UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLAUDIO DOS REIS LOBO FILHO
CLOVEMILTON MENEZES PEREIRA

DIAGONALIZAÇÃO E DECOMPOSIÇÃO LU DE MATRIZES

CAXIAS – MA
2009

CLAUDIO DOS REIS LOBO FILHO

CLOVEMILTON MENEZES PEREIRA

DIAGONALIZAÇÃO E DECOMPOSIÇÃO LU DE MATRIZES

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Matemática – Formação do Professor, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina em convênio com a Universidade Virtual do Estado do Maranhão.

Professor: Roberto Corrêa da Silva.

CAXIAS – MA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Diagonalização e Decomposição LU de Matrizes"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 08/09/2009

Dr. Roberto Correa da Silva (CFM/UFSC - Orientador) ______________

Dr. Oscar Ricardo Janesch (CFM/UFSC - Examinador) ______________

Dr. Inder Jeet Taneja (CFM/UFSC – Examinador) ______________

Profª Neri Terezinha Both Carvalho (Drª)
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, setembro de 2009.

A Deus, ao nosso orientador prof. Roberto Corrêa da Silva e a todos aqueles que de alguma forma tiveram contribuição para a realização deste trabalho.

"Se o ensino de Matemática, nos cursos básicos, fosse feito como realmente deveria ser, com vivo interesse, clareza e simplicidade, essa fabulosa ciência exerceria sobre todos os homens estranha e desmedida fascinação" (REY PASTOR, Matemático espanhol).

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos diagonalização e fatoração LU de matrizes. A primeira decomposição será da forma $A = MDM^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal e M é a matriz dos autovetores de A. A segunda é do tipo $A = LU$ em que L é uma matriz triangular inferior e U é escalonada. Devemos escrever estas definições, exemplos e resultados. Como aplicações, para o primeiro caso, veremos como calcular A^p, sendo p um número natural eventualmente muito grande e para o segundo, ilustraremos a teoria mostrando um problema de Resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Palavras-chave: Decomposição. Diagonalização. Matrizes. Equações Lineares.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Assim como a fatoração de um número natural, a decomposição de uma matriz como o produto de duas ou mais matrizes, pode ser bastante útil na resolução de vários problemas na Engenharia, Física e Biologia. No caso da diagonalização, usamos a informação sobre autovalores e autovetores contida numa matriz A para apresentar uma fatoração do tipo $A = MDM^{-1}$, onde a mesma nos permite calcular A^p rapidamente para valores grandes de p. Já a decomposição A = LU é geralmente usada para resolver sistemas de equações lineares de ordem maior ou igual a quatro, nos quais os métodos convencionais ficam difíceis de serem aplicados.

O trabalho está dividido em três capítulos. No capítulo 1, introduzimos a idéia de operadores lineares, destacando a determinação dos autovalores e autovetores, com suas definições, propriedades e aplicações. No capítulo 2, apresentamos os critérios da diagonalização de operadores lineares e matrizes, no qual, abordamos teoremas e propriedades e ilustramos essa teoria com uma aplicação sobre potência de matrizes. Finalmente, no capítulo 3, estudamos a decomposição LU de uma matriz A, seus conceitos fundamentais e propriedades. Destacamos ainda um problema sobre a resolução de um sistema de equações lineares usando essa decomposição, que servirá como base de aplicação em outras situações.

1. OPERADORES LINEARES

Admitindo já conhecida a teoria de Espaços Vetoriais e Transformações lineares, abordaremos aqui estudos a partir de Operadores Lineares. Neste estudo vamos trabalhar apenas com Espaços Vetoriais reais, cuja teoria elementar pode ser encontrada em [1], [2] e [6] citados nas referências bibliográficas.

Todas as propriedades estudadas nas transformações lineares e suas respectivas matrizes retangulares são válidas também para os operadores lineares. No entanto, estes e suas correspondentes matrizes quadradas possuem outras propriedades particulares, que estudaremos neste capítulo.

1.1 Definição: Toda Transformação Linear T de um espaço vetorial V em si mesmo, isto é, $T: V \to V$ é chamada de **Operador Linear sobre V**.

1.1.1 Exemplo: Dada a função $T: R^2 \to R^2$ definida pela lei

$$T(x, y) = (x - 2y, 3x + 4y),$$

verificamos que T é um operador linear, pois:

Seja $\mu = (x, y) \in R^2$ e $v = (a, b) \in R^2$, temos:

$$\begin{aligned} \text{i) } T(\mu + v) &= T((x, y) + (a, b)) \\ &= T(x + a, y + b) \\ &= (x + a - 2(y + b), 3(x + a) + 4(y + b) \\ &= (x + a - 2y - 2b, 3x + 3a + 4y + 4b) \\ &= (x - 2y + a - 2b, 3x + 4y + 3a + 4b) \\ &= (x - 2y, 3x + 4y) + (a - 2b, 3a + 4b) \\ &= T(x, y) + T(a, b) \\ &= T(\mu) + T(v) \end{aligned}$$

Dado $\mu = (x, y) \in R^2$ e $\alpha \in R$, temos:

$$\begin{aligned} \text{ii) } T(\alpha\mu) &= T(\alpha(x, y)) \\ &= T(\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

$$= (\alpha x - 2\alpha y, 3\alpha x + 4\alpha y)$$
$$= \alpha(x - 2y, 3x + 4y)$$
$$= \alpha\, T(x, y)$$
$$= \alpha\, T(\mu)$$

Logo, temos que T é um Operador Linear.

1.1.2 Exemplo: Dada a função T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida pela lei

$$T(x, y) = (|x|, 2y),$$

temos que este não é um operador linear, pois:

Sejam $\mu = (x, y)$ e $v = (a, b)$ vetores genéricos do R^2.

$$T(\mu + v) = T[(x, y) + (a, b)] = T(x + a, y + b) = |x + a|, 2(y + b)) = (|x + a|, 2y + 2b)$$

$$T(\mu) + T(v) = T(x, y) + T(a, b) = (|x|, 2y) + (|a|, 2b) = (|x| + |a|, 2y + 2b)$$

Observamos que $|x + a| = |x| + |a|$ não é verdadeira, pois para x = 1 e y = –3 temos:

$$|1 + (-3)| \neq |1| + |-3|$$

Logo, T não é um operador linear.

1.2 Isomorfismo e Operador Inversível

1.2.1 Definição: Toda transformação linear T: U → V de um espaço vetorial U no espaço vetorial V que seja bijetora é denominada **isomorfismo de U em V**. No caso em que T é um operador linear, ou seja, T: V → V, teremos um **automorfismo de V**.

1.2.2 Proposição: Se T é um isomorfismo de U em V, então T^{-1}: V → U, também é um isomorfismo (de V em U).

Demonstração:

Como T é bijetora, então, existe a função inversa T^{-1}. Mostraremos a seguir que T^{-1} é uma transformação linear.

(I) Sejam $v_1, v_2 \in V$ e consideremos $T^{-1}(v_1 + v_2) = u$. Como T é sobrejetora, então existem $u_1, u_2 \in U$ de maneira que $T(u_1) = v_1 \Leftrightarrow T^{-1}(v_1) = u_1$ e $T(u_2) = v_2 \Leftrightarrow T^{-1}(v_2) = u_2$. Substituindo estes resultados na igualdade inicial, temos:

$$\begin{aligned} u &= T^{-1}(T(u_1) + T(u_2)) \\ &= T^{-1}(T(u_1 + u_2)) \\ &= u_1 + u_2 \\ &= T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Assim:

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)$$

(II) Sendo $T(\alpha u) = \alpha v$, $\alpha \in R$ e $u = T^{-1}(v)$, temos:

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha v) &= T^{-1}(T(\alpha u)) \\ &= \alpha u \\ &= \alpha T^{-1}(v). \end{aligned}$$

Provaremos agora que T^{-1} é bijetora e consequentemente um isomorfismo.

(III) Suponhamos $v_1, v_2 \in V$ e $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2) = u$. Então $T(u) = v_1$ e $T(u) = v_2$. Daí, $v_1 = v_2$. Logo T^{-1} é injetora.

(IV) Dado $u \in U$, tomando $v = T(u)$ teremos:

$$T^{-1}(v) = T^{-1}(T(u)) = u,$$

o que mostra que T^{-1} é sobrejetora.

Como T^{-1} é uma transformação linear bijetora, logo é um isomorfismo.

Tendo como base a teoria de núcleo e imagem de uma Transformação Linear, podemos citar o seguinte corolário:

1.2.3 Colorário: Seja $T: U \to V$ uma transformação linear. Se $\dim U = \dim V$, então T é injetora, se e somente se, é sobrejetora.

Nota: Como neste estudo estamos nos limitando a operadores lineares, a dimensão dos espaços vetoriais será sempre a mesma. Dessa forma, podemos provar que T é um automorfismo simplesmente mostrando que T é injetora (ou sobrejetora) e consequentemente veremos que existe o operador inverso T^{-1}.

1.2.4 Exemplo: Mostrar que o operador linear T: $R^3 \to R^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$$

é um automorfismo e determinar T^{-1}.

Solução:

Primeiramente determinaremos o N(T) através do Sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Cuja única solução é (0, 0, 0). Logo, N(T) = {(0, 0, 0)} $\Longrightarrow$ T é injetora. Com base no corolário acima, podemos afirmar que T é um automorfismo.

Agora, sendo $(a, b, c) = T^{-1}(x, y, z)$ e aplicando T em ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$T(a, b, c) = T(T^{-1}(x, y, z))$$

Como $T^{-1}(T(x, y, z)) = (x, y, z)$, podemos escrever $T(a, b, c) = (x, y, z)$, assim:

$$T(a, b, c) = (a, a - b, 2a + b - c) = (x, y, z)$$

Ou
$$\begin{cases} a = x \\ a - b = y \\ 2a + b - c = z \end{cases}$$

O que resulta $a = x$, $b = x - y$ e $c = 3x - y - z$. Logo,

$$T^{-1}(x, y, z) = (x, x - y, 3x - y - z).$$

1.3 Mudança de Base

Sejam A e B bases de um espaço vetorial V. Faremos a relação entre as coordenadas de um vetor v em relação à base A com as coordenadas deste mesmo vetor em relação à base B.

Faremos a construção para um espaço vetorial V de dimensão 2, para V com dimensão n, a construção é análoga.

Sejam $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ bases de V. Dado um vetor $v \in V$, sendo este combinação linear dos vetores das bases A e B:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 \quad (I)$$

Ou

$$[v]_A = (x_1, x_2) \text{ e:}$$

$$v = y_1w_1 + y_2w_2 \quad \text{(II)}$$

Ou

$$[v]_B = (y_1, y_2)$$

Podemos também fazer uma relação entre os vetores da base A com os da base B, isto é:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), temos:

$$v = x_1\,(a_{11}w_1 + a_{21}w_2) + x_2\,(a_{12}w_1 + a_{22}w_2)$$

Ou

$$v = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2 \qquad \text{(IV)}$$

Comparando (IV) com (II) vem que:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou podemos representar simplesmente pela equação:

$$[v]_B = [I]_B^A\,[v]_A$$

Onde a matriz:

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz mudança de base de A para B.

Observações:

1) Fazendo a comparação da matriz $[I]_B^A$ com (III), observa-se que:

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \text{ e } [v_2]_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

2) A matriz $[I]_B^A$ é a matriz do operador linear identidade $I : V \rightarrow V$ considerado nas bases A e B.

3) A inversa da matriz mudança de base de A para B é a matriz mudança de base de B para A, ou seja, $([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B$

1.3.1 Exemplo: Consideremos as bases $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ do R^2, onde $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 0)$, $w_1 = (2, -1)$ e $w_2 = (-1, 1)$.

Vamos determinar a matriz mudança de base de A para B.

Solução:

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ [v_1]_B & [v_2]_B \end{matrix}$$

Agora faremos uma combinação linear dos vetores da base A em relação à base B:

$$v_1 = (-1, 1) = a_{11}(2, -1) + a_{21}(-1, 1)$$

Ou:

$$\begin{cases} 2a_{11} - a_{21} = -1 \\ -a_{11} + a_{21} = 1 \end{cases} \qquad -a_{11} + a_{21} = 1$$

$$a_{11} = 0 \qquad\qquad 0 + a_{21} = 1$$

$$a_{21} = 1$$

Assim,

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = (1, 0) = a_{12}(2, -1) + a_{22}(-1, 1)$$

Ou:

$$\begin{cases} 2a_{12} - a_{22} = 1 \\ -a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases} \qquad -a_{12} + a_{22} = 0$$

$$a_{12} = 1 \qquad -1 + a_{22} = 0$$

$$a_{22} = 1$$

$$\text{Logo, } [v_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e portanto } [I]_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Processo Prático para determinação da matriz mudança de base

Baseado em composta de transformações lineares e sabendo que a matriz mudança de base de uma base qualquer para a canônica é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base, podemos escrever a relação abaixo.

Sabendo que A e B são bases de um espaço vetorial V e C a base canônica, temos que:

$$[I]_B^A = [I \circ I]_B^A = [I]_B^C\,[I]_C^A = \left([I]_C^B\right)^{-1}[I]_C^A = B^{-1}A$$

$$\text{Isto é: } [I]_B^A = B^{-1}A$$

onde B e A são matrizes cujas colunas são formadas pelos vetores das bases B e A respectivamente.

1.3.2.1 Exemplo: Vamos calcular a matriz mudança de base de A para B do exemplo (**1.3.1**), usando o processo prático.

Temos que:

$$A = \{v_1, v_2\} \text{ e } B = \{w_1, w_2\}, \text{ daí:}$$

$$[I]_B^A = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 1+0 \\ -1+2 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Matrizes Semelhantes

1.4.1 Definição: Duas matrizes A e B são semelhantes se existe uma matriz inversível M tal que $A = M^{-1}BM$. Em termos de matrizes de operadores, M é a matriz mudança de base de B para A e podemos escrever:

$$[T]_B = M^{-1}\,[T]_A\,M$$

1.4.2 Propriedade: As matrizes semelhantes $[T]_A$ e $[T]_B$ possuem o mesmo determinante.

Demonstração:

Partindo de que,

$$[T]_B = M^{-1}\,[T]_A\,M$$

segue que:

$$M[T]_B = [T]_A\,M$$

e daí,

$$\det M \det[T]_B = \det[T]_A \det M$$

Assim:

$$\det\,[T]_B = \det\,[T]_A$$

1.4.3 Exemplo: Seja um operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$ e consideremos as bases

A = {(1, 0), (0, 1)} e B = {(4, 1), (-11, -3)}. Sabendo que $[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ vamos determinar uma matriz $[T]_B$ semelhante a $[T]_A$.

Solução:

Para calcular a matriz $[T]_B$ vamos utilizar a relação $[T]_B = M^{-1}\,[T]_A M$, onde M é a matriz mudança de base de B para A. Utilizando-se do processo prático, temos que:

$$M = [I]_A^B = A^{-1}B$$

isto é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} [T]_B &= \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -53 \\ 5 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 56-53 & -154+159 \\ 20-19 & -55+57 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podemos mostrar ainda que, como as matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são semelhantes, então, possuem o mesmo determinante, ou seja:

$$\det[T]_A = \det[T]_B$$

Segue que:

$$\det[T]_A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\det[T]_B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Ou seja, $[T]_A$ e $[T]_B$ possuem o mesmo determinante.

1.5 Autovalores e Autovetores:

Considere um operador linear $T: V \to V$. Dado $u \in V$, veremos a seguir que é importante u e T(u) possuírem a mesma direção.

1.5.1 Definição: Dado um espaço vetorial V e seja $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $\mu \in V$, $\mu \neq 0$, é um **autovetor de T** se existe um escalar λ tal que $T(\mu) = \lambda\mu$, sendo λ dito um **autovalor de T** associado a μ.

Nota: De acordo com a definição, um vetor $v \neq 0$ é dito autovetor se existe uma imagem T(v) múltiplo escalar de v. Podemos dizer que no R^2 e no R^3 v e T(v) têm a mesma direção. Dessa forma, dependendo do valor de λ, o operador dilata v se $\lambda > 1$, contrai v se $0 < \lambda < 1$, inverte o sentido de v se $\lambda < 0$ ou anula v quando $\lambda = 0$.

Observe que na figura (1.5a) o vetor $v \in R^2$ é um autovetor de um operador T que inverte o sentido de v, isto porque $\lambda < 0$. Já a figura (1.5b) ilustra um vetor $\mu \in R^2$ que não é autovetor de um operador T, pois $T(\mu)$ não é múltiplo escalar de μ.

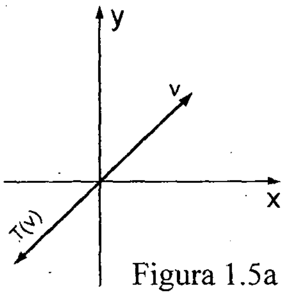

Figura 1.5a

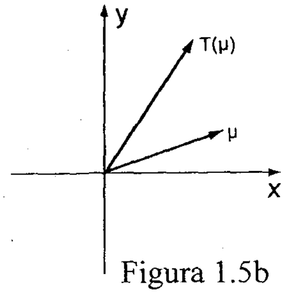

Figura 1.5b

1.5.2 Exemplo: O vetor v = (2, 2) é um autovetor do operador linear $T: R^2 \to R^2$, definido por $T(x,y) = (2x + 3y, 3x + 2y)$ associado ao autovalor $\lambda = 5$, pois:

$$T(v) = T(2, 2) = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = (10,10) = 5(2,2) = 5v$$

Em contrapartida, o vetor $u = (1, 2)$ não é autovetor de T, pois:

$$T(u) = T(1, 2) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = (8,7) \neq \lambda(1,2)$$

ou seja, não existe λ para essa igualdade, logo o sistema não tem solução.

1.5.3 Exemplo: Dado um vetor $v = (1,1,1)$ e um operador linear $T: R^3 \to R^3$ definido por $T(x,y,z) = (x + y, y + z, x + z)$, temos que v é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$, pois:

$$T(v) = T(1,1,1) = (1 + 1, 1 + 1, 1 + 1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = 2v.$$

O que não ocorre no caso de um dado vetor $u = (1, 2, 3)$, pois:

$$T(u) = T(1,2,3) = (1 + 2.\ 2 + 3, 1 + 3) = (3,5,4) \neq \lambda(1,2,3)$$

ou seja, não existe λ para essa igualdade, consequentemente u não é autovetor de T.

1.6 Autoespaço

1.6.1 Definição: Sendo λ um autovalor de um operador linear $T: V \to V$, temos que o conjunto $P(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}$ de todos os vetores $u \in V$, incluindo o nulo, é denominado **autoespaço de T associado ao autovalor λ.**

1.6.2 Teorema: O conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V, isto é, $P(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}$ é subespaço de V.

Demonstração:

A demonstração será feita com $P(\lambda) \in R^2$, para o R^n é inteiramente análoga.

Dados v_1 e $v_2 \in P(\lambda)$ e $\propto \in R$, temos que:

i) $(0,0) \in P(\lambda)$, pois $T(0,0) = \lambda(0,0) = (0,0)$

ii) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$, então:

$v_1 + v_2 \in P(\lambda)$.

iii) $T(\propto v_1) = \propto T(v_1) = \propto(\lambda v_1) = \lambda(\propto v_1)$, logo:

$\propto v_1 \in P(\lambda)$.

1.6.3 Exemplo: Sabendo que $\lambda = 2$ é um autovalor do operador linear $T: R^2 \to R^2$ tal que,

$$T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Determinaremos o autoespaço associado a esse autovalor.

Solução:

$$
\begin{aligned}
P(2) &= \{(x, y) \in R^2 \mid T(x, y) = 2(x, y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid (x + 2y, -x + 4y) = (2x, 2y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid x + 2y = 2x, -x + 4y = 2y\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid x = 2y\} \\
&= \{(2y, y) \in R^2\} \\
&= \{y(2, 1) \mid y \in R\} \\
&= [(2, 1)]
\end{aligned}
$$

Assim, o conjunto $P(2) = \{y(2, 1) \mid y \in R\} = [(2, 1)]$ é o autoespaço associado a $\lambda = 2$, e que geometricamente é representado pela reta L.

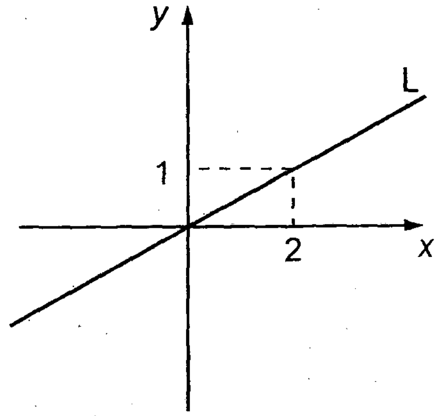

Fig. 1.6a

1.7 Polinômio Característico

1.7.1 Definição: Seja $A=(a_{ij}) \in M(n, R)$, denominamos **polinômio característico de A de grau n** o polinômio a seguir:

$$
P_A(t) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - t & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} = \det(A - tI_n)
$$

Ou seja,

$$P_A(t) = \det(A - tI_n)$$

1.7.2 Definição: Dado um espaço vetorial V de dimensão n e T: V $\rightarrow$ V um operador linear. Denomina-se **Polinômio Característico de T** o polinômio característico da matriz de T em relação a qualquer base de V. Usaremos a indicação $P_T(t)$.

Observação: O polinômio característico de T independe da escolha de uma base para V, pois o determinante de matrizes semelhantes é igual.

1.7.3 Teorema: Seja T um operador linear, então, os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico $P_T(t)$.

Demonstração:

De acordo com a definição de **(1.5.1)** temos que λ é um autovalor de T se, e somente se, Nuc $([T]_C - \lambda I_n) \neq \{0\}$, isto garante que $[T]_C - \lambda I_n$ não é inversível, e mais, garante ainda que $\det([T]_C - \lambda I_n) = 0$. Por definição $\det([T]_C - \lambda I_n) = \det([T]_C - tI_n) = P_T(t)$, assim o teorema está provado.

Nota: Se V é um espaço vetorial sobre R, o número de autovalores de um operador linear T: V $\rightarrow$V é menor ou igual à dimensão de V, pois algumas das raízes de $P_T(t)$ podem não ser reais.

1.7.4 Exemplo: Seja T: $R^3 \rightarrow R^3$ um operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z),$$

encontramos o polinômio característico determinado pela matriz de T na base canônica do R^3 da seguinte forma:

$$A = [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad tI = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_T(t) &= \det(A - tI) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 2 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= \left|\begin{array}{ccc:cc} 1-t & 1 & 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 & 2-t \\ 0 & 2 & 3-t & 0 & 2 \end{array}\right| \\ &= (1-t)(2-t)(3-t) - 2(1-t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-t)\,[(2-t)(3-t)-2] \\
&= (1-t)\,[(6-2t-3t+t^2)-2] \\
&= (1-t)\,(t^2-5t+4) \\
&= -t^3+6t^2-9t+4
\end{aligned}
$$

cujas raízes em R são: $t_1 = t_2 = 1$ e $t_3 = 4$.

Assim, os autovalores de T são: 1 e 4, sendo o primeiro com multiplicidade 2.

1.7.5 Exemplo: Seja o operador linear $T: R^3 \to R^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x, x + y - 2z, y - z).$$

Encontraremos pela matriz de T, na base canônica do R^3, o polinômio característico do operador T. Segue que:

$$A = [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, tI = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P_T(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & -2 \\ 0 & 1 & -1-t \end{pmatrix} \\
&= \left|\begin{array}{ccc:cc} 1-t & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 1-t & -2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1 & -1-t & 0 & 1 \end{array}\right| \\
&= (1-t)(1-t)(-1-t) + 2(1-t) \\
&= (1-t)\,[(1-t)(-1-t) + 2] \\
&= (1-t)\,(t^2+1) \\
&= -t^3+t^2-t+1
\end{aligned}
$$

Cujas raízes são: $1 \in R$ e $-i, i \in \mathbb{C}$.

Portanto, o único autovalor de T é 1, pois os demais são complexos.

1.8 Determinação de autovalores e autovetores de Matrizes

Consideremos uma matriz $A \in M(n, R)$, veremos a seguir que a partir do polinômio $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ podemos determinar os autovalores e os autovetores de A.

1.8.1 Determinação dos autovalores

1.8.1.1 Definição: Os **autovalores de A** são os autovalores do operador linear associado a A.

1.8.2 Determinação dos autovetores

1.8.2.1 Definição: Os **autovetores de A** são os autovetores do operador linear associado a A.

1.8.3 Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determinaremos seus autovalores e autovetores correspondentes.

Solução:

O operador linear associado à matriz A é:

$$T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y).$$

O polinômio característico do operador T é dado por $\det(A - \lambda I)$, daí:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

$$= 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \text{ e } \lambda_2 = 1$$

Então, os autovalores do operador T são: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$.

Para determinar os autovetores, usaremos a definição de autoespaço.

Para $\lambda_1 = 4$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(4) &= \{(x, y) \in R^2 \mid T(x, y) = 4(x, y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid (2x + 2y, x + 3y) = (4x, 4y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid 2x + 2y = 4x, x + 3y = 4y\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid x = y\} \\
&= \{(y, y) \in R^2\} \\
&= \{y(1, 1) \mid y \in R\} \\
&= [(1, 1)].
\end{aligned}
$$

Então, os vetores do tipo $P(4) = \{y(1, 1) \mid y \in R\}$, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 4$.

Para $\lambda_2 = 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \{(x, y) \in R^2 \mid T(x, y) = 1(x, y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid (2x + 2y, x + 3y) = (x, y)\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid 2x + 2y = x, x + 3y = y\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 \mid x = -2y\} \\
&= \{(-2y, y) \in R^2\} \\
&= \{y(-2, 1) \mid y \in R\} \\
&= [(-2, 1)].
\end{aligned}
$$

Assim, os vetores do tipo $P(1) = \{y\,(-2, 1) \mid y \in R\}$, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

1.8.4 Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ determinaremos seus autovalores e autovetores.

Solução:

O operador linear associado à matriz A é:

$$T(x, y, z) = (3x - y - 3z, 2y - 3z, - z)$$

O polinômio característico do operador T é dado por det (A – λI), daí segue que:

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3-\lambda & -1 & -3 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$$
$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$
$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$$

Então, os autovalores de T são: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$

Para determinar os autovetores usaremos a definição de autoespaço.

Para $\lambda_1 = 3$, temos:

$$\begin{aligned} P(3) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = 3(x, y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (3x - y - 3z, 2y - 3z, -z) = (3x, 3y, 3z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid 3x - y - 3z = 3x, 2y - 3z = 3y, -z = 3z\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = -3z \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = 0, z = 0\} \\ &= \{(x, 0, 0) \in R^3\} \\ &= \{x(1, 0, 0) \mid x \in R\} \\ &= [(1, 0, 0)] \end{aligned}$$

Então, os vetores do tipo $P(3) = \{x(1, 0, 0) \mid x \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$.

Para $\lambda_2 = 2$, temos:

$$\begin{aligned} P(2) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = 2(x, y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (3x - y - 3z, 2y - 3z, -z) = (2x, 2y, 2z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid 3x - y - 3z = 2x, 2y - 3z = 2y, -z = 2z\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = y \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(y, y, 0) \in R^3\} \\ &= \{y(1, 1, 0) \mid y \in R\} \\ &= [(1, 1, 0)] \end{aligned}$$

Assim, os vetores do tipo $P(2) = \{y(1, 1, 0) \mid y \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_3 = -1$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = -1(x, y, z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (3x - y - 3z, 2y - 3z, -z) = (-x, -y, -z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid 3x - y - 3z = -x, 2y - 3z = -y, -z = -z\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = y = z\} \\
&= \{(x, x, x) \in R^3\} \\
&= \{x(1, 1, 1) \mid x \in R\} \\
&= [(1, 1, 1)]
\end{aligned}
$$

Logo, os vetores do tipo $P(-1) = \{x(1, 1, 1) \mid x \in R\}$ são os autovetores associados a $\lambda_3 = -1$.

2. DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES LINEARES E MATRIZES

A decomposição de matrizes é essencial no estudo da álgebra linear, visto que, em vários problemas do dia-a-dia nos encontramos em situações nas quais usar tais métodos, evita a utilização de processos longos que podem ocasionar erros. Estes, por sua vez, são mais simples e práticos, para a realização de estudos direcionados à aplicação em outros campos ligados à Matemática.

No capítulo anterior introduzimos as definições de operadores lineares e seus respectivos autovalores e autovetores. Faremos aqui um estudo de diagonalização com base nas referências [2] e [6], onde o nosso objetivo é encontrar uma base de autovetores de um dado espaço vetorial, na qual esta seja a mais simples possível. Por vários motivos, veremos que a situação mais conveniente será encontrar uma matriz diagonal associada a um operador.

2.1 Diagonalização de operadores lineares

2.1.1 Definição: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. **Um operador linear $T: V \to V$ é diagonalizável** quando existe uma base de V formada pelos autovetores de T.

Sendo $B = \{u_1,..., u_n\}$ uma base formada de autovetores de T, então, $T(u_i) = \lambda_i u_i$ e assim por definição de matrizes da transformação linear T em relação a base B temos a matriz diagonal:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores de T.

Observação: Os autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ não são necessariamente distintos dois a dois. Devido a isso, pode acontecer de o polinômio característico $P_T(x)$ de um operador linear T se decompor em fatores lineares do tipo $(x-\lambda)^k$, sem que T seja diagonalizável. Esse fato ocorre devido a dimensão dos autoespaços, ou seja, a multiplicidade algébrica dos autovalores não é igual à dimensão dos seus respectivos autoespaços.

2.1.2 Propriedade: Os autovetores associados a n autovalores reais distintos de um operador linear $T: R^n \rightarrow R^n$ são linearmente independentes.

Na demonstração abaixo, o conjunto que mostraremos ser LI é composto por um vetor de cada autoespaço associado ao seu respectivo autovalor.

Demonstração:

Faremos a demonstração para n = 2, para n > 2 a demonstração é análoga.

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores de T, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e v_1, v_2 autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente. Devemos provar que v_1 e v_2 são LI. Seja $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$. Aplicando a esta equação a transformação $T - \lambda_2 I$, e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $Iv_i = v_i$ para i = 1,2 segue que:

$$\begin{gathered}
(T - \lambda_2 I)\cdot(a_1v_1 + a_2v_2) = T(0) = 0 \\
T(a_1v_1 + a_2v_2) - \lambda_2 I(a_1v_1 + a_2v_2) = 0 \\
a_1T(v_1) + a_2T(v_2) - \lambda_2 a_1 I(v_1) - \lambda_2 a_2 I(v_2) = 0 \\
a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 - \lambda_2a_1v_1 - a_2\lambda_2v_2 = 0 \\
a_1\lambda_1v_1 - \lambda_2a_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 - a_2\lambda_2v_2 = 0 \\
a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 = 0
\end{gathered}$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0$$

Como $v_1 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $a_1 = 0$.

Aplicando agora $T - \lambda_1 I$ na equação original $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$, temos:

$$\begin{gathered}
(T - \lambda_1 I)(a_1v_1 + a_2v_2) = T(0) = 0 \\
T(a_1v_1 + a_2v_2) - \lambda_1 I(a_1v_1 + a_2v_2) = 0 \\
a_1T(v_1) + a_2T(v_2) - \lambda_1 a_1 I(v_1) - \lambda_1 a_2 I(v_2) = 0 \\
a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 - \lambda_1a_1v_1 - \lambda_1a_2v_2 = 0 \\
a_1\lambda_1v_1 - \lambda_1a_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 - \lambda_1a_2v_2 = 0 \\
a_1(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0
\end{gathered}$$

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Também, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq 0$, concluímos que $a_2 = 0$. Logo os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes.

2.1.3 Corolário: Sendo V um espaço vetorial de dimensão n e T: V → V um operador linear com n autovalores reais distintos, então, V possui uma base cujos elementos são todos autovetores de T.

2.1.4 Exemplo: Seja o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (x + 2y, - x + 4y)$.

Segue que a matriz de T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico do operador T é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2$$

$$= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

Logo, λ_1 e λ_2 são os autovalores de T. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos uma base do R^2 formada pelos correspondentes autovetores.

Determinaremos os autovetores usando a definição de autoespaço.

Para $\lambda_1 = 2$:

$$P(2) = \{(x, y) \in R^2 | \ T(x, y) = 2(x, y)\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ (x + 2y, -x + 4y) = (2x, 2y)\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ x + 2y = 2x, -x + 4y = 2y\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ x = 2y\}$$

$$= \{(2y, y) \in R^2\}$$

$$= \{y(2, 1) \mid y \in R\}$$

$$= [(2, 1)]$$

Então, os vetores do tipo $P(2) = \{y(2, 1) \mid y \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$.

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{aligned} P(3) &= \{(x, y) \in R^2 | \ T(x, y) = 3(x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 | \ (x + 2y, -x + 4y) = (3x, 3y)\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 | \ x + 2y = 3x, -x + 4y = 3y\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 | \ x = y\} \\ &= \{(y, y) \in R^2\} \\ &= \{y(1, 1) \mid y \in R\} \\ &= [(2, 1)] \end{aligned}$$

Então, os vetores do tipo $P(3) = \{y(1, 1) \mid y \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$.

Assim, o conjunto $\{(2, 1), (1, 1)\}$ é uma base do R^2 e, portanto T é diagonalizável.

2.1.5 Exemplo: Seja o operador linear $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$, vem que:

A matriz de T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico do operador T é:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 & -2 & -1-\lambda \\ 2 & 1 & 2-\lambda & 2 & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \ \lambda_3 = 2$$

Logo, λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores de T.

Como os autovalores são todos distintos, os correspondentes autovetores formam uma base do R^3.

Para determinar os autovetores, usaremos a definição de autoespaço.

Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = 1(x, y, z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, -2x - y, 2x + y + 2z) = (x, y, z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = x, -2x - y = y, 2x + y + 2z = z\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = -y, y = z\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = -z, y = z\} \\
&= \{(-z, z, z) \in R^3\} \\
&= \{z(-1, 1, 1) \mid z \in R\} \\
&= [(-1, 1, 1)]
\end{aligned}
$$

Logo, os vetores do tipo $P(1) = \{z(-1, 1, 1) \mid z \in R\}$ são os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$.

Para $\lambda_2 = -1$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = -1(x, y, z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, -2x - y, 2x + y + 2z) = (-x, -y, -z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = -x, -2x - y = -y, 2x + y + 2z = -z\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, y = -3z\} \\
&= \{(0, -3z, z) \in R^3\} \\
&= \{z(0, -3, 1) \mid z \in R\} \\
&= [(0, -3, 1)]
\end{aligned}
$$

Então, os vetores do tipo $P(-1) = \{z(0, -3, 1) \mid z \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$

Para $\lambda_3 = 2$, temos:

$$
\begin{aligned}
P(2) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y,z) = 2(x, y,z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, -2x - y, 2x + y + 2z) = (2x, 2y, 2z)\} \\
&= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 2x, -2x - y = 2y, 2x + y + 2z = 2z\}
\end{aligned}
$$

$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0 \text{ e } y = 0\}$

$= \{(0, 0, z) \in R^3\}$

$= \{z(0, 0, 1) \mid z \in R\}$

Assim, os vetores do tipo $P(2) = \{z\,(0, 0, 1) \mid z \in R\}$, são os autovetores associados a $\lambda_3 = 2$.

Dessa forma, o conjunto $\{(-1, 1, 1), (0, -3, 1), (0, 0, 1)\}$ é uma base do R^3 e consequentemente T é diagonalizável.

2.1.6 Exemplo: Dado um operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, definido por

$$T(x, y) = (5x - y, x + 3y).$$

Temos que, a matriz de T na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico do operador T é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda) + 1$$

$$= 15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

Assim, o único autovalor de T é $\lambda = 4$

Determinaremos os autovetores através da definição de autoespaço.

Para $\lambda = 4$, temos

$$P(4) = \{(x, y) \in R^2 \mid T(x, y) = 4(x, y)\}$$

$= \{(x, y) \in R^2 \mid (5x - y, x + 3y) = (4x, 4y)\}$

$= \{(x, y) \in R^2 \mid 5x - y = 4x, x + 3y = 4y\}$

$= \{(x, y) \in R^2 \mid x = y\}$

$= \{(y, y) \in R^2\}$

$= \{y((1, 1) \mid y \in R\}$

$= [(1, 1)].$

Assim, os vetores do tipo $P(4) = \{y(1, 1) \mid y \in R\}$ são os autovetores associados a $\lambda = 4$.

Como não existem dois autovetores LI do R^2, então, não existe uma base P formada por autovetores de T. Logo, T não é diagonalizável.

2.1.7 Teorema: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se T é diagonalizável, então, tem uma decomposição do tipo $[T] = PDP^{-1}$, onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de T.

Faremos uma versão reduzida da demonstração deste teorema, sendo esta no R^3 com autovalores distintos, para o R^n a demonstração é análoga.

Demonstração:

Seja um operador linear T no R^3, o qual admite autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 distintos, associados aos autovetores v_1, v_2 e v_3 respectivamente.

O corolário da propriedade anterior nos garante que o conjunto

$P = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de R^3.

Dessa forma:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 \\ T(v_3) &= \lambda_3 v_3 = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

Onde o operador T é representado na base P dos autovetores pela matriz diagonal.

$$[T]_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = D$$

formada pelos autovalores na diagonal principal.

Se A é a matriz canônica do operador T, isto é, $[T] = A$, então, as matrizes A e D são semelhantes por representarem o mesmo operador T em bases diferentes.

Baseado na relação entre matrizes semelhantes podemos escrever:

$$D = M^{-1}AM$$

Onde M é a matriz mudança de base de P para a base canônica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$, sendo $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.

Como

$$M=[I]_C^P=C^{-1}P=I^{-1}P=P$$

Podemos escrever a relação acima da seguinte forma:

$$D=P^{-1}AP$$

ou

$$A=[T]=PDP^{-1}$$

onde P é a matriz cujas colunas são os autovetores do operador T.

2.1.8 Exemplo: Do exemplo (**2.1.5**) temos que o operador linear T é diagonalizável, então, existe uma matriz inversível P formada pelos autovetores de T, tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de T.

De fato: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=D$$

2.1.9 Teorema: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre R. Um operador linear T: V → V é diagonalizável se, e somente se:

1) O polinômio característico de T tem todas as raízes em R, e
2) A multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i de T é igual à dimensão de $V(\lambda_i)$.

Demonstração:

(===>) Seja $B=\{u_{11},\ldots,u_{1r_1},\ldots,u_{k1},\ldots,u_{kr_k}\}$ uma base de V formada de autovetores de T de modo que em cada $B_i=\{u_{i1},\ldots,u_{ir_i}\}$ estão todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda i \in R(i = 1, 2, ..., k)$. A matriz de T em relação a essa base é:

$$[T]_B=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \bigcirc & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & \bigcirc & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

e portanto, já que $P_T(t)$ independe de representação matricial de T, $P_T(t)=(\lambda_1-t)^{r_1}\ldots(\lambda_k-t)^{r_k}$ cujas raízes estão todas em R.

Para cada índice i $(1 \leq i \leq k)$ seja H_i o subespaço gerado por B_i, devemos mostrar que $H_i = V(\lambda_i)$. A inclusão $H_i \subset V(\lambda_i)$ é fácil de verificar, pois um elemento $u \in H_i$ é uma combinação linear de B_i e é, portanto, um autovetor cujo autovalor associado é λ_i.

Agora, para provar que $V(\lambda_1) \subset H_1$ tomaremos $u \in V(\lambda_1)$ em relação à base B:

$$u=\alpha_{11}u_{11}+\ldots+\alpha_{kr_k}u_{kr_k}\,.$$

Então:

$$\begin{aligned}&\lambda_1\alpha_{11}u_{11}+\ldots+\lambda 1\alpha_{1r_1}\ldots+\lambda_1\alpha_{k1}u_{k1}+\ldots+\lambda_1\alpha_{kr_k}u_{kr_k}=\\&=\lambda_1 u=T(u)=\alpha_{11}T(u_{11})+\ldots+\alpha_{kr_k}T(u_{kr_k})=\\&=\lambda_1\alpha_{11}u_{11}+\ldots+\lambda_1\alpha_{1r_1}u_{1r_1}+\ldots+\lambda_k\alpha_{k1}u_{k1}+\ldots+\lambda_k\alpha_{kr_k}u_{kr_k}\end{aligned}$$

Comparando a primeira e a última combinação linear acima obtemos:

$$\lambda_1\alpha_{21} = \lambda_2\alpha_{21}, \ldots, \lambda_1\alpha_{2r_2} = \lambda_k\alpha_{2r_2}$$

....

$$\lambda_1\alpha_{k1} = \lambda_k\alpha_{k1}, \ldots, \lambda_1\alpha_{kr_k} = \lambda_k\alpha_{kr_k}$$

Partindo de $\lambda_1\alpha_{21} - \lambda_2\alpha_{21} = 0$ temos, $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\alpha_{21}$. Como $(\lambda_1 - \lambda_2)$ é diferente de zero, então α_{21} tem que ser zero, assim:

$$\alpha_{21} = \ldots = \alpha_{2r_2} = \ldots = \alpha_{k1} = \ldots = \alpha_{kr_k} = 0.$$

Donde $u = \alpha_{11}u_{11} + \ldots + \alpha_{1r_1}u_{1r_1}$ e portanto $u \in H_1$. Concluímos portanto de modo análogo que $V(\lambda_i) \subset H_i$ para todo i $(1 \leq i \leq k)$.

Das igualdades $V(\lambda_i) = H_i$ temos que $\dim V(\lambda_i) = \dim H_i = r_i$ que é a multiplicidade algébrica de λ_i.

($\Longleftarrow$) Por hipótese o polinômio característico de T pode ser fatorado sobre R da seguinte forma:

$$P_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \ldots (\lambda_k - t)^{r_k}$$

Onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e $r_1 + \ldots + r_k =$ grau de $P_T(t)$ = dimV. A multiplicidade algébrica de cada um dos autovalores λ_i é, pois, $r_i(i = 1, 2, \ldots, k)$. Por hipóteses ainda, $\dim V(\lambda_i) = r_i(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Seja $H = V(\lambda_1) + \ldots + V(\lambda_k)$ e mostremos que $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$, sempre que $i \neq j$. De fato, se $u \in V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j)$, então $T(u) = \lambda_i u = \lambda_j u$ e daí $(\lambda_i - \lambda_j)u = 0$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $u = 0$, consequentemente $V(\lambda_r) \cap (V(\lambda_1) + \ldots + V(\lambda_{r-1})) = \{0\}$ $(2 \leq r \leq k)$, ou seja, temos uma soma direta.

$$H = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k).$$

Segue que, $\dim H = \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_k) = r_1 + \ldots + r_k = n$ e, sendo H um subespaço vetorial de V cuja dimensão é n, então H = V. Tomando uma base B_i de $V(\lambda_i)$ (i = = 1, 2, . . . , k), então $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ é uma base de V, constituída só de autovetores de T. Donde T é diagonalizável.

Observações:

1) Sendo T: V $\rightarrow$ V um operador linear. Se λ é um autovalor de T e o polinômio característico $P_T(x)$ desse operador for do tipo $(\lambda - x)^n$, dizemos que λ é uma raiz múltipla de $P_T(x)$ e com multiplicidade algébrica n.
2) Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W. Se $U \cap V = \{0\}$, diz-se que U + V é uma soma direta dos subespaços U e V.
   Notação: $U \oplus V$.

2.1.10 Exemplo: Seja o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, definido por

$$T(x, y) = (9x + y, 4x + 6y).$$

Temos que:

O polinômio característico do operador T é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4$$

$$= 54 - 9\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 5$$

Logo, os autovalores de T são: $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$

Usaremos a definição de autoespaço para a determinação dos autovetores.

Para $\lambda_1 = 10$, temos:

$$P(10) = \{(x, y) \in R^2 | \ T(x, y) = 10(x, y)\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ (9x + y, 4x + 6y) = (10x, 10y)\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ 9x + y = 10x, \ 4x + 6y = 10y\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | \ x = y\}$$

$$= \{(y, y) \in R^2\}$$

$$= \{y(1, 1) \mid y \in R\}$$

$$= [(1, 1)]$$

Assim, os vetores do tipo $P(10) = \{y(1, 1) \mid y \in R\}$ são os autovetores associados a $\lambda_1 = 10$.

Para $\lambda_2 = 5$, obtemos:

$$\begin{aligned} P(5) &= \{(x, y) \in R^2 \mid T(x, y) = 5(x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 \mid (9x + y, 4x + 6y) = (5x, 5y)\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 \mid 9x + y = 5x,\ 4x + 6y = 5y\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 \mid y = -4x\} \\ &= \{(x, -4x) \in R^2\} \\ &= \{x(1, -4) \mid x \in R\} \\ &= [(1, -4)] \end{aligned}$$

Então os vetores do tipo $P(5) = \{x(1, -4) \mid x \in R\}$ são autovetores associados a $\lambda_2 = 5$.

Observe que as raízes do polinômio característico de T são todas reais e que a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i é igual à dimensão do seu respectivo auto-espaço $V(\lambda_i)$. Logo, T é diagonalizável. Portanto, existe uma matriz inversível P formada por autovetores de T, tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Vem que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = D$$

2.1.11 Exemplo: Dado o operador linear $T:R^3 \rightarrow R^3$, definido por

$$T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z).$$

Temos que a matriz de T na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e que o polinômio característico de T é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)\,(3 - \lambda)\,(-1 - \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1$$

Assim, os autovalores de T são: 3 e -1, sendo o primeiro com multiplicidade 2.

Para determinar os autovetores, usaremos a definição de autoespaço.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, temos:

$$\begin{aligned} P(3) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = 3(x, y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (3x - 4z, 3y + 5z, -z) = (3x, 3y, 3z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid 3x - 4z = 3x, 3y + 5z = 3y, -z = 3z\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 0\} \\ &= \{(x, y, 0) \in R^3\} \\ &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x \text{ e } y \in R\} \\ &= [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \end{aligned}$$

Para $\lambda_3 = -1$, temos:

$$\begin{aligned} P(3) &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid T(x, y, z) = -1(x, y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid (3x - 4z, 3y + 5z, -z) = (-x, -y, -z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid 3x - 4z = -x, 3y + 5z = -y, -z = -z\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = z, y = -\frac{5}{4}z\} \end{aligned}$$

$$= \{(z, -\frac{5}{4}z, z) \in R^3\}$$

$$= \{z(1, -\frac{5}{4}, 1) \mid z \in R\}$$

$$= [(1, -\frac{5}{4}, 1)]$$

Note que as raízes do polinômio característico de T são todas reais e que a multiplicidade algébrica de cada λ_i é igual à dimensão do seu respectivo autoespaço. Então, T é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz inversível P, tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T.

Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2 Diagonalização de matrizes

2.2.1 Definição: Dada uma matriz $A \in M(n, R)$. Se C é a base canônica do R^n, existe um operador linear $T: R^n \rightarrow R^n$ associado a A tal que $[T]_C = A$. A **matriz A se diz diagonalizável** se, e somente se, o operador associado T é diagonalizável.

Se A é diagonalizável, então, existirá de maneira inteiramente análoga a operadores, matrizes M de autovetores e D matriz diagonal de autovalores tal que $A = MDM^{-1}$. Como A e D são matrizes de um mesmo operador linear, então são semelhantes, se indicarmos por M a matriz mudança de base de C para B, temos:

$$M^{-1}AM = D$$

De fato, sendo

$C = \{(1, 0, \ldots, 0); \ldots; (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$ e $B = \{(x_{11}, \ldots, x_{1n}); \ldots; (x_{n1}, \ldots, x_{nn})\}$,

então:

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Ou seja, os componentes do n-ésimo autovetor de B formam a n-ésima coluna de M.

2.2.2 Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, vamos mostrar que A é diagonalizável e que existe uma matriz inversível M formada por autovetores de $[T]_C = A$, onde $M^{-1}AM$ é diagonal.

Temos que o operador associado à matriz A é:

$$T(x, y, z) = (2x + 3y - z, y - 4z, 3z)$$

O polinômio característico de T é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{array}{ccc:cc} 2-\lambda & 3 & -1 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -4 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$= (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Assim, os autovalores de T são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$

Como os autovalores são todos distintos, então, temos uma base formada por autovetores de $[T]_C = A$.

Um cálculo simples por meio da definição de autoespaço nos garante que:

Os vetores do tipo P(1) = {y (-3, 1, 0) | y ∈ R} são os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$;

Os vetores do tipo P(2) = {x (1, 0, 0) | x ∈ R} são os autovetores associados a $\lambda_2 = 2$;

Os vetores do tipo P(3) = {z(-7, -2, 1) | z ∈ R} são os autovetores associados a $\lambda_3 = 3$.

Dessa forma, o conjunto {(-3, 1, 0),(1, 0, 0),(-7, -2, 1)} é uma base do R^3 e consequentemente A é diagonalizável.

Como A é diagonalizável, então, existem matrizes M e D tal que $A = MDM^{-1}$.

Segue que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};\ M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 26 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

2.3 Aplicação da diagonalização: potências de uma matriz

Seja A uma matriz de ordem n. As potências de A são definidas da seguinte forma: $A^p = \underbrace{AAA...A}_{p\ vezes}$, sendo p ∈ ℕ. Geralmente é muito difícil o cálculo de A^p, sobretudo quando p é um número eventualmente grande. Mas se A é diagonalizável, o cálculo de A^p é mais simples. Ora, se A é uma matriz diagonalizável, então, existe uma matriz inversível M tal que $M^{-1}AM = D$,onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & \\ \bigcirc & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonal dos autovalores de A. Além disso, temos que:

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}, D^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^3 \end{bmatrix}, \dots, D^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

Partindo de $M^{-1}AM = D$, multiplicando a igualdade à esquerda por M e à direita por M^{-1} obtemos $A = MDM^{-1}$.

Como

$$A^p = \underbrace{AAA\dots A}_{\text{p vezes}}$$

e

$$A = (MDM^{-1})$$

Temos que:

$$A^p = \underbrace{(MDM^{-1})\,(MDM^{-1})\,(MDM^{-1})\dots(MDM^{-1})}_{\text{p vezes}}$$

$$A^p = MD\underbrace{(M^{-1}M)}_{I}\,D\underbrace{(M^{-1}M)}_{I}\,D\underbrace{(M^{-1}..M)}_{I}\,DM^{-1}$$

Logo,

$$A^p = MD^pM^{-1}$$

onde D^p é a matriz diagonal elevada a uma potência p nos elementos da diagonal e M é a matriz cujas colunas são os autovetores de A.

2.3.1 Exemplo: Calcule A^{10}, onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

Temos que o operador associado a A é: $T(x, y) = (4x - 3y, 2x - y)$

Primeiramente veremos se T é diagonalizável, calculando seus autovalores e autovetores correspondentes.

O polinômio característico de T é dado por

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(-1-\lambda)+6$$

$$=-4-4\lambda+\lambda+\lambda^2+6$$

$$=\lambda^2-3\lambda+2$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$$

Assim, os autovalores são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$.

Fazendo os devidos cálculos através da definição de autoespaço, veremos que $P(2) = \{y(3, 2) \mid y \in R\}$ associados a λ_1 e $P(1) = \{y(1, 1) \mid y \in R\}$ associados a λ_2 são os autovetores de $[T]_C = A$. Segue que o conjunto $\{(3, 2),(1, 1)\}$ é LI. Logo, A é diagonalizável.

Em seguida consideremos:

$$M=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ e } M^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

Como

$$A^p=MD^pM^{-1}$$

Vem que:

$$A^{10}=MD^{10}M^{-1}$$

Portanto,

$$A^{10}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{10} & 0\\ 0 & 1^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{10}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1024 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{10}=\begin{bmatrix}3072 & 1\\ 2048 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{10}=\begin{bmatrix}3070 & -3069\\ 2046 & -2045\end{bmatrix}$$

2.3.2 Exemplo: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ diagonalizável.

Como já foi visto anteriormente, a matriz $M=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ diagonaliza A,

ou seja,

$$M^{-1}AM=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=D.$$

Achemos uma fórmula para A^p, onde p é um inteiro positivo ($p > 1$).

Temos:

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

e já sabemos que:

$$A^p = MD^pM^{-1}, \text{então}:$$

$$A^p=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^p & 0 & 0\\ 0 & 5^p & 0\\ 0 & 0 & 4^p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^p=\begin{bmatrix}-2\cdot 5^p & 0 & -1\cdot 4^p\\ 0 & 5^p & 2\cdot 4^p\\ 5^p & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^p=\begin{bmatrix}4^p & 0 & -2\cdot 5^p+2\cdot 4^p\\ 2\cdot 5^p-2\cdot 4^p & 5^p & 4\cdot 5^p-4\cdot 4^p\\ 0 & 0 & 5^p\end{bmatrix}$$

$$A^p=\begin{bmatrix}4^p & 0 & -2(5^p-4^p)\\ 2(5^p-4^p) & 5^p & 4(5^p-4^p)\\ 0 & 0 & 5^p\end{bmatrix}$$

3. DECOMPOSIÇÃO LU DE MATRIZES

Vimos no capítulo dois, a decomposição de uma matriz A por diagonalização do tipo $A = MDM^{-1}$, onde M é a matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal. Fundamentado nas referências [3], [4] e [5], estudaremos agora outra decomposição da forma $A = LU$, na qual L é uma matriz triangular inferior e U é escalonada.

3.1 Definição: Podemos reduzir as principais operações de escalonamento à três operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

(1) Trocar a posição de duas linhas;

(2) Somar a uma linha um múltiplo de outra linha;

(3) Multiplicar uma linha por um número diferente de zero.

Cada uma dessas três operações pode ser interpretada como a multiplicação à esquerda por uma matriz inversível especial, denominada matriz elementar, ou seja, uma matriz M(n, R) que resulta da aplicação de uma operação elementar à matriz identidade I_m. Dessa forma há três tipos de matrizes elementares.

Observe os exemplos abaixo, do tipo 3 x 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes acima são obtidas a partir de I_3, através das operações $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_3 + \alpha L_1$ e αL_2 respectivamente.

Suponhamos que, durante o processo de escalonamento de uma dada matriz $A \in M(n, R)$ não haja necessidade de efetuar permutações de linhas. Então, podemos afirmar que existem matrizes elementares $M_1, M_2, ..., M_k$, tais que:

$$M_k ... M_2 M_1 A = U$$

onde U é uma matriz escalonada. Como A é uma matriz quadrada, U é triangular superior.

Como já foi observado, cada matriz M_i é não-singular ($\det M_i \neq 0$). Logo, o produto $M_k ... M_2M_1$ é inversível, isto é, existe $(M_k ... M_2M_1)^{-1}$, tal que

$$A = (M_k...M_2M_1)^{-1}U.$$

A matriz $(M_k...M_2M_1)^{-1}$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais todos iguais a 1, à qual chamaremos de L, onde L ∈ M(n, R), ou seja, **A = LU**.

Dessa forma obtivemos a decomposição da matriz A como o produto de uma matriz triangular inferior L por uma matriz triangular superior U.

Enunciaremos formalmente o resultado acima como um teorema:

3.1.1 Teorema: Seja A uma matriz inversível, que pode ser posta na forma triangular por meio de operações elementares, mediante apenas a operações do tipo $L_i + \alpha L_j$. Então, A = LU, onde L é uma matriz triangular inferior com 1s na diagonal e U é uma matriz superior triangular com 0s na diagonal (LIPSCHUTZ. 1994, p.158).

É importante frisar que o teorema acima só se aplica a matrizes inversíveis, que podem ser escalonadas sem qualquer permuta de linhas. Matrizes desse tipo são ditas fatoráveis – LU.

Ressaltamos ainda dois fatos importantes a respeito da decomposição A = LU:

(1) O método de eliminação de Gauss fornece diretamente os elementos das matrizes L e U.

(2) Ao iniciarmos o escalonamento de uma dada matriz A, não sabemos se vai haver a necessidade de permutarmos as linhas, somente no final do escalonamento é que podemos fazer tal afirmação. Havendo necessidade desta transposição, o processo é feito permutando as linhas da matriz identidade (na ordem em que foram feitas), obtendo assim, uma matriz P ∈ M(n, R) denominada de matriz de permutações. Todas as transposições de linhas necessárias ao processo de escalonamento formam o produto PA, que poderá ser escalonada utilizando apenas as operações elementares $L_i + \alpha L_j$, dessa forma, temos a decomposição PA = LU.

3.1.2 Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, faremos a sua decomposição na forma

A = LU.

Solução:

Primeiramente vamos escalonar a matriz A até chegar a uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_2-3L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_3-4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & -5 \end{bmatrix}^{L_3-3L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Em seguida, observamos que na decomposição houve a participação de três matrizes elementares M_1, M_2 e M_3, e que $(M_3M_2M_1)^{-1} = L$.

Podemos verificar que essas matrizes elementares são dadas por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculemos as inversas dessas matrizes da seguinte forma:

$$M_1^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{L_2+3L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Então,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{L_3+4L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Logo,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{L_3+3L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Assim,

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí segue que:

$(M_3\, M_2\, M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L$$

Note-se que os elementos 3, 4 e 3 provém das operações elementares sobre as linhas acima, ou seja, são os negativos dos multiplicadores. Isso ocorre devido à utilização de inversas das matrizes elementares.

Assim, temos a decomposição A = LU

Ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a decomposição A = LU dessa matriz.

Solução:

Vamos escalonar a matriz A até chegarmos a uma matriz triangular.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_3 - 4L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \overset{L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

temos que $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Observa-se ainda a participação das matrizes elementares

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

durante o processo de escalonamento. Em seguida, calculemos as inversas dessas matrizes:

$$M_1^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3+4L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Logo,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3+2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Assim,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$L = (M_2 M_1)^{-1}$$

$$= M_1^{-1} M_2^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como houve a necessidade de permutar linhas da matriz A durante o processo de escalonamento, então, pela observação (2), temos uma matriz de permutações P, onde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos uma decomposição do tipo

$$PA = LU$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2 Aplicação da decomposição LU na resolução de Sistemas de Equações Lineares

Consideremos um sistema do tipo

$$AX = B.$$

Dispondo da decomposição

$$A = LU$$

obtemos:

$$LUX = B$$

fazendo

$$UX = Y$$

teremos o sistema:

$$LY = B$$

resolvendo esse sistema, conhecemos o vetor

$$Y$$

a partir daí, resolvemos o sistema:

$$UX = Y$$

no qual, o vetor X será a solução do sistema inicial.

Observe o exemplo abaixo, onde mostramos essas situações.

3.2.1 Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 \\ 6x + y = -10 \\ -x + 2y - 10z = -4 \end{cases}$ usando a decomposição LU de matrizes.

Solução:

Este sistema pode ser representado matricialmente por

$$AX = B$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Seguindo os devidos passos da decomposição LU da matriz A, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$

isto é:

$$A = LU.$$

Conhecidas as matrizes L e U, segue que

$$LY = B$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 3y_1 + y_2 = -10 \\ -\frac{y_1}{2} - \frac{5y_2}{4} + y_3 = -4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -16 \\ y_3 = -23 \end{cases} \Rightarrow \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -16 \\ -23 \end{bmatrix}$$

Agora, resolvendo UX = Y

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -16 \\ -23 \end{bmatrix}$$

daí,

$$\begin{cases} -23x_3 = -23 \\ -2x_2 - 12x_3 = -16 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é S = {(–2, 2, 1)}.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A decomposição de matrizes é uma técnica muito utilizada em vários campos ligados ao trabalho, visto que, dispondo desse método, pode-se ganhar bastante tempo comparado aos métodos convencionais, e também, evitar processos longos, os quais podem se transformar em grandes causadores de erros.

Observamos que a diagonalização ($A = MDM^{-1}$) tem várias aplicações no campo da Álgebra Linear, pois nesta decomposição, a álgebra de A se reduz à álgebra da matriz diagonal D, que pode ser facilmente calculada. No caso da fatoração $A = LU$, temos que a mesma, é geralmente utilizada na resolução de sistemas de equações lineares de ordem maior ou igual a quatro. A maior vantagem dessa decomposição está no campo computacional, pois quando nos deparamos com um grande número de equações do tipo $AX = B$, com a mesma matriz A e diferentes vetores B, temos certa dificuldade de resolvê-las pelo método de Gauss. Dispondo de tal decomposição não precisamos repetir várias vezes esse processo para obtermos a solução desejada.

Com este trabalho, que detalha algumas aplicações da matemática no cotidiano e evidencia a sua significativa relação com outras áreas do conhecimento, acreditamos ter proporcionado uma boa oportunidade para se conhecer melhor a disciplina matemática, sua utilidade e sua grande importância em nossas vidas.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOLDRINI, José Luiz. [et al.]. **Álgebra linear.** 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] CALLIOLI, Carlos A.(1926-89); DOMINGUES, Hygino H; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra linear e aplicações.** 6. ed. rev. São Paulo Atual, 1990.

[3] KOZAKEVICH, Daniel; BEAN, Sonia Elena Palomino Castro. **Álgebra linear I.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2008.

[4] LIMA, Elon Lages. **Algebra linear.** 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[5] LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear:** Teoria e problemas. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 1994. (Coleção Schaum).

[6] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.