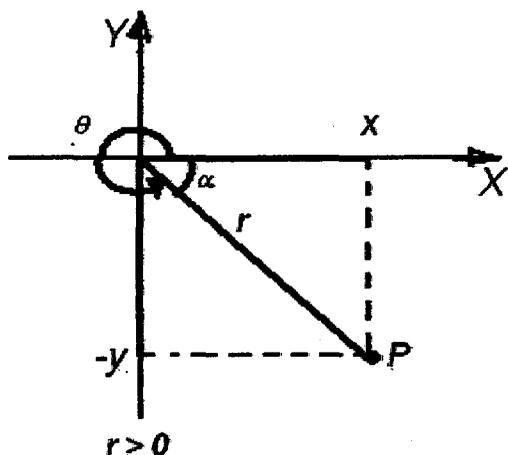


Figura 1.2.2.7: P no 4º quadrante com raio positivo

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos(2\pi - \theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow$$

$$\cos 2\pi \cos \theta + \text{sen} 2\pi \text{sen} \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen}(2\pi - \theta) = \frac{-y}{r} \Rightarrow$$

$$\text{sen} 2\pi \cos \theta - \text{sen} \theta \cos 2\pi = \frac{-y}{r} \Rightarrow$$

$$-\text{sen} \theta = \frac{-y}{r} \Rightarrow \text{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

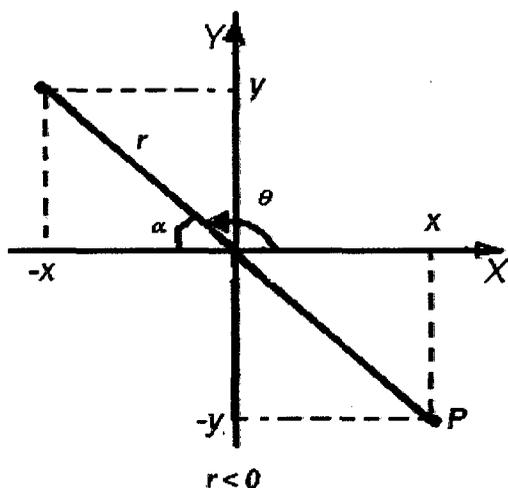


Figura 1.2.2.8: P no 4º quadrante com raio negativo

$$\cos \alpha = \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r} \Rightarrow$$

$$\cos \pi \cos \theta + \text{sen} \pi \text{sen} \theta = \frac{-x}{r} \Rightarrow$$

$$-\cos \theta = \frac{-x}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen}(\pi - \theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow$$

$$\text{sen} \pi \cos \theta - \text{sen} \theta \cos \pi = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

As equações

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \text{sen} \theta$$

são válidas para todos os valores de  $r$  e  $\theta$ . Permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas, e vice-versa.

Das equações acima, podemos escrever

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \text{sen} \theta)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \text{sen}^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) = r^2,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Esta relação aparece com frequência

### EXEMPLO 1.2.1

Represente o ponto com coordenadas cartesianas  $(-1, 1)$  em coordenadas polares.

Note que  $x = -1$  e  $y = 1$ . Logo  $x^2 + y^2 = r^2 = (-1)^2 + 1^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$ .

Vamos considerar  $r = \sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \Rightarrow -1 = \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = r \sin \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

O ponto em coordenadas polares é  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ .

### EXEMPLO 1.2.2

Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto  $(-10, \frac{3\pi}{2})$  dado em coordenadas polares.

Temos que  $r = -10$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ . Assim

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \Rightarrow x = -10 \cos \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -10 \cdot 0 = 0 \\ y = r \sin \theta \Rightarrow y = -10 \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = (-10)(-1) = 10 \end{cases}$$

Logo, o ponto em coordenadas cartesianas é  $(0, 10)$ .

### EXEMPLO 1.2.3

Encontre a equação cartesiana para a curva,  $r^2 = 5\text{sen}2\theta$  descrita na forma polar.

Sabemos que  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\text{sen}\theta = \frac{y}{r}$  e que  $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta \cos\theta$ , assim

$$r^2 = 5\text{sen}2\theta \Rightarrow r^2 = 5 \cdot 2\text{sen}\theta \cos\theta \Rightarrow r^2 = 10 \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{r^2} 10xy \Rightarrow (r^2)^2 = 10xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 10xy \text{ é a equação cartesiana.}$$

### EXEMPLO 1.2.4

Transforme a equação cartesiana  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  para coordenadas polares.

Note que  $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$ . Como  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $x = r \cos\theta$  temos

$$r^2 = 2r \cos\theta. \text{ Logo, } r = 2 \cos\theta \text{ é a equação polar procurada.}$$

## 1.3 Curvas em coordenadas polares

Nesta seção esboçaremos curvas formadas por todos os pontos cujas coordenadas satisfazem a equação  $F(r, \theta) = 0$ .

Alguns procedimentos podem nos ajudar no esboço da curva:

- (i) calcular os pontos máximos e/ou mínimos;
- (ii) determinar  $\theta$  para o qual a curva passa pelo pólo;
- (iii) verificar simetrias:

- Quando substituímos  $r$  por  $-r$  na equação, esta não se altera, existe simetria em relação à origem (ou seja, a curva não se altera se a girarmos  $180^\circ$  em torno da origem);
- Quando substituímos  $\theta$  por  $-\theta$  na equação, esta não se altera, existe simetria em relação ao eixo polar (eixo dos  $x$ );
- Quando substituímos  $\theta$  por  $\pi - \theta$  na equação, esta não se altera, existe simetria em relação ao eixo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (eixo dos  $y$ );

**Exemplo 1.3.1.** Esboçar a curva  $r = 1 + 2 \cos \theta$ .

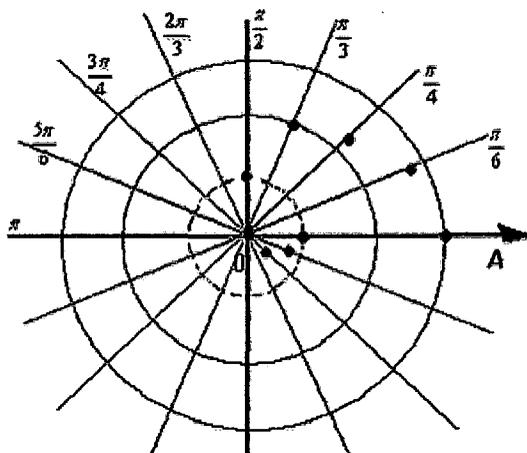
Note que a equação não se altera se substituirmos  $\theta$  por  $-\theta$  na equação dada. De fato:

$$r = 1 + 2 \cos \theta = 1 + 2 \cos(-\theta)$$

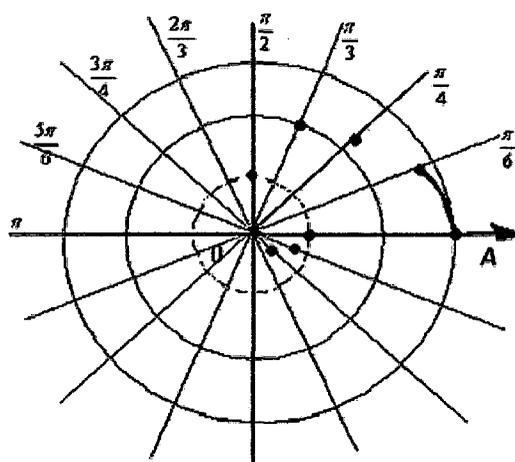
Logo, existe simetria em relação ao eixo polar. Assim basta encontrar  $r$  para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

**Tabela 1.3.1:** alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$2 \cos \theta$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2
$r = 1 + 2 \cos \theta$	3	$1 + \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{2}$	2	1	0	$1 - \sqrt{2}$	$1 - \sqrt{3}$	-1



**Figura 1.3.1.1**



**Figura 1.3.1.2**

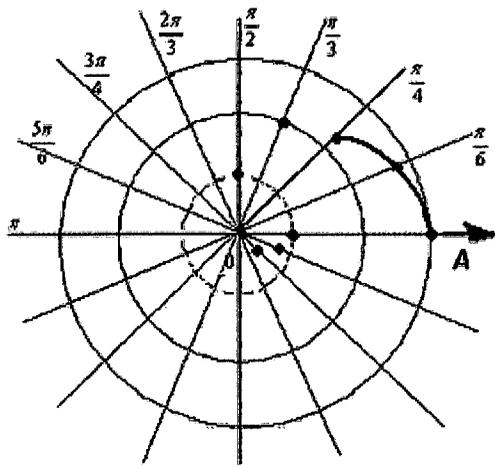


Figura 1.3.1.3

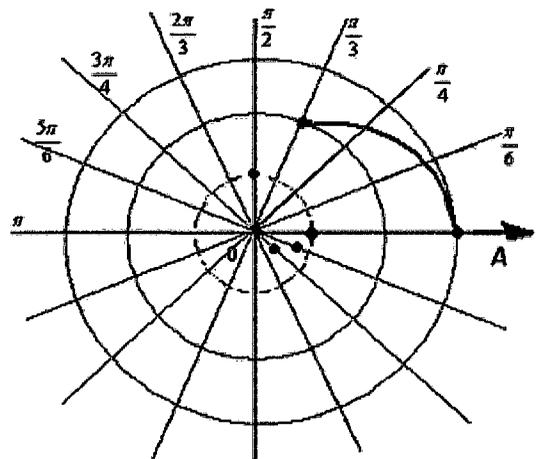


Figura 1.3.1.4

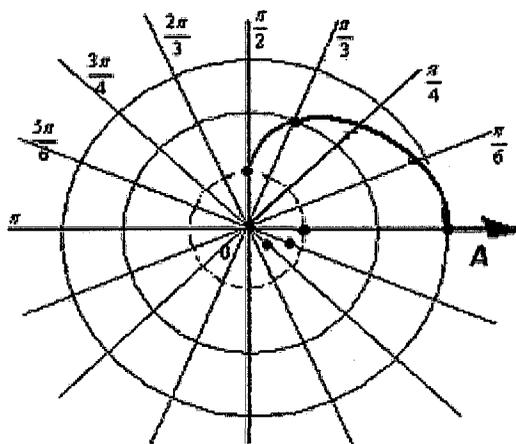


Figura 1.3.1.5

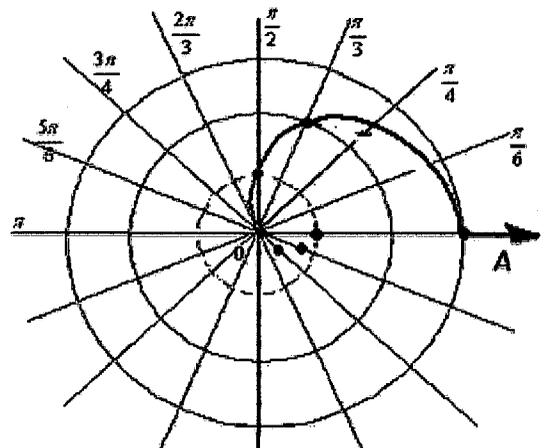


Figura 1.3.1.6

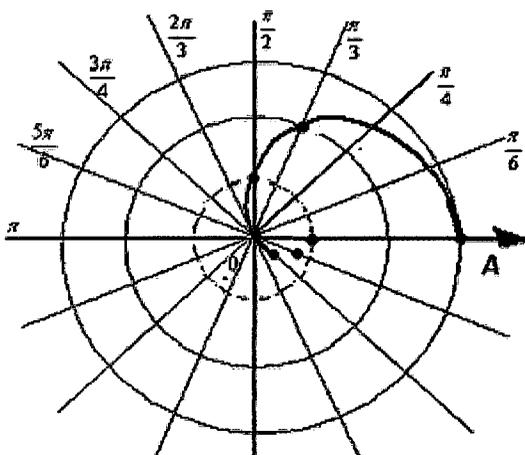


Figura 1.3.1.7

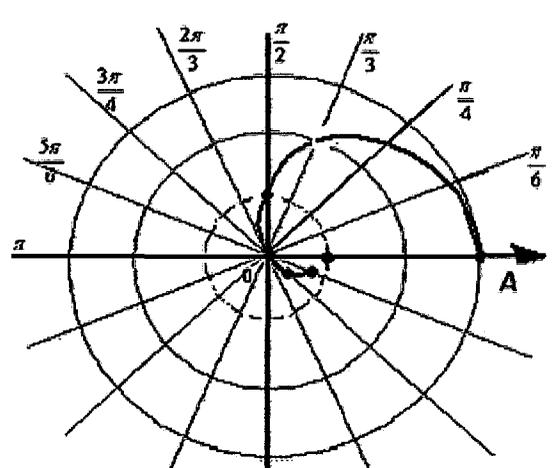


Figura 1.3.1.8

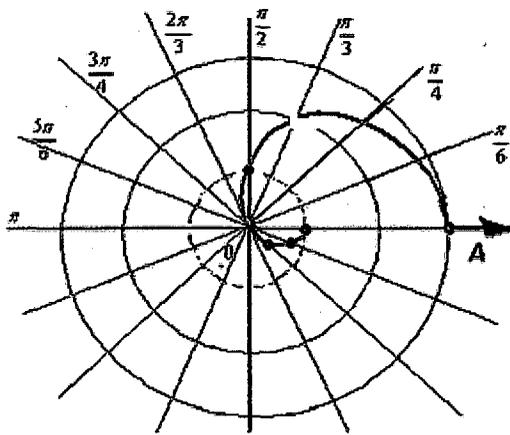


Figura 1.3.19

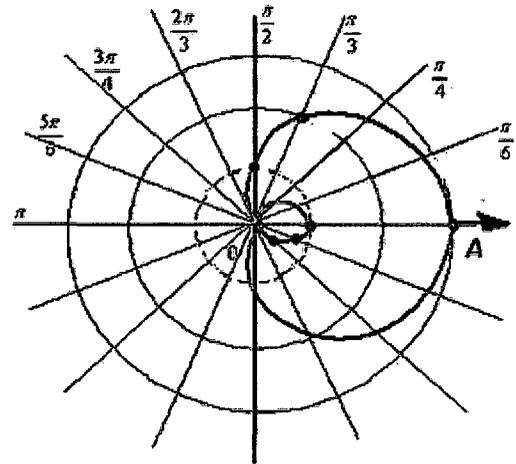


Figura 1.3.1.10: por simetria obtemos o restante da curva

**Exemplo 1.3.2.** Esboçar a curva  $r = 3 \cos 2\theta$ .

Analisando em coordenadas cartesianas  $r = f(\theta)$ ;

Tabela 1.3.2: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\cos 2\theta$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$r = 3 \cos 2\theta$	3	0	-3	0	3	0	-3	0	3

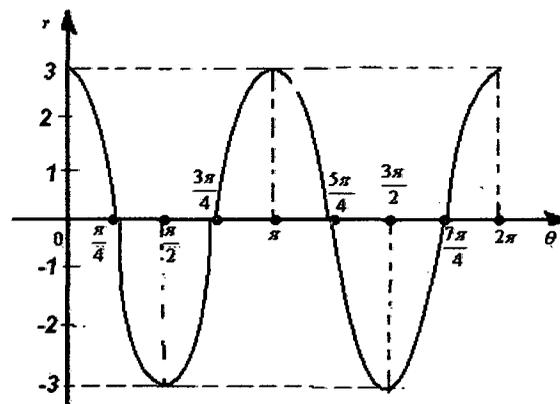


Figura 1.3.2: gráfico de  $r$  em coordenadas cartesianas

Podemos verificar que a função:

(i) tem máximo em  $0, \pi$  e  $2\pi$ , mínimo em  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ ;

(ii) passa pelo pólo em  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  e  $\frac{7\pi}{4}$ ;

(iii) a equação é simétrica em relação ao eixo polar pois:

$$r = 3 \cos(-2\theta) = 3 \cos 2\theta$$

A equação é simétrica em relação ao eixo  $\frac{\pi}{2}$  pois:

$$r = 3 \cos[2(\pi - \theta)] = 3 \cos(2\pi - 2\theta) = 3(\cos 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\pi \sin 2\theta) = 3 \cos 2\theta$$

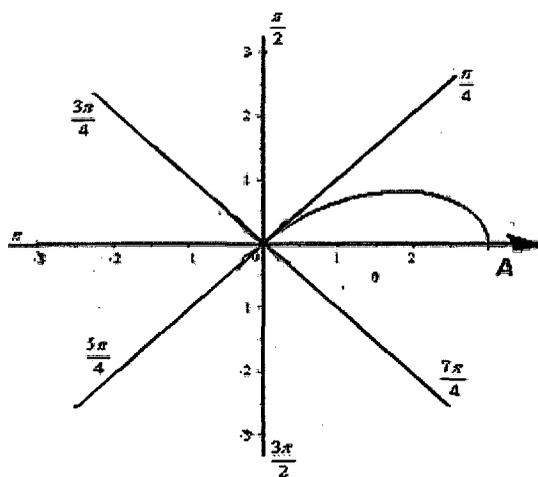


Figura 1.3.3.1

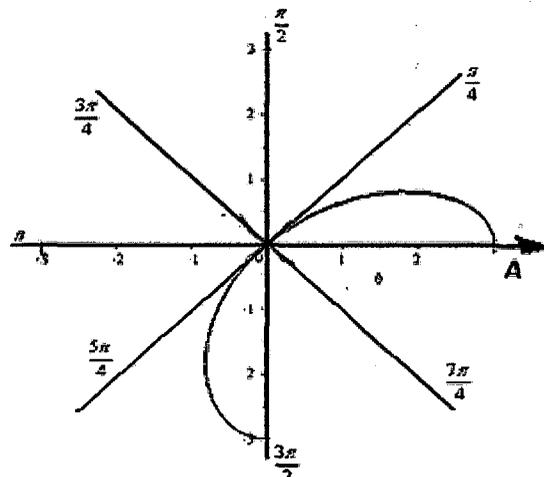


Figura 1.3.3.2

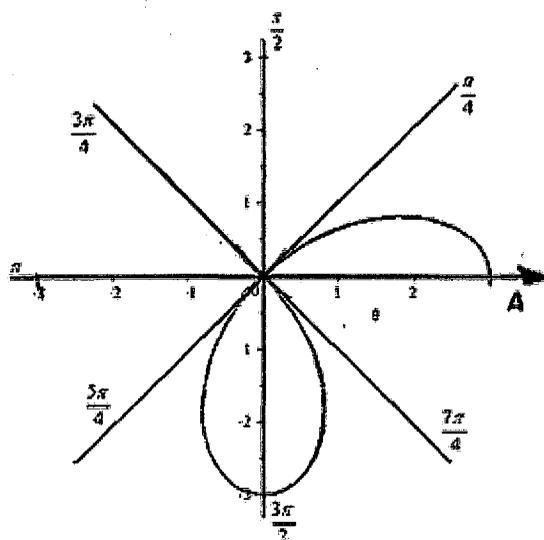


Figura 1.3.3.3

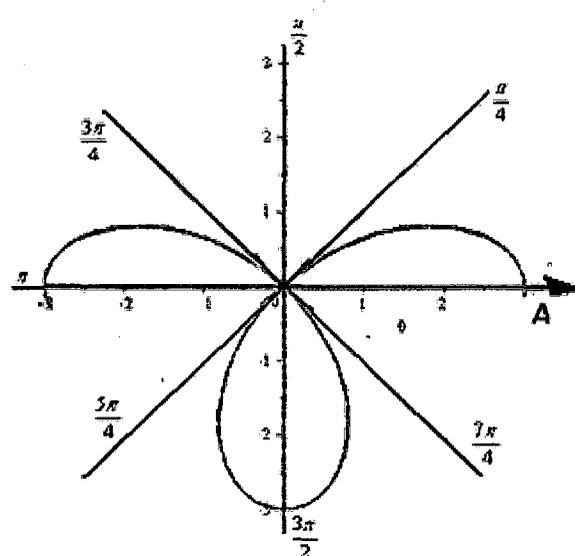


Figura 1.3.3.4

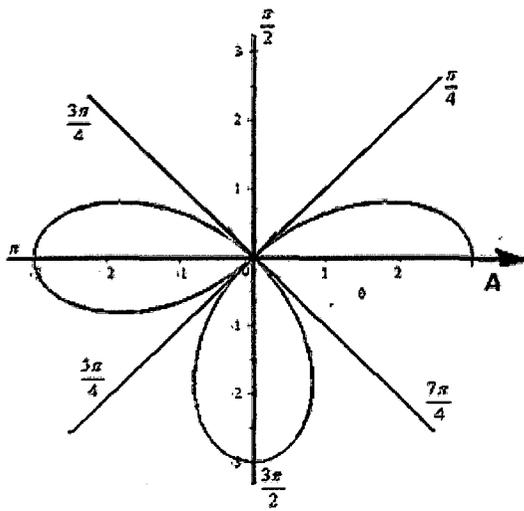


Figura 1.3.3.5

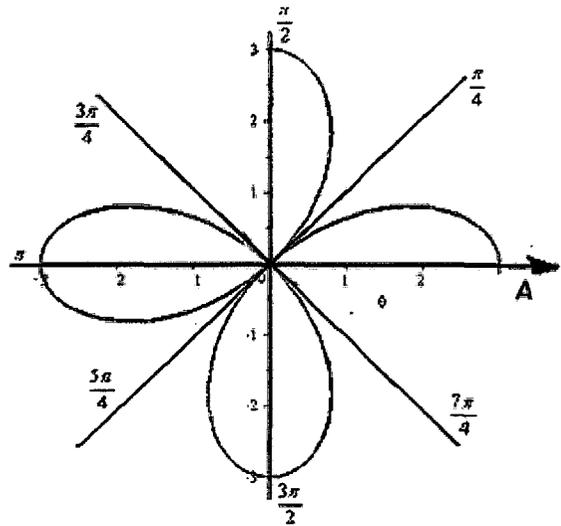


Figura 1.3.3.6

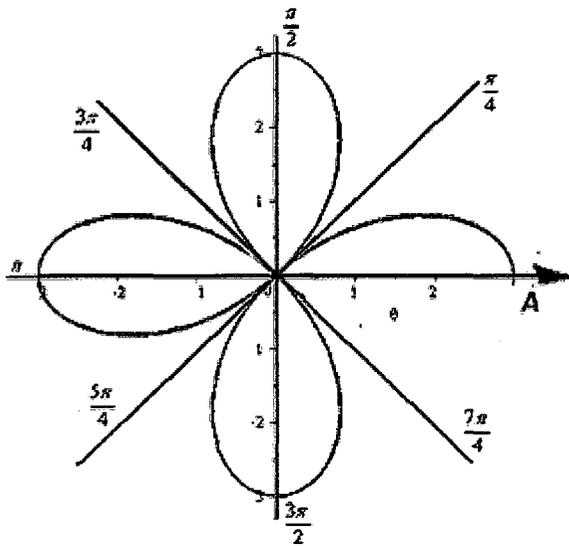


Figura 1.3.3.7

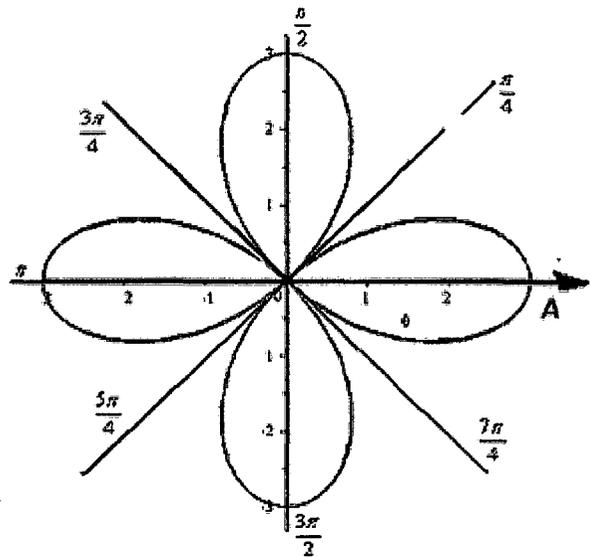


Figura 1.3.3.8

**Exemplo 1.3.3.** Esboçar a curva  $r = 2\text{sen}2\theta$ ;

Analisando em coordenadas cartesianas  $r = f(\theta)$ ;

Tabela 1.3.3: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\text{sen}2\theta$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$r = 2\text{sen}2\theta$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0

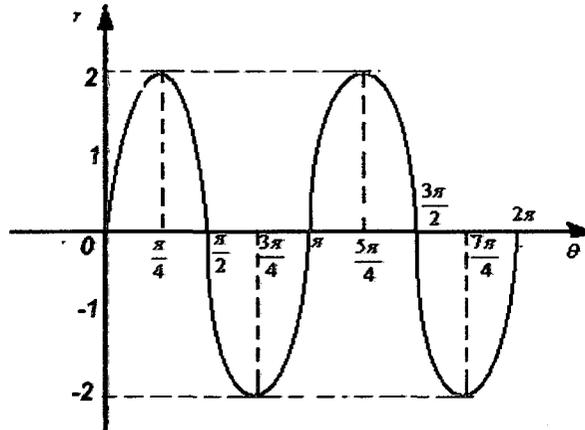


Figura 1.3.4: gráfico de  $r$  em coordenadas cartesianas

Podemos verificar que a função:

(i) tem máximo em  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{5\pi}{4}$  e mínimo em  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{7\pi}{4}$ ;

(ii) passa pelo pólo em  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$ ;

Não conseguimos observar simetria. Desta forma vamos localizar os pontos para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

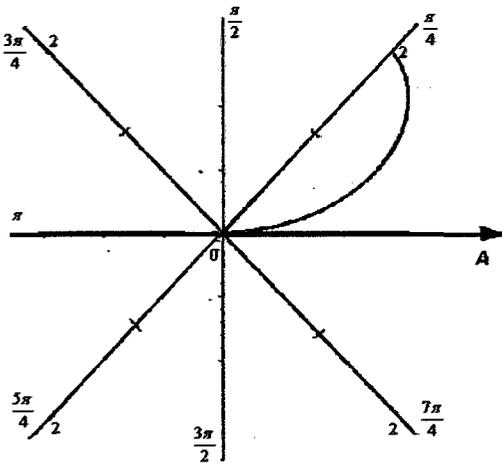


Figura 1.3.5.1

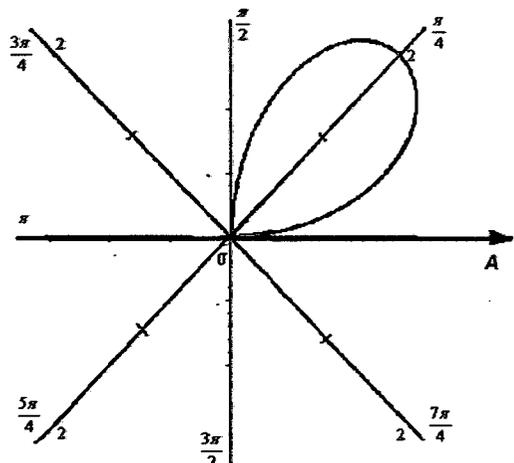


Figura 1.3.5.2

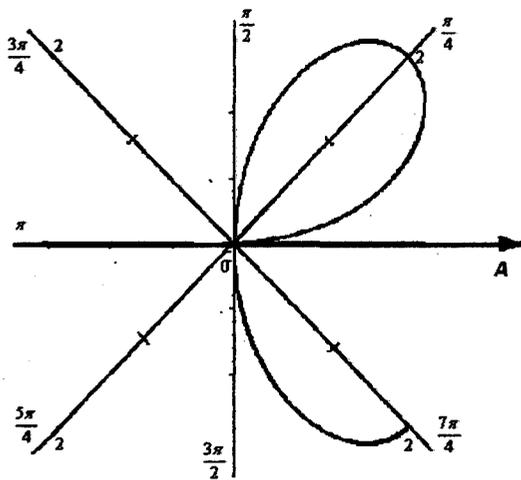


Figura 1.3.5.3

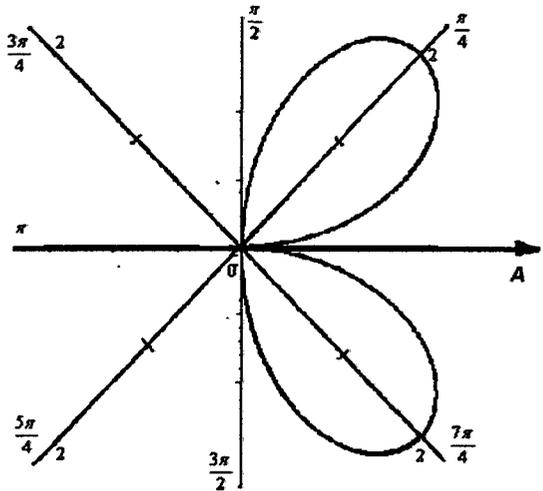


Figura 1.3.5.4

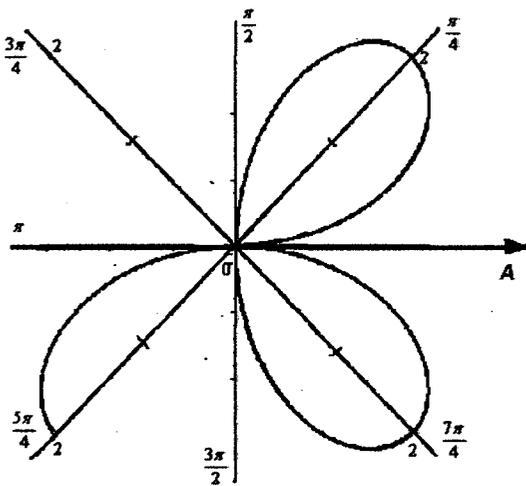


Figura 1.3.5.5

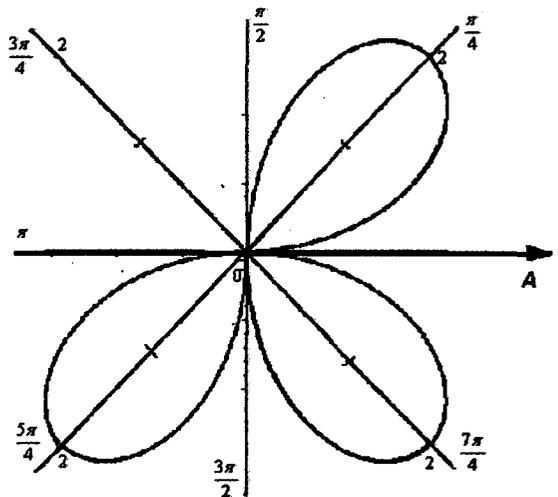


Figura 1.3.5.6

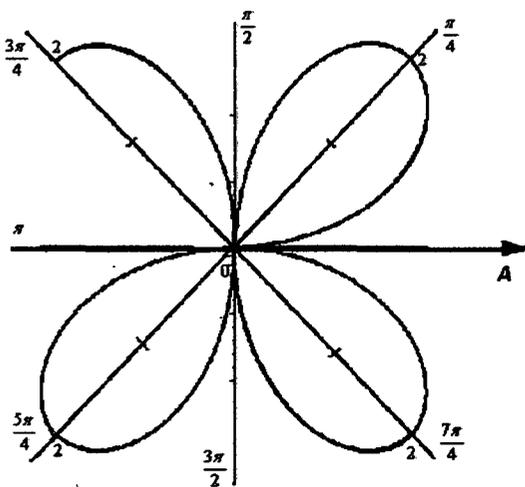


Figura 1.3.5.7

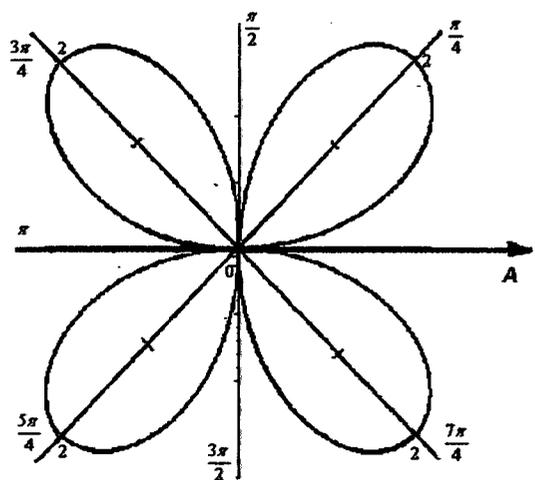


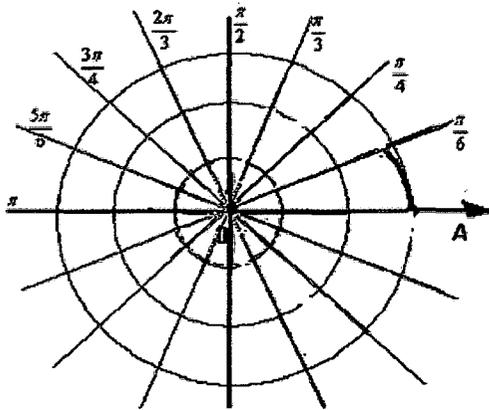
Figura 1.3.5.8

**Exemplo 1.3.4.** Esboçar a curva  $r = 3 \cos \theta$ ;

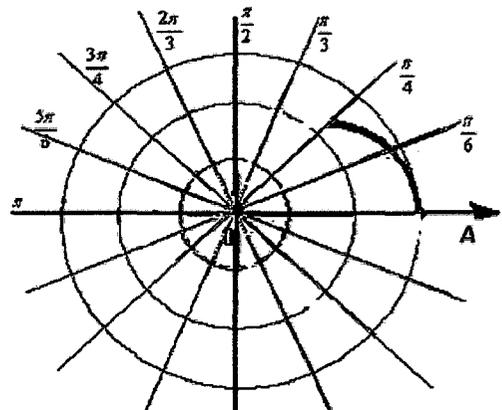
Note que a equação não se altera quando substituimos  $\theta$  por  $-\theta$ . Logo há simetria em relação ao eixo polar. Então basta fazer  $\theta$  variar de  $0$  a  $\pi$ ;

**Tabela 1.3.4:** alguns ângulos necessários para esboçar a curva

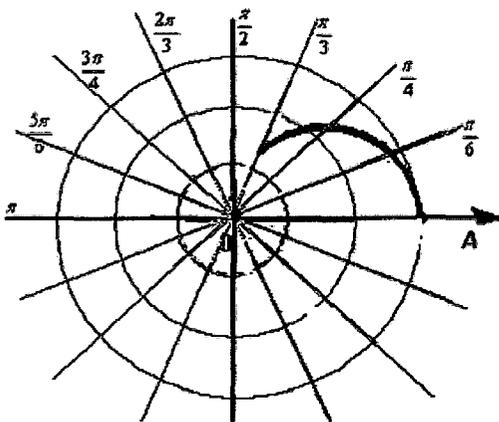
$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 3 \cos \theta$	3	$3 \frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-3 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-3 \frac{\sqrt{3}}{2}$	-3



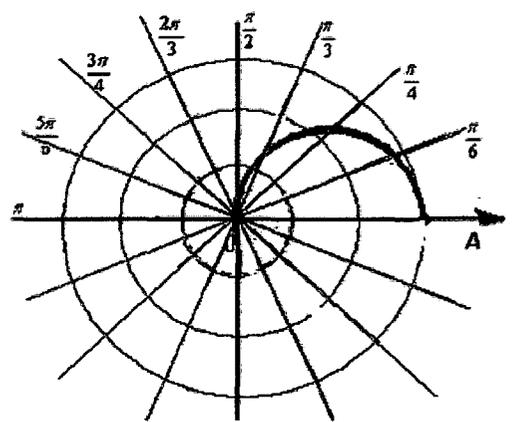
**Figura 1.3.6.1**



**Figura 1.3.6.2**



**Figura 1.3.6.3**



**Figura 1.3.6.4**

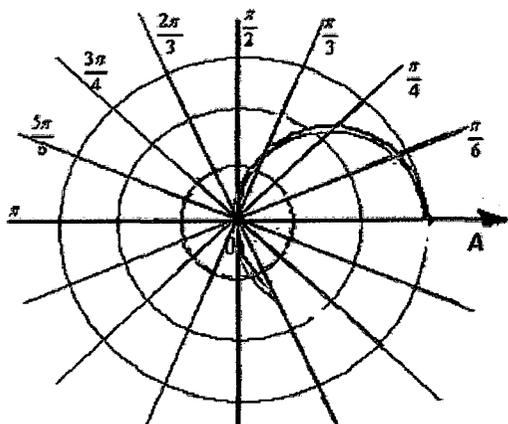


Figura 1.3.6.5

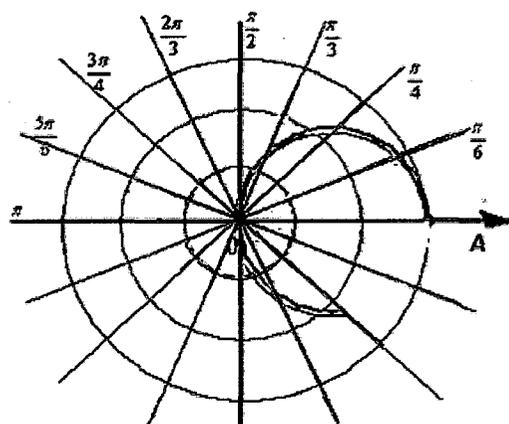


Figura 1.3.6.6

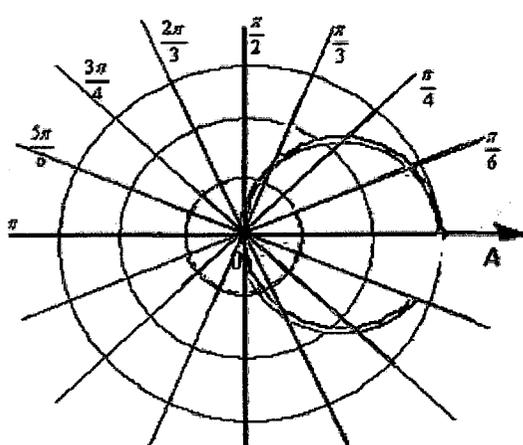


Figura 1.3.6.7

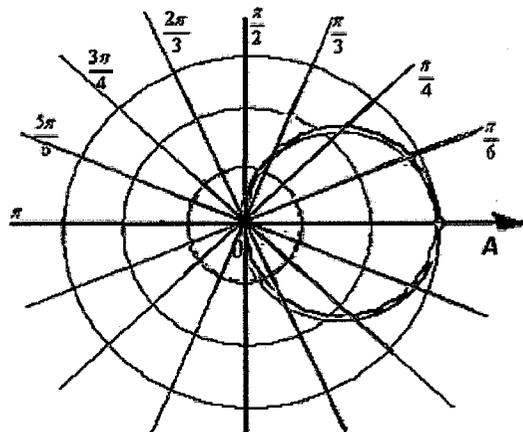


Figura 1.3.6.8

## 1.4 Equações em coordenadas polares e suas respectivas curvas

### 1.4.1 Equações de retas;

- (a)  $\theta = 0$  ou  $\theta = \theta_0 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de  $\theta_0$  ou  $\theta_0 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  radianos com o eixo polar;

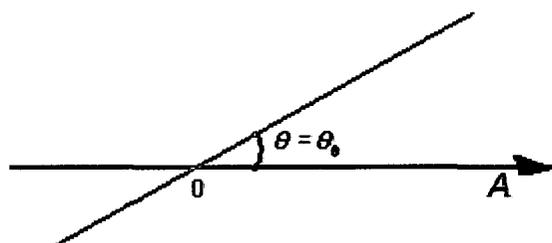


Figura 1.4.1.1

(b)  $r \sin \theta = a$  é uma reta paralela ao eixo polar.

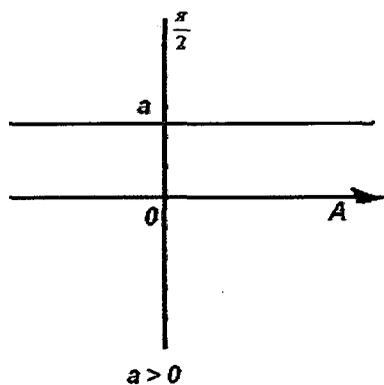


Figura 1.4.1.2.1

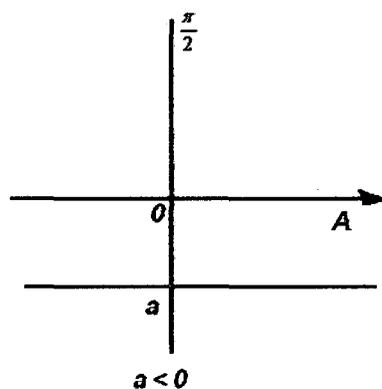


Figura 1.4.1.2.2

(c)  $r \cos \theta = b$  é uma reta paralela ao eixo  $\frac{\pi}{2}$ ;

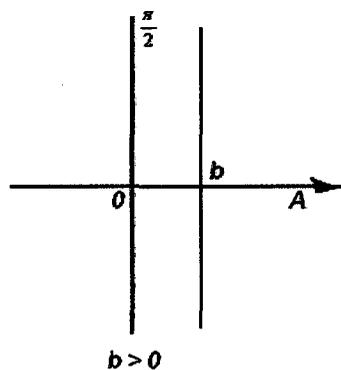


Figura 1.4.1.3.1

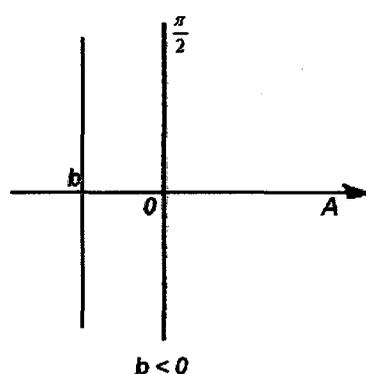


Figura 1.4.1.3.2

## 1.4.2 Circunferências

(a)  $r = c, c \in \mathbb{R}$  em coordenadas polares é a equação de uma circunferência centrada no pólo e raio  $|c|$ ;

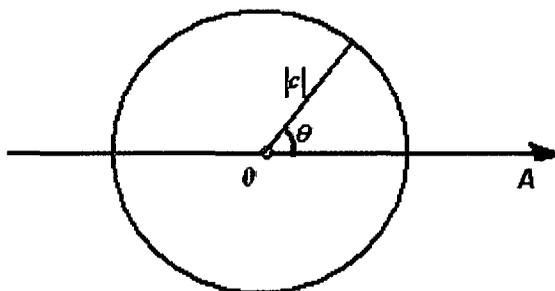


Figura 1.4.2.1.

(b)  $r = a \cos \theta$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , é uma circunferência com centro no eixo polar e tangente ao eixo  $\frac{\pi}{2}$ ;

- Se  $a > 0$ , o gráfico está a direita do pólo;

- Se  $a < 0$ , o gráfico está a esquerda do pólo;

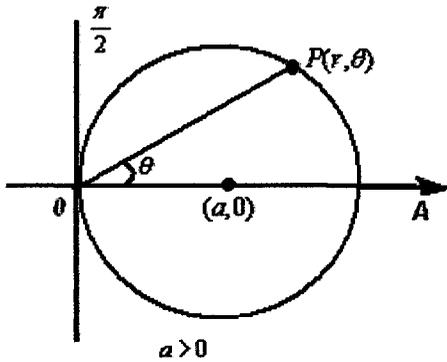


Figura 1.4.2.2.1

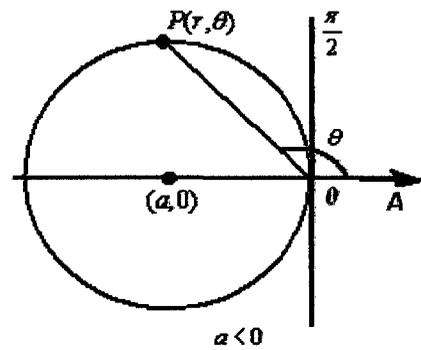


Figura 1.4.2.2.2

(c)  $r = b \sin \theta$  é uma circunferência centrada no eixo  $\frac{\pi}{2}$  e tangente ao eixo polar.

- Se  $b > 0$ , o gráfico está acima do pólo;

- Se  $b < 0$ , o gráfico está abaixo do eixo polar;

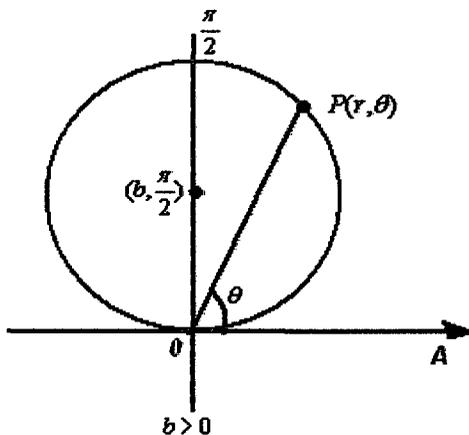


Figura 1.4.2.3.1

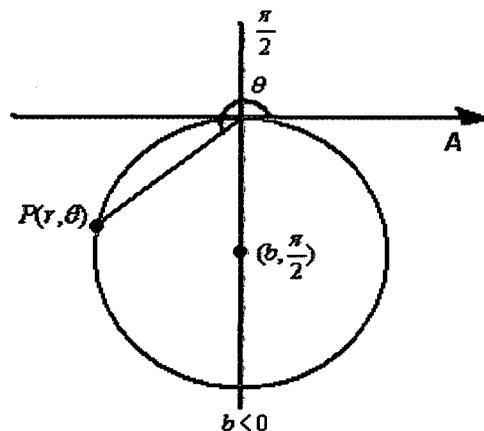


Figura 1.4.2.3.2

### 1.4.3 Limaçons

$r = a \pm b \cos \theta$  ou  $r = a \pm b \sin \theta$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  são equações em coordenadas polares

cujas curvas são chamadas de *limaçons*;

As curvas das limaçons  $r = a \pm b \cos \theta$  e  $r = a \pm b \sin \theta$  possuem simetria em relação

ao eixo polar e ao eixo  $\frac{\pi}{2}$ , respectivamente:

(a) Quando  $b > a$  a curva possui um laço. Sendo assim ela é chamada *limaçon com laço*;

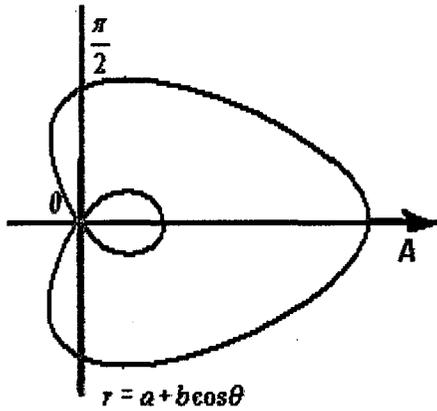


Figura 1.4.3.1.1

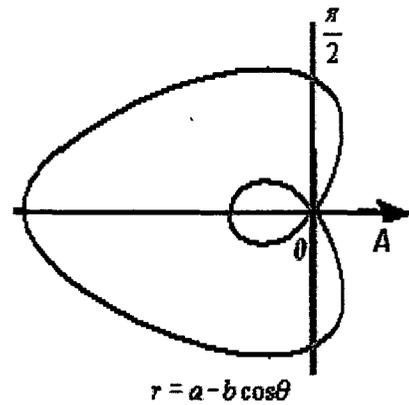


Figura 1.4.3.1.2

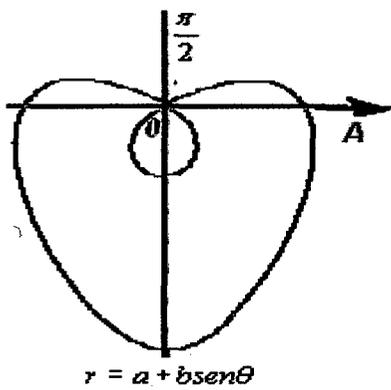


Figura 1.4.3.1.3

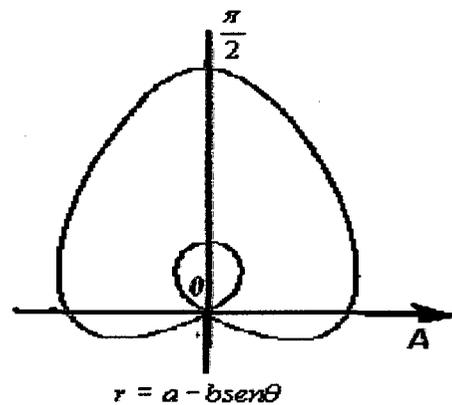


Figura 1.4.3.1.4

(b) Se  $b = a$  a curva é chamada *cardióide*, por ter o formato de um coração;

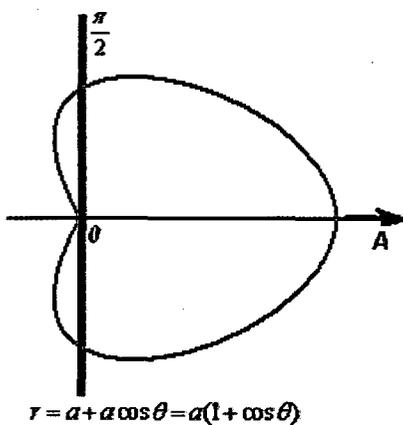


Figura 1.4.3.2.1

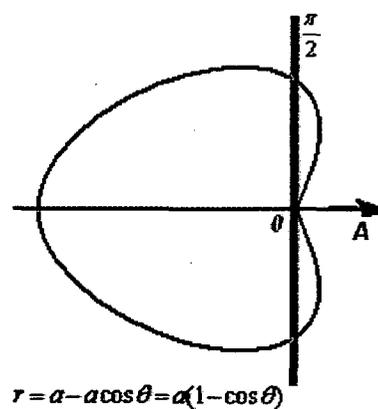
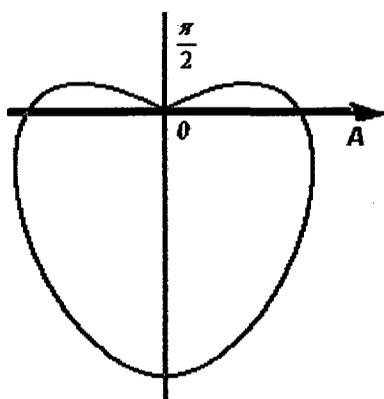
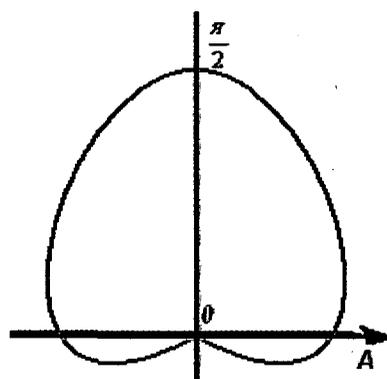


Figura 1.4.3.2.2



$$r = a + a \operatorname{sen} \theta = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$$

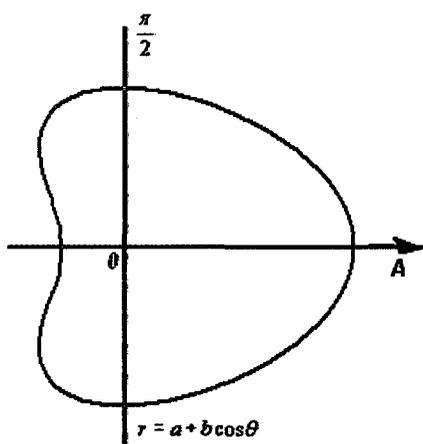
Figura 1.4.3.2.3



$$r = a - a \operatorname{sen} \theta = a(1 - \operatorname{sen} \theta)$$

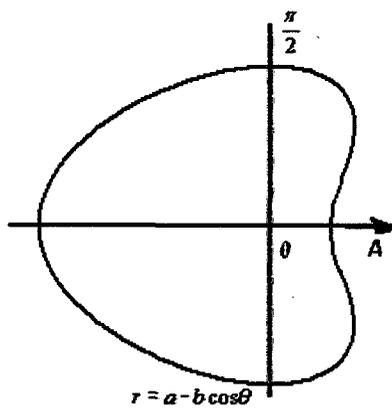
Figura 1.4.3.2.4

(c) Se  $b < a$  a curva não tem laço e nem o formato de coração sendo chamada apenas de *limaçon*;



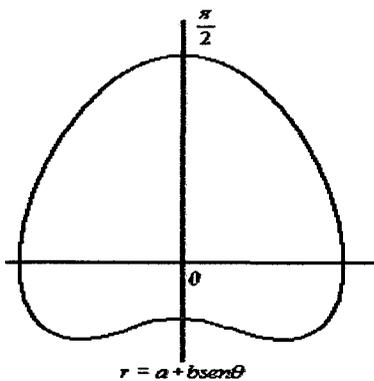
$$r = a + b \cos \theta$$

Figura 1.4.3.3.1



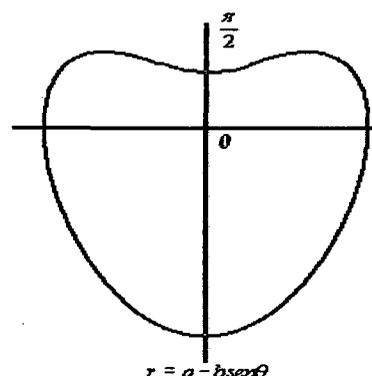
$$r = a - b \cos \theta$$

Figura 1.4.3.3.2



$$r = a + b \operatorname{sen} \theta$$

Figura 1.4.3.3.3



$$r = a - b \operatorname{sen} \theta$$

Figura 1.4.3.3.4

### 1.4.4 Rosáceas

Equações do tipo  $r = a \cos(n\theta)$  ou  $r = a \sin(n\theta)$  em coordenadas polares, com  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  são chamadas *rosáceas*, pois lembram o desenho de uma flor com várias pétalas, todas com mesmo comprimento e área.

(a) Se  $n$  for par, a rosácea terá exatamente  $2n$  pétalas;

Suponha  $n = 2$ , logo a rosácea terá 4 pétalas;

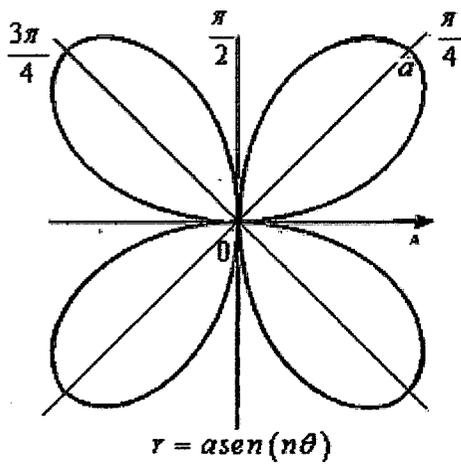


Figura 1.4.4.1.1

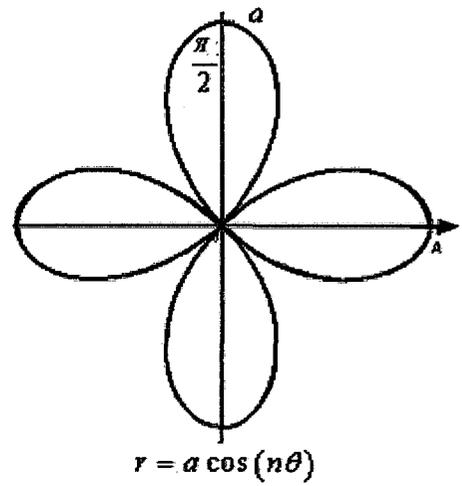


Figura 1.4.4.1.2

(b) Se  $n$  for ímpar, a rosácea terá exatamente  $n$  pétalas;

Vejam os como é o gráfico para  $n = 5$ ;

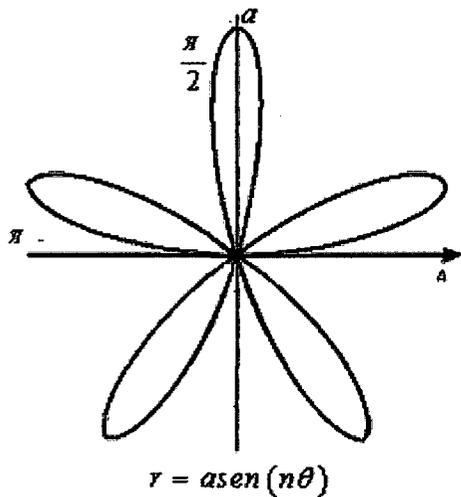


Figura 1.4.4.2.1

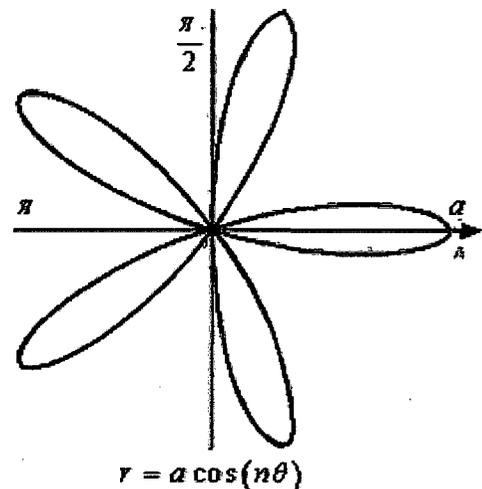


Figura 1.4.4.2.2

### 1.4.5 Lemniscatas

Assim são chamadas as curvas que representam as equações

$$r^2 = \pm a^2 \cos(2\theta) \text{ ou } r^2 = \pm a^2 \text{sen}(2\theta), \text{ com } a \in \mathbb{R};$$

- (a) Nas equações  $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$  e  $r^2 = -a^2 \cos(2\theta)$  as lemniscatas tem simetria em relação ao eixo polar e ao eixo  $\frac{\pi}{2}$ , respectivamente;

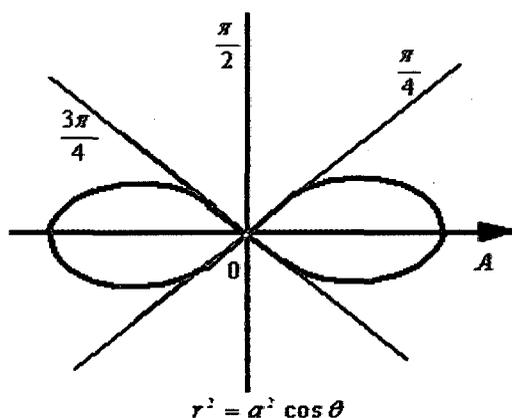


Figura 1.4.5.1.1

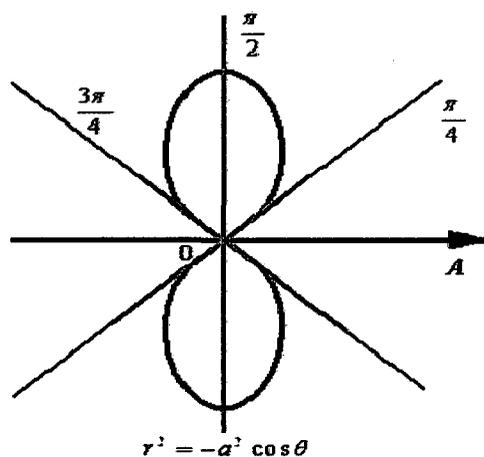


Figura 1.4.5.1.2

- (b) Nas equações  $r^2 = a^2 \text{sen}(2\theta)$  e  $r^2 = -a^2 \text{sen}(2\theta)$  as lemniscatas tem simetria em relação a  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , respectivamente;

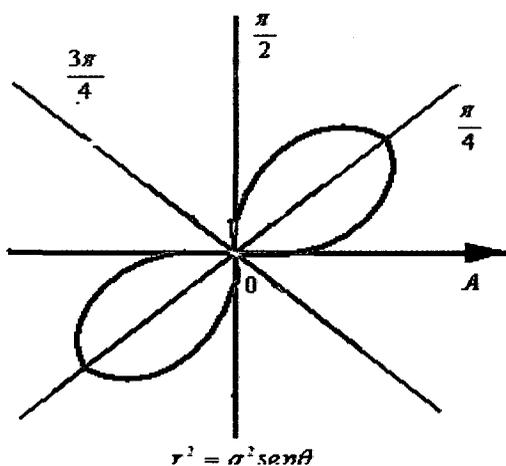


Figura 1.4.5.2.1

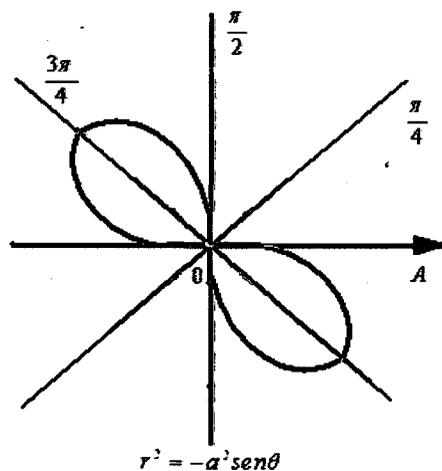


Figura 1.4.5.2.2

## 1.4.6 Espirais

Equações de algumas espirais e seus gráficos:

(a)  $r\theta = a, a > 0$  (Espiral Hiperbólica)

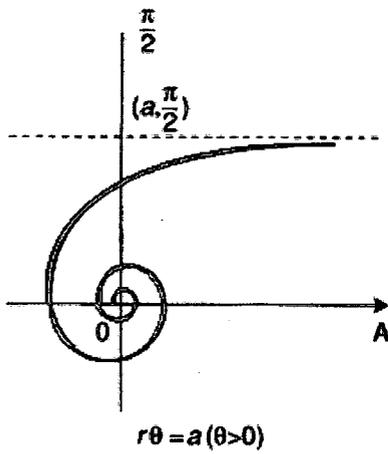


Figura 1.4.6.1.1

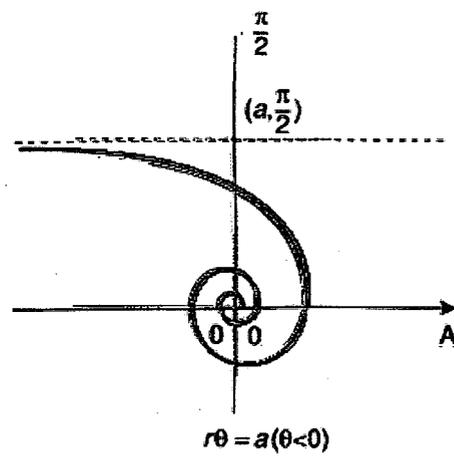


Figura 1.4.6.1.2

(b)  $r = a\theta, a > 0$  (Espiral de Arquimedes)

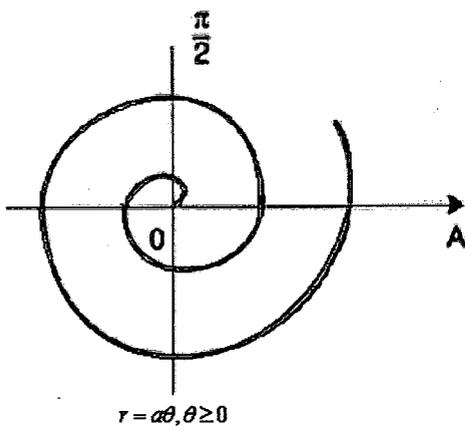


Figura 1.4.6.2.1

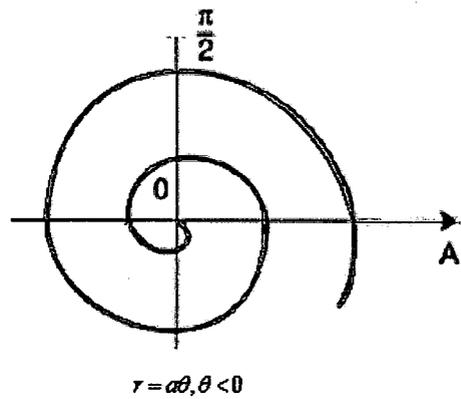


Figura 1.4.6.2.2

(c)  $r = e^{a\theta}$  (Espiral Logarítmica)

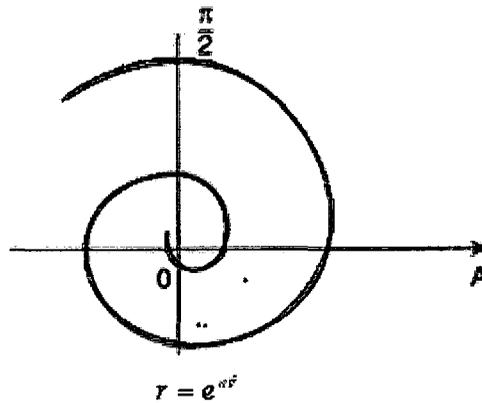


Figura 1.4.6.3

(d)  $r^2 = \theta$  (Espiral Parabólica)

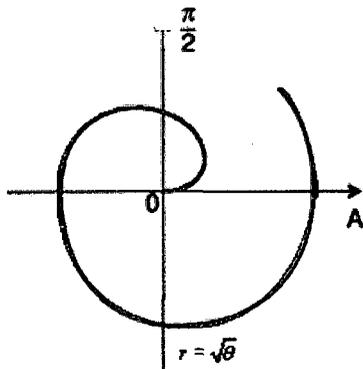


Figura 1.4.6.4.1

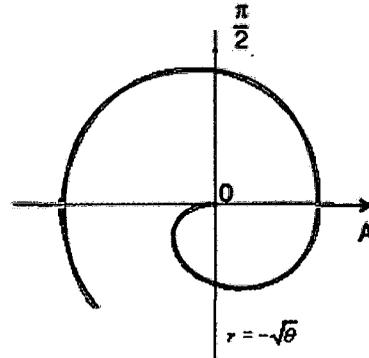


Figura 1.4.6.4.2

## 1.5 Pontos de interseção de curvas em coordenadas polares

Encontrar pontos de interseção de curvas em coordenadas polares não é feito da maneira que estamos acostumados em coordenadas cartesianas. Ou seja, resolver simultaneamente as equações de duas ou mais curvas podem não identificar todos os pontos de interseção. Pois, como já sabemos, em coordenadas polares podemos ter várias representações para um mesmo ponto. A maneira mais segura de encontrar todos os pontos de interseção é esboçar os gráficos das equações.

**Exemplo 1.5.1.** Encontrar os pontos de interseção das curvas  $r = 1 + \cos \theta$  e  $r = 1 - \cos \theta$ ;

Trata-se de duas cardioides, como as equações não se alteram se  $\theta$  for substituído por  $-\theta$ , basta fazer  $\theta$  variar de 0 a  $\pi$ :

Tabela 1.5.1: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$r = 1 + \cos \theta$	$r = 1 + 1 = 2$	$r = 1 + 0 = 1$	$r = 1 - 1 = 0$
$r = 1 - \cos \theta$	$r = 1 - 1 = 0$	$r = 1 - 0 = 1$	$r = 1 - (-1) = 2$

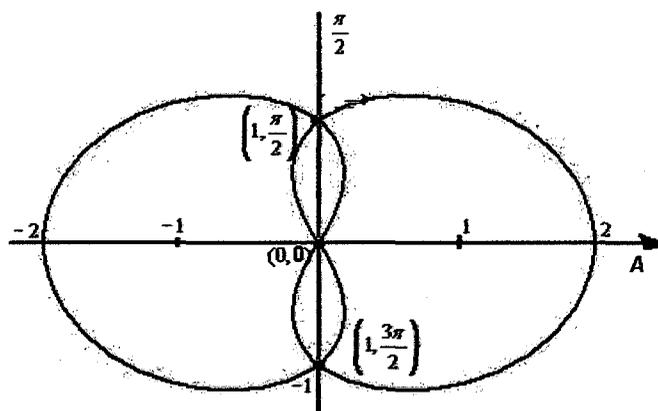


Figura 1.5.1: duas cardioides opostas e simétricas em relação ao eixo polar

Resolvendo o sistema:  $\begin{cases} r = 1 + \cos \theta \\ r = 1 - \cos \theta \end{cases} \Rightarrow 2 \cos \theta = 0$ , ou seja,  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vamos considerar  $0 \leq \theta < 2\pi$ , temos então  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ;

Substituindo esses valores nas equações obtemos os pontos  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  e  $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Observando a figura 1.5.1, note que temos três pontos de interseção e não apenas dois como sugeria o sistema, ou seja, as curvas também se encontram no pólo  $(0,0)$ .

Logo os pontos de interseção são  $(0,0)$ ,  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  e  $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

### Observação 1.5.1

Como foi visto na Seção 1.1, em coordenadas polares os pontos  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  e  $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$  podem ser representados de várias maneiras:  $\left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$  e  $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $\left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$  e  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  e  $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ ; etc.

**Exemplo 1.5.2.** Encontrar os pontos de interseção entre curvas  $r = \cos \theta$  e  $r = 1 - \cos \theta$ .

Note que as equações se referem a uma circunferência centrada no eixo polar e tangente ao eixo  $\frac{\pi}{2}$  e uma cardióide.

As equações não se alteram se  $\theta$  for substituído por  $-\theta$ , basta fazer  $\theta$  variar de 0 a  $\pi$ :

Tabela 1.5.2: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$r = \cos \theta$	1	0	-1
$r = 1 - \cos \theta$	$1 - 1 = 0$	$1 - 0 = 1$	$1 - (-1) = 2$

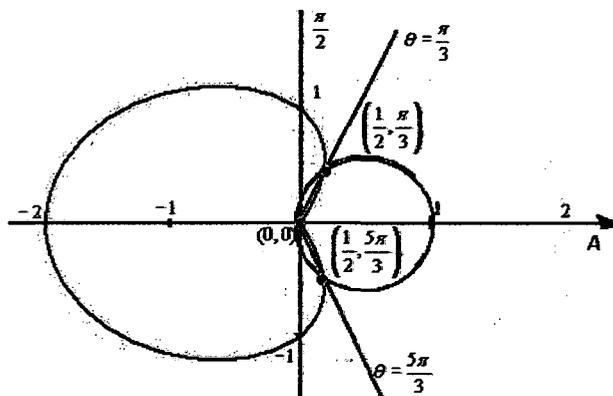


Figura 1.5.2: Uma cardióide e uma circunferência simétricas em relação ao eixo polar

Resolvendo o sistema:  $\begin{cases} r = \cos\theta \\ r = 1 - \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = 1 - \cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\theta = \frac{\pi}{3}$  ou  $\theta = \frac{5\pi}{3}$ , para  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Substituindo  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = \frac{5\pi}{3}$  nas equações temos os pontos  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$  e  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ .

Observando o gráfico temos que os pontos de interseção são  $(0,0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$  e  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ .

**Exemplo 1.5.3.** Encontre o ponto de interseção entre as curvas  $r = 1$  e  $r^2 = 2\text{sen}2\theta$ .

Trata-se de uma circunferência de raio  $r = 1$  centrada no pólo e uma lemniscata.

Tabela 1.5.2: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$r^2 = 2\text{sen}2\theta$	0	1	2	1	0

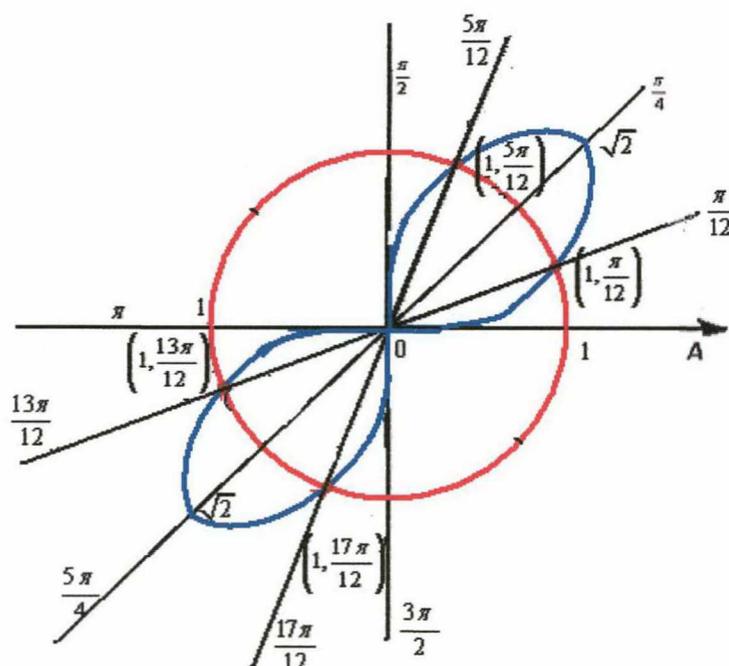


Figura 1.5.3: Circunferência centrada no pólo e uma lemniscata

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} r = 1 \\ r^2 = 2\text{sen}2\theta \end{cases} \Rightarrow 1^2 = 2\text{sen}2\theta \Rightarrow \text{sen}2\theta = \frac{1}{2}. \text{ Logo } \theta = \frac{\pi}{12}, \theta = \frac{5\pi}{12}, \theta = \frac{13\pi}{12} \text{ e } \theta = \frac{17\pi}{12}.$$

Assim os pontos de interseção entre as curvas são:  $\left(1, \frac{\pi}{12}\right), \left(1, \frac{5\pi}{12}\right), \left(1, \frac{13\pi}{12}\right)$  e  $\left(1, \frac{17\pi}{12}\right)$ .

Note que neste caso, resolvendo o sistema encontramos todos os pontos de interseção.

## 1.6 Retas tangentes a curvas polares

Dada uma curva polar  $r = f(\theta)$  tome  $\theta$  como um parâmetro e escreva as equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \text{ e } y = r \text{sen} \theta = f(\theta) \text{sen} \theta.$$

Sabemos que a inclinação de uma reta é dada por

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(r \text{sen} \theta)}{\frac{d}{d\theta}(r \cos \theta)} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \text{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \text{sen} \theta}. \quad (1)$$

Para encontrar tangentes horizontais, basta fazer  $\frac{dy}{d\theta} = 0$ , com  $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ .

Para encontrar tangentes verticais, basta fazer  $\frac{dx}{d\theta} = 0$ , com  $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ .

### Observação 1.6.1

Se considerarmos as retas tangentes no pólo, teremos  $r = 0$ . Logo a equação ficará

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \text{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \text{sen} \theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \text{sen} \theta + 0}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - 0} = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta} = \text{tg} \theta, \text{ com } \frac{dr}{d\theta} \neq 0.$$

**Exemplo 1.6.1.** Calcule a inclinação da reta tangente à curva polar  $r = 1 + \cos \theta$  em  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Temos,  $r = 1 + \cos \theta$ . Então  $\frac{dr}{d\theta} = -\text{sen}\theta$ , substituindo em (1) temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \text{sen}\theta + r \cos\theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \text{sen}\theta} = \frac{(-\text{sen}\theta)\text{sen}\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta}{(-\text{sen}\theta)\cos\theta - (1 + \cos\theta)\text{sen}\theta} = \frac{-\text{sen}^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta}{-\text{sen}\theta \cos\theta - \text{sen}\theta - \text{sen}\theta \cos\theta} = \\ &= \frac{-(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta + \cos^2\theta}{-\text{sen}\theta - 2\text{sen}\theta \cos\theta} = \frac{-1 + 2\cos^2\theta + \cos\theta}{\text{sen}\theta(-1 - 2\cos\theta)} = \frac{(-1 - \cos\theta)(1 - 2\cos\theta)}{\text{sen}\theta(-1 - 2\cos\theta)}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\theta$  por  $\frac{\pi}{6}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\left(-1 - \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(-1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(-1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{3})}{\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})} = -1. \end{aligned}$$

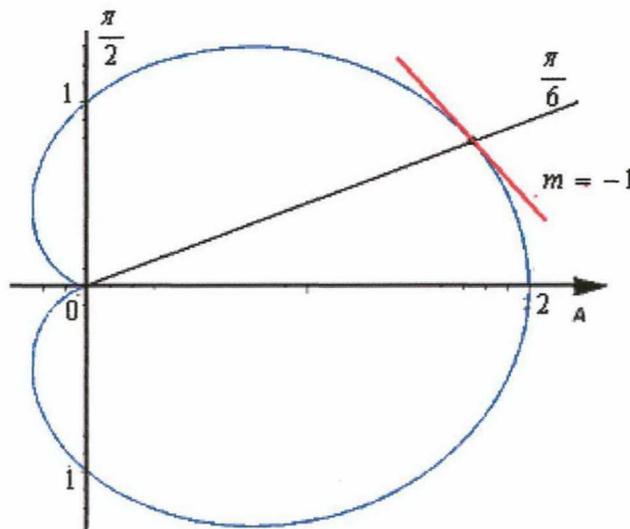


Figura 1.6.1: Cardióide simétrica ao eixo polar

**Exemplo 1.6.2.** Calcule a inclinação da reta tangente à curva polar  $r = 3 \cos \theta$  em  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Temos  $r = 3 \cos \theta$  e  $\frac{dr}{d\theta} = -3 \operatorname{sen} \theta$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta} = \frac{(-3 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + (3 \cos \theta) \cos \theta}{(-3 \operatorname{sen} \theta) - (3 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta} = \frac{-3 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \cos^2 \theta}{-3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-3 \operatorname{sen}^2 \theta + 3(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}{-6 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{-3 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 - 3 \operatorname{sen}^2 \theta}{-6 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{3 - 6 \operatorname{sen}^2 \theta}{-6 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{-2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{-2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{-2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{-1}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} + \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{-1}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \\ &= \frac{-1}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{3} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{3} = \frac{-2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

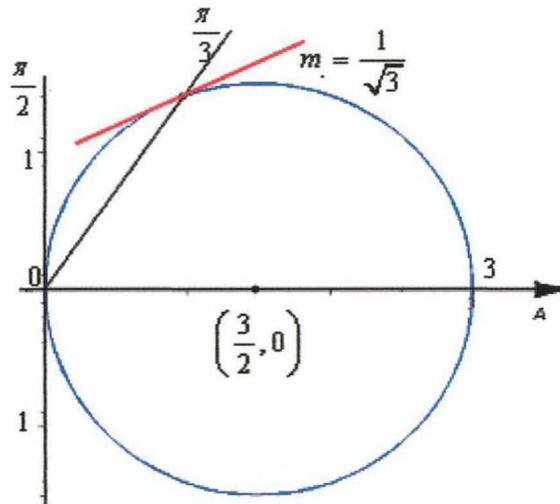


Figura 1.6.2: Circunferência simétrica ao eixo polar e tangente ao eixo  $\frac{\pi}{2}$

**Exemplo 1.6.3.** Encontre os pontos na curva  $r = 3 \cos \theta$  onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

Temos que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . Assim,

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta + r \cos\theta \text{ e } \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \operatorname{sen}\theta.$$

Para encontrar as tangentes horizontais devemos ter  $\frac{dy}{d\theta} = 0$ , isto é,

$$\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta + r \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Portanto, os pontos que admitem tangentes horizontais são  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$  e  $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

Para encontrar as tangentes verticais faremos  $\frac{dx}{d\theta} = 0$ , ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \text{ ou } \cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = 0 \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, existem tangentes verticais nos pontos  $(3, 0)$  e  $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Vamos construir a curva e as tangentes.

A curva é uma circunferência centrada no eixo polar. Como há simetria em relação eixo polar, basta fazer  $\theta$  variar de 0 ou  $\pi$  e já obtemos a circunferência.

**Tabela 1.6.3: alguns ângulos necessários para esboçar a curva**

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$r = 3 \cos\theta$	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$3 \cdot 0 = 0$	$-3 \frac{\sqrt{2}}{2}$	$3 \cdot (-1) = -3$

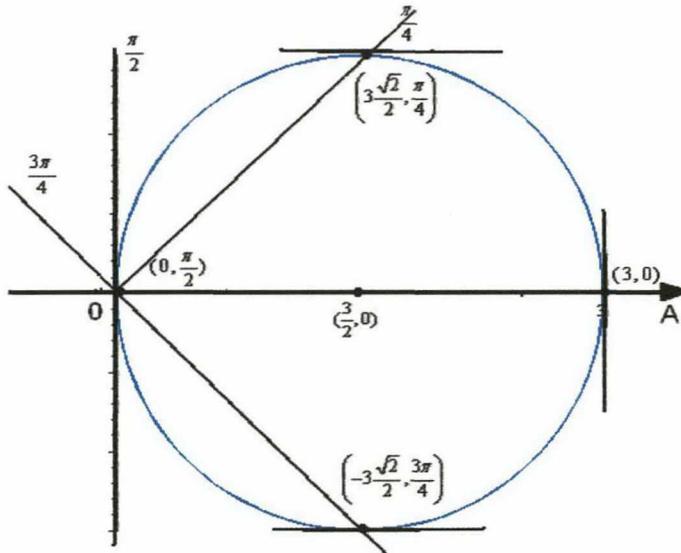


Figura 1.6.3: Circunferência e as retas tangentes horizontais e verticais

**Exemplo 1.6.4.** Encontre os pontos na curva  $r = 1 + \cos \theta$  onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

Temos que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Assim

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta.$$

Para encontrar as tangentes horizontais faremos

$$\frac{dy}{d\theta} = 0.$$

Então,

$$\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta = 0$$

ou seja,

$$(-1 - \cos \theta)(1 - 2 \cos \theta) = 0.$$

Isto ocorre quando

$$(-1 - \cos \theta) = 0 \quad \text{ou} \quad (1 - 2 \cos \theta) = 0,$$

Ou seja,

$$\cos \theta = -1 \text{ ou } \cos \theta = \frac{1}{2}.$$

Segue, para  $\theta \in [0, 2\pi]$ , que  $\theta = \frac{5\pi}{3}$  ou  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Portanto, existem tangentes horizontais nos pontos  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$  e  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ .

Para encontrar as tangentes verticais faremos  $\frac{dx}{d\theta} = 0$ .

Então,

$$\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta = 0$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} \theta (-1 - 2 \cos \theta) = 0.$$

Isto ocorre quando

$$\operatorname{sen} \theta = 0 \text{ ou } -1 - 2 \cos \theta = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} \theta = 0 \text{ ou } \cos \theta = \frac{-1}{2}.$$

Segue, para  $\theta \in [0, 2\pi]$ , que  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  ou  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ .

Portanto, existem tangentes verticais nos pontos  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$  e  $\left(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$ .

Como  $\frac{dy}{d\theta} = 0$  e  $\frac{dx}{d\theta} = 0$  quando  $\theta = \pi$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{(-1 - \cos \theta)(1 - 2 \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta (-1 - 2 \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{(1 - 2 \cos \theta)}{(-1 - 2 \cos \theta)} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{(-1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta} = -3 \cdot \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{(-1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta} = +\infty. \end{aligned}$$

Da mesma forma, usando simetria temos  $\lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$ .

Então existe uma reta tangente horizontal no pólo.

Vamos construir o gráfico da curva e das tangentes.

A curva é uma cardióide. Como há simetria em relação eixo polar, basta fazer  $\theta$  variar de 0 ou  $\pi$ .

Tabela 1.6.3: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$r = 1 + \cos \theta$	$1 + 1 = 2$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$1 + 0 = 1$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - 1 = 0$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

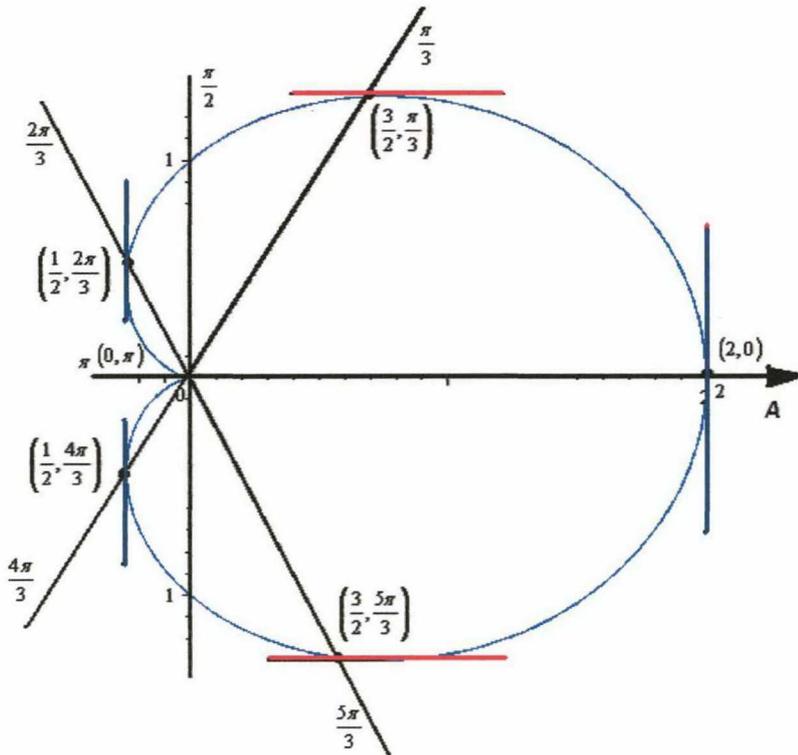


Figura 1.6.4: Cardióide e as retas tangentes horizontais e verticais

## Capítulo 2

### Comprimento de curvas dadas na forma polar

*Neste capítulo deduziremos a fórmula que fornece o comprimento de arco de uma curva dada na forma polar, para isso deduziremos a fórmula de comprimento de arco de uma curva dada na forma paramétrica. Esta fórmula consiste em uma integral definida.*

#### 2.1 Curva e comprimento de arco na forma paramétrica

Seja  $C$  uma curva na forma paramétrica, isto é,

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

onde  $x, y$  são funções deriváveis com  $x'$  e  $y'$  contínuas.

Queremos encontrar o comprimento do arco da curva  $C$ , do ponto  $A$  até  $B$  (ver figura).

Seja  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  uma partição de  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de comprimentos iguais,  $\Delta_n = t_i - t_{i-1}$ .

Sejam  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$  os pontos sobre a curva  $C$ .

Unindo os pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  temos uma poligonal cujo comprimento fornece uma aproximação do arco da curva, de  $A$  até  $B$ .

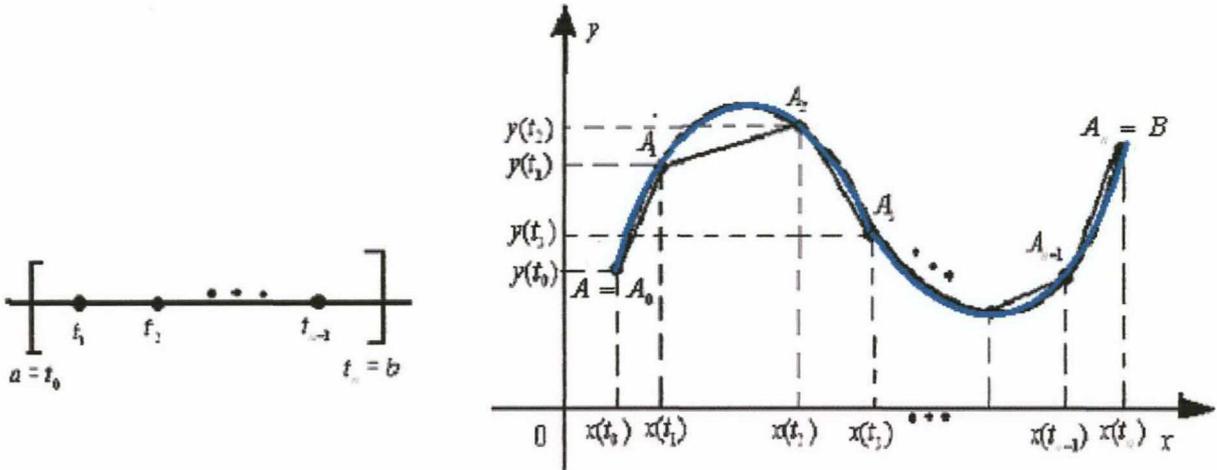


Figura 2.1

O comprimento da poligonal, denotado por  $s_n$ , é dado por:

$$\begin{aligned}
 s_n &= d(A_0, A_1) + d(A_1, A_2) + \dots + d(A_{n-1}, A_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Como as funções  $x$  e  $y$  são deriváveis em  $[a, b]$ , podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  e assim podemos escrever

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1}), \text{ onde } c_i \in (t_{i-1}, t_i) \tag{3}$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)(t_i - t_{i-1}), \text{ onde } d_i \in (t_{i-1}, t_i). \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2) temos

$$s_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(c_i)(t_i - t_{i-1})]^2 + [y'(d_i)(t_i - t_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(c_i)]^2 + [y'(d_i)]^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  temos o comprimento  $s$  da curva  $C$  de  $A$  até  $B$ , isto é,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(c_i)]^2 + [y'(d_i)]^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \tag{5}$$

A soma (5) se parece com uma soma de Riemann para a função

$$\phi(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

mas não é, pois  $c_i$  não é necessariamente igual a  $d_i$  para todo  $i$ .

Como  $x'$  e  $y'$  são contínuas, pode ser mostrado que o limite (5) é igual ao limite obtido quando  $c_i = d_i$ , ou seja,

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (6)$$

## 2.2 Comprimento de arco na forma polar

Se uma curva  $C$  é dada em coordenadas polares por  $(r, \theta)$ , como  $r$  é uma função de  $\theta$ , temos

$$(r, \theta) = (r(\theta), \theta).$$

Em coordenadas cartesianas temos que a curva  $C$  é dada por

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta).$$

Logo,

$$C = \begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

é uma parametrização da curva  $C$  com parâmetro  $\theta$ .

Da fórmula (6) temos que o comprimento de arco da curva  $C$  quando  $\theta \in [a, b]$  é

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta. \end{aligned}$$

Temos,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta$$

então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2 \theta - 2r \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2r \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cdot 1 + r^2 \cdot 1 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da curva C dada em coordenadas polares, obtida quando  $\theta$  percorre um intervalo  $[a, b]$  é

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad \text{ou} \quad s = \int_a^b \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta.$$

**Exemplo 2.2.1.** Encontrar o comprimento de arco da curva  $r = e^\theta$ , entre  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{3}$

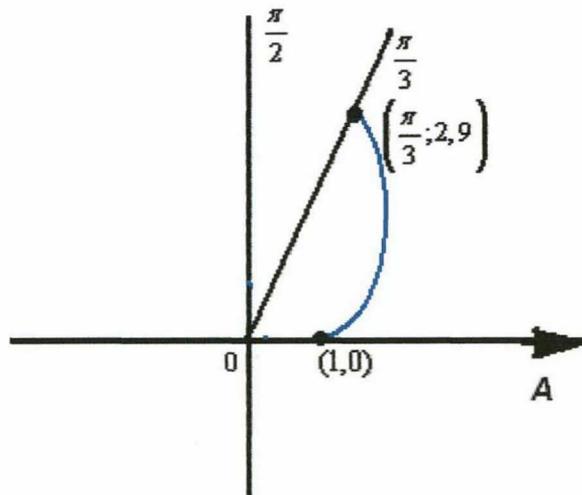


Figura 2.2.1

Sabemos que  $s = \int_a^b \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$

$$\begin{aligned} \text{Então } s &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \sqrt{e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^\theta d\theta = \sqrt{2} e^\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \sqrt{2} \left( e^{\frac{\pi}{3}} - e^0 \right) = \sqrt{2} \left( e^{\frac{\pi}{3}} - 1 \right) \text{ u.c.} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.2.** Encontrar o comprimento de arco da curva  $r = 1 + \cos \theta$ .

Sabemos que  $s = \int_a^b \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$ .

Observe no gráfico que existe simetria em relação ao eixo polar. Então basta encontrar o comprimento de  $\theta$  variando de 0 a  $\pi$  e multiplicar por 2.

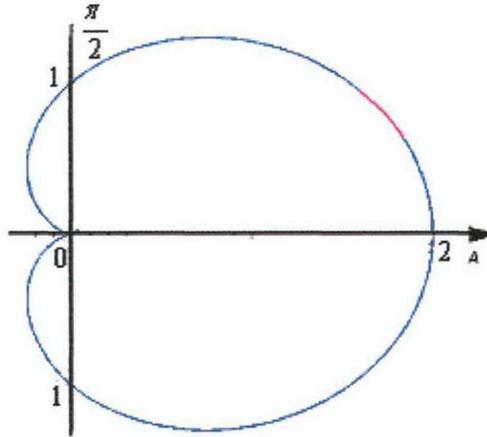


Figura 2.2.2: cardióide simétrica ao eixo polar

$$\begin{aligned} s &= 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{(-\text{sen}\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2} d\theta = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{\text{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta} d\theta \\ &= 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{1 + 1 + 2\cos\theta} d\theta = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta = 2 \cdot \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta \\ &= 2 \cdot \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \cdot \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 2 \cdot \sqrt{2} \sqrt{2} \int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \cdot 2 \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8 \left( \text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen}\frac{0}{2} \right) = 8(1 - 0) = 8 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Área em coordenadas polares

*Neste capítulo calcularemos áreas das regiões planas delimitadas por curvas dadas na forma polar. Primeiramente deduziremos a fórmula que fornece a área. Veremos que esta fórmula consiste em uma integral definida.*

### 3.1 Cálculo da área de uma curva polar

Vamos deduzir a fórmula que permitirá encontrar a área  $A$  da figura delimitada pelas retas  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  e pela curva  $r = f(\theta)$ .

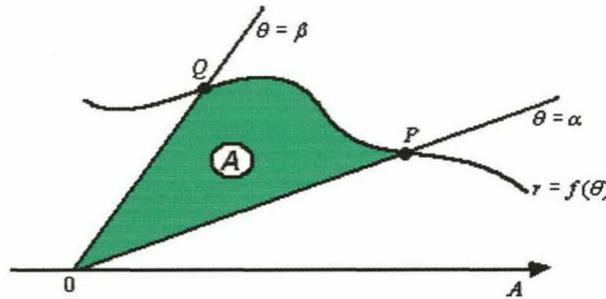


Figura 3.1.1

Considere  $f$  uma função contínua e não-negativa em  $[\alpha, \beta]$ . E seja  $P$  uma partição de  $[\alpha, \beta]$  de modo que  $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta$ , tal que  $\theta_i - \theta_{i-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$ .

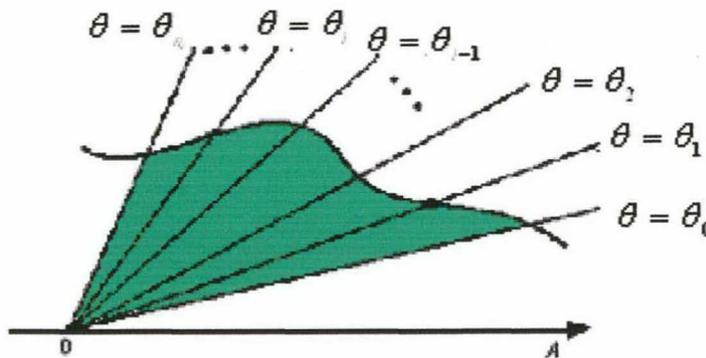


Figura 3.1.2

A área do setor circular de raio  $f(\rho_i)$  e ângulo  $\Delta\theta_i$ , onde  $\theta_{i-1} < \rho_i < \theta_i$  e  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$  é  $\frac{1}{2}[f(\rho_i)]^2 \Delta\theta_i$ .

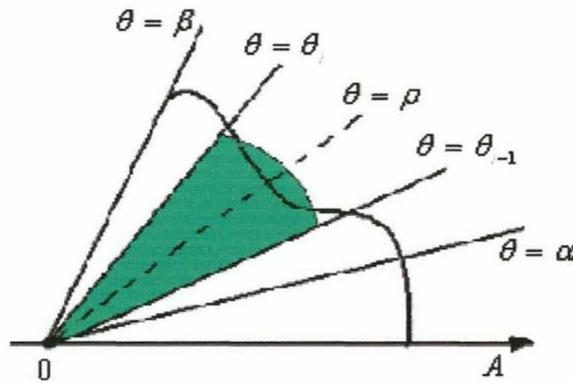


Figura 3.1.3

Uma aproximação para a área  $A$  é

$$A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\rho_i)]^2 (\theta_i - \theta_{i-1}). \quad (7)$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos a área  $A$ .

A soma (7) é uma soma de Riemann para a função

$$\phi(t) = \frac{1}{2} [f(\theta)]^2.$$

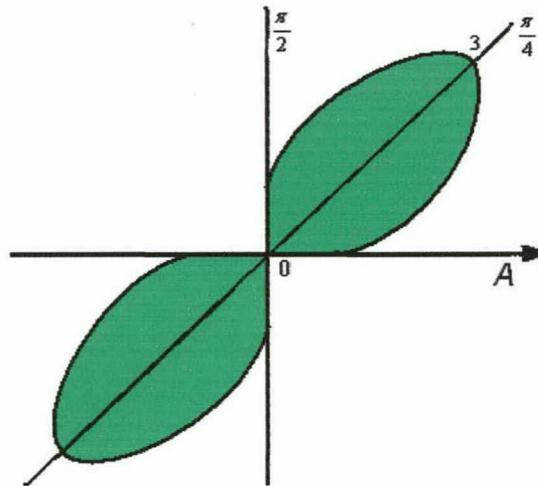
Portanto, a área da região limitada pela curva  $r = f(\theta)$  e pelas retas  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$  é

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\rho_i)]^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.1.** Calcular a área limitada pela curva dada  $r^2 = 9\text{sen}2\theta$ .

**Tabela 3.1.1:** alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}2\theta$	0	1	0
$r = \pm\sqrt{9\text{sen}2\theta}$	0	$\pm 3$	0



**Figura 3.1.1:** Lemniscata

A curva é uma lemniscata, observe que basta fazer  $\theta$  variar de 0 a  $\frac{\pi}{4}$  e usar simetria

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9 \text{sen} 2\theta d\theta = 2 \cdot 9 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen} 2\theta d\theta = -\frac{18}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -9 \left[ \cos \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \cos(2 \cdot 0) \right] = \\
 &= -9 \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -9(0 - 1) = 9 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.2.** Calcular a área limitada pela curva dada por  $r = \cos 3\theta$ .

Observe a tabela 3.1.2

Tabela 3.1.2: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = \cos 3\theta$	1	0	-1	0

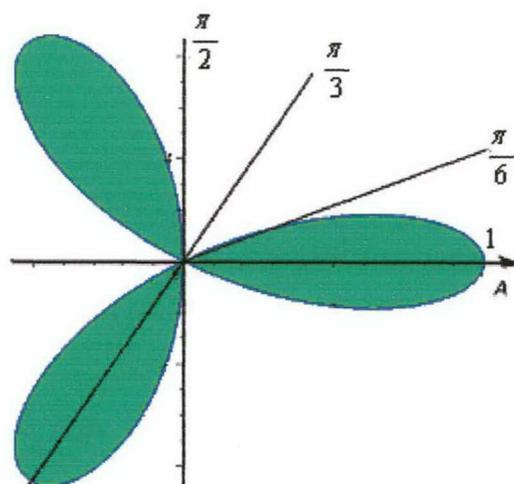


Figura 3.1.2: rosácea de três pétalas

Temos uma rosácea de três pétalas. Podemos calcular a área da metade de uma pétala e multiplicar por 6:

$$\begin{aligned}
 A &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) d\theta = 3 \left[ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{12} \text{sen}6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\
 &= 3 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{12} \text{sen}6 \cdot \frac{\pi}{6} - \left( \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{12} \text{sen}6 \cdot 0 \right) \right] = 3 \left( \frac{\pi}{12} + \frac{1}{12} \cdot 0 - 0 - \frac{1}{12} \cdot 0 \right) = 3 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.3.** Encontrar a área da região interna à curva dada pela equação  $r = 2 - \cos \theta$ .

Pela equação percebe-se que se trata de uma limaçon sem laço e que a mesma tem simetria em relação ao eixo polar. Logo, para encontrar a área basta fazer  $\theta$  variar de 0 a  $\pi$  e depois multiplicar por 2.

Tabela 3.1.3: alguns ângulos necessários para esboçar a curva

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos \theta$	1	0	-1
$r = 2 - \cos \theta$	$2 - 1 = 1$	$2 - 0 = 2$	$2 - (-1) = 3$

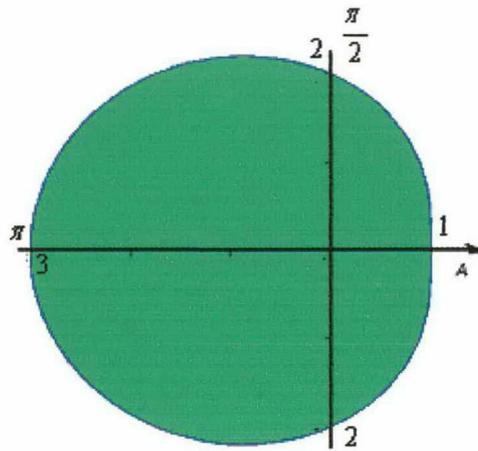


Figura 3.1.3: Limaçon sem laço

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \left( 4 - 4 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \left( 4\theta - 4 \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right) \Big|_0^{\pi} = 4\pi - 4 \operatorname{sen} \pi + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\pi - \left( 4 \cdot 0 - 4 \operatorname{sen} 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2 \cdot 0 \right) \\
 &= 4\pi - 4 \cdot 0 + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 0 - 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 = 4\pi + \frac{1}{2} \pi = \frac{9}{2} \pi \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.4.** Encontrar a área de interseção entre  $r = 4 \cos \theta$  e  $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

Resolvendo o sistema  $\begin{cases} r = 4 \cos \theta \\ r = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow 4 \cos \theta = 4 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \cos \theta = \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ , e analisando o

gráfico

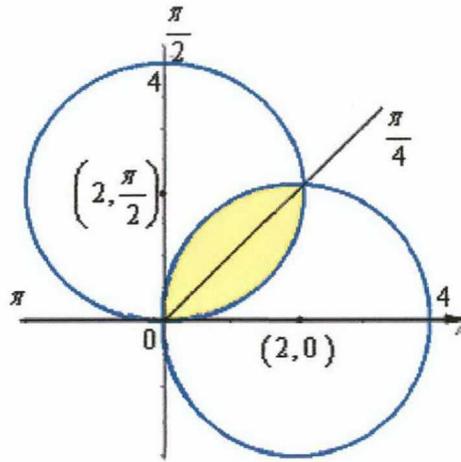


Figura 3.1.4: duas circunferências uma simétrica ao eixo polar e outra ao eixo  $\frac{\pi}{2}$

temos que as curvas se encontram no pólo e no eixo  $\frac{\pi}{4}$  que divide a área desejada em duas

regiões iguais. Assim basta considerar a curva  $r = 4 \cos \theta$  e fazer  $\theta$  variar de  $\frac{\pi}{4}$  a  $\frac{\pi}{2}$

e multiplicar por 2.

Sabemos que  $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$ . Logo

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos \theta)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 16 \cos^2 \theta d\theta = 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = 16 \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 16 \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] = 16 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= 16 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] = 16 \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] = 2\pi - 4 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.5.** Encontrar a área interior ao círculo  $r = 6 \cos \theta$  e exterior a  $r = 2 + 2 \cos \theta$ .

Note que pelas equações se trata de uma circunferência centrada no eixo polar e uma cardióide. Ambas possuem simetria em relação ao eixo polar. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r = 6 \cos \theta \\ r = 2 + 2 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow 6 \cos \theta = 2 + 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ e } \theta = \frac{5\pi}{3}.$$

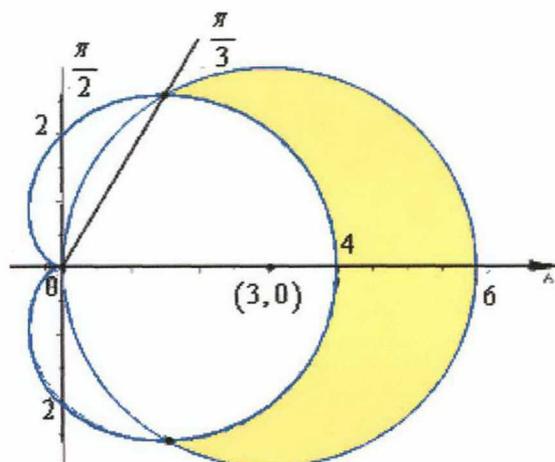


Figura 3.1.5: circunferência e cardióide simétricas ao eixo polar

Temos que as curvas se encontram no pólo e nos eixos  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$  que dividem a área desejada

em duas regiões iguais. Observe também que  $6 \cos \theta > 2 + 2 \cos \theta$  quando  $\theta$  variar de 0 a  $\frac{\pi}{3}$ .

Assim:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(6 \cos \theta)^2 - (2 + 2 \cos \theta)^2] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [36 \cos^2 \theta - (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (32 \cos^2 \theta - 8 \cos \theta - 4) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[ 32 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - 8 \cos \theta - 4 \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (16 + 16 \cos 2\theta - 8 \cos \theta - 4) d\theta \\ &= \left( 12\theta + \frac{16}{2} \text{sen} 2\theta - 8 \text{sen} \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 12 \cdot \frac{\pi}{3} + 8 \text{sen} \frac{2\pi}{3} - 8 \text{sen} \frac{\pi}{3} - 12 \cdot 0 - 8 \text{sen} 2 \cdot 0 + 8 \text{sen} 0 \\ &= 4\pi + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 4 \cdot 0 + 16 \cdot 0 = 4\pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.6.** Calcule a área interna ao laço da limaçon  $r = 1 - 2 \text{sen} \theta$ .

Observe o gráfico:

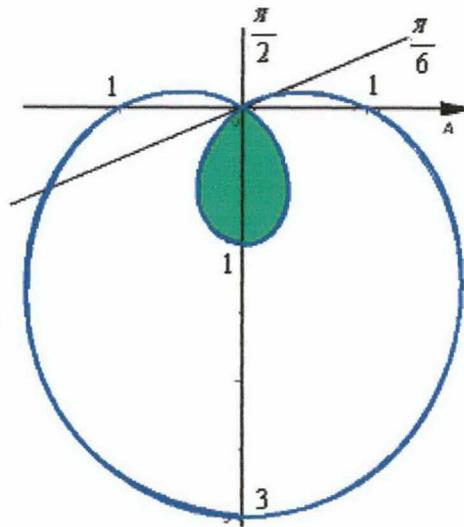


Figura 3.1.6: limaçon com laço

Sabemos que esta limaçon é simétrica em relação ao eixo  $\frac{\pi}{2}$ . Logo basta calcular a área de metade do laço e depois multiplicar por 2.

Note que o laço começa a ser formado em  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , quando chegamos em  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , obtemos metade do laço.

De (3.1) temos:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - 4\operatorname{sen}\theta + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \right] d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4\operatorname{sen}\theta + 2 - 2\cos 2\theta) d\theta = \left( 3\theta - 4(-\cos\theta) - \frac{2\operatorname{sen}2\theta}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = (3\theta + 4\cos\theta - \operatorname{sen}2\theta) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 3\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}2\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}2\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 0 - 0 - \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

## Conclusão

Com o estudo realizado, percebemos que em alguns casos o sistema de coordenadas polares apresenta algumas vantagens em relação ao sistema de coordenadas retangulares (ou cartesianas), destacando aqui, a simplicidade para a construção gráfica de algumas curvas.

Vale lembrar a importância da trigonometria para a representação de um ponto na forma polar, pois o mesmo é identificado pela distância  $r$  e sua inclinação  $\theta$ , em relação ao pólo e ao eixo polar, respectivamente. Vimos que existem várias maneiras diferentes de se representar um ponto em coordenadas polares. O que exige uma atenção particular quando estamos interessados em encontrar pontos de interseção de duas ou mais curvas, pois, às vezes, os pontos obtidos na resolução de um sistema de equações não correspondem exatamente aos procurados, tendo que recorrer a construção das curvas envolvidas.

Na construção das curvas polares procuramos esboçá-las de maneira bem clara. Construindo inicialmente uma tabela com os ângulos principais necessários, mostrando todo o procedimento passo a passo e usando sempre as simetrias quando possível.

Destacamos também a importância da integral definida, para o cálculo de comprimento de arco e área de uma curva polar. Usamos os conhecimentos da disciplina de Tópicos de Cálculo para obter as integrais que apareceram nos exemplos.

## **Referências Bibliográficas**

- [1] BUENO, Silveira. Minidicionário da língua portuguesa. FTD editora. São Paulo, 2000.
- [2] FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6 ed. Pearson editora. São Paulo, 2006.
- [3] KUELKAMP, Nilo. Cálculo 1. Editora da UFSC. Florianópolis, 2004.
- [4] STEWART, James. Cálculo, Vol. II, Pioneira Thonson Learning, São Paulo, 2005.
- [5] THOMAS, George B. Cálculo, Vol. 2. Pearson editora. São Paulo, 2000.

# Anexo 1

## TABELA – Derivadas, Integrais e Identidades Trigonômicas

### A1.1 Identidades Trigonômicas

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .
2.  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ .
3.  $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ .
4.  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .
5.  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .
6.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ .
7.  $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$ .
8.  $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ .
9.  $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$ .
10.  $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

### A1.2 Derivadas: Sejam $u$ e $v$ funções deriváveis de $x$ e $n$ constante.

1.  $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$ .
2.  $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$ .
3.  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ .
4.  $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u'$ , ( $a > 0, a \neq 1$ ).
5.  $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$ .
6.  $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$ .
7.  $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$ .
8.  $y = u^v \Rightarrow y' = v u^{v-1} u' + u^v (\ln u) v'$ .
9.  $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$ .
10.  $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$ .
11.  $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$ .
12.  $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$ .
13.  $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$ .
14.  $y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$ .

15.  $y = \text{arc sen } u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .
16.  $y = \text{arc cos } u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .
17.  $y = \text{arc tg } u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$ .
18.  $y = \text{arc cotg } u \Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$ .
19.  $y = \text{arc sec } u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$ .
20.  $y = \text{arc cosec } u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$ .

### A1.3.1 Integrais

1.  $\int du = u + c$ .
2.  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ .
3.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ .
4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$ .
5.  $\int e^u du = e^u + c$ .
6.  $\int \text{sen } u du = -\text{cos } u + c$ .
7.  $\int \text{cos } u du = \text{sen } u + c$ .
8.  $\int \text{tg } u du = \ln|\text{sec } u| + c$ .
9.  $\int \text{cotg } u du = \ln|\text{sen } u| + c$ .
10.  $\int \text{sec } u du = \ln|\text{sec } u + \text{tg } u| + c$ .
11.  $\int \text{cosec } u du = \ln|\text{cosec } u - \text{cotg } u| + c$ .
12.  $\int \text{sec } u \text{ tg } u du = \text{sec } u + c$ .
13.  $\int \text{cosec } u \text{ cotg } u du = -\text{cosec } u + c$ .
14.  $\int \text{sec}^2 u du = \text{tg } u + c$ .
15.  $\int \text{cosec}^2 u du = -\text{cotg } u + c$ .
16.  $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{u}{a} + c$ .
17.  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c, u^2 > a^2$ .
18.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$ .
19.  $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sec } \left| \frac{u}{a} \right| + c$ .
20.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$ .
21.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arc sen } \frac{u}{a} + c, u^2 < a^2$ .

### A1.3.2 Fórmulas de Recorrências

$$1. \int \operatorname{sen}^n au \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} au \cos au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int \operatorname{sen}^{n-2} au \, du .$$

$$2. \int \cos^n au \, du = \frac{\operatorname{sen} au \cos^{n-1} au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int \cos^{n-2} au \, du .$$

$$3. \int \operatorname{tg}^n au \, du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} au \, du .$$

$$4. \int \operatorname{cotg}^n au \, du = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} au \, du .$$

$$5. \int \sec^n au \, du = \frac{\sec^{n-2} au \operatorname{tg} au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int \sec^{n-2} au \, du .$$

$$6. \int \operatorname{cosec}^n au \, du = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} au \operatorname{cotg} au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int \operatorname{cosec}^{n-2} au \, du .$$