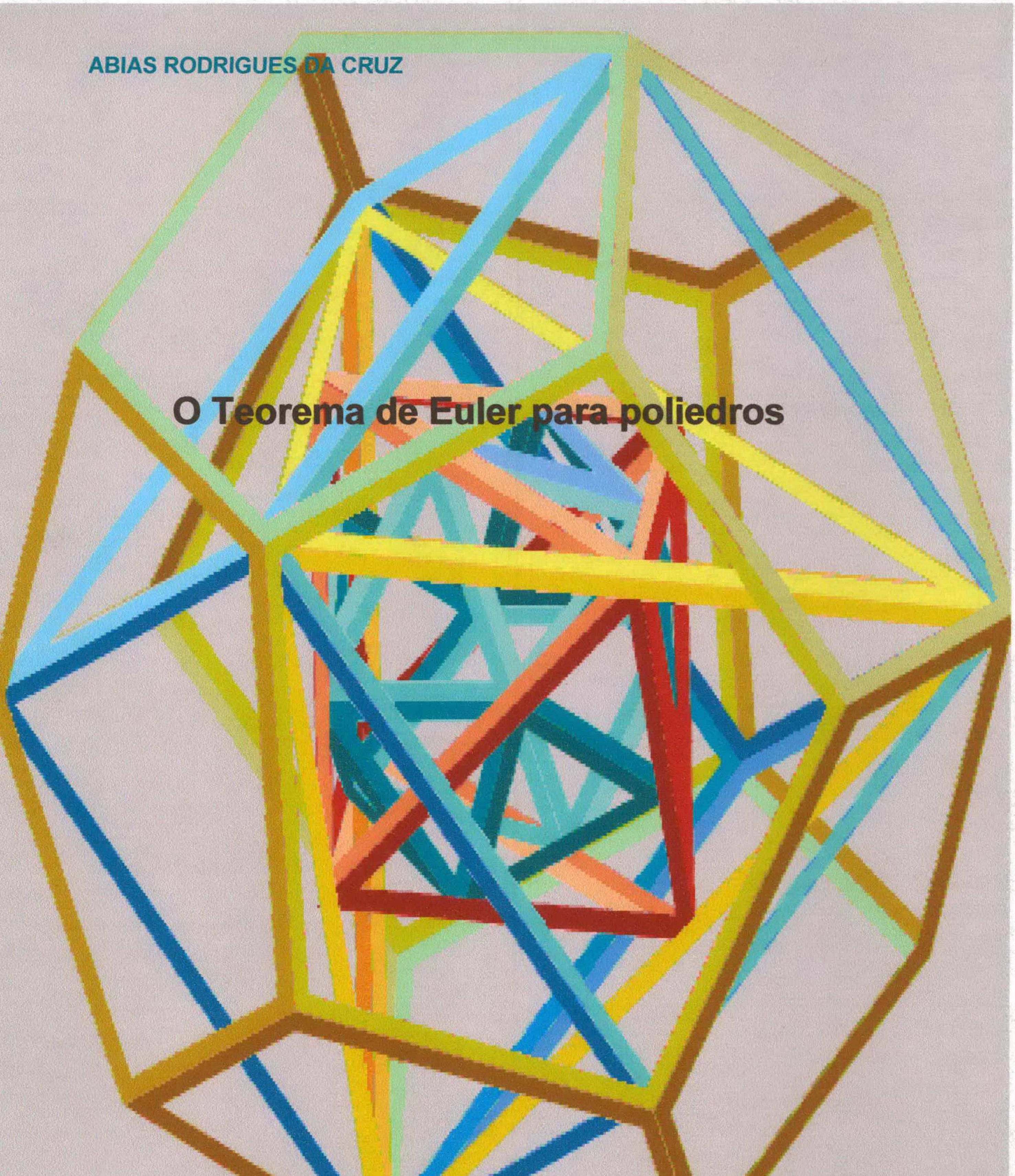
ABIAS RODRIGUES DA CRUZ

O Teorema de Euler para poliedros



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC

UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Teorema de Euler para poliedros

CODÓ-MA

2009

ABIAS RODRIGUES DA CRUZ

O Teorema de Euler para poliedros

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da **Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Universidade Virtual do Maranhão (UNIVIMA), como pré-requisito à obtenção do Título de Especialista em Matemática.**

Codó-MA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"O Teorema de Euler para Poliedros"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 07/07/2009

Dr. Licio Hernanes Bezerra (CFM/UFSC - Orientador) ____________________

Dr. Danilo Royer (CFM/UFSC - Examinador) ____________________

Dr. Marcelo Sobotkka (CFM/UFSC – Examinador) ____________________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009.

Só poderemos ser cidadãos mais conscientes se soubermos calcular e aproveitar cada instante. Daí a necessidade de estudarmos matemática.

(Abias Rodrigues da Cruz)

Aos meus pais, Maria e Francisco, por estarem sempre presentes nos momentos bons ou ruins, dando-me forças para vencer todas as barreiras, fazendo-me acreditar que o sonho é possível;

Aos meus irmãos, Ananias, Romilda e Amós, que me incentivaram e torceram pelo meu sucesso;

À minha esposa Sônia, que me deu forças nos momentos difíceis, estando sempre presente nos meus pensamentos;

Aos Meus filhos Davi e Moisés que são meu maior tesouro;

A todos os meus amigos.

Dedico-lhes esta monografia

AGRADECIMENTOS

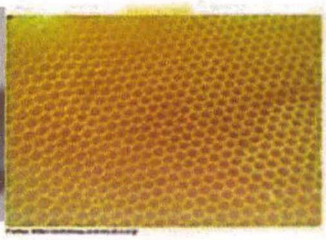
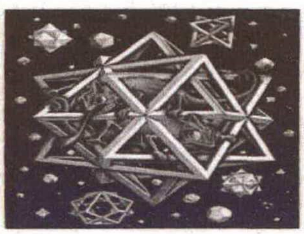
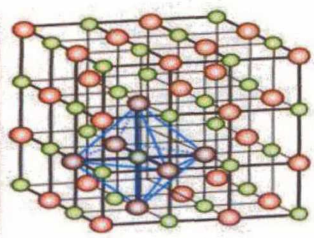
- A Deus, razão da minha existência, por ter me concedido mais esta vitória;
- Aos meus pais, a quem devo tudo na vida;
- Aos meus familiares e amigos, pelo apoio e incentivo;
- Ao professor Licio e a todos os professores da UFSC, por terem contribuído de forma significativa para a minha formação intelectual;
- À minha esposa Sônia que muito contribuiu para que este sonho se tornasse realidade;
- Ao meu amigo Cícero (e família), que sempre torceu pelo meu sucesso;
- E a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde a idade da pedra, encontramos vestígios de figuras geométricas em pinturas de cavernas, adornos, armas, objetos cerâmicos e tecidos. Para tentar compreender as formas que seus sentidos percebiam, o homem criou a geometria.

Neste trabalho, estudaremos poliedros, enfatizando a fórmula de Euler para poliedros convexos, que se apresenta como $V - A + F = 2$, em que V representa o número de vértices, A, representa o número de arestas e F, o número de faces do poliedro. Mas, o que são poliedros? E, além da fórmula de Euler, quais são as condições impostas sobre V, A e F para que exista um poliedro convexo? Responder a estes questionamentos será o objetivo deste trabalho.

Euler

Euler é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nasceu na Basiléia, ao norte da Suíça quase na fronteira com a França, no dia 15 de abril de 1707. Era filho primogênito de Paul Euler, um pastor calvinista que tinha esperanças de que seu filho o procedesse no clericato, e de Margarete Brucker. Seu pai o introduziu nos primeiros estudos de matemática. Quando estava na Universidade de Basel, onde estudou Teologia e hebraico, Euler assistia toda semana a uma aula, de uma hora, do matemático Johannes Bernoulli. Ele recebeu seu primeiro mestrado aos dezessete anos e, como era também amigo de Daniel e Nicolaus Bernoulli, os Bernoullis resolveram persuadir o pai do Euler a deixá-lo continuar com a carreira acadêmica. Aos dezenove anos, Euler recebeu menção honrosa por uma solução que apresentou a um problema posto pela academia de Paris. Mais tarde, ele ganhou o primeiro prêmio nesta mesma instituição doze vezes. Ainda, quando tinha 19 anos e era estudante de Johannes, apresentou tese para a cátedra de física, um *mémoire* cujo título era Dissertação Física sobre o Som. Embora não obtivesse a cátedra, esse curto e claro panfleto tornou-se imediatamente um clássico e serviu de guia à pesquisa em acústica pelo restante do século. Euler contribuiu mais à acústica teórica, como conhecemos o assunto hoje, que qualquer outro homem a qualquer tempo.

Em 1727, Euler mudou-se para São Petersburgo, Rússia, onde conseguiu uma posição na recém-criada Academia de Ciências de São Petersburgo. Casou-se em 1734 e teve 13 filhos, dos quais apenas cinco sobreviveram. Na Academia de Ciências e Belas-Letras de Berlim, foi diretor da Classe de Matemática, onde permaneceu até 1766.

Os primeiros problemas de saúde de Euler surgiram em 1735. Em 1738, ele perdeu a visão de seu olho direito. Em 1766, uma catarata tomou-lhe a visão do olho esquerdo. Sua deficiência visual não o impediu, entretanto, de ser um dos mais produtivos matemáticos conhecidos até hoje, pois compensou-a com sua magnífica capacidade de realizar cálculos mentalmente, aliada à sua memória aparentemente inesgotável.

Em 1741, mudou-se para a Alemanha para assumir uma posição na Academia de Ciências de Berlim. Retornou para São Petersburgo em 1766, pouco antes de perder totalmente sua visão, com 59 anos, onde permaneceu até seu falecimento com 76 anos em 7 de setembro de 1783. Nesse período de 17 anos, apesar da cegueira, Euler escreveu quase metade de suas 866 obras, com a ajuda de redatores.

Euler absorveu e expandiu quase todos os ramos de conhecimento que eram cultivados em seu tempo; trouxe de volta à vida assuntos antigos e negligenciados e traçou novos cursos de pensamento, que vieram a florescer em séculos posteriores. Devida à sua enorme produção no ramo da matemática, seu nome aparece associado a vários teoremas e fórmulas, em diversas áreas da matemática. Dentre elas podemos citar: a Fórmula de Euler para poliedros, o Problema das 7 pontes de Königsberg, a Equação de Euler-Lagrange, as equações de Euler da dinâmica dos fluidos, a densidade dos números primos, a Função Totiente de Euler, as Integrais de Euler, as Funções Gama e Beta, as Equações de Euler da dinâmica dos corpos rígidos, o Problema da Basiléia, as Funções Geratrizes e Números de Partição, os Ângulos de Euler, a Constante de Euler-Mascheroni e os Quadrados de Euler.

Notas Históricas

Descoberto no ano de 1758, o teorema de Euler diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$, . Encontrado por Leibniz em 1675, um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639, continha resultados a partir dos quais se poderia obter a forma acima. Mas, o navio que trouxe os pertences de Descartes para a França, depois de sua morte em Estocolmo, naufragou no rio Sena.

O teorema de Euler não é válido em toda sua generalidade, como ele acreditava. A controvérsia em torno do teorema de Euler perdurou por mais de um século até que a solução definitiva do problema foi dada por Poincaré, no ano de 1893, ao compreender que o teorema de Euler é um problema de topologia e não de geometria, observando que o número $V - A + F$, é um invariante topológico do poliedro P. Mas, o que isso quer dizer? Dizemos que duas figuras A e B são homeomorfas quando existe uma transformação invertível e contínua $\mathbf{f: A \rightarrow B}$ **cuja inversa** $\mathbf{f^{-1}: B \rightarrow A}$ também é continua. Como exemplo, se inflamos, injetando ar, os poliedros das figuras 1 e 2 se transformarão em esferas. Já o poliedro da figura 3 transformar-se-ia em um toro. Assim, os poliedros das figuras 1 e 2 são homeomorfos à esfera; já o poliedro da figura 3 é homeomorfo ao toro.

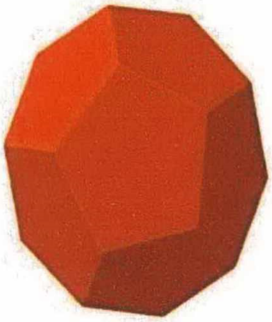


Figura 1

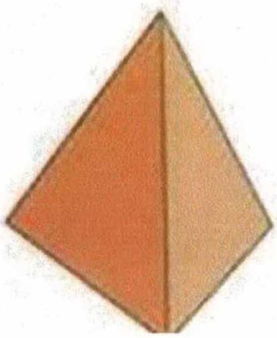


Figura 2

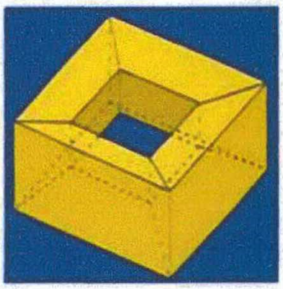


Figura 3

Poincaré mostrou que, se um poliedro P com V vértices, A arestas e F faces é homeomorfo a um poliedro P' com $V'\ vértice, A'\ aresta\ e\ F'\ faces$ então V, A, F podem ser diferentes de $V', A'\ F'$, mas, $V - A + F = V' - A' + F'$. O número $x(P) = V - A + F$ é chamado de característica de Euler-Poincaré e dizemos que $x(P)$ é um invariante topológico do poliedro P. Sabemos que $x(P) = 2$ quando P é um tetraedro. Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro (ou seja, a esfera) tem característica de Euler-Poincaré igual a 2. Em particular, isso ocorre com todos os poliedros convexos.

O que é um Poliedro?

De acordo com o dicionário inglês de Oxford, a primeira aparição do termo poliedro estava na tradução de 1570 do senhor Henry Billingsley dos Elementos de Euclides (300 a.C). O termo poliedro vem das raízes gregas poly, significando muitos, e hedra, significando faces. Um polyhedron tem muitas faces. Os Poliedros são objetos geométricos tridimensionais construídos de faces poligonais. Exemplos de poliedros, como os mostrados na figura 4, incluem o cubo comum, a pirâmide simples (conhecida formalmente como tetraedro), o octaedro (que parece um balão de festa junina) e o icosaedro truncado, que tem a forma de uma bola de futebol. Por causa de sua beleza e simetria, os poliedros encontraram um lugar de destaque na arte, na arquitetura e na joalheria. Os poliedros também aparecem na natureza, como os cristais e estruturas esqueléticas de certos seres marinhos microscópicos. As propriedades dos poliedros fascinaram matemáticos por milênios. Para provar os teoremas sobre poliedros, é crucial que tenhamos uma definição precisa do termo. E essa foi uma das causas da dificuldade que muitos matemáticos tiveram no passado para demonstrar teoremas referentes a poliedros, pois necessitava-se de uma definição precisa do significado dessa palavra. A maneira mais satisfatória de definição de poliedros parece ser a que distingue a estrutura combinatória de um poliedro das realizações geométricas desta estrutura combinatória.

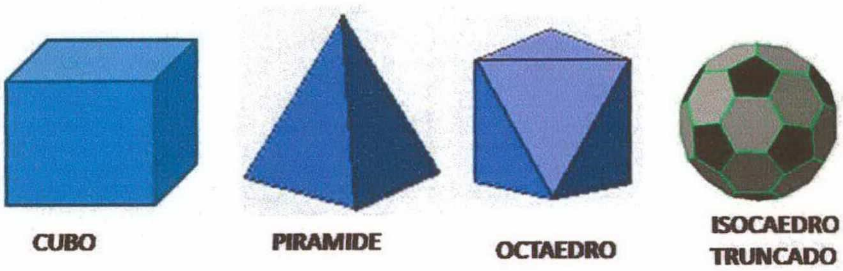


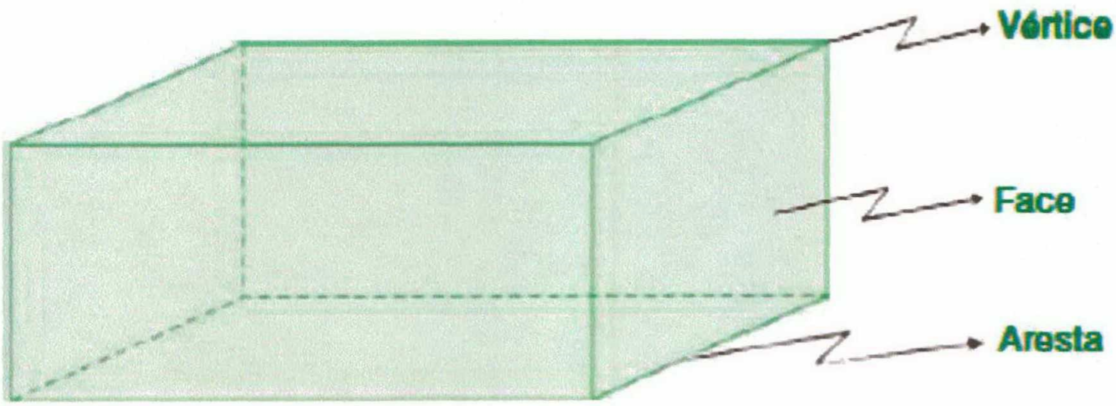
Figura 4

Começamos por listar as condições sob as quais uma coleção de objetos chamados vértices, arestas, e faces serão chamadas um poliedro abstrato. Em um modo abstrato de pensar, uma aresta é um par de vértices, e uma face é um circuito de arestas. Mais especificamente, Um *poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:

1- Cada lado de um desses polígonos é também lado de apenas outro polígono.

2- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.

3- É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).



- Faces são os polígonos que limitam o poliedro
- Arestas: São os segmentos de reta que limitam as faces
- Vértices: São os pontos de interseção de três ou mais arestas

As Primeiras Relações

Dado um poliedro, vamos agora tratar do problema de contar as suas faces, os seus vértices e suas arestas. Como as faces podem ser de gêneros diferentes, isto é, faces que possuem número de lados diferentes, representaremos por F_n ($n \geq 3$), o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, ou seja, concorrem diferentes números de arestas, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas. Resumindo:

F_3 = número de faces que são triângulos

F_4 = número de faces que são quadriláteros

F_5 = número de faces que são pentágonos

.

.

.

$F = F_3 + F_4 + F_5 + \ldots$

V_3 = número de vértices que concorrem 3 arestas

V_4 = número de vértices que concorrem 4 arestas

V_5 = número de vértices que concorrem 5 arestas

.

.

.

$V = V_3 + V_4 + V_5 + \ldots$

Imagine se desmontássemos o poliedro. Quantos lados todos esses polígonos possuem? Fácil. Basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5, e assim por diante. Depois somam-se os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\mathbf{2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots}$$

Podemos também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se, em cada vértice, contarmos quantas arestas nele concorrem, somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas. Logo,

$$\mathbf{2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots}$$

Dessas primeiras relações entre os elementos de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades:

a) $2A \geq 3F$

b) $2A \geq 3V$

Justificativa da primeira:

$$\mathbf{2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots}$$

$$\mathbf{2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \ldots) + F_4 + 2F_5 + \ldots}$$

$$\mathbf{2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \ldots}$$

$$\mathbf{2A \geq 3F.}$$

OBS.: Repare que a igualdade só vale se $F_4 = F_5 \ldots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares.

Justificativa da segunda:

$$\mathbf{2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots}$$

$$\mathbf{2A = (3V_3 + 3V_4 + 3V_5 + \ldots) + V_4 + 2V_5 + \ldots}$$

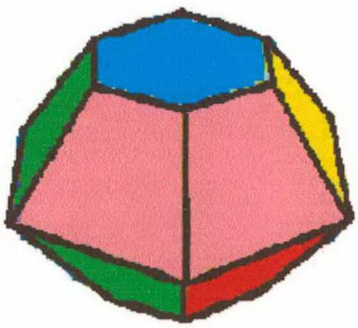
$$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \ldots) + V_4 + 2V_5 + \ldots$$

$$3V + V_4 + 2V_5 + \ldots$$

$$2A \geq 3V.$$

A segunda desigualdade se justifica de forma análoga e, neste caso, a igualdade em todos os vértices concorrerá 3 arestas.

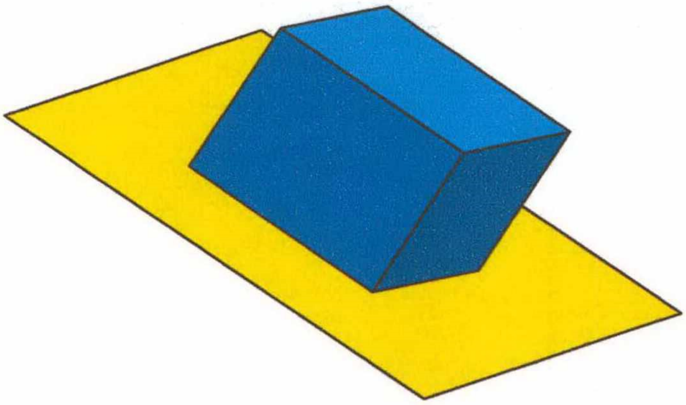
O resultado central é o Teorema de Euler. Na verdade, a relação de Euler não é verdadeira para todos os poliedros de acordo com nossa definição. Veja figura abaixo:



Este poliedro apresenta 16 vértices, 32 arestas e 16 faces, aplicando a relação de Euler temos:

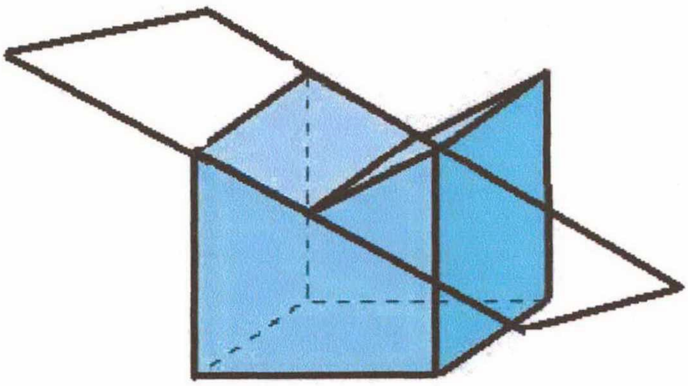
$V + F - A = 16 + 16 - 32 = 0.$

Mas, para os poliedros convexos ela é verdadeira. Afinal o que são poliedros convexos? Um poliedro é dito convexo quando o plano correspondente a cada face divide o espaço, de tal modo que o poliedro fique em que mesmo semi-espaço.



convexo

Caso contrário, o poliedro é chamado de côncavo.



concavo

A partir de agora, quando referir-se a poliedros, considerar-se-á poliedros convexos.

Demonstração da Relação de Euler, $A - F = V - 2$. para Poliedros Convexos.

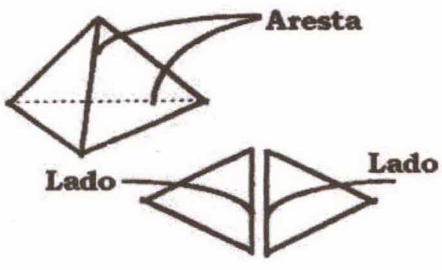
A demonstramos dessa relação esta dividida em duas partes, primeiramente vamos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. Para isto,vamos numerar as faces de P de 1 até N, e considerar $n_1, n_1, n_3 ... n_k$ o número de lados dessas faces, logo, $(1 \leq k \leq N)$. Como a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $\pi(n_k - 2)$,temos:

$$S = \pi(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + ... + \pi(n_k - 2)$$

Fatorando-se π , temos:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + ... + n_k) - (2 . F]$$

No primeiro parênteses temos a soma dos números de lados de todas as faces, que é igual ao dobro do número de arestas, pois:



- as arestas são os lados dos polígonos das faces;
- as arestas surgem quando juntamos dois polígonos, sendo que os dois lados vão formar uma aresta.

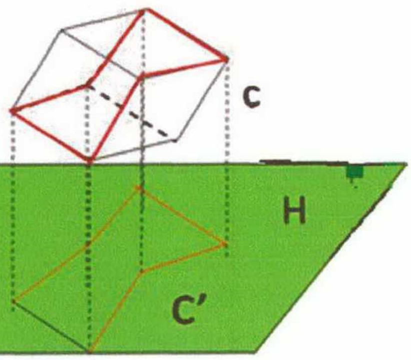
Assim, o número total de arestas deve ser igual à metade da soma do número de lados de todas as faces $A = \frac{n}{2}, ou\ seja\ n = 2A$

Então temos:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \qquad \text{(I)}$$

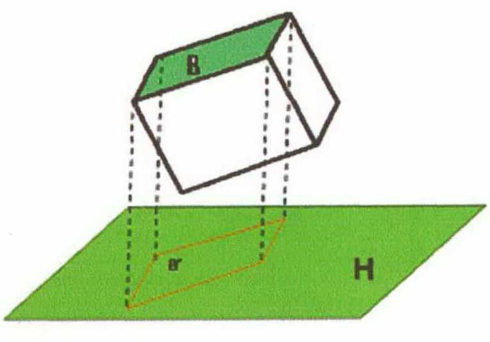
Para a segunda parte da demonstração devemos tomar um plano H, que não intercepta P, e cujo vetor normal não seja paralelo a nenhuma aresta do poliedro P (isto é, tal que nenhuma aresta de P seja ortogonal a H). Note que esse plano H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P.

Semi-espaço superior



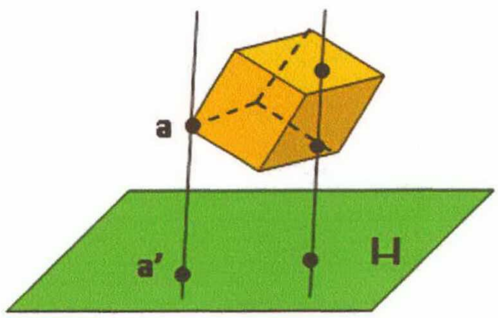
O semi-espaço que contem o poliedro é chamado de superior, isto é, dizemos que seus pontos estão acima de H. A cada ponto **a** do semi-espaço superior corresponde um ponto **a'** em H, obtido através da projeção ortogonal.

A projeção ortogonal de qualquer conjunto B, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto B', contido em H, formado pela projeção dos pontos de B. Para saber mais sobre projeção veja apêndice.



Consideremos, então, a projeção P' do poliedro P. Como P é convexo, cada ponto de P' é projeção de um ou dois pontos de P.

Veja figura:

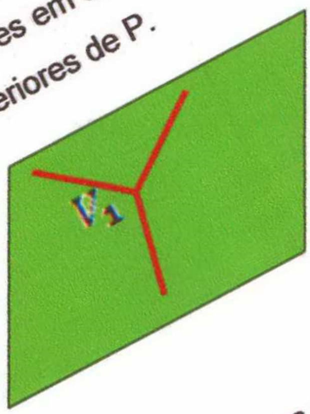


Dados dois pontos de P que tem a mesma projeção, ao mais distante de H chamaremos de ponto superior, e ao mais próximo de H, ponto inferior.

Sendo assim, o poliedro se decompõe em três partes distintas: conjunto dos pontos superiores, o conjunto dos pontos inferiores e o contorno visível. Sendo que o contorno visível é uma poligonal fechada C formada por arestas de P. Cada ponto de C', projeção do contorno visível, é formado pela projeção de um único ponto de P.

Dando continuidade, vamos calcular a soma de todos os ângulos das faces de P, observando-se que a soma de todos os ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua projeção. Portanto, sejam V_1 o número de vértices superiores, V_2 o números de vértices inferiores e V_0 o número de vértices do contorno visível C, Temos, $V = V_0 + V_1 + V_2$, Notemos ainda que V_0 é o número de vértices, conseqüentemente de lados, da poligonal C', contorno de P'. Continuando, a projeção das faces superiores é um

o com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, que
os vértices superiores de P.



A soma dos ângulos de todas as faces superiores é dada por:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

De forma análoga, temos que a soma de todos os ângulos das faces inferiores é dada por:

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 \quad 2).$$

Adicionando-se as duas equações anteriores temos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$

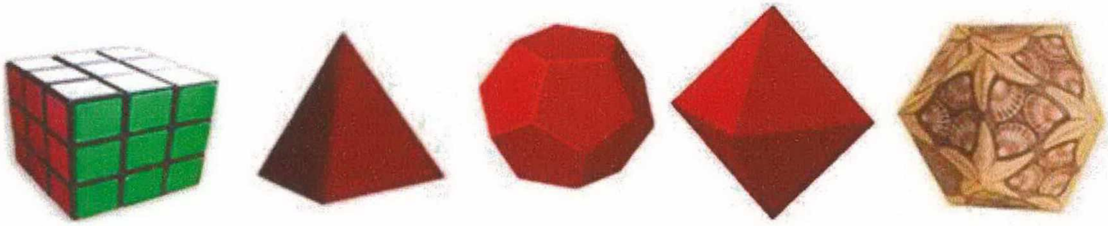
$$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2) \qquad \text{(II)}$$

$$S = 2\pi(V \quad 2)$$

Comparando-se (I) e (II) e dividindo-se por 2π , temos que:

$$A - F = V - 2.$$

Os Sólidos de Platão



Os nomes *sólidos platônicos* ou *corpos cósmicos* foram dados devido à forma pela qual Platão (427 a.C. - 34 a.C.), em um diálogo intitulado *Timeu*, empregou para explicar a natureza. Estes sólidos são conhecidos desde a antiguidade. Modelos ornamentais podem ser encontrados entre as esculturas em pedra criadas na Escócia no período Neolítico (Figura 7), 1000 anos antes de Platão.

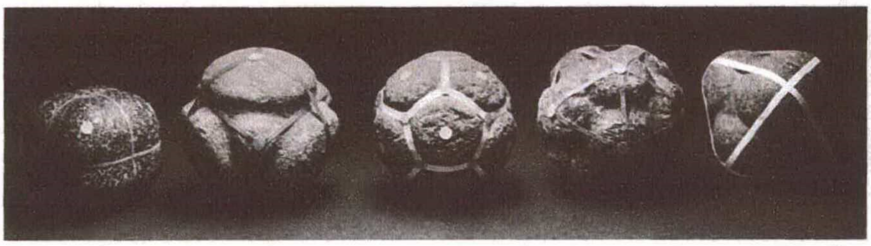


Figura 7: Modelos em pedra do cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro e octaedro (Ashmolean Museus, Oxford).

Platão associava cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) com um poliedro regular: Terra é associada com o cubo; ar, com o octaedro; água, com o icosaedro; fogo, com o tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: "Faltava ainda uma quinta construção que deus utilizou para organizar todas as constelações do céu.". Aristóteles introduziu um quinto elemento, éter, e postulou que os céus eram feitos deste elemento, mas ele não teve interesse em associá-lo com o quinto sólido de Platão.

Euclides, no seu último livro (Livro XIII) de Os Elementos, deu uma descrição matemática completa dos sólidos platônicos: nas proposições 13-17, descrevem-se as construções do tetraedro, do octaedro, do cubo, do icosaedro,e do dodecaedro, nesta ordem. Para cada sólido, Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta do sólido. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares. Vejamos a demonstração abaixo:

Para isso, considere então um sólido platônico cujas faces são polígonos regulares de n lados. Como cada aresta do poliedro é definida pela interseção dos lados de dois polígonos adjacentes, segue-se que se contarmos todos os lados de todos os polígonos, iremos contar duas vezes cada aresta do poliedro. Desta maneira:

$$V - A + F = 2 \qquad 1)$$

$$n \cdot F = 2 \cdot A. \qquad 1.2)$$

Denote por p o número de arestas do poliedro que concorrem em um mesmo vértice. Cada uma destas arestas, a exemplo das faces, se conecta a dois vértices. Assim, se contarmos o número de arestas em cada face, estaremos contando duas vezes o número de arestas do poliedro. Portanto:

$$p \cdot V = 2 \cdot A. \qquad 1.3)$$

Substituindo-se os valores de V e F das Equações (1.2) e (1.3) na Equação (1.), teremos que

$$2 \cdot \frac{A}{P} - A + 2 \cdot \frac{A}{n} = 2 \, ou, ainda, \frac{1}{p} - \frac{1}{A} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Conseqüentemente,

$$A = (2 \cdot n \cdot p)/(2 \cdot n + 2 \cdot p - n \cdot p). \qquad 1.4)$$

Como o número A de arestas deve ser positivo, temos que

$2 \cdot n + 2 \cdot p - n \cdot p > 0$, ou seja,igual a 2 ou, ainda,

$$(2 \cdot n)/(n - 2) > p.$$

Uma vez que $p \geq 3$, concluímos que, obrigatoriamente, $n < 6$. As possibilidades são então as seguintes:

. Se $n = 3$, então $A = 6 \cdot p/(6 - p)$ e, portanto, $F = 2 \cdot A/n = 4 \cdot p/(6 - p)$. Desta última fórmula segue-se que $p < 6$. Agora:
(a) Se $p = 3$, então $F = 4$. Neste caso, o poliedro formado é o tetraedro.
(b) Se $p = 4$, então $F = 8$. Neste caso, o poliedro formado é o octaedro.
(c) Se $p = 5$, então $F = 20$. Neste caso, o poliedro formado é o icosaedro.

. Se $n = 4$, então $A = 4 \cdot p/(4 - p)$ e, portanto, $F = 2 \cdot A/n = 2 \cdot p/(4 - p)$. Desta última fórmula segue-se que $p < 4$. Sendo assim, $p = 3$ e, portanto,

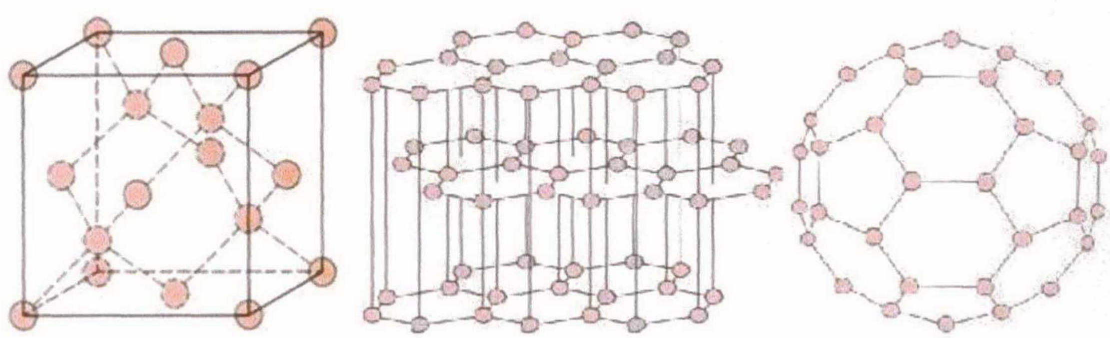
$F = 6$. Neste caso, o poliedro formado é o cubo.

Se $n = 5$, então $A = 10 \cdot p/(10 - 3 \cdot p)$ e, portanto,

· $F = 2 \cdot A/n = 4 \cdot p/(10 - 3 \cdot p)$. Desta última fórmula segue-se que $p < 10/3$. Sendo assim, $p = 3$ e, portanto, $F = 12$. Neste caso, o poliedro formado é o dodecaedro.

A Relação de Euler e os Fulerenos

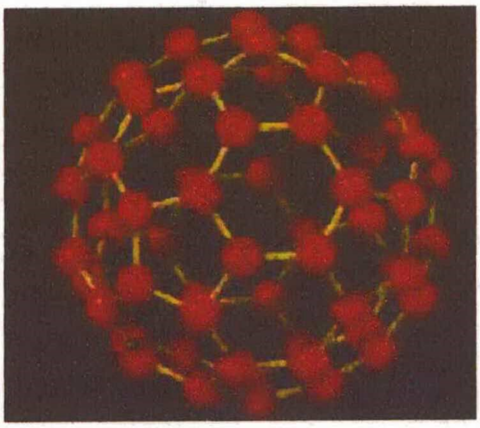
Descobertos no ano de 1985, pelos químicos Harold W. Kroto, Robert F. Curl e Richard E. Smalley,ao pesquisarem estrelas vermelhas – formadas essencialmente por carbonos, os Fulerenos são a terceira forma mais estável do carbono, após o diamante e o grafite. Após a descoberta dos fulerenos e nanotubos, eles tornaram-se populares entre os cientistas tanto pela sua beleza estrutural quanto pela sua versatilidade para a síntese de novos compostos químicos. O nome Fulereno, foi dado em homenagem ao arquiteto Richard Buckminster Fuller. Mesmo sendo constituídos do mesmo elemento químico, carbono, o que diferenciam é a forma com a qual os átomos de carbono estão organizados estruturalmente. Veja as figuras abaixo.



Estutura molecular do Diamante, Grafite e Fulereno

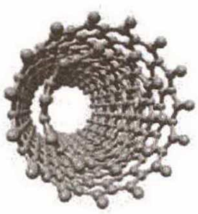
Os fulerenos possuem quantidades diferentes de átomos de carbono, podendo ser formados por 20, 60, 70, 100, 180, 240 e até 540 átomos de carbono. É comumente falado do C_{60} e também do C_{70}, pois estes foram os primeiros a serem descobertos e também são os mais comuns, mas os outros também têm importância na classe dos fulerenos.

Eles são formados quando carbono vaporizado se condensa numa atmosfera de gás inerte (hélio); a vaporização do carbono pode ser feita, por exemplo, com lasers ou com arcos voltaicos usando eletrodos de grafite. Os átomos de carbono vaporizados são misturados ao hélio e se combinam para formar agregados moleculares que podem reunir alguns poucos átomos ou centenas deles. Uma das características dos fulerenos é que eles podem ser dissolvidos usando-se determinados solventes e, possuem corres diferentes. O C_{60}, por exemplo, é um sólido com cor de mostarda e quando dissolvido em solução de hidrocarbonetos aromáticos, como o benzeno, a solução possui uma coloração magenta, avermelhada. Já o C_{70} possui uma coloração marrom avermelhada e em solução tem a cor vermelho vinho. O C_{76}, C_{78} e C_{84} *são amarelos.*



Estruturalmente os fulerenos apresentam na forma de "gaiolas", ou esferas ocas, que são formadas por anéis de 5 e 6 átomos de carbono, sendo estas estruturas bastantes estáveis. Por terem a forma de uma esfera oca, tem a capacidade de aprisionar átomos ou moléculas de gases em seus interiores. Quando ocorre a penetração de átomos de metais no interior dos fulerenos, ocorre então à formação de sais, os chamados bucketos, que possuem faces metálicas. Tais compostos de fulerenos estão sendo bastante estudados atualmente.

A partir da síntese de quantidades macroscópicas de fulerenos ,Sumio Iijima, em 1991,descobriu outras moléculas de carbono e as chamou de nanotubos, mais informações veja apêndice extraído de **Uma Pérola de Euler. 2005. Iniciação Científica - Universidade Federal de Itajubá, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais**, Estes são flexíveis e mais resistentes que o aço, sendo bons condutores e tem propriedades elétricas especiais que o tornam mais condutores que o cobre.



Por terem uma estrutura de poliedro convexo, contendo apenas faces hexagonais e pentagonais com cada vértice concorrendo três arestas, assemelhando-se a uma bola de futebol, uma das conseqüências interessante ao aplicar a fórmula de Euler é que eles possuem exatamente 12 faces pentagonais. Veja demonstração abaixo.

No caso dos fulerenos, como cada átomo está ligado a três outros, em cada vértice há o encontro de três arestas (cada uma ligada a dois vértices); assim:

$V = 2/3\ A.$ (1)

Substituindo-se esta relação na equação anterior, tem-se que:

$F = 1/3A + 2.$ (2)

O número de faces numa molécula fulerênica é então:

$F = P + H,$ (3)

em que P é o número de pentágonos e H o de hexágonos. Ao contar as arestas para todas as faces, sendo cada aresta compartilhada por duas faces, cada aresta é contada duas vezes. Assim, numa molécula fulerênica:

$A = 1/2(5P + 6H)$ (4)

Substituindo-se as equações 3 e 4 na equação 2, encontra-se simplesmente o número de pentágonos numa molécula fulerênica: $P = 12$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

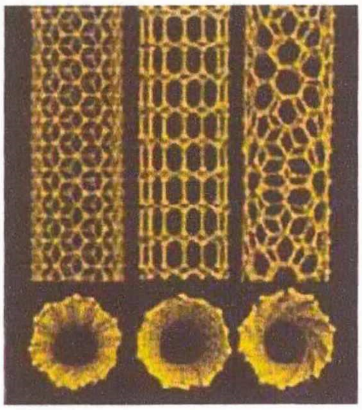
O fascínio de matemáticos e filósofos pelos poliedros vem de longa data, destacando-se significativamente o trabalho de Euclides, na Grécia Antiga. Para alguns, sua obra "Os Elementos", em 13 volumes, teria o estudo dos poliedros como motivação principal. Percebe-se também que a falta de uma definição precisa pode levar-nos a erros na demonstração de algumas propriedades e teoremas em matemática. Vimos também que o teorema de Euler, $V - A + F = 2$, em que V representa o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro, é válido para todos os poliedros convexos. Notamos, também, que os poliedros aparecem em diversos ramos do conhecimento.

Acreditamos que este trabalho será de grande importância para aqueles que desejam conhecer um pouco mais sobre os poliedros.

Apêndice

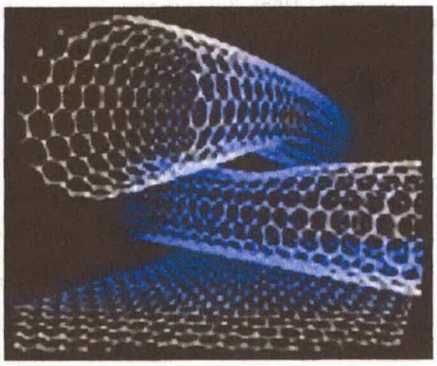
Nanotubos

Estudando a síntese de quantidades macroscópicas de fulerenos, Sumio Iijima, em 1991, descobriu outros tipos de moléculas de carbono a as denominou **Nanotubos**: tubos cilíndricos de diâmetros da ordem de 8 nm e 15 nm, empacotados um dentro do outro, como diversas camadas de uma cebola, e com as extremidades fechadas por hemisférios fulerênicos. Recentemente foi descoberto que os nanotubos são flexíveis e mais resistentes que qualquer aço, e têm propriedades elétricas especiais, sendo, por exemplo, melhores condutores elétricos que o cobre.

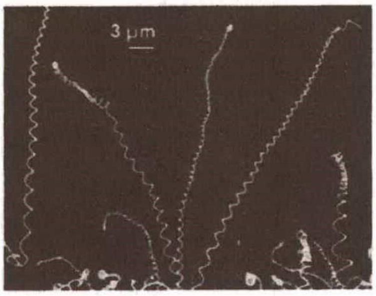


Nanotubos de Carbono.

A partir desses minúsculos tubinhos, os cientistas planejam construir 'nanomotores' e outras 'nanomáquinas', que somente poderão ser vistas com o auxílio de um equipamento especial: o nanoscópio. E essas nanoestruturas poderão ter aplicações diversas. Mas isso é futuro. No presente, os fulerenos estão sendo usados na fabricação de novos materiais magnéticos muito leves, na preparação de novos compostos químicos que são usados para melhorar a qualidade das imagens nas radiografias e até no desenvolvimento de medicamentos contra a Aids. Já os nanotubos estão sendo estudados principalmente como condutores, isto é, como fios, fios que podem ser milhões de vezes mais finos que um fio de cabelo!



Nanotubo

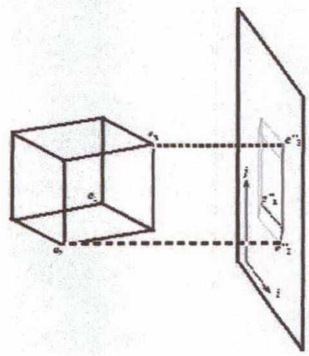


Nanotubos observados no microscópio eletrônico

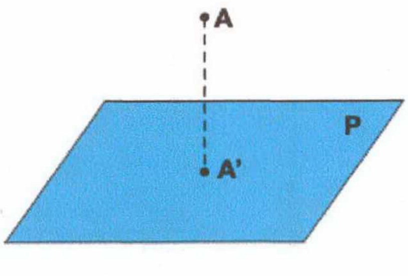
Projeção Ortogonal

Em geometria, uma projecção ortogonal é uma representação num hiperplano de *k* dimensões de um objeto que tem *n* dimensões, considerando $k < n$. A projecção é obtida a partir da intersecção de planos perpendiculares (ortogonais) a cada ponto do objeto, com o hiperplano de representação.

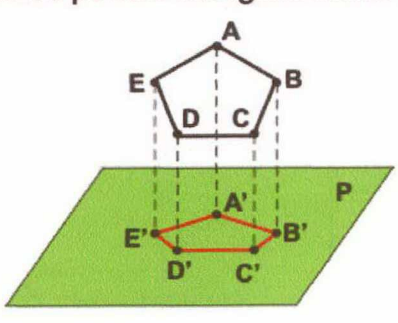
Este tipo de projecção é bastante utilizado em cartografia e como técnica de análise em algumas disciplinas de geologia como a geologia estrutural.



A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano P é a intersecção A' da reta R perpendicular ao plano P traçada a partir de A.



A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é obtida projetando ortogonalmente todos os pontos da figura sobre o plano.



Referências Bibliográficas

1- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A matemática do ensino médio, volume 2, 3ª edição, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

2- MELLO, L. F. Fulerenos e futebol: aplicações da fórmula de Euler, Revista do Professor de Matemática, 52,17-20, 2003.

3- SARAIVA, J. C. V. O poliedro regular de maior volume, Revista do Professor de Matemática, 49, 15-20, 2002.

4- WAGNER, E. V-A+F = 2. Existe o poliedro?, Revista do Professor de Matemática, 47, 5-11, 2001.

5- GONÇALVES, KELLY CRISTINA, MELO, LUIS FERNANDO. Uma Pérola de Euler. 2005. Iniciação Científica - Universidade Federal de Itajubá, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais