UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO

ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE A DISTÂNCIA

Allysson Batista do Nascimento Silva

Evaldo de Almeida Albuquerque

O TEOREMA DE BAIRE

Barra do Corda – MA

2009

Allysson Batista Do Nascimento Silva

Evaldo de Almeida Albuquerque

O TEOREMA DE BAIRE

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática da UFSC, como requisito para obtenção do grau de Pós-Graduado em Matemática.

Orientador: Sonia Palomino Bean

Mestra em Matemática – UFSC

Barra do Corda – MA

2009

RESUMO

Dos teoremas da Topologia Geral, o Teorema de Baire é um dos mais ricos em conseqüências, não só na Topologia, mas, principalmente, na Análise Matemática, na Análise Funcional e Geometria Diferencial. No decorrer deste trabalho, traremos algumas noções, como por exemplo, o estudo de seqüências em um Espaço Métrico, funções contínuas, que visarão a uma melhor compreensão de espaços métricos completos, bem como, algumas de suas principais características, para que então possamos apresentar o Teorema de Baire.

Palavras-Chave: Teorema de Baire. Topologia. Espaços Métricos

ABSTRACT

Of the Theorem of General Topology, Baire's theorem it is one of the richest in consequences, not only in Topology, but, mainly, in the Mathematical Analysis, in the Functional Analysis and Differential Geometry. In elapsing of this work, we will bring some notions, as for instance, the study of sequences in a Metric Space, continuous functions, that you seek to a best understanding of complete metric spaces, as well as, some of its main characteristics , so that then we can present Baire's theorem .

Keywords: Baire's theorem. Topology. Metric Spaces

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela capacidade que nos deu.

À meus pais, Francisco Gomes da Silva e Eliene Batista do Nascimento Silva, pelo incentivo e amor. (Allysson)

À meus pais, Agostinho Carvalho de Albuquerque e Laurinda Pereira de Albuquerque, por me darem a oportunidade de chegar até aqui. (Evaldo)

À professora Sonia Palomino Bean, pela paciência e orientação.

"Se o problema tem solução, não esquente a cabeça, porque tem solução. Se o problema não tem solução, não esquente a cabeça, porque não tem solução."

Provérbio Chinês

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem dar ênfase à algumas aplicações da Topologia Geral, mais particularmente, ao Teorema de Baire. Iniciaremos nossa caminhada trabalhando algumas noções de espaços métricos no capítulo (2) seguido de funções contínuas no capítulo (3). O capítulo (4) trata da Topologia, mas especificamente conjuntos abertos e fechados, onde fazemos uma breve relação de continuidade. O capítulo (5) nos traz algumas noções de limites de sequências.

As aplicações e as definições que expomos no decorrer do trabalho, estão ligadas a um dos teoremas fundamentais a um dos mais ricos da Topologia que é o Teorema de Baire, o qual trabalharemos no capítulo (7).

1. ESPAÇOS MÉTRICOS

2.1 - Métrica em um conjunto

Dado um conjunto *M,* chamamos de métrica em *M* a uma função $d: M \times M \rightarrow R$ que associa a cada par de elementos $x, y \in R$ ao número real $d(x, y)$ denominado de distância de *x* até y e satisfazendo as seguintes condições:

$d_1)$ $d(x, x) = 0, \quad \forall x \in M$

$d_2)$ $d(x, y) > 0, \quad \forall x, y \in M$ com $x \neq y$

$d_3)$ $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in M$

$d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, x \in M$

Observação 2.1. A condição d_4 é conhecida como desigualdade triangular.

Definição 2.1 (Espaço Métrico). Sendo M um conjunto, chamamos de *Espaço Métrico ao par* (M, d) onde d é uma métrica em M. Nesse caso nos referimos ao Espaço Métrico (M, d) como, simplesmente, Espaço Métrico M quando a métrica d é explicita.

Exemplo 2.1 (Métrica zero-um). Dado um conjunto M qualquer, então M pode ser considerado, facilmente, um espaço métrico, basta, em M, definimos $d(x, x) = 0, \quad \forall x \in M$ e $d(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in M$ com $x \neq y$. Essa é a chamada Métrica zero-um.

De fato, pela definição fica evidente as condições d_1, d_2, d_3.

Provemos, então d_4, tomemos x, y e $z \in M$, temos as condições:

- se $x = z \neq y$, temos $d(x, z) = 0$, $d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 1$. Logo $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$.
- se $x \neq z = y$, ou $x = y \neq z$ fica óbvia a igualdade: $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.
- se $x \neq y \neq z$, temos $d(x, z) = 1$, $d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 1$. Logo $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.2 (Subespaço). Se (M, d) é um Espaço Métrico, então todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado um Espaço Métrico. Basta considerar a restrição de $d : M \times M \to R$ a $d : S \times S \to R$. Nessas condições dizemos que S é dito subespaço de M e a métrica de S é dita induzida pela métrica de M.

Exemplo 2.2 (Métrica usual da Reta). Seja $x, y \in R$, se definimos $d(x, y) = |x - y|$ então d é uma métrica em R.

Prova: É de fácil verificação as condições d_1 e d_2.

Tomamos $x, y, z \in R$ temos que:

$$d_3)\ d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x).$$

$d_4)$ Mostremos primeiro que $\forall a, b \in R$ vale $|a + b| \leq |a| + |b|$ é claro que $a \leq |a|$, $b \leq |b|$ o que implica $a + b \leq |a| + |b|$ e $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$ o que implica $-(a + b) \leq |a| + |b|$ logo $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Agora estamos prontos para mostrar a condição d_4

$$d(x, z)=|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\leq|x-y|+|y-x|=d(x, y)+d(y, z).$$

Exemplo 2.3 (Métricas no Espaço R^n). Aqui há três métricas consideradas principais:

Dados $x=(x_1, \ldots, x_n),\ \ y=(y_1, \ldots y_n)\in R^n$ definimos as distâncias

- $d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+,\ldots,(x_n-y_n)^2}=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$
- $d'(x, y)=|x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_1-y_1|$ e
- $d''(x, y)=\max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\}=\max\limits_{1\leq i<n}|x_i-y_i|$

As funções *d', d"* são métricas, pois cumprem obviamente as condições d_1, d_2, d_3 e d_4. Quanto a função *d*, ela cumpre obviamente as condições d_1, d_2, d_3. Vamos mostrar que ela cumpre a condição d_4. Antes de provar essa condição, precisamos enunciar e demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Se $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n \in R$ então

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{1/2}$$

Demonstração. Para todo $r,\ s\in R$ vale $2rs\leq r^2+s^2$.

Daí

$$\frac{2|x_i y_i|}{\left(\sum x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum y_i^2\right)^{1/2}} \leq \frac{x_i^2}{\sum x_i^2} + \frac{y_i^2}{\sum y_i^2} \quad \text{com} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Somando a última desigualdade em relação ao índice *i* temos

$$\frac{2\sum |x_i y_i|}{\left(\sum x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum y_i^2\right)^{1/2}} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \sum |x_i y_i| \leq \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$$

Proposição 2.1 Sejam *d, d', d''* as métricas definidas no exemplo acima, então quaisquer que sejam $x, y \in R^n$, tem-se

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq nd''(x,y) \leq nd(x,y)$$

Agora podemos voltar à desigualdade triangular:

Tomando $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^n$, temos

$$[d(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos:

$$[d(x,z)]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2,$$

Ou seja,

$$[d(x,\ z)]^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \right]^2,$$

Logo

$$d(x,z) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i) \right)^{1/2} = d(x,y) + d(y,\ z) \Rightarrow d(x,\ z) \leq d(x,y) + d(y,\ z)$$

Observação 2.2 A métrica *d* acima é chamada de *Métrica Euclidiana*

Definição 2.3 (Espaço de Funções). Seja *X* um conjunto qualquer, dizemos que $f : X \to R$ é limitada quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| < k.\ \ \forall x\ \ X$. Indicamos como $B(X;\ R)$ ao conjunto das funções limitadas $f : X \to R$.

Definição 2.4 (Métrica do Supremo). Se tomamos $f,\ g \in B(X;\ R)$ e definirmos $d(f,\ g) = \sup |f(x) - g(x)|$ então $d : B(X;\ R) \times B(X;\ R) \to R$ é uma métrica em. $B(X;\ R)$

A prova é de fácil verificação

Definição 2.5 (Norma em um Espaço Vetorial). Seja *E* um espaço vetorial. Uma norma em *E* é uma função $\| \ \| : E \to R$ que associa a cada vetor $x \in E$ ao número real $\|x\|$, chamado de norma de *x* em *E* e satisfazendo as seguintes condições:

N_1) Se $x \neq \vartheta$ então $|x| \neq 0 \quad \forall\, x \in E$
N_2) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|, \quad \forall\, x \in E$ e $\lambda \in R$
N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall\, x,\, y \in E$.

Observação 2.3. Como conseqüência das condições acima temos:

- $\|\vartheta\| = \|0\,.\vartheta\| \overset{N_2}{=} 0 \Rightarrow \|\vartheta\| = 0$
- $0 = \|\vartheta\| = \|x + (-x)\| \overset{N3}{\leq} \|x\| = +\|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow 0 \leq \|x\|, \qquad \forall x \in E$

Um *Espaço Vetorial Normado* é um Espaço Vetorial *E* munido de uma norma $\|\ \|$ (Notação $(E, \|\ \|)$) .

Proposição 2.2 Todo *Espaço Vetorial Normado E* é um Espaço Métrico, por meio da definição $d(x,\, y) = \|x - y\|, \qquad \forall x,\, y \in E.$

Demonstração. Sejam *E* um *Espaço Vetorial Normado* e $x, y, z \in E$ e $\lambda \in R$, então:

$d_1)\, d(x,\, x) = \|x - x\| = \|\vartheta\| = 0, \quad \forall x \in E;$
$d_2)$ Se $x \neq y$ então $d(x, y) = \|x - y\| > 0;$
$d_3)\, d(x,\, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y,\, x);$
$d_4)\, d(x,\, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \overset{N_3}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,\, y) + d(y,\, z)$

Definição 2.6 (Produto Interno). Um produto interno em um Espaço Vetorial *E* é uma função $<,>: E \times E \to R$, que associa a cada par de vetores $x,\ y \in E$ ao número real, <x, y>, chamado produto interno de *x* por *y* e satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x,\ y,\ z \in R$ e $\lambda \in R$:

$P_1) < x + y, z > = < x, z > + < y, z >$
$P_2) < \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
$P_3) < x, y > = < y, x >$
$P_4) x \neq 0 \Rightarrow < x, x > > 0.$

CONSEQÜÊNCIAS

- $< x, y+z > \overset{P_3}{=} < y+z, x > \overset{P_1}{=} < y, x > + < z, x > \overset{P_3}{=} < x, y > + < x, z >$
- $< x, \lambda y > \overset{P_3}{=} < \lambda y, x > \overset{P_2}{=} \lambda < y, x > \overset{P_3}{=} < x, y >$
- $< 0, x > = < y.0, x > \overset{P_2}{=} 0 < y, x > = 0$

Definição 2.7 (Norma em um Espaço Vetorial com Produto Interno). Seja E um Espaço Vetorial com Produto Interno. Define-se norma de um vetor $x \in R$ da seguinte maneira $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Mostremos que $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ é uma norma em E. De fato, tomando $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathrm{R}$ temos:

$\mathrm{N}_1)$ Se $x \neq \partial \Rightarrow \|x\| = .\sqrt{< x,. x >} \overset{P_4}{>} 0$

$\mathrm{N}_2)$ $\|\lambda x\| = .\sqrt{< \lambda x, \lambda x >} \overset{P_2}{=} \sqrt{\lambda^2 < x, x >} = \lambda \sqrt{< x, x >} = \lambda \|x\|$

$\mathrm{N}_3)$ A demonstração desta propriedade depende do seguinte lema.

Lema 2.1 (Cauchy-Schwarz). Seja E um Espaço Vetorial com Produto Interno, então

$\|< x, y >\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \qquad \forall x, y \in B$

Demonstração $x=\partial$ a demonstração fica evidente. No caso de $x\neq\partial$ temos

$$0<\|x+\lambda y\|^2=<x+\lambda y,\, x+\lambda y>=<x,\, x>+<x,\, \lambda y>+<\lambda y,\, x>+<\lambda y,\, \lambda y>$$
$$=\|x\|^2+2\lambda<x,y>+\lambda^2\|y\|^2.$$

Que é um trinômio quadrado em λ onde o descriminante $\Delta\leq 0$, isto é,

$$4<x,y>^2-4\|y\|^2\|x\|^2\leq 0 \Rightarrow <x,y>^2\leq\|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow <x,\, y>\leq\|x\|\|y\|.$$

Agora podemos retornar a demonstração da condição N_3

$\|x+y\|^2\leq<x+y,x+y>=\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Em resumo podemos dizer que, como todo Espaço Vetorial Normado é um Espaço Métrico por meio da definição $d(x,\, y)=\|x-y\|$ e todo Espaço Vetorial com produto Interno pode ser considerado em Espaço Vetorial Normado por meio da definição $\|x\|=\sqrt{<x,\, x>}$. então todo Espaço Vetorial com Produto Interno é um Espaço Métrico por meio da definição $d(x,x)=\sqrt{<x-y,\, x-y>}$.

2.2 Bolas e Esferas

Seja *M* um Espaço Métrico e seja $a\in M$ e $r\in R$. Definimos:

- Bola Aberta de centro *a* e raio *r* (Notação *B(a; r))* ao conjunto: $B(a;\, r)=\{x\in M;\, d(x,a)<r\}$
- Bola Fechada de centro *a* e raio *r* (Notação *B[a; r]* ao conjunto: $B[a,\, r]=\{x\in M;\, d(x,a)\leq r\}$

- Esfera de centro *a* e raio *r* (Notação *S(a; r)* ao conjunto: $S(a;\ r)=\{x \in M;\ d(x,r)\ =r\}$

Observe que $B[a;\ r]=B(a;\ r)\cup S(a;\ r)$ e $B[a;\ r]\cap B(a;\ r)=B(a;\ r)$

Exemplo 2.4. Seja *(M, d)* um Espaço Métrico onde *d* é a métrica zero-um, exemplo (2.1).

- Considere *r* > 1, então $B(a;\ r)=\{x \in M;\ d(x,a)<r\}=M=B[a;\ r]$

- Se *r* < *1* então $B(a;\ r)=\{x \in M;\ d(x,a)<r\}=\{a\}=B[a;\ r]$

- Se *r* = *1* então

$$B(a;\ 1)=\{x \in M;\ d(x,a)<1\}=\{a\},$$

$$B(a;\ 1)=\{x \in M;\ d(x,a)\leq 1\}=M,$$

$$S(a;\ 1)=\{x \in M;\ d(x,r)=1\}=M-\{a\}.$$

Definição 2.8. Seja *M* um Espaço Métrico. Dizemos que $a \in M$ é um ponto isolado, quando existe $r \in R_+^*$ $\text{talque} B(a,\ r)=\{a\}$. Se *a* não é um ponto isolado, então dizemos $\forall r \in R_+^*\ \exists x \in M \text{talque} 0<d(a,\ x)<r.$

Observação 2.5. Quando todo ponto de um Espaço Métrico *M* é isolado, então dizemos que *M* é Discreto.

Exemplo 2.5. Considere o conjunto $N=\{0,1,2,\ldots\}$ com a métrica induzida pela métrica usual da reta R. Temos que todo $n \in N$ é o ponto isolado pois, se tomarmos $r=1$ então

$B(n, 1)=\{x\in N;\ d(x,n)<1\}=\{x\in N; |x-n|<1\}=\{n\},\ \ \forall n\in N.$

Exemplo 2.6. Seja o conjunto $P=\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots 1/n\}$com a métrica usual.

Mostremos que 0 (zero) não é ponto isolado. De fato, tomando qualquer $r\in R_1^*$, é claro que existe $n\in N$ tal que $n>1/r$. Assim

$\left|\frac{1}{n}-0\right|<r$, ou seja, $0<d\left(\frac{1}{n}, 0\right)<r$. Portanto $\frac{1}{n}\neq 0$ é ponto de Bola $B(0, r)$.

2.3 Conjuntos Limitados

Definição 2.9. Seja *M* um Espaço Métrico e $X\subset M$. Dizemos que *X* é *limitado* quando existe uma constante *c* tal que $d(x, y)\leq c$ quaisquer que sejam $x, y\in X$.

O menor *c* nas condições acima é chamado de diâmetro de *X* (diam(*X*)). Logo $diam(X)=\sup\{d(x,y); x,y\in X\}$. Se *X* não é limitado, então dizemos que $diamX\ = \infty$.

Exemplo 2.7. Seja o conjunto $A=\{(x,y)\in R^2; x^2+y^2<1\}$. Mostremos que $diamA=2$. De fato, indicando por $p=(0, 0)$ a origem e tomando dois pontos arbitrários $q, r\in A$ temos.

$d(q,r)\leq d(q,p)+d(p,r)<1+1=2\Rightarrow d(q,r)<2$, logo 2 é cota superior. Seja, então $\ell<2$. Existe $n\in N; \frac{\ell}{2-\ell}<n\Rightarrow\left(\frac{n}{n+1},0\right), \left(-\frac{n}{n+1},0\right)\in A$ e $d\left[\left(\frac{n}{n+1}, 0\right), \left(-\frac{n}{n+1}, 0\right)\right]=$

$= \frac{2n}{n+1}$ mas sabemos que $\frac{\ell}{2-\ell} < n$, logo $\ell < 2n - \ell n \Rightarrow \ell < \frac{2n}{n+1}$, isto é, $d\left[\left(\frac{n}{n+1}, 0\right), \left(-\frac{n}{n+1}, 0\right)\right] > \ell$ logo ℓ não pode ser cota superior e assim $diam\,(A) = 2$.

Proposição 2.4. Toda *Bola* $B(a,r)$ e toda *Esfera* $S(a,r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede a *2n.*

Demonstração. Consideremos a *Bola* $B(a,r)$ e tomemos $x, y \in B(a,r)$, daí temos $d(x, y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r \Rightarrow d(x,y) < 2r, \quad \forall\, x, y \in B(a,r)$. De maneira análoga prova-se para a bola fechada $B[a, r]$ e a esfera $S(a, r)$.

Proposição 2.5. Em um Espaço Vetorial Normado, toda Bola Aberta $B(a,r)$ tem diâmetro *2r.*

Demonstração. Pela proposição (2.4) temos que $diam(B(a, r)) \leq 2$, portanto resta-nos mostrar que se $s < 2r$ então *s* não é diâmetro de $B(a,r)$. Seja então *s* tal que $s < 2r$. Tomemos $y \neq \vartheta$ em E e $t \in R$ tal que $s < 2t < 2r$.

Consideremos, agora o vetor $x = \frac{t}{\|y\|} y$ observemos que

$d(a, a+x) = \|x\| = t < r \Rightarrow a + x \in B(a, r)$,

$d(a, a-x) = \|x\| = t < r \Rightarrow a - x \in B(a, r)$ e

$d(a+x, a-x) = \|a+x-a+x\| = 2\|x\| = 2t > s$, ou seja, tomamos os vetores $a+x,\ a-x \in B(a; r)$ cujas distâncias são maiores que *s*, logo $s \neq diam(B(a, r))$ e, conseqüentemente, $diam(B(a; r)) = 2r$.

Proposição 2.6. Um espaço Vetorial Normado $E \neq \phi$ com métrica proveniente de sua norma, nunca é um conjunto limitado.

Demonstração. Tomando $X \neq \phi$ arbitrário em *E*, então para todo $c > 0$ o vetor $y_c = \frac{2cx}{\|x\|}$ tem norma *2c*, isto é, $\|y_c\| = 2c < c$. Com isso: $d(y_c, \vartheta) = \|y_c - \vartheta\| = 2c < c$.

Proposição 2.7. Se *M* é um Espaço Métrico, então $X \subset M$ é limitado se, e somente se, está contido em alguma Bola em *M*.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que *X* está contido em uma Bola $B(a, r)$ em *M*. Então já vimos que $diam(B(a; r)) \leq 2r$, logo *X* é limitado e $diam X \leq 2r$;

$(\Leftarrow)$ Se $X \neq \phi$ fica evidente. Suponhamos $X \neq \phi$, como *X* é limitado então $\exists c > 0$, tal que $d(x, y) < c$ quaisquer que sejam $x, y \in X$. Fixando $a X$ temos a Bola $B(a, 2c)$ no qual evidentemente temos $X \subset B(a, 2c)$.

Definição 2.10 (Aplicação Limitada e Não Limitadas). Se *M* é um Espaço Métrico e *X* é um conjunto arbitrário, então $f : X \to M$ é dita limitada se $f(X)$ é um conjunto limitado em *M*. Indicamos com a notação $B(X; M)$ ao conjunto de todas as aplicações limitadas $f : X \to M$.

Se tomarmos $f, g \in B(X, M)$ então as distâncias $d(f(x), g(x))$ formam um conjunto limitado de números reais positivos. Nesse caso definimos $d(f,g) = \sup d(f(x), g(x))$ que é uma métrica em $B(X; R)$ chamada de Métrica da Convergência Uniforme ou, simplesmente, Métrica do Supremo.

Consideremos agora o conjunto $F(X;M)$ de todas as funções $f: X \to M$, limitadas ou não. É claro que não tem sentido definirmos $d(f,g)$ em $F(X;M)$, pois haverá casos em que o conjunto $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ não é limitada, isto é, $d(f, g) = \infty$. É fácil verificar que a relação $d(f, g) < \infty$ é uma relação de equivalência em $F(X;M)$.

Data $f: X \to M$, a classe de equivalência, segundo a relação $d(f, g) < \infty$, é o conjunto $B_f(X; M) = \{g: X \to M; d(g, f) < \infty\}$, isto é, $B_f(x; M)$ é o conjunto das funções *g* que estão a uma distância finita de *f*.

Porém sabemos que $d(f, g) < \infty \Leftrightarrow g \in B_f(X; M) \Leftrightarrow f \in B_g(X; M) \Leftrightarrow B_f(X; M) = B_g(X; M)$

A partir daí podemos definir $d(g, h)$ em $B_f(X; M)$. Assim

$$d(g, h) = \sup_{x \in X} d(g(x), h(x)), \quad \forall g, h \in B_f(X; M).$$

Observação 2.6. Temos que $F(X;M) = \bigcup_f B_f(X, M)$, onde f varia em $F(X, M)$.

Observação 2.7. Se chamamos $\alpha: X \to M$ como representante de cada classe $B_f(X;M)$, onde α é qualquer constante e se chamamos de *A* ao conjunto das representantes, temos então:

$F(X;M) = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha(X, M)$ e nese caso, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha(X; M) \cap \beta(X; M) = \phi$.

2.4 Distâncias

2.4.1 Distâncias de um Ponto a um Conjunto

Lembramos da geometria elementar o seguinte fato: A distância de um ponto *p* a um plano α é a medida do segmento *pq* contido na perpendicular a α pelo ponto *p*.

Definição 2.11. Sejam *M* um espaço Métrico, A um subconjunto de *M* e $p \in M$. Chamamos de distância de *p* ao conjunto *A* o seguinte número real:

$$d(p, A) = \inf\{d(p, x); x \in A\}$$

Observação 2.8. É claro que se $p \in A$ então, $d(p, A) = 0$.

Exemplo 2.8. Considere R com métrica usual, e seja $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ então

$d(0, X) = 0$

pois:

$$\forall \varepsilon < 0, \text{existe } n \in N^* \text{ tal qeu } \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

mas:

$$d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \forall > 0 \text{ com } d(0, X) = \inf\left\{d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, n \in N^*\right\}$$

então $d(0, X) = 0$

2.4.2 Distância entre dois Conjuntos

Sejam *M* um espaço métrico e *A* e *B* dois subconjuntos de *M*, então representamos a distância de *A* por *B* da seguinte maneira:

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observação 2.9. Se tivermos $A \cap B \neq \phi$ então $d(A, B) = 0$, pois $x \in A \cap B \Rightarrow d(x, x) = 0$.

3 - FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 3.1. Sejam *M* e *N* espaços métricos e considere uma aplicação $f : M \to N$ dizemos que *f* é continua em $a \in M$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(s), f(a)) < \varepsilon$. Dizemos que *f* é uma aplicação contínua quando *f* é contínua em todos os pontos de *M*. Em outros termos, dizemos que $f : M \to N$ é contínua em $a \in M$ quando dado uma bola qualquer $\overline{B} = B(f(a), \varepsilon)$, pode se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$ tal que $F(B) \subset \overline{B}$.

Definição 3.2. Dados *M* e *N* espaços métricos e uma aplicação $f : M \to N$. Se para quaisquer $x, y \in M$ existir $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ então dizemos que *f* é uma aplicação Lipschitziana e *c* é dita constante de Lipshitz.

Proposição 3.1. Toda aplicação $f : M \to N$ Lipschitziana é continua.

Demonstração. Com efeito, para todo $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, logo temos que para todo $a \in M$ com $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), d(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Portanto, *f* é continua.

Observação 3.1.

1. Se $f, g : M \to N$ são Lipschitziana então o mesmo acontece com $f + g$ e kf onde $k \in R$.
2. Em uma aplicação Lipschitziana *f*, quando *c* = *1* dizemos que *f* é uma contração fraca.

Proposição 3.2. Se *M* é discreto então toda aplicação $f : M \to N$ é contínua.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e tomando $a \in M$ arbitrário, então a é isolado, basta então tomar $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) = \{a\}$. Logo $d(x, a) < \delta$ implica $x = a$ de onde resulta que $d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

Observação 3.2. Se $f : M \to N$ não é continua em $a \in M$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ pode-se encontrar x_δ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Equivalentemente, existe $\varepsilon > 0$ que para todo $n \in N$ pode-se obter $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 3.1. A função característica $f : R \to R$ do conjunto Q dada pro $f(x) = 1$ se $x \in Q$ e $f(x) = 0$ se $x \notin Q$ é descontínua em todo ponto $a \in R$. de fato, tomemos δ tal que $d(x_\delta, a) \leq \delta$ com x_δ racional se *a* for irracional e vice-versa. Tomemos ainda $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Daí temos que $d(f(x_\delta), f(a)) = |f(x_\delta) - f(a)| = 1 > \frac{1}{2}$, ou seja, *f* é descontínua em a.

Proposição 3.3. Se $f : M \to N$ é continua em $a \in M$ e $g : N \to P$ é continua em $f(a) \in N$ então $g \circ f : M \to P$ é continua em $a \in M$.

Demonstração. Como *g* é continua em $f(a) \in N$ temos que $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que $d(y, f(a)) < \lambda$ implica $d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$. Da continuidade de *f* no ponto $a \in M$ resulta que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \lambda$, de onde resulta que $d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$. Portanto temos que $g \circ f$ é continua em $a \in M$.

Dados os espaços métricos M, N_1, N_2 uma aplicação $f : M \to N_1 \times N_2$ equivale a um par de aplicações $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$, chamada as coordenadas de *f* tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in M$.

Considerando-se as projeções $p_1 : N_1 \times N_2$ e $p_2 : N_1 \times N_2 \to N_2$ temos $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$.

Observação 3.3. As projeções p_1 e p_2 acima são aplicações continuas. _

Proposição 3.4. A aplicação $f : M \to N_1$ é continua em $a \in M$, se e somente se, suas coordenadas $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ são continuas em $a \in M$.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que a aplicação *f* é continua. Logo, como $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$, tem-se pelo teorema 3.3 que f_1 e f_2 são continuas. Reciprocamente, sejam f_1 e f_2 são continuas e consideremos a métrica $d[(x_1, x_2),(y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$ em $N_1 \times N_2$. Logo, sendo f_1 e f_2 contínuas em $a \in M$, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon \text{ e } d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Tomemos então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Logo, $d(x, a) < \delta$ implica $d((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon$, isto é, *f* é contínua em $a \in M$.

3.1 Homeomorfismos

Sejam *M* e *N* espaços métricos e considere a aplicação $f : M \to N$ contínua e bijetiva, então a aplicação inversa pode ou não ser contínua, como nos exemplos que seguem.

Exemplo 3.2. Considere $M=[-1,0]\cup(1,+\infty)$, $N=[0,+\infty]$ então a função $f:M\to N$ definida por $f(x)=x^2$, $\forall x\in M$ é uma bijeção contínua. Sua inversa $f^{-1}:[0,+\infty]\to M$ é dada por $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ se $x>1$ e $f^{-1}(x)-\sqrt{x}$ se $0\leq x\leq 1$ mostremos que f^{1} é descontinua no ponto *1*. De fato, observe que $f^{-1}(1)=-1$, tomando $0<\varepsilon<2$ temos que, para cada $n\in N\, d\left(1+\frac{1}{n},1\right)=\frac{1}{n}$ e, no entanto $d\left(f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right),f^{-1}(1)\right)=\left|f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-f^{-1}=\right| \quad =\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right|>2>\varepsilon$, ou seja, f^{-1} é descontínua no ponto 1.

Definição 3.3. Sejam *M, N* são espaços métricos. Uma aplicação $f:M\to N$ chama-se um homeomorfismo quando *f* é contínua bijetora e sua inversa f^{-1} também é contínua.

Neste caso dizemos que *M* e *N* são espaços homeomorfos.

Exemplo 3.3. Seja *E* um espaço vetorial normado e considere uma bola $B(a;r)$com $a\in E$. A aplicação $f:B(a;r)\to E$ dada por $f(x)=\frac{1}{r}(x-a)$ é contínua, pois tomando *x, y* quaisquer em $B(a;r)$ temos $d(f(x),f(y))=\|f(x)-f(y)\|=\left\|\frac{1}{r}(x-a)-\frac{1}{y}(y-a)\right\|=\frac{1}{r}\|x-y\|=\frac{1}{r}d(x,y)$, ou seja, *f* é Lipschitziana e consequentemente contínua. *f* também é obviamente, injetiva. Observe, ainda que $f:B(a;r)\to B(0;1)$ dada por $f(x)=\frac{1}{r}(x-a)$ é contínua e bijetiva, e sua inversa f^{-1} dada $f^{-1}(x)=rx+a$ é, também, continua e, assim $B(a;r)$e $B(0,1)$ são homeomorfos.

Definição 3.4. Dadas duas métricas d_1 e d_2 sobre o mesmo espaço M escrevemos $M_1 = (M, d_1)$, $M_2 = (M, d_2)$ e $B_1(a; r)$, $B_2(a; r)$, bolas segundo as métricas d_1 e d_2 respectivamente. Dizemos que as métricas d_1 e d_2 são equivalentes, denotando-se por $d_1 \approx d_2$, quando a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \to M_2$ é um homeomorfismo.

Portanto, $d_1 \approx d_2$ quando para cada $a \in M$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $B_1(a, \delta) \subset B_2(a, \varepsilon)$, e vice-versa, para cada $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal forma que $B_2(a; \delta) \subset B_1(a; \varepsilon)$.

Em outras palavras: d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se, qualquer bola que aberta em relação a uma dessas métricas contenha uma bola aberta de mesmo centro em relação à outra.

Proposição 3.5. Sejam d_1 e d_2 métricas sobre um conjunto M. Se existirem números reais, $r, s > 0$ tais que

$$r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y)$$

Para todo $x, y \in M$. Então as métricas d_1 e d_2 são equivalentes.

Demonstração. Seja $a \in M$ e considere a bola aberta $B_1(a; \varepsilon)$, iremos mostrar que $B_2(a; r\varepsilon) \subset B_1(a; \varepsilon)$. Se $x \in B(a; r\varepsilon)$ temos que $d_2(x, a) < r\varepsilon$, mas por hipótese $rd_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ de onde resulta que $rd_1(x, a) < r\varepsilon$, logo $d_1(x, a) < \varepsilon$ donde $B_1(a; \varepsilon)$ e portanto $B_2(a; r\varepsilon) \subset B_1(a; \varepsilon)$. considere agora a bola $B_2(a; \varepsilon)$. Vamos mostrar que $B_1\left(a; \frac{\varepsilon}{s}\right) \subset B_2(a; \varepsilon)$. Se $x \in B_1\left(a; \frac{\varepsilon}{s}\right)$ então $d_1(x, a) < \frac{\varepsilon}{s}$ de onde resulta que $sd_1(x, a) < \varepsilon$, logo $d_2(x, a) < \varepsilon$ donde temos que $x \in B_2(a, \varepsilon)$ e, portanto $B_1\left(a; \dfrac{\varepsilon}{s}\right) \subset B_2(a; \varepsilon)$.

Exemplo 3.43 As métricas d, d' e d'' definidas acima no exemplo 3 do §1 são equivalentes, pois já vimos na proposição 1 do § 1 que para todo $x, y \in R^n$ vale

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd''(x, y) \leq nd(x, y).$$

4 LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA

4.1 Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Definição 4.1. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dizemos que o ponto $\alpha \in X$ é interior a X quando existe $r > 0$ tal que a $B(\alpha, r) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é denotado por $int(X)$. Dizer que o ponto $b \in X$ não pertence ao interior de X significa dizer que para todo $r > 0$ a bola aberta $B(b; r)$ contém algum ponto y que não pertence a X. Nesse caso b pertence a fronteira de X (Notação - ∂X).

Exemplo 4.1. No subconjunto $[0,1)$ da reta temos que $int([0,1)) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < X < 1\}$ e $\partial([0,1)) = \{0, 1\}$.

Exemplo 4.2. O interior de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é vazio, pois tomando qualquer $\alpha \in \mathbb{Q}$, toda bola aberta, $B(\alpha; r)$ além de conter pontos de $\mathbb{Q}$ também contém pontos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consequentemente temos que $\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Observação 4.1. Se X é subconjunto de M então $\partial X = \partial(M - X)$.

Observação 4.2. $M = int(X) \cup \partial X = \cup\ int(M - X)$.

Definição 4.2. Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $X = intX$.

Proposição 4.1. Num espaço métrico M, toda bola aberta $B(\alpha\ ;\ r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração: Se $x \in B(\alpha\ ;r)$ temos que $d(x,\alpha) < r$. Tomemos $s = r - d(x, \alpha)$ e considere $B(x, s)$. Observe que se $y \in B(x, s)$ então $d(x,y) < s$ logo $d(x,y) < r - d(x, \alpha)$ de onde resulta que $d(x, y) + d(x, \alpha) < r$, portanto $d(y, \alpha) < r$ e consequentemente temos que $y \in B(\alpha\ ;r)$.

Proposição 4.2. Seja A a coleção de abertos de um espaço métrico M. Então,

1. $\phi, M \in A$
2. Se $X, Y \in A$ então $X \cap Y \in A$
3. Se A é uma família de abertos em M, isto é, se cada $A_i \in A$ então $\cup A_i \in A$.

Demonstração:

1. Se ϕ não fosse aberto existiria um elemento $x \in \phi$ tal que $x \notin \operatorname{int} \phi$, como tal elemento não existe podemos concluir que ϕ é aberto. Evidentemente M também é aberto.

2. Tomando $x \in X \cap Y$ arbitrário temos que $a \in X$ e $a \in Y$. Como X <, Y são abertos ternos ainda que existe $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(a; r_1) \subset X$ e $B(a; r_2) \subset Y$.

Seja $r = min\{ r_1, r_2\}$, então $B(a; r) \subset X \cap Y$

3. Se existe um índice n tal que: $a \in A_n$. Mas A_n é aberto, logo existe e $r > 0$, tal que $B(a; r\ ) \subset A_n \subset \cup A_i$ e, portanto, $\cup A_i$ é aberto

Observação 4.3. Resulta imediatamente do item 3 que a interseção $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ de um número finito de abertos é ainda aberto. No entanto, a interseção infinita de abertos pode não ser aberto, como é o caso do exemplo que segue.

Exemplo 4.3. Considere o espaço métrico $\mathbb{R}$ (métrica usual) e os abertos $A_1 = (-1,1)$, $A_2 = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $A_3 = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \ldots, A_n = (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}), \ldots$, Observe que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{0\}$ não é aberto.

Corolário 4.1. Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $A \subset M$ seja aberto. Logo, para cada $x \subset A$ existe $r > 0$ tal que $x \in B(x;r) \subset A$ de onde resulta que $\{x\} \subset B(x;r) \subset A$. Como $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ temos que $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x;r) \subset A$. Portanto $A = \bigcup_{x \in A} B(x;r)$, ou seja, A é uma reunião de bolas abertas. Reciprocamente, suponha que, $A = \cup B_\lambda$ onde B_λ é uma bola aberta para todo índice λ. Então, pelo item 3 do teorema 4.2 temos que A é aberto.

Proposição 4.3. Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M. Se D e D' são respectivamente as coleções dos conjuntos abertos de (M, d) e (M, d') respectivamente então $D = D'$.

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que $D \subset D'$. Para isso seja $x \in D$ e $a \in X$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(a;\varepsilon) \subset X$. Como *d* é equivalente a *d'*, isto é, *d* ~ *d'* então por definição existe $\lambda > 0$ ate que $B_{d'}(a;\lambda) \subset B_d(a;\varepsilon) \subset X$, de onde resulta que $x \in D'$, isto é, $D \subset D'$. De maneira análoga, mostra-se que $D' \subset D$, portanto temos que $D = D'$.

Proposição 4.4. Dados os espaços métricos *M e N*, o conjunto das aplicações limitadas e descontínuas em *B(M; N)* é aberto.

Demonstração: Tomamos $a \in M'$ e chamando D_a o conjunto das aplicações limitadas que são descontínuas em *a*. Vamos mostrar que D_a é aberto. Para isso tomamos $f \in D_a$, logo para todo $\varepsilon > 0$ pode se obter $x\delta \in M$ com $d(x\delta, a) < \varepsilon$ e $d(f(x\delta), f(a)) \geq 3\varepsilon$. Considere agora a bola $B(f;\varepsilon)$. Então, se tomarmos $g \in B(M;N)$ tal que $g \in B(f;\varepsilon)$, então para todo $\delta > 0$ temos que:

$$3\varepsilon \leq d(f(x\delta), f(a)) \leq d(f(x\delta), g(x\delta)) + d(g(x\delta), f(a))$$

Daí

$$3\varepsilon \leq d(f(x\delta), g(x\delta)) + d(g(x\delta), g(a)) + d(g(a), f(a))$$

De onde resulta que

$$3\varepsilon \leq \varepsilon + d(g(x\delta), g(a)) + \varepsilon$$

Donde

$$\varepsilon \leq d(g(x\delta), g(a)) + \varepsilon$$

Logo, concluímos que *g* é descontínua em *a*, e assim temos que $g \in D_a$.ou seja, $B(f;\varepsilon) \subset D_a$ e portanto D_aé aberto. Observe ainda que $D = \bigcup_{a \in M} D_a$, onde *D* é o conjunto de todas as aplicações limitadas descontínuas *f* de *M* em *N*. Logo pelo teorema 4.2 deste capítulo, temos que *D* é aberto.

Proposição 4.5. Dada *f: M → N*, o conjunto das aplicações descontinuas *g : M → N* que estão a uma distância finita de *f* é aberto.

Demonstração: De forma análoga a do teorema anterior .

Definição 4.3 (Ponto aderente). Dado um espaço métrico *M*, dizemos que . $a \in X \subset M$ é um ponto aderente a *X* quando *d(a, X) = 0* ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que *d(a, X)*$<\varepsilon$. Portanto, *a* é aderente quando para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \phi$. O conjunto formado por todos os pontos aderentes a *X* é chamado de fecho de *X* e denotamos por $\overline{X}$.

Exemplo 4.4. Se *X = [0,1)* então $1 \in \overline{X}$

Observação 4.4. Dizer que $a \notin \overline{X}$ significa dizer que existe$\delta > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \phi$. E em qualquer subconjunto $X \subset M$ tem-se $X \subset \overline{X}$

Um subconjunto $X \subset M$ é dito denso em *M* quando se tem $\overline{X}$ = *M*, isto é, quando para cada bola aberta *B* em *M*, tem-se $B \cap X \neq \phi$

Exemplo 4.5. .$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.

Definição 4.4. Dizemos que $X \subset M$ é fechado quando seu complementar M - X é aberto.

Proposição 4.7. Um subconjunto $X \subset M$ é fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$

Demonstração. Em primeiro lugar, suponhamos que X é fechado. Se $a \notin X$ temos que $a \in M - X$, e como M - X é aberto temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \subset M - X$, logo $B(a;\varepsilon) \cap X = \phi$ de onde resulta que $a \notin \overline{X}$. Já sabemos que $X \subset \overline{X}$, logo podemos concluímos que $X = \overline{X}$

Reciprocamente, suponhamos $X = \overline{X}$. Se $a \in M - X$ então $a \notin X$ de onde resulta que $a \notin \overline{X}$. Logo, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \cap X = \phi$, onde temos que $B(a;\varepsilon) \subset M - X$, logo M - X é aberto e consequentemente X é fechado.

Observação 4.5. O fato de um subconjunto $X \subset M$ não ser fechado não significa que ele é aberto, como é o caso de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ que não é nem aberto e nem fechado.

Proposição 4.8. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, a_2, \ldots a_n\} \subset M$ é fechado.

Demonstração. Tomando $a \in M - F$, temos que *d(a, F) =ε = min{d(a,a₁),..., d(a,aₙ)}, }*, logo temos que *d(a, F) > 0* e *B(a; ε)*$\subset M - F$ de onde resulta que *M - F* é aberto, e assim temos que *F* é fechado.

Proposição 4.9. Seja *F* a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico *M*, então:

1. $\phi, M \in F$;

2. Se $H_1, H_2 \in F$, então $H_1 \cup H_2 \in F$

3. Se (F_i) é uma família qualquer de conjuntos fechados de *M* então $\cap F_i \subset F$

Demonstração.

1. Já vimos no teorema 4.2 item 1 que ϕ e *M* são abertos em *M* , logo seus respectivos complementos *M* e ϕ são fechados.

2. Os conjuntos $X_1 = M - H_1$ e $X_2 = M - H_2$ são abertos, logo pelo item do teorema 4.2 temos que $X_1 \cap X_2 = M - (H_1 \cap H_2)$ é aberto e portanto temos que $H_1 \cup H_2$ é fechado.

3. Como cada F_i é fechado, então cada complemento $M - F_i$ é aberto, logo pelo item 3 do teorema 4.2 temos que $\cup(M - F_i)$ é aberto e portanto $\cap F_i$ é fechado.

Observação 4.6. De acordo com o item 2 do teorema anterior, podemos concluir que qualquer união finita de fechados é, também, fechado.

Observação 4.7. A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Com efeito, todo conjunto (fechado ou não) é a reunião de seus pontos, que por sua vez, são conjuntos fechados.

Definição 4.5. Seja M um espaço métrico, e X um subconjunto de M. Dizemos que $a \in M$ é um ponto de acumulação de X quando toda bola aberta de centro a contem

algum ponto $x \in X$ diferente do próprio a.

Ao conjunto formado por todos os pontos de acumulação de X denotamos por X' e chamamos de derivado de X, Portanto, temos que $a \in X'$ se, e somente se, $a \in \overline{X-a}$.

Proposição 4.12. Se X é um subconjunto de um espaço métrico M, então tem-se $\overline{X} = X \cup X'$

Demonstração. Provaremos primeiro que $\overline{X} = X \cup X'$. Seja $a \in X$, então para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \phi$. Se $a \in X$ está provado. Por outro lado, se $a \notin X$ então a é claramente um ponto de acumulação de X. Logo, está provada a inclusão.

A inclusão $X \cup X' \subset \overline{X}$ é óbvia. Logo, concluímos que $\overline{X} = X \cup X'$.

5 LIMITES

5.1 Limites e sequências

Definição 5.1. Uma seqüência num espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ que associa a cada natural n um elemento $x_n \in M$ chamado n-ésimo termo da sequência.

Denotaremos tal sequência por (x_n) ou $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ou ainda por $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$. O conjunto dos termos da sequência (x_n) é indicado por $\{ x_1, x_2, ..., x_n\}$ ou $\{ x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ou ainda por $x(\mathbb{N})$.

Exemplo 5.1. Se definirmos x: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $x_n = (-1)^n$..obtemos a sequência $(-1,1,-1,1,....)$. Se definirmos $x_n = a \forall n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência $(a,a,a,...,)$ chamada de seqüência constante.

Observação 5.1. Se a aplicação x: $\mathbb{N} \rightarrow M$ for injetiva, então obviamente os termos $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ são todos distintos.

Definição 5.2. Considere uma sequência x: $\mathbb{N} \rightarrow M$ dada por x_n chamamos de subsequência de (x_n) a uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{ n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. Representa-se uma subsequência por $x' = (x_n)_{n\in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ...)$. Observe que essa notação torna toda subsequência em uma sequência.

Exemplo 5.2. Considere a sequência $(2, 2^2, 2^3, ... 2^n, ...) = (2,4,8,...2^n,...) = (x_n)$. Observe que $(2,16, ..., 4^k , ...)$ é uma subsequência de (x_n).

Definição 5.3. Uma sequência (x_n) de um espaço métrico M é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $k > 0$ tal que $d(x_n, x_m) \leq k$ para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$

Definição 5.4. Seja (x_n) uma sequência de um espaço métrico M, Dizemos que $a \in M$ é limite de (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \varepsilon$. E nesse caso escrevemos $\lim X_n = a$ ou $(x_n) \to a$

Quando $(x_n) \to a$, dizemos que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M. Portanto, dizer que $\lim x_n = a$ significa afirmar que qualquer bola aberta de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de termos.

Observação 5.2. Em vista da definição, se $(x_n) \to a$, toda subsequência de $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$também converge para a.

Exemplo 5.3. Considere $\mathbb{R}$ munido da métrica usual, então a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dada por $x_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1, pois dado $\varepsilon > 0$ tomemos $n_0 \in N^*$ tal que $\frac{n}{n_0+1} < \varepsilon$ então $\forall n > n_0$ temos: $d(x_n, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$, de onde resulta que $d(x_n, 1) < \varepsilon$ e assim, temos que $(x_n) \to 1$

Observação 5.3. Toda sequência constante, isto é, do tipo $(a, a, a, \ldots a, \ldots)$ é convergente e $\lim (x_n) = a$.

Proposição 5.1. Se $a \in M$ é um ponto isolado e $(x_n) \to a$ então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ tem-se $(x_n) = a$.

Demonstração. Como $a \in M$ é isolado então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B'(a;\varepsilon) = \{a\}$. Como $(x_n) \to a$ então para esse $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que $n > n_o$ implica $d(x_n, a) < \varepsilon$, onde resulta que $(x_n) = a$.

Observação 5.4. Um caso particular da proposição acima é que se M é discreto, então uma sequência (x_n) de pontos de M é convergente se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n0+1} = x_{n0+2} = \ldots$

Observação 5.5. Seja (x_n) uma sequência de pontos e M: Dizer que $(x_n) \to a \in M$ é dizer que dada qualquer bola aberta B de centro a tem-se $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Proposição 5.2. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente de pontos de um espaço métrico M com $(x_n) \to a$. Logo, tomando $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in B(a;1)$. Portanto todos os pontos da sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ pertencem a união $B(a;1) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado.

Exemplo 5.4. A sequência (1,2,1,2,1,2, ...) é limitada, porém não converge. Isso mostra que não vale a recíproca do teorema anterior.

Proposição 5.3. Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M. Então é único o limite dessa sequência.

Demonstração. Suponhamos que $(x_n) \to a$ e $(x_n) \to b$ com $b \neq a$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{d(b;a)}{2}$

existem $n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ tais que

$$n > n_1 \text{ implica } d(x_n,a) < \varepsilon \text{ e } n > n_2 \text{ implica } d(x_n,b) < \varepsilon$$

Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, temos que $n>n_0$ implica $d(x_n,a) < \varepsilon$ e $d(x_n,a) < \varepsilon$. Daí para todo $n>n_0$ tem-se $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \dfrac{2d(a,b)}{2} = d(a,b)$. Contradição.

Proposição 5.4. Se $(x_n) \to a$ então toda subsequência de (x_n) também converge para a.

Demonstração .. Considere a seqüência $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e uma subsequência de (x_n) dada por $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots)$. Por hipótese $(x_n) \to a$ daí para todo $\varepsilon > 0$ existe $n' \in \mathrm{N}$ tal que $n > n'$ implica $d(a, x_n) < \varepsilon$. Mas, como cada $n_i \in \mathrm{N}$ e $n_1 < n_2 < \ldots$ então existe $n_j > n'$ e portanto $\forall\, n_i \leq n_j$ vale a relação $d(x_{ni},a) < \varepsilon$

Corolário 5.1. Se $(x_n) \to a$ então, para todo $p \in \mathrm{N}$ tem-se $(x_{n+p}) \to a$

Demonstração. (x_{n+p}) é uma subsequência de (x_n), logo converge para a

Corolário 5.2. Se $(x_n) \to a \neq b$ então existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \neq b$

Demonstração. Com efeito, em caso contrário os índices $n \in \mathrm{N}$ tais que $x_n = b$ formariam um conjunto infinito $\mathrm{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots\}$ e então a subsequência constante (x_{nk}) convergiria para $b \neq a$. Contradição.

Proposição 5.5. Um ponto $a \in M$ é limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grande.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se uma subsequência ($x_{n1}, x_{n2},..., x_{nk},...$) converge para a então, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_{nk} \in B(a,\varepsilon)$ Logo, toda bola aberta $B(a,\varepsilon)$ de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grandes, a saber, todos os índices $n_k k>k_0$

($\Leftarrow$)Suponhamos que toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grande, então a bola $B(a,1)$ contém um termo x_{n1}, a bola $B(a,1/2)$ obtém um termo x_{n2} com índice $n_2 > n_1$ e assim por diante: para todo $k \in \mathbb{N}$, .

podemos achar $x_{nk} \in B(a,1/k)$ com $n_k > n_{k-1} > ... > n_1$.Isto define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... n_k < ...\}$ e uma subsequência (x_{nk}) tal que $d(x_{nk}, a) < 1/k \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{nk} = a$.

Observação 5.6. Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para pontos diferentes, então (x_n) é divergente.

Consideremos o subespaço P = $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{5},...,\frac{1}{n},...\}$ cujo único ponto isolado é o 0 (zero). Dada (x_n) de pontos isolados num espaço métrico M e um ponto $a \in M$ definimos a aplicação $f: P \to M$ dada por $P(\frac{1}{n}) = x_{n1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(0) = a$

Lema 5.1. Tem-se $\lim x_n = a$ se, e somente se, $f: P \to M$ é contínua.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Já vimos na proposição (??) do capítulo 5, $x \in \mathrm{P}$ é isolado, então f é contínua em x. Como o único ponto não isolado de P é o 0 (zero), então basta provar que f é contínua nesse ponto. Por hipótese $x_n \to a$, isto é, para todo ε > 0 existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon$. Pomos, então $\delta = \frac{1}{n_0}$, assim vemos que

$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \delta \Rightarrow \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow d(\frac{1}{n},0) < \delta \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon$,isto é, *f* é contínua em 0 (zero).

($\Rightarrow$) *f* é contínua em 0 (zero), logo dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon$. Tomando então $n_0 > \frac{1}{\delta}$ e vemos que se $n > n_o$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to a.$

5.2 - Seqüência de números reais

No espaço $\mathbb{R}$, tem muito interesse as chamadas sequências de Cauchy que compreende os seguintes tipos, a saber: crescentes, decrescentes, não decrescente e não- crescentes.

Dizemos que uma seqüência (x_n) é crescente (decrescente) quando $x_n < x_{n+1}(x_n > x_{n+1})$. No caso de ser $x_n \leq x_{n+1}(x_n \geq x_{n+1})$ dizemos que a seqüência (x_n) é não-decrescente (não-crescente).

Proposição 5.7. Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.

Demonstração. Suponhamos que a sequência (x_n) de números reais seja monótona não- decrescente. Sendo (x_n) limitada, tomemos $a = sup\ \{(x_n)\}$ Vamos mostrar que $(x_n) \to a$. De fato, para todo $\varepsilon > 0$ temos que $a - \varepsilon$ é não é cota superior de $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$, logo existe $n_o \in \mathrm{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n0} \leq a$. Então $n > n_0$ implica $a - \varepsilon x_{no} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$, portanto temos que $(x_n) \to a$

Corolário 5.3. Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subseqüência limitada.

Demonstração. Basta mostrar que se (x_n) possui uma subseqüência $(x_{n1}, x_{n2},..., x_{nk},...)$ limitada então (x_n) é limitada. Suponhamos que (x_n) seja monótona não-decrescente. Seja $x_{nk} \leq c$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ podemos obter k tal que $n < x_k$ e a partir daí temos que: $x_n \leq x_{nk} \leq c$ e como (x_n) é limitada inferiormente por x_1 temos que, $x_1 \leq x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto (x_n) é limitada.

Exemplo 5.5. Se $0 \leq a < 1$ então $lim\ a^n = 0$, pois nesse caso temos que $a \geq a^2 \geq a^3 \geq ... \geq a^n \geq ...$, isto é, a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona limitada e pela proposição 5 acima existe $c = lim\ a^n$. Porém vemos que $c = lim\ a^n = lim\ a^{n+1} = lim\ aa^n = a\ lim\ a^n = ac$, logo $c - ac = 0$, de onde resulta que $c(1 - c) = 0$ e como $a < 1$ temos que $1 - a > 0$ e portanto $c = 0$

5.3 Convergência e Topologia

Proposição 5.8. Sejam M, N espaços métricos. Afim de que uma aplicação $f: M \to N$ seja contínua no ponto $a \in \mathbb{M}$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in \mathbb{M}$ com $x_n \to a$ se tenha $f(x_n) \to f(a)$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ f é contínua em a, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, como também temos $x_n \to a$, então para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

$\Leftarrow$ Suponha agora que para toda seqüência $x_n \to a$ com $x_n \in \mathbb{M}$ se tenha $f(x_n) \to f(a)$ e suponhamos por absurdo que f não seja contínua em $a \in \mathbb{M}$, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{M}$ pode se obter $x_n \in \mathbb{M}$ com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$, isto é, existiria uma seqüência $(x_n) \in \mathbb{M}$ com $x_n \to a$ sem que $f(x_n) \to f(a)$ o que é absurdo.

Observação 5.7. A proposição anterior é particularmente interessante, em muitos casos para justificar a não continuidade de uma função num, dado ponto como, é o caso do exemplo que segue:

Corolário 5.4. Dada $f: M \to N$ se para toda seqüência de pontos (x_n) convergente em M, isto é $x_n \to a$, tivermos $(f(x_n))$ convergente então f é contínua em a.

Demonstração. Considerando o teorema acima, basta mostrar que $x_n \to a$ implica $f(x_n) \to fa$. De fato, se $x_n \to a$ a seqüência $(z_n) = (x_1, a, x_2, a,)$ converge para a, logo $f(z_n) = (f(x_1), (f(a), f(x_2), (f(a)\ldots)$ é convergente e obviamente $f(z_n) \to f(a)$ logo sua subseqüência $f(x_n) \to (f(a)$

Portanto, podemos afirmar que uma aplicação $f: M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem $((f(x_n))$ de toda seqüência convergente (x_n) em M é uma seqüência convergente em N.

Exemplo 5.6. A função $f: R \to R$ definida por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$ não é contínua num ponto qualquer $a \in \mathbb{Q}$ de fato, a seqüência $(a + \frac{\sqrt{a}}{2}, a + \frac{\sqrt{a}}{3}, a + \frac{\sqrt{a}}{4}, \ldots)$ é uma seqüência de pontos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que converge para a. No entanto, a seqüência de imagens $f(a + \frac{\sqrt{a}}{2}), f(a + \frac{\sqrt{a}}{3}), f(a + \frac{\sqrt{a}}{4}), \ldots) = 0, 0, 0, \ldots$ converge, obviamente pra zero e não para $f(0) = 1$. De maneira análoga verifica-se que f é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Proposição 5.9. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M afim de que se tenha $a \in \overline{X}$ em M, é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de ponto $x_n \in X$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $a \in \overline{X}$, isto significa que para cada $n \in \mathrm{N}$ pode se obter $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap X$, isto nos dá uma seqüência de pontos $x_n \in X$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, isto é, $x_n \to a$.

($\Leftarrow$)Suponhamos agora que $x_n \to a$ com $x_n \in X$ isto é para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathrm{N}$ $\Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e, portanto, $a \in \overline{X}$.

Proposição 5.10. Um subconjunto A de M é aberto em M se, e somente se, cumpre a seguinte condição: $(x_n) \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração. ($\Rightarrow$) A é aberto em M e $x_n \to a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que: $B(a, \varepsilon) \subset A$ existe também $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon) \subset A$.

($\Leftarrow$) Suponha agora, que $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande, Vamos mostrar que A é aberto em M. De fato, dada uma seqüência de pontos $x_n \in M - A$ com $x_n \to b$ então não se pode ter $b \in A \Rightarrow b \in M - A$. Logo pelo corolário 5.5 $M - A$ é fechado e consequentemente A é aberto.

Proposição 5.11. A fim de que a seja ponto de acumulação de um subconjunto $X \subset M$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos distintos $x_n \in X$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $a \in X'$ significa que para cada $n \in \mathrm{N}$ pode se obter uma infinidade de pontos $x_n \in X$.com $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$.Podemos então escolhermos sucessivamente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$de tal forma que $x_n \in X$.e $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$mas $m \neq n$ $\Rightarrow x_m \neq x_n$, e nesse caso $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ isto é, $\lim x_n = a$.

($\Leftarrow$) Se a é limite de uma seqüência de pontos distintos $x_n \in X$ então a, é videntemente pontos de acumulação de X, isto é, $a \in X'$.

6 CONTINUIDADE UNIFORME

Definição 6.1. Seja *M* e *N* espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se uniformemente contínua, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M, d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente. Pode ocorrer que cada ponto $a \in M$ seja centro de uma bola *B*, tal que *f/B* seja uniformemente contínua e, no entanto, a aplicação $f : M \to N$ não seja uniformemente contínua. Intuitivamente isso significa que estão "arbitrariamente próximos" entre si dois valores de *f* correspondentes a dois pontos de *M* "suficientemente próximos" entre si.

É claro que toda função uniformemente contínua é também contínua. Porém a recíproca disso não vale como veremos.

Exemplo 6.1. Toda aplicação lipschitziana $f : M \to N$ é uniformemente contínua. De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de *f* então $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$ para todo $x, y \in M$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, e daí:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq c.\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

Exemplo 6.2. f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomemos $p > 0$ e consideremos uma bola $B = B(p, \lambda) \subset \mathbb{R}_+ - \{0\}$. Supondo $p - \lambda = a > 0$ teremos, para todo $x, y \in B: |f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|x||y|} \leq \frac{1}{a^2}|y-x|$, isto é, *f/B* é lipschitziana e consequentemente contínua. Mostraremos que *f* não é uniformemente contínua:

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $m, n \in \mathrm{N}$ tais que $\frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon$ façamos $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{n+1}$. Então, $|x-y| = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| < \delta$,

no entanto, $|f(y)-f(x)| = \left|(n^2+2+\frac{1}{n^2}\right| = 2+\frac{1}{n^2} > \varepsilon$

Definição 6.2. (Homeomorfismo Uniforme). Uma bijeção *f : M →N* chama-se um Homeomorfismo uniforme quando é uniformemente contínua e sua inversa f^{-1} *: N →M* também o é.

Proposição 6.1. Se *f : M →N* e *g : N →P* são uniformemente continuas, então *g* *∘f : M →P* também é uniformemente contínua.

Demonstração. Por hipótese, *f* e *g* são uniformemente contínuas, logo

i $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tal que, para todo $y_1, y_2 \in \mathrm{N}: d(y_1, y_2) < \lambda \Rightarrow d(g(y_1)g(y_2)) < \varepsilon$.

ii $\forall \lambda > 0, \exists \delta > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in \mathrm{N}: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(g(x_1)g(x_2)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x_1)), g(f(x_2))) < \varepsilon$.

Observação 6.1. Sejam *M* um espaço métrico e *E* um espaço vetorial formado. Se *f, g* : *M →E* são uniformemente contínuas o mesmo ocorre com sua soma *f + g: M→E* como se vê facilmente. Por outro lado, se ,f, g : $M \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas seu produto , $f \cdot g$: $M \to E$ pode não ser, a menos que f e g sejam limitadas.

Definição 6.3. (Métricas uniformemente equivalente). Dadas as métricas d_1 e d_2 no mesmo conjunto M escrevemos, $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.

Duas métricas d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes em M quando a aplicação i_n: $M_1 \to M_2$ for homeomorfismo uniforme.

Observação 6.2. Se d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes em M, então as aplicações uniformemente contínuas definidas ou tomando valores em M são as mesmas, quer usemos d_1 , ou d_2.

Proposição 6.3. Sejam d_1 e d_2 métricas em M. Se existem constantes tais que $\alpha d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq \beta d(x,y)$ para $x, y \in M$ quaisquer, então as métricas d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes.

Demonstração. Com efeito, as aplicações identidade $i_{12} : M_1 \to M_2$ e $i_{21} : M_2 \to M_1$ são lipschitiziana , logo são informemente contínuas, isto é, a aplicação $i_{12} : M_1 \to M_2$ é um homeomorfismo uniforme e, portanto, d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes.

7 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Já vimos que se (x_n) é uma seqüência convergente de um espaço métrico M e $x_n \rightarrow a$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon/2$ e como, porém temos que $d(x_m, x_n) \leq d(x_n, p) + d(p, x_n)$ então $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Assim obtemos uma condição sobre os termos da seqüência na qual não intervém o limite a dessa seqüência intuitivamente, os termos dessas seqüência vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros à medida que cresce o índice n.

Definição 7.1. (Seqüência de Cauchy). Seja M um espaço métrico. Uma seqüência (x_n) de pontos de M é chamada **seqüência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Obviamente, se (x_n) é convergente então (x_n) é uma seqüência de Cauchy ,mas não vale a recíproca, isto é, nem toda seqüência de Cauchy é convergente como exprime o exemplo que segue.

Exemplo 7.1. Seja (x_n) uma seqüência convergente de números racionais tal que $x_n \rightarrow a$ com a irracional. Obviamente (x_n) é convergente em R e, com isso, (x_n) é uma seqüência de Cauchy em Q . Mas, evidentemente, (x_n) não é convergente em Q.

Proposição 7.1. Toda seqüência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, logo o conjunto $\{x_{n0+1}, x_{n0+2}, \ldots\}$ é limitado com diâmetro $\leq \varepsilon$ segue que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n}\} \cup \{x_{n0+1}, x_{n_0}+2, \ldots\}$ é limitado.

Observação 7.1. Não vale a recíproca da proposição 7.1 acima, isto é, nem toda seqüência limitada é de Cauchy. Por exemplo, considere a seqüência (x_n) $=(0,1,0,1,\ldots)$ na reta. Observe que tal seqüência é limitada, mas se tomarmos $\varepsilon = 1/2$

temos que: $d(x_m, x_n) = 1 > \varepsilon$ sempre que m for par e n ímpar (ou vice-versa). Portanto, (x_n) não é de Cauchy.

Observação 7.2. Dada uma seqüência (x_n) de um espaço métrico M, escrevemos para cada $n \in$ N, $X_n = \{x_n, x_{n+1},...\}$ Temos assim: $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ... X_n \supset ...$Como $X_1 = \{x_1, x_2,..., x_{n-1}\} \cup X_n$ então um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais o forem. E se acontecer isso temos que: $diam\ (x_1) \geq diam\ (x_2) \geq ...$ e portanto, existe sempre $\lim\limits_{n \to \infty}$ diam (x_n) . Afim de que (x_n) seja uma seqüência de Cauchy e necessário e suficiente que se tenha $\lim\limits_{n \to \infty}$ diam $(x_n) = 0$.

Proposição 7 .2. Uma seqüência de Cauchy que possua uma subseqüência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subseqüência).

Demonstração. Por hipótese, (x_n) em M é uma seqüência de Cauchy e possua uma subseqüência convergente $(x_{nk}) \to a \in M$ (isto é, (x_{nk}) é convergente). Vamos mostrar que $x_n \to a$. De fato, nessas condições dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in$ N tal que $x_k > p \Rightarrow d(x_k, a) < \varepsilon / 2$. Existe também $q \in$ N tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon / 2$. Seja $n_0 = max\ \{p,q\}$, então: para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e, então $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{nk}) + d(x_{n'k}, a) \leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon \leq (d(x_n, a) < \varepsilon$, e portanto $x_n \to a$

Proposição 7.3. Toda aplicação uniformemente contínua transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

Demonstração. Sejam $f: M \to N$ uniformemente contínua e (x_n) uma seqüência de Cauchy em M. Vamos mostrar que $(f(x_n))$ é uma seqüência de Cauchy em N. De fato, por hipótese $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$ tem-se $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como (x_n) é de Cauchy então para todo $\delta > 0 \exists n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ e, portanto, $(f(x_n))$ é uma seqüência de Cauchy.

Exemplo 7.2. Se $f : M \to N$ transforma seqüência de Cauchy em seqüência de Cauchy então f é contínua, porém f pode não ser uniformemente contínua, pois suponhamos que f transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy, e considere um ponto $a \in M$. Se $x_n \to a$ então (x_n) é Cauchy, logo a seqüência

$(x_1,a,x_2,a,...)$ é de Cauchy em M e portanto, $(f(x_1),f(a),f(x_2),f(a),...)$ é de Cauchy em N com uma subseqüência $(f(a),,f(a),...)$ convergindo para $f(a)$ pela proposição (7.2) $(x_1,a,x_2,a,...)$converge para $f(a)$ portanto, $f(x_n) \to f(a)$ e pela proposição (5.8) f é contínua. Por outro lado, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua, mas se (x_n) é uma seqüência de Cauchy ,então existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$. Como $f/[-c, c]$ é lipschitiziana, segue da proposição 7.3 que $f(x_n)$ é de Cauchy.

Proposição 7.4. Considerando o espaço $P = \{1, 1/2, 1/3, ...,1/n,...\}$ com a métrica induzida pela reta, é uma aplicação $f: P \to M$ então(x_n) em M é uma seqüência de Cauchy, se e somente se, é uniformemente contínua.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se (x_n) é de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que$m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tomamos $\delta = 1(n_0+1)^2$. A menor distância não-nula de um qualquer de Pa um ponto do conjunto $\{1, 1/2, 1/3, ...,1/n,...\}$ é $\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{n_0(n_0+1)} > \frac{1}{(n_0+1)^2} = \delta$ logo, $0 < d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) < \delta \Rightarrow m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e, Portanto, fé uniformemente contínua.

($\Leftarrow$) Se $f: P \to M$ é uniformemente contínua como $(\frac{1}{n})$ é ele Cauchy em P(pois é convergente em $\mathbb{R}$) então pela proposição 7.3 temos que $(x_n) = (f(x_n))$é de Cauchy.

Definição 7.2. (Espaços Métricos Completos). Dizemos que um espaço métrico M é completo quando toda seqüência de Cauchy em M é convergente.

Assim podemos dizer, já usando a linguagem da definição acima, que o espaço $\mathbb{Q}$ não é completo ,em virtude ao exposto no exemplo 4.0.4 deste capítulo.

Exemplo 7.4. Considere o espaço discreto *{1, 1/2, 1/3, ...,1/n,...}* (métrica induzida), onde (x_n) em *P* dada por $(x_n)=1/n$, é de Cauchy como vimos na proposição 7.4 e, no entanto (x_n) não converge em *P* e portanto, *P* não é completo.

Definição 7.3. (Métrica Uniformemente Discreta). Dizemos que uma métrica *d* em um espaço *M* é uniformemente discreta quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in M, d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$. E nesse caso dizemos que *M* é uniformemente discreto.

Proposição 7.5. Todo espaço métrico *M* uniformemente discreto é completo.

Demonstração. Sendo *M* uniformemente discreto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in M, e \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y.$. Como (x_n) é de Cauchy em *M* então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n$ isto é, constante a partir de um certo. índice (a saber, n_0) logo,(x_n) é convergente.

Pelo que vimos até aqui, podemos observar que, um mesmo espaço métrico *M* pode ser completo em relação a uma métrica,e não completo em relação a outra métrica, como é o caso do espaço *P{1, 1/2, 1/3, ...,1/n,...}* munido primeiro da métrica zero - um e depois da métrica usual da reta. Isso mostra que um espaço métrico completo pode ser homeomorfismo a um espaço métrico não-completo.

Observação 7.4. Segue imediatamente da proposição 7.3 que se *f: M→N* é um homeomorfismo uniforme, então *M* é completo se, e somente se, *N* o é.

Proposição 7.6. A reta é um espaço métrico completo

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo para $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ temos $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ... X_n \supset ...$ com X_n limitado para todo n (vide proposição (7.1). Seja $a_n = \inf X_n (n=1, 2, ...)$ então $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n ... \leq b = \sup X_1$, logo pela proposição (5.6) existe $a = \lim a_n$. Vamos mostrar que $\lim x_n = a$, para isso basta mostrar que a é limite de uma subseqüência de (x_n)(vide proposição (7.2)). Ora, sendo $a = \lim a_n$, então existe $m > n_1$ tal que $a_m \in B(a,\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon \leq x_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow x_n \in B(a,\varepsilon)$, isto é, toda bola $B(a,\varepsilon)$ contém termos x_n, com índices n arbitrariamente grande logo a é limite de uma subseqüência de (x_n).

Proposição 7.7. Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $F \subset M$ fechado com M completo. Dado uma sequência de Cauchy (x_n) em F, então $(x_n). \to a \in M$ o que implica que a é aderente a F, e como F é fechado temos que $a \in F$, isto é, (x_n) é convergente em F, logo Fé completo.

$(\Leftarrow)$Se $M \subset N$ é um subespaço completo, devemos mostrar que todo ponto aderente a M também pertence a M. Dada uma seqüência de pontos $(x_n) \in M$ com $(x_n). \to a \in N$ então (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como M é completo, existe $b \in M$ tal que $(x_n). \to b$. Pela unicidade do limite tem-se $a = b \Rightarrow a \in M$ e, portanto, M é fechado.

Proposição 7.8. Sejam M, N espaços métricos. Então M x N é completo se, e somente se, M e N são completos.

Demonstração. É claro que a métrica a ser considerada sobre M x N é qualquer das usuais, pois métricas uniformemente equivalentes.

Demonstração. ($\Leftarrow$)Suponhamos que M e N são completos. Dada uma seqüência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em M e N respectivamente. Logo, existem $\lim x_n = a \in M$ e $\lim y_n = b \in N$. Pondo $c = (a, b) \in M \times N$, temos $\lim z_n = c$. Assim $M \times N$ é completo.

($\Rightarrow$)Suponhamos que M e N são espaços completos. Se (x_n, y_n) é uma seqüência de Cauchy no espaço $M \times N$, então (x_n) (y_n) são seqüências de Cauchy em M e N, respectivamente. Como M e N são completos, então (x_n) (y_n) são convergentes, isto é, existem $a \in M$ e $b \in N$ tal que $(x_n) \to a$ e $(y_n) \to b$ e, portanto, $(x_n, y_n) \to (a,b)$.

Exemplo 7.5. A generalização desta proposição para um produto $M = M_1 \times M \times M_2 \times \ldots M_x$ é óbvia. Em particular, o espaço $\mathbb{R}^n$ é completo.

7.1 O Teorema de Baire

Destacaremos agora uma classe de conjuntos que sejam num certo sentido, insignificantes diante do espaço inteiro.

Definição 7.4. (Conjunto magro). Um conjunto X de um espaço métrico *M* diz-se magro em *M* quando é uma reunião enumerável $X = \cup X_n$ tal que para cada *n*, tem-se int $\operatorname{int}\overline{Xn} =$. Ø.

Para que X seja magro em *M* é necessário e suficiente que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde $F_1, F_2 ..., F_n, ...$são fechados com interior vazio.

A noção de conjuntos magros desempenha em topologia papel semelhante ao da noção e "conjunto de medida nula" em análise. As propriedades seguintes são imediatas:

a) A reunião de uma família enumerável de subconjuntos magros em *M* é subconjunto magro em *M*.

b) Se *X* é magro em *M* e *Y* é magro em *X*, então *Y* é magro em *M*.

Exemplo 7.6. $\mathbb{Q}_+$ é magro em $\mathbb{Q}$, pois é a reunião enumerável de seus pontos, além disso, se $r \in \mathbb{Q}_+$ temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r' \in \mathbb{Q}_+$ com $r' \neq r$ tal que $r' \in B$ isto é $B(r, \varepsilon) \not\subset \{r\}$. Em outras palavras, cada ponto $r \in \mathbb{Q}_+$ tem interior vazio em $\mathbb{Q}$ (isso mostra que $\mathbb{Q}_+$ é magro em $\mathbb{Q}$). Observe, no entanto, que $\mathbb{Q}_+$ não tem interior vazio em $\mathbb{Q}$. Isso mostra que nem todo subconjunto magro $X \subset M$ tem interior vazio.

Exemplo 7.7. Um ponto num espaço métrico *M* tem interior vazio se, e somente se, nenhum dos seus pontos é isolado, pois $A \in M$ então *int{a}* = Ø. $\Leftrightarrow a \notin \operatorname{int}\{a\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ tem-se $B(a, \varepsilon) \not\subset \{a\} \Leftrightarrow a$ não é isolado.

Exemplo 7.8. A fronteira de todo subconjunto aberto $X \subset M$ é um subconjunto fechado com interior vazio e, portanto, magro em *M*. Com efeito, se $x \in \partial(X)$ então em qualquer vizinhança de *x* existe pelo menos um elemento que pertença a *X*. Como *X* é aberto temos que $X \cap \partial(X) = \emptyset$, logo para todo $\varepsilon > 0$ a bola $B(x,\varepsilon) \not\subset \partial(X)$ e, portanto $\partial(X)$ tem interior vazio. Como $\partial(X) = \partial(M - X)$ e $M - X$ é fechado então a fronteira de um conjunto fechado também tem interior vazio e portanto também é um conjunto magro em *M*.

Observação 7.5. Segue do exemplo 7.7 acima que um conjunto enumerável $X \subset M$ é magro se, e somente se, nenhum dos seus pontos é isolado. Em particular, $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$.

Observação 7.6. Se $X \subset M$ não é aberto e nem fechado, sua fronteira pode não ter interior vazio. Por exemplo, $\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Observação 7.7. Sabemos que $int\, X = \emptyset$ em $M \Leftrightarrow M - X$ é denso em *M*. Segue que um subconjunto $F \subset M$ é um fechado com interior vazio se, e somente se, seu complementar *M - F* é aberto denso em *M*. Portanto, $int\,\overline{X} = \emptyset \Leftrightarrow X$ está contido num fechado com interior vazio $\Leftrightarrow M - X$ contém um aberto denso $\Leftrightarrow \operatorname{int}(M - X)$ é denso.

Proposição 7.9. Um espaço métrico *M* é completo se, e somente se, toda seqüência

decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim\limits_{n\to\infty} diamF_n = 0$ existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que *M* seja completo e que seja nos dada uma seqüência (F_n) como acima, para cada *n*, escolhamos $x_n \in F_n$. Isto define uma seqüência (x_n) em *M* tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{no}$. Com $lim\ diamF_n = 0$ então para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $diamF_{n0} < \varepsilon$. Então $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e portanto, (x_n) é uma seqüência de Cauchy e como M é completo, (x_n) é convergente, isto é, existe $a \in M$ tal que $x_n \to a$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_p$ para todo $n \geq p$. Ora, $a = \lim x_n \in F_p$, para todo p o que implica que $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Se existisse $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ com $b \neq a$ então $d(a,b) \leq diamF_n$ para todo n, o que é absurdo, logo $\{a\} a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

$(\Leftarrow)$Por hipótese, a interseção de toda seqüência decrescente de fechados não-vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M. Vamos mostrar que M é completo. Para isto, tomemos uma seqüência (x_n) de Cauchy em M. Para todo n tomamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ então $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ... X_n \supset ...$ e, por conseguinte $(\overline{X}_n)$ é uma seqüência decrescente de fechados não-vazios. Além disso, temos $0 = \lim_{n \to \infty} diam\overline{X}$ (vide observação do capítulo 7). Logo $\exists\ a \in M$ tal que $\cap \overline{X}_n = \{a\}$ como $a \in \overline{X}_n$ para todo n, segue que qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com índices arbitrariamente grandes logo a é limite de uma subseqüência de (x_n) e pela proposição (7.2), $x_n \to a$.

Teorema 7.1 (TEOREMA DE BAIRE). Seja M um espaço métrico completo, Todo conjunto magro em M tem interior vazio. Equivalentemente toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso de M.

Demonstração. Provaremos a segunda dessas afirmações. Sejam então $A_1, A_2, ... A_n, ...$ abertos tal que A_n é denso em M para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M. Para isto basta mostrar que toda bola B em M contém algum ponto de A. Sendo A aberto e denso em M podemos garantir que $B_1 \cap A_1$ é aberto c não-vazio, logo contém uma bola aberta B_2 que podemos supor tão pequena que seu raio não exceda ½ é que se tenha, ainda $\overline{B}_2 \subset B_1 \cap A_1$. Por sua vez, A_2 sendo aberto e denso podemos garantir que $B_2 \cap A_2$ é aberto e não vazio. Logo, $B_2 \cap A_2$ contém uma bola aberta B_3 de raio inferior a 1/3 com $\overline{B}_3 \subset B_2 \cap A_2$. Prosseguindo desta maneira, obtemos uma seqüência decrescente $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \ldots \supset \overline{B}_n \supset \ldots$ de fechados com $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$ e obviamente $\lim\limits_{n\to\infty} diam\overline{B}_n = 0$. Em particular, $a \in B$. Como $B_{n+1} \subset B_n \cap A_1$, então $a \in A_n$ para todo n e, portanto, $a \in B_1 \cap A$.

REFERÊNCIAS

[1] DOMINGUES, Hygino H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia. São Paulo: Atual, 1982.

[2] HÓNIG, Chaim Samuel. Aplicações da Topologia à Análise. Rio de Janeiro: IMPA-CNPq, 1976. (Projeto Euclides).

[3] LIMA, E. L. Curso de Análise v.1. 11. ed. Rio ele Janeiro: IMPA, 2004. (Projeto Euclides).

[4] LIMA, E. L. Elementos de Topologia Geral. 2.ed. Rio ele Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976