

**UNIVERSIDADE VIRTUAL DO MARANHÃO- UNIVIMA**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC**  
**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA – FORMAÇÃO DO**  
**PROFESSOR**  
**PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU – MODALIDADE A DISTÂNCIA**

**INTRODUÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO**  
**CRESCIMENTO POPULACIONAL**

**Aristóteles Meneses Lima**  
**Marcílio de Macêdo Vieira**

**Caxias – MA**  
**2009**

**ARISTÓTELES MENESES LIMA  
MARCÍLIO DE MACÊDO VIEIRA**

**INTRODUÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO  
CRESCIMENTO POPULACIONAL**

**Monografia exigida como trabalho de  
Conclusão do Curso de Especialização  
em Matemática – formação do professor,  
da Universidade Virtual do Maranhão –  
UNIVIMA, convênio com a Universidade  
Federal de Santa Catarina - UFSC,  
modalidade à distância, pólo de Caxias -  
MA.**

**Orientador:**

**Prof. Dr. Daniel Norberto Kozakevich**

**Caxias - MA**

**2009**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Uma Introdução à Modelagem Matemática Aplicada ao  
Crescimento Populacional"

Monografia submetida a Comissão de  
avaliação do Curso de Especialização  
em Matemática-Formação do professor  
em cumprimento parcial  
para a obtenção do título de  
Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 30/06/2009

Dr. Daniel Norberto Kozakevich (CFM/UFSC - Orientador)

Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Examinador)

Dr. Mario César Zambaldi (CFM/UFSC - Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, junho de 2009.

**Dedico a Deus que sempre esteve ao meu lado dando-me força e coragem em todos os momentos de minha vida, iluminando-me, fazendo de minhas lutas vitórias.**

**Àqueles que amam a perseverança e sabem que é pelo caminho das pedras que se constroem grandes coisas.**

## **AGRADECIMENTOS**

O tempo, dedicação e esforço que fazem parte de um trabalho desta natureza levam-nos naturalmente a agradecer a Deus, por tudo.

Assim, agradeço:

A Deus, onde sempre busco força para as horas mais difíceis, e sempre esta presente em minha vida;

Minha Mãe, pelo incentivo aos estudos durante todos estes anos, pelo companheirismo, dedicação e pelos tantos momentos importantes que tive que me ausentar e pudemos contar, com a compreensão, amor e carinho.

Minha Esposa, pelo companheirismo, dedicação, incentivo e amor.

Ao Professor Daniel Norberto Kozakevich, pela orientação e pela atenção em todas as fases de desenvolvimento deste trabalho.

Enfim a todos que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

Muito obrigado.

À minha família, pela base sólida que sempre me deu força para encarar a vida de frente. Aos meus pais, pela dedicação em formar todos os seus filhos. A minha mãe por cumprir este papel magistralmente e pelo amor intenso. Essa monografia é uma homenagem ao seu trabalho. Ao meu pai por ser tão pai em minha vida, pelos pés no chão e pelo carinho sempre.

Aos meus irmãos, que são exemplo de estudo e força de vontade.

A todos os professores do curso.

Ao orientador professor Daniel Norberto Kazakevich, por todo o conhecimento passado, pelas excelentes supervisões.

Aos meus alunos e instituições trabalhadas, só através de vocês foi possível ser Professor.

Muito obrigado.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABELAS .....	ix
RESUMO .....	x
INTRODUÇÃO .....	11
CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO: A MODELAGEM MATEMÁTICA .....	12
1.1- Modelagem e Modelos Matemáticos .....	12
1.2- A Modelagem Matemática como um meio de aprendizagem .....	14
1.3- Utilizações da Modelagem Matemática .....	17
CAPÍTULO 2- MODELAGEM MATEMÁTICA EM DIFERENTES NATUREZAS .....	20
2.1- Introdução a Sistemas Dinâmicos .....	20
2.1.1- Alguns sistemas dinâmicos .....	21
2.1.2- Análise Dinâmica .....	22
2.1.3- Projeto .....	23
2.1.4- Classificação dos sistemas dinâmicos .....	23
2.1.4.1- Sistemas com parâmetros concentrados e com parâmetros distribuídos .....	23
2.1.4.2- Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo .....	24
2.1.4.3- Sistemas lineares e não lineares .....	24
2.1.4.4- Sistemas contínuos e sistemas discretos .....	25
2.2 - Modelagens dentro de outras ciências .....	25
2.3- As modelagens e as equações que resultam .....	26
CAPÍTULO 3- MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL .....	41
3.1- Modelos Determinísticos de Populações Isoladas .....	41

3.1.1– Modelo Malthusiano .....	42
3.2– Modelo de Interação entre espécies.....	53
3.2.1 – Modelo de Lotka-Volterra .....	53
CONCLUSÕES .....	66
BIBLIOGRAFIA .....	67

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Etapas da Modelagem ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 2.1 - Diagrama de forças agindo sobre um objeto em queda livre ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 2.2 - Campo de Direção para equação (5)..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 2.3 - Campo de direção e solução de equilíbrio para equação (5)..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.1 - Variação de  $f(P)$  ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.2 - Curva Logística ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.3 - Gráfico Espaço fase das equações de Lotka-Volterra ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.4 - Gráfico Espaço fase das equações de Lotka-Volterra. Oscilações... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.5 - Lagarta da broca da cana-de-açúcar ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.6 - Vespa predadora ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Figura 3.7- Esquema da interação broca – vespa..... **Erro! Indicador não definido.**

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 2.1 - Crescimento de Capital a uma Taxa de Rendimento de  $r = 8\%$  para Diversas Composições dos Juros ..... **Erro! Indicador não definido.**
- Tabela 3.1 - Fornece os censos demográficos do Brasil de 1940 a 1991..... **Erro! Indicador não definido.**
- Tabela 3.2 - Projeção de Crescimento exponencial da população brasileira (em milhões de habitantes) ..... **Erro! Indicador não definido.**

## RESUMO

“O presente trabalho tem como título,” INTRODUÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL” cujo foco principal é a aplicação da modelagem matemática em um estudo sobre modelos clássicos de crescimento populacional. No sentido de que a modelagem constitui em um método de ensino-aprendizagem, onde existe estímulo e investigação de problemas de outras áreas do conhecimento, com possibilidade de estabelecer relações entre a matemática e realidade. Seu estudo visa a melhor compreensão da variação do número de indivíduos de uma determinada população e também, dos fatores que a influenciam em tais variações. Por isso, é necessário o conhecimento das taxas que se verificam perdas e ganhos de indivíduos e identificar os processos que regulam a variação da população. O interesse neste trabalho é apenas teórico, nosso principal objetivo é explicitar as fases de uma modelagem matemática e analisar modelos clássicos da literatura, apresentado por Thomas Robert Malthus, Pierri-François Verhulst e de Alfred James Lotka e Vito Valterra

**Palavras – Chaves:** Modelagem Matemática. Crescimento Populacional. Modelos Clássicos.

## INTRODUÇÃO

A pesquisa no campo da matemática aplicada tem tomado grandes proporções neste último século. O grande desenvolvimento tecnológico das ciências médicas, biológicas, físicas, químicas entre outras tem impulsionado pesquisadores a investigação de problemas através das várias áreas existentes.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a modelagem matemática aplicada a modelos contínuos em dinâmicas de populações, apresentando modelos que mostram como elas aumentam e diminuem no tempo, como eles se distribuem pelo espaço, objetivando mostrar como as técnicas matemáticas podem ser instrumentos úteis para dar resposta a problemas da realidade.

No 1º capítulo desse trabalho será descrito a importância da Matemática aplicada, tendo como estratégia de ensino-aprendizagem, questionando o “O que é Modelagem Matemática?” na visão de estudiosos, descrevendo as etapas do processo de modelagem. Por fim é mostradas as utilizações da modelagem matemática.

No capítulo 2, será mostrado como a modelagem está inserida em diversas naturezas. Nele é feita uma introdução sobre sistemas dinâmicos descrevendo alguns sistemas existentes, analisando e classificando-os. Equações do modelo “Objeto em queda livre”, “Lei de Newton do esfriamento/aquecimento”, “Juros compostos”, “Decaimento radioativo”, “Datação do Carbono”, “Misturas” e “Disseminação de uma doença”.

O último capítulo descreverá modelos clássicos de crescimento populacional de uma espécie, como o modelo exponencial de Malthus, o logístico de Verhulst, e o modelo de interação entre duas espécies no caso o de Lotka-Volterra.

## **CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO: A MODELAGEM MATEMÁTICA**

A Modelagem Matemática é uma sub-área da Matemática que visa a resolução de diferentes problemas reais como: fenômenos físicos, econômicos, biológicos, etc. através de um formalismo matemático, o qual permite que se façam previsões ou interpretações em relação ao universo que se pretende modelar.

A Modelagem Matemática é estimulada em parte por interesses externos à Matemática, vindos ou originados de problemas do mundo real. Também, faz parte de um modelo educacional menos alienado e mais comprometido com a realidade do indivíduo onde a sociedade lança mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano.

### **1.1- Modelagem e Modelos Matemáticos**

Na reflexão da realidade, na tentativa de explicar, de entender, selecionamos no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais, formalizando através de um modelo.

O termo modelo, usado em diversas situações, nos leva a considerar que o que concerne é a representação de um sistema. Nesse trabalho limitaremos apenas a dois tipos de modelos:

#### **Modelo Objeto**

É a representação de um objeto ou fato concreto onde a predominância são a estabilidade e homogeneidade das variáveis. Essa representação pode ser pictórica (um desenho, um mapa, etc...), conceitual (Fórmula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de

infectados como sendo homogêneo onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades.

### **Modelo Teórico**

É aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre constituído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou experimentais (reais).

Os modelos matemáticos podem ser formulados e classificados de acordo com a natureza dos fenômenos e a matemática utilizada:

#### *Linear ou não-linear*

São modelos que conforme suas equações básicas tenham estas características.

#### *Estático ou Dinâmico*

Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; Dinâmico, quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colméia.

#### *Educacional ou Aplicativo*

Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo típico de tais modelos. O método empregado por tais modelos envolvem a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. Geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos está na aquisição de experiências e no fornecimento de idéias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada; Aplicativo é aquele baseado em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve interrelações de um grande número de variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com numerosos parâmetros. Neste caso, um tratamento

analítico pode ser impossível e os métodos utilizados para obtenção das soluções devem ser computacionais. E quando mais complexo for o modelo, mais difícil será mostrar sua validade, isto é, que ele descreve a realidade.

### *Estocásticos ou Determinísticos*

São modelos de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações. Os modelos determinísticos são baseados na suposição que se existem informações suficientes em um determinado instante ou num estágio de algum processo, então todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente. Os modelos estocásticos são aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

## **1.2– A Modelagem Matemática como um meio de aprendizagem**

Com a evolução da tecnologia, dos processos de aprendizagens, novos desafios vão surgindo e, entre eles, uma formação de cidadão capaz de comandar diversos setores e atividades da sociedade, tendo primazia e maior valorização às aplicações da matemática nos diferentes campos da atividade humana.

Na Educação Matemática, esses desafios também aparecem e provocam mudanças na forma de ensino, dando ao aluno a oportunidade de pensar independentemente.

Modelar, segundo dicionário da Língua Portuguesa, designa uma representação de alguma coisa, é aquilo que serve de referência ou é dado para ser produzido. Na Matemática, um modelo pode ser uma expressão, uma fórmula, um gráfico, uma equação. O modelo segundo Scheffer (1999) representa uma situação real e pode ser uma figura, um desenho, uma maquete, uma fórmula. Para Biembengut e Hein (2002), o modelo retrata, ainda, em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada. O modelo é então uma imagem que se forma

quando o indivíduo tenta compreender e expressar alguma sensação, relacionado-a com algo que já conhece.

Segundo D'Ambrósio (1986), é o modelo que faz a ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade; através da reflexão o indivíduo cria o modelo como um instrumento de auxílio à compreensão da realidade. O indivíduo age sobre a realidade de acordo com as estratégias definidas por um processo de criação do modelo.

Na elaboração e construção de um modelo, trabalha-se com modelagem matemática que implica o conhecimento matemático, a intuição, a criatividade e a capacidade para desenvolver o conteúdo matemático que faz parte de cada problema. Assim, a Modelagem Matemática constitui uma possibilidade que é muito usada em outras áreas do conhecimento também, que devem despertar no aluno capacidades de criar e resolver situações-problema e principalmente, formular e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mais que, posteriormente, sirvam como suporte para outras aplicações e teorias.

O que é Modelagem Matemática?

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Nesta perspectiva o autor entende que sempre se faz necessário a formulação de um modelo matemático, seguindo as idéias das Ciências, estas apresentadas por Descartes (1637).

A modelagem matemática nesta concepção consiste nas seguintes etapas: 1) experimentação; 2) abstração (seleção de variáveis, problematização ou formulação de problemas, formulação de hipóteses, simplificação); 3) resolução; 4) validação; e 5) modificação (caso seja necessário alterar o modelo).

A experimentação é um processo de caráter laboratorial em que se levantam os dados referentes aos experimentos. Nesta etapa é fundamental a presença de um matemático (conhecedor de conteúdos e conceitos), para ajudar no

direcionamento da pesquisa. O tratamento estatístico tende a facilitar a confiabilidade dos dados obtidos na experimentação.

A abstração deve conduzir a formulação de modelos matemáticos. A seleção de variáveis é uma subetapa e deve ser feita distinguindo-se as variáveis de estado, que descrevem a evolução do sistema, das variáveis de controle, que interferem no sistema. Na problematização ou formulação de problemas, elaboram-se enunciados claros, compreensíveis e operacionais, portanto, um problema se constitui em uma pergunta científica. A formulação de hipóteses conduz a investigação e se refere à frequência da inter-relação entre as variáveis observadas empiricamente.

Na resolução é efetuada a substituição da linguagem natural das hipóteses pela linguagem Matemática coerente com intuito de se obter um modelo. Essa resolução é efetuada por um matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada.

A validação é a aceitação ou a rejeição do modelo proposto. Faz a validação do modelo a partir dos dados obtidos empiricamente através de aproximações, sendo necessário representar, no mínimo, para que o modelo seja aceito.

A modificação ocorre quando as previsões, possíveis de serem feitas como o auxílio do modelo, são distante da realidade por algum motivo ou deficiência nas etapas anteriores: na coleta de dados, na formulação dos problemas e das hipóteses, no caso de o sistema ter sido demasiadamente simplificado e terem sido consideradas as variáveis necessárias ou ainda no caso de se encontrar outro caminho ou teoria que, não a esperada.

A figura 1.1 a seguir representa as etapas descritas acima (BASSANEZI, 2002, p. 27)

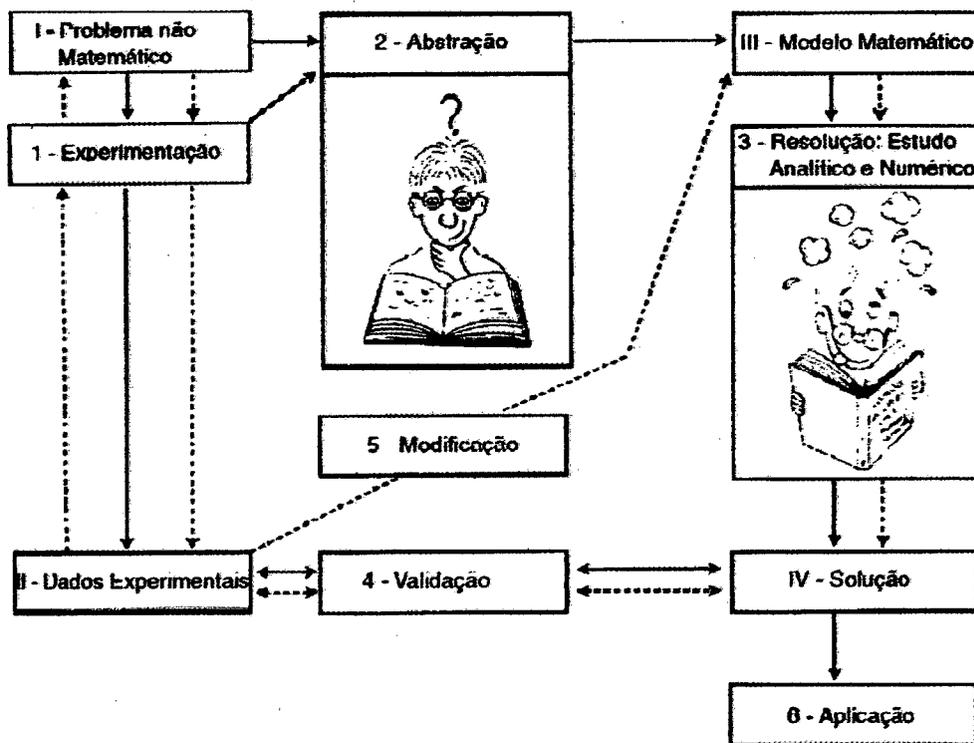


Figura 1.1. As setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

### 1.3- Utilizações da Modelagem Matemática

A utilização da matemática como base para a compreensão do mundo que nos cerca esteve durante muito tempo limitado, de um modo geral, às ciências físicas e engenharia. As outras ciências como biologia, química, psicologia, economia, etc. em contra partida, sempre se valeram muito, mas da utilização da linguagem natural para exprimir suas idéias, o que, de maneira geral, resultavam em menos clareza nas definições de conceitos e, conseqüentemente, em maior risco de imprecisão.

Atualmente, encontramos, de acordo com Bassanezi, um quadro diverso, pois "... a ciência contemporânea é fruto de experiências planejadas e auxiliadas

por teorias sujeitas à evolução. A consistência de uma teoria e sua própria validação tem sido dependentes, muitas vezes, da linguagem matemática que a envolve...” Esse movimento também foi responsável por um substancial desenvolvimento da própria matemática, de acordo com as demandas das diversas áreas de pesquisas por novas teorias. De fato, se hoje podemos reconhecer que a Física, a Química, a Computação e as Engenharias se encontram amplamente matematizadas em seus aspectos teóricos, também é notável um movimento de matemátização, por exemplo, das ciências biológicas. O estudo de fenômenos pela ótica biológica vem se tornando cada vez mais dependente de um forte aparato matemático.

As modelagens são um produto dessa sofisticação teórica da ciência e o seu objetivo é constituir objetos mais simples com as ferramentas da matemática, em particular as equações diferenciais, visando à sofisticação de instrumentos, em que permitam não apenas uma compreensão adequada de um determinado fenômeno e de suas tendências no tempo, mas também a formulação de programas de intervenção que possam ordenar, organizar, mudar, prever e mesmo prevenir, no que diz respeito à sua ocorrência e seus desdobramentos, fenômenos, sejam eles físicos, naturais, sociais ou culturais. Os estudos demográficos são essenciais para ilustrar o potencial dessa ferramenta e por envolverem questões relacionadas aos quatro aspectos fenomenológicos mencionados acima.

A modelagem matemática oferece-se como um importante mecanismo para o planejamento do futuro, com resultados tanto mais acertados quanto maior for o número de variáveis pertinentes com que o modelo trabalha e maior for a capacidade de formulação e análise de tendências que ela estabelece.

As aplicações da modelagem matemática, com o amplo desenvolvimento das tecnologias de informação, abrem-se, contudo, para os mais diversos campos do conhecimento e dos interesses tecnológicos e econômicos: desde o futebol, com a utilização do tira-teima para dirimir dúvidas sobre lances duvidosos, passando por programas mais sofisticados como o Juiz Virtual<sup>1</sup>, até as aplicações em medicina,

---

<sup>1</sup> Juiz Virtual coloca à disposição do público uma tecnologia de modelagem baseada em imagens semelhante à utilizada em programas como Tira-Teima e Câmera Band, popularizados nas transmissões pela TV. Juiz Virtual permite criar um ambiente tridimensional a partir de uma imagem de um jogo de futebol, bastando que nela sejam indicadas as traves, as marcações do campo e as

**em biomatemática, em economia e finanças, em meteorologia, em meio ambiente, em manutenção de equipamentos pesados e de alta complexidade, em música, em administração e planejamento de projetos empresariais, em inteligência artificial, enfim, nos mais diferentes aspectos da vida e de suas manifestações culturais.**

---

posições da bola e dos jogadores. Com estas informações é possível, então, determinar a posição original da câmera e "movê-la" para um ponto mais favorável, que permita uma melhor observação da jogada (para determinar, por exemplo, se houve ou não impedimento). Juiz Virtual foi desenvolvido nos laboratórios Visgraf (IMPA) e TecGraf (PUC-Rio). Esta registrado no INPI sob no. 00032002.

## **CAPÍTULO 2- MODELAGEM MATEMÁTICA EM DIFERENTES NATUREZAS**

Neste capítulo descreveremos uma introdução sobre sistemas dinâmicos, aplicações de modelagem matemática em outras áreas também serão abordados vários problemas e sua modelização, entre eles estão “Um objeto em queda livre”, “Campos de direções”, “Juros Compostos”, “Decaimento Radioativo”, “Datação do Carbono”, “Lei de Newton de Esfriamento/Aquecimento”, “Disseminação de uma doença” e “Misturas”.

### **2.1- Introdução a Sistemas Dinâmicos**

Sistema é um conjunto de componentes intercalados, que apresenta certas relações de causa e efeito e que atua como um todo, com um determinado objetivo.

Sistemas dinâmicos envolvem a modelagem matemática, a análise e a simulação de sistemas físicos, híbridos, resultantes da combinação de dois ou mais sistemas. A teoria dos sistemas dinâmicos pode ser aplicada a outros tipos de sistemas, tais como sistemas biológicos, econômicos, etc.

É importante diferenciar um sistema estático de um sistema dinâmico. O sistema estático é aquele em que as propriedades descritivas do sistema não variam com o tempo, podendo variar espacialmente. Já no sistema dinâmico tais propriedades variam no tempo, podendo também variar espacialmente.

Os sistemas dinâmicos não são necessariamente de natureza física. Podemos ter sistemas econômicos, sistemas biológicos, sistemas de informação, sistemas ecológicos, sistemas de trânsito, etc.

## **2.1.1- Alguns sistemas dinâmicos**

### **Sistemas mecânicos**

São sistemas que possuem massas e/ou inércias, as quais armazenam energia cinética e potencial gravitacional, assim como elementos armazenadores de energia potencial elástica (molas) e dissipadores de energia mecânica (amortecedores). Normalmente, suas entradas são forças, torques ou deslocamentos. Também podem ser colocados em movimento através da imposição de condições iniciais, tais como deslocamentos iniciais e/ou velocidades iniciais.

### **Sistemas elétricos**

Normalmente são constituídos por circuitos elétricos que possuem componentes passivos, tais como resistores, capacitores e indutores, os quais são excitados por geradores de voltagem ou corrente. Já os circuitos eletrônicos envolvem também o emprego de transistores e amplificadores. Devido a disponibilidade e ao controle que temos sobre a energia elétrica, os sistemas elétricos são os que mais estão presentes na nossa vida diária.

### **Sistemas fluidos**

*Classificam-se em dois grandes grupos, conforme a natureza dos fluidos utilizada: sistemas hidráulicos, quando o fluido de trabalho é um líquido, tal como água ou óleo, e sistemas pneumáticos, quando o fluido de trabalho é um gás, tal como ar, nitrogênio, etc. São constituídos por orifícios, restrições, válvulas de*

controle, reservatórios, tubulações e atuadores por geradores de pressão ou escoamento de um fluido.

### **Sistemas térmicos**

Possuem componentes que oferecem resistência térmica à transferência de calor e componentes que apresentam a propriedade de capacitância térmica quando excitados por uma diferença de temperatura ou um fluxo de calor.

### **Sistemas híbridos**

São sistemas que combinam dois tipos de sistemas citados anteriormente. Conforme a combinação, podemos ter, dentre outros: sistemas eletromecânicos, sistemas fluidomecânicos, sistemas termomecânicos, sistemas eletrotérmicos.

## **2.1.2- Análise Dinâmica**

A análise dinâmica é o estudo da relação de causa e efeito entre excitação e resposta de um sistema, a excitação e resposta é quando solicitado por uma dada excitação, o sistema exibe certo comportamento chamado de resposta.

**Etapas do processo de análise:**

1. Identificar o sistema a ser modelado e analisado.
2. Escrever as equações para cada componente do sistema, a partir de equações constitutivas adequadas.

3. A partir de Leis Físicas, de acordo com a natureza do sistema, obter o modelo matemático do mesmo.
4. Resolver o modelo matemático e comparar o resultado teórico obtido com resultados experimentais. Se a diferença for pequena, pode-se aceitar o modelo; caso contrário, modificar o modelo e refazer a análise.

### **2.1.3- Projeto**

Projeto é a criação de um sistema que, ao ser solicitado por excitações conhecidas, apresente respostas especificadas. O projeto envolve praticamente todos os estágios da análise, a qual, agora deverá ser repetida várias vezes. O projeto não é único, podendo haver vários projetos apresentando desempenho satisfatório.

### **2.1.4- Classificação dos sistemas dinâmicos**

Uma classificação dos sistemas dinâmicos é feita de acordo com vários critérios, ela é importante porque revela uma ligação matemática com a modelagem.

#### **2.1.4.1- Sistemas com parâmetros concentrados e com parâmetros distribuídos**

No desenvolvimento do modelo matemático é necessário identificar os componentes do sistema e determinar as suas características individuais. Tais características são governadas por leis físicas e são descritas em termos dos chamados parâmetros do sistema. Os sistemas podem ser divididos em duas grandes classes, conforme a natureza de seus parâmetros: aqueles cujos

parâmetros não dependem das coordenadas espaciais, são chamados sistemas com parâmetros concentrados, e aqueles cujos parâmetros dependem de coordenadas espaciais, denominamos sistemas com parâmetros distribuídos. No primeiro caso, a excitação e a resposta dependem apenas do tempo, logo são descritos por equações diferenciais ordinárias; já no caso de parâmetros distribuídos, a excitação e a resposta dependem do tempo e a das coordenadas espaciais, logo são descritos por equações diferenciais parciais.

#### **2.1.4.2- Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo**

No modelo matemático, nas equações diferenciais, os parâmetros do sistema aparecem sob forma de coeficientes. Se os coeficientes são constantes, dizemos que o sistema é invariante no tempo, se não, o sistema é considerado variante no tempo.

#### **2.1.4.3- Sistemas lineares e não lineares**

Teoria fundamental da teoria dos sistemas lineares

Para um sistema linear, respostas a diferentes excitações podem ser obtidas separadamente e depois combinadas linearmente, o que constitui o princípio da superposição.

A grande vantagem dos sistemas lineares é que o modelo matemático dos mesmos é descrito por um sistema de equações diferenciais lineares, que são de

fácil solução analítica. Já no modelo de sistemas não lineares é descrito por equações diferenciais não lineares, as quais são de difícil solução analítica.

#### **2.1.4.4- Sistemas contínuos e sistemas discretos**

Se um sistema submetido a uma entrada contínua no tempo, apresentar uma saída também contínua, ele é chamado de sistema contínuo e o seu modelo matemático será constituído por equações diferenciais. Por outro lado, se um sistema submetido a uma entrada discreta no tempo, apresentar uma saída também discreta, ele é chamado de sistema discreto e o seu modelo matemático será constituído por equações diferenciais finitas.

## **2.2 - Modelagens dentro de outras ciências**

A matemática é uma ciência universal. Portanto, está ligada nas ciências exatas, humanas e sociais. Temos dentro da física, dentre outras destacamos a modelagem do movimento simples do pêndulo e um sistema massa – mola. Na química, dentre outras destacamos a modelagem das misturas e o decaimento radioativo, na biologia destacamos a modelagem do crescimento de bactérias, nas humanas,... , nas sociais destacamos o crescimento de cidades e o tráfico urbano.

A modelagem é um processo e esse processo de busca de uma visão bem estruturada da realidade (esclarecimento) é fundamentalmente um fenômeno de modelagem que é tão antigo quanto à própria matemática, surgido de aplicações na rotina diária dos povos antigos.

Deste a antiguidade, a matemática vem servida como instrumento para interpretar tais fenômenos, os homens fazem uso da matemática, constroem modelos, e trabalham a matemática como uma das ferramentas na busca de soluções.

A busca dessas soluções para descrever tais fenômenos ou situações vai ao encontro da modelagem matemática, cujo objeto é equacionar uma situação real e auxiliar na tomada de decisão através da utilização de ferramentas matemáticas.

Neste trabalho, tivemos como objetivo estudar um modelo matemático que melhor se adapta aos dados pré – estabelecidos numericamente em exemplos, além da familiarização com alguns conceitos e métodos essenciais de equações diferenciais que busca o desenvolvimento de aspectos fundamentais. Primeiramente, a importância de equações diferenciais na modelagem dos diversos fenômenos, incluindo as clássicas aplicações em mecânica, assim como os modelos em química com relação às misturas e os modelos de dinâmica populacional com o modelo presa – predador.

As principais leis associadas às ciências são representadas por Equações Diferenciais Ordinárias. Tais leis nos permitem investigar problemas em mecânica, circuitos, reações químicas, crescimento populacional, dentre outros.

### **2.3- As modelagens e as equações que resultam**

#### **Um objeto em queda livre**

Suponha que um objeto está caindo na atmosfera perto do nível do mar. Formularemos uma equação diferencial que descreva o movimento.

Começamos usando letras para representar as diversas quantidades de interesse nesse problema. O movimento ocorre durante um determinado intervalo de tempo, logo vamos usar  $t$  para denotar o tempo. Além disso, vamos usar  $v$  para

representar a velocidade do objeto em queda. A velocidade deve variar com o tempo, ou seja,  $V = f(t)$ , em outras palavras,  $t$  é a variável independente e  $v$  é variável dependente. A escolha de unidades de medida é um tanto arbitrária e não há nada no enunciado do problema que sugira unidades apropriadas, de modo que estamos livres para escolher unidades que nos pareçam razoáveis. Especificadamente, vamos medir o tempo  $t$  em segundos ( s ) e a velocidade  $v$  em metros por segundo ( m/s ). Além disso, vamos supor que a velocidade  $v$  é positiva quando o sentido do movimento é para baixo, isto é, quando o objeto está caindo.

A lei física que governa o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual a força total atuando sobre o objeto. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação

$$F = ma. \tag{1}$$

Nessa equação,  $m$  é a massa do objeto,  $a$  sua aceleração e  $F$  a força total agindo sobre o objeto. Para manter nossas unidades consistentes, mediremos  $m$  em quilogramas (kg),  $a$  em metros por segundo ao quadrado ( $m/s^2$ ) e  $f$  em Newton (N). É claro que  $a$  e  $v$  estão relacionadas por  $a = dv/dt$ , de modo que podemos reescrever a equação (1) na forma

$$F = m(dv/dt) \tag{2}$$

A seguir, considere as forças que agem em um objeto em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou  $mg$ , onde  $g$  é a aceleração devida à gravidade. Nas unidades de medida que escolhemos,  $g$  foi determinada experimentalmente como sendo aproximadamente igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$  próximo à superfície da Terra. Existe, também, uma força devido à resistência do ar, que é mais difícil de modelar. Esse não é o local para uma discussão aprofundada da força de resistência do ar; basta dizer aqui para o nosso estudo que se supõe, muitas vezes, que a resistência do ar é proporcional à velocidade, e faremos essa hipótese aqui. Dessa forma, a força de resistência do ar tem tamanho (ou módulo)  $kv$ , onde  $k$  é uma constante chamada de coeficiente de resistência do ar.

Ao escrever uma expressão para força total  $F$ , precisamos lembrar que a gravidade sempre age para baixo (no sentido positivo), enquanto a resistência do ar age para cima (no sentido negativo), como ilustrado na figura 1.a. logo,

$$F = mg - kV \quad (3)$$

e a equação (2) torna-se

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (4)$$

A equação (4) é um modelo matemático de um objeto caindo na atmosfera, próximo do nível do mar. Note que o modelo contém as três constantes  $m$ ,  $g$  e  $k$ . As constantes  $m$  e  $k$  dependem bastante do objeto particular que está caindo e será diferente, em geral, para objetos diferentes. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado, o valor de  $g$  é o mesmo para todos os objetos.



Figura 2.1. Diagrama de forças agindo sobre um objeto em queda livre.

Para resolvermos a equação (4), precisamos encontrar uma função  $v = v(t)$  que satisfaça a equação. Entretanto, vamos ver o que podemos descobrir sobre soluções sem encontrar, de fato, qualquer uma delas. A tarefa pode ser ligeiramente simplificada se atribuirmos valores numéricos para  $m$  e  $k$ , mas o procedimento é o mesmo, independente dos valores escolhidos. Vamos supor então que  $m = 10 \text{ kg}$  e  $k = 2 \text{ kg}$ . Se as unidades de  $k$  parecerem estranhas, lembre-se que  $k$  tem que ter unidades de força, isto é,  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ . A equação (4) fica, então,

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} \quad (5)$$

Investigando o comportamento das soluções da equação (5) sem encontrar, de fato, as soluções em questão.

Vamos proceder analisando a equação (5) de um ponto de vista geométrico. Suponha que  $v$  tem um determinado valor. Então, calculando a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (5), encontramos o valor correspondente de  $dv/dt$ . Por exemplo, se  $v = 40$ , então  $dv/dt = 1,8$ . Isso significa que a inclinação de uma solução  $v = v(t)$  tem o valor 1,8 em qualquer ponto onde  $v = 40$ . Podemos apresentar essa informação graficamente no plano  $txv$  desenhando pequenos segmentos de reta com o coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta  $v = 40$ . Analogamente, se  $v = 50$ , então  $dv/dt = -0,2$ , logo desenhamos segmentos de reta com coeficiente angular  $-0,2$  em diversos pontos ao longo da reta  $v = 50$ . Procedendo a mesma maneira com outros valores de  $v$ , obtemos a Figura 2.2, que é um exemplo do que é chamado de um **campo de direções**.

A importância da Figura 2.2 é que cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da equação (5). Assim, mesmo não tendo qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura, podemos fazer deduções quantitativas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se  $v$  for menor do que certo valor crítico, então todos os segmentos de reta têm coeficientes angulares positivos e a velocidade do objeto em queda aumenta enquanto ele cai. Por outro lado, se  $v$  for maior do que o valor crítico, então os segmentos de reta têm coeficientes angulares negativos e o objeto em queda vai diminuindo a velocidade à medida que cai. Qual é esse valor crítico de  $v$  que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Referindo-nos, novamente, à equação (5), perguntamos: quais os valores de  $v$  que farão com que  $dv/dt$  seja zero? A resposta é  $v = (5)(9,8) = 49 \text{ m/s}$ .

De fato, a função constante  $v = 49$  é uma solução. Para verificar essa afirmação, substituímos  $v(t) = 49$  na equação (5) e note que as expressões dos dois lados do sinal de igualdade são iguais a zero. Como essa solução não varia com o tempo,  $v(t) = 49$  é chamada de **solução de equilíbrio**. Essa é a solução que

corresponde a um equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar. Mostramos, na Figura 2.3, a solução de equilíbrio superposta no campo de direções. Dessa figura podemos chegar a uma outra conclusão, a saber, que todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando  $t$  aumenta.

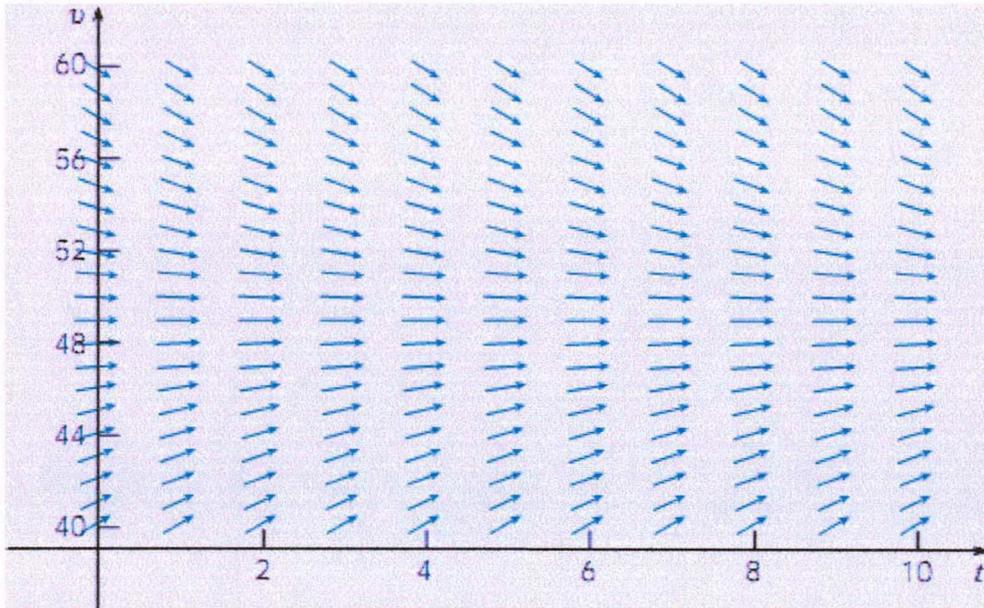


Figura 2.2. Um campo de direção para a Eq. (5).

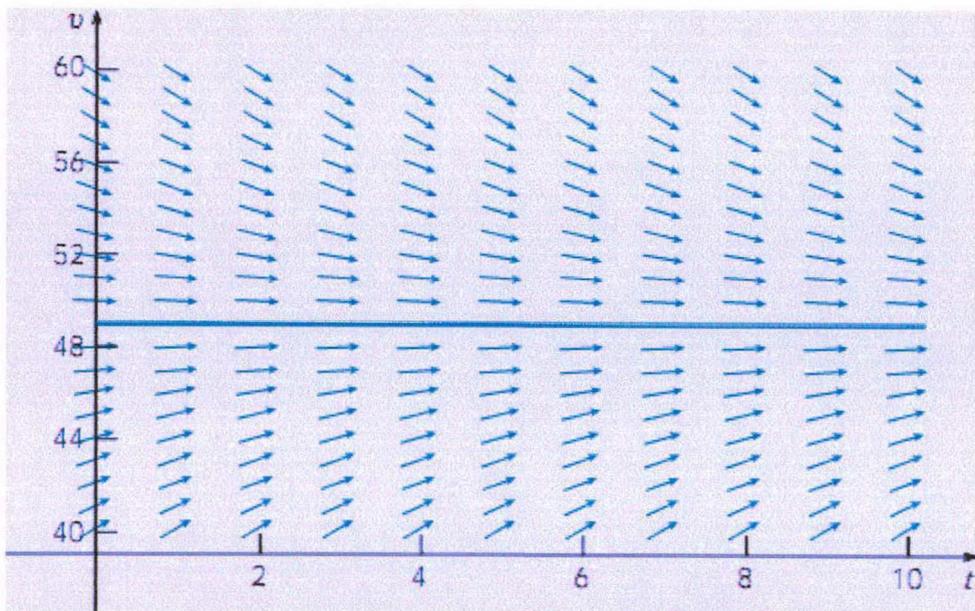


Figura. 2.3. Campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (5).

A abordagem ilustrada pode ser igualmente aplicada à Eq. (4), mais geral, onde os parâmetros  $m$  e  $k$  são números positivos não especificados. Os resultados são, essencialmente, idênticos aos apresentados anteriormente. A solução de equilíbrio da Eq. (4) é  $v(t) = MG/y$ . Soluções abaixo da equação de equilíbrio aumentam de velocidade e todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio quando  $t$  fica muito grande.

**Campos de Direções** – são ferramentas úteis no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (6)$$

onde  $f$  é uma função dada de duas variáveis,  $t$  e  $y$ , algumas vezes chamada de **função taxa de variação**. A equação no Exemplo 2 é um pouco mais simples, pois  $f$  depende apenas da variável dependente. Um campo de direções útil para equações da forma geral (6) pode ser construído calculando em, pelo menos, algumas centenas de pontos. Então, em cada ponto da malha desenha-se um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função  $f$  naquele ponto. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa idéia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. A construção de um campo de direções é, muitas vezes, um primeiro passo bastante útil na investigação sobre uma equação diferencial.

Vale a pena fazer duas observações. A primeira é que, para construir um campo de direções, muitas vezes não precisamos resolver a equação (6), bastando calcular a função  $f(t, y)$  dada. Dessa forma, campos de direção podem ser construídos com facilidade mesmo para equações muito difíceis de resolver. A segunda é que cálculos repetidos de uma função dada é uma tarefa para a qual um computador é particularmente apropriado e você deve, em geral, usar um computador para desenhar um campo de direções.

## Juros compostos.

Suponha que uma certa quantidade de dinheiro é depositada em um banco ou fundo de investimento que paga juros a uma taxa anual  $r$ . O valor  $S(t)$  do investimento em qualquer instante  $t$  depende da frequência na qual os juros são compostos, bem como da taxa de juros. Instituições financeiras têm políticas diferentes sobre a composição dos juros: algumas calculam os juros mensalmente, outras semanalmente, outras diariamente. Se supusermos que os juros são calculados continuamente, podemos escrever um problema de valor inicial que descreva o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é  $dS/dt$  e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual o investimento aumenta, que é a taxa de juros  $r$  vezes o valor corrente do investimento  $S$ . Assim,

$$dS / dt = rS \quad (7)$$

é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos, também, o valor do investimento em um instante particular, por exemplo,

$$S(0) = S_0. \quad (8)$$

Então, a solução do problema de valor inicial (7), (8) nos dá o saldo  $S(t)$  na conta em qualquer instante  $t$ . Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial (7) é linear e separável. Logo, resolvendo as Eqs. (7) e (8), encontramos

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \quad (9)$$

Portanto, uma conta bancária onde os juros são compostos continuamente cresce exponencialmente.

Vamos comparar, agora, os resultados desse modelo contínuo com a situação onde os juros compostos em intervalos de tempo finitos. Se os juros são calculados uma vez por ano, então, após  $t$  anos,

$$S(t) = S_0(1+r)^t.$$

Se os juros calculados duas vezes por ano, então, ao final de 6 meses, o valor do investimento é  $S_0[1+(r/2)]$  e, ao final de 1 ano, é  $S_0[1+(r/2)]^2$ . Assim, ao final de  $t$  anos, temos

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

Em geral, se os juros são calculados  $m$  vezes ao ano, então

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \quad (10)$$

A relação entre as fórmulas (9) e (10) fica mais clara se lembramos, do cálculo, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

Esse mesmo modelo pode ser aplicado da mesma forma a investimentos em geral, onde pode-se acumular dividendos e até ganhos de capital, além de juros. Devido a isso, vamos nos referir de agora em diante a  $r$  como sendo a taxa de rendimento.

A tabela 2.1 mostra o efeito do aumento da frequência de cálculo para uma taxa de rendimento  $r$  de 8%. As segunda e terceira colunas são calculadas usando-se a Eq. (10) para o cálculo trimestral e o diário, respectivamente, e a quarta coluna é calculada pela Eq. (9) para o cálculo contínuo. Os resultados mostram que a frequência de cálculo não é particularmente importante na maioria dos casos. Por exemplo, durante um período de 10 anos, a diferença entre o cálculo trimestral e o contínuo é de R\$ 17,50 por R\$ 1 000,00 investidos, ou menos de R\$ 2,00 por ano. A diferença seria um pouco maior para taxas de rendimento maiores e seria um pouco menor para taxas de rendimento menores. Pela primeira linha a tabela, vemos que, para a taxa de rendimento  $r = 8\%$ , os juros compostos anuais calculados trimestralmente correspondem a 8,24% e os calculados diariamente ou continuamente correspondem a 8,33%.

Tabela 2.1 Crescimento de Capital a uma Taxa de Rendimento de  $r = 8\%$  para Diversas Composições dos Juros

Anos	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (10)		$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (9)
	$m = 4$	$m = 365$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Voltando ao caso da composição contínua, vamos supor que podem existir depósitos e saques, além do acréscimo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se supusermos que os depósitos ou saques são feitos a uma taxa constante  $k$ , então a Eq. (7) é substituída por

$$dS/dt = RS + k,$$

ou, em forma padrão,

$$dS/dt - RS = k, \tag{11}$$

onde a constante  $k$  é positiva para depósitos e negativa para saques.

A Eq. (11) é claramente linear com fator integrante  $e^{-rt}$ , logo sua solução geral é

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (8), precisamos escolher  $c = S_0 + (k/r)$ . Logo, a solução do problema de valor inicial (11), (8) é

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \tag{12}$$

A primeira parcela na fórmula (12) é a parte de  $S(t)$  devida ao rendimento acumulado sobre o investimento inicial  $S_0$ , enquanto a segunda parcela é a parte devida à taxa  $k$  de depósito ou saque.

A vantagem de enunciar o problema dessa forma geral, sem valores específicos para  $S_0$ ,  $r$  ou  $k$ , é generalidade da fórmula resultante, (12), para  $S(t)$ . Com essa fórmula, podemos comparar, facilmente, os resultados de programas de investimento diferentes ou taxas diferentes de rendimento.

Por exemplo, suponha que uma pessoa abre uma conta (PREV) para complementar sua aposentadoria com 25 anos e faz investimentos anuais de R\$ 2000,00 daí para a frente de um modo contínuo. Supondo uma taxa de rendimento de 8% ao ano, qual será o saldo na conta PREV quando a pessoa tiver 65 anos? Temos  $S_0 = 0$ ,  $r = 0,08$ ,  $k = \text{R\$ } 2000,00$  e queremos determinar  $S(40)$ . Da Eq. (12), temos

$$S(40) = 25.000(e^{3,2} - 1) = \$588.313.$$

É interessante observar que a quantia total investida é de R\$ 80.000, de modo que a quantia a mais, R\$508.313, resulta do rendimento acumulado sobre o investimento. O saldo depois de **40 anos é bastante sensível à taxa suposta**. Por exemplo,  $S(40) = \text{R\$}508.948$  se  $r = 0,075$  e  $S(40) = \text{R\$}681.508$  se  $r = 0,085$ .

Vamos examinar, agora, as hipóteses que usamos no modelo. Primeiro, supusemos que o rendimento é composto continuamente e que o capital adicional é investido continuamente. Nenhum desses fatos é verdadeiro em uma situação financeira real. Supusemos, também, que a taxa de rendimento  $r$  é constante durante todo o período em questão, enquanto, de fato, ela provavelmente flutuará bastante. Embora não possamos prever taxas futuras de maneira confiável, podemos usar a fórmula (12) para determinar os efeitos aproximados das projeções de taxas diferentes. É possível, também, considerar  $r$  e  $k$  na Eq. (11) como funções de  $t$ , em vez de constantes; é claro que, nesse caso, a solução pode ser muito mais complicada do que a Eq. (12).

O problema de valor inicial (11), (8) e a solução (12) também podem ser usados para analisar outras diversas situações financeiras, incluindo pensões, hipotecas, financiamentos de imóveis e financiamentos de carros, entre outros.

## Decaimento radioativo

O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e nêutrons. Muitas dessas combinações são instáveis, isto é, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outra substância. Esses núcleos são chamados de radioativos. Por exemplo, ao longo do tempo, o altamente radioativo elemento rádio, Ra-226, transmuta-se no gás radônio radioativo, Rn-222.

Para modelar o fenômeno de decaimento radioativo, supõe-se que a taxa  $\frac{dA}{dt}$  segundo a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade (mais precisamente, ao número de núcleos)  $A(t)$  de substância remanescente no instante  $t$ .

Naturalmente, as equações são exatamente iguais ao modelo de crescimento de Malthus. A diferença reside apenas na interpretação dos símbolos e nas constantes de proporcionalidade.

Uma única equação diferencial pode servir como um modelo matemático para vários fenômenos diferentes.

## Datação do carbono.

Por volta de 1950, o químico Willard Libby inventou um método de usar o carbono radioativo como um meio para determinar a idade aproximada dos fósseis. Por seu trabalho Libby ganhou o Prêmio Nobel de química em 1960. A teoria da datação por carbono baseia-se no fato de que o isótopo carbono-14 é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica sobre o nitrogênio. A razão da quantidade de C-14 em relação ao carbono comum na atmosfera parece ser uma constante e, conseqüentemente, a quantidade proporcional de isótopo presente em todos os organismos vivos é a mesma na atmosfera. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, por meio da respiração ou alimentação, cessa. Assim, comparando a quantidade proporcional de C-14 presente, digamos, em um fóssil,

com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma estimativa razoável da idade do fóssil. O método baseia-se no conhecimento de que a meia-vida do radioativo C-14 é aproximadamente 5.600 anos.

### **Lei e Newton do Esfriamento/Aquecimento.**

De acordo com a lei empírica de Newton do estriamento/resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura de um corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Logo, a formação matemática é dada pela equação diferencial linear de 1ª ordem

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade,  $T(t)$  é a temperatura do objeto para  $t > 0$  e  $T_m$  é a temperatura ambiente.

### **Disseminação de uma Doença**

Uma doença contagiosa, por exemplo, um vírus de gripe, espalha-se em uma comunidade por meio de contato entre as pessoas. Seja  $x(t)$  o número de pessoas que contraíram a doença e  $y(t)$  o número de pessoas que ainda não foram expostas.

É razoável supor que a taxa  $\frac{dx}{dt}$  segundo a qual a doença se espalha seja proporcional ao número de encontros ou interações entre esses dois grupos de pessoas. Se supusermos que o número de interações é conjuntamente proporcional a  $x(t)$  e a  $y(t)$ , então

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade usual.

Suponha que uma pequena comunidade tenha uma população fixa de  $n$  pessoas. Se uma pessoa infectada for introduzida na comunidade, pode-se argumentar que  $x(t)$  e  $y(t)$  estão relacionados por  $x + y = n$ . Portanto, obtemos o modelo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx(n+1-x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

## Misturas

A mistura de duas soluções salinas com concentrações diferentes dá origem a uma equação diferencial de primeira ordem para a quantidade de sal contida na mistura.

Vamos supor que um grande tanque de mistura contenha 300 galões de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma determinada quantidade de libras de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de três galões por minuto; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 2 libras por galão. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa em que a segunda salmoura entrar. Se  $A(t)$  denotar a quantidade de sal (medida em libras) no tanque no instante  $t$  minutos, a taxa segundo a qual  $A(t)$  está variando com o tempo será uma taxa líquida:

$$\frac{dA}{dt} = (\text{taxa de entrada de sal}) - (\text{taxa de saída de sal}) = R_e - R_s$$

A taxa de entrada  $R_e$  de sal (em libras por minuto) é

taxa de entrada  
de salmoura

taxa de entrada  
de sal



$$R_e = (3 \text{ gal/min}) \cdot (2 \text{ lb/Gal}) = 6 \text{ lb/min}$$



Concentração de sal  
no fluxo de entrada

Uma vez que a solução está sendo bombeada para fora e para dentro do tanque à mesma taxa, o número de galões de salmoura no tanque no instante  $t$  é constante e igual a 300 galões. Assim sendo, a concentração de sal no tanque e no fluxo de saída é de  $\frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal}$  e a taxa de saída de sal  $R_s$  é

taxa de entrada  
de salmoura

taxa de entrada  
de sal



$$R_s = (3 \text{ gal/min}) \cdot \left( \frac{A}{300} \text{ lb/Gal} \right) = \frac{A}{100} \text{ lb/min}$$



Concentração de sal  
no fluxo de saída

## **CAPÍTULO 3- MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL**

A biosfera está constituída de sistemas que mudam com o passar do tempo. Os sistemas naturais e os antrópicos podem ser tipificados pela forma como mudam. O modo pelo qual o sistema muda depende da organização do sistema e do tipo de fonte de energia que está disponível.

A organização de um sistema pode ser estudada desenhando um diagrama do sistema (modelo). Analisando os tipos de fontes de energia em um diagrama, podemos dizer como o sistema se comporta (como cresce e diminui).

Uma determinada formulação matemática somente se torna um modelo quando as variáveis relacionadas têm significados próprios provenientes da situação modelada.

Para trabalhar com situação envolvendo poucas variáveis, sugere-se modelos determinísticos, que são baseados em equações diferenciais, e no caso de situações que envolvem um grande número de variáveis, é necessários o uso de sistemas de equações que contemplam vários parâmetros.

### **3.1– Modelos Determinísticos de Populações Isoladas**

Uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biosistema outra população interagindo com a primeira. Existem muitos fatores que afetam a população – fatores abióticos (temperatura, vento, umidade, etc.) e fatores de auto-regulação (espaço, alimentos, idade, guerra, etc.).

Um atalho para o entendimento da dinâmica populacional é considerar que as “populações interagem para persistirem e para tal necessitam aumentar.”

Uma proposta para utilizar a matemática como instrumento para estabelecer um modelo para crescimento de uma população humana, começou com o economista inglês T. R. Malthus (1798). Seu modelo é baseado em dois postulados:

1. O alimento é necessário a subsistência do homem;
2. A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente.

Malthus afirma que a capacidade do homem de se reproduzir é muito maior que a capacidade do planeta de produzir meios para sua subsistência. A população apresenta um crescimento a uma razão geométrica ou exponencial e os meios de subsistência, na razão aritmética.

Assim, dinâmica populacional que é chamada de modelo de Malthus, assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante (crescimento exponencial), desta forma a população cresce sem nenhuma inibição. Este modelo prevê um planeta superlotado em poucos anos.

A modelagem matemática evoluiu, passando por várias modificações após Malthus. Um dos modelos mais importantes e conhecidos é do sociólogo belga P.F. Verhulst (1838) que supões o crescimento inibido por fatores naturais.

### **3.1.1– Modelo Malthusiano**

O crescimento da população brasileira:

Períodos	População	Taxa de Crescimento (% a.a)	Crescimento Absoluto	Distribuição Etária (%)		
				0 -14	15 - 64	65 e mais
1940	41.236.315			42.6	55.0	2.4
		2.3	10.708.082			
1950	51.944.397			41.9	55.5	2.6
		3.2	19.047.946			
1960	70.992.343			43.2	54.3	2.5
		2.8	22.146.694			
1970	93.139.037			42.6	54.3	3.1
		2.5	25.863.669			
1980	119.002.706			38.8	57.2	4.0
		1.9	27.822.769			
1991	146.825.475			35.0	60.2	4.8

Tabela 3.1 – Fornece os censos demográficos do Brasil de 1940 a 1991. Fonte: FIBGE. NEPO/UNICAMP

Sejam  $P$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número depende do tempo, então:

$$\frac{dp}{dt} = P(t) \quad (1)$$

Temos que  $\alpha = n - m$  (coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população  $P(t)$ , aqui considerada constante. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha \quad (2)$$

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por

$$P(t + 1) - P(t) = \alpha P(t) \quad (3)$$

Considerando dada a população inicial  $P(0) = P_0$ , a solução é obtida por:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (4)$$

ou seja,

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0 \quad (5)$$

Assim, dados dois censos  $P_0$  e  $P_t$ , a taxa de crescimento demográfico em  $t$  anos é obtida de (5), fazendo

$$(\alpha + 1)^t = \frac{P_t}{P_0} \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (6)$$

Por exemplo na tabela 3.1, temos que a população de 1940 é  $P_0 = 41.236.351$  e, dez anos depois,  $P_{10} = 51.944.397$ , então a taxa de crescimento populacional média (relativa) entre 1940 e 1950 é dada por

$$\alpha = \sqrt[10]{\frac{51944397}{41236351}} - 1 = 1,0233539 - 1 = 0,0233539$$

ou aproximadamente 2,3% a.a.

Se considerarmos as populações entre os censos de 1940 e 1991,  $\alpha$  é dada por

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146825475}{41236351}} - 1 = 0,0252131$$

Que uns afirma que a população brasileira cresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 2,5% ao ano nestes 51 anos.

Lembrando que  $P_t = (1 + \alpha)^t P_0$  pode ser escrita na forma exponencial.

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha)t} \quad (7)$$

podemos comparar a resolução do modelo de Malthus discreto (4) com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando que

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

e que  $P(t + \Delta t) - P(t) = \beta P(t)\Delta t$  (Modelo discreto).

Assim, podemos escrever o modelo contínuo por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}$$

Portanto, os modelos discretos e contínuos forneceram a mesma solução quando

$$\beta = \ln(1 + \alpha)$$

Se considerarmos o modelo Malthusiano para projetar a população brasileira, teremos:

- $\alpha = 0,0252131$  para o modelo discreto, e
- $\beta = 0,0249$  para o modelo contínuo.

A equação,

$$P(t) = 41236e^{0,0249t}$$

fornece a população (em milhões de habitantes) em cada ano  $t$  (veja a tabela 3.2).

<b>Período</b>	<b>Censo. Demográfico</b>	<b>Mod. Discreto</b>	<b>Mod. Contínuo</b>
1940	41.236	41.236	41.570
1950	51.944	52.896	53.698
1960	70.992	67.851	69.365
1970	93.139	87.036	89.602
1980	119.825	111.645	115.744
1991	146.825	146.822	153.384
1996	156.804	166.288	174.335

Tabela 3.2. Projeção de crescimento exponencial da população brasileira (em milhões de habitantes)

O modelo Malthusiano funciona bem quando a população ainda está em fase de crescimento exponencial, e num espaço de tempo pequeno.

### 3.1.2– Modelo Logístico – Verhulst

Verhulst propôs em 1837 uma modificação na equação de Malthus. Verhulst considerou que a taxa de crescimento populacional é proporcional a população em cada instante e não constante como acreditava Malthus.

Este modelo é bastante utilizado para projetar população futuras, caso não haja nenhuma fatalidade provocada por guerras, epidemias etc.

O modelo logístico parte do pressuposto em que uma população de uma determinada espécie, vivendo em um determinado meio, atinja um limite máximo sustentável. Seja  $P = P(t)$  a população num instante  $t$  logo esse limite máximo sustentável (ou capacidade do ambiente) é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = L$$

Considerando que a variação esteja sujeita a um fator de proporcionalidade inibidor. Isto é, a equação deve incorporar a queda de crescimento a medida que a população cresce.

Partindo da equação de Malthus temos:  $\frac{dP}{dt} = K(P)P$

A taxa de variação da população  $K$  é proporcional a população em cada instante e não constante. Se sabemos que se

$$P > L \Rightarrow K(P) < 0$$

ou seja, se a população é maior que o limite sustentável, ela irá decrescer até atingir tal limite, logo:

$$K(P) < 0$$

se  $P < L \Rightarrow K(P) > 0$  ou seja, se a população é menor que o limite sustentável então irá crescer até atingir tal limite, portanto:

$$K(P) > 0$$

Uma função que atende essas condições seria:

$$K(P) = a - \frac{aP}{L}, a > 0$$

pois se

$$P > L \Rightarrow \frac{aP}{L} > a \Rightarrow K < 0$$

se

$$P < L \Rightarrow \frac{aP}{L} < a \Rightarrow K > 0$$

logo podemos escrever a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = \left( a - \frac{aP}{L} \right) P$$

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = aP - \frac{aP^2}{L} \quad (\text{equação de Bernoulli})$$

Para esboçarmos graficamente tal modelo precisamos fazer a seguinte análise qualitativa.

- 1) Os pontos críticos ou soluções de equilíbrio:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow aP - a\frac{P^2}{L} = 0$$

$$\frac{aPL - aP^2}{L} = 0 \Rightarrow PL - P^2 = 0 \Rightarrow P(L - P) = 0 \Rightarrow P_1 = 0, P_2 = L$$

Logo os pontos críticos são:  $P(t) = 0, P(t) = L$ .

- 2) Ponto de inflexão:

$$\frac{dP}{dt} = aP - \frac{aP^2}{L} \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} = a\frac{dP}{dt} - 2\frac{aP}{L}\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{adP}{dt} - \frac{2aP}{L}\frac{dP}{dt} = 0$$

$$a - \frac{2aP}{L} = 0 \Rightarrow P = \frac{L}{2}$$

- 3) Se

$$P < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{dP}{dt} > 0$$

Logo a função é crescente.

Portanto, podemos afirmar que se trata de uma curva convexa.

- 4) Se  $\frac{L}{2} < P < L \Rightarrow \frac{dP}{dt} > 0$  logo a função é crescente

$$\frac{d^2P}{dt^2} = a\frac{dP}{dt} - 2\frac{aP}{L}\frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} = a\frac{dP}{dt}\left(1 - \frac{2P}{L}\right)$$

Como  $a\frac{dP}{dt} > 0$  e  $1 - \frac{2P}{L} < 0$  logo podemos afirmar que  $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$  e portanto a curva é côncava.

- 5) Se  $P > L \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0$  logo a função é decrescente

$$\frac{d^2P}{dt^2} = a \frac{dP}{dt} - \frac{2aP}{L} \frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} \left(1 - \frac{2P}{L}\right) > 0$$

Pois,  $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$ ,  $\left(1 - \frac{2P}{L}\right) < 0$  logo podemos afirmar que a curva é convexa.

Agora podemos escrever o gráfico  $f(P)$ XP. Como  $f(P)$  é uma função quadrática precisamos encontrar o vértice da parábola.

Quando  $P = \frac{L}{2}$  temos  $\frac{dP}{dt} = a \frac{L}{2} \left(1 - \frac{L}{L}\right)$

$$\frac{dP}{dt} = a \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{aL}{4}$$

Logo os vértices são:  $\left(\frac{L}{2}, \frac{aL}{4}\right)$

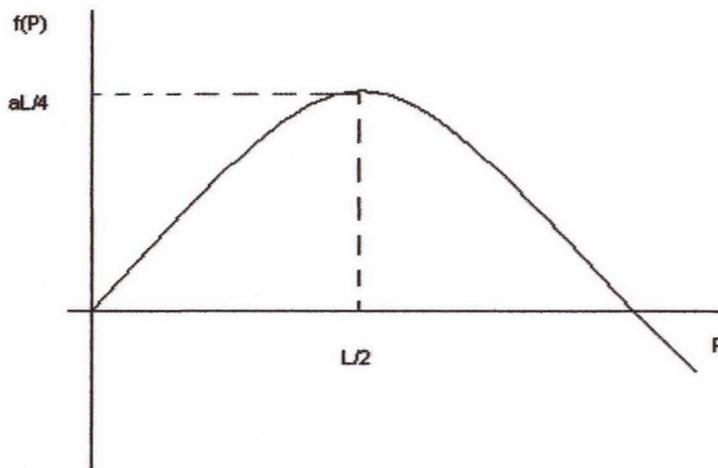


Figura 3.1. Variação de  $f(P)$ .

E por fim podemos esboçar o gráfico da solução, que o gráfico de  $P \times t$ .

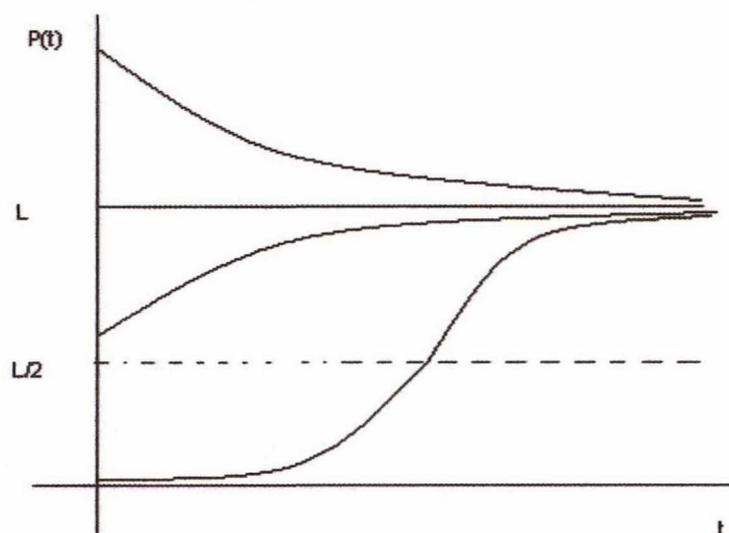


Figura 3.2. Curva logística.

Resumindo:

Se  $P < \frac{L}{2}$  a curvatura é para cima, e a função é crescente.

Se  $P > \frac{L}{2}$  a curvatura é para baixo, e a função é crescente.

Se  $P > L$  a função é decrescente e a curvatura é para cima.

Podemos observar graficamente que sendo a população menor que o limite sustentável, ou maior que esse limite, ela sempre tenderá a atingir tal limite.

Todas essas informações que nós obtemos do comportamento da função, foi feita sem resolver a EDO, ou seja, foram informações qualitativas. Agora vamos obter as informações quantitativas, resolvendo a EDO, lembrando que em casos de sistemas de EDOs quase nunca é possível se obter informações quantitativas.

$$\text{A equação logística é } \frac{dP}{dt} = aP - \frac{aP^2}{L} \quad (1)$$

Esta equação é de primeira ordem, também chamada de equação de Bernoulli, mas que também pode ser resolvida utilizando técnicas de separação de variáveis. Resolvendo temos:

$$\frac{dP}{dt} = aP - \frac{aP^2}{L} \Rightarrow \frac{dP}{P^2 dt} = \frac{aP}{P^2} - \frac{a}{L} \Rightarrow P^{-2} \frac{dP}{dt} = P^{-1} a - \frac{a}{L}$$

Fazendo  $P^{-1} = z \Rightarrow -P^{-2} \frac{dP}{dt} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow P^{-2} \frac{dP}{dt} = -\frac{dz}{dt}$

Substituindo na equação (1) temos:

$$-\frac{dz}{dt} = za - \frac{a}{L}$$

que é uma equação linear de 1ª ordem.

$$\frac{dz}{dt} + za - \frac{a}{L} = 0$$

Introduzindo um fator integrante temos:  $u(t) = e^{\int a dt} \Rightarrow u(t) = e^{at}$

$$\Rightarrow e^{at} \frac{dz}{dt} + e^{at} az - \frac{a}{L} e^{at} = 0$$

$$\frac{d(e^{at} z)}{dt} = \frac{a}{L} e^{at} \Rightarrow e^{at} z = \int \frac{a}{L} e^{at} dt$$

$$e^{at} z = \frac{a e^{at}}{L a} + C \Rightarrow z = \frac{1}{L} + \frac{C}{e^{at}}$$

Voltando a variável original, temos:

$$P^{-1} = z$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{L} + \frac{C}{e^{at}}$$

$$P = \frac{Le^{at} + LC}{Le^{at}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{Le^{at}}{e^{at} + LC} \Rightarrow P(t) = \frac{Le^{at}}{e^{at} + LC}$$

Se considerarmos a população inicial, então, no instante  $t=0$  a população é inicial. Logo temos o seguinte PVI (problema de valor inicial):

$$P(t) = \frac{Le^{at}}{e^{at} + LC}$$

$$P(0) = P_0$$

Resolvendo:

$$P_0 = \frac{Le^{a0}}{e^{a0} + LC} \Rightarrow P_0 = \frac{L}{1 + LC} \Rightarrow \frac{1}{P_0} = \frac{1 + LC}{L} \Rightarrow \frac{L}{P_0} = 1 + LC$$

$$\Rightarrow \frac{L}{P_0} - 1 = LC \Rightarrow \frac{L - P_0}{P_0} \frac{1}{L} = C$$

$$\Rightarrow C = \frac{L - P_0}{LP_0}$$

Agora basta substituímos o valor da constante encontrada:

$$P(t) = \frac{Le^{at}}{e^{at} + L\left(\frac{L - P_0}{LP_0}\right)}$$

$$P(t) = \frac{Le^{at}}{e^{at} + \frac{L - P_0}{P_0}}$$

$$P(t) = \frac{P_0Le^{at}}{P_0e^{at} + L - P_0} \Rightarrow P(t) = \frac{P_0L}{P_0 + (1 - P_0)e^{-at}}$$

Que é a equação para o crescimento populacional segundo Verhulst.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_0L}{P_0 + (L - P_0)e^{-at}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_0L}{P_0 + \frac{L - P_0}{e^{at}}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \rightarrow L$$

Observe que o limite de P será exatamente L. Como diz a teoria de Verhulst a população crescerá até um limite L.

O problema deste modelo é que ele não diz quando uma população será extinta, mesmo começando com uma população pequena, ela simplesmente tenderá

a uma capacidade máxima  $L$  do ambiente. Tal modelo possui falhas, mas bastante utilizado para análise de crescimento populacional de cidades,, bem como de populações de lactobacilos e outros.

### **3.2– Modelo de Interação entre espécies**

Os modelos matemáticos de competição e predação tiveram sua origem com os trabalhos de Lotka (1925), Volterra (1926), Kostitzin e outros poucos formulados em termos de sistemas não-lineares de equações diferenciais ordinárias. Neste trabalho é dado destaque somente ao clássico modelo de Lotka-Volterra cuja formulação é composta do modelo malthusiano e da lei de ação de massas (interação entre espécies).

#### **3.2.1 – Modelo de Lotka-Volterra**

O modelo de Lotka-Volterra foi proposto, independentemente, por Alfred J. Lotka em 1925 e por Vito Volterra em 1926.

Alfred Lotka foi uma das mais importantes personagens da ciência do século XX. Escreveu vários artigos sobre oscilações químicas nas primeiras décadas no início do século. Fez também um trabalho importante em biologia teórica com várias descobertas que ainda hoje parecem novas.

Em 1910 conseguiu mostrar que um conjunto de reações consecutivas podia dar origem a oscilações e por sua vez ao equilíbrio. Com pesquisas posteriores publicou um novo trabalho sobre oscilações em sistemas de grande tamanho, o que iria dar origem ao sistema a ser apresentado neste trabalho.

Por sua vez, Vito Valterra, usou idéias similares as de Lotka para investigar vários problemas ecológicos, como os efeitos da migração e a interação entre várias espécies.

O sistema de Lotka-Valterra é, assim, o mais conhecido modelo ( e um dos mais usados) para descrever as interações presa-predador.

Este sistema é principalmente caracterizado pela oscilação entre duas espécies, com o pico da população de predadores um pouco a frente do pico das presas.

O modelo faz várias simplificações quanto à dinâmica biológicas:

1. A população das presas irá crescer exponencialmente se os predadores não existirem.
2. A população dos predadores irá desaparecer devido a falta de presas, quando estas morrem.
3. Na situação acima, o predador não conseguiu mudar para outra presa para conseguir sobreviver.
4. Os predadores conseguem consumir quantidades infinitas de presas.
5. Não existe complexidade biológica, o espaço usado para as presas é infinito.
6. Não existe mais nenhuma espécie para além das duas iniciais.
7. O ambiente é totalmente homogêneo.

As equações do sistema são:

$$\boxed{\text{Variação do número de presas}} = \boxed{\text{Aumento natural}} - \boxed{\text{Destruição pelos predadores}}$$

$$\boxed{\text{Variações do número de predadores}} = - \boxed{\text{Morte na ausência de presas}} + \boxed{\text{Aumento causado pela alimentação disponível}}$$

Sejam

- $x = x(t)$  a densidade populacional das presas, e

- $y = y(t)$  a densidade da população dos predadores destas presas, em cada instante  $t$ .

Se modelarmos os encontros possíveis  $xy$ , o sistema presa-predador é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y + \beta xy \end{cases} \quad (1)$$

onde  $a, b, \alpha, \beta$  são constantes positivas.

O sistema (1) é não linear, mais pode ser analisado qualitativamente no plano de fase, eliminando a variável independente  $t$ , através da regra da cadeia:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy}$$

A equação autônoma, correspondente a (1) é dada por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(a - by)}{y(-\alpha + \beta x)} \quad (2)$$

que pode ser resolvido analiticamente por integração das formas diferenciais com variáveis separadas

$$\int \frac{-\alpha + \beta x}{x} dx = \int \frac{a - by}{y} dy$$

ou

$$-\alpha \ln x + \beta x = \alpha \ln y + by + k, \quad (3)$$

onde  $k$  é uma constante de integração.

A equação (3) é uma relação que deve ser obedecida por todas as soluções do sistema de Lotka-volterra.

Para cada valor de  $k$ , pode-se traçar no plano  $xy$  o lugar geométrico dos pontos que obedecem a equação (3).

### Trajétórias de Fase

As trajetórias de fase das equações de Lotka-Volterra, está representada na figura 3.1, onde  $a = b = \alpha = \beta = 1$ . Cada curva corresponde a um valor de  $k$ , elas obedecem a  $by(t) + \beta x(t) + \alpha \ln y(t) - alny(t) = k$ .

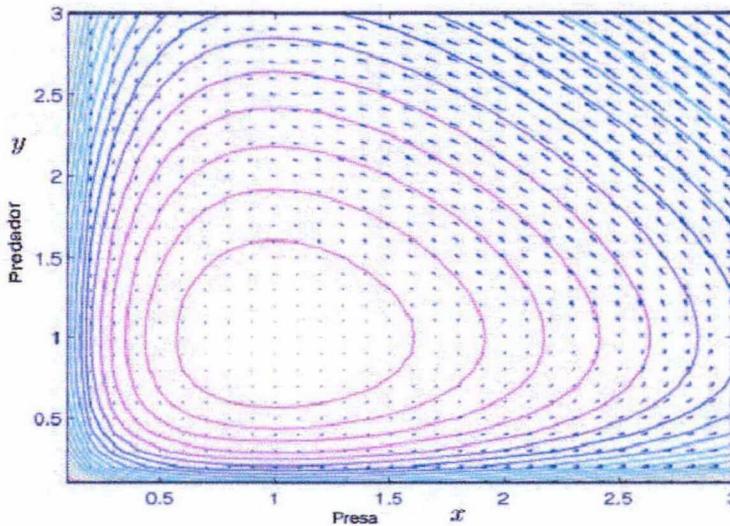


Figura 3.3. Gráfico Espaço de Fase das equações de Lotka-Volterra.

Analisando o gráfico, as curvas ou trajetórias são fechadas, pegando um ponto, ele representa certo número de presas e predadores. Por este ponto passa uma curva, com o decorrer do tempo estas populações evoluem percorrendo a curva, depois de certo tempo voltará à situação inicial, com isso afirmamos que o sistema é periódico.

O gráfico da figura 3.2 mostra com detalhes esse sistema.

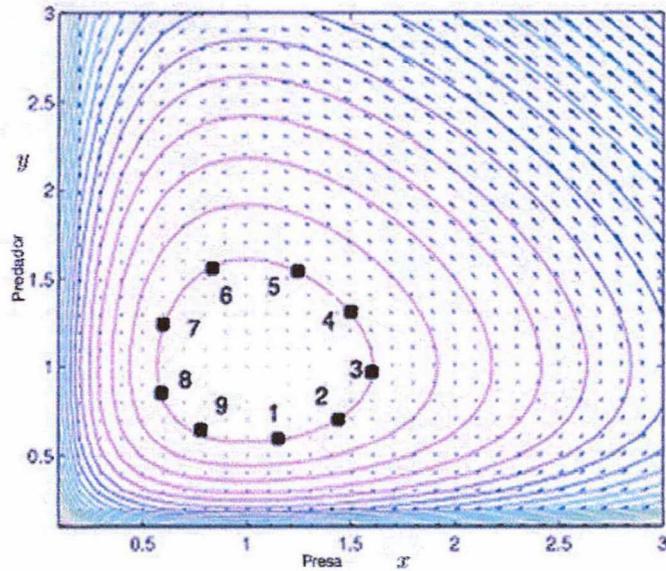


Figura 3.4. Gráfico Espaço de Fase das equações de Lotka-Volterra. Oscilações.

Tomando um ponto no plano  $xy$  e seguindo no tempo, veremos como a variável  $x$  de presas evolui.

- de 1 até 3 seu número aumenta.
- de 3 até 8 seu número diminui.
- e de 8 até 3 aumenta novamente.
- e assim por diante.

Com isso o número de presas oscila periodicamente no tempo e o de predadores também.

Vimos que as soluções das equações de Lotka-Volterra se comportam qualitativamente.

Esta análise qualitativa é baseada, essencialmente, na variação dos sinais das derivadas do sistema (1) e conseqüentemente no estudo dos pontos de equilíbrio.

Um sistema está em equilíbrio quando sua variação é nula, isto é, quando

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dy}{dt} = 0. \text{ No sistema (1), temos}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow ax - bxy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\alpha y + \beta xy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ x = \frac{\alpha}{\beta} \text{ e } y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

A estabilidade dos pontos de equilíbrio  $P_0 = (0,0)$  e  $P_1 = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b})$  é realizado através de uma linearização do sistema (1). Por exemplo, o sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y \end{cases} \quad (2)$$

Corresponde a linearização de (1) em torno do ponto  $P_0 = (0,0)$ .

A solução geral desse sistema é dada por  $x(t) = x_0 e^{at}$  e  $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$ .

Então, se a condição inicial  $(x_0, y_0)$  é tal que  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ , a trajetória  $P(t) = (x(t), y(t))$  se afasta de  $P_0$ . Neste caso  $P_0$  é dito instável.

Salientamos que a única trajetória de (2) que se aproxima do ponto de equilíbrio  $P_0$  é aquela que parte do ponto inicial  $(0, y_0)$  com  $y_0 > 0$ , isto é, na ausência de presas, a população dos predadores será extinta.

Agora, se considerarmos o ponto  $P_1 = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b})$ , através da mudança de variáveis em

(1)

$$u = x - \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad v = y - \frac{a}{b}$$

$P_1$  é transportado para a origem, isto é, obtemos o sistema (1) transladado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{b\alpha}{\beta}v - buv \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\beta a}{b}u + \beta uv \end{cases} \quad (3)$$

O ponto  $P = (0,0)$  do sistema (3), correspondente do ponto  $P_1$  do sistema (1), pode ser analisado qualitativamente quando consideramos o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{b\alpha}{\beta}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\beta a}{b}u \end{cases} \quad (4)$$

Os autovalores de (4) são complexos conjugados puros  $\lambda = \pm i\sqrt{a\alpha}$ , obtidos do polinômio característico  $Q(\lambda)$ ,

$$Q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{b\alpha}{\beta} \\ \frac{\beta a}{b} & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a\alpha = 0.$$

Logo, as soluções reais de (4) são periódicas de período  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{a\alpha}}$

$$\begin{cases} u(t) = k \frac{\alpha}{\beta} \cos \sqrt{a\alpha}t \\ v(t) = k \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \sin \sqrt{a\alpha}t. \end{cases} \quad (5)$$

Observação: Usando a regra da cadeia em (4) podemos escrever

$$\frac{du}{dv} = -\frac{ab^2 v}{a\beta^2 u} \quad (6)$$

cujas soluções gerais são as trajetórias no plano de fase  $uv$ :

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{ab^2 v^2}{2a\beta^2} + k$$

ou

$$a\beta^2 u^2 + ab^2 v^2 = k \Leftrightarrow \frac{u^2}{\frac{k}{a\beta^2}} + \frac{v^2}{\frac{k}{ab^2}} = 1 \quad (7)$$

E portanto, o ponto  $P(0,0)$  é um centro de todas as trajetórias (elipses), se  $k > 0$ .

Neste caso, o ponto de equilíbrio  $P_1$  de (4) é dito estável.

As trajetórias fechadas (1), em torno do ponto  $P_1: (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b})$ , descreveu o que se convencionou chamar de ciclo ecológico.

A principal crítica a este modelo é o fato de ser muito simplificado em se tratando de um processo tão complexo como é o de interação entre espécies, além do que pressupõe um tipo de estabilidade rara na natureza. Na tentativa de se aproximar da realidade surgiram vários modelos alternativos posteriormente, modificando ou generalizando o modelo de Lotka-Volterra que sempre tem servido de padrão.

### **Aplicação**

Como aplicação do modelo de Lotka-Volterra, foi desenvolvido um estudo do controle biológico da broca da cana-de-açúcar. Um grave problema enfrentado pela maioria dos produtores de cana é a infestação de brocas no canavial, uma praga muito resistente a agrotóxicos. Esta infestação resulta na perda de peso, brotação lateral, enraizamento aéreo, colmos quebrados e entrenós atrofiados na cana, e, além disso, nos orifícios praticados pelas lagartas da broca penetram fungos, que ocasionam a “podridão vermelha”, causando perdas industriais consideráveis. Observa-se que o uso de agentes químicos não impedia a infestação, uma vez que a broca passa a maior parte de sua vida no interior da cana, vivendo como lagarta (figura 3.5). Assim, uma forma alternativa e eficiente de combate tem sido o controle biológico, utilizando-se a vespa indiana “*Apanteles flavipes*”, figura 3.6, uma espécie de inseto Predador que é espalhado no canavial, e se alimenta exclusivamente da broca, sua Presa. Daí a idéia de se utilizar o modelo de presa-predador de Lotka-Volterra para o estudo da dinâmica populacional devido à interação entre a vespa (predador) e a broca (presa), que considera que, na ausência da vespa, a população de brocas tem um crescimento exponencial (segundo o Modelo de Malthus).

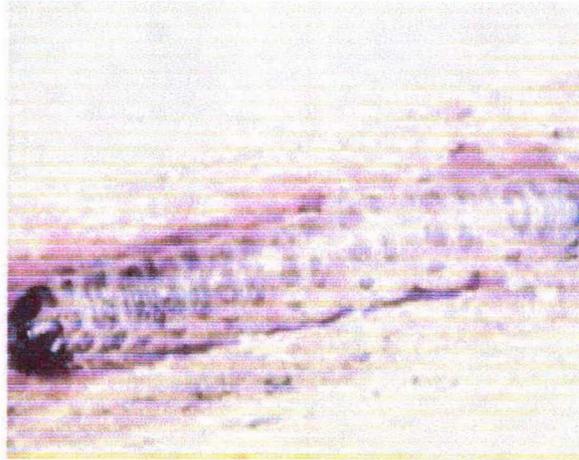


Figura 3.5. Lagarta da broca da cana-de-açúcar.



Figura 3.6. Vespa predadora.

Na figura 3.7 mostraremos o processo de combate à broca da cana-de-açúcar utilizando a vespa indiana, como predadora.

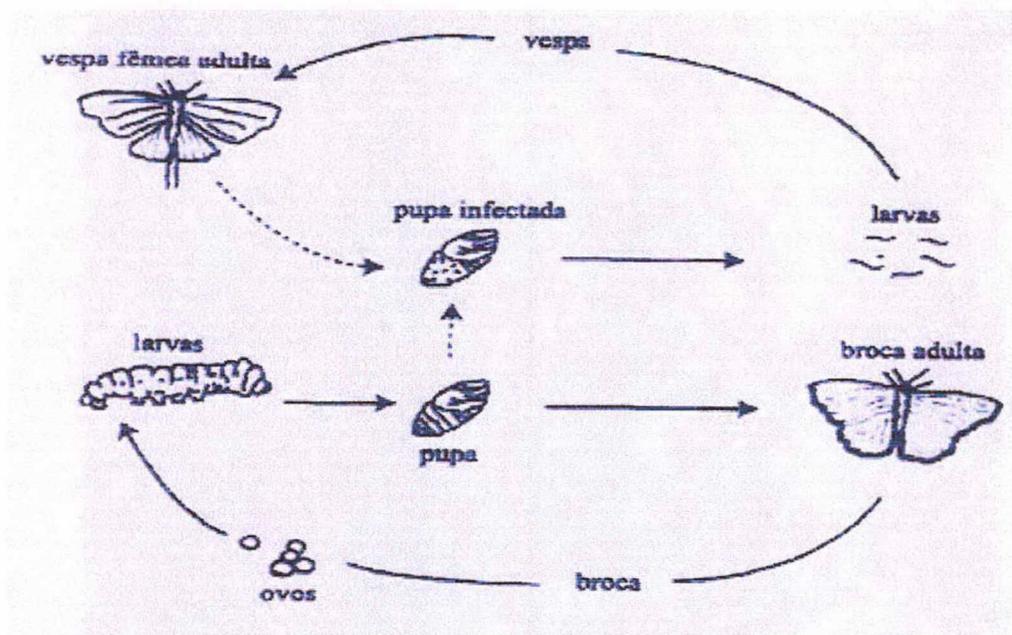


Figura 3.7. Esquema da interação broca – vespa.

### Modelo Matemático

Sejam

- $X = x(t)$  : a população de broca numa região limitada de um canavial, num instante  $t$ ;
- $Y = y(t)$ : a população de vespas que convivem com as brocas no mesmo canavial, também no instante  $t$ .

### Hipóteses

- 1) A quantidade de alimento para a broca é bastante grande, de tal modo que a população de brocas mantém um crescimento logístico, não exponencial;
- 2) A vespa tem na broca sua alimentação básica e, na ausência desta, a população de vespa tende à extinção;
- 3) A broca é diretamente predada pela vespa;
- 4) O número de encontro entre a broca e a vespa é proporcional ao produto destas populações, sendo que cada um destes encontros tende a promover o crescimento da população de vespas e inibir o crescimento da população de brocas.

Com base nestas informações chegou-se ao sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (8)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes positivas, sendo  $a$  o coeficiente de crescimento da população de broca,  $b$  o coeficiente de ataque encontrado através do cálculo da taxa de eficiência do controle da broca pela vespa,  $c$  o coeficiente de mortalidade de vespas e  $d$  o coeficiente de crescimento de vespas devido ao encontro com as brocas.

#### Análise do modelo

Para o estudo do comportamento qualitativo das soluções do sistema (8), para valores positivos de  $x$  e  $y$ , inicialmente foram encontrados os pontos críticos e feita uma linearização do sistema em torno desses pontos, o que possibilitou a análise de sua estabilidade. Em tal estudo foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros, valores estes obtidos com dados estatísticos,  $a = 0.02774893$ ,  $b = 0.00001479$ ,  $c = 1.198293$  e  $d = 0.0006894$ . A população inicial de brocas foi considerada  $x_0 = 2000$  e a população inicial de vespas  $y_0 = 5000$ .

A análise no plano de fase  $xy$ , do sistema, satisfaz a equação implícita geral (3):

$$-c \ln x + dx = a \ln y - by + K,$$

onde  $K$  é a constante de integração, a ser determinada pelas condições iniciais  $x_0 = 2000$  e  $y_0 = 5000$ .

Usando os valores estimados dos parâmetros, obtemos

$$K = -7.89167$$

O ponto de equilíbrio do sistema,  $P_1 = (x^*, y^*)$  é tal que

$$x^* = \frac{c}{d} \cong 1738 \text{ brocas}$$

$$y^* = \frac{a}{b} \cong 1876 \text{ vespas}$$

No plano  $xy$  as trajetórias são curvas fechadas, portanto existe um período  $t = T > 0$  onde  $X(T) = x_0$  e  $Y(T) = Y_0$ .

O sistema (8) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - by \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -c + dx \end{cases} \quad (9)$$

Integrando as equações de (9) entre 0 e T, obtemos

$$\begin{cases} \ln X(T) - \ln X(0) = \int_0^T (a - by) dt \\ \ln Y(T) - \ln Y(0) = \int_0^T (-c + dx) dt \end{cases} \quad (10)$$

Como  $X(T) = X_0$  e  $Y(T) = Y_0$ , obtemos

$$aT = b \int_0^T x dt \quad e \quad cT = d \int_0^T y dt \quad (11)$$

Portanto,

- $\frac{a}{b} = \frac{1}{T} \int_0^T y dt$  é o valor médio da população das vespas ao longo do período T;
- $\frac{c}{d} = \frac{1}{T} \int_0^T x dt$  é o valor médio da população das brocas ao longo de T.

Este resultado indica que, para esse modelo, se queremos diminuir a quantidade de brocas não adianta aumentarmos a quantidade de vespas, pois tal fato somente alteraria a magnitude da oscilação do ciclo.

Na realidade o controle biológico com vespas é muito mais eficaz que o previsto pelo modelo adotado, o que nos leva à procura de outros modelos alternativos.

Modelos mais modernos e eficientes podem ser formulados quando consideramos a interação de populações de insetos onde existe uma divisão natural do tempo em gerações discretas.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, pretendeu-se utilizar a Modelagem Matemática para a aplicação dos conhecimentos matemáticos à resolução de problemas reais.

Os desafios encontrados trouxeram uma reflexão sobre o ensino de Matemática e a importância do professor de se qualificar em forma interdisciplinar.

O desenvolvimento da Modelagem Matemática no cenário acadêmico deveria ser pensado, basicamente em duas correntes: uma voltada para o ensino e outra voltada para a Matemática Aplicada.

Foram detectadas quais as dificuldades que se apresentam nas etapas do processo de modelagem e as repercussões dessa prática para a formação dos professores de matemática.

Foi necessário fazer uma revisão de muitos dos conhecimentos que haviam sido aprendidos em disciplinas anteriores e principalmente da necessidade da aquisição de novos conceitos na qual os autores puderam refletir sobre a matemática e o seu papel no desenvolvimento desta área.

Também vale ressaltar que ao iniciar um trabalho com Modelagem, deve-se estar aberto ao surgimento de novas questões, que por vezes extrapolam o previsto, tanto em relação aos conteúdos matemáticos, quanto a outros conteúdos mais específicos relacionados com a área de aplicação.

Ao longo do desenvolvimento de modelagem buscaram-se informações pertinentes aos diferentes problemas e as ferramentas matemáticas usadas estimulam a continuar com os trabalhos nesta área no futuro.

## BIBLIOGRAFIA

ALAN HENRIQUES. **Thomas Malthus e a explosão demográfica**. Disponível em: <<http://www.alanhenriques1.hpg.ig.com.br/artigoeconomia03.html>> Acesso em: 20 Abr. 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BLOG DO CURSO DE VERÃO 2009. **Métodos Matemáticos em Biologia de Populações** II. Disponível em: <[http://web.mac.com/kraenkel/MMBPD/Blog\\_do\\_curso\\_de\\_verão\\_2009/Blog\\_do\\_curso\\_de\\_verão\\_2009.htm](http://web.mac.com/kraenkel/MMBPD/Blog_do_curso_de_verão_2009/Blog_do_curso_de_verão_2009.htm)> Acesso em: 10 Maio 2009.

CECCONELLO, M.S. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional: sistemas dinâmicos fuzzy**. p. 3-12, 2006. Disponível em: <<http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000378218>> Acesso em: 07 Abr. 2009.

COMCIENCIA. **Modelagem matemática: o contido e o residual**. Disponível em: <<http://www.comciencia.br/reportagens/modelagem/mod05.htm>> Acesso em: 15 fev. 2009.

CREMM. **Centro de referência de modelagem matemática**. Disponível em: <<http://www.furb.br/cremm>> Acesso em: 06 Mar. 2009.

D'AMBROSIO, U. (1986). **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2ª ed. São Paulo: Summus.

DENNIS G. ZILL E MICHAEL R. CULLEN. **Equações Diferenciais**, Vol 2. 3ª ed. São Paulo: Markron Books, 2000.

JUIZ VIRTUAL. Disponível em: <<http://www.visgrafimpa.br/juizvirtual/>> Acesso em: 05 Maio 2009.

MATEMÁTICA ESSENCIAL: SUPERIOR. **EDO:Aplicações**. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/edo/edoaplic.htm#edo0402>> Acesso em: 10 Abr. 2009.

NUPEMM. **Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática**. Disponível em: <<http://www.uefs.br/nupemm/>> Acesso em: 09 Mar. 2009.

SCHEFFER, N. F. **Modelagem Matemática: Uma abordagem para o Ensino-Aprendizagem da Matemática.** In: **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS** n.1, 1999. p.11-16.

STEWART.J. **Cálculo, Vol 1.** 5ª Ed. Editora Pioneiro Thonson Learning, São Paulo, 2006.

UNIVERSIDADE CAXIAS DO SUL. **Equações Diferenciais.** Disponível em: <<http://hermes.uces.br/ccet/deme/emsoares/eqdef/>> Acesso em: 10 Abr. 2009.

William E. Boyce e Richard C. DiPrima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edição,2002.