

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática – Formação de Professores

Leis de Conservação Unidimensionais

Autor: Luciano do Nascimento André
Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis
Março 2011

Luciano do Nascimento André

Leis de Conservação Unidimensionais

Monografia apresentada ao Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos Requisitos para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Florianópolis
Março 2011



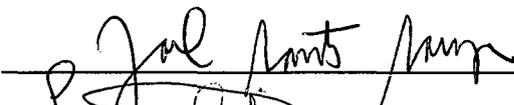
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática**

Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Leis de Conservação Unidimensionais"

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 10/03/2011

Dr. Joel Santos Souza (Orientador) 

Dr. Luciano Bedin (Examinador) 

Dr. Cleverson Roberto da Luz (Examinador) 


Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2011.

Agradecimentos

Agradeço aos Docentes da Pós-Graduação e em especial ao Prof. Dr. Joel Santos Souza pela orientação.

Aos professores que compõe a Banca e se dispuseram a ler este trabalho.

A Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UFSC pela oportunidade.

Agradeço a Deus por tudo que acontece em minha vida.

A minha família pelo apoio incondicional.

Sumário

	Introdução.....	1
1	Preliminares.....	3
1.1	Leis de conservação.....	4
1.1.1	Leis de conservação unidimensionais.....	4
1.1.2	Equação de continuidade.....	6
1.1.3	Forma geral das leis de conservação.....	9
1.2	Definições e exemplos.....	11
1.3	Relações constitutivas e modelos importantes.....	15
2	A equação linear de primeira ordem.....	22
2.1	A equação linear de primeira ordem.....	23
2.2	Propagação de singularidades da equação linear.....	34
3	Equações quase-lineares.....	36
3.1	A equação quase linear de primeira ordem.....	37
3.2	O problema de Cauchy.....	40
3.3	A equação de Burger invíscida.....	45
3.3.1	Soluções globais e soluções locais.....	47
4	Choques e soluções fracas.....	55
4.1	Soluções fracas para as leis de conservação unidimensionais.....	56
4.2	Condição de salto ou de Rankine-Hugoniot.....	60
4.3	Voltando à equação de Burger.....	63
4.4	Soluções fracas entrópicas e viscosas.....	69
	Conclusão.....	73
	Referências bibliográficas.....	75

Introdução

Neste trabalho, são apresentados alguns métodos para obtenção de soluções clássicas e fracas, para alguns problemas de valores iniciais (PVIs), envolvendo modelos de leis de conservação unidimensionais do tipo $u_t + f(u)_x = 0$.

No primeiro capítulo, são estabelecidas formas generalizadas das leis de conservação, em uma e n -dimensões. Modelos importantes, que aparecem em diversas aplicações, são obtidos a partir dessas leis de conservação através de diferentes relações constitutivas.

No capítulo dois, estuda-se o método das *curvas características* planas para a obtenção de soluções clássicas de problemas de Cauchy envolvendo EDPs de primeira ordem lineares. Sobre certas condições, são obtidas soluções gerais, definidas em toda região considerada. Estuda-se também como são propagadas singularidades da condição inicial.

No capítulo três, são estudadas as EDPs quase lineares de primeira ordem. Desenvolve-se a teoria das soluções regulares para os PVIs, utilizando-se as curvas características espaciais. Neste caso, soluções clássicas são obtidas quando se impõe condições especiais sobre o dado inicial, o que não ocorria no estudo do caso linear que requeria apenas regularidade do mesmo. As principais diferenças entre EDPs lineares e quase-lineares são também discutidas. Devido a não linearidade dos termos que envolvem as derivadas nas EDPs quase-lineares, as soluções clássicas para essas equações são válidas somente em uma vizinhança do dado inicial.

Ao considerar $f(u)$ continuamente diferenciável, as leis de conservação são representadas por equações quase-lineares que, em geral, desenvolvem a formação de *choques* (singularidades devido à intersecção de curvas características) em um tempo finito bem pequeno. Logo, a formulação diferencial da lei de conservação não fornece uma *solução global* (para todo $t > 0$) e o modelo matemático não descreve adequadamente o fenômeno. Estudam-se, ainda, alguns exemplos de PVIs para a equação não linear de Burger invíscida.

No capítulo quatro, em consequência das singularidades em tempo finito nas leis de conservação não lineares, o conceito de solução é generalizado, permitindo que existam soluções regulares por partes: permite-se que u e $f(u)$ não sejam regulares. Neste caso, soluções fracas para leis de conservação unidimensionais são obtidas através da teoria das distribuições. Partindo da formulação fraca de solução, e considerando como hipótese que as descontinuidades sejam propagadas ao longo de uma curva regular simples – *curva de choque*, obtém-se a *condição de salto*. Percebe-se que, em geral, as curvas de choque da solução não coincide com as curvas características planas. Em alguns PVIs, podem ser obtidas várias soluções que satisfaçam a condição de salto. Então, ao enfraquecer a noção de solução, surge um agravante: a falta de unicidade. Esse problema é superado ao considerarem-se critérios de admissibilidade das soluções, selecionando-se, dentre as possíveis soluções, aquelas que fazem sentido físico. Estudam-se o *critério de entropia* e o *critério de viscosidade* que são aplicados a alguns PVIs da equação de Burger inviscida discutidos anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

As *Leis de conservação* são, em geral, representadas por equações em forma integral ou diferencial que expressam o fato de certa quantidade não se alterar diante de várias modificações pelas quais passa o sistema em estudo. Essas equações determinam como um processo evolui com o tempo e por isso são chamadas de *equações de evolução*. A quantidade conservada pode ser uma substância material, como a massa de um fluido em um escoamento, ou um conceito abstrato que tenha significado apenas matemático, como é o caso da energia.

A formulação diferencial das leis de conservação é obtida através da forma integral, que é baseada em princípios de conservação aplicados a volumes de controle. Para isso, na formulação integral, devemos supor que as funções no integrando sejam continuamente diferenciáveis, restringindo deste modo a classe das soluções possíveis. Essas soluções *regulares* em todo domínio são chamadas *soluções clássicas*. Por isso se quisermos soluções mais gerais, devemos estudar as leis de conservação em sua formulação integral. As soluções que não são regulares em alguns pontos, ou seja, que são regulares em parte do domínio, são chamadas *soluções fracas*.

1.1. Leis de conservação

Neste capítulo, serão discutidas as leis de conservação em suas formulação integral e diferencial. Na sequência obteremos a forma geral das leis de conservação unidimensionais e a forma geral em \mathbb{R}^n . Esta última será motivada pela obtenção de uma lei de conservação de massa associada a escoamentos de fluidos.

1.1.1. Leis de conservação unidimensionais

Consideremos $u = u(x, t)$ uma função que depende apenas de uma variável espacial $x \in \mathbb{R}$ e do tempo $t > 0$. Essa função representará a concentração por unidade de volume de uma substância em um tubo, sendo que ela se mantém constante em cada secção transversal A , variando apenas na direção x . Seja um segmento arbitrário do tubo denotado pelo intervalo $I = [a, b]$. A porção do tubo representada por esse intervalo será chamada de *volume de controle*, veja figura 1.1.

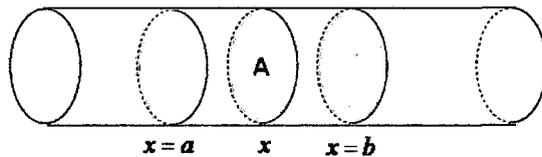


Figura 1.1. Lei de conservação unidimensional.

Logo, a quantidade total da substância dentro do volume de controle será,

$$\int_V u(x, t) dV = \int_a^b u(x, t) A dx.$$

Assumiremos que haja movimento dessa substância através do tubo e que esse movimento seja somente na direção axial. Definiremos o fluxo $\phi(x, t)$ da substância no tempo t que atravessa a secção transversal correspondente a x , como a *quantidade de substância que atravessa a secção no tempo t por unidade de área por unidade de tempo*. Por convenção, ϕ será positivo quando o fluxo for na direção positiva do eixo x e negativo quando for na direção oposta. Assim, a taxa de transferência líquida da substância para dentro do volume de controle no tempo t será a diferença entre a quantidade de substância entrando em $x = a$ e saindo em $x = b$:

$$\phi(a, t)A - \phi(b, t)A.$$

A quantidade u pode ser criada ou destruída dentro do volume de controle por uma fonte externa ou interna. Denotamos por $g(x, t, u)$ o *termo fonte* que é uma função local, dependendo de cada x . A função g é a taxa com a qual a quantidade u é criada ou destruída em x no tempo t , por unidade de volume. Portanto, a taxa de criação ou destruição da substância em todo o volume de controle é dada pela integral,

$$\int_V g(x, t, u) dV = \int_a^b g(x, t, u) A dx.$$

A *lei de conservação* para a substância pode então ser formulada, em linguagem matemática, da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b g(x, t, u) dx, \quad (1.1)$$

significando que quando a quantidade da substância varia dentro do volume de controle, essa variação é proveniente da transferência líquida da substância para dentro do volume de controle mais a taxa de criação da substância dentro do volume de controle. Essa é a lei de conservação na *formulação integral*, valendo mesmo que u , ϕ não sejam funções diferenciáveis ou g não seja contínua. Podemos agora

obter uma *formulação diferencial* para (1.1), desde que consideramos que as funções u e ϕ sejam continuamente diferenciáveis e que g seja contínua. Da regularidade de u e ϕ , podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo na primeira integral abaixo e usar a regra de Leibniz para derivar sobre o sinal de integração na segunda obtendo,

$$\phi(b,t) - \phi(a,t) = \int_a^b \phi_x(x,t) dx,$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x,t) dx = \int_a^b u_t(x,t) dx.$$

Acrescentando às condições anteriores a continuidade de g , a lei de conservação pode ser escrita como,

$$\int_a^b [u_t(x,t) + \phi_x(x,t) - g(x,t,u)] dx = 0 \text{ para todo intervalo } I = [a,b]. \quad (1.2)$$

Assim o integrando de (1.2) é uma função contínua de x , e como essa equação pode ser considerada para todos os intervalos de integração I , resulta que o integrando anula-se identicamente, ou seja,

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = g(x,t,u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.3)$$

1.1.2. Equação de continuidade

A dedução da equação de continuidade nos ajudará a entender melhor o termo de fluxo nas leis de conservação, discutido de forma generalizada na subseção anterior como também na próxima.

Consideremos a função $\rho = \rho(x,t)$, que representa a densidade de um fluido em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$, no tempo t . Nesse domínio, seja V uma região fechada

arbitrária com fronteira regular ∂V , o volume de controle. A massa total de fluido dentro de V no instante t é,

$$\int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

A taxa de variação total da massa de fluido em V deve ser equilibrada pela taxa de criação de fluido produzida em V através de fontes, mais a taxa líquida do fluido que flui pela fronteira ∂V . Seja $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ o campo de velocidades definido em D e $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ o campo vetorial formado pelos vetores unitários normais externos a V . Assim a massa Δm de fluido que atravessa um elemento de área diferencial ΔS de ∂V em um intervalo de tempo infinitesimal Δt está contida em um cilindro de base ΔS e geratriz $\mathbf{v}\Delta t$, onde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ é a velocidade do fluido no entorno de ΔS no instante Δt . Veja figura 1.2.

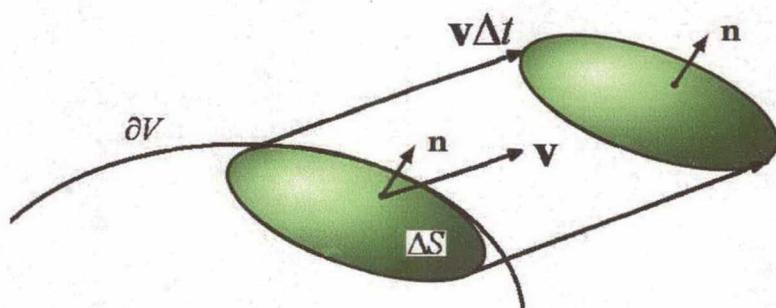


Figura 1.2. Interpretação do fluxo de massa através do elemento de área diferencial da fronteira do volume de controle.

Do exposto acima, podemos então obter a equação para a massa de fluido,

$$\Delta m = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta t \Delta S.$$

Definimos o fluxo de massa $\phi(\mathbf{x}, t)$ como a grandeza vetorial que representa a quantidade de massa fluindo através da superfície no tempo t por unidade de área por unidade de tempo,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

portanto,

$$\Delta m = \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \Delta t \Delta S. \quad (1.4)$$

Agora da (1.4), temos que a taxa de transferência de massa *para fora da superfície* S é dado pela integral de superfície

$$\int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS.$$

Denotando por $g = g(\mathbf{x}, t, \rho)$ o termo fonte, a taxa com a qual a quantidade de massa é produzida em V é determinada por,

$$\int_V g(\mathbf{x}, t, \rho) dV.$$

Conseqüentemente, a lei de conservação para ρ é dada em sua formulação integral por,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \int_V g(\mathbf{x}, t, \rho) dV.$$

A formulação integral da lei de conservação pode ser reformulada como uma *condição local*, ou seja, uma formulação diferencial, desde que ρ e ϕ sejam funções regulares. Nesse caso, usando o teorema de divergência de Gauss, a integral de superfície pode ser escrita como uma integral de volume em V ,

$$\int_{\partial V} \phi \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \phi dV$$

e passando o operador de derivação para dentro do sinal de integração, obtemos

$$\int_V \rho_t(\mathbf{x}, t) dV = - \int_V \operatorname{div} \phi(x, t) dV + \int_V g(\mathbf{x}, t, \rho) dV.$$

Então, uma vez que V foi escolhido de forma arbitrária, obtemos a formulação diferencial da equação de continuidade com um termo fonte,

$$\rho_t(x, t) + \operatorname{div} \phi(x, t) = g(x, t, \rho), \quad x \in D, \quad t > 0. \quad (1.5)$$

1.1.3. Forma geral das leis de conservação

Nesta subseção, generalizaremos os resultados obtidos na dedução da equação da continuidade para leis de conservação em geral. Consideraremos uma substância qualquer no espaço \mathbb{R}^n que é conservada. Sendo $u(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a densidade dessa substância por unidade de volume, podemos generalizar a (1.3), como

$$\int_V u(\mathbf{x}, t) dV,$$

que é a quantidade total de substância dentro do volume de controle V em $D \subset \mathbb{R}^n$.

Se $g(\mathbf{x}, t, u)$ denota o termo fonte, a taxa de criação da substância dentro do volume de controle é

$$\int_V g(\mathbf{x}, t, u) dV,$$

e a taxa de transferência líquida da substância para fora do volume de controle é

$$\int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS, \quad (1.6)$$

onde $\phi(\mathbf{x}, t)$ representa a quantidade de substância fluindo através da superfície no tempo t por unidade de área, por unidade de tempo. A função ϕ em (1.6) é uma generalização que depende de cada modelo físico, sendo na equação da continuidade dada por $\phi(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{v}$. De uma forma geral, ϕ é baseada nas propriedades físicas do meio, que decorrem de observações empíricas. Essas equações são chamadas de **relações constitutivas ou equações de estado**.

A lei de conservação na formulação integral é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \int_V g(\mathbf{x}, t, u) dV ,$$

e, se as funções u e ϕ forem $C^1(D)$ e a função g for contínua em D , aplicamos o teorema da divergência de Gauss para obter a formulação diferencial

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\phi(\mathbf{x}, t)) = g(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0.$$

1.2. Definições e exemplos

Introduziremos, nesta seção, algumas definições importantes que serão utilizadas no decorrer do texto.

Definição 1.1. Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) em n variáveis independentes x_1, \dots, x_n , é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (1.7)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u = u(x)$ é uma função que queremos determinar.

Definição 1.2. Chama-se ordem de uma equação do tipo (1.7) a maior das ordens das derivadas parciais que aparecem na equação.

Definição 1.3. Consideremos $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com Ω aberto em \mathbb{R}^n . Dizemos que u é de classe C^0 em Ω , e escrevemos $u \in C^0(\Omega)$, quando u é contínua em Ω . Dado $k = 1, 2, \dots$ dizemos que u é de classe C^k , e escreveremos $u \in C^k(\Omega)$, quando todas as derivadas parciais de u de ordem k são funções contínuas em Ω . Finalmente dizemos que u é de classe C^∞ em Ω quando u é de classe C^k em Ω para todo k .

Definição 1.4. *Soluções clássicas ou regulares:* chama-se solução clássica de uma equação diferencial de ordem m do tipo (1.7) em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dependente das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n a uma função

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^m(\Omega),$$

tal que a substituindo juntamente com suas derivadas na equação (1.7) obtemos uma identidade.

Como foi dito na introdução deste capítulo, soluções mais gerais podem ser obtidas. Podemos obter soluções que não sejam $C^1(\Omega)$ em alguns pontos do domínio; considerando, por exemplo, que suas derivadas não sejam contínuas. Logo, para esse tipo de solução podemos, eventualmente, perder a diferenciabilidade em alguns pontos de Ω . Essas soluções que não são *regulares* em todo o domínio são ditas *soluções fracas ou generalizadas*.

Para obtenção de soluções fracas, devemos ter em mente que elas são obtidas desde que o problema esteja *bem posto*. Podemos definir informalmente como em (EVANS, 1997) o que vem a ser essa noção:

Definição 1.5. *Problema bem posto:* Diz-se que um determinado problema para uma equação diferencial parcial é bem-posto se:

- (a) o problema tem uma solução;
- (b) essa solução é única;
- (c) a solução depende continuamente das condições iniciais do problema.

Uma pergunta que surge na resolução dos problemas envolvendo equações diferenciais parciais é: que condições devemos considerar para que a solução obtida seja única?

Definição 1.6. *Problema de Cauchy:* Podemos considerar o problema de valor inicial (PVI), que consiste em estudar a existência e unicidade de solução, no qual conhecemos o valor da função procurada ao longo de uma curva inicial contida em

um domínio, aberto não limitado. Um PVI como esse é conhecido como um *Problema de Cauchy*.

Definição 1.7. A equação diferencial (1.7) chama-se linear se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a equação é dita não linear. Em particular, uma equação diferencial de primeira ordem linear para uma função de duas variáveis x, y tem a forma,

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y). \quad (1.8)$$

Observamos que as EDP's não lineares são classificadas de acordo com o tipo de não linearidade. Neste trabalho estudaremos alguns casos importantes de equações não lineares. De modo particular, estamos interessados nas equações quase-lineares.

Definição 1.8. Uma equação do tipo (1.7) é dita quase linear se é linear somente com relação às derivadas parciais da ordem da equação. Em particular uma equação diferencial de primeira ordem quase linear para uma função de duas variáveis x, y tem a forma,

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u)u = d(x, y, u). \quad (1.9)$$

Exemplo 1.1. A equação diferencial parcial quase linear $\frac{\partial u}{\partial x} + y(1-u)\frac{\partial u}{\partial y} = (y-1)u$

surge no estudo da teoria unidimensional de transporte de nêutron (ZACHMANOGLU; THOE, 1986, p.63).

Observação 1.1. As equações do tipo (1.8) e (1.9) aparecem em problemas de cálculo variacional, em mecânica e em óptica geométrica (JOHN, 1982, p.9).

Exemplo 1.2. Considere a equação de continuidade (1.5) para *fluidos incompressíveis com a presença do termo fonte*,

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = g(\mathbf{x}, t, \rho).$$

Expandindo o termo sobre o operador divergência,

$$\rho_t + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho(\operatorname{div} \mathbf{v}) = g(\mathbf{x}, t, \rho).$$

Agora , levando em conta que para fluidos incompressíveis, a divergência do campo de velocidades é nula, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, obtemos que

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = g(\mathbf{x}, t, \rho).$$

Em particular no caso unidimensional a equação reduz-se a

$$\rho_t + v(x, t) \rho_x(x, t) = g(x, t, \rho),$$

que é uma equação linear a coeficientes variáveis onde a variação na densidade de massa, ρ_t , surge somente devido ao termo fonte.

Se for considerado na equação de continuidade com o operador de divergência expandido o termo fonte nulo, $g \equiv 0$, o fluido será homogêneo, $\rho_t = 0$. Nesse caso a equação de continuidade reduz-se a forma trivial, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

1.3. Relações constitutivas e modelos importantes

As equações que descrevem a formulação diferencial das leis de conservação contêm duas quantidades desconhecidas, a densidade u e o fluxo ϕ . Logo, como já discutido, precisamos de uma nova equação que relacione a densidade com o fluxo. Essa equação adicional é uma relação baseada em raciocínios empíricos sobre as propriedades físicas do meio ou os processos envolvidos. Elas são chamadas relações constitutivas ou equações de estado. Assim, uma equação constitutiva está em um nível diferente da lei de conservação básica: ela é uma lei fundamental da natureza conectando a densidade u com o fluxo ϕ , uma equação aproximada de origem empírica. Em seguida, obteremos alguns exemplos de modelos físicos obtidos ao considerarmos determinadas relações constitutivas nas leis de conservação na formulação diferencial.

Exemplo 1.3. Equação de difusão. Suponhamos que um determinado processo seja governado pela lei de conservação básica em uma dimensão e que a princípio não tenhamos a presença do termo fonte ($g = 0$),

$$u_t + \phi_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.10)$$

Em muitos processos físicos observa-se que a substância flui de regiões de maior densidade para regiões de menor densidade a uma taxa diretamente proporcional ao gradiente de densidade de u , isto é, $\phi(x, t) \propto u_x(x, t)$. Essa relação é chamada de *lei de Fick*:

$$\phi(x, t) = -Du_x(x, t). \quad (1.11)$$

Os processos descritos por essa lei linear são conhecidos como *processos difusivos*. A constante de proporcionalidade positiva D é chamada constante de difusão. Combinando (1.10) e (1.11) obtemos uma única equação de segunda ordem linear para a densidade $u = u(x, t)$ dada por

$$u_t - Du_{xx} = 0. \quad (1.12)$$

A equação (1.12) é chamada de *equação de difusão*, ela governa processos conservativos quando o fluxo é especificado através da lei de Fick.

Observação 1.2. A *difusão* é um fenômeno baseado no *movimento browniano*. O movimento browniano é o movimento aleatório que se observa em algumas partículas microscópicas em um meio fluido. O movimento aleatório dessas partículas se deve ao bombardeamento incessante entre as moléculas do fluido submetidas a uma *agitação térmica*. A equação de difusão pode ser obtida rigorosamente fazendo-se uso da teoria de probabilidades na descrição do movimento Browniano.

Exemplo 1.4. *Equação de reação-difusão.* Se considerarmos o termo fonte ($g \neq 0$).

A lei de conservação unidimensional

$$u_t + \phi_x = g(x, t, u),$$

e considerando a lei de Fick (1.28) obtemos a equação

$$u_t - Du_{xx} = g(x, t, u),$$

que é chamada uma equação de reação-difusão. Equações de reação-difusão são não lineares se o termo de reação g é não linear em u .

Exemplo 1.5. *Equação de Advecção.* Neste caso lidamos com um termo de fluxo mais simples. Ele é determinado pela relação linear

$$\phi = cu \quad (1.13)$$

na qual c é uma constante positiva que tem dimensões de velocidade. Substituindo (1.13) na lei de conservação (1.10) obtemos

$$u_t + cu_x = 0 \quad (1.14)$$

que é a *equação de advecção*. O termo advectivo, neste contexto, se refere ao movimento horizontal de uma substância física sem distorção. Esta equação também é designada por equação de *convecção* ou de *transporte*.

Observação 1.3. De forma mais precisa, a convecção é um fenômeno que ocorre em fluidos e combina difusão e condutibilidade térmica. Ela surge pela diferença de concentração criada por diferenças de temperaturas. A *difusão molecular*, a *condutibilidade térmica* e a *viscosidade* são três importantes *fenômenos de transportes*. A viscosidade também é uma combinação de difusão molecular e condutibilidade térmica. Os detalhes podem ser consultados em (ALONSO, 1972).

Exemplo 1.6. A *equação de difusão advecção de Burger*. À lei de conservação básica (1.10) sem o termo fonte, agregamos a relação constitutiva,

$$\phi = -Du_x + f(u)$$

e obtemos a seguinte equação para a densidade u ,

$$u_t - Du_{xx} + f(u)_x = 0. \quad (1.15)$$

Agora temos duas condições que contribuem para o fluxo, o termo difusivo $-Du_x$, dado pela lei de Fick, e um termo advectivo $f(u)$, que depende unicamente de u . No caso especial, que $f(u) = u^2/2$ a equação (1.15) é escrita como,

$$u_t + uu_x = Du_{xx} \quad (1.16)$$

que é conhecida como *equação de Burger com viscosidade*, que é uma das equações fundamentais em modelos de mecânica dos fluidos. Quando $D = 0$, sem a presença de difusão, temos

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.17)$$

que é chamada de *equação de Burger invíscida*. Ela é uma equação de advecção não linear.

Observação 1.4. O termo Du_{xx} está associado à dissipação de energia. No contexto da dinâmica dos gases, ele é o *termo de viscosidade*. A equação de Burger invíscida pode ser interpretada como um caso limite da equação (1.16) quando se considera o *coeficiente de viscosidade* tendendo a zero.

Exemplo 1.7. Considere a equação de advecção (1.14), $u_t + cu_x = 0$ com $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Sua solução $u(x, t)$ é uma função de distribuição de densidade no tempo t . Supondo que a conhecemos no tempo $t = 0$: $u(x, 0) = h(x)$, e que seja h de classe C^1 . A equação com sua condição inicial constituem o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases}$$

Fixamos agora um ponto $(x_0, 0)$ sobre o eixo x e definamos uma função dada por $v(t) = u(x_0 + ct, t)$. Os valores da função $v(t)$ correspondem aos valores da solução ao longo da reta $x = x_0 + ct$. Derivando essa função $v(t)$ em relação a t , obtemos

$$v'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + ct, t) \frac{d}{dt}(x_0 + ct) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + ct, t) \frac{d}{dt}(t) \text{ ou ainda,}$$

$v'(t) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + ct, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + ct, t)$, e da equação (1.14) obtemos $v'(t) = 0$, o que resulta em $v(t) = \text{const}$.

Assim vemos que a função v é constante com o tempo, ou seja, o valor de u é constante ao longo da reta, e

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = u(x - ct, 0),$$

uma vez que $x_0 = x - ct$.

Essas retas ao longo das quais a solução da equação de advecção é constante são chamadas de *retas características* da equação. No capítulo seguinte, esse conceito será estudado em detalhes.

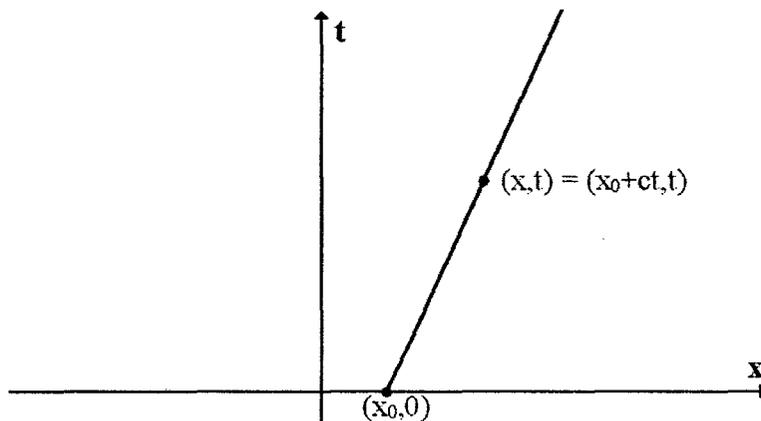


Figura 1.3. *Reta característica da equação (1.33) com ponto de partida $(x_0, 0)$. A solução é constante ao longo dessa reta.*

Da condição inicial temos, $u(x_0, 0) = h(x_0) = \text{const}$, então $u(x, t) = h(x - ct)$.

Logo, a solução do problema de Cauchy é dada por

$$u(x, t) = h(x - ct), \text{ com } h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Essa solução mostra que a distribuição de densidade inicial da substância $u(x_0, 0)$ é transportada com velocidade c para a direita ou para a esquerda, sem deformação, conforme seja $c > 0$ ou $c < 0$.

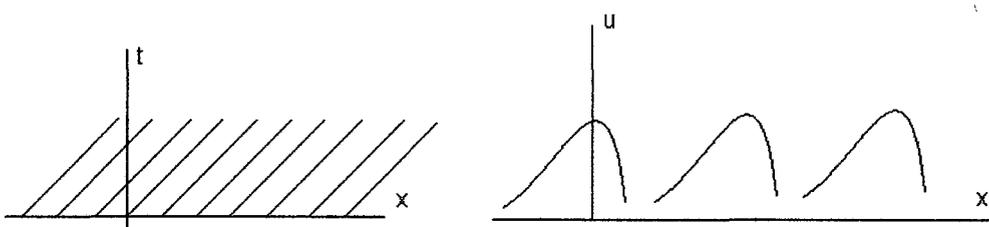


Figura 1.4. Diagrama característico e evolução do perfil de distribuição inicial, com intervalos de tempos iguais, transportado horizontalmente sem deformação através da equação de advecção.

Um caso particular desse PVI é o *estacionário*, onde a velocidade de transporte é nula, $c = 0$: $u_t = 0$. Integrando a equação obtemos, $u(x, t) = g(x)$ onde g é de classe C^1 e arbitrária. Da condição inicial, concluímos que $h \equiv g$. Isso significa que a solução não se altera com o passar do tempo: a distribuição inicial permanece a mesma.

Exemplo 1.8. *Comparação entre advecção e difusão-advecção.* Consideremos um tubo horizontal onde há um escoamento de um fluido com campo de velocidade constante igual a $c > 0$. Nesse tubo é acrescentado um traçador químico. Na primeira figura, em um tempo $t > 0$, a distribuição inicial do traçador é *transladada* por advecção a uma distância igual a ct . Na segunda, a distribuição inicial é transladada por um distância igual a ct e modificada por difusão.

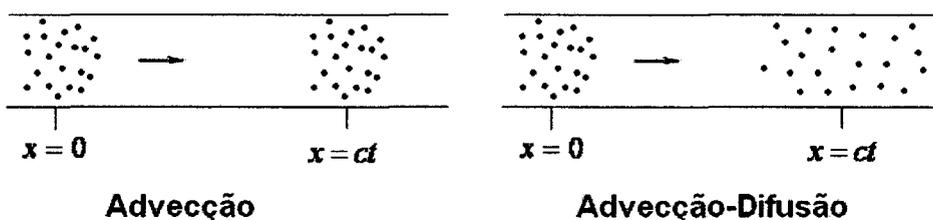


Figura 1.5. Perfis de transporte horizontal de matéria advectivo e advectivo-difusivo.

Logo, a presença do termo dissipativo altera o perfil inicial do traçador ao longo do tempo.

Exemplo 1.9. Neste exemplo, listamos algumas equações obtidas com o fluxo tendo um termo advectivo linear ou não e/ou um termo difusivo.

$$\text{Difusão: } u_t = Du_{xx};$$

$$\text{Reação difusão: } u_t = Du_{xx} + g(x, t, u);$$

$$\text{Advecção-difusão: } u_t + cu_x = Du_{xx};$$

$$\text{Advecção: } u_t + cu_x = 0;$$

$$\text{Advecção não linear-difusão: } u_t + uu_x = Du_{xx}.$$

Capítulo 2

A equação linear de primeira ordem

Neste capítulo, desenvolveremos um método para a obtenção de soluções regulares para equações lineares de primeira ordem, utilizando as *curvas características planas* e estudaremos um problema de Cauchy para a equação linear, para o qual garantiremos unicidade de soluções. Veremos, no capítulo seguinte que o estudo aqui desenvolvido é um caso particular da teoria das EDP's quase lineares e que os resultados obtidos em seguida ajudarão a evidenciar as diferenças entre os dois tipos de equações.

No capítulo anterior, estudamos o protótipo de uma equação linear de primeira ordem mais simples nas aplicações: a equação de advecção (1.14). Neste, desenvolveremos uma teoria geral para obtenção de soluções globais, ou definidas em um conjunto aberto do plano, para uma classe ampla de PVI's envolvendo equações lineares de primeira ordem.

Considerando regulares as funções dos coeficientes da equação e a função dado inicial, e que as intersecções das características com a curva inicial sejam sempre transversais, a solução do PVI será válida em um conjunto aberto que será maior quanto maior for a região de influência da curva inicial, podendo ser todo o \mathbb{R}^2 ou todo o semiplano $t \geq 0$, quando as equações forem leis de conservação.

Com as hipóteses do Teorema 2.1 mas enfraquecendo as condições sobre a função dado inicial, considerando-a apenas regular por partes, veremos na seção 2.3, que as singularidades são propagadas ao longo das curvas características. Veremos ainda, no capítulo seguinte, que, para o caso quase-linear, as singularidades podem surgir considerando até mesmo que o dado inicial seja regular – o que não ocorre no caso linear quando o dado inicial satisfaz as hipóteses desse teorema.

2.1. A equação linear

Estudaremos, a equação linear considerando $c \equiv 0$ na equação geral (1.8) do Capítulo 1, ou seja,

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = d(x, y). \quad (2.1)$$

O objetivo aqui é encontrar curvas especiais no plano, ou em um aberto contido nele, que permitam transformar (2.1), ao longo dessas curvas, em uma equação diferencial ordinária com o lado esquerdo da equação se transformando simplesmente em uma derivada total. Essas curvas são chamadas *curvas características planas*. No caso linear, elas dependem exclusivamente da equação, uma vez que os coeficientes em (2.1) não dependem da solução, como no caso quase-linear. Isso simplifica o tratamento e constitui a diferença principal entre os dois tipos de equação. Resolver um PVI para a equação linear pelo método das curvas características planas, consiste em obter-se uma solução que depende de uma curva inicial que intercepta a família de características planas transversalmente. A solução é obtida integrando-se a EDO obtida ao longo das características e tendo como dado inicial o ponto de intersecção entre a curva inicial e as curvas características planas. Como a família de curvas características cobrirá toda a região do plano considerada, podemos nessa região obter uma solução regular para a EDP (2.1).

Entendemos como solução para a equação (2.1) uma superfície S , gráfico de uma função $u = u(x, y)$ de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que ao ser substituída na equação (2.1) satisfaça-a identicamente.

Seja $\gamma \subset \Omega$, uma curva arbitrária com parametrização $\gamma: (x(t), y(t))$ tal que ao longo dela possamos calcular a derivada total de u em relação a t . A derivada total de u ao longo dessa curva é dada por

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)). \quad (2.2)$$

A EDP (2.1) ao longo de γ torna-se,

$$a(x(t), y(t))u_x(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t))u_y(x(t), y(t)) = d(x(t), y(t)). \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) podem ser reescritas em linguagem vetorial como

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))) \\ (a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t))) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) &= d(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Se os vetores $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ e $(x'(t), y'(t))$ forem paralelos, existirá para qualquer t sobre a característica plana um $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda(t)a(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= \lambda(t)b(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observamos que sempre é possível reparametrizar a curva γ convenientemente de tal forma que (2.4) resulte no *sistema característico* abaixo

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Logo, ao longo das curvas que satisfazem o sistema característico a equação (2.1) torna-se,

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))) = d(x(t), y(t)).$$

Definição 2.1. As características planas são as curvas que satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (2.5). Denotaremos essas curvas características planas para a equação (2.1) as curvas, cuja parametrização será dada por $(x(t), y(t))$, ao longo da qual, a equação (2.1) é reduzida a uma EDO.

Se conhecermos o valor de u ao longo de uma curva suave inicial $\tilde{\gamma}$ em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, com parametrização dada por,

$$\tilde{\gamma}: (\alpha(s), \beta(s)), \quad s \in I, \quad (2.6)$$

então a equação (2.1) e a condição inicial (2.6) formam o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = d(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s), & s \in I. \end{cases} \quad (2.7)$$

O Teorema abaixo trará as condições sobre as quais garantiremos a existência e unicidade do PVI (2.7).

Teorema 2.1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ de classe C^1 . Seja $\tilde{\gamma}(s) = (\alpha(s), \beta(s))$, uma parametrização de $\tilde{\gamma}$ de classe C^1 , definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que $a, b, d \in C^1(\Omega)$, $f \in C^1(I)$, com a e b não se anulando simultaneamente em nenhum ponto de Ω e satisfazendo

$$\begin{vmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Então, o problema de Cauchy (2.7) tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança da curva $\tilde{\gamma}$ em Ω dada por,

$$u(x, y) = f(s) + \int_0^1 d(x(s, \tau), y(s, \tau)) d\tau.$$

Demonstração

A *região de influência* da curva inicial $\tilde{\gamma}$ é o conjunto de pontos por onde passam as características planas que a interceptam. A curva inicial é escolhida de tal forma que sempre haja estas intersecções. Consideraremos um aberto Ω que esteja contido na região de influência da curva inicial, isto é, para cada ponto de Ω passam curvas características que intersectam $\tilde{\gamma}$ para algum $s \in I$. Com isso estabelecemos a condição inicial do sistema (2.5) sobre $\tilde{\gamma}$ fazendo $t_0 = 0$ na intersecção,

$$\begin{cases} x(0) = \alpha(s) \\ y(0) = \beta(s). \end{cases} \quad (2.8)$$

Como $a, b \in C^1(\Omega)$, (2.5) satisfazendo (2.8) terá solução única em Ω . Logo, cada ponto de Ω pode ser representado pelas funções $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$, onde para cada s fixo passa uma única curva característica plana satisfazendo,

$$\begin{cases} x_t(s, t) = a(x(s, t), y(s, t)), & x(s, 0) = \alpha(s) \\ y_t(s, t) = b(x(s, t), y(s, t)), & y(s, 0) = \beta(s). \end{cases}$$

Isto resulta dos teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (cf., SOTOMAYOR, 1979).

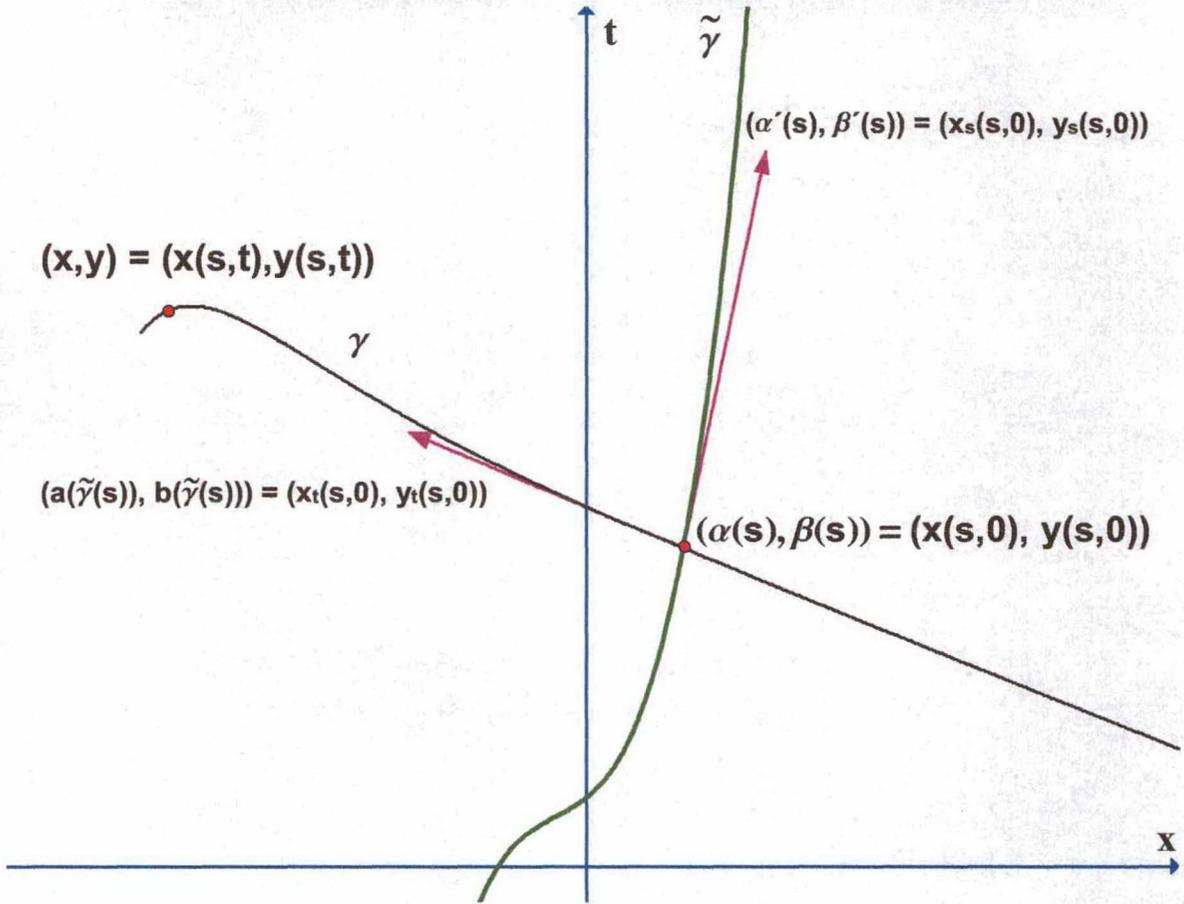


Figura 2.1. Representação de um ponto de Ω conectado a curva inicial através da curva característica plana que o intersecta.

A condição do determinante no teorema significa geometricamente, a transversalidade entre os vetores tangentes à curva característica plana e a curva inicial (figura 2.1). Analiticamente, isto significa que podemos inverter localmente o sistema em uma vizinhança do ponto $(s, 0)$,

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t), \end{cases} \quad (2.9)$$

uma vez que o jacobiano da transformação no ponto $(s, 0)$ é diferente de zero, isto

é, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} x_s(s, 0) & x_t(s, 0) \\ y_s(s, 0) & y_t(s, 0) \end{vmatrix} \neq 0$ e pelo teorema da função inversa, (ver LIMA,

2000), podemos inverter o sistema (2.9). Isso quer dizer que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(s, 0)$, um aberto $V \subset \Omega$, possivelmente menor do que Ω , contendo o ponto $(x(s, 0), y(s, 0))$, e funções $s: V \rightarrow U$ e $t: V \rightarrow U$ de classe C^1 tais que,

$$\begin{cases} s = s(x(s, t), y(s, t)) \\ t = t(x(s, t), y(s, t)) \end{cases} \text{ para qualquer } (s, t) \in U.$$

Dessa forma (2.9) fica

$$\begin{cases} x = x(s(x, y), t(x, y)) \\ y = y(s(x, y), t(x, y)) \end{cases} \text{ para qualquer } (x, y) \in V \subset \Omega.$$

Logo, u pode ser representada por

$$u(x, y) = u(s(x, y), t(x, y))$$

e é de classe $C^1(V)$ por ser uma composição de funções de classe C^1 . Derivando $u(s, t) = u(x(s, t), y(s, t))$ em relação a t e mantendo s constante,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(s, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t))x_t(s, t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t))y_t(s, t) \\ &= a(x(s, t), y(s, t))\frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) + b(x(s, t), y(s, t))\frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)), \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$\frac{du}{dt}(s, t) = d(x(s, t), y(s, t)).$$

Logo, o PVI (2.7) com essa mudança de variável torna-se,

$$\begin{cases} u_t(s,t) = d(x(s,t), y(s,t)) \\ u(s,0) = f(s). \end{cases} \quad (2.10)$$

Com s fixo, o PVI (2.10) torna-se um PVI de uma EDO de primeira ordem que tem solução única na vizinhança de $(s,0)$, pois por hipótese $d \in C^1(\Omega)$. Logo, obtemos $u(s,t)$, através de (2.10), integrando ao longo da característica que passa por $(s,0)$ de 0 até t . Assim, temos que

$$u(s,t) - u(s,0) = \int_0^t d(x(s,\tau), y(s,\tau)) d\tau, \text{ ou ainda,}$$

$$u(s,t) = f(s) + \int_0^t d(x(s,\tau), y(s,\tau)) d\tau. \quad (2.11)$$

Agora podemos voltar as variáveis originais, devido a invertibilidade da transformação (2.9), o que nos possibilita obter a solução do problema de Cauchy (2.7):

$$u(x,y) = f(s) + \int_0^t d(x(s,\tau), y(s,\tau)) d\tau. \quad (2.12)$$

A solução é única. Com efeito, se u é solução de (2.7), então u satisfaz (2.12). Do fato de (2.11) ser solução (única) de (2.10), a equação (2.12) é solução única do PVI (2.7).

□

Exemplo 2.1. Como primeiro exemplo, seja o PVI,

$$\begin{cases} 3u_x - 4u_y = x^2, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u\left(x, \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{9}x^3, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema característico, $\begin{cases} x'(t) = 3 \\ y'(t) = -4 \end{cases}$, obtemos a solução

$$\begin{cases} x(t) = 3t + c_1 \\ y(t) = -4t + c_2 \end{cases}.$$

Fazendo $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$; para que (x_0, y_0) esteja sobre a curva inicial, o sistema deve satisfazer,

$$\begin{cases} x(t) = 3t + x_0 \\ y(t) = -4t + \frac{3}{4}x_0. \end{cases}$$

Essa é a reta característica, única, que passa pelo ponto $\left(x_0, \frac{3}{4}x_0\right)$ da curva inicial.

O coeficiente angular de qualquer reta característica é $m = \frac{y'(s)}{x'(s)} = -\frac{4}{3}$ e o da reta

inicial é $m_{\perp} = \frac{3}{4}$, logo a intersecção dessas curvas sempre se dá ortogonalmente.

Devemos perceber que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, passa uma reta característica que

intercepta a curva inicial $\gamma(s) = \left(s, \frac{3}{4}s\right)$ para algum $s \in I$.

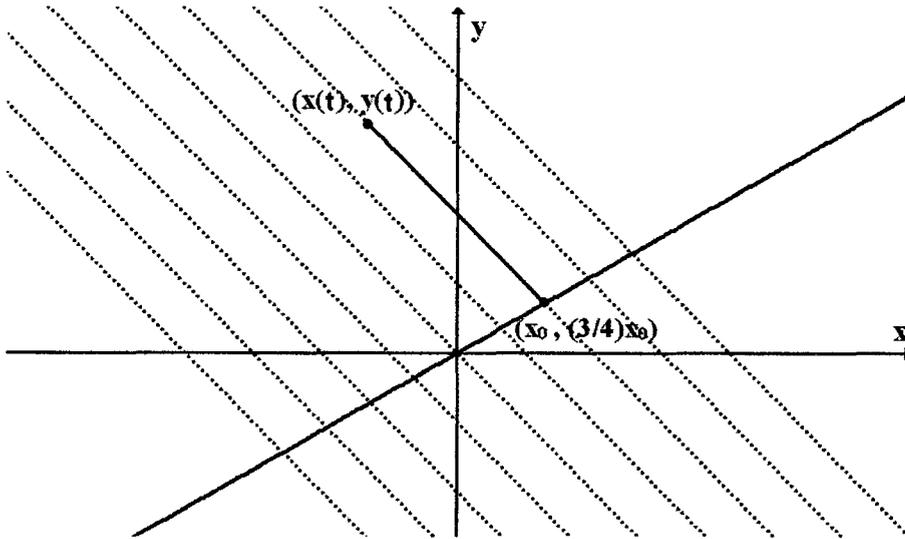


Figura 2.2. Diagrama característico para o PVI do exemplo 2.1. As linhas tracejadas são as retas características. A linha cheia, perpendicular às características, é a curva inicial.

Fazendo a mudança de variável $u(x, y) = v(s, t)$ e considerando $s = x_0$ constante, integramos a equação diferencial ordinária obtida $v_t = (3t + x_0)^2$, ao longo da característica que passa por $\left(x_0, \frac{3}{4}x_0\right)$, e obtemos

$$v(x_0, t) - v(x_0, 0) = \int_0^t (3\tau + x_0)^2 d\tau = \frac{(3t + x_0)^3}{9} - \frac{x_0^3}{9}.$$

Agora voltando às variáveis originais e percebendo que $v(x_0, 0) = \frac{x_0^3}{9}$ e que x_0 é

arbitrário, obtemos a solução do PVI, $u(x, y) = \frac{x^3}{9}$.

Exemplo 2.2. Caso particular importante: Seja a equação linear de primeira ordem homogênea

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0. \quad (2.12)$$

Considerando γ uma curva qualquer no plano xy parametrizada por $(x(t), y(t))$ e supondo que ao longo dessa curva tenhamos $\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = 0$, então pela regra da cadeia, em forma vetorial,

$$(x'(t), y'(t)) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 0.$$

Isso significa que o vetor gradiente é perpendicular ao vetor tangente à curva em cada ponto $(x(t), y(t))$ sobre a mesma. Considerando (2.12) ao longo dessa curva, resulta que

$$(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t))) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 0.$$

Essas duas últimas equações se verificam, *se, e somente se*, os vetores $(x'(t), y'(t))$ e $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ forem paralelos, **pois são perpendiculares ao gradiente e estão no mesmo plano**. Logo, a menos de parametrização, a equação (2.12) torna-se uma derivada total de u ao longo de γ , se os coeficientes de γ verificarem o sistema que determina as curvas características planas:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (2.13)$$

De forma recíproca, sendo γ uma curva que satisfaça o sistema acima, pela regra da cadeia é fácil mostrar que $\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = 0$. Logo, integrando essa última equação obtemos

$$u(x(t), y(t)) = \text{const.}$$

Ou seja, u é constante ao longo dessas curvas. Conclui-se então que as curvas γ_k obtidas do sistema (2.13) são as curvas de nível da função u .

Exemplos e exercícios desta seção e das outras sobre equações lineares podem ser vistos nas referências (STRAUSS, 1992), (IORIO, 2009), (BIEZUNER, 2010).

Também podem ser desenvolvidas soluções gerais para a equação linear (2.1), considerando uma curva dada arbitrariamente e que seja transversal às características. Os resultados obtidos e discutidos neste capítulo podem ser generalizados para a equação linear geral.

2.2. Propagação de singularidades da equação linear

As soluções para problemas de valores iniciais de equações lineares continuam valendo mesmo quando a condição inicial for *contínua e de classe C^1 por partes*. Como a solução geral depende da condição inicial, a solução também será contínua e de classe C^1 por partes, significando que u deixa de possuir derivadas apenas em um número finito de curvas: *ao longo das curvas características que passam por essas singularidades*. Esses são os exemplos mais simples de soluções fracas discutidos neste trabalho. A propagação de singularidades ao longo das características é um fenômeno puramente linear, pois para equações não lineares, como veremos no capítulo 3, surgem singularidades provenientes do encontro de características, que não ocorre no caso linear. Essas singularidades, chamadas choques quando associadas a leis de conservação, são propagadas por *caminhos de choques* bem definidos e quase sempre não são curvas características. Vamos exemplificar a propagação das singularidades através de um PVI para a equação de advecção.

Exemplo 2.3. O problema de valor inicial para a equação de advecção

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tem como solução geral $u(x, t) = f(x - ct)$.

A função dado inicial é contínua, porém, não derivável em $x=0$ e em $x=1$. A solução propaga as singularidades de $u_x(x, t)$ ao longo das retas características e a solução é C^1 por partes.

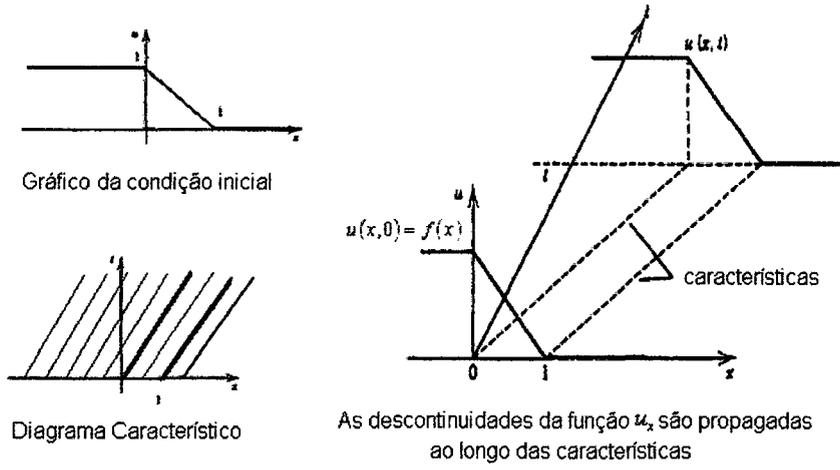


Figura 2.2. Curva inicial, diagrama característico com ênfase às curvas de descontinuidade e visão espacial do perfil inicial propagando-se. A figura da direita é uma adaptação de (LOGAN, 2008).

Capítulo 3

Equações quase-lineares

Neste capítulo, será desenvolvido o método das características para a resolução de equações diferenciais parciais de primeira ordem quase-lineares e a teoria será aplicada em um importante exemplo: a equação de Burger invíscida. Da mesma forma como foi feito para as equações lineares, procuraremos curvas ao longo das quais a equação diferencial torna-se uma EDO. Como os coeficientes da equação quase-linear dependem também da solução da equação o sistema característico correspondente deve incluir a própria equação ao longo dessas curvas, logo terá soluções em um aberto do \mathbb{R}^3 . As curvas características serão curvas espaciais e a superfície solução, como veremos, será uma união de curvas características. Se os coeficientes da equação forem funções regulares em um aberto no espaço, garantiremos que não existirá nessa região encontro de características, porém poderá haver encontro entre as projeções das características no plano, as características planas, o que não acontecia no caso linear. A solução do PVI terá mais de um valor nos pontos onde ocorrerem esses encontros, logo não estará definida. Como no caso linear poderemos garantir, sob certas condições, uma solução regular apenas em um aberto onde podemos representar a superfície como gráfico de uma função. Mas diferentemente do caso linear, singularidades podem surgir na solução ou na derivada da solução (em tempo finito, nos modelos de leis de conservação) mesmo quando a função dado inicial é regular. Para obter-se uma solução global para um PVI associado à equação de Burger deve-se impor uma condição sobre a função dado inicial: ela deve ser não decrescente. Quando essa condição não é satisfeita a solução só existirá localmente.

3.1. A equação quase-linear

Consideremos a equação quase-linear

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = d(x, y, u). \quad (3.1)$$

Definição 3.1. *Superfície solução:* Uma superfície S , gráfico da função $u = u(x, y)$ definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é uma solução da equação (3.1), quando:

(i) $(x, y, u(x, y)) \in \Omega \times \mathbb{R}$;

(ii) qualquer que seja $(x, y) \in \Omega$ verifica-se a equação:

$$a(x, y, u(x, y))u_x + b(x, y, u(x, y))u_y = d(x, y, u(x, y)).$$

Do Cálculo, sabemos que sendo $S = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\}$ uma superfície solução para a EDP (3.1), um vetor normal a S no ponto $(x, y) \in \Omega$ é $\mathbf{n} = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$. Consideremos agora o campo formado pelos coeficientes da equação, definido para cada $(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbf{F} = (a(x, y, z), b(x, y, z), d(x, y, z)).$$

Essé campo é chamado de *campo característico*. Observamos agora que sobre a superfície solução $u = u(x, y)$, a equação (3.1) pode ser escrita na forma vetorial como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, ou ainda,

$$(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), d(x, y, u(x, y))) \cdot (u_x(x, y), u_y(x, y), -1) = 0,$$

o que significa que o campo \mathbf{F} é tangente a S em todos os seus pontos.

Associamos a este campo característico a família de curvas definidas em $\Omega \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = d(x(t), y(t), z(t)). \end{cases} \quad (3.2)$$

A família de curvas dada pelo sistema de equações diferenciais (3.2) é tangente a \mathbf{F} em cada ponto. Este sistema de equações diferenciais é chamado *Sistema Característico*. As curvas que satisfazem (3.2) são chamadas *curvas características* associadas à equação (3.1).

Definição 3.2. Superfície Integral: Uma superfície $S \subset \Omega \times \mathbb{R}$ é chamada uma superfície integral para a equação (3.1), se, para todo $(x, y, z) \in S$, o vetor $(a(x, y, z), b(x, y, z), d(x, y, z))$ é tangente a S .

Observamos que uma superfície integral sempre satisfaz a equação (3.1), mas pode ser que não seja o gráfico de uma função, logo *nem toda superfície integral é uma superfície solução*.

Teorema 3.1. Se uma superfície S definida como gráfico de uma função $u = u(x, y)$ é uma união de curvas características, então S é uma superfície solução. Reciprocamente, toda superfície solução S é uma união de curvas características.

Demonstração

Pode ser consultada em (JOHN, 1982).

Corolário. Duas superfícies soluções que tem um ponto P em comum interceptam-se ao longo de toda curva característica que passa por P . Reciprocamente, se duas superfícies soluções interceptam-se sem tangenciamento ao longo de uma curva, então essa curva é uma característica.

3.2. O Problema de Cauchy

A solução geral de (3.1) é um conjunto de superfícies soluções, que por sua vez, são uniões de curvas características. Uma solução particular é obtida quando especificamos uma superfície solução. As superfícies integrais são especificadas através de uma curva inicial $\tilde{\Gamma}$ no espaço xyz que seja capaz de gerar tal superfície. Uma condição necessária é que $\tilde{\Gamma}$ seja *transversal* às *curvas características*. As curvas características que passam por $\tilde{\Gamma}$ geram a superfície integral.

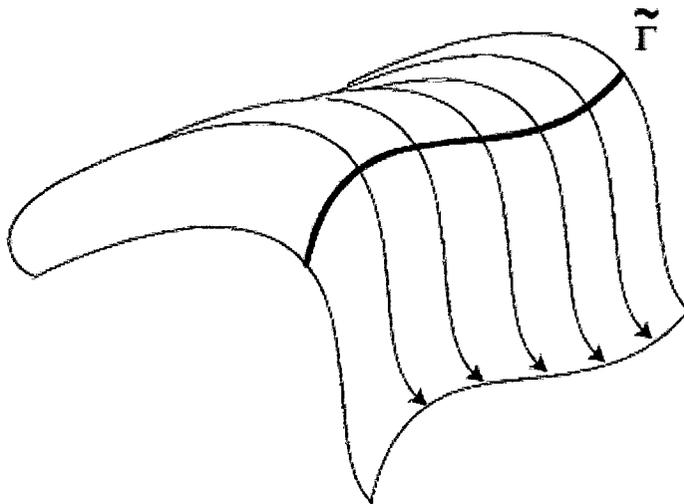


Figura 3.1. Superfície integral gerada pelas curvas características que interceptam a curva inicial, $\tilde{\Gamma}$, transversalmente.

Seja $\tilde{\Gamma}$ parametrizada por $\tilde{\Gamma}:(\alpha(s),\beta(s),f(s))$, contida em uma superfície solução da equação (3.1) a qual queremos especificar e satisfazendo a condição de transversalidade. Procuramos por uma solução $u = u(x,y)$ tal que

$$u(\alpha(s),\beta(s)) = f(s). \quad (3.3)$$

Formamos uma condição inicial para o sistema característico (3.4),

$$(x(0), y(0), u(x(0), y(0))) = (\alpha(s), \beta(s), f(s)) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Se considerarmos $a, b, d \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, o sistema (3.2) com a condição inicial (3.4) tem solução única em $\Omega \times \mathbb{R}$, de acordo com os teoremas de existência e unicidade de EDO's. Essas soluções do sistema serão descritas por uma família de curvas a um parâmetro que satisfaz para cada s da curva inicial

$$\Gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

O Teorema de existência garante também que as funções $x(s, t), y(s, t)$ e $z(s, t)$ são de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Nas curvas coordenadas em que s é constante, temos que o vetor tangente a $\Gamma(s, t)$ é dado por

$$\Gamma_t(s, t) = (x_t(s, t), y_t(s, t), z_t(s, t)),$$

e para $t = 0$, temos $\Gamma(s, 0) = \tilde{\Gamma}(s)$, que é o ponto de encontro da característica com a curva inicial. Considere, agora, o vetor tangente a curva inicial nessa intersecção

$$\tilde{\Gamma}'(s) = (\alpha'(s), \beta'(s), f'(s)).$$

Sabemos do cálculo que, para que $\Gamma(s, t)$ seja a parametrização de uma *superfície regular*, isto é, com um plano tangente definido em cada ponto e que este varie continuamente, necessitamos que, sobre a curva inicial, os dois vetores tangentes calculados sejam linearmente independentes. No problema de Cauchy do teorema abaixo, veremos que para que a superfície integral possa ser representada como o gráfico de uma função, as projeções das curvas características sobre o plano,

$\gamma(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$, devem intersectar a projeção da curva inicial sobre o plano, $\tilde{\gamma}(s) = (\alpha(s), \beta(s))$, transversalmente.

Teorema 3.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ uma curva de classe C^1 . Seja $\tilde{\gamma}(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ uma parametrização de $\tilde{\gamma}$ de classe C^1 , definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que $a, b, d \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $f \in C^1(I)$, com a e b não se anulando simultaneamente em nenhum ponto de Ω e satisfazendo

$$\begin{vmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } s \in I.$$

Então o problema de Cauchy quase-linear

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = d(x, y, u), & (x, y) \in \Omega \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s), & s \in I, \end{cases}$$

possui uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança de $\tilde{\gamma}$.

Demonstração:

Existência local da solução: As soluções do sistema característico (3.2) com condição inicial (3.3) obtidas anteriormente determinam o sistema de equações no plano (s, t) ,

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t). \end{cases} \quad (3.5)$$

A condição de transversalidade do teorema significa que

$$\begin{vmatrix} x_s(s, 0) & x_t(s, 0) \\ y_s(s, 0) & y_t(s, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim pelo teorema da função inversa, (LIMA, 2000), existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo o ponto $(s, 0)$, um conjunto aberto $V \subset \Omega$, possivelmente menor do que Ω , contendo o ponto $(x(s, 0), y(s, 0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ e funções $s: V \rightarrow U$ e $t: V \rightarrow U$ de classe C^1 que invertem o sistema (3.5), ou seja,

$$\begin{cases} s = s(x(s, t), y(s, t)) \\ t = t(x(s, t), y(s, t)), \text{ para todo } (s, t) \in U. \end{cases} \quad (3.6)$$

Logo u definida por

$$u(x, y) = u(s(x, y), t(x, y)),$$

é a representação explícita da superfície solução. Devemos agora provar que u , assim definida, é a solução do Problema de Cauchy. Para isso, calculamos, usando a regra da cadeia u_x e u_y e substituímos em (3.1)

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= a(u_s s_x + u_t t_x) + b(u_s s_y + u_t t_y) \\ &= u_t (at_x + bt_y) + u_s (as_x + bs_y) \\ &= u_t (x_t t_x + y_t t_y) + u_s (x_t s_x + y_t s_y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

De (3.6), derivando em relação a t cada uma das equações, temos

$$x_t s_x + y_t s_y = 0$$

$$x_t t_x + y_t t_y = 1.$$

Agora substituindo isto em (3.7) obtemos

$$u_t = au_x + bu_y = d.$$

Para verificarmos que u satisfaz a condição inicial temos, de (3.6), que

$$\begin{aligned}0 &= t(\alpha(s), \beta(s)) \\ s &= s(\alpha(s), \beta(s)),\end{aligned}$$

Logo,

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u(s(\alpha(s), \beta(s)), t(\alpha(s), \beta(s))) = u(s, 0) = f(s).$$

Unicidade: Pelo corolário do teorema 3.1, se existissem duas soluções distintas para a mesma curva inicial, cada característica passando por cada ponto da curva inicial deveria estar contida em ambas as soluções.

□

3.3. A equação de Burger invíscida

A Equação de Burger invíscida (1.17) pode ser obtida, por exemplo, em um experimento de dinâmica dos gases em que consiste em um escoamento de um gás em um tubo unidimensional fino (para desprezar a ação da gravidade, que seria uma força externa) com fronteira impermeável cujo campo de velocidades é conhecido. Deseja-se modelar a evolução da concentração de um traçador químico presente no gás. A relação constitutiva depende da concentração inicial do traçador. A obtenção da equação de Burger através desse modelo pode ser consultada em (OLIVEIRA, 2010). Podemos, mais simplesmente, imaginar o modelo acima como a evolução de uma distribuição unidimensional $u(x, t)$ de partículas que se propagam sem a ação de uma força externa e sem interação entre elas (a interação geraria o termo dissipativo). Considerando a velocidade de uma partícula no ponto x e no instante t igual a $u(x, t)$, da segunda lei de Newton temos,

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\dot{x}(t) = u_t + uu_x.$$

O PVI para a equação de Burger invíscida é dado, então, por

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Veremos nesta seção, que esse PVI só pode ser resolvido globalmente se o dado inicial for uma função não decrescente. Nos outros casos, se existe solução regular, elas são dadas apenas localmente. Seja, então, o sistema característico e a condição inicial dada pela parametrização da curva inicial,

$$\begin{cases} x'(\tau) = u, & x(0) = s \\ t'(\tau) = 1, & t(0) = 0 \\ u'(\tau) = 0, & u(0) = u_0(s). \end{cases}$$

Agora, integrando as duas primeiras equações e substituindo suas condições iniciais, obtemos para cada escolha de s ,

$$x = x(s, \tau) = s + u\tau,$$

$$t = t(s, \tau) = \tau.$$

De acordo com o Teorema 3.2, de $J = \begin{vmatrix} x_s(s, 0) & x_\tau(s, 0) \\ t_s(s, 0) & t_\tau(s, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, concluímos

que existe uma solução local para a equação na vizinhança de $(s, 0)$. Da terceira equação e de sua condição inicial, obtemos, $u = u(s, \tau) = \text{const} = u_0(s)$. Logo, a solução do sistema característico é

$$\begin{cases} x = x(s, \tau) = s + u\tau \\ t = t(s, \tau) = \tau \\ u(x, t) = u(s, \tau) = u_0(s). \end{cases}$$

Eliminando-se os parâmetros e substituindo na última equação obtém-se que

$$u(x, t) = \text{const} = u_0(s)$$

ao longo da reta característica plana que parte do ponto $(s, 0)$, dada pela equação

$$x = s + u_0(s)t. \tag{3.8}$$

Nesse momento é pertinente questionar: *As retas características chegam a todos os pontos (x, t) do plano para $t > 0$? Podemos assegurar que por cada ponto do plano passa somente uma reta característica?*

Em ambas as questões a resposta depende do dado inicial, logo, contrariamente ao caso linear, nenhuma delas terá uma resposta afirmativa geral. Veremos isto, em detalhes, na próxima subsecção.

3.3.1 Soluções globais e soluções locais

A seguir, estudaremos a solução para o PVI da equação de Burger quando o dado inicial é uma função não decrescente como também em outros casos. Para isto, consideremos as equações das retas características que partem do eixo x no ponto $(s, 0)$, $t = \frac{1}{u_0(s)}(x-s)$. As características que começam nos pontos $(s_1, 0)$ e $(s_2, 0)$, com $s_1 < s_2$, dadas por $x_1 = u_0(s_1)t + s_1$ e $x_2 = u_0(s_2)t + s_2$, encontram-se para um $t > 0$ dado por

$$t = -\frac{s_2 - s_1}{u_0(s_2) - u_0(s_1)} \quad (3.9)$$

se $u_0(s_2) - u_0(s_1) < 0$.

Essa conclusão independe da continuidade de $u(x, 0) = u_0(x)$ e de suas propriedades nos pontos de partida. Assim, para que ocorra intersecção entre características planas devemos encontrar x_1, x_2 tal que $x_1 < x_2$ com $u_0(x_1) > u_0(x_2)$. Logo, **isso não ocorre** se tivermos para todo $x_1 < x_2$, $u_0(x_1) \leq u_0(x_2)$, ou seja, para que a intersecção não ocorra $u(x, 0) = u_0(x)$ deve ser **uma função não decrescente**.

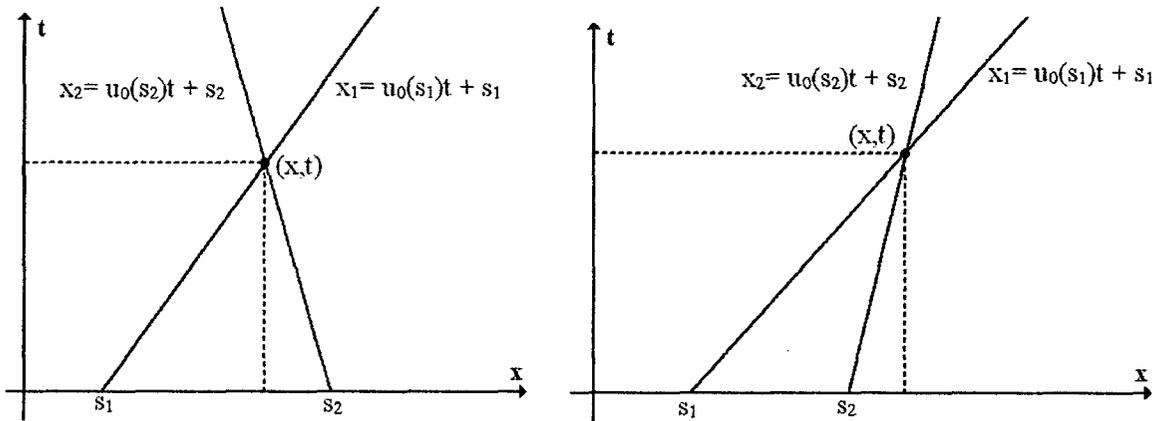


Figura 3.2. Situações que ocorrem singularidades em tempo finito para a equação de Burger: o dado inicial não é uma função não decrescente e temos a formação de um choque.

A solução no ponto de encontro é descontínua. Com efeito, se (x, t) é um ponto de encontro das características que partem de s_1 e s_2 , temos $u(x, t) = u_0(s_1)$ e $u(x, t) = u_0(s_2)$ para $u_0(s_1) \neq u_0(s_2)$.

Um outro tipo de singularidade que impede que a função seja C^1 em todo domínio, pode acontecer quando a derivada $u_x(x, t)$ torna-se infinita. De $u(x, t) = u_0(s)$, onde s é dado por (3.8), e de $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{dx/ds} = \frac{1}{1 + u'_0(s)t}$, podemos

obter a expressão para a derivada,

$$u_x(x, t) = \frac{du_0}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{u'_0(s)}{1 + u'_0(s)t} = \frac{1}{t + 1/u'_0(s)}.$$

Logo, para $u'_0(s) < 0$, $u_x(x, t)$ torna-se infinita para um tempo positivo dado por,

$$t = -\frac{1}{u'_0(s)}. \quad (3.10)$$

O menor $T = t$ para o qual isso acontece, corresponde ao valor $s = s_0$ no qual $u(s_0)$ tem um mínimo. Em $T = -\frac{1}{u'(s_0)}$, a solução u experimenta uma *catástrofe gradiente* ou *blow-up*.

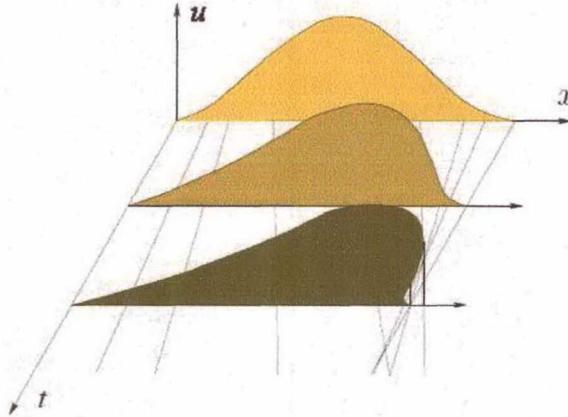


Figura 3.3. Evolução com deformação do perfil inicial para a equação de Burger com destaque ao choque e ao *blow-up* em tempo finito. Esta figura foi adaptada de (MATOS, 2006).

As equações (3.9) e (3.10) representam, então, os tempos finitos em que ocorrem singularidades do tipo choque ou *blow-up*.

Definição 3.3. *Problemas de Riemann.* Os chamados problemas de Riemann são leis de conservação com dados iniciais descontínuos do tipo:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. *Uma onda de rarefação.* Seja o problema de Riemann para a equação de Burger

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

As características para essa equação são, $x = \begin{cases} s, & \text{se } s < 0 \\ t+s, & \text{se } s > 0 \end{cases}$. Se $x < 0$ a solução

é $u(x,t) = 0$ e se propaga ao longo das características $x = s$. Se $x > 0$ a solução é $u(x,t) = 1$ e se propaga ao longo das características $x = t+s$. A região $t > x > 0$ (acima da bissetriz do primeiro quadrante) não é coberta por curvas características. Esse é um exemplo típico de uma onda de rarefação e a região que não é coberta por curvas características é chamada de *leque de rarefação*.

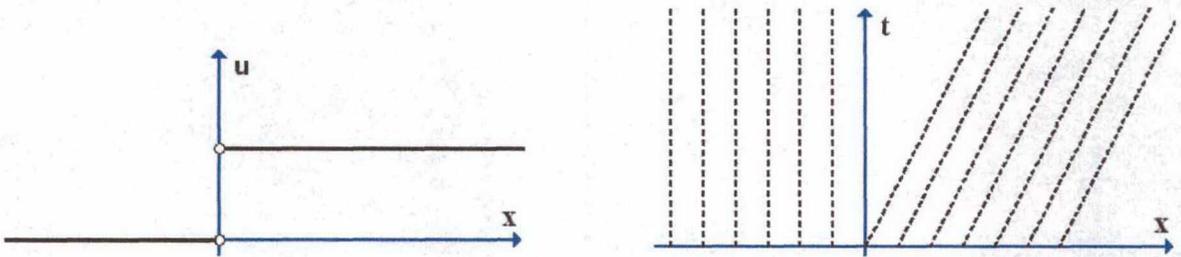


Figura 3.4. Gráfico da condição inicial e diagrama característico para o problema de Riemann do Ex.3.1. A solução é uma onda de rarefação. A região acima da semirreta $x = t > 0$, do diagrama característico, no primeiro quadrante é um leque de rarefação.

Exemplo 3.2. Choques. Outro problema de Riemann para a equação de Burger

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}, & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para qualquer $t > 0$ as características colidem, de modo que não há solução de classe C^1 definida para algum instante de tempo.

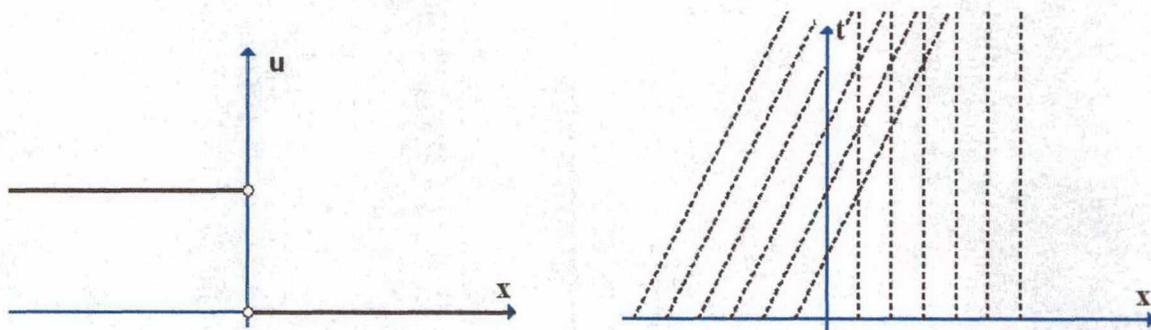


Figura 3.5. Gráfico da condição inicial e diagrama característico para o problema de Riemann do Ex.3.2. Em qualquer tempo positivo há encontros de características.

No capítulo seguinte, veremos que podemos construir mais de uma solução global (válida para todo $t > 0$) contínuas e não deriváveis para os dois problemas de Riemann anteriores. Mas dentre as várias possibilidades de solução deve-se escolher a que faça sentido físico.

Exemplo 3.3. Considere o PVI para a equação de Burger dado pela condição inicial,

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Essa função não é não decrescente, logo não teremos uma solução global, obteremos uma solução local. As características planas para equação são dadas por

$$x = \begin{cases} t+s, & s < 0 \\ (1-s)t+s, & 0 \leq s \leq 1 \\ s, & s > 1. \end{cases}$$

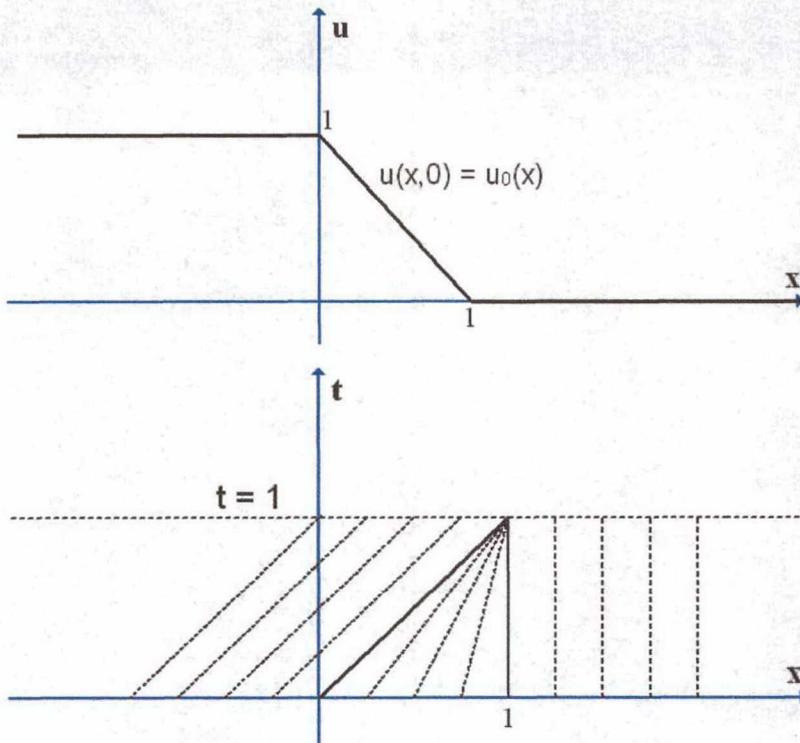


Figura 3.6. Condição inicial e diagrama característico para o Problema de Cauchy do Ex. 3.3.
Devido aos choques não podemos construir uma solução global.

Como vimos na seção anterior $u(x,t) = u_0(s)$, ao longo das características $x = u_0(s)t + s$ que partem de s . Logo, teremos três regiões distintas para considerarmos quando $0 \leq t < 1$. O fato de considerarmos o tempo somente até $t = 1$ ficará claro na seqüência.

- (i) Na região $x < t$, acima da reta $t = x$, existe um $s < 0$ tal que $x = t + s$ e $u(x,t) = 1$;
- (ii) Na região $t \leq x \leq 1$, existe um $0 \leq s \leq 1$ tal que $x = (1-s)t + s$ e $u(x,t) = u(x,0) = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$;
- (iii) E para a região $x > 1$, $x = s$ e $u(x,t) = 0$.

Agora vamos estudar o perfil da solução $u(x,t)$, para $t = 1$. Podemos “ver” esse perfil na linha pontilhada da figura 3.6:

- (a) Todo $x < 1$ foi transportado pelas características que partem de $s < 0$, $x = t + s$, logo $u(x, t) = 1$;
- (b) Em $x = 1$ todas as retas características que partiram de $0 \leq s \leq 1$ se encontram. A solução nesse ponto terá múltiplos valores: todos os pontos entre $[0, 1]$ que fazem parte do perfil inicial (figura 3.6); começando por 1 quando $s = 0$ até 0 quando $s = 1$;
- (c) E para $x > 1$ cada ponto foi transportado pelas características que partem de $s > 1$, $x = s$, logo $u(x, t) = 0$.

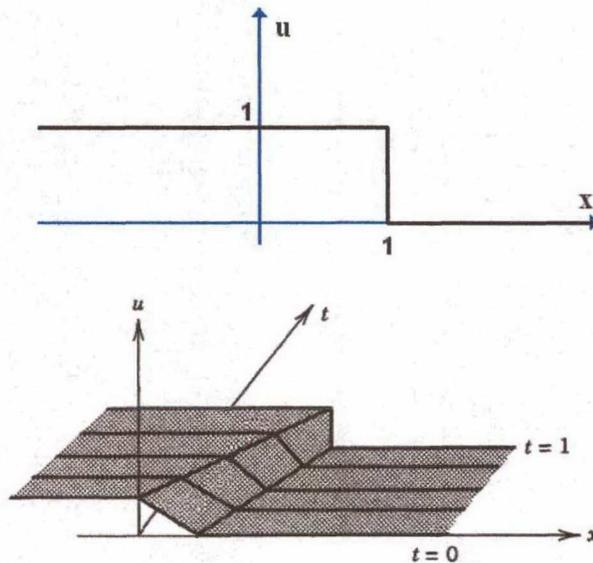


Figura 3.7. Perfil em $t = 1$ e evolução do perfil inicial de $t = 0$ até $t = 1$. Esta última figura é uma adaptação de (LOGAN, 1987). Um choque ocorre em $t = 1$ e uma solução clássica só pode ser obtida para $t < 1$.

Vejamos também que as singularidades do dado inicial foram propagadas ao longo das curvas características $t = x$ e $x = 1$. No diagrama característico da figura 3.6 elas são representadas pelas linhas cheias.

Exemplo 3.4. Consideremos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \lambda \neq 0 \\ u(x, 0) = 1 - \lambda x. \end{cases}$$

As equações das retas características são dadas por $x = s + (1 - \lambda s)t$, logo para $t \neq 1/\lambda$, $s = \frac{x-t}{1-\lambda t}$. Então para todo ponto (x, t) do plano, com exceção da reta $t = 1/\lambda$, passa uma e somente uma característica. Uma solução clássica pode ser obtida até $t = 1/\lambda$ onde acontece um choque: todas as características se encontram nesse ponto $(1/\lambda, 1/\lambda)$.

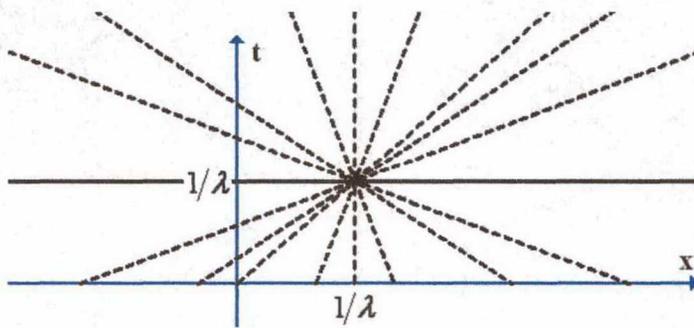


Figura 3.8. Diagrama característico para o PVI do Exemplo 3.4. Em $t = 1/\lambda$ acontece um choque.

Uma solução clássica pode ser obtida somente até esse tempo.

Capítulo 4

Choques e soluções fracas

No Problema de Cauchy (2.4) para a equação de advecção, vimos que as descontinuidades do dado inicial são propagadas ao longo das retas características e obtemos uma solução de classe C^1 por partes – descontínua nas retas $x = ct$ e $x = ct + 1$. Nos problemas de Riemann dos exemplos 3.1 e 3.2, o dado inicial é descontínuo apenas na origem e não houve propagação da singularidade pela característica que passa por esse ponto em nenhum dos casos. No exemplo 3.1 há uma região não coberta por características e no exemplo 3.2 ocorrem choques para qualquer $t > 0$.

As soluções fracas para leis de conservação, podem conter descontinuidades propagadas da condição inicial, como na equação de advecção. Podem ter descontinuidades que surgem devido a intersecções de curvas características, os choques, ou ainda quando a derivada da solução em relação ao tempo torna-se infinita, como foi discutido na seção 3.3 para a equação de Burger.

No caso dos choques, podemos estudar a existência de uma curva regular no plano xt , ao longo da qual a solução sofre uma descontinuidade simples e a singularidade é propagada ao longo dela. Essa curva deve satisfazer a condição de salto, que é consequência da formulação fraca de solução – no sentido das distribuições. Alguns dos caminhos de choques consistentes com a formulação fraca de solução não fazem sentido físico, logo são considerados critérios de admissibilidade que selecionam dentre todas as soluções fracas as que tem sentido físico. Neste texto, estudaremos o critério de entropia e o de viscosidade. O critério de entropia deriva da segunda lei da termodinâmica, na qual a variável de estado entropia de um sistema não diminui de forma espontânea – o conceito de entropia pode ser visto em (ALONSO, 1972).

4.1. Soluções fracas para a lei de conservação unidimensional

Considere a lei de conservação unidimensional dada pela equação (1.3) com o termo fonte nulo, $g \equiv 0$. Estamos interessados nas equações as quais o termo de fluxo é dado por $\phi = f(u)$,

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (4.1)$$

Para resolvermos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2)$$

e obtermos soluções clássicas devemos considerar que f seja derivável. Com essa hipótese temos,

$$u_t + f'(u)u_x = 0. \quad (4.3)$$

Essa é a chamada *forma não conservativa* da lei de conservação. Nesse caso, podemos aplicar o método das características para achar pelo menos uma solução local C^1 para (4.1) desde que f' seja continuamente diferenciável, com $f'' > 0$, ou seja, f *convexa* (veja o Teorema 3.2), ou de forma equivalente f' crescente. Finalmente, se impusermos que o dado inicial seja uma função não decrescente, obteremos uma solução global para (4.3). Todavia, se $f = f(u)$ não é derivável, como frequentemente acontece, u não é uma solução clássica e as equações (4.1) e (4.3) *não são equivalentes*. Nesse caso, não podemos aplicar o método das características para resolver (4.1), deste modo, para tratarmos adequadamente de soluções fracas é necessário referir-se a formulação fraca da lei de conservação. A

idéia básica da formulação fraca é multiplicar a equação (4.1) por uma *função teste* (ver definição 4.1), integrá-la sobre o domínio, e integrar por partes passando as derivadas da função u para a função teste que é regular. Para isso, consideraremos o problema de Cauchy (4.2) e suporemos inicialmente que u seja uma solução clássica.

Definição 4.1. Definimos suporte de uma função φ ao conjunto S tal que $\varphi \equiv 0$ para todo x pertencente ao complementar de S , $x \in S^c$. A função φ é dita com suporte compacto se o conjunto S for um conjunto compacto.

Definição 4.2. Definimos o conjunto das *funções testes*, $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, como as funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ com suporte compacto, ou seja, as funções de classe C^∞ para as quais existe um conjunto $D = (a, b) \times [0, T)$ com $(\text{supp } \varphi) \cap (t \geq 0) \subset D$. Isto significa que as funções φ anulam-se fora de D e, em particular, nas retas $t = T$, $x = a$ e $x = b$:

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \\ \{ \varphi \in C^\infty \text{ tal que } \{ (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : \varphi(x, t) \neq 0 \} \subset (a, b) \times [0, T) \text{ para algum } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } T > 0 \} = \\ = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+); \text{supp } \varphi \subset (a, b) \times [0, T) \} \end{aligned}$$

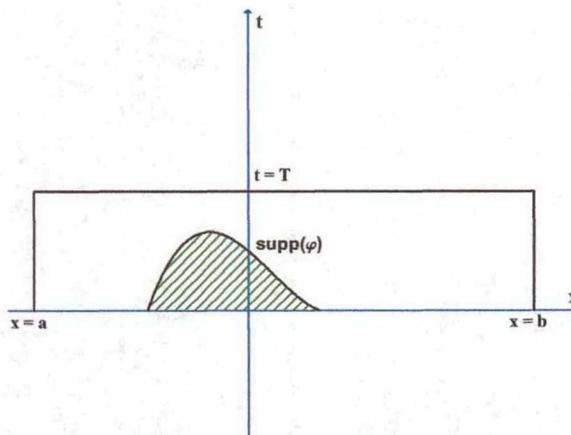


Figura 4.1. Suporte da função teste.

Agora, multiplicando a equação em (4.2) por uma função teste φ e integrando para algum a , b e T no semiplano $t > 0$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x) \varphi dx dt = \iint_D (u_t + f(u)_x) \varphi dx dt = \int_0^T \int_a^b (u_t + f(u)_x) \varphi dx dt = 0,$$

ou ainda,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x) \varphi dx dt = \int_a^b \left(\int_0^T u_t \varphi dt \right) dx + \int_0^T \left(\int_a^b f(u)_x \varphi dx \right) dt = 0 \quad (4.4)$$

Integrando por partes as integrais dos parênteses, os termos de fronteira da definição 4.2 se anulam, por hipótese da função φ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T u_t \varphi dt &= u \varphi \Big|_0^T - \int_0^T u \varphi_t dt = -u(x, 0) \varphi(x, 0) - \int_0^T u \varphi_t dt \\ \int_a^b f(u)_x \varphi dx &= f(u) \varphi \Big|_a^b - \int_a^b f(u) \varphi_x dx = - \int_a^b f(u) \varphi_x dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), e aplicando o Teorema de Fubini, obtém-se

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x) \varphi dx dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0,$$

do que resulta,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \quad (4.6)$$

Logo, se u é uma solução clássica do PVI (4.2), a equação (4.6) deve ser satisfeita, isto é, uma solução clássica é também uma solução fraca. A relação (4.6), por não depender das derivadas da função solução, pode ser estendida para funções que

não sejam continuamente diferenciáveis. Ela requer apenas que u e $f(u)$ sejam *localmente integráveis*.

Definição 4.3. *Função localmente integrável.* Dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , e denotamos por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando u é integrável à lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$.

Definição 4.4. *Soluções Fracas.* Uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ tal que $f(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ e $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt = - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0) dx$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é chamada uma solução fraca para o problema de valor inicial (4.2).

A noção de *derivada distribucional* e a teoria das distribuições foram desenvolvidas pelo matemático Laurent Schwartz, no início da década de 1950. Seu objetivo foi estender a noção habitual de derivação através de uma *noção generalizada de diferenciação*. Isso junto com a noção de *solução generalizada* de uma equação diferencial deu origem à *teoria das distribuições*. Sobre a história da teoria das distribuições e de seu criador, podemos ler (BOMBAL, 2005).

4.2. Condição de salto ou de Rankine-Hugoniot

Consideremos uma curva de *descontinuidade simples* da solução, curva de choque, parametrizada por $x = g(t)$ de classe C^1 , isto é, $u(x, t)$ é continuamente diferenciável para $x > g(t)$ e para $x < g(t)$ e os limites laterais de u e de suas derivadas parciais de primeira ordem existem e são finitos quando $x \rightarrow g(t)^-$ e quando $x \rightarrow g(t)^+$.

Definição 4.5. Denotaremos por u^+ o limite lateral de u quando $x \rightarrow g(t)^+$, $u^+ = \lim_{x \rightarrow g(t)^+} u(x, t)$. Da mesma forma o limite lateral de u quando $x \rightarrow g(t)^-$, $u^- = \lim_{x \rightarrow g(t)^-} u(x, t)$. A diferença $[u] = u^+ - u^-$ é chamada de *salto de descontinuidade da solução* e mede sua variação ao cruzar a curva de descontinuidade. Da mesma forma $[f(u)] = f(u^+) - f(u^-)$ mede o salto do fluxo ao cruzar a curva de descontinuidade.

Teorema 4.1. Condição de Salto. Seja V uma vizinhança aberta contida no semiplano superior aberto, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, e suponha que uma curva C , parametrizada por $t \mapsto (g(t), t)$, divide V em duas regiões V^- e V^+ , à esquerda e à direita da curva, respectivamente, conforme a Figura 4.2. Seja u uma *solução fraca* de (4.2) tal que,

- (i) u é uma *solução clássica* para este problema em ambas as regiões;
- (ii) u sofre um salto de descontinuidade $[u]$ na curva C ;
- (iii) o salto $[u]$ é contínuo ao longo de C .

Então, para qualquer t , vale a relação,

$$g'(t)[u] = [f(u)].$$

Demonstração

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ com suporte em V , da definição 4.4 temos,

$$\iint_V (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt = - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0) = 0, \quad (4.7)$$

uma vez que a segunda integral anula-se, pois $\varphi = 0$ fora de V . Considerando (4.7) em cada uma das regiões, obtém-se

$$\iint_{V^-} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt + \iint_{V^+} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt = 0. \quad (4.8)$$

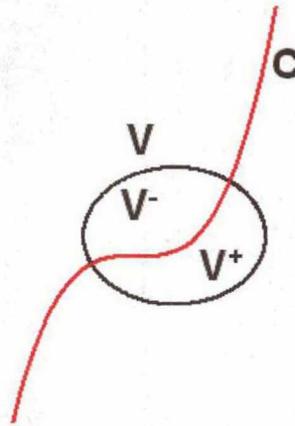


Figura 4.2. condição de salto.

Do fato de u ser solução clássica de (4.2) em V , podemos considerar a relação,

$$(u\varphi)_t + (f(u)\varphi)_x = \underbrace{(u_t + f(u)_x)}_{=0} \varphi + u\varphi_t + f(u)\varphi_x = u\varphi_t + f(u)\varphi_x, \quad (4.9)$$

e denotando por V^* cada um dos V^- , V^+ e considerando a equação (4.9), obtemos

$$\iint_{V^*} ((u\varphi)_t + (f(u)\varphi)_x) dxdt = \iint_{V^*} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt = 0.$$

Como u é de classe C^1 em V^* , podemos aplicar o *teorema de Green*,

$$\begin{aligned} \iint_{V^*} \left((u\varphi)_t + (f(u)\varphi)_x \right) dx dt &= \iint_{V^*} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt = \\ &= \int_{\partial V^*} (-u\varphi dx + f(u)\varphi) dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Usando a convenção de orientação da fronteira no sentido anti-horário, e o fato de ser $\varphi = 0$ na fronteira de V , só restam às contribuições sobre a curva C , aplicando (4.10) em (4.8) com $V^* = V^-$ e $V^* = V^+$, obtém-se:

$$\int_C -u^- \varphi dx + \int_C f(u^-) \varphi dt - \int_C -u^+ \varphi dx - \int_C f(u^+) \varphi dt = 0.$$

Como $dx = g'(t) dt$ temos que

$$\int_C \left(g'(t)[u] - [f(u)] \right) \varphi dt = 0$$

e como φ é arbitrária, segue que

$$g'(t)[u] = [f(u)].$$

□

4.3. Voltando à equação de Burger

Nesta seção, iremos revisar os exemplos do capítulo anterior e fazer um estudo das soluções que satisfazem à condição de choque.

Exemplo 4.1. *O Problema de Riemann do Exemplo 3.2.* Pode-se evitar os choques do problema inserindo-se uma curva regular, gráfico de uma função crescente, ao longo da qual a singularidade na origem possa ser propagada – o que pode ser justificado graficamente. Consideraremos uma reta $x = mt$, $m > 0$ ao longo da qual a descontinuidade em $t = 0$ é propagada. Uma solução regular fora dessa reta pode ser definida por,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > mt \\ 1 & \text{se } x < mt. \end{cases}$$

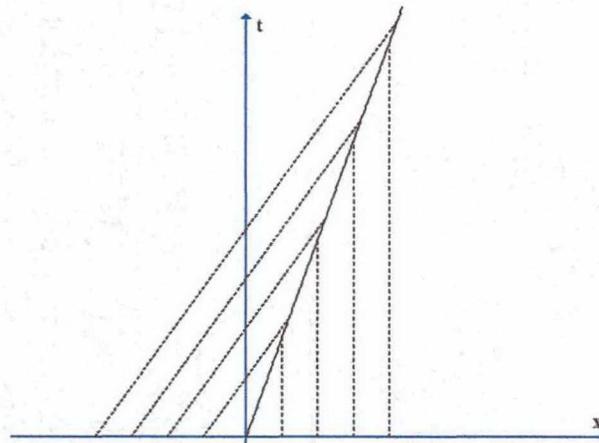


Figura 4.3. Diagrama Característico para uma solução regular fora da curva de choque para o Problema de Riemann do exemplo 3.2.

Dentre as retas possíveis, devemos escolher aquela que seja consistente com a noção de solução fraca discutida nesta seção. Devemos escolher a reta que

satisfaça a condição de salto. O fluxo é dado por $f(u) = \frac{u^2}{2}$ logo,

$g'(t)(u^+ - u^-) = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{2}$. De onde obtemos a relação para a velocidade do

choque, $g'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}$ e, em particular, para a condição inicial, $t = 0$,

$g'(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, e como $g'(0) = g'(t)$, a inclinação da reta é $\frac{1}{m} = \frac{1}{g'(t)} = 2$. Logo,

obtemos uma solução para o problema de valor inicial consistente com a condição de salto,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > t/2 \\ 1, & \text{se } x < t/2. \end{cases}$$

Exemplo 4.2. O Problema de Riemann do exemplo 3.1. Pode-se obter uma solução global contínua inserindo-se um leque de características $x = ct$, $0 < c < 1$ ao longo das quais a solução, constante, valha $u = c = x/t$. Assim, a solução para esse PVI é,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ e } t \geq 0 \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq t, t \neq 0 \\ 1, & \text{se } x > t \text{ e } t \geq 0, \end{cases}$$

e é contínua para $t > 0$.

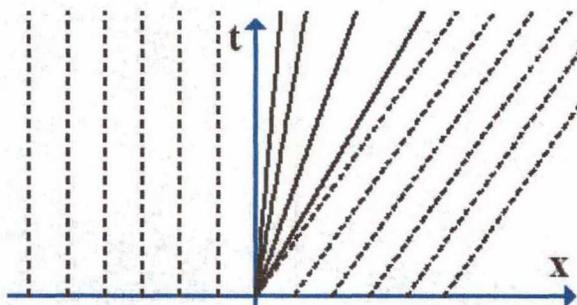


Figura 4.4. Solução global contínua para o Problema de Riemann do Exemplo 3.1.

Como a solução dada acima é contínua para todo $t > 0$, não existe uma curva de choque. Mas podemos construir soluções contínuas por partes com curvas de choque que satisfaçam a condição de salto. Seja, por exemplo,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < t/2 \\ 1, & \text{se } x > t/2, \end{cases}$$

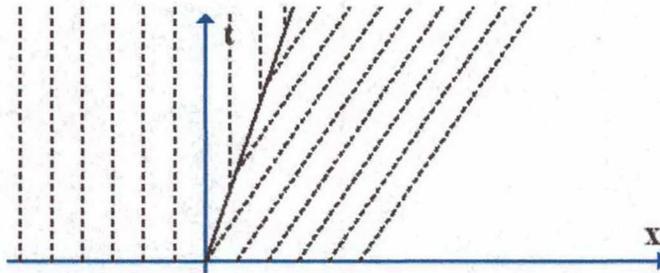


Figura 4.5. Diagrama característico do Problema de Riemann do Exemplo 3.1 com uma curva de choque consistente com a condição de salto.

a velocidade do choque é dada por, $g'(t) = \frac{1/2(1)^2 - 1/2(0)^2}{1-0} = \frac{1}{2}$ e a solução é consistente com a condição de salto.

Vimos, neste exemplo, que a região sem características foi preenchida de duas maneiras diferentes que são compatíveis com a formulação fraca. Na próxima seção, decidiremos quais das soluções fracas faz sentido físico.

Exemplo 4.3. Uma solução global para o problema de Cauchy do exemplo 3.3.

Para $t \geq 1$, escolhendo $u(g(t)^-, t) = 1$ e $u(g(t)^+, t) = 0$ de modo que

$$\frac{u(g(t)^+, t) + u(g(t)^-, t)}{2} = \frac{1}{2}. \text{ A curva de choque é a reta } g(t) - 1 = \frac{1}{2}(t - 1) \text{ que}$$

parte do ponto $(1,1)$.

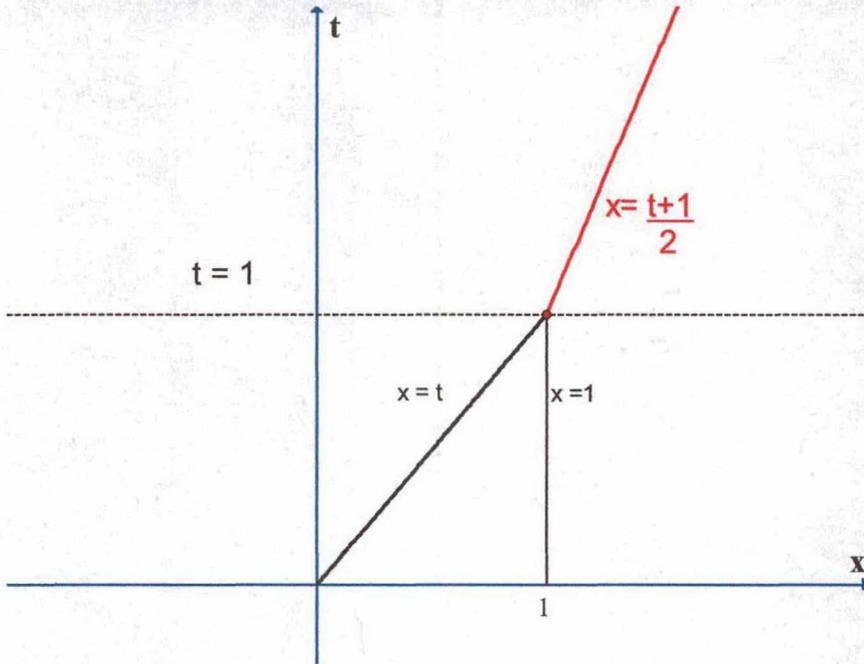


Figura 4.6. Solução global para o problema de Cauchy do Exemplo 3.3 com ênfase nas curvas de descontinuidade da solução, entre as quais, a curva de choque para $t \geq 1$.

Assim, podemos definir para $t \geq 1$, $u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < \frac{t+1}{2}, \\ 0, & \text{se } x > \frac{t+1}{2}. \end{cases}$

Exemplo 4.4. Vejamos um problema que envolve choque e rarefação. Seja o PVI,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Como vimos, a velocidade do salto sobre uma curva de descontinuidade simples para a equação de Burger é $x'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}$, onde $x = g(t)$ é a equação da curva

de salto. Claramente, *uma curva de choque* forma-se em $t=0$ com velocidade

$$x'(t) = \frac{-1+1}{2} = 0 \text{ e propaga-se até } t=1 \text{ (ver Figura 4.7).}$$

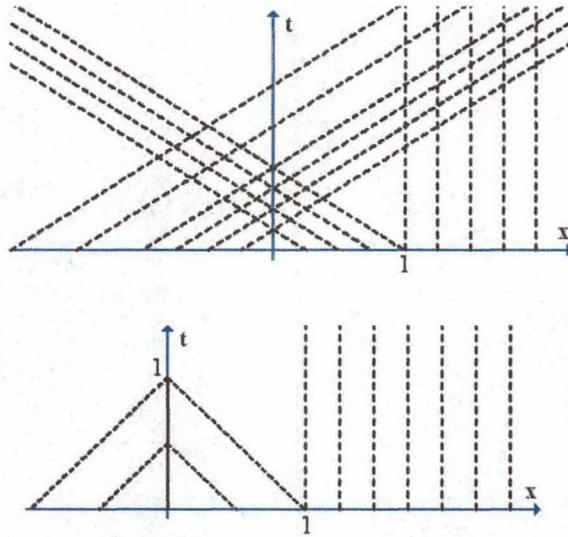


Figura 4.7. Diagrama característico para o PVI do Exemplo 4.4 e linha de choque propagando-se até o tempo $t=1$.

Para continuarmos o choque, além de $t=1$, temos que saber o valor da solução logo à frente do choque. Para isso inserimos *um leque de características* que partem do ponto $(1,0)$ e que têm equações dadas por $x = -kt + 1$ ou $\frac{x-1}{t} = -k = \text{const.}$

Esse leque gera a onda de expansão, $u = \frac{x-1}{t}$ que leva u do valor -1 ao valor 0 à frente da onda. O choque além de $t=1$, conforme a condição de salto, tem velocidade, $x'(t) = \frac{((x-1)/t)+1}{2}$. Para acharmos a curva de choque para esta região, devemos resolver esta equação diferencial. Considerando a condição inicial $x(1) = 0$, a equação torna-se um PVI cuja sua solução é dada por,

$$x(t) = t + 1 - 2\sqrt{t}, \quad 1 \leq t \leq 4. \quad (4.11)$$

A curva de choque em (4.11) propaga-se até o tempo $t=4$. Neste momento ela encontra as características verticais partindo de $x > 1$ e a condição de salto para esta região é outra dada por,

$$x'(t) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a curva de choque para $t > 4$ é uma reta com velocidade $\frac{1}{2}$ dada por,

$$x-1 = \frac{t-4}{2}, \quad t > 4.$$

O diagrama completo está indicado na Figura 4.8.

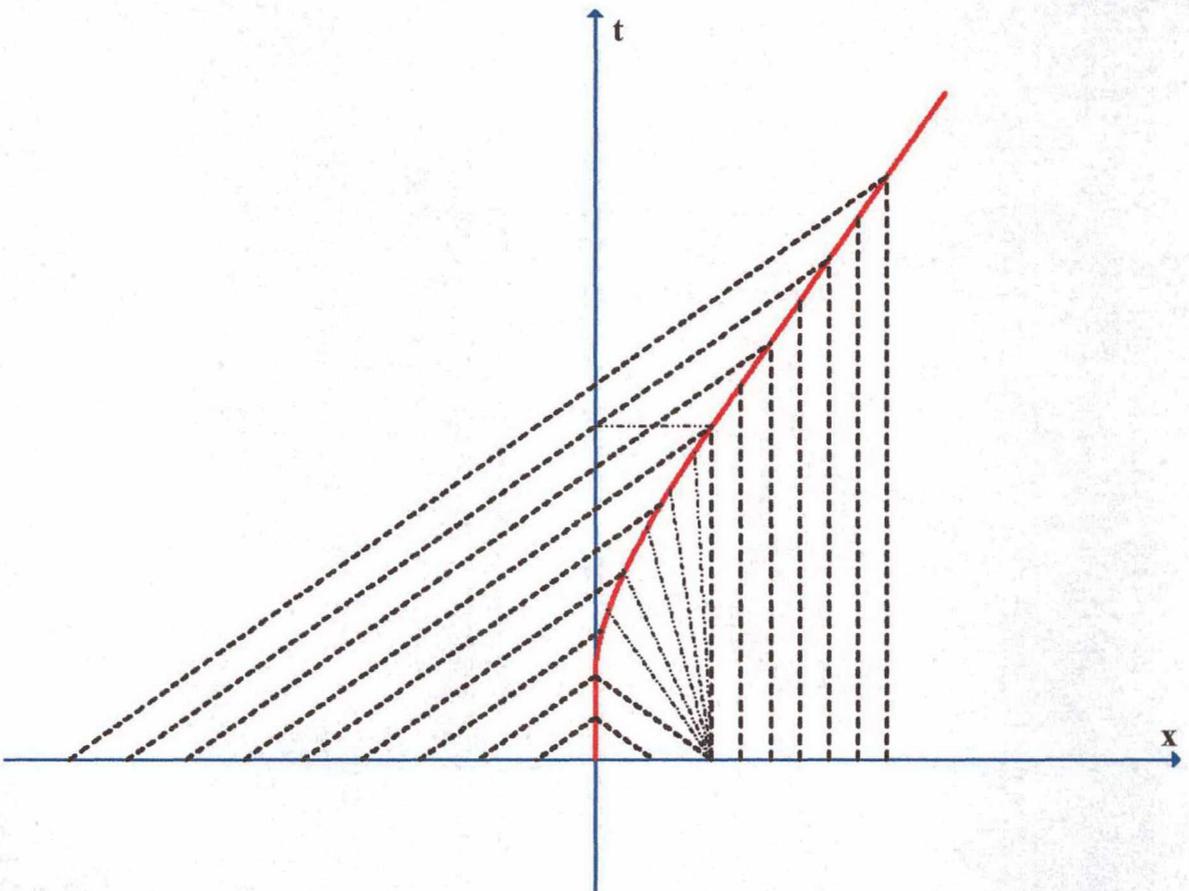


Figura 4.8.

Diagrama característico completo para o PVI do Exemplo 4.4. A linha cheia representa a curva de choque. O tracejado mais fino representa o leque de características que foi inserido naquela região. A curva de salto é uma função definida por partes distinta para cada região onde o salto é diferente.

4.4. Soluções fracas entrópicas e viscosas

Nesta seção, definiremos um critério de entropia e um de viscosidade e os aplicaremos aos PVI anteriores relacionados à equação de Burger para selecionar uma solução que seja coerente fisicamente.

Definição 4.6. *Condição de Entropia.* Uma solução u satisfaz a condição de entropia, se existir uma constante positiva E tal que, para todo $h > 0$, valha:

$$u(x+h, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t} h, \text{ para todo } t > 0 \text{ e para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definição 4.7. *Solução Viscosa.* Uma solução viscosa é uma solução de (4.1) definida como o limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, das funções $u^\varepsilon(x, t)$ onde as quais são solução do PVI de segunda ordem parabólico,

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x). \end{cases} \quad (4.12)$$

Da definição 4.6 mostra-se que, ao atravessar uma descontinuidade, a solução pode sofrer salto somente para baixo, ou seja,

$$u^- \geq u^+ \text{ (diminuição da velocidade, após a onda de choque).}$$

Agora se $f''(u) > 0$ em (4.1), para que seja f' crescente, e $u^- > u^+$ a condição de entropia implica em,

$$f'(u^-) > g'(t) > f'(u^+)$$

A solução viscosa é comumente escolhida com admissível, por que as equações geralmente modelam algum tipo de dissipação. Um fato importante dessas soluções é o descrito abaixo.

Teorema 4.2. Se existe uma solução da equação (4.1) viscosa ela é uma solução fraca.

Demonstração

Multiplicando a equação do PVI (4.12) por uma função teste $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ e integrando para apropriados $a, b \in \mathbb{R}$ e $T > 0$ no semiplano $t > 0$ obtemos,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x \right) \varphi dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\varepsilon u_{xx}^\varepsilon \right) \varphi dx dt. \quad (4.13)$$

Resolvendo as integrais separadamente, temos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x \right) \varphi dx dt = \int_0^T \int_a^b u_t^\varepsilon \varphi dx dt + \int_0^T \int_a^b f(u^\varepsilon)_x \varphi dx dt$$

mudando a ordem de integração na primeira integral,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x \right) \varphi dx dt = \int_a^b \left(\int_0^T u_t^\varepsilon \varphi dt \right) dx + \int_0^T \left(\int_a^b f(u^\varepsilon)_x \varphi dx \right) dt, \quad (4.14)$$

e integrando por partes cada uma das integrais dentro dos parênteses, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T u_t^\varepsilon \varphi dt &= u^\varepsilon \varphi \Big|_0^T - \int_0^T u^\varepsilon \varphi_t dt = -u^\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) - \int_0^T u^\varepsilon \varphi_t dt \\ \int_a^b f(u^\varepsilon)_x \varphi dx &= f(u^\varepsilon) \varphi \Big|_a^b - \int_a^b f(u^\varepsilon) \varphi_x dx = - \int_a^b f(u^\varepsilon) \varphi_x dx. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.14) e aplicando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x \right) \varphi dx dt = \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u^\varepsilon \varphi_t + f(u^\varepsilon) \varphi_x \right) dx dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

E para a integral do lado direito de (4.13),

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\varepsilon u_{xx}^\varepsilon \right) \varphi dx dt = \varepsilon \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b u_{xx}^\varepsilon \varphi dx \right) dt,$$

integra-se por partes duas vezes a integral nos parênteses

$$\begin{aligned} \int_a^b u_{xx}^\varepsilon \varphi dx &= u_x^\varepsilon \varphi \Big|_a^b - \int_a^b u_x^\varepsilon \varphi_x dx = - \int_a^b u_x^\varepsilon \varphi_x dx, \\ \int_a^b u_x^\varepsilon \varphi_x dx &= -u^\varepsilon \varphi_x \Big|_a^b + \int_a^b u^\varepsilon \varphi_{xx} dx = \int_a^b u^\varepsilon \varphi_{xx} dx, \end{aligned}$$

para obter-se

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\varepsilon u_{xx}^\varepsilon \right) \varphi dx dt = \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \varphi_{xx} dx dt. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) e (4.15) em (4.13) obtemos,

$$- \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u^\varepsilon \varphi_t + f(u^\varepsilon) \varphi_x \right) dx dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) dx = \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \varphi_{xx} dx dt \quad (4.17)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, por ser u^ε uma solução viscosa, teremos $u^\varepsilon \rightarrow u$ e $f(u^\varepsilon) \rightarrow f(u)$, logo (4.17) reduz-se a (4.7).

□

A unicidade da solução de entropia para o PVI (4.2) é obtida nas condições do próximo teorema.

Teorema 4.3. Supondo que f seja convexa e que a solução, u , para o PVI (4.2) satisfaz a condição de entropia dada por (4.18) sobre todos os saltos. Então a solução de (4.2) é única e é uma solução viscosa.

Demonstração: ver (SMOLLER, 1994).

Mais informações a respeito dos resultados desta seção podem ser consultadas em (DIBENEDETTO, 2010), (EVANS, 1997), (SMOLLER, 1994) e (LAX, 2006).

Exemplo 4.5. Estudo dos Problemas de Cauchy que satisfazem à condição de Entropia:

No PVI do Exemplo 4.1, a solução satisfaz a condição de entropia ao atravessar a curva de descontinuidade da solução.

Já para a onda de rarefação do Exemplo 4.2, a condição de entropia não é satisfeita. Nesse caso, diz-se que o choque é não físico. De maneira mais geral, pode-se mostrar que qualquer curva de choque em uma onda de rarefação é não física e que a única solução global é a contínua obtida pela inserção do leque de características.

No exemplo 4.3, a curva de choque inicia-se para $t \geq 1$ e, como podemos ver, satisfaz a condição de entropia ao cruzar a curva de choque.

Finalmente, no exemplo 4.4 a curva de choque satisfaz a condição de entropia em suas três partes.

Conclusão

A elaboração deste trabalho permiti iniciar-me no vasto estudo das leis de conservação e aplicar algumas ferramentas matemáticas para a obtenção de soluções de algumas classes de equações diferenciais parciais de primeira ordem.

Com relação as ferramentas matemáticas, foi-me possível entender como aplicar o método das curvas características às equações diferenciais parciais de primeira ordem lineares e quase lineares.

Observou-se que o enfraquecimento da noção de solução, como uma alternativa para as singularidades surgidas das leis de conservação mesmo quando o dado inicial é regular, tornou-se necessário para um estudo mais realístico dessas leis. Sabe-se que com o enfraquecimento do conceito de solução, perde-se a unicidade, e ao retornar-se ao problema que dá origem a solução, buscam-se mais informações a respeito do problema e nota-se ser possível selecionar apenas aquelas soluções que fazem sentido físico. Esse tipo de procedimento foi utilizado em alguns PVIs envolvendo a equação de Burger. Além disso, o tratamento das soluções fracas apresentadas neste trabalho, possibilitou que se fizesse um estudo introdutório da teoria das distribuições de Schwarz, que é uma ferramenta matemática recentemente utilizada em diversos problemas. A história da ciência moderna (cf. L. Garding 1977, p.183,184) demonstra que mesmo o desenvolvimento *a posteriori* da física-matemática foi fortemente influenciado por essa teoria.

Como uma alternativa a estudos futuros mais avançados, surgem alguns caminhos. O primeiro e mais evidente é fazer uma abordagem qualitativa dos resultados apresentados na seção 4.3 que não foram demonstrados. Um outro caminho seria fazer um estudo de equações provenientes de leis de conservação mais gerais de ordens maior. Ressaltamos ainda que a maioria das equações que aqui tratamos tem um análogo com a presença do termo difusivo, que dá origem a equações diferenciais parciais de segunda ordem. Exemplo disso, são as equações de difusão-advecção que surgem em modelos de dispersão de poluentes na atmosfera e que são objeto de muitos estudos na atualidade.

Por fim, destaco que este trabalho teve uma importância relevante devido à riqueza de informações nele contidas e às várias possibilidades que dele advém para trabalhos posteriores mais avançados. Sabe-se que o estudo das equações diferenciais parciais, quase sempre exige uma bagagem matemática muito sólida e profunda, portanto estudá-las constitui-se num grande desafio e motivação para o aprendizado das teorias matemáticas mais recentes, como os espaços de Sobolev, que são utilizadas em suas resoluções. Por tudo isso, consideramos que o trabalho aqui desenvolvido coloca-se como uma importante e didática introdução aos temas que foram tratados.

Referências

ALONSO, Marcelo; FINN, Edward J. Finn. **Física: um curso universitário**. São Paulo, v. 2: Edgard Blucher, 1972.

ALONSO, Irineo Peral. **Primer Curso de ecuaciones en derivadas parciales**. Madrid, [s.n.], 2001.

ALVAREZ, Jesús Carnicer. **Ecuaciones en derivadas parciales**. Zaragoza, [s.n.], 2009.

BEZERRA, Débora de Jesus. **Métodos Numéricos para Leis de Conservação**. Orientado por Prof. Dr. José Alberto Cuminato. São Carlos, 2003. 140 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – USP – São Carlos.

BIEZUNER, Rodney Josué. **Notas de Aula Equações Diferenciais Parciais I/II**. [S.l.: s.n.], 2010.

BOMBAL, Fernando. Laurent Schwartz, o matemático que queria mudar o mundo. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 38/39, p.1-34, jul/dez 2005.

CHORIN, Alexandre J.; MARSDEN, Jerrold E.. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**. Third Edition. New York, Springer, 2000.

DIBENEDETTO, Emmanuele. **Partial Differential Equations**. Second edition. Boston: Birkhäuser, 2010.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Berkeley: American Mathematical Society, 1997.

GÅRDING, Lars; **Encontro com a Matemática**. Tradução de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga. 2 ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1997.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro, V.2: LTC, 2008.

IORIO, Valeria. **EDP**, um curso de graduação. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

JOHN, Fritz. **Partial Differential Equations**, Applied Mathematical Sciences. Fourth edition. New York, v.1: Springer-Verlag, 1982.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 6 ed. Rio de Janeiro, V.2: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.

LOGAN, J. David. **An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations**. Second edition. Lincoln: John Wiley & Sons, Inc., 2008.

LOGAN, J. David. **Applied Mathematics**, A Contemporary Approach. Lincoln: John Wiley & Sons, Inc., 1987.

LAX, Peter D. **Hyperbolic Partial Differential Equations**. Courant Lecture Notes in Mathematics, v.14. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2006.

MATOS, João Palhoto. **Introdução às Equações Diferenciais Parciais**. [S.l.: s.n.], 2006.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica**, fluidos, oscilações e ondas, calor. 4 ed. São Paulo, V.2: Edgard Blucher, 2004.

OLIVEIRA, Marta Helena de. **Métodos numéricos não oscilatórios aplicados a leis de conservação hiperbólicas unidimensionais**. Orientado por Prof. Dr. César Guilherme de Almeida. Uberlândia, 2010. 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. Uberlândia, 2010.

SALSA, Sandro. **Partial Differential Equations in Action From Modelling to Theory**. Milano: Springer-verlag, 2008.

SMOLLER, Joel. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**. Second edition. Michigan: Springer-verlag, 1994.

SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática pura e aplicada, 1979.

STRAUSS, Walter A. **Partial Differential Equations**, An Introduction. [S.I.]: Wiley, 1992.

ZACHMANOGLU, E. C; THOE, Dale W.. **Introduction to partial differential equations with applications**. New York: Dover Publications, 1986.