Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemática - Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática - Formação de Professor

INTEGRAIS MÚLTIPLAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM *MAXIMA* DE FORMA INTERATIVA

FOZ DO IGUAÇU
MARÇO 2011

DIEGO DIÉFERSON APOLINÁRIO

INTEGRAIS MÚLTIPLAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM *MAXIMA* DE FORMA INTERATIVA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática - Formação de Professor da UFSC, como requisito para a obtenção parcial do grau de ESPECIALISTA em Matemática.

Orientador: Daniel Norberto Kozakevich

Doutor em Matemática Aplicada - UNICAMP

FOZ DO IGUAÇU

MARÇO 2011

DIEGO DIÉFERSON APOLINÁRIO

INTEGRAIS MÚLTIPLAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM *MAXIMA* DE FORMA INTERATIVA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática - Formação de Professor da UFSC, como requisito para a obtenção parcial do grau de ESPECIALISTA em Matemática.

Apresentada em 02 de Março de 2011

BANCA EXAMINADORA

Daniel Norberto Kozakevich

Doutor em Matemática Aplicada - UNICAMP

Mário César Zambaldi

Doutor em Matemática Aplicada - UNICAMP

Fermin Sinforiano Viloche Bazãn

Doutor em Matemática Aplicada - UNICAMP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Integrais Múltiplas e Equações Diferenciais com Maxima de Forma Interativa"

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 02/03/2011

Dr. Daniel Norberto Kozakevich (CFM/UFSC – Orientador) ____________________

Dr. Fermin Sinforiano Viloche Bazan (CFM/UFSC - Examinador) ____________________

Dr. Mário César Zambaldi (CFM-UFSC - Examinador) ____________________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Foz do Iguaçu, Paraná, março de 2011.

Dedico a minha querida esposa Roberta, aos meus pais, avós e todas as pessoas que de alguma forma me incentivaram e me apoiaram nessa caminhada.

Resumo

Neste trabalho apresentamos as potencialidades do software matemático Maxima, como ferramenta facilitadora na resolução de Integrais Múltiplas e Equações Diferenciais. Iniciamos o trabalho fazendo uma abordagem as integrais de funções de duas e três variáveis, desenvolvendo por meio de exemplos, o uso dos comandos para a solução de integrais duplas, triplas, duplas na forma polar, triplas em coordenadas cartesianas, cilindrícas, esféricas e substituições em integrais múltiplas. Na seqüência desenvolvemos também por meio de exemplos os comandos utilizados na solução de equações diferenciais de primeira e segunda ordem, sistemas de equações diferencias e campo de direções e trajetórias.

Palavras-chaves: Integrais Múltiplas; Equações Diferenciais; Maxima; Sistemas de Computação Algébricos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais essa vitória em minha vida, a minha esposa, meus pais e a todos os familiares que de alguma forma me ajudaram nessa conquista.

Agradeço ao professor Daniel Norberto Kozakevich pela ajuda, compreenção e orientação neste trabalho, ao tutor Gilberto Nunes e aos amigos de classe que obtive no decorrer deste curso.

Agradeço a todos os professores que lecionaram neste curso de especialização por terem ajudado no crescimento do meu conhecimento.

Enfim agradeço a todas as pessoas que contribuiram na concretização desse sonho.

Uma verdade matemática não é simples nem complicada por si mesma. É uma verdade.

Emile Lemoines

Sumário

1 Introdução

Um Sistema de Computação Algébrica, CAS (Computer Algebra System) é um software com a capacidade de manipular em forma simbólica expressões matemáticas e realizar cálculos. Atualmente existe uma grande variedade de sistemas de computação algébrica para a solução de problemas de Matemática. Sistemas de computação algébrica, podem conduzir à novas maneiras de lidar com problemas permitindo o desenvolvimento de dezenas de experiências matemáticas que ajudam os alunos a visualizar, experimentar, fazer conjecturas razoáveis, idealizar como provar estas conjecturas, obter novas provas, perceber conexões entre conceitos e teorias e até mesmo, chegar à novas definições. Outra vantagem da computação simbólica é a possibilidade de resolução de problemas literais, ou seja, manipulando letras ao invés de números.

Maxima é um dos sistemas CAS mais antigos. Foi criado pelo grupo MAC no MIT, na década de 1960, e inicialmente chamava-se Macsyma (project MAC's SYmbolic MAnipulator). Macsyma foi desenvolvido inicialmente para os computadores de grande escala DEC-PDP-10 que eram usados em várias instituições acadêmicas. Na década de 1980 foi portado para várias novas plataformas, e uma das novas versões foi designada de Maxima. Em 1982 o MIT decidiu comercializar Macsyma e, em forma paralela, o professor William Schelter da Universidade de Texas continuou a desenvolver Maxima.

Na segunda metade da década de 1980 apareceram outros sistemas CAS proprietários, como Maple e Mathematica, e em 1999 a versão proprietária de Macsyma foi vendida e retirada do mercado, incapaz de concorrer contra os outros sistemas CAS proprietários. Em 1998 o professor Schelter obteve autorização do DOE (Department of Energy), que tinha os direitos de autor sobre a versão original de Macsyma, para distribuir o código fonte de Maxima.

Após a morte do professor Schelter em 2001, formou-se um grupo de voluntários que continuam a desenvolver e distribuir Maxima como software livre. Maxima partilha as muitas vantagens do software livre: acesso ao código fonte, criação de um espírito de comunidade e partilha, criação de patrimônio cultural da humanidade, maior segurança, preço mais baixo - pode ser obtido em forma gratuita, mas se alguém quiser pode vender cópias por um preço razoável. No caso dos sistemas CAS algumas dessas vantagens são ainda mais importantes.

2 Integrais Múltiplas

Neste capitulo, abordaremos a integral de uma função de duas variáveis $f(x,y)$ sobre uma região no plano e a integral de uma função de três variáveis $f(x,y,z)$ sobre uma região no espaço. Essas integrais são chamadas integrais múltiplas e são definidas como o limite da aproximação das somas de Riemann, basicamente como as integrais de uma única variável. As integrais múltiplas permitem-nos considerar aplicações que envolvam sólidos e superfícies obtidos pela revolução de uma região plana ou uma curva em torno de uma reta.

Usamos integrais múltiplas para calcular quantidades que variam acima de duas ou três dimensões, tais como a massa total ou o momento angular de um objeto de densidade variável e os volumes de sólidos com bordas curvas.

2.1 Integrais Duplas

Para calcular uma integral definida de uma função de duas variáveis, podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo para integrais considerando o integrando como uma função de uma variável, tratando a outra como constante, conforme o exemplo a seguir:

$$\int_1^{2y} 2xydx = x^2y\Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y$$

Maxima tem muitas maneiras para manusear a integração. Nesta seção trataremos da função `integrate`. Essa função calcula a integral de uma expressão em relação a uma variável, considere a função `integrate(expr, x)` está é uma integral indefinida, enquanto que `integrate(expr, x, a, b)` é uma integral definida, com limites de integração `a` e `b`.

Considerando o exemplo acima em que possuimos a expressão $2xy$, variável x e limites de integração 1 e $2y$ podemos verificar como se utiliza tal função.

```
(%i1)  integrate(2*x*y, x, 1, 2*y);
```

(%o1)

$$2\,y\,\left(2\,y^2-\frac{1}{2}\right)$$

Exemplo 2.1.1. Cálculo de integrais parciais

$$a)\int_1^x (2x^2y^{-2}+2y)dy$$

```
(%i2) integrate(2*x^2*y^-2+2*y, y, 1, x);
```

(%o2)

$$3\,x^2-2\,x-1$$

$$b)\int_y^{5y}\sqrt{x-y}dx$$

```
(%i3) integrate(sqrt(x-y), x, y, 5*y);
```

(%o3)

$$\frac{16\,y^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$c)\int_1^2 xy^2dx$$

```
(%i4) integrate(x*y^2), x, 1, 2);
```

(%o4)

$$\frac{3\,y^2}{2}$$

$$d)\int_{-1}^1 xy^2dy$$

```
(%i5) integrate(x*y^2), y, -1, 1);
```

(%o5)

$$\frac{2\,x}{3}$$

No exemplo 2.1.1, nota-se que a integral definida estabelece uma função de x ou y que pode, ela própria ser também integrada. Uma integral de uma integral chama-se integral dupla. Ao integrarmos uma função $f(x,y)$ em relação a x, obtemos uma função apenas de y, que pode então ser integrada como uma função de uma variável. O resultado é a chamada integral iterada.

Utilizando-se da parte c) e d) do exemplo 2.1.1 podemos obter a integral iterada

$$\int_1^2 \int_{-1}^1 xy^2 dydx$$

que através do Maxima podemos resolvê-la utilizando o seguinte comando

```
integrate(integrate(função,variável,1°lim,2°lim),variável,1°lim,2°lim)
```

Exemplo 2.1.2. Cálculo de integrais iteradas

$$a) \int \int xy^2 dydx$$

```
(%i6)  integrate(integrate(x*y^2,y),x);
(%o6)
```

$$\frac{x^2\, y^3}{6}$$

$$b) \int_1^2 \int_{-1}^1 xy^2 dydx$$

```
(%i7)  integrate(integrate(x*y^2, y, -1, 1), x, 1, 2);
(%o7)
```

$$1$$

$$c) \int \int (2x + 6x^2 y) dydx$$

uma outra maneira de se calcular integrais no Maxima é definindo primeiramente o comando da função

```
(%i8) f(x,y):=2*x+6*x^2*y;
```

(%o8)

$$f(x,y) := 2x + 6x^2 y$$

```
(%i9) integrate(integrate(f(x,y), y), x);
```

(%o9)

$$x^3 y^2 + x^2 y$$

Exemplo 2.1.3. Calcule a integral dupla

$$\int_R\int xe^{-y}dA$$

onde R é a região retangular $-2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 5$.

Solução

a) integrando primeiro em relação a x;

$$\int_R\int xe^{-y}dA = \int_0^5\int_{-2}^1 xe^{-y}dxdy$$

```
(%i10) f(x,y):=x*e^-y;
```

(%o10)

$$f(x,y) := x\,e^{-y}$$

```
(%i11) integrate(integrate(f(x,y), x, -2, 1), y, 0, 5);
```

(%o11)

$$-\frac{3\int_0^5 \frac{1}{e^y}dy}{2} = \frac{3}{2}(e^{-5} - 1)$$

b) integrando primeiro em relação a y.

$$\int_R\int xe^{-y}dA = \int_{-2}^1\int_0^5 xe^{-y}dydx$$

```
(%i12) f(x,y):=x*e^-y;
```

(%o12)

$$f(x,y) := x\,e^{-y}$$

```
(%i13) integrate(integrate(f(x,y), y, 0, 5), x, -2, 1);
```

(%o13)

$$-\frac{3\int_0^5 \frac{1}{e^y}dy}{2} = \frac{3}{2}(e^{-5}-1)$$

Diante disso dizemos que a ordem de integração não faz diferença. É importante observar que o Maxima não fornece constantes de integração assim é importante recordá-las.

2.2 Integrais Duplas na Forma Polar

As integrais algumas vezes são mais fáceis de calcular se mudarmos para coordenadas polares. Nesta seção mostraremos como fazer a mudança e como calcular integrais dadas por equações polares utilizando-se do Maxima.

Sob condições adequadas, uma integral dupla iterada em coordenadas retangulares pode ser transformada em uma integral dupla em coordenadas polares. O procedimento para mudar uma integral cartesiana $\int\int_R f(x,y)\ dx\ dy$ para uma integral polar é composto por dois passos. Primeiro, substituimos $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e troca-se $dx\ dy$ por $r\ dr\ d\theta$ na integral cartesiana. Em seguida, se estabelece os limites polares de integração para a fronteira de R.

A integral cartesiana então se torna

$$\int\int_R f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ dr\ d\theta$$

onde G denota a região de integração em coordenadas polares. Observe que $dx\ dy$ não é substituida por $dr\ d\theta$, mas por $r\ dr\ d\theta$.

Exemplo 2.2.1. Considere

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dydx$$

integrando em relação a y, temos

$$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right)dx$$

uma integral difícil de calcular sem tabelas.

As coisas melhoram se mudamos a integral original para coordenadas polares. Substituindo $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e trocando $dx\ dy$ por $r\ dr\ d\theta$, obtemos

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dydx = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2)rdrd\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}^{r=0} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\ d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Calcular integrais duplas na forma polar com o auxilio do Maxima é muito prático, acompanhe algumas instruções. Para realizarmos a substituição considere o comando `[x,y]:  [r * cos(theta), r * sin(theta)]` e assim como na seção anterior para efetuarmos o cálculo das integrais utilizaremos a função **`integrate`**. Utilizando-se do exemplo 2.2.1 resolvendo a integral teremos

```
(%i1)  [x,y]:  [r * cos(theta), r * sin(theta)];
(%o1)
```

$$[\mathrm{r}\cos(\theta), \mathrm{r}\sin(\theta)]$$

```
(%i2)  integrate(integrate((x^2 + y^2)*r,r,0,1),theta,0,%pi/2);
(%o2)
```

$$\frac{\pi}{8}$$

Exemplo 2.2.2. Cálculo de integrais usando coordenadas polares

Seja

$$\int\int_R e^{x^2+y^2} dydx$$

onde R é a região semicircular limitada pelo eixo x e pela curva $y = \sqrt{1-x^2}$.

Em coordenadas cartesianas, a integral em questão é uma integral não elementar e não existe maneira direta de integrar $e^{x^2+y^2}$ em relação a x ou y. Ainda assim, essa integral e outras integrais como esta são importantes em matemática, uma maneira de calculá-la e utilizando-se das coordenadas polares. Utilizando o Maxima temos:

```
(%i3)  f(x,y):= e^(x^2+y^2);
```

(%o3)

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}\right) := \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$$

```
(%i4) [x,y]:  [r * cos(theta), r * sin(theta)];
```

(%o4)

$$[\mathrm{r}\cos\left(\theta\right), \mathrm{r}\sin\left(\theta\right)]$$

```
(%i5) integrate(integrate((e^(x^2+y^2)*r,r,0,1),theta,0,%pi);
```

(%o5)

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2}}{2\log\left(\mathrm{e}\right)\sin\left(\theta\right)^2+2\log\left(\mathrm{e}\right)\cos\left(\theta\right)^2} - \frac{1}{2\log\left(\mathrm{e}\right)\sin\left(\theta\right)^2+2\log\left(\mathrm{e}\right)\cos\left(\theta\right)^2} d\theta = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-1)$$

Considere agora

$$\int\int(4-x^2-y^2)dydx$$

utilizando coordenadas polares para calcular a integral

```
(%i6) f(x,y):=4-x^2-y^2;
```

(%o6)

$$\mathrm{f}\left(x,y\right) := 4-x^2-y^2$$

```
(%i7) [x,y]:  [r * cos(theta), r * sin(theta)];
```

(%o7)

$$[r\cos\left(\theta\right), r\sin\left(\theta\right)]$$

```
(%i8) integrate(integrate((4-x^2-y^2)*r, r), theta);
```

(%o8)

$$\frac{\left(-r^4+8\,r^2-16\right)\theta}{4}$$

2.3 Integrais Triplas em Coordenadas Cartesianas

Assim como as integrais duplas nos permitem lidar com situações mais gerais que aquelas com as quais poderíamos lidar usando integrais simples, as integrais triplas nos permitem resolver problemas ainda mais gerais. O comando da integral tripla é simples, se você conseguiu compreender bem os comandos que já foi lhe apresentado nos tópicos anteriores ficará ainda mais fácil de entendê-lo.

Exemplo 2.3.1. Cálculo de integrais triplas

$$a) \int_{-1}^{1}\int_{3}^{4}\int_{0}^{2}(xy^2+yz^3)dzdydx$$

```
(%i1) f(x,y):= x*y^2+y*z^3;
```

(%o1)

$$\mathrm{f}\left(x,y\right) := x\,y^2+y\,z^3$$

```
(%i2) integrate(integrate(integrate(x*y^2+y*z^3,z,0,2),y,3,4),x,-1,1);
```

(%o2)

$$28$$

$$b) \int_{0}^{y-x}\int_{x}^{1}\int_{0}^{1} dzdydx$$

```
(%i3) f(x,y):= 1;
```

(%o3)

$$\mathrm{f}\left(x,y\right) := 1$$

```
(%i4) integrate(integrate(integrate(f(x,y),z,0,y-x),y,x,1),x,0,1);
```

(%o4)

$$\frac{1}{6}$$

$$c) \int\int\int y\ sinz\ dxdydz$$

```
(%i5) f(x,y):= y*sin(z);
```

(%o5)

$$f(x,y) := y\sin(z)$$

```
(%i6) integrate(integrate(integrate(f(x,y),x),y),z);
```

(%o6)

$$-\frac{x\,y^2\cos(z)}{2}$$

2.4 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Quando um cálculo em física, engenharia ou geometria envolve um cilindro, um cone ou uma esfera, frequentemente podemos simplificar nosso trabalho usando coordenadas cilíndricas ou esféricas. O procedimento de transformação para essas coordenadas e do cálculo das integrais triplas resultantes é semelhante à transformação para coordenadas polares visto na seção 2.2.

Obtemos coordenadas cilíndricas para o espaço, combinando coordenadas polares no plano xy com com o eixo z usual. Isso associa a cada ponto no espaço uma ou mais ternas ordenadas da forma (r, θ, z). Relacionando coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, θ, z), teremos que substituir x, y e z respectivamente por $rcos\theta$, $rsin\theta$ e z. Ao realizar mudança de coordenadas cartesianas para cilíndricas consideraremos a seguinte correspondencia $dx\ dy\ dz = dz\ rdr\ d\theta$.

Exemplo 2.4.1. Cálculo de integrais cilindricas

Seja

$$\int\int\int x^2 + y^2\ dzdydx$$

```
(%i1) f(x,y,z):=x^2+y^2;
```

(%o1)

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2$$

```
(%i2)  [x,y,z] :  [r*cos(theta), r*sin(theta), z];
```

(%o2)

$$[r\cos(\theta), r\sin(\theta), z]$$

```
(%i3)  integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*r, z), r), theta);
```

(%o3)

$$\frac{r^4\,\theta\,z}{4}$$

Se definirmos um limite de integração

```
(%i4)  integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*r, z,0,r^2), r,0,2),
       theta,0,2*%pi);
```

(%o4)

$$\frac{64\,\pi}{3}$$

Coordenadas esféricas posicionam pontos no espaço por ternas ordenadas (ρ, ϕ, θ), nos quais: (ρ) é a distância do ponto a origem, (ϕ) é o ângulo que (ρ) forma com o eixo z positivo e (θ) é o ângulo das coordenadas cilíndricas.

Logo podemos definir os comandos, da mesma forma que definimos anteriormente, uma vez que basta substituirmos x, y e z respectivamente por $\rho\sin(\phi)\cos(\theta)$, $\rho\sin(\phi)\sin(\theta)$ e $\rho\cos(\theta)$ e $dx\ dy\ dz = \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$.

Exemplo 2.4.2. Cálculo de integrais esféricas

Considere

$$\int\int\int x^2 + y^2\ dzdydx$$

```
(%i5)  f(x,y,z):=x^2+y^2;
```

(%o5)

$$\mathrm{f}(x, y, z) := x^2 + y^2$$

```
(%i6)  [x,y,z] :  [rho*sin(phi)*cos(theta), rho*sin(phi)*sin(theta),
                   rho*cos(theta)];
```

(%o6)

$$[\sin(\phi)\ \rho\cos(\theta), \sin(\phi)\ \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta)]$$

```
(%i7) integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*rho^2*sin(phi),rho),
      phi),theta);
```

(%o7)

$$-\frac{\cos(\phi)\ \rho^3\,\theta\ (y^2+x^2)}{3}$$

Definindo um limite de integração

```
(%i8) integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*rho^2*sin(phi), rho,
      0,1), phi,0,%pi/3)theta,0,2*%pi);
```

(%o8)

$$\frac{\pi}{12}$$

2.5 Substituições em Integrais Múltiplas

Mostraremos nesta seção como calcular integrais múltiplas por meio de substituições. Como ocorre na integração simples, o objetivo da substituição e trocar integrais complicadas por integrais mais fáceis de calcular. Como você já deve saber, fazemos substituições em integrais duplas através de mudanças de variáveis como transformações de regiões. Suponha que uma região G no plano uv seja transformada biunivocamente na região R no plano xy por equações da forma $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$, assim toda função $f(x,y)$ definida em R pode ser imaginada como uma função $f(g(u,v),h(u,v))$ definida também em G.

Dizemos então que

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_G f(g(u,v),h(u,v)) \mid J(u,v) \mid dudv$$

em que $\mid J(u,v) \mid$ é o fator jacobiano da transformação de coordenadas. Ele mede o quanto a transformação está expandindo ou contraindo a área ao redor de um ponto.

O comando utilizado no Maxima para fazer esta transformação será o `integrate` (`integrate(f(g(u,v),h(u,v))*J, variável), variável)`, onde J é o fator jacobiano, uma função que está no pacote linearalgebra.

Exemplo 2.5.1. Usando uma transformação para integrar

Calcule

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2\,x)^2\; dydx$$

Considere como sugestão a transformação $u = x + y$ e $v = y - 2x$ em que a álgebra nos produzirá x e y em funções de u e v.

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3},\; y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$$

Solução

```
(%i1)  f(x,y):=sqrt(x+y)*(y-2*x)^2;
```

(%o1)

$$\mathrm{f}\,(x,y) := \sqrt{x+y}\,(y-2\,x)^2$$

Fazendo a transformação

```
(%i2)  [x,y]:  [u/3 - v/3, (2*u)/3+v/3];
```

(%o2)

$$[\frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \frac{v}{3} + \frac{2\,u}{3}]$$

O jacobiano da transformação

```
(%i3)  J: jacobian([x,y], [u,v]);
```

(%o3)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
(%i4)  J: determinant(J);
```

(%o4)

$$\frac{1}{3}$$

```
(%i5)  integrate(integrate(f(x,y)*J, v,-2*u,u), u,0,1);
```

(%o5)

$$\frac{2}{9}$$

As substituições em integrais triplas são de forma análoga ao das integrais duplas, exceto pelo fato de que agora trabalhamos em três dimensões, em vez de duas. Suponha que uma região G no espaço de variáveis uvw seja transformada biunivocamente na região D no espaço xyz pelas equações diferenciáveis da forma $x = g(u, v, w), y = h(u, v, w)$ e $z = k(u, v, w)$. Então qualquer função $f(x, y, z)$ definida em D pode ser considerada uma função $f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w))$ definida também em G.

Assim

$$\int\int_D\int f(x,y,z) = \int\int_G\int f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)) \mid J(u,v,w) \mid dudvdw$$

Exemplo 2.5.2. Usando uma transformação para integrar

Calcule

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dxdydz$$

Solução

```
(%i6) f(x,y,z):= (2*x-y)/2)+z/3;
```

(%o6)

$$\mathrm{f}(x,y,z) := \frac{2\,x-y}{2}+\frac{z}{3}$$

Fazendo a transformação

```
(%i7) [x,y,z]: [u + v, 2*v, 3*w];
```

(%o7)

$$[v+u, 2\,v, 3\,w]$$

O jacobiano da transformação

```
(%i8) J: jacobian([x,y,z], [u,v,w]);
```

(%o8)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i9)  J: determinant(J);
```

(%o9)

$$6$$

```
(%i10)  integrate(integrate(integrate(f(x,y,z) * J, u,0,1), v,0,2),
        w,0,1);
```

(%o10)

$$12$$

3 Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais desempenham um papel muito importante na engenharia e nas ciências exatas. Muitos problemas conduzem a uma ou mais equações diferenciais que deverão ser resolvidas. Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob forma das respectivas derivadas, em especial trabalharemos com as equações diferenciais ordinárias em que contém apenas funções de uma variável e derivadas daquela mesma variável.

A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a forma de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas.

Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação da forma:

$$F(x, y'(x), y''(x), y'''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais. x é a variável independente e y é a variável dependente. Se a função F depende linearmente da variável $y(x)$, ela é chamada de equação linear de ordem n. Neste capitulo apresentaremos alguns comandos do Maxima para auxiliar na resolução de equações diferenciais ordinárias.

3.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

No estudo das equações diferenciais podemos observar que existem várias maneiras de resolver uma equação diferencial de primeira ordem utilizando alguns métodos. Cada método tem suas facilidades e se tornam úteis de acordo com o tipo de equação dada. Entre elas, as Equações Separáveis, Homogêneas, Exatas e Lineares e Não-Lineares.

Em Maxima na realização do cálculo de equações diferenciais usamos o comando `'diff(y,x)`, para representar o termo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Para resolvermos EDO's de primeira ou até mesmo de segunda ordem, utilizamos a função `ode2`, função está que é declarada da seguinte forma: `ode2 (EDO, variável dependente, variável independente)`.

Quando a equação possui solução, esta será (explícita ou implícita) para a variável dependente. O símbolo `%c` é usado para representar a constante, no caso de equações de primeira ordem. Se `ode2` não pode obter a solução por alguma razão, então aparece a palavra `false`, seguido, às vezes, de uma mensagem de erro. O método implementado para equações diferenciais de primeira ordem na seqüência na qual eles são testados são: linear, separável, exato - talvez requerendo um fator de integração, homogêneos, equação de Bernoulli, e um método homogêneo geral.

Exemplo 3.1.1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

Solução

```
(%i1)   'diff(y,x)=x^2/y^2;
```

(%o1)

$$\frac{d}{d\,x}\,y = \frac{x^2}{y^2}$$

```
(%i2)   ode2(%,y,x);
```

(%o2)

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \%c$$

Obs: Podemos utilizar o simbolo, % no lugar da EDO na função `ode2`, pois este simbolo sempre refere-se ao último resultado calculado.

Exemplo 3.1.2. Determine a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

Solução

A equação pode ser reescrita como

$$e^y\frac{dy}{dx} = e^x$$

```
(%i3) 'diff(y,x)*e^y=e^x;
```

(%o3)
$$e^y \left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) = e^x$$

```
(%i4) ode2(%,y,x);
```

(%o4)
$$\frac{e^y - e^x}{\log(e)} = \%c$$

Nos exemplos acima pode-se observar que a solução das equações diferenciais não está totalmente simplificada, assim podemos usar o comando **ratexpand** para fazermos está simplificação. Este comando expande a expressão dada, multiplicando para fora produtos de somas e somas exponenciadas, combinando frações sobre um denominador comum, cancelando o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador, então quebrando o numerador (se for uma soma) dentro de suas respectivas parcelas divididas pelo denominador. Aplicando temos:

```
(%i5) ode2(%o3,y,x);
```

(%o5)
$$\frac{e^y - e^x}{\log(e)} = \%c$$

```
(%i6) ratexpand(%);
```

(%o6)
$$\frac{e^y}{\log(e)} - \frac{e^x}{\log(e)} = \%c$$

Podemos utilizar também o comando **ratsimp**, comando este que simplifica a expressão dada e todas as suas subexpressões, incluindo os argumentos para funções não racionais.

```
(%i7) ode2(%o1,y,x);
```

(%o7)
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \%c$$

```
(%i8) ratsimp(%);
```

(%o8)

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3 + 3\,\%c}{3}$$

Exemplo 3.1.3. Calcule a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Solução

Podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

```
(%i9)  'diff(y,x)= (1+y^2)/(1+x^2);
```

(%o9)

$$\frac{d}{d\,x}\,y = \frac{y^2+1}{x^2+1}$$

```
(%i10)  ode2(%,y,x);
```

(%o10)

$$\operatorname{atan}(y) = \operatorname{atan}(x) + \%c$$

Quando trabalhamos com equações diferenciais podemos ter um valor da função em um ponto qualquer, com este valor podemos determinar a constante `%c` obtida. Esse valor é chamado de condição inicial e a equação diferencial junto com a condição inicial forma um problema de valor inicial (PVI). A função utilizada no Maxima para resolver um PVI de primeira ordem é `ic1`, onde a sintaxe do comando é: `ic1(solução geral, valor da variável independente, valor da variável dependente)`.

Vamos aplicar um PVI ao Maxima.

Exemplo 3.1.4. Resolva as equações diferenciais dadas

$$a)\;\; 4\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0, \textit{sendo}\;\; y(4) = 2$$

Solução

```
(%i11)  4*'diff(y,x) + x/y = 0;
```

(%o11)

$$4\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+\frac{x}{y}=0$$

(%i12) `ode2(%,y,x);`

(%o12)

$$-2\,y^2=\frac{x^2}{2}+\%c$$

(%i13) `ic1(%o12,x=4,y=2);`

(%o13)

$$-2\,y^2=\frac{x^2-1}{2}$$

$$b)\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-3y^2}{2xy},\ sendo\ \ y(1)=0$$

Solução

(%i14) `'diff(y,x)= (x^2-3*y^2)/(2*x*y);`

(%o14)

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{x^2-3\,y^2}{2\,x\,y}$$

(%i15) `ode2(%,y,x);`

(%o15)

$$\frac{5\,x^3\,y^2-x^5}{5}=\%c$$

(%i16) `ic1(%o15,x=1,y=0);`

(%o16)

$$\frac{5\,x^3\,y^2-x^5}{5}=-\frac{1}{5}$$

3.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Ao estudarmos na seção anterior algumas funções que nos auxiliam na resolução de EDOs de primeira ordem no Maxima, conhecemos a função `ode2`, função responsável em determinar a solução geral das equações diferenciais. Como já foi mencionado anteriormente utilizaremos esta mesma função para determinarmos a expressão geral de EDOs de segunda ordem. Quanto a constante troca-se o simbolo `%c` pelos simbolos `%k1` e `%k2`, já que teremos duas constantes. Para derivadas de ordem superior, o comando `'diff(y,x)` necessita ser aplicado citando a grau da derivada, assim `'diff(y,x,n)`, onde `n` representa a ordem da equação diferencial.

O método implementado para equações diferenciais de segunda ordem na seqüência na qual eles são testados são: coeficiente constante, exato, linear homogêneo com coeficientes não-constantes os quais podem ser transformados para coeficientes constantes, o Euler ou equação equidimensional, o método de variação de parâmetros, e equações as quais são livres ou da variável independente ou da dependente de modo que elas possam ser reduzidas duas equações lineares de primeria ordem para serem resolvidas seqüêncialmente.

Exemplo 3.2.1. Resolva a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0$$

Solução

```
(%i1)  'diff(y,x,2) - 'diff(y,x) + (1/4)*y = 0;
```

(%o1)

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y - \frac{d}{d\,x}\,y + \frac{y}{4} = 0$$

```
(%i2)  ode2(%,y,x);
```

(%o2)

$$y = (\%k2\,x + \%k1)\,e^{\frac{x}{2}}$$

```
(%i3)  ratexpand(%);
```

(%o3)

$$y = \%k2\,x\,e^{\frac{x}{2}} + \%k1\,e^{\frac{x}{2}}$$

Exemplo 3.2.2. Ache a solução geral de

$$y''(x) - y(x) = x^2$$

Solução

(%i4) `'diff(y,x,2) - y = x^2;`

(%o4)
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y - y = x^2$$

(%i5) `ode2(%,y,x);`

(%o5)
$$y = \%k1\,e^x + \%k2\,e^{-x} - x^2 - 2$$

(%i6) `ratexpand(%);`

(%o6)
$$y = \%k1\,e^x + \%k2\,e^{-x} - x^2 - 2$$

Exemplo 3.2.3. Resolva as equações diferenciais:

$$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0 \quad \text{e} \quad y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$$

Solução

(%i7) `'diff(y,x,2) + 2*'diff(y,x) + 3*y = 0;`

(%o7)
$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + 2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 3\,y = 0$$

(%i8) `ode2(%,y,x);`

(%o8)
$$y = e^{-x}\,\left(\%k1\sin\left(\sqrt{2}\,x\right) + \%k2\cos\left(\sqrt{2}\,x\right)\right)$$

(%i9) `ratexpand(%);`

(%o9)
$$y = \%k1\,e^{-x}\sin\left(\sqrt{2}\,x\right) + \%k2\,e^{-x}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right)$$

```
(%i10) 'diff(y,x,2) + 4*'diff(y,x) + 13*y = 0;
```

(%o10)

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+13\,y=0$$

```
(%i11) ode2(%,y,x);
```

(%o11)

$$y=e^{-2\,x}\,\left(\%k1\sin\left(3\,x\right)+\%k2\cos\left(3\,x\right)\right)$$

```
(%i12) ratexpand(%);
```

(%o12)

$$y=\%k1\,e^{-2\,x}\sin\left(3\,x\right)+\%k2\,e^{-2\,x}\cos\left(3\,x\right)$$

Na seção anterior foi apresentado a função `ic1`, responsável em determinar um PVI de primeira ordem. Na resolução de EDOs de segunda ordem, assim como nas de primeira ordem também podemos determinar o valor de um PVI. A função utilizada no Maxima para resolver um PVI de segunda ordem é `ic2`, onde a sintaxe do comando é representada por: `ic2 (solução geral, valor da variável independente, valor da variável dependente, valor da derivada da variável dependente em relação à variável independente avaliada no ponto do segundo parâmetro).`

Exemplo 3.2.4. Resolva a equação diferencial

$$y''(x)-y=0, \textit{sendo}\;\; y(-1)=5, y'(-1)=-5$$

e encontre uma solução para o problema de valor inicial na condição dada.

Solução

```
(%i13) 'diff(y,x,2) - y = 0;
```

(%o13)

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-y=0$$

```
(%i14) ode2(%,y,x);
```

(%o14)

$$y=\%k1\,e^{x}+\%k2\,e^{-x}$$

```
(%i15) ic2(%o14,x=-1,y=5,'diff(y,x)=-5);
```

(%o15)

$$y = 5\,e^{-x-1}$$

Exemplo 3.2.5. Na equação diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0$$

determine uma solução para o problema de valor inicial nas condições iniciais dadas a seguir: $y(0) = -1, y'(0) = 8$; $y(\pi/6) = 1/2, y'(\pi/6) = 0$

Solução

```
(%i16) 'diff(y,x,2) + y = 0;
```

(%o16)

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + y = 0$$

```
(%i17) ode2(%o16,y,x);
```

(%o17)

$$y = \%k1\sin(x) + \%k2\cos(x)$$

```
(%i18) ic2(%o17,x=0,y=-1,'diff(y,x)=8);
```

(%o18)

$$y = 8\sin(x) - \cos(x)$$

```
(%i19) ic2(%o17,x=%pi/6,y=1/2,'diff(y,x)=0);
```

(%o19)

$$y = \frac{\sin(x)}{4} + \frac{\sqrt{3}\cos(x)}{4}$$

3.3 Sistema de Equações Diferenciais

Muitas vezes, uma equação diferencial não é suficiente para expressar um fenômeno a ser analisado. Quando o problema envolve duas ou mais equações associadas de determinada maneira, utilizamos um sistema de equações diferenciais, que com certa manipulação, sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. A função responsável em calcular o sistema de equações é `desolve`, em que a sintaxe do comando é representada por: `desolve(sistema, variáveis dependentes)`.

Exemplo 3.3.1. Nos problemas a seguir resolva o sistema de equações diferenciais dado.

$$a)\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 2x \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução

Primeiro definimos as equações

```
(%i20) eq1:'diff(x(t),t)=-x+y;
```

(%o20)

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t) = y - x$$

```
(%i21) eq2:'diff(y(t),t)=2*x;
```

(%o21)

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\,(t) = 2\,x$$

Agora formaremos o sistema com estas equações

```
(%i22)  sistema:[eq1,eq2];
```

(%o22)

$$[\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t) = y - x, \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\,(t) = 2\,x]$$

Para atribuirmos os valores do PVI, utilizaremos o comando `atvalue`, em que a sintaxe do comando é representada por `atvalue (função, [x_1 = a_1, ..., x_m = a_m], valor)`.

```
(%i23)  atvalue (x(t), t=0, 0);
```

(%o23)

$$0$$

(%i24) `atvalue (y(t), t=0, 1);`

(%o24)

$$1$$

Por fim resolvemos o sistema

(%i25) `desolve (sistema,[x(t),y(t)]);`

(%o25)

$$[\mathrm{x}(t) = t\ (y - x), \mathrm{y}(t) = 2\,t\,x + 1]$$

$$b)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = -2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução

(%i26) `eq1:'diff(x(t),t,2)+x-y=0;`

(%o26)

$$-y + x + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}(t) = 0$$

(%i27) `eq2:'diff(y(t),t,2)+y-x=0;`

(%o27)

$$y - x + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}(t) = 0$$

(%i28) `sistema: [eq1,eq2];`

(%o28)

$$[-y + x + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}(t) = 0, y - x + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}(t) = 0]$$

Atribuindo os valores do PVI,

(%i29) `atvalue (x(t), t=0, 0);`

(%o29)

$$0$$

(%i30) `atvalue ('diff(x(t),t), t=0, -2);`

(%o30)

$$-2$$

(%i31) `atvalue (y(t), t=0, 0)`

(%o31)

$$0$$

(%i32) `atvalue ('diff(y(t),t), t=0, 1)`

(%o32)

$$1$$

Calculando o sistema:

(%i33) `desolve (sistema,[x(t),y(t)]);`

(%o33)

$$[\mathrm{x}(t)=\frac{t^2\,y}{2}-\frac{t^2\,x}{2}-2\,t,\mathrm{y}(t)=-\frac{t^2\,y}{2}+\frac{t^2\,x}{2}+t]$$

$$c)\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=0\\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-4\dfrac{dx}{dt}=0\\ x(0)=1,x'(0)=0,\\ y(0)=-1,y'(0)=5\end{cases}$$

Solução

(%i34) `eq1:'diff(x(t),t,2)+'diff(x(t),t)+'diff(y(t),t)=0;`

(%o34)

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}(t)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}(t)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}(t)=0$$

(%i35) `eq2:'diff(y(t),t,2)+'diff(y(t),t)-4*'diff(x(t),t)=0;`

(%o35)

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)-4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right)=0$$

```
(%i36) sistema:  [eq1,eq2];
```

(%o36)

$$[\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)=0,\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)-4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right)=0]$$

Atribuindo os valores do PVI,

```
(%i37) atvalue (x(t), t=0, 1);
```

(%o37)

$$1$$

```
(%i38) atvalue ('diff(x(t),t), t=0, 0);
```

(%o38)

$$0$$

```
(%i39) atvalue (y(t), t=0, -1)
```

(%o39)

$$-1$$

```
(%i40) atvalue ('diff(y(t),t), t=0, 5)
```

(%o40)

$$5$$

Calculando o sistema:

```
(%i41) desolve (sistema,[x(t),y(t)]);
```

(%o41)

$$[\mathrm{x}\left(t\right)=e^{-t}\,\left(\frac{\sin\left(2\,t\right)}{2}+\cos\left(2\,t\right)\right),\mathrm{y}\left(t\right)=e^{-t}\,\left(2\sin\left(2\,t\right)-\cos\left(2\,t\right)\right)]$$

3.4 Campo de Direções e Trajetórias

Campo de Direções é uma ferramenta importante para a avaliação de equações diferenciais do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

pois dão uma noção dos valores que as soluções dessas equações tendem. Eles são compostos por vetores tangentes às soluções nos pontos do plano xy.

Para desenhar campos de direções no Maxima, devemos primeiramente carregar a biblioteca `plotdf` utilizando o comando `load("plotdf")$`. A função que desenha os campos de direções é `plotdf`. Sua sintaxe é `plotdf(equação diferencial)`.

Obs: A função `plotdf` só desenha campos de direções para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Através do exemplo a seguir observe como trabalhar com campo de direções e trajetórias.

Exemplo 3.4.1. Traçar o campo de direções para a equação diferencial

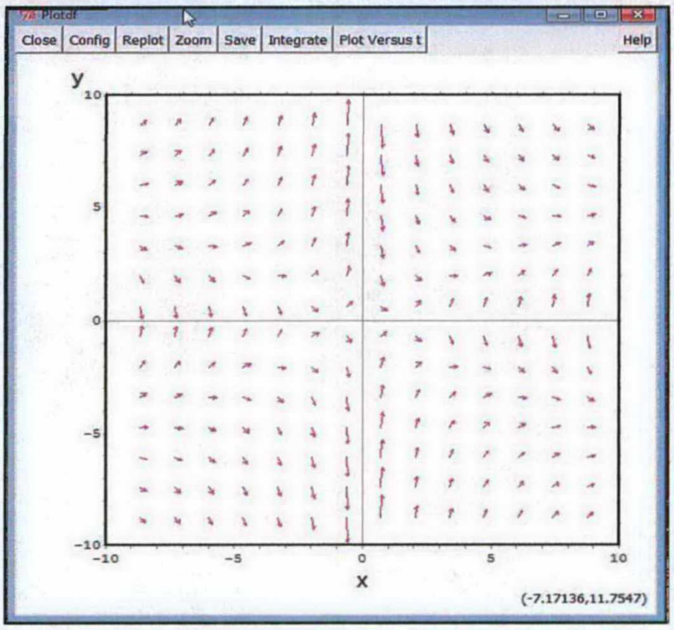
$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)/(1+x^2)$$

Solução

Ao digitarmos o comando `plotdf` com a equação diferencial e executarmos este, o plano xy é gerado.

```
(%i42)  load("plotdf")$
        plotdf((1+y^2)/(1+x^2));

(%o42)
```



Observe na parte superior do plano o campo `config`, é neste campo que você pode fazer as mudanças necessárias para visualizar o comportamento de uma equação diferencial. Note que utilizando o campo `config`, não é necessário utilizar o comando diretamente no Maxima, basta fazer as alterações necessárias na janela do `plotdf` e clicar no campo `Replot` para atualizar. Como o nosso objetivo e trabalhar com os comandos do Maxima, apresentaremos estes objetivando facilitar o entendimento no desenvolvimento do campo de direções e trajetórias.

- trajectory_at: define as coordenadas (x, y) para o ponto inicial de uma curva integral.
  `[trajectory_at,x,y]`

- versus_t: é usado para criar uma segunda janela de plotagem, com um lote de curva integral, como duas funções x, y, em função a variável independente t. Se o versus_t for dado com algum valor diferente de 0, a segunda janela será aberta. A segunda janela do lote inclui um outro menu, similar ao menu da janela principal do lote.
  `[versus_t,1]`

- tinitial: define o valor inicial da variável t, utilizada para computar as curvas integrais.
  `[tinitial,t]`

- xcenter e ycenter: determinam a coordenada x (xcenter) e y (ycenter) do centro da plotagem.

[xcenter, x]

[ycenter, y]

- xradius e yradius: é metade do comprimento da escala dos valores que serão mostrados no sentido de x, para (xradius), e y, para (yradius).

  [xradius, x]

  [yradius, y]

- xfun: possibilita inserir funções no plano xy, juntamente com a equação diferencial.

  [xfun,"f(x);g(x);...;h(x)"]

Vejamos agora exemplos englobando os comandos apresentados:

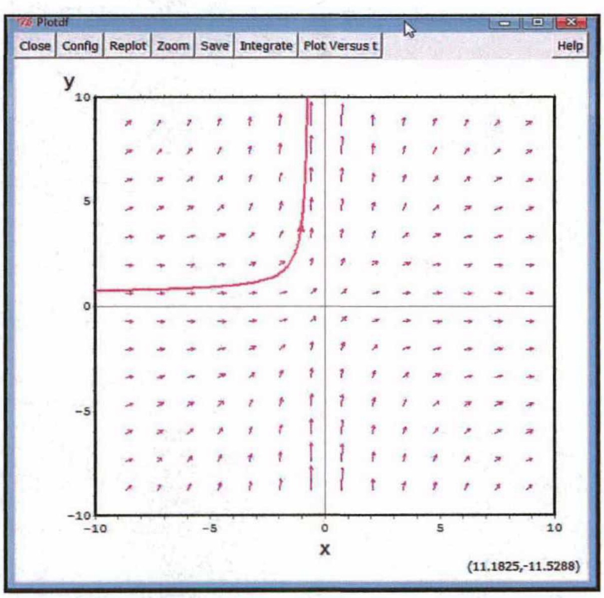
Exemplo 3.4.2. Traçar o campo de direção de

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)/(1+x^2)$$

mostrando a trajetória de uma possivel solução.

```
(%i43)  load("plotdf")$
        plotdf((1+y^2)/(1+x^2),[trajectory_at,-1,4]);
```

(%o43)

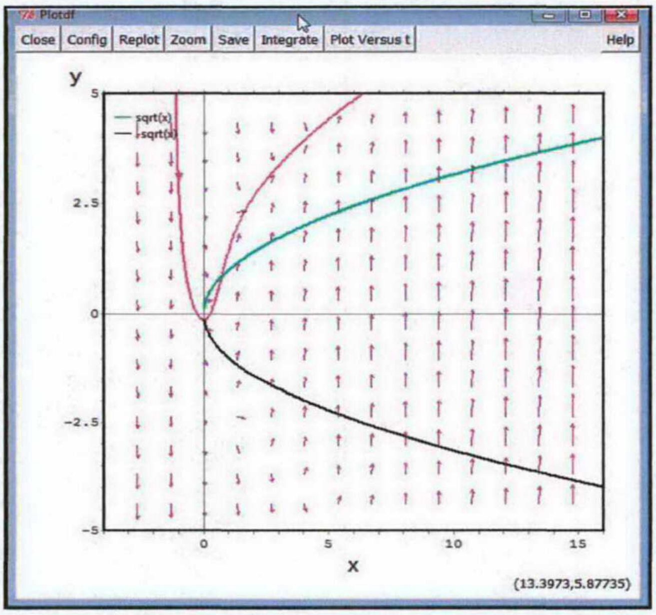


Exemplo 3.4.3. Observe a aplicação dos comandos.

(%i44) load("plotdf")$

plotdf(4*x-y^2,[xfun,"sqrt(x);-sqrt(x)"],
[trajectory_at,-1,3],[yradius,5], [xcenter,6]);

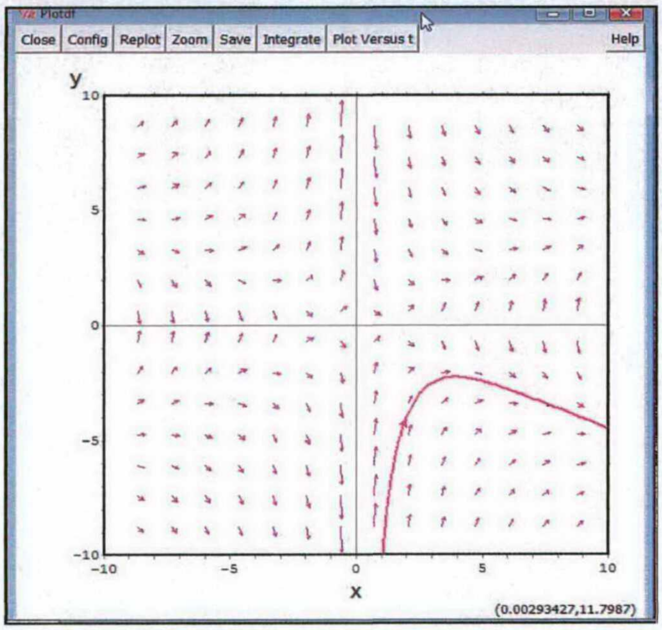
(%o44)



(%i45) load("plotdf")$

plotdf((x^2-3*y^2)/(2*x*y),[trajectory_at,2,-4],[xradius,10],
[yradius,10],[xcenter,8],[ycenter,8]);

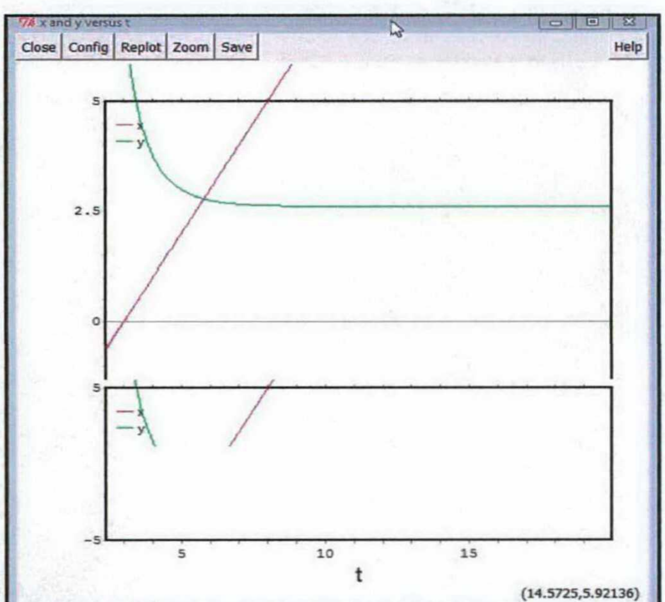
(%o45)

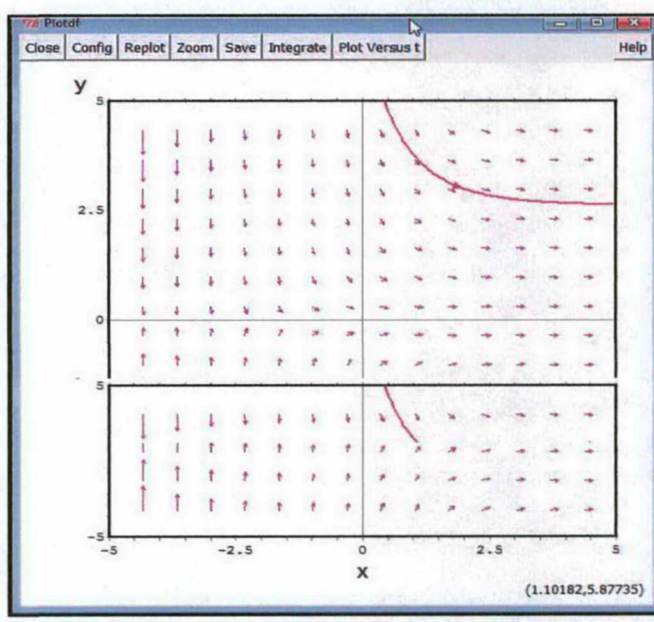


(%i46) load("plotdf")$

plotdf(exp(-x)*(-y),[versus_t,1],[tinitial,5],
[trajectory_at,2,3],[xradius,5],[yradius,5],[xcenter,0],[ycenter,0]);

(%o46)





3.5 Resolvendo Sistemas de EDOs Lineares

Nesta seção resolveremos sistemas de EDOs lineares, isto é os sistemas da forma:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + ... + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + ... + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + ... + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x),$$

onde

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}; B(x) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Quando $B(x) = 0$, ou seja quando todas as componentes do vetor B são zero, diremos que o sistema de EDO é homogêneo, e se ao menos uma componente de B é não nula, diremos não homogêneo. No caso de um sistema homogêneo temos o seguinte resultado:[4]

Teorema 3.5.1. *Se $Y_1(x), ..., Y_n(x)$ são soluções linearmente independentes do sistema $Y' = A(x)Y$, então toda solução deste sistema se escreve como uma única combinação linear dessas soluções, ou seja, existem únicos coeficientes $c_1, ..., c_n$ tal que*

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + ... + c_nY_n(x)$$

Em particular, a solução do PVI, $Y' = A(x)Y, Y(x_0) = Y_0$ se expressa de maneira única como uma combinação linear das soluções do sistema homogêneo correspondente, satisfazendo a condição inicial.

Assim para encontar a solução geral do sistema de EDO: $Y' = A(x)Y$, é suficiente encontrar n soluções independentes. Uma das opções mais adequadas para este propósito consiste em buscar a solução de $Y' = A(x)Y$ na forma

$$Y(x) = e^{\lambda x}v,$$

onde λ é uma constante e v um vetor constante. Substituindo na equação diferencial temos:

$$Y'(x) = (e^{\lambda x}v)' = \lambda e^{\lambda x} \to \lambda e^{\lambda x}v = Ae^{\lambda x}v \to Av = \lambda v$$

Isso quer dizer que , $Y'(x) = e^{\lambda x}v$ é solução do sistema homogêneo se e somente se λ é um autovalor de A e v o autovetor associado, assim para resolver o sistema linear basta encontrar n autovetores $v_1, ..., v_n$ linearmente independentes em cujo caso a solução geral é:

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} v_k$$

onde $c_1, ..., c_n$ são constantes arbitrárias e $\lambda_k, k = 1, ..., n$ são os autovalores associados aos autovetores $v_k, k = 1, ..., n$.

O caso não homogêneo é um pouco mais complicado. Para isto, precisaremos introduzir o conceito de exponencial de uma matriz. Seja A uma matriz $n \times n$ e $x \in \mathbb{R}$. Definiremos a função $\exp(xA)$ mediante a série

$$\exp(xA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k A_k}{k!} = I_n + xA + \frac{x^2A^2}{2} + ... + \frac{x^nA^n}{n!} + ...,$$

onde a convergência está definida elemento a elemento. A série anterior converge para todo $x \in \mathbb{R}$ para qualquer que seja a matriz A (de fato converge em todo $\mathbb{C}$).[4]

Teorema 3.5.2. *A função* $\exp(xA)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Para toda matriz A,* $\exp(OA) = I_n$ *e para todo* $x \in \mathbb{R}$ $\exp(xO_n) = I_n$*, onde O_n é a matriz nula.*

2. *Para toda matriz A,* $\frac{d}{dx}\exp(xA) = A\exp(xA) = \exp(xA)A$.

3. *Para todos $x, t \in \mathbb{R}$ e toda matriz A,* $\exp[(x+t)A] = \exp(xA)\exp(tA)$.

4. *Para toda matriz A, a inversa* $[\exp(xA)]^{-1} = \exp(-xA)$.

5. *Para todas as matrizes A, B com $AB = BA$,* $\exp[x(A+B)] = \exp(xA)\exp(xB)$.

6. *Para todo $x \in \mathbb{R}$,* $\exp(xI_n) = e^x I_n$.

Dado qualquer vetor constante $v \in \mathbb{R}^n$ temos que:

$$\frac{d}{dx}[\exp(xA)v] = A[\exp(xA)v]$$

Assim $\exp(xA)v$ é solução da equação homogênea $Y' = AY$, $Y(0) = v$. Se escolhemos v sucessivamente como $e_i, i = 1, 2, ..., n$ obtemos n soluções $v_1, ..., v_n$ do PVI, $Y' = AY$, $Y(0) = e_i$ que também são linearmente indepedentes e assim constituem uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente. Outro conceito importante é a matriz fundamental: Uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz fundamental do sistema $Y' = AY$ se as n colunas definem um conjunto linearmente independente de soluções de $Y' = AY$. Obviamente a matriz exponencial é uma matriz fundamental do sistema $Y' = AY$. Usaremos Maxima para encontrar a solução de um sistema homogêneo como a exponencial de uma matriz. Por simplicidade nos centraremos no caso de matrizes de 2×2.

Exemplo 3.5.1. Encontre a solução do sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y$$

Começaremos introduzindo a matriz A nesta resolução, para isso usaremos o comando `matrix(fila1,fila2,...,filaN)` onde fila1, fila2, etc. são os vetores linhas(listas de números $a_1, a_2, ...$ da forma $[a_1, a_2, ..., a_M]$).

Assim fazemos

```
(%i47) A:matrix([1,12],[3,1]);
```

(%o47)

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

definimos as equações e o sistema

```
(%i48)eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);
```

(%o48)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\,(x) = 12\,\mathrm{y2}\,(x) + \mathrm{y1}\,(x)$$

```
(%i49)eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);
```

(%o49)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\,(x) = \mathrm{y2}\,(x) + 3\,\mathrm{y1}\,(x)$$

```
(%i50)sistema:[eq1,eq2];
```

(%o50)

$$[\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\,(x) = 12\,\mathrm{y2}\,(x) + \mathrm{y1}\,(x), \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\,(x) = \mathrm{y2}\,(x) + 3\,\mathrm{y1}\,(x)]$$

calculamos o sistema

```
(%i51)desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

(%o51)

$$[\mathrm{y1}\left(x\right)=\frac{\left(2\,\mathrm{y2}\left(0\right)+\mathrm{y1}\left(0\right)\right)\,e^{7\,x}}{2}-\frac{\left(2\,\mathrm{y2}\left(0\right)-\mathrm{y1}\left(0\right)\right)\,e^{-5\,x}}{2},$$

$$\mathrm{y2}\left(x\right)=\frac{\left(2\,\mathrm{y2}\left(0\right)+\mathrm{y1}\left(0\right)\right)\,e^{7\,x}}{4}+\frac{\left(2\,\mathrm{y2}\left(0\right)-\mathrm{y1}\left(0\right)\right)\,e^{-5\,x}}{4}]$$

E obtemos a solução geral. Observe que na saída do Maxima aparecem os valores $y1(0)$ e $y2(0)$ que são desconhecidos. Se queremos resolver o PVI

$$Y'=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 3 & 1\end{bmatrix}Y;Y(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

Então devemos usar o comando `atvalue`

```
(%i52)atvalue(y1(x),x=0,1);
```

(%o52)

$$1$$

```
(%i53)atvalue(y2(x),x=0,2);
```

(%o53)

$$2$$

```
(%i54)desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

(%o54)

$$[\mathrm{y1}\left(x\right)=\frac{5\,e^{7\,x}}{2}-\frac{3\,e^{-5\,x}}{2},\mathrm{y2}\left(x\right)=\frac{5\,e^{7\,x}}{4}+\frac{3\,e^{-5\,x}}{4}]$$

Para encontrar a matriz exponencial usaremos a propriedade de que as colunas E_k desta matriz são as soluções dos PVI $E_k'(x) = AE_k(x), E_k(0) = e_k$, onde e_k é base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim resolvemos primeiro o PVI

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y; Y(0) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i55) atvalue(y1(x),x=0,1);
```

(%o55)

$$1$$

```
(%i56) atvalue(y2(x),x=0,0);
```

(%o56)

$$0$$

```
(%i57) eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);
```

(%o57)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\left(x\right) = 12\,\mathrm{y2}\left(x\right) + \mathrm{y1}\left(x\right)$$

```
(%i58) eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);
```

(%o58)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\left(x\right) = \mathrm{y2}\left(x\right) + 3\,\mathrm{y1}\left(x\right)$$

```
(%i59) sistema:[eq1,eq2];
```

(%o59)

$$[\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\left(x\right) = 12\,\mathrm{y2}\left(x\right) + \mathrm{y1}\left(x\right), \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\left(x\right) = \mathrm{y2}\left(x\right) + 3\,\mathrm{y1}\left(x\right)]$$

```
(%i60) col1:desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

(%o60)

$$[\mathrm{y1}\left(x\right) = \frac{e^{7\,x}}{2} + \frac{e^{-5\,x}}{2}, \mathrm{y2}\left(x\right) = \frac{e^{7\,x}}{4} - \frac{e^{-5\,x}}{4}]$$

```
(%i61) eq3:makelist(second(col1[k]),k,1,length(col1));
```

(%o61)

$$[\frac{e^{7x}}{2}+\frac{e^{-5x}}{2},\frac{e^{7x}}{4}-\frac{e^{-5x}}{4}]$$

E depois o PVI

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y; Y(0) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i62) atvalue(y1(x),x=0,0);
```

(%o62)

$$0$$

```
(%i63) atvalue(y2(x),x=0,1);
```

(%o63)

$$1$$

```
(%i64) eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);
```

(%o64)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\left(x\right)=12\,\mathrm{y2}\left(x\right)+\mathrm{y1}\left(x\right)$$

```
(%i65) eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);
```

(%o65)

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\left(x\right)=\mathrm{y2}\left(x\right)+3\,\mathrm{y1}\left(x\right)$$

```
(%i66) sistema:[eq1,eq2];
```

(%o66)

$$[\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y1}\left(x\right)=12\,\mathrm{y2}\left(x\right)+\mathrm{y1}\left(x\right),\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y2}\left(x\right)=\mathrm{y2}\left(x\right)+3\,\mathrm{y1}\left(x\right)]$$

```
(%i67) col2:desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

(%o67)

$$[\mathrm{y1}(x) = e^{7x} - e^{-5x}, \mathrm{y2}(x) = \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2}]$$

```
(%i68) eq4:makelist(second(col2[k]),k,1,length(col2));
```

(%o68)

$$[e^{7x} - e^{-5x}, \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2}]$$

Dado que as saídas eq3 e eq4 são vetores linhas, os convertemos em colunas simplesmente transpondo a matriz com o comando **transpose**.

```
(%i69) define(expA(x),transpose(matrix(eq3,eq4)));
```

(%o69)

$$\mathrm{expA}(x) := \begin{pmatrix} \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2} & e^{7x} - e^{-5x} \\ \frac{e^{7x}}{4} - \frac{e^{-5x}}{4} & \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i70) expA(0);
```

(%o70)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i71)ratsimp(diff(expA(x),x)-A.expA(x));
```

(%o71)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim finalmente comprovamos que $(e^{xA})' = Ae^{xA}$ e que $(e^{0A}) = I$.

Resolveremos esse problema agora usando a técnica descrita no início desta seção, quer dizer usando os autovalores e autovetores. Para isso usaremos o comando `eigenvectors(matriz)`, onde a variável matriz é uma matriz $N \times N$. A saída deste comando são duas listas, a primeira delas são dois vetores linhas, o primeiro contém autovetores e o segundo é correspondente à multiplicidade algébrica dos mesmos. A segunda lista é uma lista de vetores linha que se correspondem com os autovalores associados respectivos. Assim, para nossa matriz $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ temos:

```
(%i72) A:matrix([1,12],[3,1]);
```

(%o72)

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i73) vec:eigenvectors(A);
```

(%o73)

$$[[[-5,7],[1,1]],[[[1,-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{1}{2}]]]]$$

```
(%i74) vec[1]; vec[2];
```

(%o74)

$$[[-5,7],[1,1]]$$

(%o75)

$$[[[1,-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{1}{2}]]]$$

A primeira lista $[[-5,7],[1,1]]$ nos indica que o autovalor $\lambda = -5$ tem multiplicidade 1 e que o autovalor $\lambda = 7$ tem multiplicidade 1. Além disso, a $\lambda = -5$ corresponde o autovetor $(1,-1/2)^T$ e a $\lambda = 7$ o autovetor $(1,1/2)^T$, respectivamente. Para obter os autovalores e autovetores por separado usamos as [ ]. Assim, se fazemos vec[1] obtemos a primeira das duas listas (as dos autovalores e multiplicidades), vec[1][1] nos da o primeiro elemento desta lista, ou seja as dos autovalores, e vec[1][1][2] nos imprime o segundo autovalor. De forma similar obtemos os correspondentes autovetores o que nos permitirá definir a duas soluções linearmente independentes $s_1(x)$ e $s_2(x)$.

```
(%i76) av1:vec[1][1][1]; av2:vec[1][1][2];v1:vec[2][1][1];
v2:vec[2][2][1];
```

(%o76)

$$-5$$

(%o77)

$$7$$

(%o78)

$$[1, -\frac{1}{2}]$$

(%o79)

$$[1, \frac{1}{2}]$$

```
(%i80) s1(x):=%e^(av1*x)*v1$ s1(x);
```

(%o80)

$$[e^{-5\,x}, -\frac{e^{-5\,x}}{2}]$$

```
(%i81) s2(x):=%e^(av2*x)*v2$ s2(x);
```

(%o81)

$$[e^{7\,x}, \frac{e^{7\,x}}{2}]$$

Ou seja

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} e^{-5x} \\ -\frac{e^{-5x}}{2} \end{bmatrix}, Y_2(x) = \begin{bmatrix} e^{7x} \\ \frac{e^{7x}}{2} \end{bmatrix}$$

Levando em consideração o dito acima podemos definir uma matriz fundamental

$$V(x) = [Y_1(x)Y_2(x)] = \begin{bmatrix} e^{-5x} & e^{7x} \\ -\frac{e^{-5x}}{2} & \frac{e^{7x}}{2} \end{bmatrix}$$

```
(%i82) define(v(x),transpose(matrix(s1(x),s2(x))));
```

(%o82)

$$\mathrm{v}\,(x) := \begin{pmatrix} e^{-5\,x} & e^{7\,x} \\ -\frac{e^{-5\,x}}{2} & \frac{e^{7\,x}}{2} \end{pmatrix}$$

Para ter a exponencial usamos a fórmula

$$\exp(xA) = V(x)V^{-1}(0)$$

Além disso verificamos que efetivamente $(e^{xA})' = Ae^{xA}$ e $(e^{0A}) = I$. Que é a mesma matriz que obtivemos anteriormente.

```
(%i83) define(e(x),v(x).invert(v(0)));
```

(%o83)

$$\mathrm{e}(x) := \begin{pmatrix} \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2} & e^{7x} - e^{-5x} \\ \frac{e^{7x}}{4} - \frac{e^{-5x}}{4} & \frac{e^{7x}}{2} + \frac{e^{-5x}}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i84)ratsimp(diff(e(x),x)-A.e(x));
```

(%o84)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i85)expA(x)-e(x);
```

(%o85)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que já sabemos calcular a matriz exponencial agora podemos resolver facilmente o problema não homogêneo. Para isso usamos o resultado seguinte:[4]

Teorema 3.5.3. *A solução do problema com valores iniciais $Y'(x) = AY(x)+B(x), Y(x)_0 = Y_0$, qualquer que seja $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe e é única e se expressa mediante a fórmula*

$$Y(x) = [\exp(x - x_0)A]Y_0 + \int_{x_0}^{x} [\exp(x - t)A]B(t)dt$$

Usando o mesmo exemplo agora com o termo $B(x)$ não nulo, resolveremos o sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix} ; Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Antes que nada definimos o termo independente B (usaremos a letra b), logo multiplicamos $e^{(x-t)A}$ por $B(t)$ e definimos a função $\int_0^x [\exp(x - t)A]B(t)dt$.

```
(%i86) b:transpose([exp(-t),0]);
```

(%o86)

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i87) ratsimp(e(x-t).b); expand(%); define(sol(x),expand(integrate(%,
t, 0, x)));
```

(%o87)

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-5\,x-8\,t}\left(e^{12\,x}+e^{12\,t}\right)}{2} \\ \frac{e^{-5\,x-8\,t}\left(e^{12\,x}-e^{12\,t}\right)}{4} \end{pmatrix}$$

(%o88)

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{7\,x-8\,t}}{2}+\frac{e^{4\,t-5\,x}}{2} \\ \frac{e^{7\,x-8\,t}}{4}-\frac{e^{4\,t-5\,x}}{4} \end{pmatrix}$$

(%o89)

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{7\,x}}{16}+\frac{e^{-x}}{16}-\frac{e^{-5\,x}}{8} \\ \frac{e^{7\,x}}{32}-\frac{3\,e^{-x}}{32}+\frac{e^{-5\,x}}{16} \end{pmatrix}$$

Depois Calculamos $\exp[(x)A]Y_0$ e definimos a solução segundo a fórmula $Y(x) = [\exp(x-x_0)A]Y_0 + \int_{x_0}^{x}[\exp(x-t)A]B(t)dt$

```
(%i90)e(x).transpose([0,1]);
```

(%o90)

$$\begin{pmatrix} e^{7\,x}-e^{-5\,x} \\ \frac{e^{7\,x}}{2}+\frac{e^{-5\,x}}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i91)define(solt(x),sol(x)+e(x).transpose([0,1]));
```

(%o91)

$$\mathrm{solt}\left(x\right) := \begin{pmatrix} \frac{17\,e^{7\,x}}{16}+\frac{e^{-x}}{16}-\frac{9\,e^{-5\,x}}{8} \\ \frac{17\,e^{7\,x}}{32}-\frac{3\,e^{-x}}{32}+\frac{9\,e^{-5\,x}}{16} \end{pmatrix}$$

Para terminar verificamos que a solução satisfaz a equação original junto com as condições iniciais.

```
(%i92)solt(0);
```

(%o92)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i93)ratsimp(diff(solt(x),x)-A.solt(x));
```

(%o93)

$$\begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

O caso de autovalores múltiplos é mais complicado e será omitido já que desde o ponto de vista de Maxima não traz nenhuma contribuição e é possivel resolver usando o primeiro método sem maiores problemas.

Para terminarmos essa seção resolveremos o seguinte problema não homogêneo com valores iniciais:

$$\frac{du}{dv} = u(1-v), \quad \frac{dv}{dx} = \alpha v(u-1), \quad u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0$$

Podemos observar que se fizermos o quociente entre as duas primeiras equações obtemos

$$\frac{du}{dv} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)}$$

cuja solução é $\alpha u + v - \log u^{\alpha} v = H = const.$ Se construirmos o gráfico dos valores de u respectivo a v obteremos as trajetórias das soluções do sistema. Temos que se $H > 1 + \alpha$ (que é o valor mínimo de H que se alcança para $u = v = 1$, então as trajetórias definidas por $\alpha u + v - \log u^{\alpha} v = H$ são fechadas o que significa que u e v são funções periódicas. A obtenção das trajetórias são mostradas a continuação usando o comando `implicit_plot`.

```
(%i94)load(implicit_plot)$

(%i95)implicit_plot ([0.5*u+v-log(v*u^0.5)=1.6, 0.5*u+v-log(v*u^0.5)=2,
0.5*u+v-log(v*u^0.5)=2.3,0.5*u+v-log(v*u^0.5)=2.5,0.5*u+v-log(v*u^0.5)=
3,0.5*u+v-log(v*u^0.5)=3.5],[u,0.01, 7], [v,0.01, 6],
[legend,"H1=1.6","H2=2.0","H3=2.3","H4=2.5","H5=3.0","H6=3.5"])$

(%o95)done
```

Como vemos, a sintaxe é `implicit_plot(F(u,v)=0,[u, uini,ufin], [v, vini, vfin])`, onde F(u,v)=0 é a equação implícita que queremos construir o gráfico nos intervalos das variáveis u desde uini até ufin e v desde vini até vfin. Para resolver o sistema usamos o comando **rk**.

```
(%i96)load(dynamics)$

(%i97)kill(a,u,v,sol)$ a:0.5;

sol:rk([u*(1-v),a*v*(u-1)],[u,v],[0.4,0.2],[t,0,40,0.02])$

(%o97)
```

$$0.5$$

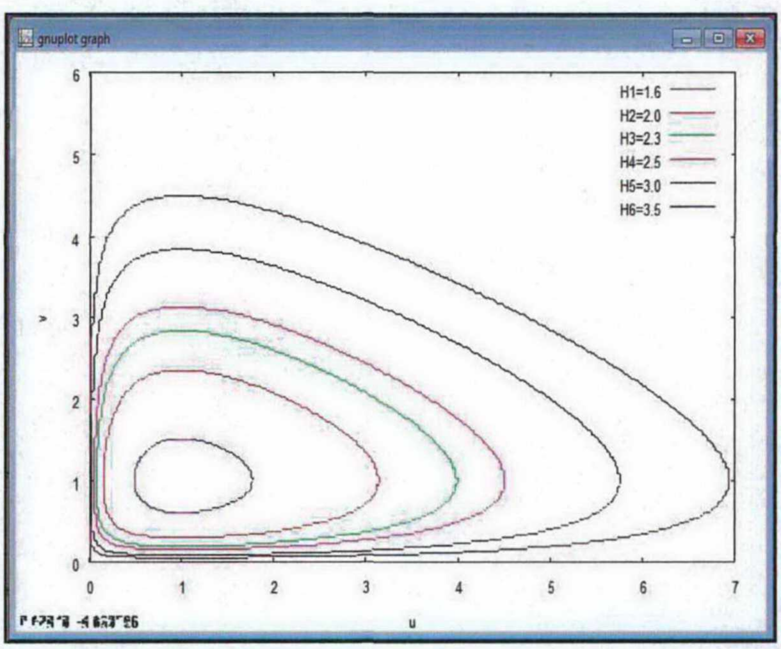
Continuando definimos as duplas que vamos a representar, isto é, os valores de (x_k, u_k) e (x_k, v_k). Como anteriormente, usamos o comando **makelist**.

```
(%i98) u:makelist([sol[k][1],sol[k][2]],k,1,length(sol))$

v:makelist([sol[k][1],sol[k][3]],k,1,length(sol))$

ciclo:makelist([sol[k][2],sol[k][3]],k,1,length(sol))$
```

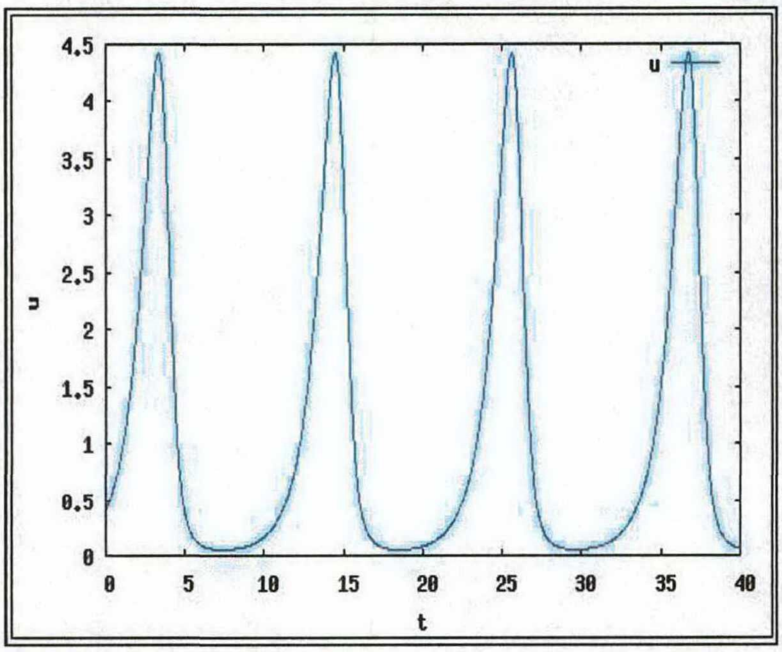
Finalmente obtemos os gráficos de $u(x), v(x)$.



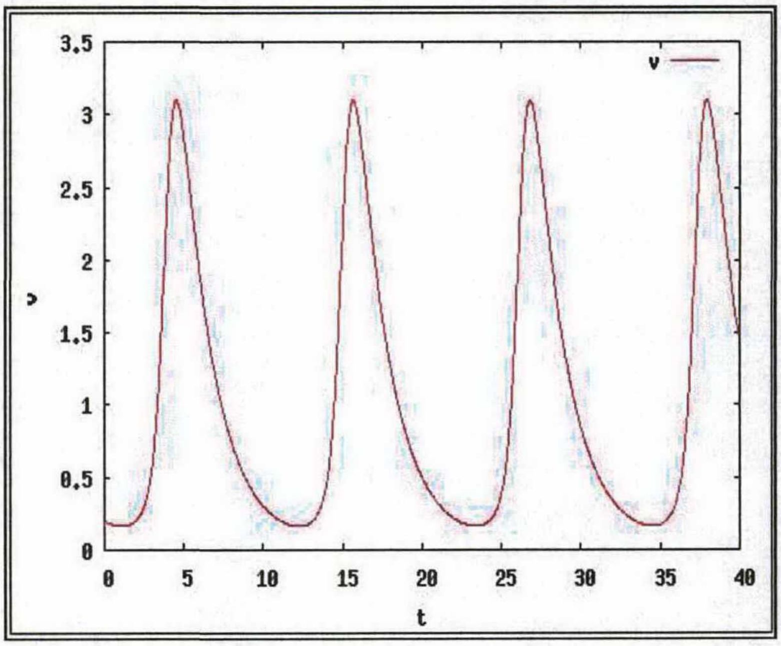
para $\alpha = 1/2$ e $H = 1, 6, 2, 2.3, 2.5, 3$ e 3.5.

```
(%i99)wxplot2d([discrete,u],[legend, "u"],[xlabel, "t"], [ylabel,
"u"],[color,blue])$ wxplot2d([discrete,v],[legend, "v"],[xlabel, "t"],
[ylabel, "v"],[color,red])$
```

(%t99)

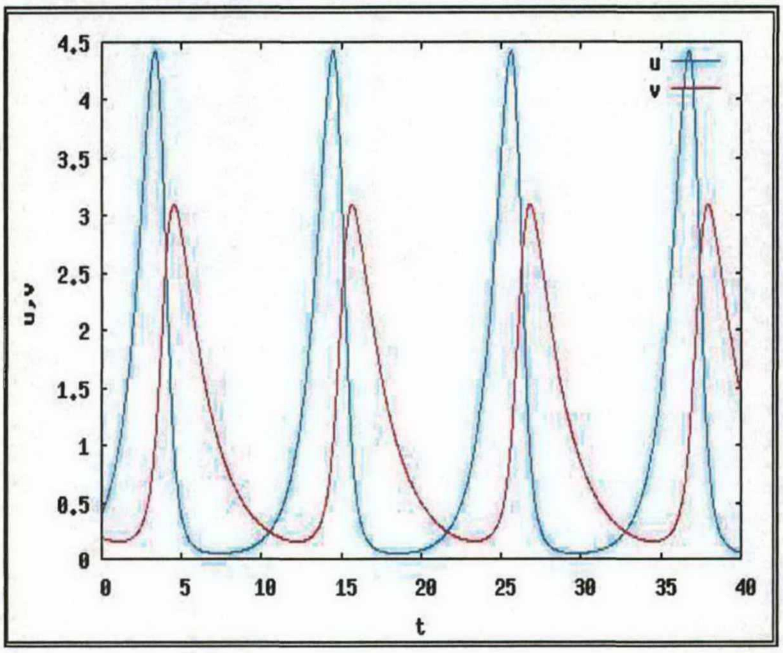


(%t100)

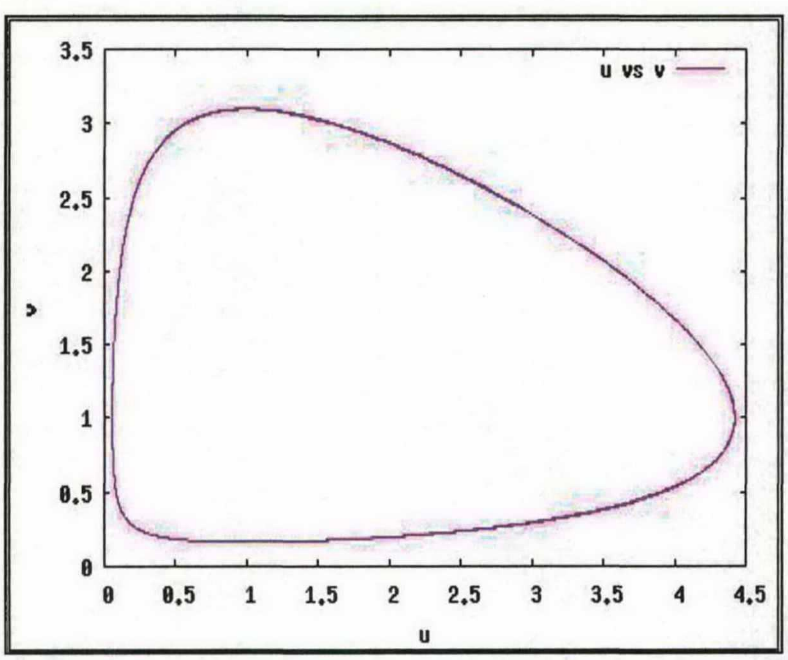


Comparando as saídas gráficas,

```
(%i101)wxplot2d([[discrete,u],[discrete,v]],[legend, "u", "v"],[xlabel,
"t"], [ylabel, "u,v"] )$
(%t101)
```




```
(%i102)wxplot2d([discrete,ciclo],[legend, "u vs v"],[xlabel, "u"],
[ylabel, "v"],[color,magenta] )$
(%t102)
```



Os dois últimos gráficos estão representados na figura para $\alpha = 1/2, u(0) = 0,4$ e $v(0) = 0,2$.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma introdução da utilização do software matemático Maxima, para a resolução de problemas envolvendo integrais múltiplas e equações diferenciais, mostrando que a utilização deste software nos possibilita visualizar soluções de problemas que a primeira vista parecem ser complexos. A escolha do tema está intimamente ligada com a intenção de propriciar aos alunos de ciência exatas uma ferramenta alternativa, disponível gratuitamenta que possibilita de maneira rápida e prática de visualizar a solução de alguns problemas.

No desenvolvimento deste trabalho, realizamos atividades com alunos do ensino médio que nos possibilitaram enxergar que trabalhar com novas tecnologias em sala de aula geram ótimos resultados. Com isso pretendemos desenvolver um mini-curso para estes alunos que possibilitam o aprendizado dos comandos básicos do software Maxima.

Assim desenvolver este trabalho nos possibilitou o entendimento mais aprofundado do que é um Sistema de Computação Algébrica e despertou ainda mais a vontade de realizar novas atividades com Maxima.

Referências

[1] ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo: Thomson, 2003.

[2] THOMAS, George B. Cálculo Volume II - São Paulo: Ed. Addison Wesley, 2009.

[3] NODARSE, Renato A. Usando Maxima CAS para resolver equações diferenciais ordinárias, 2010.

[4] VILLATE, Jaime E. Introdução aos Sistemas Dinâmicos - Uma Abordagem Prática com Maxima, 2006.

[5] Manual Maxima versão Português.

[6] Manual do Maxima; http://fisica.fe.up.pt/pub/maxima/doc/5.9.2.19cvs/pt/maxima.html

[7] Homepage. Projecto Maxima. Maxima, un sistema de álgebra computacional; http://maxima.sourceforge.net/es/.

[8] MACEDO, B.F.M. Tutorial Maxima 5.9.2 para Windows.

[9] Mario Rodríguez Riotorto. Primeros pasos en maxima. http://page.axiomdeveloper.org/zope/Plone/refs/books/axiom-book2.pdf, 2006.

[10] José Manuel Mira Ros; http://webs.um.es/mira/maxima.php

[11] Kozakevich, Daniel N.; Sistemas de computação algébrica simbólica - Ambiente de Software Numérico e Computacional ; http://mtm.ufsc.br/%7Edaniel/amcom/CAS/p_cas.html

APÊNDICE

ESTUDO INTERATIVO

1 INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

Neste capitulo, abordaremos a integral de uma função de duas e três variáveis. Essas integrais são chamadas integrais múltiplas e são definidas como o limite da aproximação das somas de Riemann, basicamente como as integrais de uma única variável.

Usamos integrais múltiplas para calcular quantidades que variam acima de duas ou três dimensões. Em maxima faremos um estudo dessas integrais, objetivando apresentar os comandos principais para se resolver essas de forma prática e rápida.

1.1 INTEGRAIS DUPLAS

Calculando Integrais Iteradas. Por exemplo, suponha que quizessemos calcular a integral de f(x,y)=2*x + 6*x^2*y.

Para isso devemos digitar os comandos da mesma em uma cela de input, assim

```
-->     f(x,y):=2*x+6*x^2*y;
```

Em seguida insira a função no comando que se encontra a integral indefinida

```
-->     integrate(integrate(função, variável), variável);
```

```
-->     integrate(integrate(2*x+6*x^2*y, y), x);
```

Podemos também utilizar o seguinte comando

```
-->     integrate(integrate(f(x,y), y), x);
```

Mas precisa-se executar antes o comando da função f(x,y) apertando a tecla [shift+enter]. É importante observar que o Maxima não fornece constantes de integração logo o usuário deve recordá-las. Para realizar cálculos de integrais definidas basta utilizar o comando que se segue, onde 1°lim e 2°lim representam os intervalos da região de integração.

```
-->     integrate(integrate(função, variável, 1°lim, 2°lim), variável, 1°lim, 2°lim);
```

Considerando a mesma função do exemplo anterior, porém definindo os intervalos de integração temos:

```
-->     integrate(integrate(2*x+6*x^2*y, y, -1, 2), x, 1, 4);
```

ou

```
-->     integrate(integrate(f(x,y), y, -1, 2), x, 1, 4);
```

1.2 INTEGRAIS DUPLAS NA FORMA POLAR

As integrais algumas vezes são mais fáceis de calcular se mudarmos para coordenadas polares, assim mostraremos como calcular integrais dadas por equações polares utilizando o maxima. Como você já sabe, sob condições adequadas, uma integral dupla iterada em coordenadas retangulares pode ser transformada em uma integral dupla em coordenadas polares.

Substituindo as variáveis x e y no integrando por r*cos(theta) e r*sin(theta), estaremos integrando em função de r e(theta).

Para isso considere os comandos

```
-->     [x,y]: [r * cos(theta), r * sin(theta)];

-->     integrate(integrate(função*r, r), theta);

-->     integrate(integrate(função, variável, 1°lim, 2°lim), variável, 1°lim, 2°lim);
```

Considere a função f(x,y)= 4-x^2-y^2, utilizando coordenadas polares para calcular a integral dessa função temos:

```
-->     f(x,y):=4-x^2-y^2;

-->     [x,y]: [r * cos(theta), r * sin(theta)];

-->     integrate(integrate(f(x,y)*r, r), theta);
```

Perceba que neste exemplo não definimos o intervalo de (r) e (theta), suponha então que (r) e (theta) estejam definidos respectivamente nos intervalos [0,2] e [0,%pi/2], assim

```
-->     integrate(integrate((4-x^2-y^2)*r, r,0,2), theta,0,%pi/2);
```

1.3 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Assim como as integrais duplas nos permitem lidar com situações mais gerais que aquelas com as quais poderíamos lidar usando integrais simples, as integrais triplas nos permitem resolver problemas ainda mais gerais. O comando da integral tripla é simples, se você conseguiu compreender bem os comandos que já foi lhe apresentado nos tópicos anteriores ficará ainda mais simples de entendê-los.

```
-->    integrate(integrate(integrate(função, variável), variável),variável);

-->    integrate(integrate(integrate(função, variável, 1°lim, 2°lim),

       variável, 1°lim, 2°lim),variável, 1°lim, 2°lim);
```

Para integrarmos a função f(x,y)= x*y^2+y*z^3, em que x,y e z estão definidos respectivamente nos intervalos [-1,1],[3,4] e [0,2]

fazemos:

```
-->    f(x,y):= x*y^2+y*z^3;

-->    integrate(integrate(integrate(f(x,y), z,0,2), y,3,4),x,-1,1);
```

1.4 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Quando um cálculo em física, engenharia ou geometria envolve um cilindro, um cone ou uma esfera, frequentemente podemos simplificar nosso trabalho usando coordenadas cilíndricas ou esféricas. O procedimento de transformação para essas coordenadas e do cálculo das integrais triplas resultantes é semelhante à transformação para coordenadas polares visto na seção 1.2 Obtemos coordenadas cilíndricas para o espaço, combinando coordenadas polares no plano xy com com o eixo z usual. Isso associa a cada ponto no espaço uma ou mais ternas ordenadas da forma (r,theta,z). Relacionando coordenadas cartesianas (x,y,z) e cilíndricas (r,theta,z), teremos que substituir x, y e z respectivamente por r*cos(theta), r*sin(theta) e z assim:

```
-->    [x,y,z] : [r*cos(theta), r*sin(theta), z];

-->    integrate(integrate(integrate(função*r, variável), variável),variável);
```

```
-->     integrate(integrate(integrate(função*r, variável, 1°lim, 2°lim),
        variável, 1°lim, 2°lim), variável, 1°lim, 2°lim);
```

Seja f(x,y,z)= x^2+y^2, calculando integral cilíndrica dessa função

```
-->     f(x,y,z):=x^2+y^2;

-->     [x,y,z] : [r*cos(theta), r*sin(theta), z];

-->     integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*r, z,0,r^2), r,0,2), theta,0,2*%pi);
```

Coordenadas esféricas posicionam pontos no espaço por ternas ordenadas (rho,phi,theta), nos quais: (rho) é a distância do ponto a origem, (phi) é o ângulo que (rho) forma com o eixo z positivo e (theta) é o ângulo das coordenadas cilíndricas. Logo podemos definir os comandos, da mesma forma que definimos anteriormente, uma vez que basta substituirmos x, y e z respectivamente por rho*sin(phi)*cos(theta), rho*sin(phi)*sin(theta) e rho*cos(theta).

```
-->     [x,y,z] : [rho*sin(phi)*cos(theta), rho*sin(phi)*sin(theta), rho*cos(theta)];

-->     integrate(integrate(integrate(função*rho^2*sin(phi), variável),
        variável), variável);

-->     integrate(integrate(integrate(função*rho^2*sin(phi), variável,1°lim, 2°lim),
        variável,1°lim, 2°lim),variável, 1°lim, 2°lim);
```

Considere a função f(x,y,z)= x^2+y^2, calculando a integral esférica temos

```
-->     f(x,y,z):= x^2+y^2;

-->     [x,y,z] : [rho*sin(phi)*cos(theta), rho*sin(phi)*sin(theta), rho*cos(theta)];

-->     integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*rho^2*sin(phi), rho,0,1), phi,0,%pi/3),
        theta,0,2*%pi);
```

1.5 SUBSTITUIÇÕES EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Mostraremos nesta seção como calcular integrais múltiplas por meio de substituições. Como ocorre na integração simples, o objetivo da substituição e trocar integrais complicadas por integrais mais fáceis de calcular. Como você já deve saber, fazemos substituições em integrais duplas através de mudanças de variáveis como transformações de regiões. Suponha que uma região G no plano uv seja transformada biunivocamente na região R no plano xy por equações da forma x = g(u,v) e y = h(u,v), assim toda função f(x,y) definida em R pode ser imaginada como uma função f(g(u,v),h(u,v)) definida também em G. Dizemos então que:

integrate(integrate(f(x,y), variável), variável) = integrate(integrate(f(g(u,v),h(u,v))*J, variável), variável),em que J é o fator jacobiano da transformação de coordenadas, uma função que está no pacote linearalgebra. Seja f(x,y)= sqrt(x+y)*(y-2*x)^2, observe o cálculo da integral dupla

```
-->     f(x,y):=sqrt(x+y)*(y-2*x)^2;
```

Fazendo a transformação

```
-->     [x,y]: [u/3 - v/3, (2*u)/3+v/3];
```

O jacobiano da transformação

```
-->     J: jacobian([x,y], [u,v]);

-->     J: determinant(J);

-->     integrate(integrate(f(x,y) * J, v,-2*u,u), u,0,1);
```

As substituições em integrais triplas é análogo ao das integrais duplas, exceto pelo fato de que agora trabalhamos em três dimensões, em vez de duas. Suponha que uma região G no espaço de variáveis uvw seja transformada biunivocamente na região D no espaço xyz pelas equações diferenciáveis da forma x = g(u,v,w), y = h(u,v,w) e z = k(u,v,w).

Então qualquer função f(x,y,z) definida em D pode ser considerada uma função f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)) definida também em G. Assim

integrate(integrate(integrate(f(x,y,w), variável), variável), variável) =

= integrate(integrate(integrate(f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))*J, variável), variável), variável) Considere f(x,y,z) = (2*x-y)/2)+z/3,

```
-->     f(x,y,z):= ((2*x-y)/2)+z/3;
```

Fazendo a transformação

```
-->     [x,y,z]: [u + v, 2*v, 3*w];
```

O jacobiano da transformação

```
-->     J: jacobian([x,y,z], [u,v,w]);
```

```
-->     J: determinant(J);
```

```
-->     integrate(integrate(integrate(f(x,y,z) * J, u,0,1), v,0,2), w,0,1);
```

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais desempenham um papel muito importante na engenharia e nas ciências exatas. Muitos problemas conduzem a uma ou mais equações diferenciais que deverão ser resolvidas. Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob forma das respectivas derivadas, em especial trabalharemos com as equações diferenciais ordinárias em que contém apenas funções de uma variável e derivadas daquela mesma variável.

Neste capitulo apresentaremos alguns comandos do maxima para auxiliar na resolução de equações diferenciais ordinárias.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

No estudo das equações diferenciais podemos observar que existem várias maneiras de resolver uma equação diferencial de primeira ordem utilizando alguns métodos, cada método tem suas facilidades e se tornam úteis de acordo com o tipo de equação dada. Entre elas, as Equações Separáveis, Homogêneas, Exatas e Lineares e Não-Lineares. Em maxima na realização do cálculo de equações diferenciais usamos o comando'diff(y,x).

Para resolvermos EDO's de primeira ou até mesmo de segunda ordem, utilizamos a função: ode2 (EDO, variável dependente, variável independente)

Determine a solução da equação diferencial 'diff(y,x)=x^2/y^2.

```
-->     'diff(y,x)=x^2/y^2;
```

```
-->     ode2(%,y,x);
```

Obs: O símbolo %c é usado para representar a constante. Podemos utilizar o simbolo % no lugar da EDO na função ode2, pois este símbolo sempre refere-se ao último resultado calculado. Determine a solução geral da equação 'diff(y,x)*e^y=e^x.

```
-->    'diff(y,x)*e^y=e^x;
```

```
-->    ode2(%,y,x);
```

Nestes exemplos observamos que a solução das equações diferenciais não está totalmente simplificada, assim podemos usar os comandos ratexpand e ratsimp para fazermos a simplificação.

```
-->    ratexpand(%);
```

```
-->    ratsimp(%);
```

Calcule a solução geral da equação diferencial 'diff(y,x) = (1+y^2)/(1+x^2)

```
-->    'diff(y,x) = (1+y^2)/(1+x^2);
```

```
-->    ode2(%,y,x);
```

Quando trabalhamos com equações diferenciais podemos ter um valor da função em um ponto qualquer, com este valor podemos determinar a constanre %c obtida. Esse valor é chamado de condição inicial e a equação diferencial junto com a condição inicial forma um problema de valor inicial (PVI). A função utilizada no maxima para resolver um PVI de primeira ordem é ic1(solução geral, valor da variável independente, valor da variável dependente).

Resolva as equações diferenciais

```
-->    4*'diff(y,x) + x/y = 0;
```

```
-->    ode2(%,y,x);
```

```
-->    ic1(%,x=4,y=2);
```

```
-->    'diff(y,x)= (x^2-3*y^2)/(2*x*y);
```

```
-->    ode2(%,y,x);
```

```
-->    ic1(%,x=1,y=0);
```

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Ao estudarmos na seção anterior algumas funções que nos auxiliam na resolução de EDOs de primeira ordem no maxima, conhecemos a função ode2, função responsável em determinar a solução geral das equações diferenciais. Como já foi mencionado anteriormente utilizaremos está mesma função para determinarmos a expressão geral de EDOs de segunda ordem. Quanto a constante troca-se o simbolo %c pelos simbolos %k1 e %k2, já que teremos duas constantes. Para derivadas de ordem superior, o comando 'diff(y,x) necessita ser aplicado citando o grau da derivada, assim 'diff(y,x,n), onde n representa a ordem da equação diferencial.

Resolva a equação diferencial 'diff(y,x,2) - 'diff(y,x) + (1/4)*y = 0

```
-->     'diff(y,x,2) - 'diff(y,x) + (1/4)*y = 0;

-->     ode2(%,y,x);

-->     ratexpand(%);
```

Ache a solução geral de 'diff(y,x,2) - y = x^2

```
-->     'diff(y,x,2) - y = x^2;

-->     ode2(%,y,x);

-->     ratexpand(%);
```

Na seção anterior foi apresentado a função ic1, responsável em determinar um PVI de primeira ordem. Na resolução de EDOs de segunda ordem, assim como nas de primeira ordem também podemos determinar o valor de um PVI. A função utilizada no maxima para resolver um PVI de segunda ordem é ic2(solução geral, valor da variável independente, valor da variável dependente, valor da derivada dependente em relação á variável independente avaliada no ponto do segundo parâmetro).

Resolva a equação diferencial y'(x) - y = 0, sendo y(-1) = 5, y'(-1) = -5, e encontre uma solução para o problema de valor inicial na condição dada.

```
-->     'diff(y,x,2) - y = 0;

-->     ode2(%,y,x);

-->     ic2(%,x=-1,y=5,'diff(y,x)=-5);
```

2.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Muitas vezes, uma equação diferencial não é suficiente para expressar um fenômeno a ser analisado. Quando o problema envolve duas ou mais equações associadas de determinada maneira, utilizamos um sistema de equações diferenciais, que com certa manipulação, sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. A função responsável em calcular o sistema de equações é desolve(sistema, variáveis dependentes).

Resolva o sistema de equações diferenciais nas seguinte condições: 'diff(x(t),t)=-x+y, 'diff(y(t),t)=2*x com x(0)=0,y(0)=1. Primeiro definimos as equações

```
-->     eq1:'diff(x(t),t)=-x+y;

-->     eq2:'diff(y(t),t)=2*x;
```

Agora formaremos o sistema com estas equações

```
-->     sistema:[eq1,eq2];
```

Para atribuirmos os valores do PVI, utilizaremos o comando atvalue(função, [x_1 = a_1, ... , x_n = a_m], valor).

```
-->     atvalue (x(t), t=0, 0);

-->     atvalue (y(t), t=0, 1);
```

Por fim resolvemos o sistema

```
-->     desolve (sistema,[x(t),y(t)]);
```

2.4 CAMPO DE DIREÇÕES E TRAJETÓRIAS

Campo de direções é uma ferramenta importante para a avaliação de equações diferenciais, pois dão uma noção dos valores que as soluções dessas equações tendem. Eles são compostos por vetores tangentes às soluções nos pontos do plano xy. Para desenhar campos de direções, devemos primeiramente carregar a biblioteca plotdf utilizando o comando load("plotdf")$. A função que desenha os campos de direções é plotdf. É importante resaltar que a função plotdf só desenha campos de direções para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Através do exemplo a seguir observe como trabalhar com campo de direções e trajetórias. Traçar o campo de direções para a equação diferencial 'diff(y,x)=(1+y^2)/(1+x^2). Ao digitarmos o comando plotdf com a equação diferencial e executarmos este o plano xy é gerado.

```
-->     load("plotdf")$


        plotdf((1+y^2)/(1+x^2));
```

Objetivando o estudo dos comandos no maxima, apresentaremos alguns desses para o desenvolvimento das resoluções de problemas.

trajectory_at: define as coordenadas (x,y) para o ponto inicial de uma curva integral. [trajectory_at,x,y]

versus_t: é usado para criar uma segunda janela de plotagem, com um lote de curva integral, como duas funções x,y em função da variável independente t. Se o versus_t for dado com algum valor diferente de 0, a segunda janela será aberta. A segunda janela do lote inclui um outro menu, similar ao menu da janela principal do lote. [versus_1]

tinitial: define o valor inicial da variável t, utilizada para computar as curvas integrais. [tinitial,t]

xcenter e ycenter: determinam a coordenada x(xcenter) e y(ycenter) do centro da plotagem. [xcenter, x] e [ycenter, y]

xradius e yradius: é metade do comprimento da escala dos valores que serão mostrados no sentido de x, para (xradius), e y, para (yradius). [xradius, x] e [yradius, y]

xfun: possibilita inserir funçõe no plano xy, juntamente com a equação diferencial. [xfun,"f(x);g(x);...;h(x)"]

Vejamos agora exemplos englobando os comandos apresentado:

Traçar o campo de direção de 'diff(y,x)=(1+y^2)/(1+x^2), mostrando a trajetória de uma possível solução.

```
-->     load("plotdf")$

        plotdf((1+y^2)/(1+x^2),[trajectory_at,-1,4]);
```

Observe da aplicação dos comandos.

```
-->     load("plotdf")$

        plotdf(4*x-y^2,[xfun,"sqrt(x);-sqrt(x)"],[trajectory_at,-1,3],

        [yradius,5], [xcenter,6]);

-->     load("plotdf")$

        plotdf((x^2-3*y^2)/(2*x*y),[trajectory_at,2,-4],[xradius,10],

        [yradius,10],[xcenter,0],[ycenter,0]);
```

```
-->      load("plotdf")$

         plotdf(exp(-x)*(-y),[versus_t,1],[tinitial,5],

         [trajectory_at,2,3],[xradius,5],[yradius,5],[xcenter,0],[ycenter,0]);
```

2.5 RESOLVENDO SISTEMAS DE EDOs LINEARES

Exemplo: Encontre a solução do sistema Y'= ([1,12],[3,1])Y Começaremos introduzindo a matriz A nesta resolução, para isso usaremos o comando matrix(fila1,fila2,...,filaN)

onde fila1, fila2, etc. são os vetores linhas(listas de números a1,a2,... da forma [a1,a2,...,aM]). Assim fazemos

```
-->      A:matrix([1,12],[3,1]);
```

Definimos as equações e o sistema

```
-->      eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);

-->      eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);

-->      sistema:[eq1,eq2];
```

Calculamos o sistema

```
-->      desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

E obtemos a solução geral. Observe que na saída do maxima aparecem os valores y1(0) e y2(0) que são desconhecidos.

Se queremos resolver o PVI, então devemos usar o comando atvalue.

```
-->      atvalue(y1(x),x=0,1);

-->      atvalue(y2(x),x=0,2);

-->      desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
```

Para encontrar a matriz exponencial usaremos a propriedade de que as colunas da matriz são as soluções dos PVI Y'= ([1,12],[3,1])Y;Y(0)=e1=([1,0])

```
-->    atvalue(y1(x),x=0,1);
-->    atvalue(y2(x),x=0,0);
-->    eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);
-->    eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);
-->    sistema:[eq1,eq2];
-->    col1:desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
-->    eq3:makelist(second(col1[k]),k,1,length(col1));
```

E depois o PVI Y'= ([1,12],[3,1])Y;Y(0)=e2=([0,1])

```
-->    atvalue(y1(x),x=0,0);
-->    atvalue(y2(x),x=0,1);
-->    eq1:'diff(y1(x),x)=y1(x)+12*y2(x);
-->    eq2:'diff(y2(x),x)=3*y1(x)+y2(x);
-->    sistema:[eq1,eq2];
-->    col2:desolve(sistema,[y1(x),y2(x)]);
-->    eq4:makelist(second(col2[k]),k,1,length(col2));
```

Dado que as saídas eq3 e eq4 são vetores linhas, os converteremos em colunas simplesmente transpondo a

matriz com o comando transpose.

```
-->    define(expA(x),transpose(matrix(eq3,eq4)));
```