**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Matemática

# MÉTODO DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

**Autores: STENIO HENRIQUE DO NASCIMENTO CERQUEIRA**

**JOSUÉ DE JESUS SOARES**

**Orientador: Prof. Dr. JOEL SANTOS SOUSA**

**São Luís**

**2009**

STENIO HENRIQUE DO NASCIMENTO CERQUEIRA
JOSUÉ DE JESUS SOARES

# MÉTODO DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Monografia apresentada ao Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

São Luís
2009

# MÉTODO DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

por

**STENIO HENRIQUE DO NASCIMENTO CERQUEIRA**
**JOSUÉ DE JESUS SOARES**

Esta monografia foi julgada adequada como trabalho de conclusão do curso de Especialização em Matemática, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº 38/CMM/08.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. JOEL SANTOS SOUSA

Prof. Dr. INDER JEET TANEJA

Prof. Dr. ROBERTO CORRÊA DA SILVA

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus pela nossa existência.

Aos nossos familiares que muito nos incentivaram e ajudaram nos momentos mais tortuosos nesta caminhada.

Ao Professor Joel, pela colaboração e orientação efetiva para a concretização deste trabalho.

A todos os nossos amigos, em especial, a Sidney e Fabiano, pela colaboração na conclusão deste trabalho.

# SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar um método de resolução de equações diferenciais parciais denominado método das curvas características, ou simplesmente, método das características.

Primeiramente, introduzimos um pouco da história das equações diferenciais. Em seguida, apresentamos alguns conceitos que serão importantes tais como; a definição de função de $n$ variáveis, notações sobre conjuntos numéricos e derivadas, e os conceitos de linearidade, superposição e condições iniciais e de contorno.

Prosseguimos estudando um método de resolução para um tipo específico de equações diferenciais de 1ª ordem, que são as equações diferenciais exatas. Quanto às equações diferenciais não exatas, teremos que transformá-la em uma exata, através do método do fator integrante.

Finalmente, estudamos o método das curvas características para resolver problemas de Cauchy para equações diferenciais parciais tanto lineares como quase-lineares.

## 2. UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

D'Alembert (1717 – 1783), homem de interesses variados, hoje talvez seja melhor conhecido pelo que se chama o princípio de d'Alembert: "as ações internas de um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio". Esse princípio apareceu em 1743 em seu célebre tratado. *Traité de dynamique*. Outros tratados de d'Alembert versavam sobre música, o problema dos três corpos, a precessão dos equinócios, movimentos em meios resistentes e perturbações lunares. Ao estudar o problema das cordas vibrantes ele foi levado à equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para a qual em 1747 ele deu (nas Memórias da Academia de Berlim) a solução $u = f(x+t) + g(x-t)$, onde $f$ e $g$ são funções arbitrárias. As teorias das equações diferenciais ordinárias tinham sido já bastante desenvolvidas mas o assunto que desafiou os pesquisadores na resolução das equações diferenciais parciais era então um campo para pioneiros. Euler (1707 – 1783) fez progressos nesse ramo da análise, dando para a equação mais geral $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, a solução $u = f(x+at) + g(x-at)$.

A resolução de equações diferenciais ordinárias num certo sentido tinha começado assim que a relação inversa entre diferenciação e integração tinha sido percebida. Mas a maior parte das equações diferenciais não pode ser facilmente reduzida a simples quadraturas, exigindo em vez disso engenhosas substituições ou algoritmos para sua resolução. Uma das realizações do século dezoito foi a descoberta de grupos de equações diferenciais que são resolúveis por artifícios bastante simples. As equações de Bernoulli (1654 – 1705) formam um tal grupo. Outro tipo foi identificado pelo precoce matemático Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765) e tem seu nome – a família de equações da forma $y = xy' + f(y')$. Nesse caso a substituição $p = y'$ seguida de diferenciação dos termos da equação em relação a $x$ leva a uma equação em $x$, $p$ e $\frac{dp}{dx}$, que é resolúvel, a solução geral sendo $y = cx + f(c)$. A equação de Clairaut tem também uma solução singular, uma das primeiras desse tipo a serem descobertas, tendo Taylor anteriormente dado uma tal solução. D'Alembert também achou uma solução singular de equação diferencial $y = xf(y') + g(y')$, por isso essa equação de um tipo um pouco mais geral é conhecida como equação de d'Alembert.

**OS CLAIRAUT**

Alexis Clairaut foi um dos matemáticos mais precoces, superando até Blaise Pascal nesse ponto, Aos dez anos ele lia os textos de L'Hôspital sobre cônicas e Cálculo, aos treze ele apresentou à Académie des Sciences um artigo sobre geometria, e quando tinha apenas dezoito anos foi aceito com dispensa especial em relação às exigências de idade, como membro da Académie. (D'Alembert foi eleito para a Académie aos vinte e quatro). No ano em que foi eleito, Clairaut publicou um tratado célebre, *Recherches sur les courbes à double courbure*, cuja substância ele tinha apresentado à Academia dois anos antes. Como a *Géométrie* de Descartes, as *Recherches* de Clairaut apareceram sem nome de autor na página de título, embora também nesse caso a autoria fosse bem conhecida.

Clairaut, de uma família de vinte filhos da qual só um sobreviveu ao pai, deu outras importantes contribuições à análise. Observou que as derivadas mistas de segunda ordem $f_{xy}$ e $f_{yx}$ de uma função $f(x,y)$ são em geral iguais (sabemos que isso vale com hipóteses de continuidade das derivadas no ponto em questão) e usou esse fato no critério $M_y \equiv N_x$, familiar em equações diferenciais, para que a expressão diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ seja exata.

Incidentalmente, Clairaut tinha um irmão mais moço que como ele era precoce, pois aos quinze anos, o irmão, conhecido apenas como "le cadet Clairaut", publicou em 1731 (o ano em que apareceram também as *Recherches* do irmão mais velho) um livro sobre Cálculo chamado *Traité de quadratures circulaires et hyperboliques*. Esse gênio quase desconhecido morreu tragicamente de varíola no ano seguinte. O pai dos irmãos Clairaut era ele próprio um matemático competente, mas hoje é lembrado principalmente através da obra de seus filhos, dois dos mais precoces matemáticos de todos os tempos.

**OS RICCATI**

Uma das equações diferenciais interessantes estudadas no século dezoito é a que d'Alembert chamou equação de Riccati – $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Essa equação fora estudada por numerosos matemáticos, inclusive vários dos Bernoulli, bem como por Jacopo Riccati (1676 – 1754) e seu filho Vicenzo (1707 – 1775). Mas Euler foi o primeiro a chamar a atenção para o fato de que quando se conhece uma solução particular $v = f(x)$, então a substituição $y = v + \frac{1}{z}$ transforma a equação de Riccati numa equação diferencial linear em $z$, de modo que se pode encontrar a solução geral. Em *Commentarii* de Petesburgo de 1760 –

1763, Euler observou também que se duas soluções particulares são conhecidas então uma solução geral pode ser expressa em termos de uma simples quadratura.

Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros textos de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre Cálculo – *Institutiones calculi differentialis* (Petesburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petesburgo, 1768 – 1770), 3 volumes. O uso de fatores integrantes, os métodos sistemáticos para resolver equações lineares de ordem superior a coeficientes constantes, e a distinção entre equações lineares homogêneas e não-homogêneas, e entre solução particular e solução geral, estão entre suas contribuições ao assunto. A equação $y''+Ky=f(x)$, tinha sido resolvida independentemente de Euler mais ou menos na mesma época, 1739 – 1740, e d'Alembert tanto quanto Euler tinham métodos mais gerais, por volta de 1747, para resolver equações lineares complexas. Até certo ponto, a ubiqüidade (condição de estar em toda a parte) de dívida que temos com Euler no campo das equações diferenciais está indicada no fato de que um tipo de equação linear a coeficientes variáveis tem seu nome. A equação de Euler $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y^{(0)} = f(x)$, (onde o expoente entre parênteses indica ordem de derivação) se reduz facilmente, pela substituição $x = e^t$, a uma equação linear a coeficientes constantes.

Os quatro volumes de *Institutiones* de Euler contêm de longe o tratamento mais completo do Cálculo, até então. Além dos elementos do assunto e da resolução de equações diferenciais, encontramos coisas como o "teorema de Euler sobre funções homogêneas": se $f(x,y)$ é homogênea de ordem $n$, então $xf_x + yf_y = nf$, um desenvolvimento do cálculo de diferenças finitas, formas padrão para integrais elípticas (campo em que d'Alembert também trabalhara) e a teoria das funções beta e gama (ou fatorial) baseada nas "integrais eulerianas"

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{e} \quad B(m,n) = \int_0^\infty x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

e relacionadas por fórmulas como $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(M+n)}$. Qallis já conhecia algumas das propriedades dessas integrais, mas graças à organização dada por Euler essas funções transcendentes superiores se tornaram parte integrante do cálculo avançado e da matemática aplicada. Cerca de um século depois, a função beta foi generalizada por Pafnuti L. Tchebycheff (1821 – 1894) que provou que a "integral de Tchebycheff" $\int x^p (1-x)^q dx$ é uma função transcendente superior a menos que $p$, $q$ ou $p+q$ seja um inteiro.

# 3. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos básicos que serão importantes ao longo do nosso estudo. Daremos aqui a definição de equação diferencial e apresentaremos alguns tipos de equações diferenciais que podem ocorrer.

**Definição** 1.1 De modo geral, uma equação diferencial é uma equação envolvendo uma função e suas derivadas, cuja incógnita é uma função.

Existem dois tipos principais de Equações Diferenciais:

1. Equação Diferencial Ordinária (EDO): Quando a função envolvida depende de uma única variável;

2. Equação Diferencial Parcial (EDP): Quando a função envolvida depende de várias variáveis.

Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais:

**Exemplo 3.1** $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$ (EDO).

**Exemplo 3.2** $xdy - ydx = 0$ (EDO).

**Exemplo 3.3** $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ u = u(t,x)$ (EDP – equação do calor).

## 3.1 Definições Básicas

Introduziremos algumas notações e terminologias, conforme seguem:

- $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\}$ – conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$ – conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$ – conjuntos dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{C}$ – conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{R}^n$ – espaço euclidiano de dimensão $n$, onde $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\}$ (Observação: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$).

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um aberto, e $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(x,y,z,t,\ldots) \to u(x,y,z,t,\ldots)$ uma função de várias variáveis. Existem várias notações para as derivadas parciais de $u$. Por exemplo, a derivada parcial de u em relação à variável $x$, que é a primeira variável, poderá ser denotada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ u_x,\ \partial_x u \text{ ou } D_1 u$$

Analogamente, denotaremos as derivadas de segunda ordem por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xx},\ \partial_x^2 u \text{ ou } D_1^2 u.$$

No caso de derivação em relação a variável $x$ e depois em relação a $y$, denotaremos por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},\ u_{xy},\ \partial_y \partial_x u \text{ ou } D_2 D_1 u.$$

Em geral, uma equação diferencial ordinária (EDO), envolvendo uma função $y = f(x)$, é uma equação da forma

$$F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)\right) = 0 \tag{3.1}$$

sendo $F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ alguma função.

Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $(x_1, \ldots, x_n)$ e derivadas parciais de uma função $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. De maneira mais precisa, uma EDP com n variáveis independentes $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \tag{3.2}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, é um aberto, $F$ é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determinar.

A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que aparece na equação. A ordem da equação (3.1) é $k$ se $F$, como função de alguma das derivadas de ordem $k$ for não constante.

Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em $u$ e em todas as suas derivadas parciais que aparecem na equação; caso contrário, a EDP é dita não linear.

A forma geral de uma EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x) u + c(x) = 0,$$

onde algum dos coeficientes $a_j$ não é identicamente nulo.

No caso de duas variáveis independentes, $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0 \tag{3.3}$$

Uma EDP linear é dita homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a equação (3.3) é homogênea se, e somente se, $D(x,y) = 0$.

Observação: $u = 0$ é sempre solução de qualquer EDP linear homogênea.

A parte principal de uma EDP é a parte da equação que contém as derivadas de maior ordem que, em muitos casos, determina as propriedades das soluções. por exemplo, a parte principal da equação (3.3) é

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y \tag{3.4}$$

As equações não lineares que tem parte principal linear são chamadas de equações semi-lineares.

Por exemplo, uma EDP de primeira ordem, semi-linear, com 3 variáveis independentes $(x,y,z)$ é da forma

$$A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x,y,z,u).$$

Vejamos alguns exemplos de EDP's:

**Exemplo 3.4** $xu_x - yu_y = \text{sen}(xy)$ é uma EDP não homogênea de 1ª ordem.

**Exemplo 3.5** A equação de Burger com viscosidade, $\partial_t u + u\partial_x u = v\partial_x^2 u$, onde $v$ é constante, é semi-linear, mas de segunda ordem.

### 3.2 Linearidade e Superposição

As considerações que faremos a seguir são válidas para equações diferenciais parciais (EDP's) lineares de qualquer ordem mas, para fixar as ideias, vamos considerar uma EDP de primeira ordem com n variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos a equação

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{3.5}$$

onde, existe $j$, $1 \leq j \leq n$, tal que $a_j \neq 0$.

Podemos reescrever a equação (3.5) na forma

$$Lu = f, \tag{3.6}$$

onde $f(x) = -c(x)$ e

$$Lu(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x)u. \tag{3.7}$$

A cada função $u$ diferenciável corresponde uma única função $Lu$ e dessa maneira definimos um operador ou uma transformação $L$.

De forma mais precisa: Seja $\Omega$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $a_j$ e $b$, $1 \leq j \leq n$, funções contínuas em $\Omega$ tomando valores reais.

Podemos definir:

$$\begin{aligned} L : C^1(\Omega) &\to C(\Omega) \\ u \quad &\mapsto Lu, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $Lu$ é dado pela fórmula (3.7); $C^1(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciáveis; $C(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, contínuas.

A função $L$ está definida entre espaços de funções, isto é, $L$ leva uma função $u$ (com determinadas propriedades) em outra $Lu$.

O operador $L$ é um exemplo de um operador diferencial parcial.

O fato da equação (3.5) ser linear implica que o operador definido por (3.7) é um operador linear, ou seja, $L(0) = 0$ ( $L$ leva a função identicamente nula nela mesmo) e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv, \ \forall u, v \in D(L) \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

$L(u) = 0$, é a equação homogênea associada à equação (3.3) (3.10)

Usando a linearidade de $L$ e indução podemos verificar que qualquer combinação linear de soluções da equação (3.10) é também uma solução de (3.10), isto é, se $u_1, \ldots, u_m$ satisfazem (3.10) e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ então

$$u = \sum_{j=1}^{m} a_j u_j \tag{3.11}$$

é também uma solução de (3.10). Em outras palavras, $L$ é um operador linear definido num espaço vetorial $V$ de funções $\left(V = C^1(\Omega)\right)$ e as soluções de $u \in V$ da equação (3.10), formam um subespaço vetorial de $V$. Esse resultado é conhecido como princípio da superposição (na sua forma finita).

O espaço de soluções de EDP's lineares homogêneas do tipo (3.10), pode ter dimensão infinita. Além disso, existem EDP's lineares de 1ª ordem que não têm solução.

**Exemplo 3.6** Procuraremos soluções clássicas da equação linear homogênea

$$u_{xy} = 0, \tag{3.12}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Queremos encontrar uma solução clássica $u = u(x, y)$. Seja o operador $L$, dado por

$$\begin{aligned} L : C^2(R^2) &\to C(R^2) \\ u \quad &\mapsto (Lu)(x, y) = u_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Integrando (3.12) em relação a $y$, ou seja, fixando a variável $x$, obtemos:

$$\int \left(u_{xy}(x, y)\right) dy = 0,$$

então

$$u_x(x, y) = F(x) \tag{3.13}$$

onde F(x) é uma função em $C^1(R)$, arbitrária.

Fixando agora a variável y e integrando (1.13) em relação a x, obtemos:

$$\int u_x(x, y)\,dx = \int F(x)\,dx,$$

então

$$u_x(x, y) = f(x) + g(y), \tag{3.14}$$

onde $f$ é uma função primitiva de $F$ em $C^2(\mathbb{R})$ e $g$ é uma função arbitrária em $C^2(\mathbb{R})$.

Como $F$ é arbitrária, então $f$ e $g$ são funções arbitrárias em $C^2(\mathbb{R})$.

Queremos soluções $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Como todas as funções da forma (3.14), com $f$ e $g \in C^2(\mathbb{R})$, são soluções da equação (3.12), concluímos que o espaço das soluções clássicas de (3.12) é precisamente o conjunto

$$\left\{u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right) : u(x, y) = f(x) + g(y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, f \text{ e } g \in C^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Portanto, o espaço das soluções tem dimensão infinita.

### 3.3 Princípio da Superposição

**Proposição 1.1**. Seja $L$ um operador diferencial parcial linear de 1ª ordem cujos coeficientes estão definidos num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ seja um conjunto de funções de classe $C^1$ em $\Omega$ satisfazendo a EDP linear homogênea (1.10). Então, se $(\alpha_m)_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \tag{3.15}$$

seja convergente e diferenciável termo a termo em $\Omega$, então $u$ satisfaz a equação $Lu = 0$.

### 3.4 Condições de Contorno e Iniciais

Estamos procurando as soluções que estão definidas num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

É natural substituir os extremos do intervalo (caso $n = 1$) pela fronteira (ou bordo) $\partial\Omega$ da região $\Omega$. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno ou, simplesmente, problema de contorno.

Condições iniciais: Em EDP's temos mais de uma variável independente. É natural fixar uma delas e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, $f$ e $g$ sendo funções dadas).

Observe que se $n = 2$, com variáveis $x$ e $t$, isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t = 0$; analogamente, no caso $n = 3$, com variáveis $x$, $y$ e $t$, fixar $t = 0$ significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície $t = 0$.

Podemos generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução de suas derivadas normais ao longo de uma curva (se $n = 2$) ou superfície (se $n = 3$) inicial. O problema correspondente é um problema de Cauchy ou valor inicial.

Quando temos uma EDP com condições iniciais e condições de contorno temos um problema misto.

**Exemplo 3.7** O problema $\begin{cases} u_y = 0, \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x, p(x)) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$

onde $p$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a EDP é de 1ª ordem, basta impor o valor da solução sobre a curva inicial $y = p(x)$ no plano para que se tenha uma solução clássica.

**Exemplo 3.8** O problema $\begin{cases} u_y = 0, \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = f(y), y \in \mathbb{R} \end{cases}$

é também um problema de Cauchy envolvendo uma EDP linear de 1ª ordem. A curva inicial é o eixo dos $y$. Ao contrário do exemplo anterior, este problema não tem solução (se $f$ não é constante) ou tem uma infinidade de soluções (se $f$ é constante).

Veremos porque isso acontece e quando existe solução única para o problema de Cauchy envolvendo EDP's lineares de 1ª ordem em duas variáveis independentes.

# 4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Desejamos aqui, de forma breve, fazer um estudo de um método de resolução para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de 1ª ordem e 1.º grau. Esse método consiste em verificar se uma determinada EDO é uma equação diferencial exata e aplicar, então, um procedimento para a obtenção da solução; caso a EDO não seja exata, a transformaremos em uma equação diferencial exata, através da multiplicação por um fator integrante, de modo que seja possível a aplicação do método de resolução paras as EDO's exatas.

Mostraremos, também, que é possível transformar uma EDO linear completa de 1ª ordem em uma equação diferencial exata, através de um fator integrante, possibilitando, assim, a resolução da EDO pelo mesmo método.

Antes, porém, veremos, através do Teorema que enunciaremos abaixo, que existe solução única para problemas de Cauchy envolvendo EDO's de 1ª ordem quando determinadas condições são satisfeitas.

## 4.1 Existência e unicidade de soluções

**Teorema 4.1** (Teorema de Peano) Seja $D$, um domínio de $\mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, uma função. Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

com $(x_0, t_0) \in D$.

Se $f(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas em $D$, então (4.1) possui uma única solução definida em algum intervalo $I$ contendo $x_0$.

**Observação**: Podemos substituir as hipóteses acima por $f(x,y)$ contínua em $D$ e Lipaschitziana em $D$ relativamente à segunda variável, isto é, que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x,y_0) - f(x,y_1)| \leq K|y_0 - y_1|,$$

para todo $(x, y_0)$, $(x_1, y_1) \in D$.

### 4.2 Equações Diferenciais Ordinárias Exatas

**Definição 4.2** Uma equação diferencial ordinária da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.2}$$

é denominada exata quando existe uma função $u(x,y)$, de classe $C^1$ em um retângulo $R$, cuja diferencial total é dada por:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \text{ em } R,$$

onde $R$ é o retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a < x < b \text{ e } c < y < d\}$, ou seja, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

Fazendo uma aplicação do teorema que apresentaremos abaixo, podemos checar se uma EDP do tipo (4.2) é exata ou não, bem como obter a função, que é a solução de (4.2) a menos de uma constante.

**Teorema 2.3** A equação (4.2), onde $M$ e $N$ são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, é uma EDO exata, se, e somente se, for satisfeita a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ em } \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Assim, a relação (4.3) é condição necessária e suficiente para que a equação (4.2) seja uma EDO exata.

**Demonstração:**

1. A condição é necessária

Mostraremos que se $Mdx + Ndy$ é uma diferencial total, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por hipótese, o primeiro membro de (4.2), $Mdx + Ndy$, é diferencial total, então existe $u(x,y)$, tal que

$$du = Mdx + Ndy \tag{4.4}$$

Por outro lado, $u = u(x,y)$ é solução de (4.2), então a diferencial de $u$ pode ser escrita como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{4.5}$$

e vale que

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y} = Mdx + Ndy. \tag{4.6}$$

Comparando (4.6), obtemos:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.7}$$

e

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.8}$$

Derivando (4.7) em relação a $y$ e (4.8) em relação a $x$, temos respectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Se $u \in C^2$, então, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, e

pelo teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, a condição (4.3) é necessária para que o primeiro membro de (4.2) seja a diferencial total de $u(x,y)$.

2. A condição é suficiente

Mostraremos que vale a volta, ou seja, se (4.3) é verificada então o primeiro membro de (4.2) é a diferencial total de $u(x,y)$.

Podemos achar $u$, solução de (4.2), integrando (4.7) em relação à variável $u$. Assim,

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y), \tag{4.9}$$

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária que depende exclusivamente de $y$.

Derivando (4.9) em relação a $y$, obtemos:

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + \phi'(y).$$

Ou seja, $\phi'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx$, o que resulta em $\phi(y) = \int \left( N - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx \right) dy$.

Como $u(x,y) = constante$, substituindo a expressão $\phi(y)$ em (4.9), temos:

$$\int M(x,y)dx + \int\left(N - \int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy = K,$$

que é a solução geral de uma equação diferencial exata, e também a função $u = u(x,y)$ dada por:

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \underbrace{\int\left(N - \int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy}_{\phi(y)},$$

tem como diferencial total o primeiro membro de (4.2).

### 4.3 Equações Diferenciais Ordinárias Não Exatas

É comum nos depararmos com equações diferenciais do tipo (4.2) que não são equações diferenciais exatas, ou seja, tais que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

No entanto, é possível mostrar-se que há uma infinidade de funções $\lambda(x,y)$, para as quais a equação $\lambda(Mdx + Ndy) = 0$, torna-se uma equação diferencial ordinária exata, em que $\lambda$ denomina-se fator integrante da equação (4.2).

Essa função $\lambda$, quando considerada como dependendo apenas de uma única variável, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\lambda(y) = e^{\int \psi(y)dy}, \text{ onde } \psi(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right), \text{ ou}$$

$$\lambda(x) = e^{\int \psi(x)dx}, \text{ onde } \psi(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

**Exemplo 4.1** Resolver a seguinte EDO não exata

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

**Resolução:**

Verificamos que esta não é uma EDO exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Utilizando os resultados obtidos acima, temos

$$\psi(x) = \frac{1}{2xy}(-2y - 2y) = \frac{1}{2xy}(-4xy) = -\frac{2}{x}.$$

Agora,

$$\int \psi(x)\,dx = -2\int\frac{1}{x}dx = -2\ln(x).$$

Como $\lambda(x)=e^{\int \psi(x)dx}$, temos que

$$\lambda(x)=e^{-2\ln(x)}=\frac{1}{x^2}.$$

Multiplicando a equação diferencial não exata por $\lambda(x)$, resulta que

$$\frac{1}{x^2}\left[\left(x^2-y^2\right)dx+\left(2xy\right)dy\right]=0,$$

ou ainda,

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0, \qquad (4.10)$$

que é uma equação exata.

Agora, (4.10) pode ser resolvida pelo método das equações diferenciais exatas. Assim, de (4.8), obtemos que

$$u=\int Ndy+\phi(x)=\int\frac{2y}{x}dy+\phi(x)=\frac{y^2}{x}+\phi(x).$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2}+\phi'(x),$$

e como

$$M=\frac{\partial u}{\partial x},$$

e

$$M(x,y)=\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right),$$

resulta que

$$1-\frac{y^2}{x^2}=-\frac{y^2}{x^2}+\phi'(x).$$

Por conseguinte,

$$\phi'(x)=1,$$

e

$$\phi(x)=\int dx+c.$$

Assim,

$$\phi(x)=x+c,$$

de modo que a solução $u(x,y)$ tem a forma

$$u=\frac{y^2}{x}+x+c.$$

### 4.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Completas

Vamos estudar agora as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem que são da forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), x\in I, \tag{4.11}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções que dependem apenas da variável $x$ e estão definidas em um intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$.

Uma maneira mais geral de se escrever a equação (4.11), é através da forma

$$a_0(x)y'+a_1(x)y=b(x),\ x\in I, \tag{4.12}$$

onde $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $b(x)$ são funções apenas de $x$, definidas em *I*. Quando $a_0(x)\neq 0$, para todo $x\in I$, (4.12) pode ser reduzida à forma (4.11).

Podemos, ainda, reescrever (4.11) na forma

$$y'=f(x,y), \tag{4.13}$$

onde $f(x,y)=-P(x)y+Q(x)$, em $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\in I\}$.

**Definição 2.4** Uma equação diferencial ordinária é dita linear completa se é da forma

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \tag{4.14}$$

onde $P$ e $Q$ são funções de $x$ ou constantes. Ela é dita linear homogênea ou incompleta, quando $Q=0$.

A equação (4.14) pode ser reescrita como

$$(Py-Q)dx+dy=0, \tag{4.15}$$

que é uma equação do tipo $M(x,y)dx+N(x,y)dx=0$.

Vimos, anteriormente, que uma equação do tipo (4.15) pode ser classificada como equação diferencial ordinária exata ou não exata, e apresentamos um método para o cálculo da função $u(x,y)$, que dá a solução da EDO.

Caso a equação (4.15) não seja uma EDO exata, um fator integrante que a torna exata é dado por $\gamma(x)=e^{\int Pdx}$.

Assim, a EDO $e^{\int Pdx}\left[(Py-Q)dx+dy\right]=0$ é exata e o método utilizado anteriormente pode ser aplicado.

# 5. MÉTODO DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

## 5.1 Método das curvas características planas para solução de equações diferenciais parciais lineares

Neste capítulo, vamos estudar o problema de Cauchy (P.V.I.) para EDP's de 1ª ordem da forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y). \tag{5.1}$$

Para isso, seja $\gamma$ uma curva plana inicial. Parametrizando-a por $(\sigma(t),\rho(t))$, $t \in I$, onde $I$ é um intervalo aberto, podemos escrever o problema na forma

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), \ \forall t \in I. \end{cases} \tag{5.2}$$

Consideremos as seguintes hipóteses adicionais:

(i) a curva inicial $\gamma$ é uma curva suave, ou seja, as funções $\sigma$ e $\rho$ são continuamente diferenciáveis em $I$ e $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$, qualquer que seja $t \in I$;

(ii) $f \in C^1(I)$;

(iii) $a,b,c \in C^1(\Omega)$ e as funções $a$, $b$ não se anulam ao mesmo tempo em $\Omega$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo $\gamma$.

Para resolvermos o problema (5.2), precisamos, primeiramente, encontrar as curvas características planas da equação (5.1) (curvas ao longo das quais a EDP (5.1) pode ser escrita como uma derivada total em relação a uma variável $s$).

Assim, as curvas características planas da equação (5.1) são curvas que admitem uma parametrização $(\alpha(s),\beta(s))$ que satisfaz

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s),\beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s),\beta(s)) \end{cases} \tag{5.3}$$

Para obtermos uma única solução para o sistema de EDO's (5.3), precisamos de um par de condições iniciais. Para isso, como $a,b \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0,y_0) \in \Omega$, obteremos uma única solução de (5.3), $(\alpha(s),\beta(s))$, para $s$ numa vizinhança de $s_0$ tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \quad \beta(s_0) = y_0. \tag{5.4}$$

A existência e a unicidade de solução do problema (5.2) depende de como as curvas características intersectam a curva inicial $\gamma$.

Daremos, no Teorema abaixo, as condições suficientes para que o problema (5.2) tenha uma solução única numa vizinhança da curva inicial $\gamma$ (que é coberta por características planas).

**Teorema 5.1** Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, $\gamma$ uma curva suave em $\Omega$ parametrizada por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$, e

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t) & b(\sigma(t), \rho(t) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Então, o problema (5.2) tem uma única solução de classe $C^1$ numa vizinhança da curva $\gamma$ em $\Omega$. Essa solução é dada por

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))\, ds$$

**Observação**: A solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s,t_0), y(s,t_0))$ é obtida integrando-se a EDP ao longo da característica que passa por $(x_0, y_0)$, de $s = 0$ até $s = s_0$.

**Demonstração**: Consideremos que as curvas características não são tangentes à curva inicial $\gamma$. Então, o vetor tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e o vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ não são paralelos (ou seja, não são linearmente dependentes).

Com esta hipótese, para cada $t \in I$, existe uma única curva característica plana passando pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$, que é a solução de (5.5) e (5.6):

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\alpha(s_0) = \sigma(t), \quad \beta(s_0) = \rho(t), \ t \in I \tag{5.6}$$

numa vizinhança de $s_0$ (tomar $s_0 = 0$ para simplificar).

Além disso, $(\sigma(t), \rho(t))$ é o único ponto da curva característica que intersecta a curva inicial $\gamma$. Do contrário, haveria um ponto sob a curva característica cujo vetor tangente seria paralelo a $(\sigma'(t), \rho'(t))$, contradizendo a hipótese. Desse modo, podemos cobrir a vizinhança de $\gamma$ através de curvas características contidas em $\Omega$, e que intersectam $\gamma$ num único ponto.

Isso permite-nos fazer a mudança de variável $(x,y)\mapsto(s,t)$. Agora, para cada $t\in I$, denotamos a curva característica que passa por $(\sigma(t),\rho(t))$ por $(x,y)=(x(s,t),y(s,t))$.

Fazendo isso, podemos reescrever (5.5) e (5.6) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_s(s,t)=a(x(s,t),y(s,t)) \\ y_s(s,t)=b(x(s,t),y(s,t)) \\ x(0,t)=\sigma(t), y(0,t)=\rho(t), \ \forall t\in I. \end{cases}$$

Agora observe que:

$$0\neq\det\begin{pmatrix} a(\sigma(t),\rho(t)) & b(\sigma(t),\rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x_s(0,t) & y_s(0,t) \\ x_t(0,t) & y_t(0,t) \end{pmatrix},$$

para todo $t\in I$. Então, por continuidade,

$$\det\begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix}\neq 0, \text{ para } s \text{ na vizinhança de zero.}$$

Logo, a transformação $(s,t)\mapsto(x(s,t),y(s,t))$ é localmente injetora. Podemos, então, fazer a mudança de variável $(x,y)\mapsto(s(x,y),t(x,y))$ e considerar a mudança $v(s,t)=u(x,y)$.

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)=\frac{\partial u\partial x}{\partial x\partial s}+\frac{\partial u\partial y}{\partial y\partial s}=au_x bu_y=c(x,y).$$

A condição inicial para $v$ é:

$$v(0,t)=u(x(0,t),y(0,t))=u(\sigma(t),\rho(t))=f(t),\forall t\in I.$$

Então $v$ deve ser solução do problema de Cauchy (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial s}(s,t)=c(x(s,t),y(s,t)) \\ v(0,t)=f(t),\forall t\in I. \end{cases}$$

Este é um problema de valor inicial para uma EDO de 1ª ordem, na variável $s$ para cada $t$ fixo, cuja solução é obtida integrando-se de $s=0$ a $s=s_0$, que resulta em:

$$v(s_0,t_0)=v(0,t_0)+\int_0^{s_0}c(x(s,t_0),y(s,t_0))ds$$

ou

$$v(s_0,t_0)=f(t_0)+\int_0^{s_0}c(x(s,t_0),y(s,t_0))ds.$$

Para voltar para $u(x,y)$, dado $(x_0,y_0)$, nessa vizinhança de $\gamma$, seja $(s_0,t_0)$ tal que $s_0 = s(x_0,y_0)$ e $t_0 = t(x_0,y_0)$, isto é,

$$\begin{cases} x_0 = x(s_0,t_0) \\ y_0 = y(s_0,t_0) \end{cases}$$

Então,

$$u(x_0,y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0),y(s,t_0))ds \tag{5.7}$$

Se $u$ é solução de (5.2), então u satisfaz (5.7). Como (5.7) é solução de (5.2), está demonstrado que (5.2) tem solução única.

Assim, vimos que (5.7) é a solução do problema (5.2).

■

**Exemplo 5.1** Considere o problema

$$av_x + bv_y + cv = d, \tag{5.8}$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a^2+b^2 \neq 0$.

O método para encontrar a solução geral de (5.8) é, de certa forma, semelhante ao método para encontrar a solução única de (5.2).

Devemos procurar uma mudança de variável que coloque a equação (5.8) numa forma mais simples: seja $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ tal que $t$ é constante ao longo das curvas características planas.

As características planas satisfazem, neste caso:

$$x'(s) = a, \text{ então } x(s) = as + c_1 \tag{5.9}$$

$$y'(s) = b, \text{ então } y(s) = bs + c_2 \tag{5.10}$$

Por (5.9), temos:

$$s = \frac{x - c_1}{a} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) em (5.10), temos y = $b\left(\frac{x-c_1}{a}\right) + c_2$. Então, $ay = bx - bc_1 + ac_2$ e daí, $ay - bx = k_1$. Concluímos que as curvas características planas são as retas $ay - bx = k_1$, sendo $k_1$ constante. As retas ortogonais a essas são as retas $by + ax = k_2$, sendo $k_2$ constante. Tomando $t$ constante ao longo das retas características e $s$ constante ao longo das retas ortogonais, obtemos

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = -bx + ay \end{cases} \tag{5.12}$$

Com a mudança de variável (5.12), a equação (5.8) fica

$$\left(a^2 + b^2\right) w_s + cw = d\,. \tag{5.13}$$

Para cada $t$ fixo, a equação (5.13) é uma EDO de 1ª ordem na variável $s$ com fator integrante

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right) e^{\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right)} \tag{5.14}$$

Multiplicando (5.13) por (5.14), tornamos a EDO exata e obtemos

$$\frac{d}{ds}\left[w \cdot e^{\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right)}\right] = \left(\frac{d}{a^2 + b^2}\right) e^{\frac{cs}{a^2+b^2}}$$

Portanto, se $c \neq 0$, a solução geral de (5.13) é

$$w(s,t) = \frac{d}{c} + \exp\left(\frac{-cs}{a^2 + b^2}\right),$$

e a solução geral de (5.8) é

$$v(x,y) = \frac{d}{c} + f(-bx + ay)\exp\left(\frac{-c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right)$$

no caso de $c = 0$, a solução geral de (5.13) é

$$w(s,t) = \frac{ds}{a^2 + b^2} + f(t)$$

e a solução geral de (5.8) é

$$v(x,y) = \frac{d}{a^2 + b^2}\left(ax + by\right) + f\left(-bx + ay\right),$$

onde $f \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ é arbitrária.

■

A ideia acima também pode ser utilizada no caso dos coeficientes de (3.8) não serem constantes.

Assim, as curvas características planas satisfazem

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s), y(s)) \\ y'(s) = b(x(s), y(s)), \end{cases}$$

e portanto, são soluções da EDO de 1ª ordem

$$a\left(x,y\right)dy - b\left(x,y\right)dx = 0 \tag{5.15}$$

Se as soluções da EDO (5.15) forem da forma $t(x,y)=k$ sobre as curvas características, onde $k$ é uma constante arbitrária, é natural tomar $t$ como uma das nossas novas variáveis. Há certa liberdade na escolha da variável $s$, bastando garantir que o jacobiano

$$\det\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} \neq 0, \text{ em } \Omega.$$

Observe que se $t_y \neq 0$ em $\Omega$ (respectivamente, $t_x \neq 0$ em $\Omega$), podemos tomar $s=x$ (respectivamente, $s=y$) e, neste caso, o determinante jacobiano será não nulo e, por conseguinte, a curva inicial $\gamma$ não será tangente às curvas características planas.

## 5.2 Método das características espaciais para equações diferenciais parciais quase-lineares

Considere o problema de Cauchy:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

Observe que na equação a função incógnita $u$ aparece na parte principal da equação, o que caracteriza uma não linearidade, como também no termo independente das derivadas.

Agora, seja $\gamma$ uma curva plana inicial, parametrizada por $(\sigma(t),\rho(t))$, $t \in I$, e assim podemos escrever o problema na forma

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), t \in I \end{cases}$$

Se a curva inicial $\gamma$ não for tangente às curvas características planas, então a superfície solução da equação será gerada pela curva $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t),\rho(t),f(t))$, e pelas curvas características em $\mathbb{R}^3$ que interceptam $\Gamma$.

Essa curva $\Gamma(t)$ é dita regular, quando o vetor tangente $(\sigma'(t),\rho'(t))$ não for paralelo ao vetor $(a,b)$, vetor tangente às curvas características planas, sobre $\gamma(t)$. Neste caso, haverá uma mudança de variável inversível bem definida (garantida pelo Teorema da Função Inversa), ou seja,

$$\begin{cases} (x,y) \mapsto (s,t) \\ (s,t) \mapsto (x,y) \end{cases}$$

Com isso, podemos transformar a EDP em uma EDO, em que o parâmetro $t$ é constante sobre as curvas características planas e, portanto, teremos uma EDO na variável $s$ em uma função incógnita $v = v(s,t)$, em que $t$ é constante.

**Exemplo 5.2** Considere o problema

$xu_x - yu_y = u^2$

$u(x,1) = 1,\ x \in \mathbb{R}$

Neste caso, as características planas são retas horizontais, logo o problema tem solução e as curvas características espaciais serão obtidas resolvendo o seguinte sistema de EDO na variável $s$.

$$\begin{cases} x_s(s,t) = a(x,y,v) \\ y_s(s,t) = b(x,y,v) \\ v_s(s,t) = c(x,y,v) \end{cases}$$

As condições iniciais são obtidas quando $s = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} x(0,t) = \sigma(t) \\ y(0,t) = \rho(t) \\ v(0,t) = f(t), \end{cases}$$

então, neste caso, teremos o seguinte P.V.I.:

$$\begin{cases} x_s = x \\ y_s = -y \\ v_s = v^2 \end{cases}$$

com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} x(0,t) = t \\ y(0,t) = 1 \\ v(0,t) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema desacoplado temos:

i) $\begin{cases} x_s = x \\ x(0,t) = t \end{cases}$

Daí, $x(s,t) = te^s$

ii) $\begin{cases} y_s = -y \\ y(0,t) = 1 \end{cases}$

Daí, $y(s,t)=e^{-s}$

iii) $\begin{cases} v_s = v^2 \\ v(0,t)=1 \end{cases}$

Daí, $v(s,t)=\dfrac{1}{1-s}$

Se $u(x,y)=v\big(s(x,y),t(x,y)\big)$, precisamos encontrar $s(x,y)$ e $t(x,y)$, fazendo uma inversão na mudança de variável, ou seja,

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases} \mapsto \begin{cases} s = s(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases}$$

Como $x(s,t)=te^{s}$ e $y(s,t)=e^{-s}$, resulta que $t=xy$ e $s=-\ln y$.

Portanto, se a solução da EDO é $v(s,t)=\dfrac{1}{1-s}$, então a solução geral da EDP será

$$u(x,y)=\frac{1}{1+\ln y},$$

com algumas restrições:

a) $y>0$, e

b) $1+\ln y \neq 0$, logo $\ln y \neq -1$, e, portanto, $y \neq \dfrac{1}{e}$.

## 6. CONCLUSÃO

Muitos fenômenos que ocorrem na física, biologia e economia, podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial, como por exemplo: as leis de Newton para o resfriamento dos corpos, as equações de Maxwell, e as equações da mecânica quântica de Schrödinger, que são descritas por equações que relacionam o espaço e o tempo.

Através do estudo do método das curvas características para resolução de equações diferenciais parciais de primeira ordem, percebemos a importância que esse método tem no estudo das equações que aparecem na modelagem de fenômenos físicos de diversas áreas da ciência.

Ao longo deste trabalho pudemos ver a íntima relação que existe entre as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). Em geral, para resolvermos uma EDP precisamos transformá-la em uma EDO. Para fazermos isso, nos valemos aqui do Método das Curvas Características. Esse método consiste em obter-se uma mudança de variável especial que tem como propriedade o fato de uma das variáveis ser constante, ao longo dessas curvas características. Assim, através dessa mudança de variável, a EDP é transformada em uma EDO, sobre tais curvas características. Resolvemos, então, a EDO sobre essas curvas características e, em seguida, retornamos às variáveis originais, através da transformação inversa da mudança de variável.

Dentre as áreas em que se pode aplicar o Método das Curvas Características Planas, destacamos a Teoria da Combustão, o Estudo das Leis de Conservação e as Ondas de Choque.

Quanto ás Curvas Características Espaciais, fazemos uso das mesmas quando o Método das Curvas Características Planas não funciona, ou seja, quando o vetor tangente à curva inicial dada é paralelo ao vetor tangente a alguma das curvas características planas. O Método das Curvas Características Espaciais é também utilizado na resolução de EDP's quase-lineares, isto é, EDP's em que os coeficientes da equação dependem da função incógnita $u$, enquanto que as derivadas parciais se mantém com grau 1.

O estudo que apresentamos aqui trata-se apenas de uma pequena iniciação. Para um estudo mais avançado recomendamos a leitura do livro de J. SMOLLER (SMOLLER, 1994).

## 7. REFERÊNCIAS


ABUNAHMAN, S. A., **Equações diferenciais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., 1984.

AYRES, Jr. F., **Equações diferenciais.** Ind Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1959.

BOYER, C. B., **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F., **Equações diferenciais aplicadas.** 2nd Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

IÓRIO, V., **EDP, um curso de graduação.** 2nd Ed. Rio de Janeiro, 2005.

SMOLLER, J., **Shock waves and reactions: diffusion equations.** 2nd ed.. New York: Spring, 1994.