UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO MARANHÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

ARIONALDO CRISPIM DE ALMEIDA
VALNICE SÁ DE BRITO ROCHA

GENERALIZANDO A FORMULA DE BÁSKARA PARA EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COM COEFICIENTES MATRICIAIS

Santa Inês - MA
2009

ARIONALDO CRISPIM DE ALMEIDA
VANILCE SÁ DE BRITO ROCHA

GENERALIZANDO A FORMULA DE BÁSKARA PARA EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COM COEFICIENTES MATRICIAIS

Monografia apresentada ao departamento de Matemática e Física da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Orientador: Fermim S. V. Bazán

Santa Inês - MA
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Generalizando a Fórmula de Báskara para Equações Quadráticas Matriciais"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 24/07/2009

Dr. Fermin S. V. Bazán (CFM/UFSC – Orientador) ____________________

Dr. Daniel Norberto Kozakevich (CFM/UFSC – Examinador) ____________________

Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Examinador) ____________________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009.

ARIONALDO CRISPIM DE ALMEIDA
VANILCE SÁ DE BRITO ROCHA

GENERALIZANDO A FORMULA DE BÁSKARA PARA EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COM COEFICIENTES MATRICIAIS

Monografia apresentada ao departamento de Matemática e Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Aprovada em: ________ / _________ / _________.

BANCA EXAMINADORA

____
Dr. Fermín S. V. Bazán
(Orientador)

____
Dr. Daniel Norberto kozakevich
(Examinador)

____
Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

(Examinador)

Dedico este trabalho de conclusão de curso aos meus queridos pais Feliciano Liberato de Almeida e Neusa Crispim Liberato de Almeida, que me amaram incondicionalmente ao longo da vida. (in memoriam)

Dedico este trabalho aos meus filhos, meus pais e meu esposo que sempre me incentivaram a estudar.

AGRADECIMENTOS

A minha esposa Luziane, que está sempre ao meu lado, ajudando-me com seu amor e paixão.

Aos meus filhos que são a razão maior de minha vida.

Ao professor, Fermín S. V. Bazán, pela orientação 'Sui Generis' ao longo do nosso trabalho monográfico.

Aos meus amigos de curso.

Enfim, agradeço a Deus, aos meus irmãos e a todos que me ajudaram ao logo da vida.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Virtual do Maranhão

À Universidade Federal de Santa Catarina

Á coordenadora Maria Deuselene Macedo Coutinho da Universidade Virtual do Maranhão – pólo Santa Inês

Aos professores, especialmente ao prof. Dr. Fermín S. V. Bazán, nosso orientador, que com tanta presteza colaborou nesta monografia.

Aos meus amigos de curso, Antônio Batista, Carmem Edimê, Darcy Cristiana, com quem convivemos com muita alegria.

À meu esposo José Ribamar Rocha e aos meus filhos Delba Laissa , Layna Cristina e Paulo Ricardo .

À meus pais Cícero Brito e Iara Sá.

Á minha amiga Maria Leal, que nunca deixou – me desistir dos meus sonhos.

E finalmente agradeço àquele que se convenciona chamar Deus.

Para se fazer matemática, não precisamos enxergar, andar, ter braços ou mesmo corpo. Só precisamos ter espírito, vontade, perseverança e principalmente, convicção na mais bela estrutura lógica criada pelo homem [...].

Leonhard Euler

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 ABORDAGEM HISTÓRICA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU....................... 9

3 NOÇÕES BÁSICAS... 13

3.1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS 13

3.2 ALGUNS CONCEITOS DA ÁLGEBRA LINEAR 15

3.2.1 MATRIZES.. 15

3.2.1.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES.. 16

3.2.1.2 MATRIZES [Propriedades].. 17

3.2.1.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES.. 17

3.2.2 DETERMINANTES.. 19

3.2.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.. 20

3.2.3.1 CARACTERISTICA OU POSTO DE UMA MATRIZ...................................... 21

3.2.4 DEPENDÊNCIA LINEAR.. 23

3.2.4.1 PROPRIEDADES... 23

3.2.5 AUTOVALORES E AUTOVETORES 24

4 QUAÇÕES POLINOMIAIS MATRICIAIS... 30

4.1 MOTIVAÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.. 30

4.2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE POLINÔMIOS MATRICIAIS.................................. 33

5 EXISTÊNCIA E CONSTRUÇÃO DE SOLVENTES.. 37

5.1 A FÓRMULA DE BÁSKARA PARA EQUAÇÕES POLINOMIAIS MATRICIAIS QUADRÁTICA..37

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS... 52

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 54

1. INTRODUÇÃO

Está comprovado que os conceitos de Álgebra são indispensáveis para inúmeras pesquisas realizadas em diversas áreas da ciência.

O objetivo primordial deste trabalho de conclusão de curso é propiciar ao estudante de graduação, bem como ao leitor que tem interesse na área, a aquisição de conhecimentos sobre equações polinomiais matriciais.

O trabalho compreende quatro capítulos, sendo que o primeiro capítulo foi desenvolvido a partir de um estudo bibliográfico de alguns autores da área da História da Matemática para descrever aspectos históricos das equações, em especial as equações do segundo grau. A princípio apresentamos as contribuições dos babilônios para o desenvolvimento dessas equações. Em seguida, trazem-se as descobertas dos Árabes e Hindus, principalmente aquelas que contribuíram para deduzir a fórmula geral para a resolução da equação do segundo grau, dando ênfase a Bhaskara, que consegue unificar a solução das equações quadráticas pelo método de complemento de quadrado.

No segundo capítulo são tratados os conceitos básicos de Álgebra Linear, que são indispensáveis para a resolução de equações polinomiais matriciais.

O terceiro capítulo traz um estudo mais detalhado sobre o assunto, incluindo definições, observações, teoremas, corolários e a resolução de algumas equações polinomiais matriciais do primeiro e segundo grau. Lembrando ao leitor que serão abordadas apenas as equações polinomiais matriciais de primeiro e segundo grau, devido à dificuldade de se encontrar a solução de uma equação polinomial matricial de grau maior.

No quarto capítulo acontecem efetivamente as soluções das equações polinomiais quadráticas. Por último, nas considerações finais, apontamos as dificuldades encontradas, o que a experiência trouxe de novo e o questionamento a ser investigado em uma pesquisa futura.

2 ABORDAGEM HISTÓRICA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

As referências mais antigas sobre a resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau foram encontradas em textos babilônicos escritos há cerca de 4000 anos atrás. BOYER (1996) [2] enfatiza que no período babilônico muito textos de problemas mostram que os babilônios não tinham dificuldades na solução de equações quadráticas e que os egípcios trataram muito de equações lineares.

Os babilônios trabalhavam com equações para resolver problemas práticos, principalmente àqueles ligados à agricultura e divisão de terras. Cada problema era resolvido para cada caso particular e sua solução, que era uma espécie de "receita matemática", fornecia somente uma raiz positiva e não especificava nem sua fórmula geral (se houvesse), nem o modo como a solução tinha sido obtida. Assim, percebe-se que a busca pelas soluções relacionava-se às equações particulares para resolver problemas específicos. Os métodos estavam quase sempre ligados as idéias aritméticas, sem a preocupação de encontrar soluções gerais. Então, a noção de equação utilizada por esses povos, principalmente os egípcios, tinha essencialmente um caráter pragmático e intuitivo, tornando o desenvolvimento do problema muito demorado e exaustivo, como no seguinte exemplo:

Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?

(o que hoje se escreve $x^2 - x = 870$).

E a receita era: tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, (0,5 x 0,5 = 0,25) . Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém um quadrado $(870{,}25 = (29{,}5)^2)$ cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) o lado do quadrado procurado [7].

EVES, na obra Introdução à História da Matemática (2004) [6] comenta:

> "Por volta do ano 2000 a.C a aritmética babilônica já tinha evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Os babilônios passaram a resolver equações quadráticas pelo método de substituição ou pelo método de completar quadrados. Ainda enfatiza que a matemática babilônica refere-se a uma geometria de caráter puramente algébrico, com problemas expressos em terminologia geométrica, mas que não passam de problemas algébricos não triviais".

Na Grécia, as equações do segundo grau eram resolvidas por meio de construções geométricas e de forma dedutiva. A resolução baseava-se em manipulações geométricas. Desta forma, os gregos já imaginavam as equações de forma diferente dos babilônios e egípcios. Mas a busca pelas soluções ainda estava relacionada às equações particulares e não a métodos gerais.

Um dos processos de resolução de equação do segundo grau que se tem notícia, usado, por exemplo, na equação que hoje se escreve como $x^2 - 10x + 9 = 0$ era o seguinte: trace o segmento $AB = 10$. Por P, ponto médio de AB, levante o segmento perpendicular $PE = 3$ (igual à raiz quadrada de 9) e, com centro em E e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q. A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ.

Com efeito, por construção, a medida do segmento AQ será

$$\frac{10}{2}+\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\sqrt{9}\right)^2}$$

e corresponde à raiz 9 da equação [7].

Os árabes e os Hindus costumavam trabalhar tanto com equações que se originavam de problemas de ordem prática, como situações que incide em interpretações e manipulações geométricas. A noção de equação utilizada por eles tinha um caráter mais algébrico e uma concepção mais estrutural, pois passa a ser observado às características e propriedades definidas em várias equações e não mais em equações relacionadas a situações particulares. Como vimos nos babilônios.

Um dos principais nomes da época que contribui para a resolução de equações do segundo grau foi o matemático árabe al-khwarizmi com a obra */ilm al-jabr Wa al Muqabalah/* [2], que pode ser entendida como "restauração por transposição de termos de um lado da equação para outro". Foi uma das obras que mais trouxe contribuições para o estudo das equações.

Nesse livro aparecem pela primeira vez, regras para resolver equações de segundo graus a coeficientes numéricos, e pode-se afirmar que essas regras são semelhantes àquelas utilizadas hoje em dia. Aparecem, ainda, expressões muito presentes na resolução de equações: *al-jabr e al Muqabalah.*

Para resolver alguns tipos de equações al-khwarizimi utilizava duas operações fundamentais al-jabr e al muqabalah, que significam:

- al-jabr á operação que soma a ambos os membros da equação termos iguais;

- al muqabalah é a operação que reduz ou elimina termos iguais de ambos os membros da igualdade.

Observa-se na obra de al khwarizmi, que embora ele não dispusesse de uma linguagem simbólica, ele conseguiu elaborar um catálogo com as formas canônicas utilizando-se unicamente de linguagem natural e algumas figuras geométricas a fim de resolver qualquer tipo de equação quadrática. Logo, chega-se a conclusão que, antes dele já se resolvia problemas quadráticos com procedimentos característicos e, depois dele, qualquer problema quadrático.

Baseado na interpretação geométrica dados pelos gregos à expressão $(a+b)^2$, o matemático árabe al-khwarizmi, no século IX, estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações do segundo grau com uma incógnita.

Os matemáticos indianos tinham preferência em trabalhar com números nas operações aritméticas ou na resolução de equações, utilizando com freqüência os métodos da falsa posição ou de inversão, no qual se trabalha "de trás para frente", a partir dos dados do problema.

Grandes contribuições foram dadas à resolução de equações do segundo grau, por matemáticos hindus, como: Brahmagupta, Sridhara e Bháskara.

Brahmagupta representou as equações do segundo grau de forma sincopada, encontrando soluções gerais das equações quadráticas, determinando duas raízes, inclusive sendo uma delas negativa, enquanto que Sridhara definiu a regra para completar o quadrado em $x^2 + bx + c = 0$, multiplicando inicialmente por $4a$.

O mais importante matemático hindu do século XII foi Bhaskara, que completou falha na obra de Brahmagupta e conseguiu chegar, através de sua obra, ao ponto culminante das contribuições hindus anteriores. A mais conhecida, Lilavati,é uma reunião de problemas de Brahmagupta e outros, que continha muitos problemas sobre equações,em especial do segundo grau.

Utilizando-se de conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Sridhara, Bhaskara unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método do complemento de quadrados.

Bhaskara apresentou a solução de equações do segundo grau ao resolver problemas de ordem comercial / financeiro. Apresentamos um deles com linguagem de hoje: um capital de 100 foi emprestado a certa taxa de juro ao ano. Após 1 ano, o capital foi retirado e o juro obtido foi aplicado durante mais 1 ano. Se o juro total foi de 75, qual foi a taxa ao ano?

Sendo essa taxa x%, tem-se que o juro no 1° ano será de x e no 2° ano será de x. x / 100, ou seja, a equação em linguagem algébrica hoje seria: $x + x.\ x / 100 = 75$ ou $x^2 + 100x - 7500 = 0$. [7]

Sobre Bhaskara, CONTADOR (2006) [5] afirma:

> "Quando falamos em Bhaskara, não podemos deixar de relacionar com ele a equação do segundo grau e a famosa *fórmula de Bhaskara* ; embora não tenha sido ele que a deduziu, a fórmula leva seu nome e ele, suas honrarias. Na realidade este

> feito não se deve a um único homem [...] além do que já era bem conhecida por Brahmagupta e por Omar Khayyma, que, ao contrário de Bhaskara, as resolviam recorrendo ao uso das cônicas".

A importante fórmula geral para a resolução da equação de segundo grau $x^2 + bx + c = 0$, conhecida nos dias atuais como fórmula de Bhaskara será base para o trabalho desenvolvido nos próximos capítulos.

3 NOÇÕES BÁSICAS

Para a compreensão do tema proposto é necessário conhecer alguns conceitos e resultados que serão apresentados no decorrer da pesquisa. Serão vislumbrados alguns teoremas, algumas definições que servem como suporte dos próximos tópicos, tudo numa perspectiva descritiva, partindo do pressuposto que as demonstrações são vistas nas disciplinas de Álgebra Linear.

Portanto, farão parte deste estudo as equações polinomiais e alguns conceitos da álgebra linear, como: matrizes, sistema de equações lineares, determinantes, dependência linear e, por fim autovalores e autovetores.

3.1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Nesta seção apresentamos noções sobre soluções de equações polinomiais através de algumas definições e resultados teóricos.

Definição 1 Denomina-se equação polinomial ou equação algébrica, a equação da forma:

$P(x) = 0$ onde P(x) é um polinômio de grau n $\geq$ 1 e

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

nessa igualdade $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 \; e \; a_0$ são números complexos chamados coeficientes $a_n \neq 0 \; e \; a_0$ é o termo independente.

Definição 2 Raiz ou zero de uma equação algébrica $P(x) = 0$ é todo número complexo α para o qual $P(\alpha) = 0$ é um sentença verdadeira, ou seja, α é raiz de $P(x) \leftrightarrow P(\alpha) = 0$.

Exemplo 1. A raiz da equação de grau 1: $ax + b = 0, com\ a \neq 0$ é $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 2. As raízes da equação de grau 2: $ax^2 + bx + c = 0, com\ a \neq 0$ *são*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sabemos que os zeros ou raízes das equações do 1° e 2° são obtidos por fórmulas, citados no exemplo 1 e 2 . Quando o grau da equação for maior ou igual a 3 as fórmulas de resolução são extremamente trabalhosas e nem sempre é possível expressar todas as raízes por radicais. Os teoremas seguintes apresentam resultados teóricos que fornecem informações sobre o número de raízes existentes.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra): Toda equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n $\geq$ 1, admite , ao menos, uma raiz real ou complexa.

Demonstração: O teorema pode ser encontrado em [9].

O próximo teorema está relacionado com a decomposição de uma equação polinomial algébrica.

Teorema 2 (Teorema da Decomposição): Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau n $\geq$ 1 pode ser decomposto em n fatores do 1º graus de forma $(x - a_i)$, ou seja,

$$P(x) = a_n(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

em que a_1 , $a_2, \dots, a_n$ são raízes de $P(x)$.

Demonstração: Pelo teorema fundamental, $P(x)$ tem pelo menos uma raiz. Seja ela r_1. Logo:

$$P(x) = (x - r_1).Q(x)$$

Q(x) é um novo polinômio de grau n-1, que possui também pelo menos uma raiz. Seja ela r_2. Logo: $P(x) = (x - r_2).Q_1(x)$. Fazendo o mesmo procedimento com $Q_1(x)$ e continuando até a n-ésima expressão temos: $Q_{n-1}(x) = (x - r_n).Q_n(x)$. Em Q_n o grau do polinômio será zero e Q_n será igual a uma constante que chamamos de a_n . Substituindo todas as equações obtidas na decomposição de $P(x)$, temos:

$P(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2).\dots(x - r_n)$.

O estudo das relações entre as raízes complexas de um polinômio é útil na determinação de seu conjunto solução, enunciaremos a seguir, dois teoremas que valem para todos os polinômios de coeficientes reais.

Teorema 3 (Teorema das raízes complexas): Se um número complexo $z = a + bi$ com a, b $\in$ IR e b $\neq$ 0 é raiz da equação algébrica $P(x) = 0$, de coeficientes reais, então o seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ é também raiz da mesma equação.

Demonstração: Consideremos o número complexo $z = a + bi$ com a, b $\in$ IR e b $\neq 0$ e a equação algébrica de coeficientes reais $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1x +$

$a_0 = 0$. Se z é raiz de $P(x) = 0$, então: $P(x) = a_n\, z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$.

Tomando os conjugados dos dois membros, temos:.

$$\overline{a_n\, z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

Como $\bar{0} = 0$e o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados, obtemos: $\overline{a_n\, z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$. Lembrando ainda que o conjugado do produto é igual ao dos conjugados, vem: $\overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0} = 0$. Sendo o conjugado de uma potência igual à potência do conjugado, temos: $\overline{a_n}\,\overline{(z)}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{(z)}^{n-1} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{(z)}^{n-2} + \ldots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0} = 0$. Como o conjugado de um número real é o próprio número, isto é, $\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \overline{a_{n-2}} = a_{n-2}, \ldots, \overline{a_1} = a_1$ e $\overline{a_0} = a_0$, obtemos: $a_n\, \overline{(z)}^n + a_{n-1}\overline{(z)}^{n-1} + a_{n-2}\overline{(z)}^{n-2} + \cdots + a_1\overline{(z)} + a_0 = 0$.

Da última igualdade concluímos que $\bar{z}$ é a raiz de $P(x) = 0$.

Teorema 4 Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz Z com multiplicidade P, então admite a raiz $\bar{Z}$, com multiplicidade P.

É importante observar que, de acordo com os teoremas enunciados, toda equação polinomial de coeficientes reais, que admite raízes complexas, não reais, as terá em numero par, pois a cada raiz teremos sua conjugada. Consequentemente, todo polinômio de grau impar terá um número impar de raízes reais.

3.2 ALGUNS CONCEITOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção, vamos introduzir alguns assuntos sobre matrizes, determinantes, sistema linear, dependência linear, autovalores e autovetores, entre outros. Sem deixar de fazer inter-relação com a álgebra linear.

3.2.1 MATRIZES

Para que possamos atingir o foco principal deste trabalho é necessário introduzir definições e teoremas sobre este assunto, pois serão essenciais para abordarmos o problema do polinômio matricial.

Definição 3 Seja $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz m x n real é uma dupla seqüência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $(a_{ij})\, i \leq j \leq m$ ou apenas $i \leq j \leq n$.

3.2.1.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES

(i) Adição Seja $A = (a_{ij})\, e\, B = (b_{ij})$ matriz m x n. Indicamos por $A + B$ e chamamos soma de A com B a matriz m x n cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

(ii) Produto de uma matriz por um escalar Dada uma matriz real $A = [a_{ij}]_{mxn}$, e dado um número real β, o produto de β por A é a matriz real m x n dada por:

$$\beta A = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \beta a_{13} \dots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \dots & \beta a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \beta a_{m3} \dots & \beta a_{mn} \end{bmatrix}$$

(iii) Produto de uma matriz por outra Sejam $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{jk}]_{mxp}$. O produto AB é a matriz m x p cujo termo geral é dado por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, b_{jk} = a_{i1} \,.\, b_{1k} + \dots + a_{in} \,.\, b_{nk}$$

3.2.1.2 MATRIZES [Propriedades] Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:

$i.$ $A + B = B + A$ (comutatividade)

$ii.$ $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa)

$iii.$ $A + 0 = A$, onde **0** denota a matriz nula m x n.

$iv.$ Para cada matriz A, existe uma matriz $(-A)$, também m x n, tal que $A + (-A) = 0$.

$v.$ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associativa)

$vi.$ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade)

$vii.$ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade)

$viii.$ $(AB)C = A(BC)$ (associativa)

$ix.$ $A(B + C) = AB + BC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva a direita e a esquerda da multiplicação, em relação a soma).

$x.$ $AI = IA = A$ Para cada inteiro positivo p a matriz pxp, chamada matriz identidade, para toda matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$

$xi.$ $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$xii.$ $(A + B)^T = A^T + B^T$

$xiii.$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$xiv.$ $(A^T)^T = A$

$xv.$ $(AB)^T = A^T B^T$

3.2.1.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem algumas que seja pela natureza de seus elementos, tem propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem frequentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais.

Uma matriz quadrara $A = [a_{ij}]$, de ordem n, é denominada:

Identidade

Quando cada elemento da diagonal principal tem o valor 1 e o demais tem valor zero. Uma matriz identidade pode ser definida do seguinte modo:

$$I_n = [a_{ij}]_{nxn}, onde \begin{cases} a_{ij} = 1, se\ i = j \\ a_{ij} = 0, se\ i \neq j \end{cases}$$

Triangular Superior

Quando tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$, isto é, os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Triangular Inferior

Quando tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$, isto é, os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

Diagonal

Quando tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, os elementos acima da diagonal principal e abaixo da diagonal principal são iguais a zero. Portanto, a matriz diagonal é triangular superior e triangular inferior.

Ortogonal

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ cuja inversa coincide com a transposta $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$, isto é:

$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

Simétrica

Quando $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, para qualquer matriz quadrada **A.**

Isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$, então os elementos disposto simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

Definida Positiva

Uma matriz A é definida positiva se $x^T Ax > 0$, para todo $x \neq 0$.

Alguns critérios abaixo equivalentes, para verificar que uma matriz é definida positiva:

i) Se A é uma matriz real simétrica de ordem n. Logo, A definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos.

ii) A matriz A é definida positiva, se e somente se é simétrica e a forma escalonada de A tenha todos os pivôs positivos.

iii) Todas as matrizes lideres possuem determinantes positivos.

iv) Se A é uma matriz real simétrica definida positiva, logo a matriz A é inversível.

Neste momento, fornecemos algumas considerações sobre inversão de matrizes, que provavelmente você já teve oportunidade de estudo na disciplina de Álgebra Linear. O uso desse conhecimento estará sempre presente na resolução do problema polinomial matricial.

Definição 4 Se existe uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que $A.B = B.A = I_n$, dizemos que a matriz B é a matriz inversa de A. Denotamos a inversa da matriz A por A^{-1}. Assim $B = A^{-1}$.

Portanto, $A.A^{-1} = A.A^{-1} = I_n$.

A matriz I é a matriz identidade da mesma ordem que as matrizes $A\ e\ A^{-1}$.

Se a matriz quadrada A é invertível, então a sua inversa é única.

Quando uma matriz quadrada não possui inversa, dizemos que ela é uma matriz singular ou não invertível.

Apresentaremos agora um estudo simplificado sobre o conceito de determinante, similar ao utilizado no âmbito do Ensino Médio.

Como as matrizes tratadas neste estudo são quadradas, faz-se necessário identificar tais matrizes.

3.2.2 DETERMINANTES

Uma matriz quadrada A de ordem n será denotada por $A = [a_{ij}]$ onde os índices $i = 1,2,\dots,n$ indicam as linhas e os índices $j = 1,2,\dots,n$ indicam as colunas da matriz. O elemento da linha i e da coluna j da matriz A será indicada por a_{ij}.

Dentre as diversas propriedades dos determinantes serão relacionadas, a seguir, aquelas que de uma forma ou outra dizem mais de perto com o cálculo dos determinantes de qualquer ordem. Essas propriedades não serão demonstradas, tão-somente verificadas em algumas passagens do trabalho.

A seguir listamos alguns resultados sobre determinantes:

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujo determinante é nulo é uma matriz singular.
- Sejam A e B matrizes de ordem n. Então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Seja A uma matriz de ordem n, inversível. Então: $det(A) \neq 0\ e\ det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.
- A matriz unidade I é não-singular ($det\ I = 1$) e é a sua própria inversa: $I = I^{-1}$.
- Se a matriz A é não-singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$.
- Se a matrizes A e B são não-singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não-sigular. A matriz inversa de AB é a matriz $B^{-1}A^{-1}$.

- Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos nulos, o determinante é nulo. Se a matriz A tem duas linhas (ou colunas) iguais, o determinante é nulo.
- O determinante de uma matriz diagonal A (superior ou inferior) é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

3.2.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Na natureza, as coisas estão sempre mudando, se transformando, e o ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhor sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Os sistemas lineares é um instrumento que é utilizado em mais de um quarto de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações da ciência e indústria e a resolução de tais sistemas está presentes, entre outras, em áreas como Administração, Economia, Ecologia, Engenharia e Física.

Definição 5 Equação linear é uma equação da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ na qual $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis, e b é o termo independente.Um sistema de m equações lineares com n incógnitas se apresenta do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ são números reais, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ as incógnitas.

O sistema pode ser escrito sob a forma matricial

$$AX = B,$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{nx1}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{mx1}$$

O vetor B é chamado “lado direito” do sistema (1.1).

$$\text{A matriz} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} = [A \vdots B],$$

associado ao sistema dado de equações lineares, é chamada de matriz ampliada do sistema.

Definição 6 Posto de uma matriz é o numero de linhas não nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas. O posto de uma matriz coincide com a dimensão do espaço linha da matriz.

3.2.3.1 CARACTERISTICA OU POSTO DE UMA MATRIZ

Muitas vezes nos interessa saber se um sistema tem ou não solução. Isso pode se feito através da característica ou posto de uma matriz.

Quando se transforma no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, para $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$, e em zero os demais elementos das colunas em que se situam esses elementos a_{ij}, diz-se que a matriz inicial foi transformada numa matriz em forma de escada.

Antes de iniciarmos os procedimentos para resolver um sistema de equações lineares, temos que dar respostas às seguintes perguntas: o sistema tem solução, ou seja, é compatível? Caso tenha solução: tem uma única solução ou infinitas? Para responder, uma das ferramentas que podemos utilizar é o Teorema de Frobenius.

Teorema 5 Seja $AX = B$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n. Se designarmos:

A – a matriz ampliada do sistema.

B – a matriz reduzida à forma de escada.

Ca – característica da matriz ampliada A. É igual ao numero de linhas de B com elementos não todos nulos.

Cv – característica da matriz dos coeficientes das variáveis contida na matriz B. É igual ao número de linhas da matriz dos coeficientes das variáveis contida na matriz B com elementos não todos nulos.

Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas, cuja expressão geral é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sejam A matriz do sistema e B a matriz ampliada do sistema.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

A característica Ca de uma matriz ampliada A, que representa um sistema de m equações lineares com n variáveis, não pode ser menor que a característica Cv da matriz dos coeficientes das variáveis contidas na matriz reduzida à forma de escada [12].

Quando Ca > Cv, o sistema é incompatível.

Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz-reduzida à forma de escada.

C não pode ser maior que n.

Quando C = n, o sistema é compatível e determinado (tem solução única).

Quando C < n, o sistema é compatível e indeterminado (admite infinitas soluções).

Grau de liberdade de um sistema: g = n – C.

O significado do grau de liberdade de um sistema de equações lineares informa o número de variáveis às quais devem ser atribuídos valores arbitrários para calcular cada uma das variáveis restantes.

Definição 7 Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$, designa-se por espaço-linha de A o subespaço de R^n gerado pelas linhas de A. Designa-se por espaço-coluna de A o subespaço de R^m gerado pelas colunas de A.

Assim, o sistema $AX = B$ pode ser escrito como:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_1 \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Vem de (1.2) que o sistema $AX = B$ é compatível se e só se B pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

Assim, o leitor deve ter notado que é outra forma de descrever o quarto item da característica da matriz onde define o sistema compatível e determinado.

Outra definição a serem abordado serão os de dependência e independência Linear.

3.2.4 DEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 8 Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que um conjunto $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ com $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$, só for possível para $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Dizemos que $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se, A não é L.I., ou seja, é possível uma igualdade do tipo $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ sem que os escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ seja todos iguais ao número zero.

Teorema 6 Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n vetores em R^n. Se $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é a matriz cuja j-ésima coluna é x_j, então os vetores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são linearmente dependente se e somente se X é singular.

3.2.4.1 PROPRIEDADES

$i)$ Se um conjunto finito $A \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.

Seja $A = \{v_1, \ldots, 0, \ldots, v_n\}$. Então, evidentemente $0.v_1 + \ldots + a.0 + \ldots + 0.v_n = 0$ se verifica para $a \neq 0$. Isso é suficiente para concluir que A é L.D.

$ii)$ Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é L.I.

Suponhamos av = 0. Como $v \neq 0$, então a = 0.

$iii)$ Se uma parte de um conjunto $A \subseteq V$ é L.D., então A é também L.D.

Por hipótese, seja $A = \{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$ e a parte $A_1 = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset A, e\ A_1$ é L.D. Como A_1 é LD, existem $a_1 \neq 0$ que verificam a igualdade: $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0$ e esse mesmo $a_1 \neq 0$ verificam também a igualdade $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + 0.v_{k+1} + \ldots + 0.v_n = 0$. Logo, $A = \{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$ é L.D.

$iv)$Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A é também LI.

Suponhamos se A_1 fosse LD, pela propriedade anterior o conjunto A seria também LD, o que contradiz a hipótese.

v)Se $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é LI e $B = \{v_1, \ldots, v_n, w\} \subset V$ é LD, então o vetor w é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

Então, como B é LD, existem escalares $a_1, \ldots, a_n, b$, nem todos nulos, tais que: $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n + bw = 0$. Logo, se b = 0, então algum dos a_i não é zero na igualdade: $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$.

Como, porém esse fato contradiz a hipótese de que A é LI. Consequentemente, tem-se $b \neq 0$, logo: $bw = -a_1v_1 - \ldots - a_nv_n$ o que implica $w = -\frac{a_1}{b}v_1 - \ldots - \frac{a_n}{b}v_n$, isto é, w é combinação de $v_1, \ldots, v_n$.

3.2.5 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Autovalores e autovetores são conceitos importantes de matemática. As noções de autovetor e autovalor de uma matriz são fundamentais, por exemplo, em Física Atômica porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes.

Também o estudo dos fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física leva à procura de autovalores e autovetores de matrizes.

Definição 9 Se A é uma matriz, de ordem n, real ou complexa, chama-se valor próprio de A toda matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que $AX = \lambda X$, onde λ é um escalar chamado valor próprio de A. Para que λ seja um valor próprio de A é necessário e suficiente, então que exista uma matriz $X \neq 0$, do tipo n x 1, tal que $(A - \lambda I_n)X = 0$. Isto ocorre se, e somente se, $A - \lambda I_n$ não é inversível e, portanto se, e somente se, $(A - \lambda I_n)X \neq 0$. O vetor X é um autovetor ou vetor característico associado a λ.

Observações

Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e por isso, os mesmos valores próprios.

Seja A uma matriz de ordem n, denominamos polinômio característico de A, o polinômio $P(\lambda)$ obtido pelo cálculo de $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

A equação $P(\lambda) = 0$ é denominada equação característica de A.

Seja A uma matriz quadrada não singular. Então, A e A^t tem os mesmos autovalores.

Se X for um auto vetor de A, então kX também o será, para qualquer $k \neq 0$.

Os autovalores de uma matriz triangular superior ou inferior são os valores de sua diagonal principal.

O conjunto de autovalores de A é chamado de espectro de A. é denotado por $\lambda(A)$. Ou seja, $\lambda(A) = \{\lambda / AX = \lambda X\}$.

Teorema 7 Os autovalores de uma matriz A são precisamente as solúções λ da equação característica.

Demonstração:

Seja o operador linear $T_A: R^n \to R^n$, cuja matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se v e λ são respectivamente, vetor próprio e o correspondente valor da matriz A, tem-se: $A \cdot v = \lambda v$ (v é matriz-coluna nx1) ou ainda $Av - \lambda v = 0$. Tendo em vista que $v = Iv$ (I é a matriz-identidade), pode-se escrever: $Av - \lambda Iv = 0$ ou ainda $(A - \lambda I)v = 0$.

Para que esse sistema homogêneo admita solução não-nula, isto é:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{deve-se ter: } det(A - \lambda I) = 0.$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovalores a eles associados. Observamos que

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

ou, ainda:

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

é um polinômio em λ de grau n. $P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ + termos de grau < n, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $P(\lambda)$ é chamado polinômio característico da matriz A.

A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo de equações lineares permite determinar os vetores próprios associados.

Faremos um exemplo para fixar melhor o processo envolvido no cálculo de autovalores e autovetores através do polinômio característico.

Exemplo 1

I) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

A equação característica da matriz A é: $det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$ =0, isto é, $P(\lambda) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4$. As raízes dessa equação são: $\lambda_1 = 1 ou\, \lambda_2 = -2$ que são valores próprios da matriz A.

II) O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associados é: $(A - \lambda I)v = 0$. Considerando $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) Substituindo λ por 1 no sistema homogêneo, obtém-se os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x & + & 4y = 0 \\ -x & + & y = 0 \end{cases}$$

Então, temos $x = y$.

Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$, $x \neq 0$, são os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

ii) Substituindo λ por -2 no sistema homogêneo, obtêm-se os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y$$

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são os vetores $v_2 = (4y, y), y \neq 0$, ou $\left(v_2 = \left(x, \frac{1}{4}x\right)\right)$são os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -2$.

Definição 10 (Auto-espaço associado a um autovalor de uma matriz A) O conjunto V_λ de todos os autovetores de A associados a λ, formam um subespaço de A chamado de auto – espaço. Com efeito, $0 \in V_\lambda$.

A multiplicidade algébrica é dada pela sua multiplicidade como raiz da equação.

A multiplicidade geométrica é dada pela dimensão de seu auto – espaço.

É importante que você observe que os autovetores podem formar um conjunto linearmente independente, como descreve o teorema a seguir.

Teorema 8 Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são autovetores de uma matriz A associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, então $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são linearmente independentes.

Definição 11 (Diagonalização) A matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se existe uma matriz inversível P e uma matriz diagonal Λ tal que $P^{-1}AP = \Lambda$. Diz-se, nesse caso, que a matriz P diagonaliza A, ou que P é a matriz diagonalizadora.

Teorema 9 Uma matriz quadrada de ordem n, é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: Seja Puma matriz quadrada de ordem n cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e D uma matriz diagonal qualquer cujos elementos da diagonal principal são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então:

$$\begin{aligned} AP &= A[v_1 \;\; v_2 \;\; \ldots \;\; v_n] \\ &= [Av_1 \;\; Av_2 \;\; \ldots \;\; Av_n] \ (1) \end{aligned}$$

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$PD = [\lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \;\; \ldots \;\; \lambda_n v_n] \ (2)$$

Seja A diagonalizável, com $A = PDP^{-1}$. Então multiplicando essa relação à direita por P, obtemos $AP = PD$. Nesse caso (1) e (2) implicam que:

$$[Av_1 \;\; Av_2 \;\; \dots \;\; Av_n] = [\lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \;\; \dots \;\; \lambda_n v_n] \qquad (3)$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \lambda_n v_n \quad (4)$$

Como P é inversível, suas colunas são linearmente independentes. Mais ainda, como essas colunas são não nulas, (4) mostra que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são autovalores e $v_1, v_2, \dots, v_n$ são os autovetores associados. Essa argumentação prova as primeiras duas afirmações do teorema. Finalmente dados quais quer n autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, use-os para montar as colunas de P e use os autovalores associados $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ para montar D. Por (1) – (3), $AP = PD$. E se P é inversível concluímos que $A = PDP^{-1}$.

Observações

Se uma matriz A é diagonalizável, então a matriz A pode ser escrito na forma fatorada PDP^{-1}.

Se A é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz P que diagonaliza A são os autovetores de A e os elementos diagonais de D são os autovalores associados.

Se A é uma matriz de ordem n, e têm n autovalores distintos, então A é diagonalizável. Se os autovetores não forem distintos. A Pode ou não ser diagonalizável, dependendo se tem ou não n autovetores linearmente independente.

Portanto, baseado nos teoremas 8 e 9 tem-se o seguinte resultado:

Teorema 10 Uma matriz A é diagonalizável se todas as raízes de seu polinômio característico forem reais e distintas.

Proposição 1 Dadas duas matrizes quadradas A *e* B diagonalizáveis. Logo, A *e* B comutam, ou seja, $AB = BA$, se e somente se, A *e* B tem os mesmo autovetores.

Demonstração: Suponhamos que as matrizes A *e* B tenham os mesmos autovetores. Se A *e* B são diagonalizáveis, logo se deve ter $A = P\Lambda_1\mathrm{P}^{-1}$ e $B = P\Lambda_2\mathrm{P}^{-1}$, onde Λ_1 de autovalores de A e Λ_2 é a matriz diagonal de autovalores de B. Logo,

$$\begin{aligned} AB &= (P\Lambda_1\mathrm{P}^{-1})(P\Lambda_2\mathrm{P}^{-1}) \\ &= P\Lambda_1(\mathrm{P}^{-1}P)\Lambda_2\mathrm{P}^{-1} \\ &= P\Lambda_1\Lambda_2\mathrm{P}^{-1} \\ &= P\Lambda_2\Lambda_1\mathrm{P}^{-1} \\ &= (P\Lambda_2\mathrm{P}^{-1})(P\Lambda_1\mathrm{P}^{-1}) \\ &= BA. \end{aligned}$$

Teorema 11 (teorema Espectral para Matrizes Simétricas) Uma simétrica A pode ser fatorada em $A = P\Lambda\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$, com autovetores ortogonais e unitários na matriz P e os autovalores na matriz diagonal Λ.

4 EQUAÇÕES POLINOMIAIS MATRICIAIS

Apresentaremos algumas idéias que permitam entender o problema de encontrar solução de certas equações polinomiais com coeficientes matriciais, bem como apresentar alguns resultados que ajudaram a descrever um método de resolução de equações polinomiais matriciais quadráticas.

Iniciaremos apresentando dois exemplos que tornarão claro os obstáculos que são encontrados ao estudar o problema. Em seguida, veremos o estudo de equações polinomiais matriciais quadráticas, logo após, virá uma breve apresentação de alguns conceitos e resultados teóricos sobre polinômios matriciais.

4.1 MOTIVAÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O principal foco deste trabalho é como encontrar solução para equação polinomial de grau m da forma $P_m(X) = A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0$ com $A_i \in R^{nxn}, i = 0, \dots, m.\ A_m \neq 0, e\ X \in R^{nxn}$, sempre possui solução? E se possui como encontrar uma matriz X que satisfaça $P_m(X) = 0,\ 0 \in R^{nxn}$? Lembrando ainda que serão abordadas apenas as equações polinomiais matriciais de primeiro grau.

Daremos a seguir dois exemplos envolvendo equações polinomiais matriciais do primeiro grau que ilustra o grau de dificuldade, porem, o problema é difícil e pode ou não ter solução.

Exemplo 2 Considere o polinômio $P_1(X) = A_1 X + A_0$, em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\ e\ A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Então $P_1(X) = 0 \implies A_1 X + A_0 = 0 \implies A_1 X = -A_0$.

Dessa forma $A_1 X = -A_0$ pode ser escrito substituindo $A_1\, X\, e\, A_0$ pelos seus respectivos valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Observa-se que este é um sistema do tipo $AX = B$ com $A = A_1\, e\, B = -A_0$. Considerando ainda que:

$$X = [X_1 \vdots X_2]\ \ e\ \ B = [B_1 \vdots B_2],$$

de maneira que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

Portanto $A_1X = -A_0 \Leftrightarrow [A_1X_1 \vdots A_1X_2] = [B_1 \vdots B_2]$. Então, para encontrar a solução da equação $A_1X = -A_0$ devem-se encontrar soluções dos sistemas:

$$I)\ A_1X_1 = B_1 \quad e \quad II)\ A_1X_2 = B_2$$

Calculo da solução da primeira equação: $I)\ A_1X_1 = B_1$

Solução

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} = -1 \\ -x_{11} + 5x_{21} = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de 2 equações com duas variáveis, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & -1 \\ -1 & 5 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 + L_1 \backsim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 8 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_1(1/8) \backsim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1/8 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $Ca = 2$ e que $Cv = 2$, isto é, que $Ca = Cv = 2$, logo o sistema é compatível e determinado, conforme o teorema 5. Portanto, a solução da equação $I)$ é:

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular agora a solução da segunda equação: $II)\ A_1X_2 = B_2$

Solução

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} x_{12} + 3x_{22} = 2 \\ -x_{12} + 5x_{22} = -4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de 2 equações com duas variáveis, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 \\ -1 & 5 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 + L_1 \backsim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 8 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \rightarrow L_1(1/8) \backsim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & -1/4 \end{bmatrix}$$

Examinando a matriz ampliada, verifica-se que: $Ca = Cv = 2$, logo o sistema é compatível e determinado, sua solução é

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação polinomial $P_1(X) = 0$ também é compatível e determinado.

Exemplo 3 Seja o polinômio $P_1(X) = A_1X + A_0$, em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \; e \; A_0 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$$

Procedendo da mesma forma do exemplo anterior, temos

$P_1(X) = 0 \implies A_1X + A_0 = 0 \implies A_1X = -A_0$

Onde a equação $A_1X = -A_0$ pode ser escrito substituindo $A_1, X \; e \; A_0$ pelos seus respectivos valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix}$$

Considerando os seguintes sistemas de equações, vamos obter a solução desejada resolvendo o sistema analogamente ao exemplo anterior.

$I) \; A_1X_1 = B_1 \quad e \quad II) \; A_1X_2 = B_2$

Calculo da solução da primeira equação: $I) \; A_1X_1 = B_1$

Solução

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \end{bmatrix}$, de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} x_{11} - 3x_{21} = 4 \\ -4x_{11} + 12x_{21} = -16 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de 2 equações com duas variáveis, temos:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 12 & -16 \end{array}\right] \rightarrow L_2 = L_2 + L_1(4) \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Examinando a matriz ampliada, observa-se que $Ca = Cv = 1$, logo o sistema é compatível. Mas, $n = 2$, isto é, $C < n$, portanto o sistema é compatível e indeterminado e seu grau de liberdade é $g = n - C = 2 - 1 = 1$.

A 2ª equação não estabelece nenhuma condição para x_{11} e x_{21} por isso, a solução do sistema é dada pala 1ª equação $x_{11} = 3x_{21} + 4$. Assim, se $x_{21} = 1$, por exemplo, $x_{11} = 7$, ou seja, o sistema admite infinitas soluções.

Vamos calcular agora a solução da segunda equação: $II)\ A_1X_2 = B_2$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} x_{11} & -3x_{21} & = 1 \\ -4x_{11} & + 12x_{21} & = -6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de 2 equações com duas variáveis, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \vdots & 1 \\ -4 & 12 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow L_2 = L_2 + L_1(4) \backsim \begin{bmatrix} 1 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Examinado a matriz, verifica-se que $Ca = 2\ e\ Cv = 1, isto\ é, Ca > Cv$ logo o sistema é incompatível.

Como a 2ª equação que compõe o sistema geral não admite solução, embora a 1ª possua infinitas soluções, conclui-se que o polinômio $P_1(X) = 0$ também não possui solução.

Os exemplos resolvidos acima demonstram que o problema de encontrar as raízes das equações polinomiais com coeficientes matriciais pode ter ou não solução, portanto um problema difícil de ser resolvido. Ficando assim, o trabalho de demonstrar apenas as equações matriciais quadráticas.

4.2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE POLINÔMIOS MATRICIAIS

Por volta de cinco séculos atrás, começou o estudo de equações polinomiais. No entanto, a preocupação com equações polinomiais envolvendo matrizes com coeficientes matriciais é relativamente recente. A referência envolvendo polinômio matricial, fortemente motivada por problemas relacionados com sistema vibratórios, é Frazer, Ducan e Collar, publicada em 1938. Um polinômio matricial de grau m, também chamado de $\lambda - matriz$, é uma função de valor matricial da forma:

$$P_m(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0 \tag{4.2}$$

onde os coeficientes A_i são matrizes nxn e $A_m \neq 0$ e 0 a matriz nula. No entanto, $P_m(\lambda)$ será uma matriz nxn cujas entradas são polinômios escalares de grau menor ou igual a m.

Porém, existem dois problemas que se destacam no que se refere a polinômios matriciais. O primeiro, no qual este trabalho foi direcionado, tem o objetivo encontrar matrizes $X \in \mathbb{C}^{nxn}$, ela é dita solvente de $P_m(X)$, em que:

$$P_m(X) = A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_0 = 0 \tag{4.3}$$

e o segundo, auxiliará para que o problema acima seja resolvido, e encontrar escalares λ em que

$$det(P_m(\lambda)) = 0. \tag{4.4}$$

Portanto, este capítulo tratará unicamente de equações polinomiais matriciais quadráticas, logo o problema de encontra um solvente, ou raiz, para $P_m(X)$ reduz-se a:

$$P_2(X) = A_2 X^2 + A_1 X + A_0 = 0.$$

Observação

Se A_m é não-singular a equação polinomial $P_m(X) = 0$ pode ser transformada numa outra equivalente da forma:

$$N(X) = X^m + B_{m-1} X^{m-1} + \ldots + B_0 = 0 \tag{4.5}$$

onde $B_i = A_m^{-1} A_i, para\ i = 0, \ldots, m$. Neste caso $N(X)$ é dito polinômio Mônico.

Se X é uma matriz escalar, então $X = \lambda I$, logo P na equação (4.3) torna-se $\lambda - matriz$ ou um polinômio matricial na variável complexa λ descrito em (4.2), e o problema de encontrar pares (λ, x), com $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\ e\ x \neq 0$, em que

$$P_m(\lambda)X = 0, \tag{4.6}$$

é chamado de problema de autovalor polinomial matricial.

A dificuldade maior de se encontrar os solvente ou raízes de um polinômio matricial, é que não há um resultado que garanta a existência de soluções, como há no Teorema Fundamental da Álgebra, válido para polinômios com coeficiente escalares. Então, vamos formalizar o conceito de autovalor para polinômios matriciais, para saber como isto pode ser feito.

Definição 12 O valor λ é denominado autovalor do polinômio matricial quadrático $P_m(\lambda)$ se, e somente se, o $det(P_m(\lambda)) = 0$. Então, $P(\lambda)$ será chamado de polinômio característico de $P_m(\lambda)$. Logo, podemos dizer que existe uma matriz $X \neq 0$, do tipo $n \; x \; 1$, que é um autovetor ou vetor característico associado a λ se $P_m(\lambda)X = 0$.

Observações:

- O método para calcular o solvente do polinômio $P_m(\lambda)X = 0$, é o mesmo método utilizado para resolver um sistema homogêneo com n equações.
- Os coeficientes A_i são $n \, x \, n$, logo a equação característica, $P(\lambda) = det(P_m(\lambda)) = 0$ possui grau menor ou igual mn, onde m é o grau do polinômio $P_m(\lambda)$ e n é o tamanho dos coeficientes A_{is}. Portanto, o número de autovalores existentes também será dado pelo grau de $P(\lambda)$. O trabalho restringe-se às equações polinomiais quadráticas, logo trabalharemos com o grau de $P(\lambda)$ menor ou igual $2n$. Logo, considerando a equação quadrática, existirá no máximo $2n$.
- Se A_2 for igual à matriz nula e $A_1 = -I$, então equação característica reduz-se a $det(A_0 - \lambda I) = 0$. Neste caso, $P_m(\lambda)$ possui grau um e o problema de autovalor é simplesmente o problema de autovalor – autovetor matricial padrão. Da mesma forma, se x é um autovetor associado a λ, $P_m(\lambda)X = 0$ reduz-se a $(A_0 - \lambda I)X = 0$ ou equivalentemente $A_0X = \lambda X$.

Daremos a seguir um exemplo que ilustra o ultimo item acima:

Exemplo 4 Dado o polinômio $P_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, em que $A_2 = 0$, $A_1 = -I \; e \; A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Logo, $P_2(\lambda) = -\lambda I + A_0$ se, e somente se $P_2(\lambda) = A_0 - \lambda I$. Primeiramente vamos encontrar os autovalores da matriz A_0. A equação característica de A_0 é:

$$det(A_0 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

As raízes dessa equação são: $\lambda_1 = 2 \; e \; \lambda_2 = 4$ que são os valores próprio da matriz A_0.

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associados à λ_1 *e* λ_2 é: $(A_0 - \lambda I)X = 0$. Considerando ainda que os autovalores X_i serão denotados no exemplo a seguir por $X_i = \{v_1\ v_2\}^T$, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) Substituindo λ por 2 no sistema homogêneo, obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 3 \\ -1 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ que é $X_1 = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, fazendo $v_2 = 1$ obtém-se: $X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) Substituindo λ por 4 no sistema homogêneo, obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ -1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ que é $X_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, fazendo $v_2 = 1$ obtém-se: $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como os autovalores são distintos, os autovetores são lineamente independentes, logo a matriz A_0 é diagonalizável e pode ser escrito na forma fatorada $P^{-1}A_0P = \Lambda$ ou $A_0 = P\Lambda P^{-1}$.

5 EXISTÊNCIA E CONSTRUÇÃO DE SOLVENTES

O obstáculo maior é encontrar solventes para uma equação polinomial matricial,. Assim, apenas o caso quadrático será estudado, incluindo uma generalização da fórmula de Báskara, que é valida para equações polinomiais escalares quadráticas, para resolver equações polinomiais matriciais quadráticas.

5.1 A FÓRMULA DE BÁSKARA PARA EQUAÇÕES POLINOMIAIS MATRICIAIS QUADRÁTICA.

A questão que surge é se a formula usual de uma equação polinomial escalar quadrática, pode ser generalizada para determinar solventes de equações polinomiais matriciais quadráticas. Ou seja, se equação polinomial matricial quadrática

$$AX^2 + BX + C = 0 \tag{5.1}$$

pode ser resolvida usando a formula de Báskara. Pode-se dizer que sim, mais com certas restrições. Para fazer isso, utilizaremos alguns conceitos.

Definição 13 Uma matriz real B de ordem n é raiz quadrada de uma matriz real A de mesma ordem, se e somente se, $B^2 = A$.

Agora vamos dar um exemplo com matriz diagonal com entradas positivas. E observará que será necessário extrair apenas a raiz dos elementos de sua diagonal

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \sqrt{36} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{64} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \text{ fazendo}$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = A$$

Veja também poderíamos encontrar outras soluções para matriz A.

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \; ou \, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Logo, estes exemplos demonstram que uma matriz quadrada pode admitir varias raízes quadradas.

Como a matriz B é a raiz quadrada da matriz A, então a matriz A será denotada por $A^{1/2}$.

Proposição 2 Toda matriz quadrada diagonalizável com autovalores positivos admite raiz quadrada.

Demonstração: Se a matriz A é uma matriz diagonalizável. Logo,

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1} \\ &= P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1}P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1} \\ &= BB \\ &= B^2. \end{aligned}$$

Portanto, como $B = P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ podemos concluir que $B^2 = A$, logo, $B = P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ é uma raiz quadrada da matriz A.

Fazendo agora um exemplo que ilustra a Proposição 2 enunciada acima.

Exemplo 5 Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Primeiro determinamos os autovalores da matriz A, de fato, a equação característica de A é:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \; &\Longrightarrow (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0 \\ &\Longrightarrow 54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \end{aligned}$$

As raízes dessa equação são: $\lambda_1 = 10 \; e \; \lambda_2 = 5$. Observe que a matriz quadrada A tem os autovalores positivos. Que são os valores próprios da matriz A.

Determinação dos autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 10 \; e \; \lambda_2 = 5$.

i) Sendo $X_1 = \{v_1 \; v_2\}^T$ o autovalor associado ao autovalor $\lambda_1 = 10$, temos:

$$(A - \lambda I)X_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9-10 & 1 \\ 4 & 6-10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 10$, isto é:

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ 4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = v_1$$

O sistema admite infinitas soluções próprias:

$X_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$, fazendo $v_1 = 1$obtém-se: $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$ii)$ Sendo $X_2 = \{v_1\, v_2\}^T$ o autovalor associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$, temos:

$$(A - \lambda I)X_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9-5 & 1 \\ 4 & 6-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$, isto é:

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 = 0 \\ 4v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = -4v_1$$

O sistema admite infinitas soluções próprias:

$X_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ -4v_1 \end{bmatrix}$, fazendo $v_1 = 1$obtém-se: $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Logo, a matriz P é constituída pelos autovetores da matriz A, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios v_1 e v_2 associados aos valores próprios λ_1 e λ_2:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz inversa de P, é necessário que $PP^{-1} = I$.

Seja $PP^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De onde vêm os sistemas:

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} t + \ \ z = 0 \\ t - 4z = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas de duas incógnitas obtém-se:

$$x = \frac{4}{5}, y = \frac{1}{5}, t = \frac{1}{5} \ e \ z = -\frac{1}{5}$$

Logo, a matriz inversa P é $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

A matriz Λ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é:

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \Lambda$$

Então, fica fácil verificar que:

$$P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = A.$$

Determinação da raiz quadrada da matriz real A.

Conforme foi visto na demonstração da Preposição 2 a raiz quadrada da matriz A é denotada por: $P\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{-1}$, ou seja:

$$B = P\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{5} \\ \sqrt{10} & -4\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5} \\ \frac{4\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{10}+4\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 4\sqrt{2}-4 & \sqrt{2}+4 \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$BB = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 4\sqrt{2}-4 & \sqrt{2}+4 \end{bmatrix} . \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 4\sqrt{2}-4 & \sqrt{2}+4 \end{bmatrix}$$

$$BB = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 4\sqrt{2}-4 & \sqrt{2}+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 4\sqrt{2}-4 & \sqrt{2}+4 \end{bmatrix}$$

$$BB = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 45 & 5 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = A.$$

Proposição 3 Toda matriz simétrica real com autovalores positivos possui raiz quadrada.

Demonstração: Basta aplicar a Proposição 2 e o teorema Espectral para matrizes simétricas.

Vamos fazer agora um exemplo que ilustra a Proposição 3 enunciada acima.

Exemplo 6

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

Determinação dos autovalores da matriz A

A equação característica de A é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 10-\lambda \end{bmatrix} = 0 \implies (4-\lambda)(10-\lambda) - 16 = 0$$

$$\implies 40 - 4\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\implies \lambda^2 - 14\lambda + 24 = 0$$

As raízes dessa equação são:

$\lambda_1 = 2\ e\ \lambda_2 = 12$. Observe que a matriz quadrada A tem os autovalores positivos. Que são os valores próprios da matriz A.

Determinação dos autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 12$.

$i)$ Sendo $X_1 = \{v_1\, v_2\}^T$ o autovalor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos:

$$(A - \lambda I)X_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 10-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -4 \\ -4 & 10-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$, isto é:

$$\begin{cases} 2v_1 - 4v_2 = 0 \\ -4v_1 + 8v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

O sistema admite infinitas soluções próprias:

$X_1 = \begin{bmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, fazendo $v_2 = 1$obtém-se: $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$ii)$ Sendo $X_2 = \{v_1\, v_2\}^T$ o autovalor associado ao autovalor $\lambda_2 = 12$, temos:

$$(A - \lambda I)X_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 10-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-12 & -4 \\ -4 & 10-12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtém-se o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 12$, isto é:

$$\begin{cases} -8v_1 - 4v_2 = 0 \\ -4v_1 - 2\,v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -2v_1$$

O sistema admite infinitas soluções próprias:

$X_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{bmatrix}$, fazendo $v_1 = 1$obtém-se: $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Logo, a matriz P é constituída pelos autovetores da matriz A, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios v_1 e v_2 associados aos valores próprios λ_1 e λ_2:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz inversa de P:

Para calcular a matriz inversa de P, é necessário que $PP^{-1} = I$.

Seja $PP^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De onde vêm os sistemas:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2t + \ \ z = 0 \\ t - 2z = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas de duas incógnitas obtém-se:

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{5}, t = \frac{1}{5} \ e \ z = -\frac{2}{5}$$

Logo, a matriz inversa P é $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$.

A matriz Λ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é:

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 12/5 & -24/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \Lambda$$

Então, fica fácil verificar que:

$$P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = A.$$

Determinação da raiz quadrada da matriz real A.

Conforme foi visto na demonstração da Preposição 2 a raiz quadrada da matriz A é denotada por: $P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1}$, ou seja:

$$B = P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{12} \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{12}}{5} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{12}}{5} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{12}}{5} & \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{5} \end{bmatrix}, \text{ou} \quad B = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$BB = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{bmatrix} . \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$BB = \frac{2}{25}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} & 2-2\sqrt{6} \\ 2-2\sqrt{6} & 1+4\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$BB = \frac{2}{25}\begin{bmatrix} 50 & -50 \\ -50 & 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = A.$$

Teorema 12 (Generalizando a fórmula de Báskara) Seja $A = I, B\ e\ C$ são diagonalizáveis e B comuta com C, ou seja, $BC = CB, e\ B^2 - 4C$ possui uma raiz quadrada, então podemos encontrar um solvente da equação (5.1) através da formula:

$$S = -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4C} \qquad (5.2)$$

Demonstração: Vamos provar que (5.2) satisfaz o polinômio $P(S) = IS^2 + BS + C = 0$. Como $B\ e\ C$ comutam, então, $B\ e\ C$ tem os mesmo autovetores.

Logo as matrizes

$$B = P\Lambda_1 P^{-1}, \quad C = P\Lambda_2 P^{-1} \qquad (5.3)$$

Usando duas matrizes quadrada arbitrária $E,\ F$ obtemos:

$(E-F)^2 = E^2 - EF - FE + F^2$

Analogamente a este resultado tem-se

$$S^2 = \left(-\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2-4C}\right)\left(-\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2-4C}\right)$$

$$= \frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{4}B\sqrt{B^2-4C} - \frac{1}{4}\sqrt{B^2-4C}\,.B + \frac{1}{4}(B^2-4C)$$

$$= \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{4}B\sqrt{B^2-4C} - \frac{1}{4}\sqrt{B^2-4C}\,.B - C. \qquad (5.4)$$

Como $B^2 - 4C$ possui uma raiz quadrada, utilizando-se de (4.3), tem-se que

$$B^2 - 4C = P\Lambda_1^2P^{-1} - 4P\Lambda_2P^{-1} = \left(P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1}\right)\left(P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1}\right).$$

Logo,

$$B^2 - 4C = P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1}. \qquad (5.5)$$

Utilizando-se de (5.3), tem-se que

$$\begin{aligned} B\sqrt{B^2-4C} &= P\Lambda_1P^{-1}\ P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1} \\ &= P\Lambda_1\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1} \\ &= P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\Lambda_1P^{-1} \\ &= P\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}P^{-1}P\Lambda_1P^{-1} \\ &= \sqrt{B^2-4C}\,.B \end{aligned}$$

No terceiro item da resolução acima Λ_1 e $\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}$ comutam por serem diagonais. Portanto, usando este fato e (5.4) segue que

$$S^2 = \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}B\sqrt{B^2-4C} - C. \qquad (5.6)$$

Então,

$$\begin{aligned} P(S) &= IS^2 + BS + C \\ &= \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}B\sqrt{B^2-4C} - C + B\left(-\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2-4C}\right) + C \end{aligned}$$

$$= 0$$

Logo, o valor de S dado em (5.2) é solução da equação polinomial matricial quadrática.

Exemplo 7

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Verificar agora se as matrizes B e C comutam, isto é se $BC = CB$.

$$BC = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30+6 & 10+18 \\ 18+10 & 6+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30+6 & 18+10 \\ 10+18 & 6+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}$$

Logo, $BC = CB$.

Determinação dos autovalores e autovetores de $B^2 - 4C$:

Fazendo $H = B^2 - 4C$, tem-se

$$H = B^2 - 4C = \begin{bmatrix} 136 & 120 \\ 120 & 136 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 & 116 \\ 116 & 124 \end{bmatrix}$$

A equação característica de H é:

$$(H - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 124-\lambda & 116 \\ 116 & 124-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow (124-\lambda)(124-\lambda) - 13456 = 0$$

$$\Longrightarrow 15376 - 124\lambda - 124\lambda + \lambda^2 - 13456 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - 248\lambda + 1920 = 0$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 240$ e $\lambda_2 = 8$.

Determinação dos autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 240$ e $\lambda_2 = 8$.

i) Sendo $X_1 = \{v_1\ v_2\}^T$ o autovalor associado ao autovalor $\lambda_1 = 240$ é:

$$(H - \lambda I)X_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 124-240 & 116 \\ 116 & 124-240 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -116 & 116 \\ 116 & -116 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -116v_1 & + \ 116v_2 = 0 \\ 116v_1 & - \ 116v_2 = 0 \end{cases}$$

obtêm-se os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 240$ que são da forma $X_1 = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, fazendo $v_2 = 1$obtém-se: $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$ii)$ Procedendo de maneira análoga, verifica-se que um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 8$ é $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Portanto, a matriz P é constituída pelos autovetores de H, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios v_1 e v_2 associados aos valores próprios λ_1 e λ_2 e sua inversa são:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Então, $P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 & 116 \\ 116 & 124 \end{bmatrix} = H.$

Observe que H é uma matriz real simétrica com autovalores positivos, logo de acordo com a Proposição 3 a matriz H possui raiz quadrada.

$$H^{\frac{1}{2}} = P\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{240} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{15} + \sqrt{2} & 2\sqrt{15} - \sqrt{2} \\ 2\sqrt{15} - \sqrt{2} & 2\sqrt{15} + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Logo, o solvente da equação polinomial $AX^2 + BX + C = 0$, onde $A = I, BC = CB, e\ B^2 - 4C$ admite raiz quadrada, é denotada por:

$$S = -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(B^2 - 4C)^{\frac{1}{2}}$$

Então, no exemplo acima citado, a solução é:

$$S = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & 6\\ 6 & 10\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\sqrt{15}+\sqrt{2} & 2\sqrt{15}-\sqrt{2}\\ 2\sqrt{15}-\sqrt{2} & 2\sqrt{15}+\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{-5+2\sqrt{15}+\sqrt{2}}{2} & \frac{-3+2\sqrt{15}-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{-3+2\sqrt{15}-\sqrt{2}}{2} & \frac{-5+2\sqrt{15}+\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

Sejam as matrizes $A = B = I$. Logo a equação polinomial (4.1) será:

$$X^2 + X + C = 0.$$

Então, se $(I^2 - 4C)$ possui uma raiz quadrada, a formula (4.2) é aplicável e o solvente será denotado por $S = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I - 4C)^{\frac{1}{2}}$. Vamos demonstrar dois exemplos que ilustram esta situação.

Exemplo 8 Seja $A = B = I$ e $C = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 5 & -2\end{bmatrix}$.

$$H = I^2 - 4C = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}12 & 0\\ -20 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & 0\\ -20 & 9\end{bmatrix}$$

Determinação dos autovalores e autovetores de H:

Sendo H uma matriz triangular inferior, os autovalores associados a ela são $\lambda_1 = 13$ $e\lambda_2 = 9$

Logo, a matriz P é constituída pelos autovetores da matriz H, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios associados aos valores próprios λ_1 e λ_2:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

Determinação da matriz inversa de P. Procedendo de maneira análoga aos exemplos anteriores, verifica-se que a matriz inversa de P é: $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$.

Determinação de $H^{\frac{1}{2}}$.

$$H^{\frac{1}{2}} = P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ -5\sqrt{13} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ -5\sqrt{13}+15 & 3 \end{bmatrix} = (I-4C)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, o solvente da equação polinomial $X^2 + X + C = 0$, é:

$$S = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I-4C)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow S = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ -5\sqrt{13}+15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos verifica se $S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & 1 \end{bmatrix}$ é solução do polinômio matricial $X^2 + X + C = 0$.

$$X^2 + X + C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ \frac{5\sqrt{13}-25}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{2} & 0 \\ \frac{-5\sqrt{13}+15}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 9

Seja $A = B = I$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Então, $H = I^2 - 4C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$.

Determinação dos autovalores e autovetores de H:

O polinômio característica de H é:

$$(H - \lambda I) = 0 \implies \begin{bmatrix} 9-\lambda & -8 \\ -8 & 9-\lambda \end{bmatrix} = 0 \implies (9-\lambda)(9-\lambda) - 64 = 0$$

$$\implies 81 - 9\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$$

$$\implies \lambda^2 - 18\lambda + 17 = 0$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 17$.

Logo, a matriz P é constituída pelos autovetores da matriz H, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios associados aos valores próprios λ_1 e λ_2:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz inversa de P.

Procedendo de maneira análoga aos exemplos anteriores, verifica-se que a matriz inversa de P é: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Determinação de $H^{\frac{1}{2}}$.

$$H^{\frac{1}{2}} = P\Lambda^{\frac{1}{2}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{17} \\ 1 & \sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{2} & \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= (I - 4C)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, o solvente da equação polinomial $X^2 + X + C = 0$, é:

$$S = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I-4C)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow S = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{2} & \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix}$$

Agora vamos verifica se $S = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix}$ é solução do polinômio matricial $X^2 + X + C = 0$.

$$X^2 + X + C = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{36-4\sqrt{17}}{16} & \frac{-36+4\sqrt{17}}{16} \\ \frac{-36+4\sqrt{17}}{16} & \frac{36-4\sqrt{17}}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9-\sqrt{17}}{4} & \frac{-9+\sqrt{17}}{4} \\ \frac{-9+\sqrt{17}}{4} & \frac{9-\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{17}}{4} & \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4} & \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz encontrada é solução da equação polinomial matricial: $X^2 + X + C = 0$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho de conclusão de curso mostrou que é possível aperfeiçoarmos alguns conhecimentos matemáticos adquiridos, especialmente durante a graduação, e adquirir outros conhecimentos mais complexos e desconhecidos.

Considerando a matemática uma linguagem universal, desenvolvemos uma análise crítica da evolução do conhecimento sobre a equação do segundo grau fazendo referência aos procedimentos de resolução, enfatizando a fórmula de Bhaskara, pois acreditamos que sem essa análise crítica do processo histórico, a criação de teorias e práticas, respondendo a complexidade do mundo moderno, pode ser pouco eficiente e, sobretudo, conduzir a equívoco.

A intenção central deste trabalho foi tornar possível, a aquisição de uma pequena parte de conhecimento a respeito de equações polinomiais, onde mostramos algumas definições e resultados teóricos que explicam o problema de encontrar soluções de equações polinomiais. Ainda, descrevemos alguns conceitos, definições e teoremas de álgebra Linear e enfatizamos alguns tópicos relacionados às matrizes, determinantes, sistemas lineares, autovalores e autovetores, entre outros, no intuito de divulgar parte da teoria fundamental utilizada para tratar desse assunto.

Ao desenvolver o tema Equações Polinomiais Matriciais, apresentamos algumas idéias que permitiram, primeiramente, entender o problema de encontrar soluções de certas equações polinomiais com coeficientes matriciais, e em segundo lugar, mostrar alguns resultados que ajudaram a descrever um método de resolução de equações polinomiais matriciais quadráticas, que foi abordado no capítulo sobre existência e construção de solventes. Neste capítulo, foi analisado somente o caso quadrático devido à dificuldade de encontrar solventes para uma equação polinomial matricial. Também, incluímos uma generalização da fórmula de Báskara para resolver equações matriciais quadráticas.

Observarmos nessa investigação que esse tema é aplicado em diversas áreas, embora, devido o tempo, não tenhamos demonstrado algumas aplicações. Além disso, verificamos que o problema de encontrar os solventes de uma equação polinomial com coeficientes matriciais é muito difícil de resolver, mesmo existindo casos especiais, com matrizes específicas, que diminuem a dificuldade no encontro da solução, não simplifica o entendimento. Por isso, o nosso trabalho foi realizado somente com equações polinomiais matriciais de segundo grau.

Assim, propomos que a partir dessa dificuldade, de encontrar os solventes de equação polinomial com coeficientes matriciais, sejam realizados outros estudos para que os conhecimentos sejam ampliados.

Enfim, essa investigação caracterizou-se como uma nova etapa das nossas vidas para a construção de novos conhecimentos, onde estes abrirão outras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BAZÁN, F. S. V.: Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações – IMPA; Rio de Janeiro, RJ – 2003.

[2] BOYER, C. **História da Matemática.** 2ª ed. São Paulo: Edgar Blucher,1996.

[3] BOLDRINI, J. L. Álgebra linear, 3ª edição, São Paulo, Harbra – 1980.

[4] CALLIOLI, C. A. Álgebra Linear e Aplicações, 6ª edição, São Paulo: Atual, 1990

[5] CONTADOR, Paulo Roberto Martins, Matemática, uma breve história, 2° edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[6] EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

[7] FRAGOSO. Wagner da Cunha. Uma abordagem Histórica da Equação do segundo grau. In: Revista do professor de Matemática Ano 43, 2000, p. 21- 22.

[8] GONÇALVES, ADILSON; Introdução à Álgebra, 5ª edição, Rio de janeiro – IMPA, 2007

[9] L. H. Jacy Monteiro; Elementos de Álgebra – IMPA – 1969.

[10] LEON, S. J. Álgebra Linear com Aplicações. LTC Editora, Rio de Janeiro - 1999

[11] R. A. Frazer, W. J. Duncan e A. R. Collar, Elementary matrices, 2ªEdit., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1955. Reprint of 1938 edition.

[12] STEINBRUCH, ALFREDO; Álgebra Linear 2ª edição, São Paulo, Pearson-2005