UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UNIVIMA
Universidade Virtual
do Estado do Maranhão

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE À DISTÂNCIA

DEIVISON DA SILVA E SILVA

JESSE ARAÚJO LEAL

GEOMETRIA ANALÍTICA E APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS

Pedreiras

2009

DEIVISON DA SILVA E SILVA

JESSE ARAÚJO LEAL

GEOMETRIA ANALÍTICA E APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática da Universidade Virtual do Estado do Maranhão e Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Ph.D. Inder Jeet Taneja.

Pedreiras

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Geometria Analítica e Aplicações Computacionais"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 09/09/2009

Dr. Inder Jeet Taneja (CFM/UFSC - Orientador) ______________

Drª. Sonia Elena Palomino Bean (CFM/UFSC - Examinador) ______________

Dr. Roberto Correa da Silva (CFM/UFSC – Examinador) ______________

Profª Neri Terezinha Both Carvalho (Dra.)
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, setembro de 2009.

A Deus, fonte da vida, e a todas as pessoas que acreditaram nos nossos estudos e dedicações.

AGRADECIMENTOS

Ao nosso Orientador prof. Inder Jeet Taneja por seu apoio e dedicação no amadurecimento dos nossos conhecimentos e conceitos que nos levaram a execução e conclusão desta monografia.

As nossas famílias que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que nós chegássemos até esta etapa de nossa vida.

A todos os professores e colegas de classe pela buscar de novos conhecimentos.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração desta monografia e, especialmente, a professora Neri Terezinha Both Carvalho, pelo seu espírito inovador e empreendedor nas tarefas de multiplicar nossos conhecimentos e incentivo constante em todas as disciplinas do curso de Especialização.

Aos demais idealizadores, coordenadores e funcionários da Universidade Virtual do Estado do Maranhão-UNIVIMA, no Pólo de Pedreiras-MA.

E, finalmente, a Deus pela oportunidade de cursar esta Especialização de qualidade.

"A matemática é a chave de ouro com que podemos abrir todas as ciências"

Victor Duruy

RESUMO

A presente monografia tem como objetivo auxiliar metodologicamente no ensino da matemática, especificamente da disciplina de geometria analítica, com as aplicações do software "Maple", no uso de contribuição de soluções, pelo desenvolvimento de resoluções de matrizes, cálculo de operações, determinante, transposta, inversa, resolução de sistema de equações, vetores, etc. O uso de novas tecnologias integradas ao processo de ensino e aprendizagem como recursos computacionais, utilizados como ferramenta auxiliar didática surge com o importante papel de promover o conhecimento, que permite a facilidade na formação de conceitos, através da exploração e integração dos aspectos geométricos, numéricos e analíticos dos softwares aplicados às resoluções. Optou-se pela disciplina de Geometria analítica pelo fato da mesma ser à base da álgebra linear.

Palavras – chave: Geometria analítica. Informática na educação. Software maple.

ABSTRACT

To present monograph he/she has as objective auxiliary metodologicamente in the teaching of the mathematics, but specifically of the discipline of analytical geometry, with the applications of the software "Maple", in the use of contribution of solutions, for the development of resolutions of head offices, calculation of operations, decisive, transposed, inverse, resolution of system of equations, etc. The use of new technologies integrated into the teaching process and learning as resources computacionais, used as didactic auxiliary tool, it appears with the important paper of promoting the knowledge, that allows the easiness in the formation of concepts, through the exploration and integration of the aspects graphic, geometric, numeric and analytical of the softwares applied to the resolutions. She opted for the discipline of analytical Geometry for the fact of the same being to the base of the lineal algebra.

Keywords: Analytical geometry. Computer science in the education. Software maple.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A computação algébrica ou simbólica é a área da computação que lida com a manipulação e solução exata de equações. Os sistemas de computacional algébrica que são programas de computadores que facilitam o cálculo na matemática simbólica, começaram a aparecer no início da década de 1970 no mercado mundial de forma acelerada.

No Brasil, a Computação Algébrica vem sendo utilizada desde o final da década de 80.

Até a década de 1990, a grande maioria dos professores de matemática utilizava como suporte metodológico, na elaboração de suas atividades docentes, basicamente o livro didático, temendo a sua substituição por máquinas e programas capazes de cumprir o papel antes reservado para o ser humano.

Numa sociedade em que os computadores estão presentes em todos os domínios do conhecimento e do ensino, como instrumentos preciosos de trabalho, a matemática não pode continuar a ignorar essa realidade.

O termo "Informática na Educação" significa a inserção do computador no processo de aprendizagem dos conteúdos curriculares de todos os níveis e modalidades de educação. Para tanto, o professor da disciplina curricular deve ter conhecimento sobre os potenciais educacionais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades tradicionais de ensino-aprendizagem e atividades que usam o computador.

Em relação à matemática, as ferramentas computacionais, softwares computacionais aplicados, possibilitam os seus ensinos de maneira inovadora, reforçando assim o papel da linguagem gráfica e relativizando a importância do cálculo de apoio ao ensino da matemática que é cada vez mais urgente no desenvolvimento do ensino-aprendizagem. Há sempre a necessidade, por partes de alguns profissionais na área de matemática, de uma ferramenta auxiliar no uso da verificação rápida e diversificada de soluções nas resoluções de problemas.

Fruto da necessidade de uma ferramenta auxiliar de prover o ensino da matemática, é que focalizamos neste trabalho científico, a utilização do software Maple no ensino da Geometria Analítica como meio de auxiliar em resultados de resoluções de problemas, permitindo assim aliar a teoria à prática por meio de uma abordagem interdisciplinar melhorando assim a qualidade no uso da verificação dos resultados.

O Software Maple é um software de computação algébrica que por volta de 1980, foi desenvolvido através de um projeto do Grupo de Computação Simbólica da Universidade de Waterloo, em Ontário, Canadá.

O Maple é um sistema de computação desenhado para uso profissional na resolução de problemas. É também um poderoso e interativo sistema de computação algébrica que possui uma infinidade de recursos numéricos e gráficos e proporciona um completo ambiente matemático que incluem a resolução de equações, inequações, sistemas, operações com matrizes, cálculos de limites, derivadas e integrais, esboço de gráficos, entre outros.

Neste contexto, o trabalho realizado no Curso de Especialização em Matemática na modalidade à distância, e aqui apresentado, tem como objetivos:
auxiliar metodologicamente o ensino da matemática com o uso do software Maple com a finalidade de ilustrar as suas potencialidades nas resoluções de problemas na área da Geometria Analítica com os seus comandos específicos.

a) mostrar a eficácia do Software Maple e seus comandos Básicos;

b) executar e visualizar alguns comandos de resolução de matrizes, determinantes Sistemas Lineares e vetores;

c) contribuir pela verificação de soluções na resolução de problemas de forma rápida e diversificada.

2 MATRIZES

Para iniciarmos o nosso estudo de Matrizes utilizando o software Maple 12, e primeiramente devemos carregar o pacote "LinearAlgebra", utilizando o seguinte comando: "with (LinearAlgebra):"

2.1 Definindo uma matriz

Existem várias maneiras de definir uma Matriz no Maple12, apresentaremos aqui algumas delas.

a) Modo 1:

A:= << x1 , x2 , x3 >|< x4, x5 , x6>| < x7 , x8 , x9>| ... |<xn-2 , xn-1, xn >>;

Onde: *< x1 , x2 , x3 > , < x4, x5 , x6>, < x7 , x8 , x9> ... <xn-2 , xn-1, xn >*, são as colunas da matriz que queremos definir.

Ex: Neste exemplo definiremos uma matriz A de ordem três.

> A:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<0,-1,3>>;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Caso queira adicionar mais colunas à matriz, basta escrever os elementos da respectiva coluna, separados por vírgula e entre os símbolos < > .

Ex: Vamos transformar a matriz anterior adicionando uma coluna na mesma e transforma-la em uma matriz de ordem 3x4.

> A:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<0,-1,3>|<-3,-5,-1>>;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que adicionamos *|<-3,-5,-1>* que representa a quarta coluna da matriz.
Para aumentar o número de linhas basta em cada $<x_{n-2} , x_{n-1}, x_n >$ adinionarmos um novo elemento.

Por exemplo, vamos adicionar uma linha na matriz do exemplo anterior.

$> A:=<<1,2,3,0>|<4,5,6,4>|<0,-1,3,2>|<-3,-5,-1,-6>>;$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & -5 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Observe que em cada $<x_{n-2}\,,\, x_{n-1},\, x_n>$ foi adicionando um elemento.No exemplo anterior adicionamos na primeira coluna o 0, na segunda coluna o 4, na terceira coluna o 2, na quarta coluna o -6.

b) Modo 2:

Outro modo de definirmos uma matriz no Maple 12 é usando a sintaxe abaixo.

$> A:=matrix(m,n,[\,x1\,,\, x2\,,\, x3,...xk]),$ onde k = m.n e m e n são as dimensões da matriz e $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,...x_k$ são seus respectivos elementos.

Ex: Neste exemplo definiremos uma matriz A de ordem 3x4.

A:=matrix(3,4,[-1,0,1,4,5,-2,0,3,7,-3,6,0]);

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Observações:

i) Caso o numero de elementos da matriz seja menor que k = m.n, o Maple12 preenche a matriz com o *símbolo* $?_{i,j}$ *onde i e j é a linha e a coluna respectivamente onde* se encontra o elemento que não foi definido.

Ex: Definiremos uma matriz 3x3.

> C:=matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7]);

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & C_{3,2} & C_{3,3} \end{bmatrix}$$

Observe no exemplo acima que a matriz definida é de ordem 3x3, portanto k = 3.3 = 9, ou seja, é necessário colocarmos entre colchetes nove elementos para a matriz, como só foi definido sete elementos o Maple 12 preencheu a matriz com elementos da forma $C_{i,j}$.

ii) Caso o número de elementos da matriz seja maior que k = m.n, o Maple12 exibe uma mensagem de erro.

Ex: Definiremos uma matriz 2x3.

> C:=matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6,7]);

Error, (in matrix) 1st index, 3, larger than upper array bound 2

c) Modo 3:

A:=matrix([[x_1 , x_2 , x_3],[x_4, x_5 , x_6],...,[x_{n-2} , x_{n-1}, x_n]]), onde o número de elementos dentro dos colchetes indica o número de colunas da matriz e cada colchetes indica o número de linhas da matriz que está sendo definida.

Ex: Neste exemplo definiremos uma matriz A de ordem 2x3.

>A:=matrix([[1,2,-3],[-1,0,2]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que em cada colchete possui três elementos, portanto a matriz terá três colunas e que existem dois colchetes, portanto a matriz terá duas colunas.

Neste trabalho, para definirmos as matrizes aqui apresentadas, usaremos a sintax apresentada no Modo2.

Sintax: > *A:=matrix(m,n,[x1,x2,x3,x4,x5,...xk])*

2.2 Operações com matrizes

2.2.1 Adição e subtração de matrizes

Para adicionar matrizes de uma maneira bem simples, primeiramente devemos atribuir um nome para cada matriz. Esses nomes podem ser letras, geralmente letras maiúsculas.

Uma observação importante, é que as letras D, E, I, não podem ser usadas, pois são letras protegidas pelo Maple12. Podemos também usar as letras minúsculas.

Vejamos um exemplo onde definiremos três matrizes e realizaremos as operações de adição e subtração.

> *A:=matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]);*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

>*B:=matrix(3,3.[8,87,-5,5,3,3,2,0]);*

$$B := \begin{bmatrix} 8 & 8 & 7 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

> *K:=matrix(3,3,[-4,-1,0,3,2,1,7,-4,-3]);*

$$K := \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

> *R:=evalm(A+B);*

$$R := \begin{bmatrix} 9 & 10 & 10 \\ -1 & 10 & 9 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

> *T:=evalm(B-K);*

$$T := \begin{bmatrix} 12 & 9 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que as matrizes R e T representam A+B e B - K respectivamente, onde A, B e K já foram definidas anteriormente.

2.2.2 Multiplicação de matrizes

Da mesma forma que fazemos para adição e subtração devemos primeiramente atribuir nomes para as matrizes.

Para indicar para o Maple12 que a multiplicação de matrizes não é comutativa devemos utilizar a seguinte sintax:

evalm(nome da matriz &);* .

Exemplo: Definamos primeiramente duas matrizes, F e P, logo após definiremos uma outra W que será o produto de F por P.

> *F:=matrix(4,3,[-1,2,-3,0,1,4,-7,-4,0,1,2,5]);*

> *P:=matrix(3,2,[-1,0,1,2,3,4]);*

$$F := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -7 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> *W:=evalm(F &*P);*

$$W := \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 13 & 18 \\ 3 & -8 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$$

Ou seja, W representa produto das matrizes F e P, isto é, W = F.P . Devemos lembrar que na hora de definir os produtos das matrizes é necessário que número de linha do primeiro matriz tem que ser igual ao número de coluna da segunda matriz.

2.2.3 Potenciação

Para a potenciação usaremos a seguinte sintaxe: >evalf (nome da matriz ^ n) onde n é o expoente.

Exemplo:

> *S:=matrix(3,3,[-1,0,-3,4,3,1,5,-3,0]);*

$$S := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

> *evalm(S^2);*

$$\begin{bmatrix} -14 & 9 & 3 \\ 13 & 6 & -9 \\ -17 & -9 & -18 \end{bmatrix}$$

O exemplo acima mostra como podemos calcular quadrado de uma matriz S, por exemplo, ou seja, produto de matriz quadrada S com S.

2.3 Cálculo da inversa de uma matriz quadrada

Para o calculo da inversa de uma matriz utiliza-se a seguinte sintaxe:

> *nome dado a matriz inversa: =evalm(nome_da_matriz^(-1));*

Ex: Calculando a inversa da matriz S definida acima teremos:

> *inv_S :=evalm(S^(-1));*

$$inv\_S := \begin{bmatrix} \frac{1}{26} & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} \\ \frac{5}{78} & \frac{5}{26} & -\frac{11}{78} \\ -\frac{9}{26} & -\frac{1}{26} & -\frac{1}{26} \end{bmatrix}$$

2.4 Multiplicação por escalar

Veja como é feita a multiplicação de uma Matriz por um escalar.

Definamos uma matriz M logo após definamos a matriz R = λ*M.

> *M:=matrix(3,3,[a,b,c,d,e,f,g,h,j]);*

$$M := \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{bmatrix}$$

> *R:=evalm(λ*M);*

$$R := \begin{bmatrix} \lambda A & \lambda B & \lambda C \\ \lambda \mathrm{D} & \lambda E & \lambda F \\ \lambda G & \lambda H & \lambda J \end{bmatrix}$$

Observe que diferentemente da multiplicação de matriz por matriz não é necessário utilizar os símbolos &*, bastando somente utilizar o *.

3 DETERMINANTE

3.1 Calculo do determinante de uma matriz quadrada

A seguir explicaremos como calcular determinante de uma matriz utilizando comandos do Maple.Neste caso utilizamos o comando "Determinant (nome da matriz)", para o Maple calcular o determinante.

> A:=Matrix(3,3,[-3,2,-5,0,-1,2,-7,4,1]);

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

> Determinant(A);

34

Portanto 34 é o determinante da matriz

Observação: Na hora de fazer calculo do determinante, usando Maple devemos lembrar que a matriz tem que ser quadrada.

3.2 Propriedades do determinante

a) 1ª Propriedade

O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta. Vamos conferir isto usando os comandos do Maple

Exemplo:Seja B a matriz transposta de A. O comando que nos fornece a transposta de uma matriz é o "Transpose(nome da matriz)"

> B:=Transpose(A);Determinant(B);

$$B := \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

34

Isto é,34 é o valor do determinante B.

a) 2ª Propriedade

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada por um *número real k, então o determinante da nova matriz é o produto* de k pelo determinante da primeira matriz.

Exemplo: Para verificar isso é necessário que devemos carregar o pacote com seguinte comando:

: > with(Student[LinearAlgebra]):

> C:=MultiplyRow(A, 1, 2);Determinant(C);

$$C := \begin{bmatrix} -6 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

68

Portanto,68 é o valor do determinante.

O comando, "MultiplyRow(A, 1, 2)", significa a multiplicação da primeira linha da matriz A por 2.Portanto a resposta final será 2 x 34 = 68.

b) 3ª Propriedade

Seja A uma matriz de ordem n e k uma escalar, então, det (kA) = k^ndet (A).

Sendo a matriz A, mesma matriz dada acima.

Vamos calcular e fatorar o det(2A).

> d:=Determinant(2*A);ifactor(d);a:=2*17;b:=2^3;d1=a*b;

$d := 272$

$(2)^4 (17)$ (observe que $(2)^4 (17) = 2^3 \cdot 2 \cdot 17 = 8 \cdot 34$)

$a := 34$

$b := 8$

$d1 = 272$

O comando "ifactor", fatora números.

c) 4ª Propriedade

Teorema de Binet – Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Vamos supor que o det (A.B)=240, e a matriz A continua sendo a mesma definida anteriormente.(det (A) = 34) e a matriz B é dada abaixo com o seu respectivo determinante:

> B:=Matrix(3,3,[1,x,0,-2,-1,0,x,4,1]);Determinant(B);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ x & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-1 + 2x$$

Substituindo os *dados acima na identidade abaixo,temos:*

$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) \;\rightarrow\;$ 240=34(-1 + 2x). Vamos conferir isto usando o comando "solve(equação,variável)" que resolve a equação na variável x,temos:

> solve(240=34*(-1+2*x),x);

$$\frac{137}{34}$$

Isto é , $\frac{137}{44}$ é o valor de x.

4 ELIMINAÇÃO GAUSSIANA OU MÉTODO DO ESCALONAMENTO

O método da eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata. Como os sistemas são equivalentes, possuem as mesmas soluções.

Veremos agora como determinar com o uso do Maple, a eliminação Gaussiana, que é útil na resolução e discussão de sistemas lineares.

Primeiro definimos um sistema e a matriz aumentada, depois daremos os comandos de escalonamento.

Seja o sistema dado abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

A matriz aumentada ou ampliada do sistema é dada ao acréscimo na matriz dos coeficientes de x, y e z com a matriz dos termos independentes do sistema.

Teremos a seguinte matriz aumentada relativa ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora definiremos a matriz aumentada como A, e escreveremos dois comandos: "GaussianElimination" e '*FractionFree*' (*usado quando não queremos números fracionários na diagonal principal*).Neste caso o Maple fará mais algumas operações para eliminar as frações.

```
>A:=Matrix(3,4,[1,2,0,5,2,-1,3,9,3,3,-2,3]);
A1:=GaussianElimination(A);A2:=GaussianElimination(A,'method'= 'FractionFree');
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} & -\frac{57}{5} \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 19 & 57 \end{bmatrix}$$

A matriz A2 é a matriz escalonada e é equivalente ao sistema dado. Também podemos fazer a discussão dos sistemas, verificando se tem soluções, não tem solução ou infinitas soluções. Neste exemplo, o sistema tem somente uma solução que é (3,2,1).

Vejamos alguns exemplos:

Seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$$

Definiremos a matriz M como a matriz aumentada e faremos à eliminação gaussiana.

```
>M:=Matrix(2,3,[1,5,6,1,5,4]);
M1:=GaussianElimination(M, 'method' = 'FractionFree');
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observe na matriz escalonada que 0y = -2, logo o sistema é impossível.

Vejamos agora um outro exemplo:

$$\begin{cases} x+4y+5z=2 \\ 4x+3y+2z=-2 \end{cases}$$

Definiremos a matriz N como sendo a matriz aumentada e com os comandos específicos faremos a *eliminação gaussiana*.

N:=Matrix(2,4,[1,4,5,2,4,3,2,-2])

N1:=GaussianElimination(N, 'method' = 'FractionFree');

$$N := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$NI := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -13 & -18 & -10 \end{bmatrix}$$

Na última linha temos a equação -13y -18z = -10 $\Rightarrow y = \dfrac{10-18z}{13}$, ou seja, o sistema tem infinitas soluções, "indeterminado".

4.1 Processo de Gauss-Jordan

Este método é uma complementação ao método de Gauss. Ele transforma o sistema dado em um outro diagonal, isto é, onde todos os elementos fora da diagonal são nulos. O método de Gauss exigia apenas que se chegasse à forma triangular. Para compreender melhor, antes de usar o comando específico do Maple, seja, por exemplo, uma matriz B aumentada.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 3 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

Então procuraremos chegar à outra matriz, com os passos do método anterior, com a forma diagonal:

$$B' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \vdots & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \vdots & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \vdots & \beta_3 \end{bmatrix}$$, *que será associada a um sistema da forma:*

$x_1 = \beta_1 / \alpha_1$, $x_2 = \beta_2 / \alpha_2$ e $x_3 = \beta_3 / \alpha_3$

Isto quer dizer que se conseguirmos chegar da matriz B à matriz B', a solução do sistema é imediata. Podemos, ainda, dividindo cada linha pelo elemento da diagonal, chegar à matriz identidade.

Resolver o sistema de forma rápida e simples, então o processo Gauss-Jordan é o indicado. Faremos o comando "GaussJordanEliminationTutor" na matriz A definida acima.

Veremos com o exemplo a matriz anterior A, como funciona o método de Gauss-Jordan.

Carregue o pacote> "with(Student[LinearAlgebra]):" define a matriz A aumentada ,depois digite o comando do Maple específico.Quando é para avaliar (dando ok), aparecerá uma caixa de ferramenta com a matriz ampliada.Neste momento click em "All step" que significa "todo passo" para desenvolver o processo.

> A:=Matrix(3,4,[1,2,0,5,2,-1,3,9,3,3,-2,3]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

> A3:=GaussJordanEliminationTutor(A);

Apareceráa seguinte matriz:

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A3 equivalente ao sistema, já se encontra resolvido. Ou seja: x =1, y = 2 e z = 3.

Vamos resolver um outro sistema usando o mesmo processo.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Seja B a *matriz aumentada* do sistema.

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Digite o comando específico:

>B:=Matrix(2,3,[1,1,4,1,1,5]);B1:=GaussJordanEliminationTutor(B);

Utilizando os mesmos passos anteriormente, resulta na matriz B1 abaixo:

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso o sistema não tem solução, pois na última linha ocorreu a desigualdade $0y \neq 1$.

Abaixo veremos uma matriz aumentada com infinitas soluções.

> B:=Matrix(3,4,[1,1,-2,-3,1,2,0,3,2,2,-4,-6]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Utilizando os mesmos passos anteriormente, resulta na matriz B1 dada abaixo:

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema correspondente a matriz B1, como se percebe, tem infinitas soluções. Para cada valor dado a z corresponderá a valores de x e y. Neste caso z é a variável independente.

$$\begin{cases} x - 4z = -9 \\ y + 2z = 6 \end{cases}$$

Temos aqui $x = -9 + 4z$ e $y = 6 - 2z$, para cada valor de z teremos um valor de x e y.

5 VETORES

Em álgebra linear um tópico muito explorado são os vetores, onde primeiramente é feito um embasamento estudando matrizes suas propriedades e operações elementares.

Mostraremos agora alguns comandos do Maple12 para se trabalhar com vetores.

Definição: Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos eqüipolentes a AB.

Primeiramente devemos carregar a biblioteca utilizando o seguinte comando >with(LinearAlgebra):

Veremos agora como definir um vetor bem como determinar o produto escalar entre outras operações com vetores.

Definindo Vetores:

Para definirmos um vetor utilizamos o seguinte comando: > Vector ([$a_1,a_2,a_3,...,a_n$]), onde $a_1,a_2,a_3,...,a_n$, são as componentes do vetor que se quer definir

Por exemplo, definiremos abaixo o vetor **u** cujas componentes são 1, 2, 3,4.

> **u:=Vector([1,2,3,4]);**

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Caso você queira escrever esse mesmo vetor em forma de linha, isso pode ser feito utilizando o seguinte comando:

> **Vector[row]([$a_1,a_2,a_3,...,a_n$])**

Veja um exemplo escrevendo o mesmo vetor definido no exemplo acima só que em forma de vetor linha.

> **u:=Vector[row]([1,2,3,4]);**

$$u := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Para a multiplicação por escalar usaremos o comando:

> **evalm(escalar*nome atribuído ao vetor)**

Vejamos um exemplo:

> **t:=Vector[row]([a,b,c,d]);**

$$t := \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}$$

> **evalm(alpha*t);**

$$\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$

Vejamos um exemplo de aplicação da multiplicação de um vetor por escalar.

> **r:=Vector[row]([0,-1,4,-3,-4]);**

$$r := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

> **evalm(beta*r);**

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta & 4\beta & -3\beta & -4\beta \end{bmatrix}$$

5.1 Norma de um vetor

Uma definição muito importante na álgebra linear é a definição de Norma de um Vetor. Mostraremos agora como tratar essa definição utilizando o Maple 12.

Definição: Norma de um vetor u = (x_1, x_2, x_3,..., x_n) é definida por:

$$\|u\|=\sqrt{u.u}\text{, onde } u.u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2.$$

Para o cálculo da Norma a sintaxe básica é utilizando o comando:

> norm(nome_atribído_ao_vetor, n);

O número **n** indica o índice do radicando. Observe para o caso de n = 2 teremos a definição usual de Norma.

No Maple 12, pode ser expresso usando > norm(u,2).

Quando utilizarmos o comando > *norm(u,2)*,estaremos calculando a Norma do vetor u utilizando o Produto Interno Usual.

Vejamos exemplos:

> *u:=Vector[row]([4,-3,1,2,4,5]);*

$$u := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

> *norm(u,2);*

$\sqrt{71}$

Neste exemplo utilizamos à definição usual para determinar a Norma deste vetor.

5.2 Produto interno

No espaço euclidiano R^n, o produto interno *Canônico* dos vetores $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ e $v = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ é definido da seguinte forma:

$< u, v > = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 + \ldots + \alpha_n \lambda_n$.

Para determinar o produto interno entre dois vetores u e v por exemplo utilizamos a seguinte sintxe:

> *DotProduct(u,v);* onde u e v são os vetores previamente definidos.

Vejamos agora como determinar o produto interno entre dois vetores u e v, por exemplo. Para fazer isso é necessário primeiramente definir dois vetores, u e v.

Veja o exemplo:

> *u:=Vector[row]([1,2,3,4]);v:=Vector[row]([-1,0,2,3]);*

$$u := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> *DotProduct(u,v);*

17

O comando >*DotProduct* também é utilizado para se calcular a a Norma de um vertor etilizando a definição usual de produto interno. A sintaxe fica assim:

> *sqrt(DotProduct(u,u));*

Vejamos um exemplo de aplicação.

> *v:=Vector[row]([1,2,0]);*

$$v := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

> *sqrt(DotProduct(v,v));*

$$\sqrt{5}$$

O que foi feito no exemplo acima foi o seguinte: definimos o vetor v e utilizamos o comando

> *DotProduc(v,v);* para calcular o protudo interno usual do vetor v com ele mesmo. Logo após utilizamos a raiz quadrada desse valor que nada mais é do que a norma do vetor. Portanto temos a mais um comando utilizado para calcular a Norma de um vetor utilizando o comando DotProduct.

6 BASE E DIMENSÃO

Espaços vetoriais de dimensão finita possuem uma estrutura algébrica muito simples, comprovada pelas idéias de base e dimensão.

Definição:*Base de um espaço vetorial E é um conjunto B* $\subset$ *E linearmente independente que gera E.*

Uma vez fixada uma base num espaço vetorial de dimensão n, seus elementos são todos determinados por combinação linear desses n vetores que formam a base, com coeficientes univocamente determinados.

Ex: Os vetores de B: {(1; 0; 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)} forma uma base de R^3.

No Maple 12, podemos verificar se um conjunto de vetores dados forma ou não uma base. Para isso basta utilizar o comando:

Basis $([u_1, u_2, u_3, ..., u_n])$; onde $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ são os vetores os quais queremos verificar se formam ou não uma base para R^n.

Vejamos uma aplicação desde comando para verificar se conjunto B = {(0, 1, 3); (-1, 0, 3); (0, -4, 2); (0, 8, 0)} forma uma base para o R^3.

> *u1:=Vector[row]([0,1,3]);*

$$u1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

> *u2:=Vector[row]([-1,1,3]);*

$$u2 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

> *u3:=Vector[row]([0,4,0]);*

$$u3 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

> *u4:=Vector[row]([0,8,0]);*

$$u4 := \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

> *Basis([u1, u2, u3, u4]);*

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

Observe que dos quatro vetores que foram definidos somente u_1, u_2, u_3 formam base para R^3, sendo o ultimo vetor u_4 uma mera combinação linear dos outros vetores.

6.1 Dimensão

Definição: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se V = {0} definimos a dimensão de V como sendo 0. Se V ≠ {0} definimos a dimensão de V como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V.

Apresentaremos os comandos que exibem a dimensão do vetor, da matriz do espaço linha de uma matriz bem do espaço coluna de uma matriz.

O comando que exibe a dimensão é: **> Dimension(Nome_da_matriz_ou_vetor);**

Vejamos um exemplo utilizando uma matriz.

> v := Vector([x, y, z, w]);

$$v := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

> Dimension(v);

$$4$$

Temos também o comando **> RowDimension (nome_da_matriz_ouVetor);** é uma função que retorna um número inteiro não negativo que representa o número de linhas da matriz ou do vetor.

Observe abaixo uma aplicação desse comando.

> B:=Matrix(3, 2, [1, 2, 3, 4, 5]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

> rowdim := RowDimension(B);

$$rowdim := 3$$

O comando **> ColumnDimension (nome_da_matriz_ouVetor);** função que retorna um número inteiro não negativo que representa o número de colunas da matriz ou vetor.

Esta função faz parte do pacote LinearAlgebra, e assim ele pode ser usado na forma Dimensão (..) somente após executar o comando com o (LinearAlgebra).

> B:=Matrix(3, 2, [1, 2, 3, 4, 5]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

> coldim := ColumnDimension(B);

$$coldim := 2$$

7 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Já sabemos que para encontrar os autovalores e autovalores de uma matriz, o método mais prático é o uso do "*polinômio característico*". Para isso, vamos usar alguns comandos específicos do Maple.

Não há a necessidade de utilizarmos matrizes, mas começaremos por elas para simplificar.

Comando específico: "CharacteristicPolynomial"

Definiremos a seguinte matriz:

> A:=Matrix(4,4,[-3,-2,0,5,0,2,0,4,0,0,-2,0,0,0,0,-2]);

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

> f: =CharacteristicPolynomial(A,Lambda);solve(f,Lambda);

$$f := -24 + \Lambda^4 + 5\,\Lambda^3 + 2\,\Lambda^2 - 20\,\Lambda$$

$$-3, 2, -2, -2$$

Portanto, os autovalores encontrados são: $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$ e $\lambda_4=-2$

7.1 Polinômio minimal

Para uma melhor compreensão, vamos relembrar a definição de polinômio minimal:

Seja A uma matriz quadrada. *O polinômio minimal de A é um polinômio*

$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tal que

$I)$ $m(A) = 0$

$II)$ $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A $(a_k = 1)$.

E para determinar o Polinômio minimal, usamos o teorema asseguir:

Teorema: Seja $T: V \to V$ um operador linear, α uma base qualquer de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então $p([T]_\alpha) = 0$.

Comando específico para o Maple: “MinimalPolynomial”

Desta vez vamos fatorar o polinômio encontrado, como só nos interessa o polinômio fatorado, só mostraremos este.

> g:=MinimalPolynomial(A,Lambda);factor(g);

$$g := \Lambda^3 + 3\,\Lambda^2 - 4\,\Lambda - 12$$

$$(\Lambda - 2)\,(\Lambda + 3)\,(\Lambda + 2)$$

7.2 Autovalores e autovetores

Como já sabemos, para encontrar os autovalores do polinômio característico, basta encontrar as raízes desse polinômio, ou seja, as raízes encontradas são os próprios autovalores da matriz A, e o número de autovetores é determinado pelo grau do polinômio minimal, que é um grau menor fator, depois de fatorado.

Para encontrar os autovalores (λ) e os autovetores(v), usamos os comandos “Eigenvalues” e “Eigenvectors”, respectivamente.

> B:=Matrix(3,3,[3,-1,1,-1,5,-1,1,-1,3]);

$$B := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> Eigenvalues(B);Eigenvectors(B);

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde: $v_1=(1,0,-1)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1=2$; $v_2=(1,1,1)$ é o autovetor associado a autovalor $\lambda_2=3$ e $v_3=(1,-2,1)$ o autovetor associado a autovalor $\lambda_3=6$

7.3 Outro cálculo do polinômio característico

Para encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz,também podemos usar a forma usual que os livros de álgebra linear ensinam,subtraindo cada elemento da diagonal principal por **λ**, e encontrar a raiz do determinante formado.

> A:=Matrix(4,4,[lambda+3,-2,0,5,0,lambda- 2,0,4,0,0,lambda+2,0,0,0,0,lambda+2]);

$$A := \begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

> **Determinant(A);**

$$(\lambda+3)\,(\lambda-2)\,(\lambda+2)^2$$

8 TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Para facilitar a compreensão dos resultados encontrados pelos comandos específicos do Maple, *vamos definir esse teorema:*

Seja T: V →V, um operador linear num espaço vetorial V de dimensão finita e seja p(x) o polinômio característico de T.

Então p(T) = 0 (transformação zero), isto é, T satisfaz o seu polinômio característico.

> A:=Matrix(3,3,[1,-2,1,3,1,2,3,1,3]);f:=CharacteristicPolynomial(A,lambda);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f := -7 + \lambda^3 - 5\,\lambda^2 + 8\,\lambda$$

> A1:=evalm(A^3-5*A^2+8*A-7);

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A é de fato a raiz do polinômio característico.

9 FORMA NORMAL DE SMITH

As matrizes polinomiais têm sido objeto de interesse na teoria da matemática. No estudo de matrizes polinomiais, a forma de Smith desempenha um papel significativo. Utilizando a forma de Smith é possível, por exemplo, determinar o posto normal de uma matriz polinomial. Ela pode ser aplicada em muitos casos, alguns espaços vetoriais se tornam muito complicados devido às várias equações que o compõem. A forma de Smith vem facilitar o estudo destes espaços.

Comando específico: "smith"

```
> S:=
Matrix(3,3,[x+4,x+2,x+5,x^3+2*x^2+x,x^3+x^2+2*x,x^3+4*x^2+x,2*x^2+x+1,x^2+3*x+2,2*x^2+2*x+1]);
```

$$S := \begin{bmatrix} x+4 & x+2 & x+5 \\ x^3+2x^2+x & x^3+x^2+2x & x^3+4x^2+x \\ 2x^2+x+1 & x^2+3x+2 & 2x^2+2x+1 \end{bmatrix}$$

```
> smith(S,x);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^5-x^4-18x^3-2x^2 \end{bmatrix}$$

Utilizar esta última matriz é bem mais prática que a primeira, pois são matrizes equivalentes *obtidas pelo processo de Smith.*

10 FORMA DE JORDAN

Para uma melhor compreensão no uso do comando do Maple, definimos: A forma canônica de Jordan de um operador linear $T: V \to V$, dimV=n, é uma matriz formada por blocos de Jordan de seus autovalores na sua diagonal. A forma canônica é bastante útil por permitir que se extraia informações sobre a transformação com facilidade, reconhecer se duas transformações são similares e tornar bastante simples a exponenciação da transformação.

10.1 Blocos de Jordan

Um bloco de Jordan $J_{k(\lambda)}$ é uma matriz triangular superior da forma:

$$J_{k(\lambda)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda, (i = j) \\ 1, (j = i+1) \\ 0, (contrário) \end{cases}$$

Note que λ é o único autovalor, tem multiplicidade algébrica $ma(\lambda) = k$ e multiplicidade geométrica $mg(\lambda) = 1$.

Uma matriz C está na forma canônica de Jordan se, e somente se, está nesta forma:

$$C = \begin{pmatrix} J_{N1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{N2}(\lambda_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{Nk}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

Onde λ_i pode ser igual a λ_j e a ordem dos blocos $J_{Ni}(\lambda_i)$ é indiferente.

Vamos construir a forma de Jordan usando o exemplo de uma matriz dada abaixo:

Para se construir a forma de Jordan, é necessário conhecer a multiplicidade algébrica e geométrica de cada um dos autovalores. No entanto, para matrizes de ordem maior que 3 isto pode não ser suficiente. Cada bloco de Jordan $J_k(\lambda)$ contribui com $mg(\lambda) = 1$ e $ma(\lambda) = k$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinação dos autovalores e sua multiplicidade algébrica:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda I & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda I & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda I \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

Logo, ma(2)=2 e ma(4)=1.

Multiplicidade geométrica:

Como, $1 \le mg(\lambda) \le ma(\lambda)$, temos: $mg(2) = 1$ ou 2 e $mg(4) = 1$

Calculado $mg(2) = dinS_2$

$$Ax = 2x \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \\ x_1 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_3$$

ou seja, $S_2 = Span\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ e $\dim S_2 = mg(2) = 2$

Colocando na forma de Jordan, temos:

Finalmente, como λ = 2 tem mg = 2, teremos dois blocos unitários de λ = 2. E mais um bloco unitário de λ = 4:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vamos fazer o mesmo exemplo anterior usando o comando específico do maple que é: "JordanForm".

> A:=Matrix(3,3,[3,0,1,0,2,0,1,0,3]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> j:=JordanForm(A);

$$j := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

11 CONCLUSÃO

Diante do exposto, a utilização do Software matemático Maple promoveu significamente ao ensino da Geometria Analítica, e possibilitou na contribuição de soluções de forma rápida e diversificada no processo de ensino aprendizagem de matemática, servindo para evidenciar a real importância da informática na educação, e que nos deixa consciente de que o software computacional deve ser usado como uma ferramenta para auxiliar na educação e não para substituir o professor.

Por outro lado, o uso do software Maple é indispensável ao curso de matemática de todo o país, que pode ser adaptado nas ferramentas computacionais e em especial às inovações tecnológicas de uso inclusive ao ensino e a pesquisa.

Outro aproveitamento relevante que pode ser tratada em trabalhos futuros é a adaptação deste software para o uso em programas de Ensino a Distância.

Acredita-se que explorando de forma adequada os comandos do software Maple com os estudantes, futuros professores, haverá sempre um melhor desempenho de aprendizagem no conteúdo de Geometria Analítica, buscando a criatividade e a interatividade do potencial desse software na busca das soluções desejáveis.

REFERÊNCIAS

BOLDRINE, José Luis. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CARELLI, Enori. **Regras para utilização do Maple V para soluções de problemas.** Disponível em: < http://www.geocities.com/enoricarelli/ec/maplevdois.pdf> . Acesso em:13 jun. 2009.

CARNEIRO, Thiago Rodrigues Alves. **Guia do maple**: álgebra linear - operações entre matrizes. Disponível em: <http://maple.thiagorodrigo.com.br/index.php?cat=guia&id=algebralinear&subid=matriz.operacaoentre>. Acesso em: 26 jun. 2009.

FERNANDO, Delfim Marado Torres. **Plataformas de Computação Algébrica**:Disponível em:<http://wiki.di.uminho.pt/twiki/pub/Education/MICEI/ProjSemi0607/Maple.ppt>. Acesso em: 29 jun. 2009

GHIOTI,Homero da Silva. **Introdução ao Maple V com Álgebra Linear**: Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/~sma304/apostila1.pdf>. Acessado em: 26 maio 2009.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI, José Roberto Bonjorno. **Matemática**: uma nova abordagem, São Paulo: FTD, 2001. v. 3.

MELLONI, Eduardo Lucchesi ; SEIDEL, Susana. **Uso de software no ensino-aprendizagem de Matemática.** Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/mar2004/artigos/34-usodesoftware.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2009.

NUNES, Lenimar de Andrade. **Introdução à Computação Algébrica com o Maple.** Disponivel em: <http://www.mat.ufpb.br/lenimar/ermac.pdf>. Acesso em: 19 maio 2009.

RATHMAN, Jim. **A Simple Tutorial for MAPLE V.** Disponível em: <http://www.che.eng.ohio-state.edu/~rathman/tutorials/mapletut.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2009.

STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra linear**.2. ed..São Paulo: Pearson Makron Books, 1987
TANEJA, Inder Jeet. **MAPLE V**: uma abordagem computacional no ensino de cálculo. Florianópolis: UFSC,1997.