ORISVALDO GUSTAVO DE SOUSA

ASPECTOS PRÁTICOS DA PROGRAMAÇÂO LINEAR

AÇAILÂNDIA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA

ASPECTOS PRÁTICOS DA PROGRAMAÇÂO LINEAR

Proposta de Tese Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Especialista em Matemática

ORISVALDO GUSTAVO DE SOUSA

Açailândia, Junho de 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Aspectos Práticos da Programação Linear".

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do *título* de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 01/07/2009

Dr. Mário César Zambaldi (CFM/UFSC - Orientador)
Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Examinador)
Dr. Fermin S. V. Bazán (CFM/UFSC – Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009.

Aos meus pais, esposa, filho e amigos, pelo apoio e ajuda incondicional.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o qual me deu vida e força para vencer mais esta jornada e realizar meu grande sonho.

Aos meus pais que fizeram de tudo para me educar para a vida, ensinando-me a ser um homem de caráter.

A todos os meus colegas pós graduandos de Matemática pela força que me proporcionaram para que pudesse vencer mais essa jornada.

Aos meus irmãos que sempre estiveram comigo, incentivando-me nesta busca incessante pelo conhecimento.

Ao Doutor Mário César Zambaldi por sua orientação e colaboração na realização desse trabalho.

Agradeço ainda a todos aqueles que, de alguma forma tornaram possível a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada á UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de especialista em Matemática.

ASPECTOS PRÁTICOS DA PROGRAMAÇÂO LINEAR

Orisvaldo Gustavo de Sousa.

Junho / 2009

Orientador: Mário César Zambaldi, Dr..
Palavras-chave: Conceitos, procedimentos, aplicações.
Número de Páginas: 36

Resumo

Atualmente as técnicas de Pesquisa Operacional já se encontram suficientemente desenvolvidas para resolver problemas da vida real. Tais técnicas são aplicadas em problemas de diversas áreas, que em função de suas proporções e complexidades, não possibilitam mais sua administração de forma eficaz sem auxílio de alguma ferramenta para otimizar sua resolução. Neste trabalho é relatado as definições de Programação Linear bem como suas limitações, a elaboração dos procedimentos para resolver um problema de uma empresa de fabricação de produtos para obter o maior lucro possível (ou o lucro máximo ou ainda maximizar o lucro), aplicando-se uma técnica da Pesquisa Operacional: a Programação Linear. Para a formulação matemática do problema foi observado as suas limitações e restrições, bem como a utilização do método gráfico para a resolução do mesmo. Em seguida estudamos a forma padrão do método simplex, suas restrições e a função objetiva bem como sua aplicabilidade na resolução do problema na forma matemática e os possíveis procedimentos de resolução do mesmo. Ainda foi estudado a utilização do Microsoft Excel e os procedimentos utilizados na resolução de problemas de programação linear.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

1. Introdução

Programação Linear (PL) é um tema da Pesquisa Operacional (PO) aplicada a solução de problemas que objetivam a otimização de um sistema em estudo. A otimização refere a maximização de parâmetros, tais como: lucro,vendas, uso efetivo de uma área, nível de produção e uso de um determinado recurso, ou a minimização de parâmetros, tais como: custos de produção, uso de um determinado recurso de alto valor monetário e emprego de mão-de-obra.

Os modelos de PL são implementados por meio da elaboração de sistemas lineares constituídos de um conjunto de equações e inequações que descrevem as restrições do sistema real em estudo, e uma função objetivo que expressa o parâmetro a ser maximizado ou minimizado, conforme supracitado. Para a resolução dos mesmos aplicam-se ferramentas tais como o método gráfico, o método simplex e o uso do Microsoft Excel.

2. O que é Programação Linear?

A Programação Linear (PL) é um conjunto de técnicas que se destinam à resolução problemas de otimização, ou seja, destina-se, de uma forma geral, à diminuição dos custos e ao aumento dos lucros, sendo linear tanto a função objetivo como as restrições. Deste modo, o termo "programação" significa "planejamento" e "linear" deixa antever que todas as expressões matemáticas utilizadas são funções lineares.

A Programação Linear tem uma vasta aplicação prática, destinando-se à resolução de problemas no campo dos sistemas econômicos, de produção industrial ou das intervenções militares. Por exemplo: no planejamento da distribuição e produção de produtos; no planejamento a curto prazo em aproveitamento hidroelétrico; nas decisões ligadas às políticas microeconômicas e macroeconômicas de governo dos países; na utilização como sub-rotinas para suporte de tarefas específicas em códigos de programação não linear; formulação de alimentos, rações e adubos; blindagem de ligas metálicas e petróleo; transporte; localização industrial; carteira de ações (investimento); alocação de recursos em fábricas, fazendas, escritórios, etc.; designação de pessoas e tarefas (composição de tabelas de horários) e corte de barras e chapas.

A Programação Linear visa fundamentalmente encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A grande aplicabilidade e simplicidade que a caracterizam devem-se à linearidade do modelo.

A tarefa da Programação Linear consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada função objetivo, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades que recebem o nome de restrições do modelo. As restrições representam normalmente limitações de recursos disponíveis (capitais, mão-de-obra, recursos minerais ou fatores de produção) ou, então exigências e condições que devem ser cumpridas no problema. Essas restrições do modelo determinam uma região à qual damos o nome de "Conjunto das Soluções Viáveis". A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que melhor maximiza ou minimiza a função objetivo denomina-se "Solução Ótima".

O objetivo da programação linear consiste na determinação da solução ótima.

Basicamente ao formular um modelo linear o analista deve seguir sempre as seguintes fases:

- Identificação das variáveis de decisão
- Identificação da função objetivo
- Identificação das restrições
- Verificação dos axiomas de linearidade
- Formulação matemática

Em geral são necessários dois passos para a resolução de um problema de programação linear, o primeiro é a modelagem do problema e o segundo é a obtenção da solução do modelo por meio de um método numérico. Como os problemas podem envolver muitas variáveis e equações, o uso do computador é imprescindível.

Não existem técnicas definitivas para obtenção do modelo mais adequado para um certo problema, capazes de permitir uma regra geral para o estabelecimento do modelo de um problema. Por esse motivo, é importante termos experiência e capacidade de análise e síntese para modelar um problema prático adequadamente.

A seguir apresentamos quatro modelos clássicos de programação linear, são eles:

1. Problema da Análise das Atividades: esse modelo consiste em achar qual a quantidade de produtos a ser fabricado, obedecendo algumas restrições quanto à matéria prima, mão-de-obra e tempo de produção para que a empresa maximize os lucros. Para que maximize a função linear $x_1, x_2, ..., x_n$ (função objetiva), devemos saber que essas incógnitas devem satisfazer algumas restrições:

- Função objetivo:
- **Z=maximiza** $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$
- Restrições: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_n$ e que $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; .....x_n \geq 0$

- Formula compacta: maximizar $Z = \sum_{j-1}^{n} c_i x_j$
- Forma compacta de restrições: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ (i= 1,2,....,m)

Onde:

$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$

Podemos associar este modelo a uma empresa que tem m recursos disponíveis para a realização de n atividades. Suponha-se que as atividades representem a fabricação de produtos.

Tem-se, então, para j = 1,2,..,n e i = 1,2,....,m,

- Parâmetros:
  - b_i : é quantidade do recurso i disponível para as n atividades. ($b_i \geq 0$)
  - c_j : lucro unitário do produto j.
  - a_{ij} : quantidade de recursos i consumida na produção de uma unidade do produto j.

- Variáveis:

  - x_j (nível de produção da atividade de j) . As variáveis x_j (j = 1,2,...n) são as incógnitas do problema.

A função Objetivo a ser maximizada representa o lucro total da empresa nessas n atividades, as m restrições informam que o gasto total do recurso i nas n atividades tem de ser menor ou no máximo igual às quantidades de b_i disponível daquele recurso. As restrições $x_j \geq 0 \quad (j=1,2,....,n)$ eliminam a possibilidade de níveis negativos para as diversas atividades.

Temos a notação matricial deste modelo:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix} C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_m \end{bmatrix}$$

Z =Máx cx

Sujeito a :

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

2. Problema de Mistura ou Combinações: esse modelo consiste em achar qual a combinação que resultará no mínimo de material por unidades do produto final, um exemplo simples é o da dieta:

Função objetivo: Z = minimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

- Restrições: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$ e que $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; ... x_n \geq 0$

- Forma compacta: minimizar **Z** = $\sum_{j=1}^{n} x_j$

- Forma compacta de restrições: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j \geq b_i \; (i = 1,2,.....,m)$.

Onde, $x_j \geq 0 \; (j = 1,2,.....,n)$

Podemos associar este modelo a uma pessoa que deseja minimizar custos da sua dieta diária. As atividades representam o consumo dos alimentos que poderão entrar na dieta, e os recursos são as vitaminas que não podem deixar de ser consumidas durante a dieta.

Tem-se, então, para j = 1,2,..,n e i = 1,2,....,m,

- Variáveis:

  - x_j : quantidade do alimento j na dieta. Os x_j (j = 1,2,...n) são as incógnitas do problema.

- Parâmetros:

  - b_i : é quantidade mínima da vitamina i que deve ser obtida dos n alimentos.
  - c_j : custo unitário do alimento j.
  - a_{ij} : quantidade da vitamina i fornecida por uma unidade de alimento j.

A função objetivo a ser minimizada representa o custo total da dieta a ser realizada com os n alimentos, as restrições indicam que o total da vitamina i obtida dos n alimentos tem de ser maior ou igual que a quantidade mínima b_i daquela vitamina.

Em notação matricial teremos:

Z = Mìn: cx

sujeito a :

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

3. Problema do Transporte: esse modelo tem como objetivo minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n centros consumidores-destinos, a partir de m centros fornecedores-origens.

4. Problema de Alimentação de Máquina: esse modelo consiste em achar qual a melhor maneira de se processar uma série através de um grupo de máquina, obedecendo a capacidade da mesma além de outras restrições, afim de que se obtenha uma série de ordens que resultarão no custo mínimo.

A resolução dos problemas de programação linear na sua grande maioria se faz algebricamente, pois graficamente só conseguimos determinar quando temos apenas duas ou no máximo três variáveis. Observe o exemplo:

Exemplos de redução de um modelo de programação linear para a forma padrão:

Ocorrência de desigualdades:

$$\begin{array}{ll}
Máx = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 & A \\
\text{sujeita } a: & \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5 & B \\
4x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0 & C \\
\quad -2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7 & D \\
3x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 = 8 & E \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0 \; e \; x_4 \; qualquer & F
\end{array}$$

- A; na primeira linha temos função objetiva que no caso da forma padrão deve ser de minimizar a função e não maximizar a função, então terá que substituir a mesma trocando então o sinal.
- B; na segunda linha que chamamos pela letra A temos uma desigualdade, como já vimos neste caso temos que acrescentar uma variável de folga neste caso com sinal positivo, pois o sinal da desigualdade é maior ou igual.
- C; na terceira linha também temos uma desigualdade, porém a variável de folga a ser acrescentada será negativa por causa do sinal menor ou igual
- D; a primeira coisa a fazer na terceira linha é tirar o valor negativo da restrição, para isso vamos multiplicar ambos os lados por –1,

depois vamos acrescentar uma variável de folga positiva por causa do sinal maior ou igual.

- E; na quinta linha temos uma igualdade, porém como vamos explicar mais adiante temos que tomar cuidado com as condições do problema.
- F; as condições estão me avisando que os valores de $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0 \; e \; x_4$ qualquer, então podemos verificar que temos problema com a variável $x_3 \leq 0 \; e \; x_4 \; qualquer$, que teremos então colocar uma variável simétrica e uma variável livre Ficamos agora com o sistema da seguinte forma:

$$
\begin{array}{llllllll}
Máx = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 & & & & & & & A \\
sujeito a: & & & & & & & \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 5 & & & & & & & B \\
4x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - x_5 \quad + x_7 = 0 & & & & & & & C \\
\quad 2x_3 - x_4 - 2x_5 \quad + x_8 = 7 & & & & & & & D \\
3x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 \quad = 8 & & & & & & & E \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0, x_3 \leq 0 \; e \; x_4 \forall & & & & & & & F
\end{array}
$$

O passo seguinte será de trocarmos as variáveis que temos problema das condições para o da forma padrão e vamos ficar com o sistema da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
Min = -2x_1 - x_2 - x'_3 - 3x'_4 + 3x''_4 + x_5 & A \\
x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - x_6 \quad = 5 & B \\
4x_1 \quad - x'_3 - 2x'_4 + 2x''_4 - x_5 \quad + x_7 \quad = 0 & C \\
\quad - 2x'_3 - x'_4 + x''_4 - 2x_5 \quad + x_8 = 7 & D \\
3x_1 + x_2 \quad - x'_4 + x''_4 + x_5 \quad = 8 & E \\
x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x'_3, x'_4, x''_4 \geq 0 & F \\
x_3 = -x'_3, x_4 = x'_4 - x''_4 \; e \; Q(x) = -Q'(x) &
\end{array}
$$

Colocando o sistema da forma matricial temos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3. Limitações da programação linear

Estudando os modelos de programação linear precisamos ressalvar sobre as suas hipóteses e limitações.

- Coeficiente Constante: Nos modelos de programação linear os coeficientes são considerados como constantes conhecidas, o que na prática, esses valores podem não ser constantes e sim variáveis. Para esses casos é necessária a análise de sensibilidade do modelo, que permite fornecer os intervalos desses coeficientes para os quais a solução ótima continua a mesma.

- Divisibilidade: As soluções ótimas dos modelos de programação linear poderão apresentar valores não inteiros o que numa indústria não seria real. Uma opção seria o arredondamento, mas poderia causar erros grosseiros quando a demanda é pequena, logo para minimizar estes erros temos que ter o cuidado de ao construir um modelo impor que o mesmo tenha sua programação linear inteira que se utiliza de outras técnicas não especificadas aqui.

- Proporcionalidade: nos modelos de programação linear assume-se para a produção de cada produto, a eficiência aumenta ligeiramente com taxas elevadas de produção, aumentando desta forma, o lucro marginal unitário e diminuindo a capacidade de produção por unidade de aumento na taxa de produção. Apesar disso o Departamento de Pesquisa Operacional conclui que, para fins práticos, a proporcionalidade poderia ser suposta, sem distorções Aditividade: esta condição existe em todo o modelo de programação linear e consiste em considerar as atividades do modelo como entidades totalmente independentes o que não permite que haja uma interligação entre elas.

Apesar de todas essas limitações a programação linear ainda é a ferramenta mais utilizada na resolução de problemas reais que envolvam formulação de modelos matemáticos, não só por sua simplicidade, mas como também ao fato do modelo sempre poder ser resolvido com as técnicas anteriormente explicadas. Porém não podemos deixar de explicar que a solução destes problemas na sua grande maioria necessita do auxilio de computadores exatamente pela quantidade de variáveis e de equações a serem resolvidas.

4. Um exemplo de Programação Linear pelo método gráfico.

Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina (a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra). Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina (a tecnologia é intensiva em capital). Sendo x_1 e x_2 as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são $ 4 e $1 respectivamente, quanto deve a empresa fabricar de cada produto para obter o maior lucro possível (ou o lucro máximo ou ainda maximizar o lucro) ?

Transformando os dados em expressões matemáticas a função lucro.

Admitindo que não há economia de escala mas quantidades fabricadas quanto ao lucro, a função lucro é uma função linear de x_1 e x_2 ou seja:

$L = 4\,x_1 + x_2$, esse lucro deve ser maximizado por uma escolha de x_1 e x_2

$$\max_{x_1,\, x_2} \quad L = 4\,x_1 + x_2$$

Se o problema parasse aqui o lucro seria ilimitado. Porém, existem recursos limitados.

As Restrições:

O que limita as quantidades fabricadas aqui são as horas-homem e horas-máquina disponíveis. Assim, as quantidades fabricadas e as horas utilizadas de cada recursos não podem ultrapassar as quantidades de recursos disponíveis ou seja:

H-H $9x_1 + x_2 \leq 18$ e

H-M $3x_1 + x_2 \leq 12$

Assim, o lucro só poderá crescer até esses limites.

O problema é então:

$$\max_{x_1, x_2} L = 4x_1 + x_2$$

sujeito a

horas-homem $9x_1 + x_2 \leq 18$

horas-máquina $3x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Como o problema possui duas variáveis e as funções e inequações são lineares, podemos obter uma solução fácil graficamente.

Solução gráfica

Primeiro precisamos saber, dado as restrições, quais as possíveis combinações dos produtos que se pode fabricar. Isso é, precisamos verificar qual ou quais as áreas que satisfazem as restrições, pois a empresa só pode dispor dos recursos "disponíveis".

H-H

$9x_1 + x_2 \leq 18$

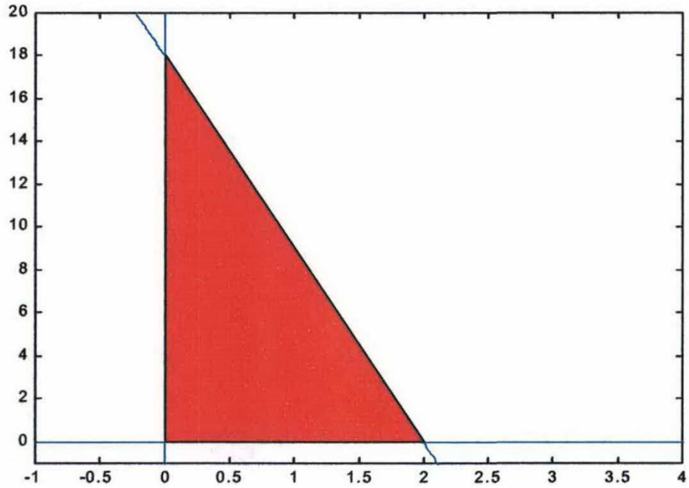

Gráfico 1: área das restrições

H-M

$3x_1 + x_2 \leq 12$

Como a empresa não pode violar nenhuma das restrições, precisamos saber a área onde as duas restrições são válidas, isso é, a interseção das duas regiões de restrição, chamada de conjunto de possibilidades ou conjunto viável.

Conjunto Viável

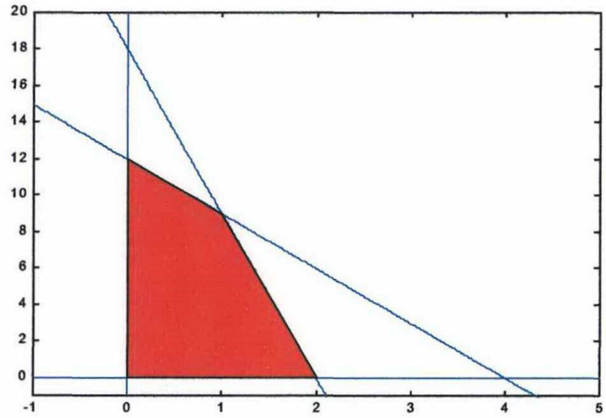

Gráfico 2: interseção das duas regiões de restrição

Resta agora maximizar o Lucro.

$L = 4\ x_1 + x_2$

Ora, o lucro é uma constante para cada uma das combinações da x_1 e x_2. Assim, lucros diferentes geram retas paralelas onde o lucro é constante em cada reta ou seja, as retas são iso-lucros.

Gráfico 3: retas iso-lucros

Então é só traçar iso-lucros no gráfico do conjunto viável e obter a iso-lucro de maior lucro que seja possível de se fabricar das restrições.

Assim:

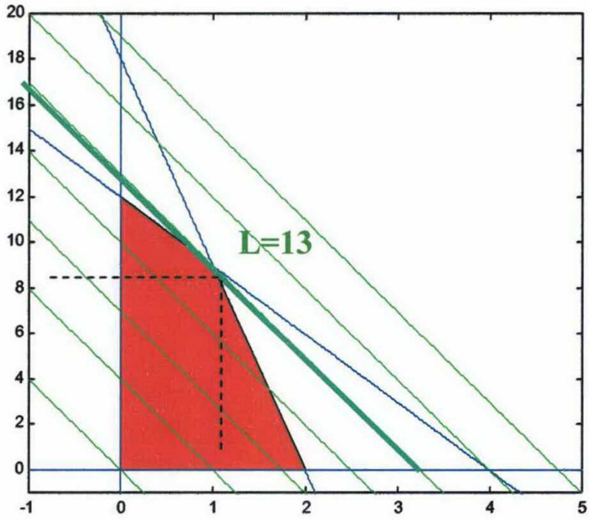

Gráfico 4: iso-lucro de maior lucro possível

Logo, o lucro máximo é 13 e deve-se fabricar $x_1 = 1$ e $x_2 = 9$ para obtê-lo. Esses valores são fixados diretamente do gráfico. Veja o que acontece com as restrições nesses valores, não há sobras.

5. A forma padrão do método simplex

A grande maioria os problemas de programação linear estão relacionados com ambientes industriais onde a quantidade de variáveis é bem grande o que dificulta a resolução algébrica. Por isso um dos grandes recursos usados é o Método Simplex.

Para trabalharmos com o método simplex temos que transformar o modelo matemático a ser tratado em uma forma padrão. Algumas desigualdades devam ser transformadas em igualdades. Existem algumas regras básicas para a transformação da resolução de programação linear para a forma padrão (a que o método simplex aceita). Dizemos então que um modelo de programação linear está na forma-padrão quando ele respeita as seguintes condições;

- As restrições de não negatividade

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad onde \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ... m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

- Função objetivo

$$Q(x) = Mín \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Porém nem sempre encontramos o modelo com esta forma padrão e quando isso ocorre temos que usar alguns incrementos ou artifícios para torná-lo um modelo padrão para o método simplex.

Seguem algumas formas de redução para a forma padrão:

- Ocorrência de desigualdade: qualquer desigualdade ou inequação linear pode ser transformada em uma equação se subtrairmos ou adicionamos variáveis positivas ou negativas denominadas variáveis de folga.
- Ocorrência do lado direito ser negativo: basta multiplicarmos toda a ambos os lados por menos um.
- Ocorrência de não restrição da variável: ocorre quando a variável pode assumir qualquer valor positivo, negativo ou nulo, neste caso temos que substituir a variável livre por duas variáveis positivas para mantermos a condição de não negatividade
- Ocorrência de variável não positiva: caso o modelo seja formulado com uma variável negativa basta substituí-la por sua simétrica na equação do problema.

- Ocorrência de a função objetivo ser de maximização: basta então substituir a função objetivo dada pela sua simétrica, passando a minimizar esta última.

5.1. O Método Simplex

O método simplex é um algoritmo criado para se obter a solução algebricamente. Um algoritmo é um conjunto de regras que devem ser seguidas passo a passo para se obter, no final, o resultado desejado.

A idéia é a seguinte:

Dado o problema na forma matemática

Max $L = 4x_1 + x_2$

Forma x_1, x_2

Padrão

s. a $9x_1 + x_2 \leq 18$

$3x_1 + x_2 \leq 12$

Precisamos arranjá-lo de tal forma que possamos resolvê-lo.

Bem, se as desigualdades fossem igualdades, as restrições seriam um conjunto de equações lineares e essa nós sabemos resolver.

Consegue-se isso acrescentando a cada restrição uma variável a mais, essas novas variáveis são chamadas de variáveis de folga, para restrições do tipo $\leq$. (Existem também as chamadas variáveis de excesso, para restrições do tipo $\geq$, mais isso é outra história).

Assim podemos escrever:

(1) $9x_1 + x_2 + x_3 = 18$ pois, caso $9x_1 + x_2$ não seja igual a 18, x_3 está lá para garantir a igualdade.

(2) $3x_1 + x_2 + x_4 = 12$ pois, caso $3x_1 + x_2$ não seja igual a 12, x_4 está lá para garantir a igualdade.

Essas novas variáveis, também devem ser maiores ou igual a zero para garantir a exigência das restrições.

Obs: Caso a restrição fosse, por exemplo: $9x_1 + x_2 \geq 18$ a introdução seria $9x_1 + x_2 - x_3 = 18$, com $x_3 \geq 0$. Ou multiplicar-se-ia a restrição por menos 1 transformando-a numa restrição de desigualdade $\leq$.

Só nos resta o lucro. O lucro é uma equação e não uma inequação, logo não precisamos introduzir variáveis.

O sistema linear fica assim:

(l_0) $L \quad -4x_1 - x_2 \qquad\qquad = 0$

(l_1) $\qquad 9x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 18$

(l_2) $\qquad 3x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 12$

Feito isso podemos proceder com o algoritmo simplex.

As etapas são:

1. Ache uma solução viável para o sistema linear. (A solução viável mais fácil no caso é $x_1= 0$, $x_2= 0$, $x_3 = 18$, $x_4 = 12$; chamada de solução trivial). Definir as variáveis usadas na solução como VB e as não usadas como VNB. VB = Variável Básica e VNB = Variáveis não Básicas.
2. Identifique a variável que tem o maior impacto na função objetivo. Isso é, a que tem o coeficiente mais negativo (devido à nova arrumação feita na função objetivo) na equação correspondente a função objetiva. (No exemplo é x_1, com o coeficiente - 4)
3. Aumentar o valor da variável (de maior impacto) identificada no item 2 em todas as restrições até que esse aumento seja limitado por algum recurso. (No exemplo podemos aumentar x_1 até 2 em l_1 e até 4 em l_2. Assim, x_1 deve ser igual a 2, pois um valor maior do que 2 viola l_2).
4. Identificar em que linha esse valor limite ocorre. (No caso em l_1)
5. Identificar a variável básica com a qual a variável identificada no item 2 pode trocar quantidades. (No exemplo x_3)
6. Fazer a variável básica igual a zero.
7. Definir a variável identificada no item 2 como variável básica entrando (VBE) e definir a variável básica no item 5 como variável básica saindo (VBS). (x_1 e VBE e x_3 e VBS)
8. Fazer o coeficiente de VBE igual a 1 na linha da VBS.(No exemplo $9x_1 + x_2 + x_3 =18$ torna-se: $x_1 +1/9x_2 + 1/9x_3 = 2$.
9. Zerar os coeficientes de VBE nas demais equações do sistema através de operações elementares e apresentar o novo sistema.
10. Redefinir como variável básica todas as variáveis básicas anteriores menos a VBS mais a VBE e as não-básicas como as VNB Anteriores mais a VBS menos a

VBE e identificar o lucro e os valores das variáveis ($x_1 = 2$; $x_4 = 6$; $x_2 = 0$; $x_3=0$; $L=8$).

11. Existe algum coeficiente negativo na equação da função objetivo(l_0) ? Se sim, vá para o passo 2, se não, pare, essa é a solução viável ótima.

Dado o algoritmo vamos aplicá-lo ao exemplo.

Passo 1:

$(l_0)\quad L \quad -4x_1 - x_2 = 0$

$(l_1)\quad 9x_1 + x_2 + x_3 = 18$

$(l_2)\quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 12$

A solução viável trivial (mais fácil) é: $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 18$; $x_4 = 12$; $L = 0$. As variáveis x_1 e x_2 não básicas e as variáveis x_3 e x_4 são básicas.

Passo 2: x_1 com o coeficiente -4.

Passo 3: x_1 pode ir até 2.

Passo 4: ocorre em l_1.

Passo 5: x_3.

Passo 6: $x_3 = 0$.

Passo 7: x_1 => VBE, x_3 => VBS

Passo 8:

$(l_0)\quad L \quad -4x_1 - x_2 = 0$

$(l'_1)\quad x_1 + 1/9x_2 + 1/9x_3 = 2$

$(l_2)\quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 12$

Passo 9: Multiplicando l'_1 por 4 e somando a l_0 obtemos l'_0, Multiplicando l'_1 por -3 e somando a l_2 obtemos l'_2

$(l'_0)\quad L \quad -5/9x_2 + 4/9x_3 = 8$

$(l'_1)\quad x_1 + 1/9x_2 + 1/9x_3 = 2$

$(l'_2)\quad 2/3x_2 - 1/3x_3 + x_4 = 6$

Passo 10: x_1 e x_4 são básicas, x_2 e x_3 são não básicas

Passo 11: Existe

Passo 2: x_2 única.

Passo 3: em l'_1 x_2 pode ir até 18, Em l'_2 x_2 pode ir até 9 ; $x_2 = 9$

Passo 4: ocorre em l'_2.

Passo 5: x_4.

Passo 6: $x_4 = 0$.

Passo 7: x_2 => VBE, x_4 => VBS

Passo 8:

$$(l'_0) \quad L \quad - 5/9x_2 + 4/9x_3 = 8$$

$$(l'_1) \quad x_1 + 1/9x_2 + 1/9x_3 = 2$$

$$(l_2) \quad x_2 - 1/2x_3 + 3/2x_4 = 9$$

Passo 9: $-1/9l''_2 + l'_1 = l''_1$

$-1/5l''_2 + l'_0 = l''_0$

$$L \quad + 3/18x_3 + 15/18x_4 = 13$$

$$x_1 \quad + 3/18x_3 - 1/6x_4 = 1$$

$$x_2 \quad - 1/3\,x_3 + 3/2x_4 = 9$$

Passo 10: x_1 e x_2 são básicas.

x_3 e x_4 são não básicas.

Passo 11: Não. A solução é ótima

$L = 13$; $x_1 = 1$; $x_2 = 9$; $x_3 = x_4 = 0$

Quadro final da solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
L	0	0	1/6	5/6	13
R_1	1	0	1/6	-1/6	1
R_2	0	1	-1/2	3/2	9

Tabela 1: solução final

5.2 O tablô simplex

Uma forma interessante de resolver um PPL pelo método simplex é a utilização do tablô simplex. Trata-se de uma tabela que vai sento atualizada iterativamente, de forma que temos, em toda a iteração, as soluções viáveis do método simplex.

Resumidamente, construimos o tablô inicial com os dados do problema:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & 0 \end{array}\right]$$

Estabelecendo as partições básicas e não básicas no vetor de solução, ou seja, nas colunas da matrix: A = [B, N], para todos os vetores envolvidos temos:

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c} B & N & b \\ \hline c_B & c_N & 0 \end{array}\right]$$

Agora temos que conduzir o tabló de forma que apareçam o valor das variáveis básicas na última coluna. Para isso multiplicamos o bloco de m linhas pela inversa da matriz B, obetndo:

$$T' = \left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline c_B & c_N & 0 \end{array}\right]$$

Agora temos, temos que deixar a função objetivo em termos das variáveis não básicas para identificar se estamos no ótimo ou ainda, que variável deve entrar na base. Além disso é interessante ter o valor da função objetivo atualizada. Para isso, multiplicamos cada uma das m primeiras linhas do tabló por cada valor do vertor de custos básicos e somamos à última linha, resultando no seguinte tabló:

$$T'' = \left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N - c_B B^{-1}N & -c_B B^{-1}b \end{array}\right]$$

Assim podemos identificar as facilmente as váriáveis básicas, seus valores atuais, o valor da função objetivo, assim como estabelecer se estamos ou não na solução para interromper ou continuar a busca.

A Tabela 1 é um exemplo do último tabló T', no qual identificamos todos os elementos do PPL.

6. Obtenção da solução com o recurso do excel

A utilização do Microsoft Excel permite-nos de uma forma muito simples e rápida obter soluções de problemas de programação linear, recorrendo ao módulo de otimização Solver.

Em geral o módulo de Solver não está disponível no arranque do Excel. Para o ativar, seleciona-se o módulo Solver no menu Ferramentas - Suplementos. Este módulo tem capacidade de resolver problemas de otimização usando formas alternativas à resolução via método simplex.

A forma como se organiza a informação na folha de Excel deve respeitar certas regras, por forma ao usuário ser capaz de interpretar corretamente o problema e obter a solução ótima.

Para ocorrer o módulo Solver deve-se selecionar a função solver no menu Ferramentas.

Assim, e para que a exposição seja mais simples indica-se na figura seguinte uma forma possível de organizar a informação e a forma de introdução dos dados no módulo solver.

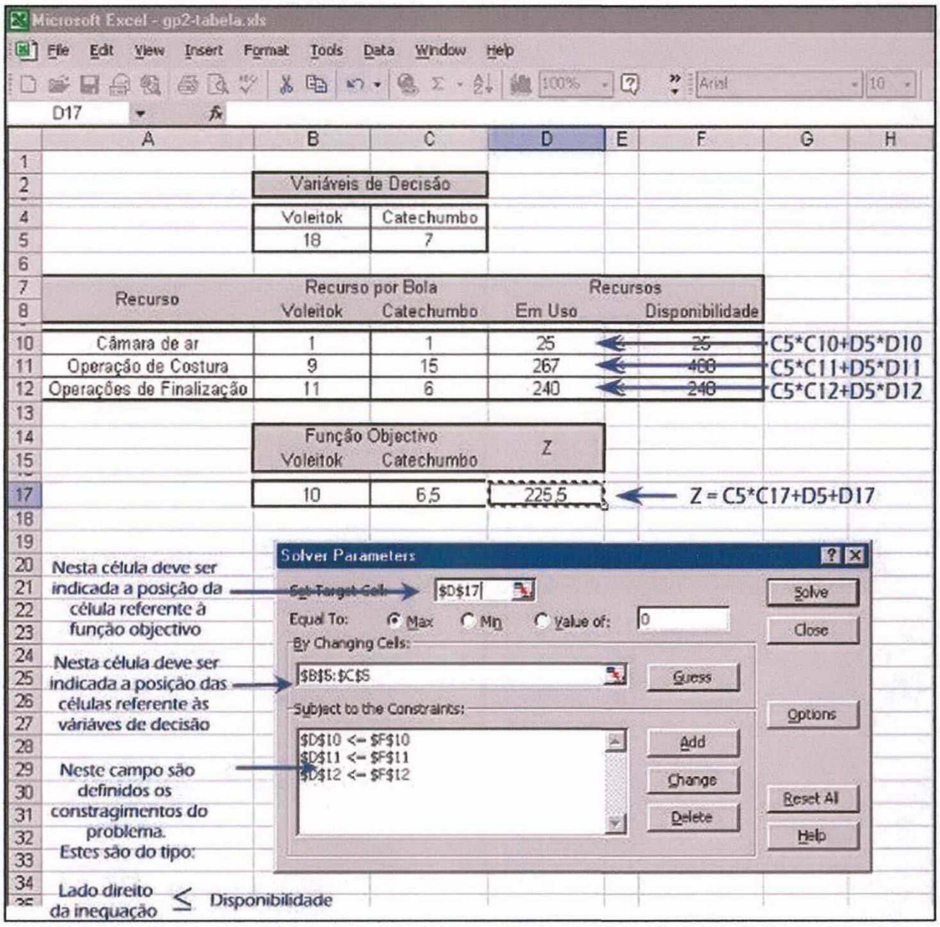

Figura 1: introdução dos dados no módulo solver.

Devem existir células indexadas aos valores das variáveis de decisão. Assim, as células onde se definem expressões, tais como a função objetivo, devem estar relacionadas com as primeiras, por forma a que exista uma atualização desses valores em resultado de alterações nos valores das variáveis de decisão. Veja-se isto mesmo na célula D17.

Na janela Parâmetros do Solver definem-se os parâmetros para o Solver através de três campos fundamentais:

Células variáveis : Neste campo devem ser indicadas as células referentes às variáveis de decisão. No exemplo apresentado as células B5 e C5 definem, respectivamente, o número de bolas Voleitok e Catechumbo a produzir.

Definir célula de destino: Neste campo deve ser indicada a célula D17 onde se definiu a expressão que define a função objetivo. Como se verifica, esta função foi definida à custa das células B5 e C5.

Submeter as restrições: Aqui definem-se as condições de validade do problema – Restrições. Para tal devem ser definidas em células separadas a expressão que relaciona o consumo do recurso com as variáveis de decisão e a quantidade existente desse recurso.

Após formular o problema no Excel, está-se em condições de o resolver, carregando no botão Solve. No entanto, para facilitar o desempenho do algoritmo otimizador devem-se ajustar um conjunto de opções que pode ser visualizada carregando em Options. Aqui se ajustam entre outros parâmetros, a convergência, o tipo de modelo e a condição de não negatividade da solução, em um menu com a seguinte configuração:

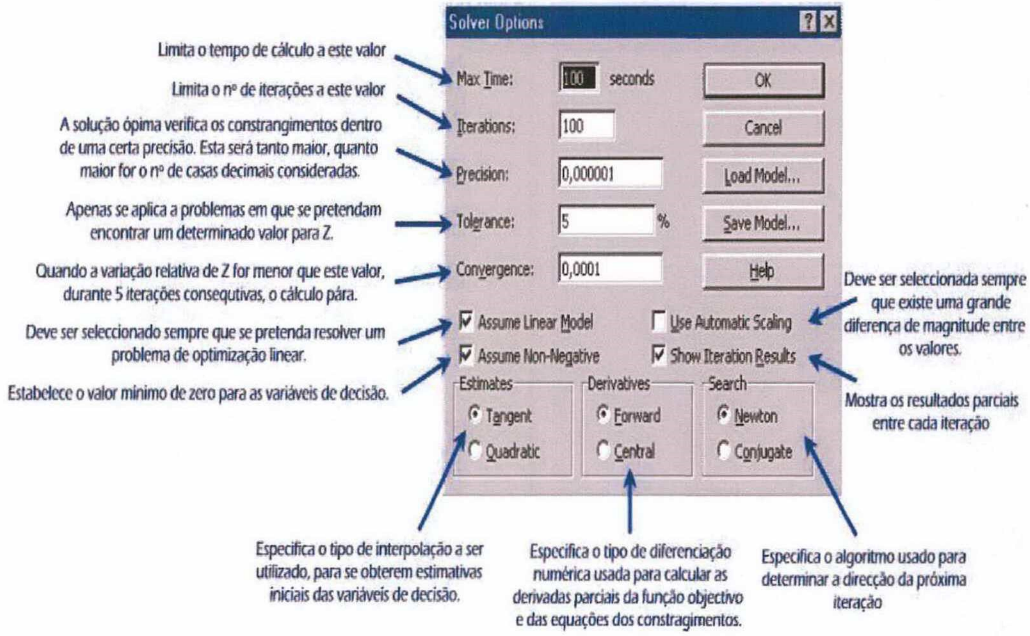

Figura 2: Opções de configuração do solver.

No final da execução do módulo de otimização surge uma janela onde se define se a solução encontrada pelo solver se mantém na folha de cálculo (neste momento apenas é possível visualizá-la) e pedir três tipos de relatório. A figura seguinte apresenta esta janela:

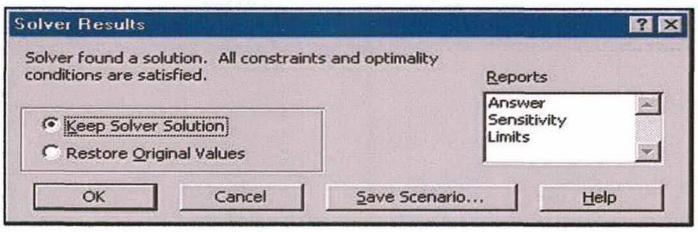

Figura 3: Janela de definição ou visualização de resultados.

No Relatório de Respostas são apresentados os resultados referentes às variáveis de decisão, função objetivo e quantidade de recursos em uso. Os Relatórios de Sensibilidade são relatórios de sensibilidade aos coeficientes da função objetivo, às disponibilidades dos recursos e do preço sombra na compra ou venda de recursos. Abaixo apresentam-se estes relatórios.

Microsoft Excel 10.0 Answer Report
Worksheet: [gp2-tabela.xls]Sheet2
Report Created: 24-05-2001 0:15:52

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$17	Z	0	225,5

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$5	Voleitok	0	18
$C$5	Catechumbo	0	7

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$10	Câmara de ar Em Uso	25	$D$10<=$F$10	Binding	0
$D$11	Operação de Costura Em Uso	337	$D$11<=$F$11	Not Binding	143
$D$12	Operações de Finalização Em Uso	240	$D$12<=$F$12	Binding	0

Figura 4: Relatório de Respostas.

Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report
Worksheet: [gp2-tabela.xls]Sheet2
Report Created: 24-05-2001 0:15:52

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Voleitok	18	0	10	1,916666667	3,5
$C$5	Catechumbo	7	0	6,5	3,5	1,045454545

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$10	Câmara de ar Em Uso	25	2,3	25	3,235294118	3,181818182
$D$11	Operação de Costura Em Uso	337	0	480	1E+30	143
$D$12	Operações de Finalização Em Uso	240	0,7	240	35	44,6875

Figura 5: Relatórios de Sensibilidade.

Como era de esperar os resultados obtidos são iguais aos calculados pelo método gráfico.

Portanto, a utilização do Excel na resolução de problemas de programação linear não oferece grandes dificuldades, sendo na realidade bem simples de aplicar. A verdadeira vantagem deste módulo é resolver problemas com um maior número de variáveis de decisão, pois estes não são possíveis de resolver através do método gráfico. A grande vantagem do método do Excel Solver se deve aos relatórios apresentados anteriormente, embora os modelos simulados sejam pequenos. Para a utilização de modelos com um grande número de variáveis, programas mais elaborados e de alto desempenho devem ser utilizados, como por exemplo o MINOS, usado pelo pacote MATLAB, por exemplo. Outros programas como o LINDO, também oferecem bastantes possibilidades superiores ao solver do

Excel. Todos eles usam o método simplex com implementações adequadas para determinados tipos de modelos.

6.1 Resolução de um problema com quatro variáveis de decisão com o solver do Excel.

A TecniBOLA, foi consultada acerca da possibilidade de produzir, em regime de subcontratação, dois novos tipos de bolas: uma bola de Handebol, a Andebala, e uma bola de pólo aquático, a Poley. Os gestores da TecniBOLA após analisarem a proposta, consideraram que esta oferecia margens de lucro interessantes, pelo que decidiram realizar um novo estudo de otimização dos seus recursos, verificando se existiria uma vantagem efetiva em produzir a Andebala e a Poley em detrimento dos seus próprios produtos. Decidiram para isso utilizar o Excel.

Na tabela seguinte sintetizam-se as informações necessárias para realizar o novo estudo:

Recurso por bola \ Bola		Voleitok	Catechumbo	Andebala	Poley	Disponibilidade para amanhã
Câmara de ar	[uni]	1	1	1	1	25
Operação de Costura	[min]	9	25	7	8	480
Operações de Finalização	[min]	11	6	11	10	240
Lucro	[€]	10	6.5	8	9	

Tabela 2: Informações de quantidade e de lucro.

Como sempre é necessário obter a formulação matemática do problema. Seguindo os passos já ilustrados anteriormente esta pode ser enunciada como:

$$\begin{aligned}
&Z = Maximizar: && 10.x_1 + 6,5.x_2 + 8.x_3 + 9.x_4 \\
&Sujeita\ \ a: && x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 \leq 25 \\
& && 9.x_1 + 25.x_2 + 7.x_3 + 8.x_4 \leq 480 \\
& && 11.x_1 + 6.x_2 + 11.x_3 + 10.x_4 \leq 240 \\
& && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\ e\ \ x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Com x_1, x_2, x_3 e x_4, sendo as variáveis de decisão, referentes ao número de bolas a produzir por dia dos tipos: Voleitok, Cate chumbo, Ande bala, Poley, respectivamente.

Introduzindo na folha de cálculo esta formulação, de forma semelhante à já mostrada, obtém-se que:

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$17	Z	0	225.5

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$5	Voleitok	0	18
$C$5	Catechumbo	0	7
$D$5	Andebala	0	0
$E$5	Poley	0	0

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$F$10	Câmara de ar Em Uso	25	$F$10<=$H$10	Binding	0
$F$11	Operação de Costura Em Uso	337	$F$11<=$H$11	Not Binding	143
$F$12	Operações de Finalização Em Uso	240	$F$12<=$H$12	Binding	0

Figura 6: Valores

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Voleitok	18	0	10	1.916666667	0.375
$C$5	Catechumbo	7	0	6.5	3.5	1.045454545
$D$5	Andebala	0	-2	8	2	1E+30
$E$5	Poley	0	-0.3	9	0.3	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$10	Câmara de ar Em Uso	25	2.3	25	3.235294118	3.181818182
$F$11	Operação de Costura Em Uso	337	0	480	1E+30	143
$F$12	Operações de Finalização Em Uso	240	0.7	240	35	44.6875

Figura 7: Resultado final;

O Excel permitiu concluir que a proposta feita à TecniBOLA na realidade não oferece maior benefício. Em suma, os preços propostos face ao custo de produção dos novos produtos não oferecem vantagem em relação a atual produção.

Conclusão

A programação linear é uma ferramenta eficaz na otimização de objetivos (custo, perdas, etc...) em processos industriais, entre outros. Para tal iniciamos um estudo de como modelar matematicamente um problema, observando seus objetivos, restrições e limitações. Uma questão importante refere-se a dificuldade de modelar matematicamente um problema real. Tal dificuldade leva a desprezar algumas restrições tendo como conseqüência uma solução ótima do problema modelado e não-ótima do problema real.

A seguir alguns métodos de solução são propostos, tais como o método simplex e o método Excel solver. Mais profundamente estudamos o método solver do Excel resolvendo um problema prático de uma empresa que fabrica bolas. Modelamos matematicamente o problema desta indústria, resolvemos graficamente e fizemos a análise de sensibilidade encontrando os possíveis valores que as variáveis podem atingir sem modificar (diminuir) o valor ótimo da função objetivo.

Vale observar que a solução ótima de um problema linear pode não ser trivial, principalmente se o número de variáveis aumentarem drasticamente. Para superar este problema utilizamos um coeficiente de tolerância para a solução ótima, ou seja, aceitamos soluções até 5% da solução ótima, diminuindo assim a quantidade de iterações e o tempo necessários para encontrar tais soluções.

Finalmente, observamos que o uso adequado da programação linear pode gerar altos lucros. Embora não seja tarefa fácil a modelagem matemática de grande maioria dos problemas reais, é fundamental para se obter uma solução representativa.

REFERÊNCIAS

PUCCINI, A. L., & PIZZOLATO, N. D. (1990). Programação Linear – Editora Livros Técnicos e Científicos Conceitos, 2ª. Edição.

TAVARES, L. V., & CORREIA, F. N. (1999). Otimização Linear e não Linear – Conceitos, Métodos e Algoritmos. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

SILVA, Prof. L. S. (2006). Fundamentos da Programação Linear, acedido em Janeiro 13, 2007 em http://www.agais.com/ms0106_programacao_linear.pdf

INDG (2005). Programação Linear, acedido em Janeiro 13, 20 http://wpww.indg.com.br/po/prog_linear.asp

Wikipedia (2007). Programação Linear, acedido em Janeiro 13, 2007 em http://pt.wikipedia.org/wiki/Programa%C3%A7%C3%A3o_linear

MUROLO, Afrânio Carlos, "*Pesquisa Operacional*", Ed. Atlas, 1995.

CONVERSE, Alvin O; " Otimização", São Paulo, EDART, 1977.

Microsoft MS Excel, utilitário Solver.

FOURER, Robert; Gregory, John W. "*Linear Programming FAQ*" (1997).

Spyros Reveliotis, *An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm*

Wayne State University – Industrial and Manufacturing Department, *Linear Programming,* August 1997.

FrontSYS, *Help for Microsoft Excel Solver Users*