UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA FORMAÇÃO DE PROFESSORES NA MODALIDADE A DISTÂNCIA

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Antonio Batista Bezerra Neto e
Darcy Cristiana Fernandes Bezerra

Florianópolis - SC
2009

ANTONIO BATISTA BEZERRA NETO

E

DARCY CRISTIANA FERNANDES BEZERRA

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Formação de Professores na Modalidade à Distância da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, como pré-requisito para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Rodolfo Fernandes.

Florianópolis - SC

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Máximos e Mínimos de Funções Reais de Várias Variáveis"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 24/07/2009

Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Orientador) ____________

Dr. Mário César Zambaldi (CFM/UFSC - Examinador) ____________

Dr. Fermin S. V. Bazán (CFM/UFSC – Examinador) ____________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009.

Este trabalho é dedicado aos nossos pais Edmundo Batista Bezerra e Darcy Fernandes Bezerra (*in memorian)*, pelo incentivo constante e por todas as vezes que não tomaram conhecimento das limitações cotidianas para propiciar a seus filhos aquele conhecimento que não puderam ter. Como sempre frisava Darcy *"esta é a única riqueza que podemos deixar para vocês"*. A nossas irmãs Cristiane e Cristina, nossos sobrinhos Bruno e Bruna pela pausa no barulho naquelas horas críticas. Aos nossos amigos de madrugadas infindas regadas a café forte na casa de Edimê.

Eu Antonio Batista, dedico especialmente este trabalho a minha Esposa Marilurdes por ter aceitado se privar da minha companhia possibilitando a dedicação a esta empreitada, concedendo a mim o prazer da realização. Dedico a meu filho Maurício José, realização de um sonho que chegou em meio a uma batalha para me dar força e perseverança para vencer a guerra.

Eu Darcy Cristiana, dedico especialmente este trabalho ao meu irmão Antonio Batista por ter me inscrito na seleção desta especialização e me incentivado durante todo o percurso da mesma sempre acreditando em minha capacidade. Dedico aos colegas de curso Ari, Edimê e Valnice pelo incentivo constante e companheirismo fiel e finalmente a dedicatória mais especial, aos meus pais, que pelo brilho que possuem me ensinaram a buscar esse brilho também, com força e fé sempre.

AGRADECIMENTOS

A Deus sobre todas as coisas. Ao nosso orientador o Professor Doutor Márcio Rodolfo Fernandes que com sua orientação segura tornou possível à realização deste trabalho. Ao Pró-reitor de Graduação da Universidade virtual do estado do Maranhão – UNIVIMA pela ajuda providencial em momento oportuno. Aos coordenadores, professores, funcionários, colegas, amigos e parentes, que de maneira direta ou indireta colaboraram com a jornada que culmina com este trabalho e a realização de um sonho.

"A vida é combate, aos fracos abate, aos fortes, aos bravos só pode exaltar...".

Gonçalves Dias

RESUMO

Esta monografia abordou o estudo dos extremos de funções de várias variáveis reais, partindo-se do ponto mais elementar, a definição de funções de uma variável real para a partir daí expandir suas definições para funções de várias variáveis reais. Durante o decorrer do trabalho buscamos construir os conhecimentos necessários para o estudo dos extremos definindo todos os elementos necessários à boa compreensão dos elementos conceituais dos extremos de funções. Por fim utilizamos duas abordagens uma algébrica e outra matricial com vistas a desenvolvermos as teorias que nos permitem determinar os extremos relativos, os extremos absolutos e os extremos de funções quando estas apresentam alguma restrição, conhecido como o método dos multiplicadores de Lagrange todos eles para funções de várias variáveis reais. Diferentemente da maioria dos livros didáticos que tratam as funções de várias variáveis quase sempre como funções de duas variáveis, buscamos neste trabalho desenvolver um estudo sobre as funções de várias variáveis realmente.

Palavra Chave: Extremos relativos; extremos absolutos; multiplicadores de Lagrange.

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento das funções é prática corrente no meio matemático, quer seja através de seus gráficos, quer seja pela explicitação de alguns dos seus elementos ou ainda pela determinação das leis de formação destas funções. Por vezes estas descrevem várias atividades cotidianas, tais como fenômenos naturais, experimentos, problemas reais, etc.. Entretanto o estudo inicial das funções que versa somente sobre funções de uma variável real, mostra-se infrutífero na modelagem da maioria destes fenômenos e atividades cotidianas. Para preencher-se esta lacuna, lança-se mão de funções de várias variáveis reais, estas caracterizadas basicamente pela extensão dos conceitos de funções de uma variável real, com algumas adequações e adaptações.

Dentro do estudo destas funções de várias variáveis reais, os problemas de otimização são de relevante monta; entretanto, para o estudo destes problemas, faz-se necessário o profundo conhecimento das técnicas de determinação dos valores extremos das citadas funções. Outra vez lança-se mão da extensão de conceitos utilizados para funções de uma variável real com o intuito de aplicá-los as funções várias variáveis reais. Desta feita estenderemos os conceitos do cálculo diferencial aplicado às funções de uma variável construindo assim as bases para o estudo do comportamento das funções de várias variáveis.

2. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Definição 01: Funções de uma variável

Sabemos que uma função de uma variável real é uma lei que associa um único número real ***y*** a um número real ***x***, cuja notação usual é: $y = f(x)$, matematicamente temos:

$$\begin{gathered} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ y=f(x) \end{gathered}$$

Chamamos ao número real x, **variável independente**, que é a *variável de entrada* da função e chamamos ao número real y, **variável dependente**, que é a *variável de saída* da função.

Ao conjunto de todos os números reais x chamamos **domínio da função** e ao conjunto de todos os números reais y chamamos **imagem da função.**

Como neste trabalho apenas abordaremos as funções de variáveis reais cabe fazer algumas restrições aos domínios destas funções, excluindo entradas que nos remetam a números complexos ou divisões por zero.

Tabela 01 – Exemplos de funções de uma variável real

Função	Domínio	Imagem
$y=\sqrt{-3x}$	$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_+$
$y=\frac{2}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$y=senx$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$

Definição 02: Espaço *n*-dimensional

Seja o conjunto de todas as ênuplas de números reais, a este conjunto chamamos de ***espaço n-dimensional,*** cuja notação é $\mathbb{R}^n$. Cada ênupla $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ é chamada ponto do espaço n-dimensional.

Definição 03: Funções de duas variáveis

Estendendo-se o conceito de funções de uma variável real para duas variáveis reais, teremos: uma função de duas variáveis reais é uma lei que associa um único par ordenado (x_1,x_2) (ponto do espaço numérico de bi-dimensional) a um número real w, cuja notação usual é: $w=f(x_1,x_2)$. Matematicamente temos:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$w = f(x_1, x_2)$$

Chamamos ao ponto do espaço bi-dimensional (x_1, x_2), **variáveis independentes**, que são as *variáveis de entrada* da função e chamamos ao número real ***w***, **variável dependente**, que é a *variável de saída* da função.

Ao conjunto de todos os pontos do espaço bi-dimensional (x_1, x_2) chamamos **domínio da função** e ao conjunto de todos os números reais ***w*** chamamos **imagem da função**.

Como neste trabalho apenas abordaremos as funções de variáveis reais cabe fazer algumas restrições aos domínios destas funções, excluindo entradas que nos remetam a números complexos ou divisões por zero.

Tabela 02 – Exemplos de funções de duas variáveis

Função	Domínio	Imagem
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$\mathbb{R}_+$
$w = \dfrac{2}{xy}$	$xy \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$w = sen\ xy$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$

Definição 04: Funções de várias variáveis

Estendendo-se o conceito de funções de duas variáveis para várias variáveis teremos: uma função de várias variáveis reais é uma lei que associa uma única ênupla ordenada $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ (ponto do espaço numérico de n-dimensional) a um número real ***w***, cuja notação usual é: $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, matematicamente:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$w = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$$

Chamamos ao ponto do espaço n-dimensional $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$, **variáveis independentes**, que são as *variáveis de entrada* da função e chamamos ao número real ***w***, **variável dependente**, que é a *variável de saída* da função.

Ao conjunto de todos os pontos do n-dimensional $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$, chamamos **domínio da função** e ao conjunto de todos os números reais w chamamos **imagem da função**.

Como neste trabalho abordaremos as funções de variáveis reais cabe fazer algumas restrições aos domínios destas funções, excluindo entradas que nos remetam a números complexos ou divisões por zero.

Tabela 03 – Exemplos de funções de três ou mais variáveis

Função	Domínio	Imagem
$w=\sqrt{y-x^2+z}$	$y+z \geq x^2$	$\mathbb{R}_+$
$w=\dfrac{2}{xyzk}$	$xyzk \neq 0$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$w=\cos xyz$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$

Definição 05: Interior, Fronteira, Aberto, Fechado (Espaço Bidimensional)

Um ponto $\left(x_0, y_0\right)$ em uma região (conjunto) R no plano xy é um ***ponto interior*** de R se é o centro de um disco que está inteiramente em R. Um ponto $\left(x_0, y_0\right)$ é um ***ponto de fronteira*** de R se todo disco centrado em $\left(x_0, y_0\right)$ contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e do lado de fora de R. (o ponto de fronteira propriamente dito não precisa pertencer a R.)

Os pontos interiores de uma região, como um conjunto, compõem o ***interior*** da região. Os pontos de fronteira da região compõem sua ***fronteira***. Uma região é ***aberta*** se consiste inteiramente em pontos interiores. Uma região é ***fechada*** se contêm todos seus pontos de fronteira.

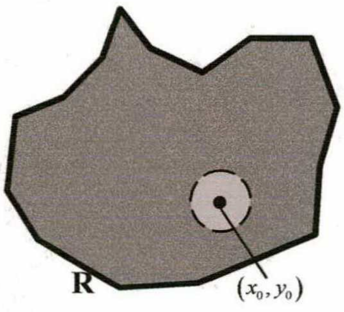


Figura 01: Ponto Interior

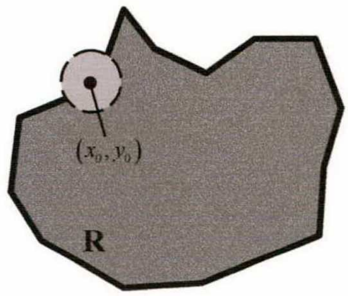


Figura 02: Ponto de fronteira

Definição 06: Regiões limitadas e não limitadas do plano

Uma região no plano é ***limitada*** se está dentro de um disco de raio fixo tais como segmentos de reta, triângulos, interiores de triângulos, retângulos, circunferências e etc. As demais regiões são chamadas de regiões ***não limitadas*** são exemplos destas retas, os eixos coordenados, os gráficos definidas em intervalos infinitos, etc.

Definição 07: Gráfico de uma função de duas variáveis

Se f for uma função de duas variáveis, então o gráfico de f será o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2, w) no R^3 para os quais (x_1, x_2) é um ponto no domínio de f e $w = f(x_1, x_2)$, esse gráfico da função f também pode receber a denominação de superfície $w = f(x_1, x_2)$.

Pela definição acima é fácil verificar então que o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície que representa todos os pontos no espaço tri-dimensional de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, w). Sabemos ainda que o domínio de f é um conjunto de pontos do plano xy e como a cada par ordenado (x_1, x_2) no domínio corresponde um único valor w, é fácil verificar que nenhuma reta perpendicular ao plano xy pode interceptar o gráfico de f em mais de um ponto.

Os Exemplos abaixo representam passo a passo à obtenção do gráfico de funções de duas variáveis, bem como exemplos destes gráficos:

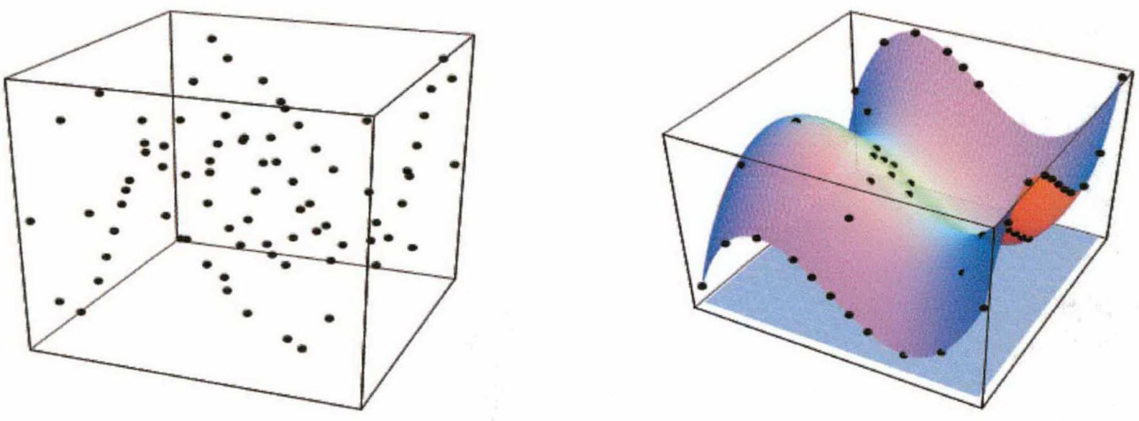


Figura 03 – Esboço do gráfico de uma função ponto a ponto

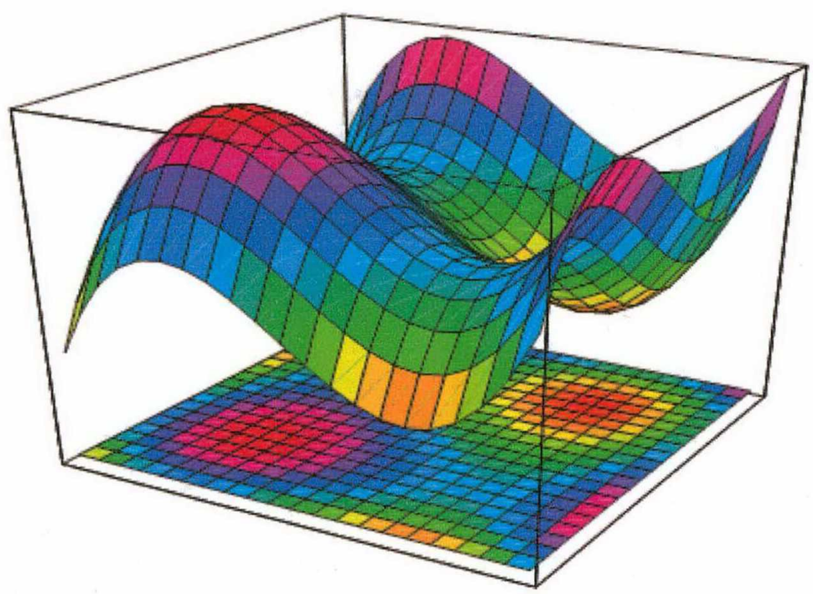


Figura 04 – Gráfico de uma função de duas variáveis

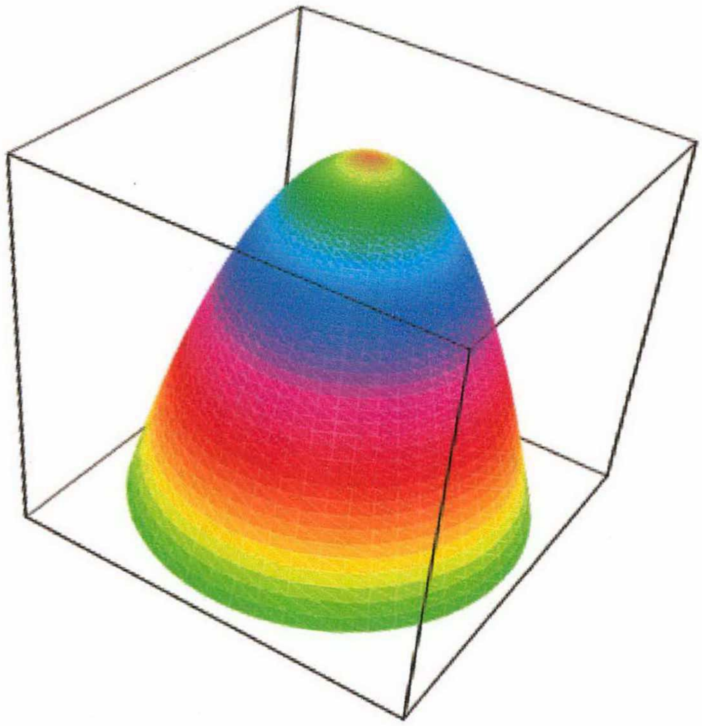


Figura 05 – Gráfico de uma função de duas variáveis

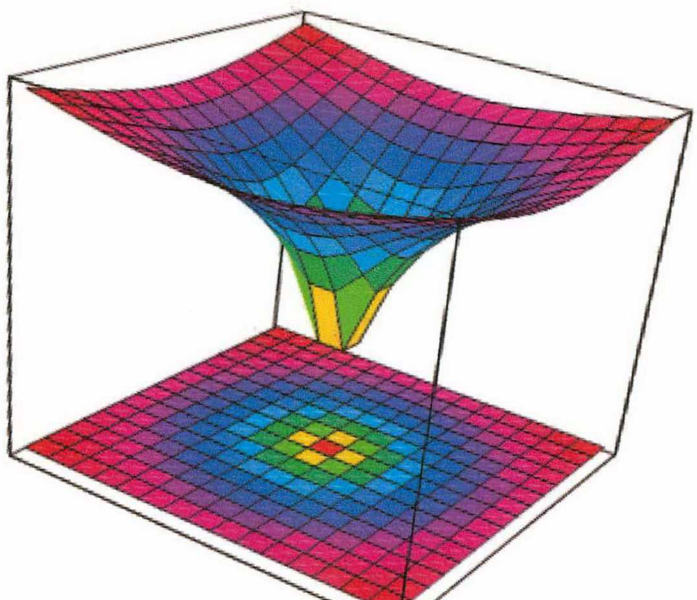


Figura 06 – Gráfico de uma função de duas variáveis

Definição 08: Gráfico de uma função de mais de duas variáveis

Como é fácil verificar uma função de uma variável possui uma representação gráfica bidimensional. Uma função de duas variáveis terá sua representação gráfica tridimensional. Desta forma é bem simples deduzirmos que uma função de n variáveis terá uma representação gráfica numa dimensão $n+1$. Como a nossa representação é feita no máximo numa forma tridimensional é impossível representarmos graficamente uma função com mais de duas variáveis.

Definição 09: Curvas de nível e curvas de contorno de funções de duas variáveis

O conjunto de pontos no plano onde uma função $f(x_1, x_2)$ tem um valor constante $f(x_1, x_2) = c$ é chamado de ***curva de nível de f.***

As curvas de nível de uma função são obtidas basicamente fazendo-se a suposição de que a superfície $w = f(x_1, x_2)$ seja interceptada por um plano $z = c$ e que a curva originada desta intersecção seja projetada no plano *xy*. A curva projetada tem por equação $f(x_1, x_2) = c$ e é chamada de ***curva de nível*** ou ***curva de contorno*** de f em c. Considerando diferentes valores para a constante c obtemos um conjunto de curvas de nível que também pode ser denominado ***mapa de contorno.***

Um mapa de contorno ou de curvas de níveis mostra variações de z com x e y. Geralmente estes mapas mostram curvas de nível com intervalos constantes e curvas de nível mais próximas representam um crescimento ou decrescimento mais acentuado de z. Em se tratando de topografia, onde estas curvas são mais largamente utilizadas, tal situação representa uma superfície íngreme e quando as curvas de nível encontram-se mais afastadas representa uma região com aclives ou declives bem atenuados.

Outros exemplos de utilização das curvas de nível são a representação de curvas equipotenciais e as curvas de produção constante. Abaixo vemos algumas representações gráficas de curvas de nível de funções de duas variáveis.

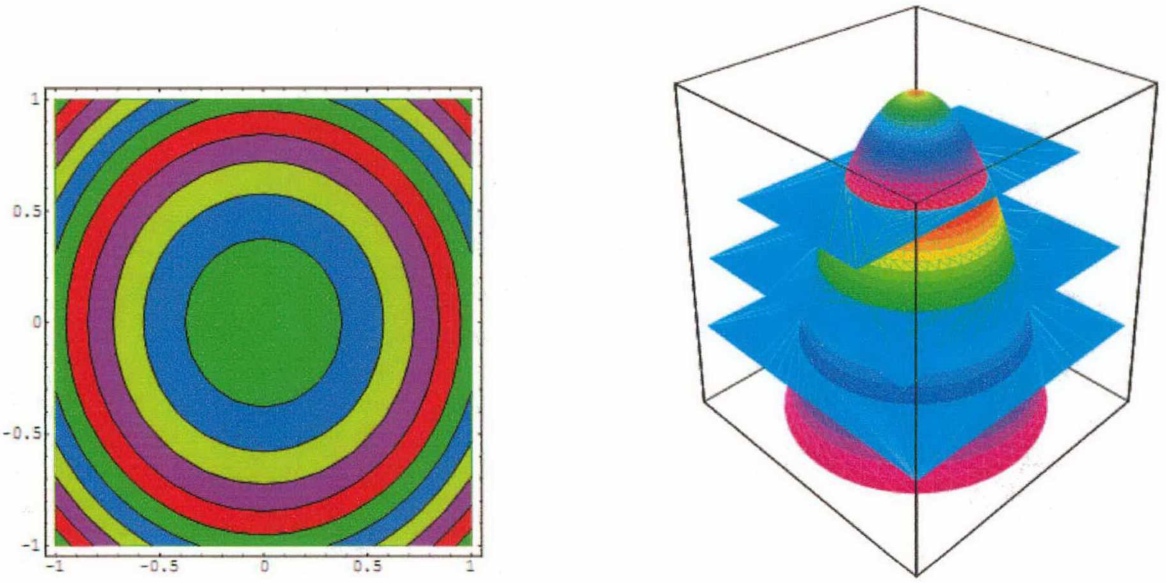


Figura 07 – Curvas de nível e gráfico de uma função de duas variáveis

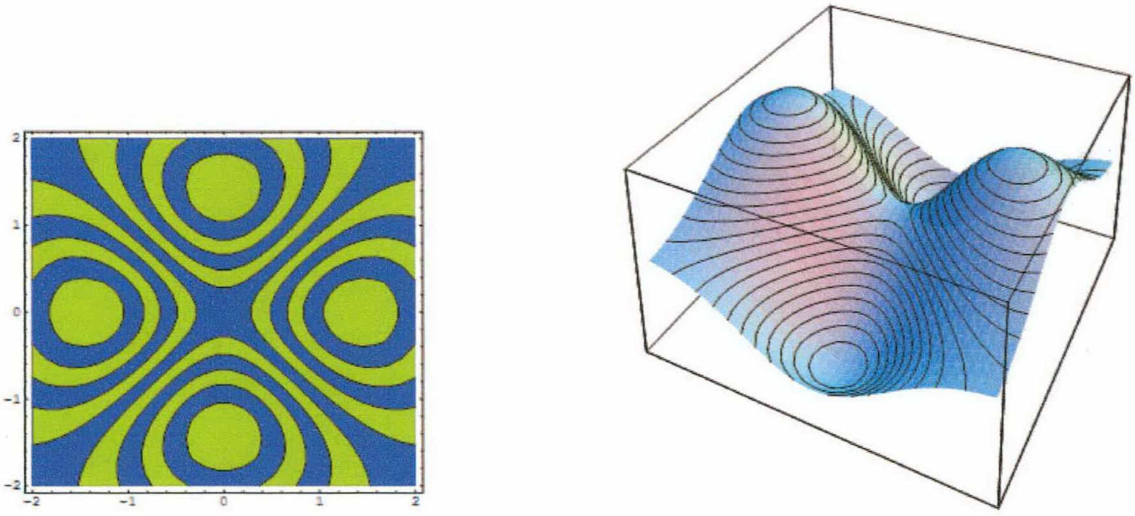
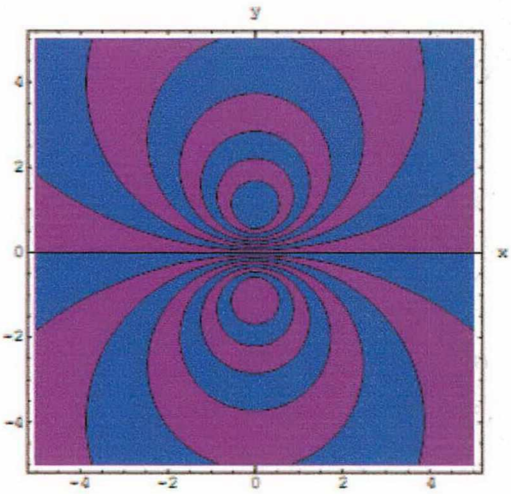


Figura 08 – Curvas de nível e gráfico de uma função de duas variáveis



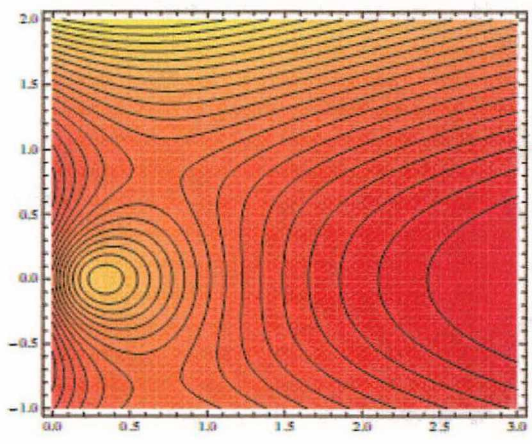


Figura 09 – Curvas equipotenciais

Figura 10 – Curvas isotérmicas

Definição 10: Superfícies de nível de funções de três variáveis

O conjunto de pontos (x_1, x_2, x_3) no espaço onde uma função de três variáveis independentes tem um valor constante $f(x_1, x_2, x_3) = c$ é chamado de ***superfície de nível*** de ***f.***

Como os gráficos de funções de três variáveis consistem em pontos $(x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3))$ em um espaço quadridimensional, portanto não poderemos esboçá-los em nosso sistema de coordenadas tridimensionais de referência. Contudo, podemos ver como a função se comporta analisando suas superfícies de nível tridimensionais.

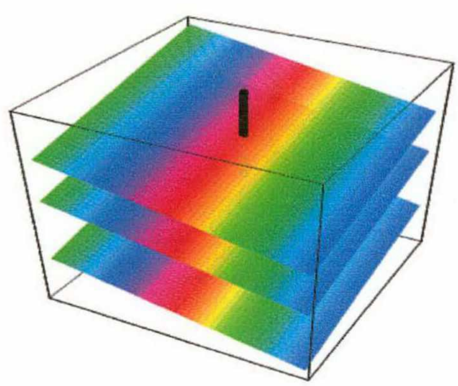


Figura 11 – Superfícies de nível

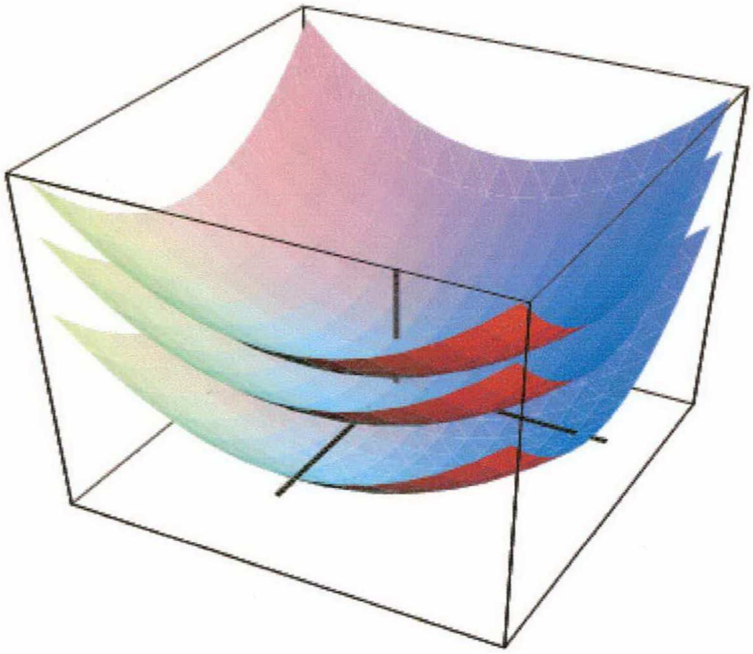


Figura 12 – Superfícies de nível

3. LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Até aqui, o tratamento entre as funções de uma variável e as funções de várias variáveis deu-se apenas pela simples extensão dos conceitos das primeiras às segundas. A partir deste momento a simples extensão de conceitos não se aplica mais eficientemente, existem agora divergências entre os conceitos aplicados as funções de uma variável e aqueles efetivamente aplicados a funções de várias variáveis.

O início destas mudanças dá-se com o estudo dos limites das funções de várias variáveis, geralmente os autores adotam a utilização de funções de duas variáveis para exemplificar o que acontece com as funções de mais de uma variável. Aqui buscaremos sempre que possível utilizar as definições para funções de n variáveis, sempre que necessário fazendo-se o percurso a partir das funções de duas variáveis buscando sempre uma generalização para funções de n-variáveis.

Definição 11: Disco aberto

Se $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ for um ponto em $\mathbb{R}^n$ e r for um número positivo, então o ***disco aberto*** $B(A;r)$, será definida como o conjunto de todos os pontos $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, tais que $\|P-A\|<r$, com $\|P-A\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2}$.

Definição 12: Limite de uma função de várias variáveis

Seja f uma função de n variáveis que está definida em um disco aberto $B\left(\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},...,x_{n_0}\right),r\right)$, exceto possivelmente no próprio ponto $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},...,x_{n_0}\right)$. Então o ***limite de*** $f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ ***quando*** $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ ***tende a*** $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},...,x_{n_0}\right)$ ***é L,*** e escrevemos:

$$\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to\left(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0}\right)} f(P)=L$$

Se para todo $\varepsilon>0$, por menor que seja, existir um $\delta>0$ tal que se $0<\|P-A\|<\delta$, então $|f(P)-L|<\varepsilon$.

Sejam L, M e k números reais e $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to\left(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0}\right)} f(x_1,x_2,...,x_n)=L$ e $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to\left(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0}\right)} g(x_1,x_2,...,x_n)=M$, nestas condições são válidas as propriedades:

Tabela 04 – Propriedades dos limites de funções de várias variáveis

Regra da soma:	$\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})}\left[f(x,y,...,z)+g(x,y,...,z)\right]=L+M$
Regra da diferença:	$\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})}\left[f(x,y,...,z)-g(x,y,...,z)\right]=L-M$
Regra do produto:	$\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})}\left[f(x,y,...,z)\bullet g(x,y,...,z)\right]=L\bullet M$
Regra da multiplicação por escalar:	$\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})} kf(x,y,...,z)=kL$
Regra do quociente:	$\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})}\left[\dfrac{f(x,y,...,z)}{g(x,y,...,z)}\right]=\dfrac{L}{M}$ se $M\neq 0$
Regra da potência:	Se m e n forem inteiros, então $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},...,x_{n_0})}\left[f(x,y,...,z)\right]^{\frac{m}{n}}=L^{\frac{m}{n}}$, desde que $L^{\frac{m}{n}}\in\mathbb{R}$

Exemplo 1: calcule o limite: $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)}\dfrac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

Solução:

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}=\frac{3\bullet 3^2-4^2+5}{3^2+4^2+2}=\frac{27-16+5}{9+16+2}=\frac{16}{27}$$

Exemplo 2: calcule o limite: $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0,\pi/4\right)}\sec x\ tg\ y$

Solução:

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\pi/4\right)}\sec x\ tg\ y=\sec 0\ tg\ \frac{\pi}{4}=1\bullet 1=1$$

Exemplo 3: calcule o limite: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

Solução:

Substituindo diretamente teríamos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} (x+y) = 1+1 = 2$$

Exemplo 4: calcule o limite: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

Solução:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,-1)} \frac{2xy+yz}{x^2+z^2} = \frac{2\cdot 1\cdot(-1)+(-1)(-1)}{1^2+(-1)^2} = \frac{-2+1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 5: calcule o limite: $\lim\limits_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

Solução:

$$\lim_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x = 3e^{-2\cdot 0}\cos 2\pi = 3\cdot 1 = 3$$

Definição 13: Inexistência do Limite de uma função de várias variáveis

Se a função f tiver diferentes limites quando $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ tender a $(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0})$ através de dois conjuntos de pontos tendo $(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0})$ como um ponto de acumulação destes conjuntos, então $\lim\limits_{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\to(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0})} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ não existe.

Exemplo 6: Dada $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, calcule se existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Solução:

Substituindo diretamente teríamos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. É fácil verificar que $f(x,y)$ está definida em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, exceto no ponto $(0,0)$. Desta forma para aplicarmos a definição acima deveremos tomar dois conjuntos de pontos que contenham $(0,0)$ como ponto de acumulação, então: seja o conjunto S_1 o conjunto de todos os pontos do eixo das abscissas e S_2 o conjunto de todos os pontos da reta bissetriz dos quadrantes ímpares $y=x$. Então:

I – se $(x,y)\in S_1 \Rightarrow (x,y)=(x,0)$, logo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_1}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=\lim_{x\to 0} 0=0$$

II – se $(x,y)\in S_2 \Rightarrow (x,y)=(x,x)$, logo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_2}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_1}} f(x,y)\neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_2}} f(x,y)$, decorre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Definição 14: Continuidade de uma função de várias variáveis

Suponha que *f* seja uma função de *n* variáveis e *A*, um ponto de $\mathbb{R}^n$. Então, dizemos que *f* será contínua em um ponto *A* se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $f(A)$ existe;
2. $\lim\limits_{P\to A} f(P)$ existe;
3. $\lim\limits_{P\to A} f(P)=f(A)$

Definição 15: Descontinuidade removível

Se uma função f de n variáveis for descontínua em um ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$, mas $\lim\limits_{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \to \left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)} f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ existir, então dizemos que f tem uma **descontinuidade removível** em $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$, se for possível redefinir a função f de tal forma que $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right) = \lim\limits_{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \to \left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)} f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$, então esta função redefinida será contínua no ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$.

Definição 16: Descontinuidade essencial

Se uma função f de n variáveis possui uma descontinuidade em um ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ tal que esta descontinuidade não possa ser removida; esta função tem então uma **descontinuidade essencial** em $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$.

Exemplo 7: Dada $f(x, y) = \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$, verifique se f é contínua em $(0,0)$.

__Solução:__

É fácil verificar que f é descontínua, pois falha na **condição 1** da continuidade de função de n variáveis, pois:

$$f(x, y) = \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(0,0) = \frac{3 \cdot 0^2 \cdot 0}{0^2 + 0^2} = \frac{0}{0}, \text{ portanto } \nexists f(0,0).$$

Porém estamos diante de uma **descontinuidade removível**, uma vez que, se redefinirmos a função é possível eliminar a descontinuidade. Desta forma teremos:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Assim teremos que $f(0,0)=0$ é também é fácil verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$, de fato:

I – se $(x,y)\in S_1 \Rightarrow (x,y)=(x,0)$, logo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_1}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2+0}=\lim_{x\to0}0=0$$

II – se $(x,y)\in S_2 \Rightarrow (x,y)=(x,x)$, logo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_2}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{2}=0$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_1}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ P\in S_2}} f(x,y)$, decorre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, desta forma f é contínua em $(0,0)$.

Sejam f e g duas funções contínuas em um ponto $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)$, então vale:

i. $f+g$ é contínua em $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)$;

ii. $f-g$ é contínua em $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)$;

iii. $f\bullet g$ é contínua em $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)$;

iv. $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)$, desde que $g\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\ldots,x_{n_0}\right)\neq 0$.

4. DERIVADAS PARCIAIS

Seja f uma função de n variáveis, quando fixamos todas as variáveis independentes desta função, exceto uma delas, e se derivarmos esta função em relação a essa única variável independente não fixada, teremos a derivada parcial de f em relação a esta variável não fixada.

Definição 17: Derivada parcial

Seja $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, um ponto em $\mathbb{R}^n$ e seja *f* uma função de *n* variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Então a derivada parcial de *f* em relação a x_k é a função, denotada por $D_k f$, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de *f* seja dada por:

$$D_k f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_k}$$

Se esse limite existir.

Vejamos a aplicação da **definição 17** para uma função de três variáveis reais. Então as derivadas parciais de *f* serão dadas por:

$D_x f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$, com *y* e *z* constantes. (derivada parcial de *f* em relação à variável *x*).

$D_y f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$, com *x* e *z* constantes. (derivada parcial de *f* em relação à variável *y*).

$D_z f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$, com *x* e *y* constantes. (derivada parcial de *f* em relação à variável *z*).

São equivalentes as seguintes notações para representação das derivadas parciais da função *f*, sendo *f* uma função de três variáveis reais.

$D_x f(x, y, z) = \frac{d}{dx} f(x, y, z) = f_x(x, y, z) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ (derivada parcial de *f* em relação à variável *x*);

$$D_y f(x,y,z)=\frac{d}{dy}f(x,y,z)=f_y(x,y,z)=f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$$ (derivada parcial de f em relação à variável y) e

$$D_z f(x,y,z)=\frac{d}{dz}f(x,y,z)=f_z(x,y,z)=f_z=\frac{\partial f}{\partial z}$$ (derivada parcial de f em relação à variável z).

Exemplo 8: Seja $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2}$, calcule as derivadas parciais de g.

Solução:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-2}}.2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-2}}.2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-2}}$$

Exemplo 9: Seja $f(r,s,t,u,v,w)=3r^2st+st^2v-2tuv^2-tvw+3uw^2$, calcule as derivadas parciais de f.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=6rst\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=3r^2t+t^2v\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=3r^2s+2stv-2uv^2-vw\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=-2tv^2+3w^2\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=st^2-4tuv-tw \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}=-tv+6uw$$

Exemplo 10: Seja $f(x,y,z)=x^2y+yz^2+z^3$, prove que: $xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=3f(x,y,z)$.

Solução:

Inicialmente calcularemos as derivadas parciais de *f*:

$f_x(x,y,z)=2xy$;

$f_y(x,y,z)=x^2+z^2$;

$f_z(x,y,z)=2yz+3z^2$

Logo,

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=3f(x,y,z)$$

$$x(2xy)+y(x^2+z^2)+z(2yz+3z^2)=3f(x,y,z)$$

$$2x^2y+x^2y+yz^2+2yz^2+3z^3=3f(x,y,z)$$

$$3x^2y+3yz^2+3z^3=3f(x,y,z)$$

$$3(x^2y+yz^2+z^3)=3f(x,y,z)$$

$$3f(x,y,z)=3f(x,y,z)$$ >> CQD.

Definição 18: Incremento de uma função de *n* variáveis

Se *f* for uma função de *n* variáveis $x_1,x_2,...,x_n$, e $\overline{P}$ for o ponto $(x_1,x_2,...,x_n)$, então o **incremento de *f* em** $\overline{P}$ será dado por:

$$\Delta f(\overline{P})=f(\overline{x_1}+\Delta x_1,\overline{x_2}+\Delta x_2,...,\overline{x_n}+\Delta x_n)-f(\overline{P})$$

Definição 19: Diferenciabilidade de uma função de *n* variáveis

Se *f* for uma função de *n* variáveis $x_1,x_2,...,x_n$, e o incremento de *f* no ponto $\overline{P}$ for escrito como:

$$\Delta f(\overline{P}) = D_1 f(\overline{P})\Delta x_1 + D_2 f(\overline{P})\Delta x_2 + \ldots + D_n f(\overline{P})\Delta x_n + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \ldots + \varepsilon_n \Delta x_n$$

onde $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, \ldots, \varepsilon_n \to 0$, quando $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ então, f será diferenciável em $\overline{P}$.

Definição 20: Diferencial total

Se f for uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e f for diferenciável no ponto $\overline{P}$, então a diferencial total de f será a função df tendo valores funcionais dados por:

$$df(\overline{P}, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = D_1 f(\overline{P})\Delta x_1 + D_2 f(\overline{P})\Delta x_2 + \ldots + D_n f(\overline{P})\Delta x_n.$$

Simplificadamente podemos reescrever a **definição 20** por: Seja $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definindo $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ... , $dx_n = \Delta x_n$ e utilizando a notação $\frac{\partial w}{\partial x_i}$, em detrimento da notação $D_1 f(P)$, podemos reescrever a igualdade da **definição 20** como:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n$$

Exemplo 11: As dimensões de uma caixa são medidas e obtemos 10cm, 12cm e 15cm, e as medidas são corretas até 0,02cm. Calcule aproximadamente o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa a partir das medidas dadas.

Solução:

Sabemos que V cm³ é o volume de uma caixa de dimensões x cm, y cm e z cm. Então:

$$V = xyz$$

Sabemos que as derivadas parciais de V são:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = xz \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = xy$$

Utilizando-se dV para a determinação de uma aproximação do erro $|\Delta V|$ teremos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

Sabemos que as medidas fornecidas são corretas até 0,02cm, logo $|\Delta x| \leq 0,02$, $|\Delta y| \leq 0,02$ e $|\Delta z| \leq 0,02$, como desejamos determinar o erro máximo cometido na medida das três dimensões, tomaremos: $x = 10$, $y = 12$, $z = 15$ e $dx = dy = dz = 0,02$. Assim sendo:

$$dV = 12 \bullet 15 \bullet 0,02 + 10 \bullet 15 \bullet 0,02 + 10 \bullet 12 \bullet 0,02$$

$$dV = 9$$

Logo, $\Delta V \approx 9$, então o erro máximo possível de acordo com as medidas fornecidas é de aproximadamente 9 cm³.

Teorema 01: Regra da cadeia

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função de m variáveis $y_1, y_2, ..., y_m$. Suponha ainda que cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m)$ exista. Então, u é uma função de $y_1, y_2, ..., y_m$, e

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right)$$

....

$$\frac{\partial u}{\partial y_m}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)$$

A demonstração deste teorema pode ser verificada em Louis Leithold (2004).

Exemplo 12: Dada $u = xy + xz + yz$; $x = r$; $y = r\cos t$ e $z = rsent$, ache $\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

<u>Solução:</u>

Da regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=(y+z)(1)+(x+z)(\cos t)+(x+y)(sent)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=y+z+x\cos t+z\cos t+xsent+ysent$$

Substituindo *x, y* e *z*, teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=r\cos t+rsent+r\cos t+rsent\cos t+rsent+r\cos tsent$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=2r(\cos t+sent)+r(2sent\cos t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=2r(\cos t+sent)+rsen2t$$

Logo a derivada parcial de *u* em relação à variável *r* será:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=2r(\cos t+sent)+rsen2t$$

Definição 21: Derivada total

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função diferenciável de uma única variável t, então u será uma função de t e a derivada total de u em relação a t será dada por:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right) + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right)$$

Definição 22: Derivadas parciais de ordem superior

Seja f uma função de n variáveis, então em geral $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, com $i = 1,2,...,n$, também serão funções de n variáveis. E se as derivadas parciais dessas funções existirem, elas serão chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de f. Poderão existir n^2 derivadas parciais de segunda ordem.

Se novamente existirem as derivadas parciais das derivadas parciais de segunda ordem de f, estas serão denominadas derivadas parciais de terceira ordem de f.

Analogamente se define até as derivadas parciais de enésima ordem de f.

São notações análogas de derivadas parciais de segunda ordem:

$D_{xx}f(x,y,z) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,y,z) = f_{xx}(x,y,z) = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (derivada parcial duas vezes em relação à x);

$D_{yx}f(x,y,z) = \frac{d^2}{dxdy} f(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (derivada parcial uma vez em relação à y e uma vez em relação à x).

São notações de derivadas parciais de terceira ordem;

$D_{xxx}f(x,y,z)=\frac{d^3}{dx^3}f(x,y,z)=f_{xxx}(x,y,z)=f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ (derivada parcial três vezes em relação à x);

$D_{yxx}f(x,y,z)=\frac{d^3}{dx^2dy}f(x,y,z)=f_{yxx}(x,y,z)=f_{yxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$ (derivada parcial uma vez em relação à y e duas vezes em relação à x).

NOTA: Nas notações com subíndice ($D_{yxx}f(x,y,z)=f_{yxx}(x,y,z)=f_{yxx}$), a ordem da diferenciação parcial é da esquerda para a direita, enquanto que nas notações fracionárias ($\frac{d^3}{dx^2dy}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$), a ordem é da direita para a esquerda.

Teorema 02: Teorema de Schwartz

Sempre que as derivadas parciais de segunda ordem forem funções contínuas, as derivadas cruzadas coincidirão, isto é, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$, quaisquer que sejam i e j. Este importante resultado é conhecido como Teorema de Schwartz e sua demonstração pode ser encontrada em Josep F. Bosch (2005).

5. EXTREMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Dentre as características básicas dos gráficos de uma função estão à possibilidade de observação de seus pontos extremos, pontos estes para os quais a função alcança seus maiores ou menores valores. Trataremos aqui da discussão dos métodos que nos permitem determinar estes pontos extremos da função. Trataremos do assunto dividindo-o em três partes iniciando pelos extremos relativos, seguido pelos extremos absolutos e por fim abordaremos o método dos multiplicadores de Lagrange.

5.1 Extremos Relativos de Funções de duas Variáveis: Uma Abordagem Algébrica

Definição 23: Valor máximo relativo

A função contínua f de duas variáveis tem um **valor máximo relativo** no ponto (x_{1_0}, x_{2_0}), se existir um disco aberto $B((a,b);r)$, tal que $f(x_{1_0}, x_{2_0}) \geq f(x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in B$.

Definição 24: Valor mínimo relativo

A função contínua f de duas variáveis tem um **valor mínimo relativo** no ponto (x_{1_0}, x_{2_0}), se existir um disco aberto $B((a,b);r)$, tal que $f(x_{1_0}, x_{2_0}) \leq f(x_1, x_2)$ para todo $(x_{1_0}, x_{2_0}) \in B$.

Definição 25: Extremo relativo

Se a função contínua f admitir um valor mínimo ou máximo relativo num ponto (x_{1_0}, x_{2_0}) diremos que tal ponto é um **extremo relativo de** ***f***.

Para que isso ocorra, se existirem $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_{1_0}, x_{2_0})$ e $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_{1_0}, x_{2_0})$, deveremos ter $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_{1_0}, x_{2_0}) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_{1_0}, x_{2_0}) = 0$.

O ponto (x_{1_0}, x_{2_0}) também é chamado de ***ponto crítico de f***.

Teorema 03: Teste da Derivada Segunda

Seja f uma função contínua de duas variáveis, tal que f e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas em algum disco aberto $B((a,b);r)$. Suponhamos, além disso, que $\frac{\partial}{\partial x} f(a,b) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(a,b) = 0$. Então, *i)* f tem um valor mínimo relativo em (a,b) se: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\bullet\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right]^2>0$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0$ ou $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)>0$;

ii) f tem um valor máximo relativo em (a,b) se: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\bullet\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right]^2>0$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)<0$ ou $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)<0$;

iii) $f(a,b)$ não é um extremo relativo se: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\bullet\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right]^2<0$;

iv) Não podemos tirar nenhuma conclusão se: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\bullet\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right]^2=0$.

Para encontrar a demonstração desse resultado, veja Louis Leithold (1994).

Adiaremos a abordagem do teste da derivada segunda para determinação de extremos relativos de funções de mais de duas variáveis reais para adiante, uma vez que o tratamento algébrico como o adotado para funções de duas variáveis reais se tornaria muito extenso e enfadonho.

5.2 Extremos Relativos de Funções de várias Variáveis: Uma Abordagem Matricial

Definição 26: Valor máximo relativo

A função contínua f de várias variáveis tem um **valor máximo relativo** no ponto $\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\dots,x_{n_0}\right)$, se existir um disco aberto $B((a,b);r)$, tal que $f\left(x_{1_0},x_{2_0},x_{3_0},\dots,x_{n_0}\right)\geq f\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$ para todo $\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)\in B$.

Definição 27: Valor mínimo relativo

A função contínua f de várias variáveis tem um **valor mínimo relativo** no ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$, se existir um disco aberto $B\left((a,b);r\right)$, tal que $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right) \leq f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ para todo $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) \in B$.

Definição 28: Extremo relativo

Se a função contínua f admitir um valor mínimo ou máximo relativo num ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ diremos que tal ponto é um **extremo relativo de** ***f***.

Para que isso ocorra, se existirem $\frac{\partial}{\partial x} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial y} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$, deveremos ter $\frac{\partial}{\partial x} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right) = 0$.

O ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ também é chamado de ponto crítico de f.

Definição 29: Matriz Hessiana

Considere a matriz diferencial da matriz diferencial, ou seja, a matriz de todas as derivadas parciais de segunda ordem de f. A esta matriz chamamos **Matriz Hessiana** de f e denotaremos por $H(f)$.

Seja f uma função de n variáveis reais definimos a Matriz Hessiana de f como:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Então da definição anterior temos que se f é uma função de duas variáveis sua Hessiana será:

$$H\left(f(x,y)\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Analogamente se f é uma função de três variáveis sua Hessiana será:

$$H\left(f(x,y,z)\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Teorema 04: Teste da Derivada Segunda Para Matriz Hessiana

Seja f uma função de várias variáveis tal que f e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas em um disco aberto $B\left((a,b);r\right)$. Suponhamos, além disso, que $\dfrac{\partial}{\partial x} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \dots, x_{n_0}\right)=0$ e $\dfrac{\partial}{\partial y} f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \dots, x_{n_0}\right)=0$, tal que $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \dots, x_{n_0}\right)$ seja um ponto crítico de f é sejam $d_1=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}\right)$; $d_2=\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}\right)}$;

$$d_3 = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^{\ 2}} \end{bmatrix}_{|(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})} ; \quad \ldots \quad \text{e}$$

$$d_n = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\ 2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_n} \end{bmatrix}_{|(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})}$$

Então:

i) *Se* $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$ e $d_3 > 0$ e ... e $d_n > 0$, deduz-se que $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ é um ponto de mínimo local;

ii) *Se* $d_1 < 0$ e $d_2 > 0$ e $d_3 < 0$ e ... e $(-1)^n d_n > 0$, deduz-se que $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ é um ponto de máximo local;

iii) Se $d_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, nada podemos afirmar sobre o ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$;

iv) Se $d_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, e não se verifica *i)* ou *ii)* o ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$ é um ponto de sela.

A demonstração deste importante teorema pode ser verificada em Moises Villena (2007).

5.3 Extremos Absolutos de Funções de Várias Variáveis

Definição 30: Valor máximo absoluto

A função contínua f de várias variáveis terá um **valor máximo absoluto** em seu domínio D, se existir algum ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right)$ em D, tal que $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right) \geq f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, para todos os pontos $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$em D. Em tal caso $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right)$ é denominado o **valor máximo absoluto de** f em D.

Definição 31: Valor mínimo absoluto

A função contínua f de várias variáveis terá um **valor mínimo absoluto** em seu domínio D, se existir algum ponto $\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right)$ em D, tal que $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right) \leq f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, para todos os pontos $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ em D. Em tal caso $f\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right)$ é denominado o **valor mínimo absoluto de** f em D.

Teorema 05: Teorema do valor extremo

Seja f uma função de várias variáveis contínua em R e seja R uma região fechada (definimos uma região fechada como aquela região que inclui sua fronteira). Então existe pelo menos um ponto de R onde f tem um valor máximo absoluto, e pelo menos um ponto em R onde f tem um valor mínimo absoluto.

A demonstração deste importante teorema pode ser verificada em Louis Leithold (1994).

5.4 Multiplicadores de Lagrange: Uma Abordagem Algébrica

De modo geral existem dois tipos de problemas, que consistem basicamente na determinação de valores máximos ou mínimos de uma função, são eles: os problemas com extremos livres e os problemas com extremos vinculados. Esse último tipo ocorre quando desejamos determinar os extremos de uma função, porém uma ou mais restrições tem que ser obedecidas.

Nos problemas com extremos vinculados, nem sempre é possível resolver a equação do vínculo para uma das variáveis em termos das outras. Para resolve-los, utilizamos um método creditado a Joseph L. Lagrange (1736-1813), conhecido como método dos multiplicadores de Lagrange.

Definição 32: Multiplicadores de Lagrange para funções de três variáveis e uma restrição

Suponhamos que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f de três variáveis, x, y, e z, sujeita ao vínculo $g(x,y,z)=0$. Introduzimos uma nova variável λ, chamada multiplicador de Lagrange e formamos a função auxiliar F para a qual:

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

O problema consiste então em encontrarmos os pontos críticos da função F de quatro variáveis x, y, z e λ. Os valores de x, y e z que dão os extremos relativos de f estão entre estes pontos críticos. Os pontos críticos de F são os valores de x, y, z e λ para os quais se anulam as quatro derivadas parciais de primeira ordem de F.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial F}{\partial z}=0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

NOTA: Analogamente pode-se estender o conceito a funções de n variáveis.

Definição 33: Multiplicadores de Lagrange para funções de *n* variáveis e uma restrição

Suponhamos que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f de n variáveis, $x_1,x_2,\dots,x_n$, sujeitos ao vínculo $g(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$. Introduzimos uma nova variável λ, chamada multiplicador de Lagrange e formamos a função auxiliar F para a qual:

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\lambda g(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

O problema consiste então em encontrarmos os pontos críticos da função F de $n+1$ variáveis $x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda$. Os valores de $x_1,x_2,\dots,x_n$ que dão os extremos relativos de f estão entre estes pontos críticos. Os pontos críticos de F são os valores de $x_1,x_2,\dots,x_n$ e λ para os quais se anulam as $n+1$ derivadas parciais de primeira ordem de F.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial F}{\partial z}=0\,;\ \ldots\,;\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

NOTA: Quando diversos vínculos são impostos, o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser aplicado se utilizarmos diversos multiplicadores. Por exemplo, se desejarmos encontrar pontos críticos da função com valores $f(x,y,z)$, sujeitos a duas condições laterais $g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0$, encontramos os pontos críticos da função F de cinco variáveis x, y, z, λ e μ, para as quais

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

5.5 Multiplicadores de Lagrange: Uma Abordagem Matricial

Critério 01: Estabelecimento de extremos com uma restrição e funções de duas variáveis

Suponha que se deseja otimizar uma função f de duas variáveis, duas vezes diferenciável e sujeita a restrição $g(x,y)=k$, com k constante. Define-se a função Lagrangiana como:

$L(\lambda,x,y)=f(x,y)-\lambda\left[g(x,y)-k\right]$, onde λ é chamado de multiplicador de Lagrange. Suponha que se obtenha o ponto crítico (λ,x_0,y_0) da função Lagrangiana, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\rightarrow g(x,y)=k\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y}=0\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}\end{cases}$$ então se define a matriz hessiana da função lagrangiana, como a matriz.

$$\overline{H} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{|(x_0, y_0, \lambda)}$$

Então:

Se $\left[\overline{H}\right] > 0$ então a função f tem um **ponto de máximo** no ponto (x_0, y_0);

Se $\left[\overline{H}\right] < 0$ então a função f tem um **ponto de mínimo** no ponto (x_0, y_0).

Critério 02: Estabelecimento de extremos com uma restrição e funções de três variáveis

Suponha que se deseja otimizar uma função f de três variáveis, duas vezes diferenciável e sujeita a restrição $g(x, y, z) = k$, com k constante. Define-se a função Lagrangiana como:

$L(\lambda, x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda\left[g(x, y, z) - k\right]$, onde λ é chamado de multiplicador de Lagrange. Suponha que se obtenha o ponto crítico (λ, x_0, y_0, z_0) da função Lagrangiana resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x, y, z) = k \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{cases}$$

então se define a matriz hessiana da função lagrangiana, como a matriz.

$$\overline{H} = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{|(x_0, y_0, z_0, \lambda)}$$

Sejam $\overline{H}_3 = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{|(x_0, y_0, \lambda)}$ e $\overline{H}_4 = \overline{H}$

Então:

Se $\left[\overline{H}_3\right] > 0$ e $\left[\overline{H}_4\right] < 0$ então a função f tem um **ponto de máximo** no ponto (x_0, y_0, z_0);

Se $\left[\overline{H}_3\right] < 0$ e $\left[\overline{H}_4\right] < 0$ então a função f tem um **ponto de mínimo** no ponto (x_0, y_0, z_0).

Critério 03: Estabelecimento de extremos com uma restrição e funções de *n* variáveis

Suponha que se deseja otimizar uma função f de n variáveis, duas vezes diferenciável e sujeita a restrição $g(x_1, x_2, ..., x_n) = k$, com k constante. Define-se a função Lagrangiana como:

$L(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda\left[g(x_1, x_2, ..., x_n) - k\right]$, onde λ é chamado de multiplicador de Lagrange. Suponha que se obtenha o ponto crítico $\left(\lambda, x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}\right)$ da função Lagrangiana resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x_1, x_2, ..., x_n) = k \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \end{cases}$$

então se define a matriz hessiana da função lagrangiana, como a matriz.

$$\overline{H} = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}_{\left(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}, \lambda\right)}$$

Sejam $\overline{H_3} = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2} \end{bmatrix}_{\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \lambda\right)}$;

$\overline{H_4} = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3{}^2} \end{bmatrix}_{\left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \lambda\right)}$ e $\overline{H_n} = \overline{H}$

Então:

Se $\left[\overline{H}_3\right] > 0$ e $\left[\overline{H}_4\right] < 0$ e $\left[\overline{H}_5\right] > 0$ e ... e $(-1)\left[\overline{H}_n\right] > 0$ então a função f tem um **ponto de máximo** no ponto $\left(\lambda, x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$;

Se $\left[\overline{H}_3\right] < 0$ e $\left[\overline{H}_4\right] < 0$ e $\left[\overline{H}_5\right] < 0$ e ... e $(-1)\left[\overline{H}_n\right] < 0$ (todos negativos) então a função f tem um **ponto de mínimo** no ponto $\left(\lambda, x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$.

6. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Exemplo 13: Seja $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$, determine, caso haja, os extremos relativos de f.

Solução:

Inicialmente determinaremos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f. Logo:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x$; $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2$; $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$; $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ E

Agora deveremos determinar os pontos críticos de f, para tanto de acordo com a **definição 25** basta fazermos $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$, assim sendo teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1, \text{ logo são}$$

pontos críticos de f os pontos: $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$; $(0,1)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, pois $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$ e

$\frac{\partial}{\partial y} f\left(x_0, y_0\right) = 0$. Aplicando estes pontos críticos às derivadas parciais de segunda ordem calculadas teremos:

Para o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Para o ponto $(0,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24(0)^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Para o ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

De acordo com os resultados obtidos e de acordo com o **teorema 03** montamos a tabela abaixo:

Ponto Crítico	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	Conclusão
$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	$4>0$	$2>0$	0	$8>0$	Mínimo relativo.
$(0,1)$	$-2<0$	$2>0$	0	$-4<0$	Não é um extremo relativo.
$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$4>0$	$2>0$	0	$8>0$	Mínimo relativo.

Logo a função possui dois valores mínimos relativos nos pontos $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)$, como $f\left(-\frac{1}{2},1\right)=f\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{9}{8}$, dizemos que f tem um valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$.

Exemplo 14: Determine agora os extremos relativos do **Exemplo 13,** desta feita utilizando a **teorema 04**.

Solução:

Inicialmente determinaremos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f. Logo:

$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-2x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y-2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

Agora deveremos determinar os pontos críticos de f, para tanto de acordo com a **definição 33** basta fazermos $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=0$ e $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=0$, assim sendo teremos:

$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \Rightarrow 8x^3-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow 2y-2=0 \Rightarrow x=1$, logo são pontos críticos de f os pontos: $\left(-\frac{1}{2},1\right);(0,1)$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)$, pois $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=0$ e $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=0$. Aplicando estes pontos críticos às derivadas parciais de segunda ordem calculadas teremos:

Para o ponto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-2\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

Para o ponto $(0,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-2\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24(0)^2-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0\Big|_{(0,1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

Para o ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-2\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24\left(\frac{1}{2}\right)^2-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

De acordo com os resultados obtidos e de acordo com o **teorema 04** teremos:

Para o ponto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

$$d_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} = 4$$

$$d_2 = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{\left(-\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow d_2 = \det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 8$$

como $d_1 = 4 > 0$ e $d_2 = 8 > 0$, então pela **teorema 04** deduz-se que o ponto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ é um valor de mínimo local de *f*.

Para o ponto $(0,1)$

$$d_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$d_2 = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(0,1)} \Rightarrow d_2 = \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -4$$

como $d_1 = -2 < 0$ e $d_2 = -4 < 0$, então pela **teorema 04** deduz-se que o ponto $(0,1)$ é um ponto de sela.

Para o ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$

$$d_1=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{1}{2},1\right)}=4$$

$$d_2=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{2},1\right)} \Rightarrow d_2=\det\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=8$$

como $d_1=4>0$ e $d_2=8>0$, então pela **teorema 04** deduz-se que o ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$ é um valor de mínimo local de *f*.

Logo a função possui dois valores mínimos relativos nos pontos $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)$, como $f\left(-\frac{1}{2},1\right)=f\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{9}{8}$, dizemos que *f* tem um valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$.

Nota-se que os resultados obtidos nos exercícios 13 e 14, utilizando-se as duas metodologias nos remeteram a resultados idênticos, como realmente deveria ocorrer.

Exemplo 15: Seja $f(x,y)=x^2+xz-y+y^2+yz+3z^2$, determine, caso haja, os extremos relativos de f.

Solução:

Como *f* é uma função de três variáveis, deveremos utilizar a **teorema 04** para determinarmos tais extremos relativos.

Inicialmente determinaremos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de *f*. Logo:

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+z$; $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+z-1$; $\frac{\partial f}{\partial z}=6z+x+y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=1$ E

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=1$

Agora deveremos determinar os pontos críticos de f, para tanto de acordo com a **definição 33** basta fazermos $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0,z_0)=0$; $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0,z_0)=0$ e $\frac{\partial}{\partial z}f(x_0,y_0,z_0)=0$, assim sendo teremos:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x & & + & z & = & 0\\ & 2y & + & z & = & 1\\ x & + \; y & + & 6z & = & 0\end{cases}\Rightarrow(x,y,z)=\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right),$$

logo f possui um único ponto crítico, o ponto: $\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)$, pois $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0,...,z_0)=0$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0,...,z_0)=0$ e $\frac{\partial}{\partial z}f(x_0,y_0,...,z_0)=0$. Aplicando este ponto crítico às derivadas parciais de segunda ordem calculadas teremos:

Para o ponto $\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\Big|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\Big|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2\Big|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0\Big|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}=1\Bigg|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}=1\Bigg|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}=1$$

De acordo com os resultados obtidos e de acordo com o **teorema 04** teremos:

Para o ponto $\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)$

$$d_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Bigg|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)}=2$$

$$d_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}\Bigg|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow d_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=4$$

$$d_3=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}\Bigg|_{\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow d_3=\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow d_3=4$$

como $d_1=2>0$ e $d_2=4>0$ e $d_3=4>0$, então pela **teorema 04** deduz-se que o ponto $\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)$ é um valor de mínimo local de *f*.

Logo a função possui um valor mínimo relativo no ponto $\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)$, como $f\left(\frac{1}{20},\frac{11}{20},-\frac{1}{10}\right)=-\frac{11}{40}$, dizemos que *f* tem um valor mínimo relativo de $-\frac{11}{40}$.

Exemplo 16: Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem tampa e com um dado volume, sendo usada a menor quantidade de material possível em sua fabricação.

Solução:

Seja $S = f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$, e V o volume da caixa, tomemos $g(x,y,z) = xyz - V$, então deveremos minimizar a função f sujeita ao vínculo $g(x,y,z) = 0$.

Determinação de F.

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$$

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda xyz - \lambda V$$

Cálculo das derivadas parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow y + 2z + \lambda yz = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow x + 2z + \lambda xz = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Rightarrow 2x + 2y + \lambda xy = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \Rightarrow xyz - V = 0 \quad (iv)$$

Subtraindo *i* e *ii*, obteremos:

$y - x + \lambda z(y - x) = 0 \Rightarrow (y - x)(1 + \lambda z) = 0$, logo: $(y - x) = 0 \Rightarrow x = y \quad (v)$ ou $1 + \lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{z}$, com $z \neq 0 \quad (vi)$, substituindo *vi* em *ii*. Temos:

$x + 2z + \lambda xz = 0 \Rightarrow x + 2z + \left(-\frac{1}{z}\right)xz = 0 \Rightarrow x + 2z - x = 0 \Rightarrow z = 0$, não satisfaz as condições:

Substituindo *v* em *iii* teremos:

$$2x + 2y + \lambda xy = 0 \Rightarrow 2x + 2x + \lambda x^2 = 0 \Rightarrow x(4 + \lambda x) = 0$$

$$(4 + \lambda x) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{x}, \quad \text{com } x \neq 0 \quad (vii)$$

Substituindo *vii* em *ii* teremos:

$$x+2z+\lambda xz=0 \Rightarrow x+2z+\left(-\frac{4}{x}\right)xz=0 \Rightarrow x+2z-4x=0 \Rightarrow z=\frac{x}{2} \quad (viii)$$

Substituindo *v* e *viii* em *iv* teremos:

$$xyz-V=0 \Rightarrow xx\frac{x}{2}-V=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2V}\,; \qquad x=y \Rightarrow y=\sqrt[3]{2V}$$ e

$$z=\frac{x}{2} \Rightarrow z=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

Logo: $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right)$, é um ponto crítico de *F*, é fácil verificar que este ponto crítico é um ponto onde *f* tem um valor de mínimo absoluto.

Exemplo 17: Ache os extremos relativos da função *f* se $f(x,y,z)=xz+yz$ e se o ponto (x,y,z) está na intersecção das superfícies $x^2+z^2=2$ e $yz=2$.

Solução:

Seja a função *F* tal que:

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=xz+yz+\lambda\left(x^2+y^2-2\right)+\mu\left(yz-2\right)$$

Determinando as derivadas parciais e igualando-as a zero teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \quad z+2\lambda x=0 \quad (i)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \quad z+\mu z=0 \quad (ii)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} \Rightarrow \quad x+y+2\lambda z+\mu y=0 \quad (iii)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \Rightarrow \quad x^2+z^2-2=0 \quad (iv)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \mu} \Rightarrow \quad yz-2=0 \quad (v)$$

De *ii* obtemos: $\mu=-1\ (vi)$ e $z=0$, como $z=0$ contradiz a equação (v) este será descartado.

De *i* temos: $\lambda=-\frac{z}{2x}\ (vii)$, aplicando *vi* e *vii* em *iii*. Teremos:

$$x+y+2\lambda z+\mu y=0 \Rightarrow x+y-2\frac{z}{2x}z-y=0 \Rightarrow x^2=z^2\ (viii)$$

Substituindo *viii* em *iv* teremos: $x^2+z^2-2=0 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

Assim sendo chegaremos ao conjunto de soluções possíveis para as cinco equações de *i* a *v*.

$$x=1 \quad y=2 \quad z=1 \quad \lambda=-\frac{1}{2} \quad \mu=-1$$

$$x=1 \quad y=-2 \quad z=-1 \quad \lambda=\frac{1}{2} \quad \mu=-1$$

$$x=-1 \quad y=2 \quad z=1 \quad \lambda=\frac{1}{2} \quad \mu=-1$$

$$x=-1 \quad y=-2 \quad z=-1 \quad \lambda=-\frac{1}{2} \quad \mu=-1$$

Do primeiro e do quarto conjuntos de soluções temos $f(x,y,z)=3$, enquanto que o resultado do segundo e terceiro conjuntos de soluções é $f(x,y,z)=1$. Logo, f tem um valor funcional máximo relativo de 3 e um valor funcional mínimo relativo de 1.

Exemplo 18: Encontre os extremos relativos da função f se $f(x,y,z)=3x+5y+9z$ sujeita a restrição de $xyz=25$

Solução:

A função Lagrangiana para o problema será:

$$L(\lambda,x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left[g(x,y,z)-k\right]$$

$$L(\lambda,x,y,z)=3x+5y+9z-\lambda\left[xyz-25\right]$$

Determinação do ponto crítico.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow g(x,y,z) = k \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = 25 \\ 3 = \lambda(yz) \\ 5 = \lambda(xz) \\ 9 = \lambda(xy) \end{cases},$$ multiplicando-se as três últimas

equações por x, y e z respectivamente teremos: $\begin{cases} xyz = 25 \\ 3x = \lambda(xyz) \\ 5y = \lambda(xyz) \\ 9z = \lambda(xyz) \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{3x}{5}$ e $z = \dfrac{x}{3}$, substituindo

na primeira equação teremos: $xyz = 25 \Rightarrow x \bullet \dfrac{3x}{5} \bullet \dfrac{x}{3} = 25 \Rightarrow x = 5$, conseqüentemente

$y = 3, z = \dfrac{5}{3}$ e $\lambda = \dfrac{3}{5}$, portanto o ponto crítico de f será o ponto $\left(5, 3, \dfrac{5}{3}\right)$ logo a Matriz hessiana da função lagrangiana será:

$$\overline{H} = \det \begin{bmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & -\lambda z & -\lambda y \\ xz & -\lambda z & 0 & -\lambda x \\ xy & -\lambda y & -\lambda x & 0 \end{bmatrix}_{\left(5,3,\frac{5}{3},\frac{3}{5}\right)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & \dfrac{25}{3} & 15 \\ 5 & 0 & -1 & -\dfrac{9}{5} \\ \dfrac{25}{3} & -1 & 0 & -3 \\ 15 & -\dfrac{9}{5} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

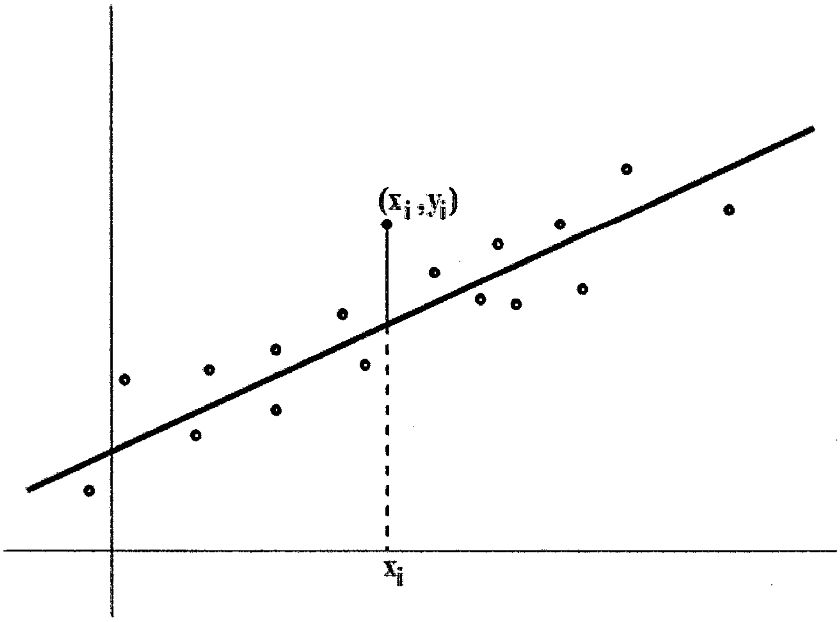
$$\overline{H_3} = \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & \dfrac{25}{3} \\ 5 & 0 & -1 \\ \dfrac{25}{3} & -1 & 0 \end{bmatrix},$$ assim teremos:

$\left[\overline{H_3}\right] = -\dfrac{250}{3} < 0$ e $\left[\overline{H_4}\right] = -675 < 0$, então a função f tem um **ponto de mínimo** no ponto $\left(5, 3, \dfrac{5}{3}\right)$.

Exemplo 19: Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos $(0,0),(-1,2),(-2,-1),(2,3),(1,2)$ e $(3,2)$

Método dos mínimos quadrados

Suponha que numa experiência realizada foram coletados os seguintes pares de dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...,(x_n,y_n)$, tais que os x_i não são todos iguais. A teoria subjacente à experiência sugere que os dados estejam ao longo de uma reta $y=ax+b$. Devido a erros experimentais os pontos não são colineares. O método dos mínimos quadrados consiste em determinar a reta que melhor se ajusta aos dados, ou seja, consiste em determinar a e b de modo que a soma dos desvios verticais seja mínima.



Dados os pontos $(x_i,y_i),(1\le i\le n)$ o ponto sobre a reta $y=ax+b$ que está mais próximo (distância vertical) dos pontos dados tem coordenadas (x_i,ax_i+b); logo o quadrado da distância vertical a estes pontos é:

$$E_i^2=((ax_i+b)-y_i)^2, 1\le i\le n$$

Minimizaremos a função $f(a,b)=E_1^2+E_2^2+...+E_n^2=\sum_{i=1}^{n}((ax_i+b)-y_i)^2$

Calculando as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ e igualando a zero, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Este é um sistema linear, que tem uma única solução que minimiza f.

Solução:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	0	0	0
2	−1	2	1	−2
3	−2	−1	4	2
4	2	3	4	6
5	1	2	1	2
6	3	2	9	6

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$
6	3	8	19	14

Logo obtemos o sistema: $\begin{cases} 19a + 3b = 14 \\ 3a + 6b = 8 \end{cases}$, que tem solução $a = \frac{4}{7}$ e $b = \frac{22}{21}$, então a reta é: $y = \frac{4x}{7} + \frac{22}{21}$.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou abordar o estudo dos máximos e mínimos de funções de várias variáveis reais, ao longo deste, buscamos elencar todos os conhecimentos essenciais ao entendimento do tema principal. Buscamos construir os conhecimentos a partir da estrutura mais simples, que no que tange o estudo em questão, são as funções de uma variável real. A partir destas definimos o que se fazia necessário ao entendimento do estudo, fazendo as adequações necessárias criando assim as bases para o estudo do tema propriamente dito.

Uma vez definidas as bases necessárias, partimos para o tema propriamente dito, abordando-o fracionado em três partes: o estudo dos extremos relativos, dos extremos absolutos e dos extremos sujeitos a uma ou mais restrições. Primamos pela apresentação destas três partes segundo duas óticas distintas; uma abordagem algébrica e outra matricial. Sempre que possível generalizamos o tema para as funções de várias variáveis nosso propósito neste trabalho, procurando uma melhor abordagem fugindo da abordagem geralmente adotada nos livros didáticos que ficam restritas as funções de duas variáveis reais.

Por fim abordamos uma série de aplicações dos conceitos descritos no corpo do trabalho trazendo a teoria para aplicação a problemas cotidianos e acadêmicos.

Neste trabalho esquivamo-nos de apresentar as demonstrações dos teoremas aqui apresentados, pois estes são de fácil acesso através dos livros didáticos e também dado o nível de aprofundamento cobrado neste trabalho, porém este poderá ser um passo seguinte na nossa longa caminhada de caça ao tesouro do saber. Entretanto todos os teoremas citados tem a indicação de onde o leitor que deseje um aprofundamento pode ter acesso a tais demonstrações.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOSCH, Josep Freixas. **Las Funciones de Varias Variables.** UOC La Universidad Virtual, 2005, Disponível em: http://www.scribd.com/doc3933987/funciones-de-varias-variables. Acesso em 10 de fevereiro de 2009.

DA SILVA, Wilson C. Canesin. **Funções de Várias Variáveis.** Universidade Brás Cubas, 2005, Disponível em: http://www2.brazcubas.br/professores1/arquivos14_luizhenu/MatemaC-Notas-Aulas02-Canesin. Acesso em 08 de fevereiro de 2009.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Vol. 2, Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3ª ed., São Paulo: Harbra, 1994. Título original: *The Calculus with Analitic Geometry, 6th edition.*

THOMAS, George B. **Cálculo,** vol. 2. Ed. Addison Wesley, 2003.

VILCHES, Maurício A. e CORRÊA, Maria Luiza. **Cálculo.** vol. II. Rio de Janeiro - RJ: IME-UERJ, 1999, Disponível em: http://www.easy-share.com/c1701289270. Acesso em 08 de fevereiro de 2009.

VILLENA, Moisés. **Extremos de funciones escalares.** 2007, Disponível em: http://www.scribd.com/ doc9112094/Extremos-de-Funciones-de-Varias-Variables. Acesso em 12 de fevereiro de 2009.